GRUNDZÜGE

DER

ANTIKEN UND MODERNEN

ALGEBRA

DER

LITTERALEN GLEICHUNGEN

VON

LUDWIG MATTHIESSEN,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU ROSTOCK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

I. M.
Irving Stringham

„Der eroberte Besitz ist nur ein sehr unbeträchtlicher Theil von dem, was bei fortschreitender Thätigkeit und gemeinsamer Ausbildung die freie Menschheit in den kommenden Jahrhunderten erringen wird.“ *Kosmos.*

Vorwort.

Nach der Neugestaltung, welche die Theorie der algebraischen Formen in den letzten Decennien unter den Händen von Hesse, Sylvester, Cayley, Salmon, Hermite, Aronhold, Clebsch und Gordan erfahren hat, entsprang die Veröffentlichung des gegenwärtigen Werkes dem Wunsche, die Resultate jener Arbeiten auf einem speciellen Gebiete einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen. Bei der Wahl einer übersichtlichen und leichtfasslichen Darstellung dieser Grundlinien der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen glaubte ich derjenigen, welche ich in meiner im Jahre 1866 veröffentlichten kleinen Schrift, betitelt: „Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen", befolgt habe, den Vorzug geben zu müssen. Die vorliegenden Grundzüge umfassen eine systematische Darstellung der Theorie, der historischen Entwickung der Disciplin und des gemeinsamen, die Methoden, welche die Auflösung der algebraischen Gleichungen, speciell der Gleichungen der ersten vier Grade, zum Gegenstande haben, innerlich mit einander verknüpfenden Princips. Ueberall aber und selbst in denjenigen Abschnitten, in welchen die Resultate der Forschungen der sogenannten modernen Algebra eine eingehende Berücksichtigung finden, tritt das Hauptproblem der antiken Algebra in den Vordergrund, nämlich diejenigen Werthe der Variabeln zu bestimmen, welche einer vorgelegten algebraischen Function den Werth Null ertheilen. Denn bekanntlich haben es die Untersuchungen der sogenannten modernen Algebra im strengen Sinne dieser Disciplin nur selten mit Gleichungen zu thun und werden die Methoden ihrer Auflösung nur nebensächlich behandelt. Vielmehr ist der Hauptgegenstand dieses neuen Zweiges der algebraischen Analysis die Entdeckung derjenigen Eigenschaften einer binären Form, welche insbesondere durch lineare Transformationen unveränderlich bleiben, deren genaue Kenntniss aber für ein tieferes Studium der Theorie der algebraischen Gleichungen in ihrer gegenwärtigen Ausbildung unerlässlich ist.

Von der Darstellung blieben aus theils theoretischen, theils praktischen Gründen die Näherungsmethoden einstweilen ausgeschlossen. Von besonderem Werth für jeden Bearbeiter dieses Feldes, namentlich für den Historiker, erschien mir die Aufstellung eines chronologisch geordneten Verzeichnisses der Gesammtlitteratur, welches bis jetzt vermisst wurde und ohne Zweifel mancher Ergänzungen bedarf. Für minder unvollständig halte ich die in dem vierten, fünften, sechsten und siebenten Abschnitte enthaltenen Methoden der directen Auflösungen der Gleichungen der ersten vier Grade, von denen gegen drei Centurien beschrieben werden und zu welchen kaum Neues wird hinzugefügt werden können.

Rostock, im April 1878.

Ludwig Matthiessen.

Inhalt.

I. Abschnitt. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

II. Abschnitt. Von den Transformationen der Gleichungen und den symmetrischen Functionen der Wurzeln.

V. Abschnitt. Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Combination.

I. Das Princip der Methode und ihre Mittel.

II. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

I. Form der Gleichungen mit einer und mit zwei Unbekannten. — Polynome. — Begriff der Wurzeln.

§ 1. Definition der algebraischen Formen und Gleichungen.

Wenn eine algebraische Function $f(x)$ oder X den Werth Null hat und nach fallenden, ganzen und positiven Potenzen der Hauptgrösse x geordnet ist, also die Form

$$X = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots + T = 0$$

hat, so soll dies als die allgemeine Form einer geordneten algebraischen Gleichung des n^{ten} Grades mit einer Unbekannten angesehen werden. Wird der Coefficient des ersten Gliedes durch Division mit A auf die Einheit reducirt, so erhält man die einfachere Form der Gleichung:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0,$$

welche wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen.

Die Coefficienten $a, b, \ldots t$ sind bestimmte Buchstaben- oder Zahlengrössen, welche in der Folge immer als reelle vorausgesetzt werden sollen. Mit Rücksicht auf diese Verschiedenheit der Coefficienten pflegt man litterale und numerische Gleichungen von einander zu unterscheiden. Die Coefficienten $a, b, c, \ldots$ können positiv und negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational, und auch zum Theil gleich Null sein; t heisst das Absolutglied der Gleichung.

Die Normalgleichung kann der Kürze wegen mit $X = 0$ bezeichnet werden. Die Function X ist das Polynom der Gleichung und zwar eine rationale Function von x.

Für gewisse Eigenschaften der algebraischen Gleichungen ist es von Vortheil, dieselben unter der Form homogener Polynome zweier Unbekannten x und y zu betrachten, und zwar mit Hinzufügung der Binomialcoefficienten zu den aufeinander folgenden Gliedern. Ein solches Polynom hat die Form:

$$ax^n + \binom{n}{1} b x^{n-1} y + \binom{n}{2} c x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{1} s x y^{n-1} + t y^n.$$

Nach Cayley ist die symbolische Bezeichnung hierfür:

$$(a, b, c, \ldots t) \widehat{\;} (x, y)^n,$$

und die Benennung „binäres Polynom". In einem speciellen Falle kann y gleich der Einheit und der Werth des Polynoms gleich Null sein; man hat alsdann eine Gleichung vom n^{ten} Grade mit einer Unbekannten, also:

$$(a, b, c, \ldots t) \widehat{\;} (x, 1)^n = 0.$$

§ 2. Begriff der Wurzel einer algebraischen Gleichung.

Jede Grösse von allgemeiner Beschaffenheit oder jeder Zahlenwerth, sei er reell oder complex von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, welcher für x substituirt das Polynom X gleich Null macht oder der Gleichung $X = 0$ Genüge leistet, heisst eine Wurzel der Gleichung.

Eine Gleichung auflösen bedeutet, ihre Wurzeln suchen oder alle Werthe bestimmen, welche der gegebenen Gleichung genügen. Die allgemeine Auflösung einer litteralen oder einer numerischen Gleichung würde bestehen müssen in der Bestimmung einer geeigneten aus sämmtlichen Coefficienten zusammengesetzten Function. Bei den Gleichungen der ersten vier Grade kann dies Problem durch verschiedene Methoden immer gelöst werden. Dagegen ist eine Auflösung der vollständigen litteralen Gleichungen höherer Grade nicht weiter möglich. Die Unmöglichkeit, die allgemeinen algebraischen Gleichungen von höherem Grade als dem vierten aufzulösen, haben Ruffini, Abel u. A. bewiesen. Man ist deshalb und auch aus practischen Gründen frühzeitig bemüht gewesen, die Wurzeln numerischer Gleichungen aller Grade durch Versuche und approximativ zu berechnen. Diese Näherungsmethoden setzen die Kenntniss einer Reihe von allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen voraus, welche zunächst im Folgenden entwickelt werden sollen, ehe wir zur Darstellung der Methoden der directen und der approximativen Auflösung der Gleichungen selbst schreiten.

II. Binomische und trinomische Factoren des Polynoms.

§ 3. Theilbarkeit des Polynoms durch Binomialfactoren.

Sind α, β, γ, . . . verschiedene Werthe von der Beschaffenheit, dass sie für x in die Gleichung substituirt derselben genügen, so ist offenbar:

$$x - \alpha = 0, \quad x - \beta = 0, \quad x - \gamma = 0, \text{ u. s. w.}$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen wird offenbar ein nach Potenzen von x geordnetes Polynom erhalten, welches die Wurzeln α, β, γ, . . . besitzt. Diese Bemerkung führt uns zu dem folgenden Theoreme.

Sind x_1, x_2, x_3, . . . die Wurzeln der algebraischen Gleichung $X = 0$, so ist das Polynom X durch jede der Differenzen $x - x_1$, $x - x_2$, u. s. w. ohne Rest theilbar. Der Beweis dieses Theorems kann auf verschiedene Art geführt werden.

1. Beweis. Angenommen, man dividire die Function

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

durch $x - x_1$ und die Division ginge nicht auf, so ist der Quotient X_1 eine Function von x vom nächst niedrigeren Grade, also etwa:

$$X_1 = x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \cdots + S,$$

wobei der Rest T kein x mehr enthält, so dass man hat:

$$X = (x - x_1)(x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \cdots + S) + T = 0.$$

Da nun $x = x_1$ oder $x - x_1 = 0$ ist, so folgt hieraus sofort $T = 0$. Es kann also bei der Division ein Rest nicht bleiben.

2. Beweis. Es sei x_1 eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so ist gemäss der Definition der Wurzel:

$$X_\alpha = x_1^n + ax_1^{n-1} + bx_1^{n-2} + \cdots + sx_1 + t = 0.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von der gegebenen erhält man:

$$(x^n - x_1^n) + a(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + s(x - x_1) = 0.$$

Diese Gleichung ist bekanntlich durch $x - x_1$ theilbar. Nun ist

X_α eine Grösse, welche nach ihrer Subtraction von X einen Theil des Absolutgliedes t bilden muss, weil sie kein x enthält. Da sie aber gleich Null ist, so wird durch die Subtraction derselben die Beschaffenheit der Function X nicht geändert; d. h. sie muss selbst durch $x - x_1$ theilbar sein.

Ebenso nun wie die Function X durch $x - x_1$ theilbar ist, muss sie es auch sein durch $x - x_2$, $x - x_3$, u. s. w. Diese Binome sind also der Reihe nach auch Factoren des jedesmaligen Quotienten. Mittels fortgesetzter Division durch diese Binomialfactoren lässt sich also der Grad des Polynoms fortwährend erniedrigen in dem Grade, als es die Mannigfaltigkeit der Wurzeln x_1, x_2, x_3 u. s. w. gestattet.

Hieraus ergibt sich denn, dass das Problem, gegebene algebraische Gleichungen aufzulösen allgemein gefasst darin besteht, die möglichen Differenzen $x - x_1$, $x - x_2$, u. s. w. zu bestimmen, durch welche das Polynom X oder die auf Null gebrachte Gleichung ohne Rest theilbar ist. Diese Differenzen müssen gleich Null sein und ihre Subtrahenden sind Wurzeln der Gleichung.

Es möge noch gezeigt werden, wie die Division des Polynoms durch einen seiner Binomialfactoren bewerkstelligt wird.

Das gegebene Polynom sei:

$$X = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots Sx + T = 0,$$

und der Binomialfactor $x - \alpha$. Nach ausgeführter Division wird man ein neues Polynom von der Form

$$X_1 = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + rx + s$$

erhalten und einen Rest t, der kein x mehr enthält.

Man hat alsdann:

$$X = X_1(x - \alpha) + t.$$

Nach ausgeführter Multiplication des zweiten Polynoms mit $x - \alpha$ erhält man:

$$\begin{array}{r|r|r|r} ax^n + \quad b & x^{n-1} + \quad c & x^{n-2} + \cdots + \quad s & x + \quad t \\ - \alpha a & - \alpha b & - \alpha r & - \alpha s \end{array}$$

und nach Vergleichung dieses Polynoms mit dem gleichwerthigen X eine Reihe von Bestimmungsgleichungen für die unbestimmten Coefficienten $a, b, c, \ldots t$, nämlich:

$$\begin{aligned}
a &= A, \\
b &= \alpha a + B, \\
c &= \alpha b + C, \\
&\;\;\vdots \\
t &= \alpha s + T.
\end{aligned}$$

Ist α eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so muss t verschwinden.

1. Zahlenbeispiel. Das Polynom

$$2x^5 - 17x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 29x - 6$$

durch das Binom $x - 7$ zu dividiren.

Man findet:

$$\begin{aligned}
a &= +2, & d &= +2.7 - 18 = -4, \\
b &= +2.7 - 17 = -3, & e &= -4.7 + 29 = +1, \\
c &= -3.7 + 23 = +2, & f &= +1.7 - 6 = +1.
\end{aligned}$$

Schema der Berechnung:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & +2 & -17 & +23 & -18 & +29 & -6 \\
+7 & +0 & +14 & -21 & +14 & -28 & +7 \\
\hline
 & +2 & -3 & +2 & -4 & +1 & (+1)
\end{array}$$

Der Quotient ist $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ und der Rest $+1$. Die Rechnung kann *in manu**) ausgeführt werden.

2. Zahlenbeispiel. Das Polynom

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0$$

durch $x - 2$ zu dividiren.

Schema der Berechnung:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
\multirow{2}{*}{2} & 1 & -1 & -13 & +13 & +36 & -36 \\
 & 1 & +1 & -11 & -9 & +18 & (0)
\end{array}$$

Der Quotient ist $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ und der Rest 0. Mithin ist 2 eine Wurzel der Gleichung.

Lehrsatz. Ist x_2 eine zweite Wurzel der Gleichung $X = 0$ und $X = (x - x_1)\,X_1$, so ist $x - x_2$ ein Factor von X_1 und x_2 eine Wurzel der Gleichung $X_1 = 0$, so dass man erhält:

$$X = (x - x_1)(x - x_2)\,X_2 = 0.$$

---

*) Dieser im Mittelalter gebräuchliche Ausdruck heisst so viel als im Sinne, oder im Kopfe, arab. *hawâï* = Luft.

Beweis. Da die Wurzeln im Allgemeinen verschieden sind, so kann der Ausdruck X oder $(x - x_1) X_1$ nur dann durch die Substitution von $x = x_2$ gleich Null werden, wenn $X_1 = 0$ ist. Da ferner $x - x_2$ kein Factor von $x - x_1$ ist, so muss es ein Factor des Quotienten X_1 sein; also x_2 eine Wurzel von $X_1 = 0$. Durch Division des Quotienten X_1 erhält man demnach ein Polynom vom $n - 2^{\text{ten}}$ Grade:

$$X_2 = x^{n-2} + a_1 x^{n-3} + \cdots + q_1 x + r_1,$$

welches gleich Null gesetzt eine dritte Wurzel x_3 haben kann und so fort. Die Bildung der Quotienten numerischer Gleichungen wird in folgender Weise bewerkstelligt.

Zahlenbeispiel. $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$. Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = -1, -1, 3, \frac{1}{3}$. Man dividire also zunächst durch $x - x_1 = x + 1$, dann durch $x + 1$, durch $x - 3$ und $x - \frac{1}{3}$.

Schema der Berechnung:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -4 & -14 & -4 & +3 \\
-1 & 3 & -7 & -7 & +3 & (0) \\
-1 & 3 & -10 & +3 & (0) & \\
+3 & 3 & -1 & (0) & & \\
+\frac{1}{3} & 3 & (0) & & &
\end{array}$$

Die einzelnen Quotienten der Division sind also:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 \\
X_2 &= 3x^2 - 10x + 3 \\
X_3 &= 3x - 1 \\
X_4 &= 3.
\end{aligned}$$

§ 4. Die complexen Wurzeln und die trinomischen Factoren.

Lehrsatz. Ist $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ eine complexe Wurzel der Gleichung $X = 0$, so ist auch der conjugirte Werth $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel, und das Polynom X durch den trinomischen Factor

$$x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) = \left(x - \alpha - \beta\sqrt{-1}\right)\left(x - \alpha + \beta\sqrt{-1}\right)$$

ohne Rest theilbar.

Wenn man nämlich für x zunächst den ersteren Werth $\alpha + \beta i$ in die Function X einsetzt, so erhält man nach Vereinigung der reellen und imaginären Glieder eine Gleichung von der Form:

$$X = P + Q\beta\sqrt{-1} = 0,$$

wobei P und Q nur gerade Potenzen von β enthalten. Die Gleichung bedingt aber wegen der Heterogeneität der beiden Glieder P und $Q\beta\sqrt{-1}$ die Existenz der beiden besondern Gleichungen:

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Substituirt man für x den zweiten Werth $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, so ändert sich offenbar nur das Vorzeichen von Q, und es ist wegen $P = 0$ und $Q = 0$ auch noch:

$$P - Q\beta\sqrt{-1} = 0.$$

Es genügt also zugleich der Werth $\alpha - \beta i$ der Gleichung $X = 0$, d. h. der Ausdruck $\alpha - \beta i$ ist ebenfalls eine Wurzel.

Lehrsatz. Sind die Coefficienten einer Gleichung rational und $\alpha + \sqrt{\beta}$ eine Wurzel derselben, so ist auch $\alpha - \sqrt{\beta}$ eine solche, vorausgesetzt, dass α eine rationale Grösse und β kein vollständiges Quadrat ist.

Der Beweis kann in derselben Weise geführt werden, wie für complexe Wurzeln. Substituirt man zunächst für x den Werth $\alpha + \sqrt{\beta}$ in das Polynom X, so erhält man nach Vereinigung der rationalen und irrationalen Grössen eine Gleichung von der Form:

$$X = P + Q\sqrt{\beta} = 0,$$

wo P und Q nur ganze Potenzen von β enthalten. Wegen der Heterogeneität der beiden Glieder kann jene Gleichung nur bestehen unter der Annahme:

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Folglich gilt ausserdem die Gleichung:

$$P - Q\sqrt{\beta} = 0,$$

und diese entsteht offenbar, wenn man in X für x auch noch den Werth $\alpha - \sqrt{\beta}$ einsetzt. Es genügt also dieser Werth gleichfalls der Gleichung $X = 0$ und ist deshalb ein Wurzelwerth derselben.

III. Von der Continuität der algebraischen Functionen. — Derivirte.

§. 5. Die Derivirten.

Lehrsatz. In jeder Gleichung $X = 0$ ist das Polynom X für alle endlichen und reellen Werthe von x eine continuirliche Function.

Angenommen es ändere sich die Hauptgrösse x um die Grösse d so wird X oder $f(x)$ übergehen in

$$f(x+d) = (x+d)^n + a(x+d)^{n-1} + b(x+d)^{n-2} + \cdots + t,$$

oder nach Potenzen von d geordnet:

$$\begin{aligned} f(x+d) = f(x) + d &\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n-1}{1} a x^{n-2} + \cdots + s\right] \\ + d^2 &\left[\binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n-1}{2} a x^{n-3} + \cdots + r\right] \\ + d^3 &\left[\binom{n}{3} x^{n-3} + \binom{n-1}{3} a x^{n-4} + \cdots + q\right] \\ + &\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + d^n&; \end{aligned}$$

oder mit einer einfacheren Bezeichnung:

$$f(x+d) = f(x) + \frac{d}{1} f'(x) + \frac{d^2}{1.2} f''(x) + \frac{d^3}{1.2.3} f'''(x) + \cdots$$

Die Polynome $f'(x)$, $f''(x)$, u. s. w. heissen die derivirten Functionen, auch wol kurz Derivirte oder Ableitungen der Hauptfunction $f(x)$.

Da nun für endliche und reelle Werthe von x die Derivirten weder imaginär noch unendlich werden, so ist auch die Aenderung

$$f(x+d) - f(x),$$

der Function für unendlich kleine Werthe von d selbst unendlich klein, d. h. die Function X kann sich nicht sprungweise (discontinuirlich) ändern, z. B. von einem endlich positiven Werthe zu einem endlich negativen übergehen. Findet dieser Uebergang statt, so kann es nur durch die Scheide dieser Zahlengebiete, also nur durch Null hindurch geschehen und zwar bei einem bestimmten Werthe von x, z. B. $x = \alpha$, welcher offenbar eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ sein muss.

§ 6. Von den Grenzen der Wurzeln einer Gleichung.

Lehrsatz. Für jede Gleichung $X = 0$ lässt sich stets ein solcher Werth von x angeben, dass für ihn und grössere Werthe das erste Glied des Polynoms absolut genommen grösser ist, als der übrige Theil desselben.

Es lässt sich nämlich zeigen, dass, wenn ohne Rücksicht auf das Vorzeichen m der grösste Coefficient des Polynoms

$$X = x^n + ax^{n-1} + \cdots \pm mx^{n-y} + \cdots + t$$

ist, für die Annahme $x \overline{>} m + 1$ das erste Glied x^n grösser als die Summe aller übrigen Glieder wird. Denn es ist unzweifelhaft:

$$mx^{n-1} + mx^{n-2} + \cdots\cdots + m > ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots\cdots + t,$$

oder, was dasselbe ist:

$$m\,\frac{x^n - 1}{x - 1} > ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots\cdots + t\,.$$

Weil nun $x - 1 \overline{>} m$ angenommen wird, so ist um so mehr:

$$x^n - 1 > ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots\cdots + t\,,$$

und

$$x^n > ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots\cdots + t\,.$$

Lehrsatz. Ist m der grösste Coefficient einer algebraischen Gleichung $X = 0$, so wird für $x \overline{>} m + 1$ das Polynom X positiv und für $x \overline{<} -(m + 1)$ positiv oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden.

IV. Von der Existenz der Wurzeln und binomischen Factoren.

§ 7. Von den Kennzeichen einer Wurzel.

Lehrsatz. Setzt man in die Function X oder $f(x)$ für x nach einander zwei reelle Werthe p und q ein und erhält dabei Resultate $f(p)$ und $f(q)$ von entgegengesetzten Vorzeichen, so muss die Function wenigstens für einen zwischen p und q liegenden reellen Werth verschwinden, also zwischen p und q mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $X = 0$ liegen.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus der Continuität der ganzen algebraischen Functionen.

Wenn $f(p)$ und $f(q)$ verschiedene Vorzeichen haben, so können mehrere Wurzeln zwischen p und q liegen. Jedoch kann dies nur eine ungerade Anzahl sein. Sind dagegen die Vorzeichen der Resultate der Substitution, nämlich von $f(p)$ und $f(q)$ gleich, so kann es zwischen p und q nur eine gerade Anzahl von Wurzeln geben.

Jedes Polynom X von gerader Ordnung, dessen Wurzeln sämmtlich einander gleich sind, muss für alle reellen Werthe von x stets dasselbe Vorzeichen behalten.

Wenn sich kein reeller Werth für x angeben lässt, durch welchen das Polynom X zum Verschwinden gebracht wird, so ist X positiv für jeden beliebigen positiven oder negativen Werth von x. Umgekehrt wenn der Werth von X für alle möglichen reellen Werthe von x positiv bleibt, so besitzt die Gleichung $X = 0$ keine reellen Wurzeln.

Nach einem in § 6 bewiesenen Satze ist nämlich die Function X positiv für $x > m + 1$, wo m den absoluten Werth des grössten Coefficienten des Polynoms bezeichnet. Liesse sich ein anderer Werth für x finden, der die Function negativ machte, so gäbe es offenbar zwischen beiden einen Wurzelwerth, was der Annahme widerspricht. Was die Umkehrung dieses Satzes betrifft, so ist bereits auseinander gesetzt worden, dass zur Existenz einer Wurzel erforderlich ist, dass die Function ihr Vorzeichen wechseln könne.

§ 8. Von den Kennzeichen reeller Wurzeln.

Lehrsatz. Jede Gleichung von ungerader Ordnung hat mindestens eine reelle Wurzel, und ihr Vorzeichen ist dem des Absolutgliedes t entgegengesetzt.

Setzt man nämlich zuerst $x = 0$, so erhält man $f(0) = \pm t_1$, wo t_1 den absoluten Werth von t bezeichnet. Setzt man darauf $x = \mp (m + 1)$, so erhält $f(x)$ einen Werth, dessen Vorzeichen mit dem von x^n übereinstimmt, also $X = \mp T$. Möge also t positiv oder negativ sein, jedenfalls wird durch eine der Substitutionen $-(m + 1)$ oder $(m + 1)$ das Vorzeichen der Function geändert. Ist das letzte Glied positiv, so wird X durch einen zwischen 0 und $-(m + 1)$ liegenden Werth von x zum Verschwinden gebracht, und ist das letzte Glied negativ, durch einen zwischen 0 und $+(m + 1)$ liegenden Werth. Es liegt also zwischen 0 und $\mp (m + 1)$ jedenfalls mindestens eine reelle Wurzel.

Lehrsatz. Jede Gleichung von gerader Ordnung hat wenigstens zwei reelle Wurzeln von entgegengesetzten Vorzeichen, wenn das letzte Glied negativ ist.

Denn setzt man zuerst wieder $x = 0$, so wird $f(0) = -t_1$; setzt man darauf $x = \mp (m+1)$, so wird in beiden Fällen das erste Glied x^n der Gleichung $X = 0$ positiv. Mithin liegt eine negativ reelle Wurzel zwischen 0 und $-(m+1)$ und eine positiv reelle Wurzel zwischen 0 und $+(m+1)$.

Lehrsatz. Jede Gleichung von gerader Ordnung, deren Absolutglied positiv ist, ihre Coefficienten mögen reell oder auch zum Theil complex sein, hat wenigstens *eine* reelle oder complexe Wurzel.

1. **Beweis***). Es sei:

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0,$$

worin n gerade und t positiv ist.

Setzt man $x = y\sqrt[n]{-1}$, so geht das Polynom über in:

$$-y^n + a(\sqrt[n]{-1})^{n-1}y^{n-1} + b(\sqrt[n]{-1})^{n-2}y^{n-2} + \cdots + t = 0.$$

Es ist nun allgemein:

$$\sqrt[n]{-1} = p + q\sqrt{-1},$$

wo p und q reelle Grössen sind, unter denen eine auch Null sein kann; ferner ist jede Potenz von $p + q\sqrt{-1}$ wieder von derselben Form. Führt man diese Ausdrücke in die y Gleichung ein und kehrt sämmtliche Vorzeichen in die entgegengesetzten um, so erhält man:

$$Y = y^n - a(p_1 + q_1\sqrt{-1})y^{n-1} - b(p_2 + q_2\sqrt{-1})y^{n-2} - \cdots - t = 0.$$

Diese Gleichung ist von gerader Ordnung und das Absolutglied wesentlich negativ.

Man setze nun als erste Substitution in der Gleichung $Y = 0$ die Hauptgrösse $y = u + v\sqrt{-1}$, wo u und v positiv sein mögen, so wird das Polynom Y:

$$\begin{aligned} &u^n + a_1 u^{n-1} + b_1 u^{n-2} + \cdots + s_1 u + t_1 \\ &\quad + (a_2 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \cdots + s_2 u + t_2)\sqrt{-1} \\ &\quad = A + B\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Hier sind die neuen Coefficienten Functionen von $a, b, c, \ldots.$ sowie von p_1, q_1, p_2, q_2, u. s. w. endlich noch von n und v. Die

*) Beweis von A. Burg. Jahrb. des k. k. polyt. Inst. Bd. XVII. Ein scharfsinniger Beweis des Satzes von Laplace wird in § 48 mitgetheilt werden.

Coefficienten sind sämmtlich endlich, so lange die letzteren Grössen es bleiben. Darunter ist:

$$a_2 = nv - aq_1 .$$

Demnach ist es möglich, v immer so zu wählen, dass das erste Glied $a_2 u^{n-1}$ positiv ausfällt.

Da das erste Glied des reellen Theiles A, nämlich u^n wesentlich positiv ist, so kann man u so gross annehmen, dass die beiden ersten Glieder von A und B positiv werden und zwar grösser als die Summe aller übrigen Glieder. Daraus folgt, dass durch eine geeignete Substitution $y = u + v\sqrt{-1}$ das Polynom

$$Y = A + B\sqrt{-1}$$

positiv gemacht werden kann.

Setzt man nun als zweite Substitution in Y die Hauptgrösse $y = 0$, so wird das Polynom $Y = -t$, also negativ. Nun ist Y eine continuirliche Function, weil A und B es sind; also liegt zwischen $y = 0$ und $y = u + v\sqrt{-1}$ wenigstens eine Wurzel von der Form $u_1 + v_1\sqrt{-1}$, wobei $u_1 < u$ und $v_1 < v$ ist.

Substituirt man ferner $y = u_1 + v_1\sqrt{-1}$ in der Annahme:

$$x = y\sqrt[n]{-1} = y(p + q\sqrt{-1}),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} x &= (u_1 + v_1\sqrt{-1})(p + q\sqrt{-1}) \\ &= (u_1 p - v_1 q) + (u_1 q + v_1 p)\sqrt{-1} \\ &= \alpha + \beta\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

wo α und β reelle Grössen sind. Dies ist also eine wirklich vorhandene Wurzelform der angenommenen Gleichung. Ist $\beta = 0$, so ist die Wurzel reell, ist $\alpha = 0$, so ist sie imaginär; sind endlich α und β von Null verschieden, so ist die Wurzel complex.

2. Beweis*). Setzt man in die gegebene Gleichung

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

so lässt sich das Polynom auf die Form

$$X = A + B\sqrt{-1}$$

bringen. Es lässt sich zeigen, dass stets reelle Werthe für α und β möglich sind, für welche A und B verschwinden, so dass $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung ist. Der Nachweis setzt nun die Kenntniss einiger Theoreme der Differentialrechnung voraus.

*) Man sehe Burg, Compendium der höheren Mathem. §. 708. Anm.

Setzt man nämlich $A^2 + B^2 = Z$, so kann Z für reelle Werthe von α und β nur positiv sein; im besonderen Falle auch Null. Es muss also für α und β reelle Werthe geben, für welche Z ein Minimum wird. Um diese zu finden, hat man nach den Regeln dieser Untersuchungen die ersten Derivirten nach α und β gleich Null zu setzen, also:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) = 0;$$

oder wenn man den Werth von Z einsetzt, die Differenzirung vornimmt und die Gleichungen durch 2 dividirt:

$$A\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right) + B\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

$$A\left(\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) + B\left(\frac{\partial B}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination entweder:

$$\text{I.} \quad A = 0, \quad B = 0,$$

oder:

$$\text{II.} \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \beta}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

wofür man auch setzen kann:

$$\text{II.} \quad F(\alpha, \beta) = 0.$$

Die Gleichung II. enthält zwei Grössen α und β, von denen die eine willkürlich ist; mithin kann sie kein Minimum für Z liefern. Setzt man nämlich für α unendlich viele, continuirlich auf einander folgende Werthe $\alpha_1, \alpha_1 + \omega, \alpha_1 + 2\omega$ u. s. w. ein, wo ω eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, so findet man aus II., falls sie nach β lösbar ist, eben so viele continuirlich auf einander folgende zugehörige Werthe $\beta_1, \beta_1 + \omega_1, \beta_1 + \omega_2$ u. s. w., welches andeuten würde, dass Z unendlich viele continuirlich auf einander folgende Minima besässe. Es müsste demnach Z eine constante Grösse für alle möglichen Werthe von α und β sein, was absurd ist, da A und B Functionen von α und β sind. Ebenso wenig würde die Gleichung II. ein Mininum von Z liefern, wenn sie keine zu $\alpha_1, \alpha_1 + \omega$ u. s. w. zugehörigen Werthe von β besässe. Dagegen nun entsprechen die Gleichungen I. allen Bedingungen eines Minimums von Z; also da Z nothwendig ein Minimum haben muss und die entsprechenden Werthe α und β die Gleichungen I. zur Folge haben, so folgt aus der Gleichung:

$$X = A + B\sqrt{-1} = 0,$$

dass es einen Werth $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ für x gibt, welcher der Gleichung $X = 0$ Genüge leistet oder eine Wurzel derselben ist.

Aus den drei vorangehenden Lehrsätzen folgt endlich, dass jede algebraische Gleichung der angenommenen Form wenigstens eine Wurzel hat. Dies Theorem führt uns zu zwei wichtigen Theoremen der höheren Algebra, welche im folgenden Paragraphen bewiesen werden sollen.

§ 9. Von der Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Lehrsatz. Jede Gleichung vom n^{ten} Grade hat mindestens n Wurzeln.

Sei α die Wurzel, welche der gegebenen Gleichung

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

nothwendig zukommt, so ist $x - \alpha$ ein Factor derselben, also:

$$\begin{aligned} X &= (x-\alpha)X_1 \\ &= (x-\alpha)(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + s_1) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird aber ausser durch $x - \alpha = 0$ erfüllt durch die andere:

$$X_1 = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + s_1 = 0.$$

Ist β die Wurzel, welche dieser Gleichung nothwendig zukommt, so ist:

$$\begin{aligned} X_1 &= (x-\beta)X_2 \\ &= (x-\beta)(x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + b_2 x^{n-4} + \cdots + r_2) = 0 \end{aligned}$$

und

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)X_2 = 0.$$

Fährt man in die Schlussfolgerung fort, so kommt man durch stetige Erniedrigung der Ordnung des Polynoms auf einen Quotienten X_{n-1}, welcher ein Binom ist von der Form $x + a_{n-1}$, so dass man erhält:

$$X_{n-2} = (x-\sigma)(x + a_{n-1}) = 0$$

und

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdot(x-\sigma)(x + a_{n-1}) = 0.$$

Der letzte Quotient liefert also die Wurzel $x = -a_{n-1} = \tau$. Da nun das Polynom für jede der Substitutionen $x = \alpha, \beta, \gamma \cdots \tau$ verschwindet, so folgt daraus, dass die Gleichung wenigstens n Wurzeln hat.

Lehrsatz. Jede Gleichung vom n^{ten} Grade hat **nur** n Wurzeln.

Seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots \tau$ die n nothwendigen Wurzeln der gegebenen Gleichung vom n^{ten} Grade, so müsste, falls es noch eine $n+1^{\text{te}}$ von jenen verschiedene Wurzel, z. B. ω gäbe, dieselbe für x substituirt das Polynom zu Null machen, also:

$$X = (\omega - \alpha)(\omega - \beta)(\omega - \gamma) \cdots\cdots (\omega - \tau) = 0\,.$$

Dies würde aber nur dann möglich sein, wenn einer der n Binomialfactoren z. B. $\omega - \gamma = 0$ wäre. Daraus würde folgen $\omega = \gamma$, d. h. es muss ω schon unter den n Wurzeln enthalten sein. Die Gleichung vom n^{ten} Grade hat also **nur** n Wurzeln und keine mehr.

Führt man also die Division des Polynoms X durch den Binomialfactor $x - \alpha$ aus, so erhält man eine Gleichung von nächstniedrigerem Grade, welche die übrigen $n-1$ Wurzeln liefert.

V. Bildung des Polynoms einer Gleichung aus Binomialfactoren und Beziehung der Coefficienten zu den Wurzeln.

§ 10. Von der Bildung der Coefficienten aus den Wurzeln.

Sind sämmtliche Wurzeln einer Gleichung bekannt, so lässt sich umgekehrt das Polynom herstellen dadurch, dass man sämmtliche Binomialfactoren $x - \alpha$, $x - \beta$, u. s. w. mit einander multiplicirt.

Für numerische Wurzeln lässt sich leicht durch Umkehrung des in § 3 beschriebenen Divisionsverfahrens die Gleichung bilden. Angenommen, die Bildung des vollständigen Polynoms sei fortgeschritten bis zum Polynom

$$X_k = x^k + a_1 x^{k-1} + b_1 x^{k-2} + \cdots\cdots + k_1 = 0\,,$$

und der hinzutretende Binomialfactor sei $x - \alpha$, so ist:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= (x - \alpha)\, X_k \\ &= x^{k+1} \begin{array}{l|l|l|l} + a_1 & x^k + b_1 & x^{k-1} + \cdots\cdots + k_1 & x \\ - \alpha & \quad - \alpha a_1 & \quad - \cdots\cdots - \alpha i_1 & - \alpha k_1\,. \end{array} \end{aligned}$$

Ist die Wurzel gebrochen von der Form $\frac{\alpha}{m}$, so multiplicire man mit $mx - \alpha$, also:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= (mx - \alpha) X_k \\ &= mx^{k+1} \begin{array}{l|l|l|l} + ma_1 & x^k + mb_1 & x^{k-1} + \cdots + mk_1 & x \\ - \alpha & \quad - \alpha a_1 & \quad - \cdots - \alpha i_1 & - \alpha k_1\,. \end{array} \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel. Die Wurzeln einer Gleichung vom fünften Grade seien $-1, 2, 3, -\frac{3}{4}, -5$.

Schema der Berechnung:

1	1	$+1$				
-2	1	-1	-2			
-3	1	-4	$+1$	$+6$		
$+\frac{3}{4}$	4	-13	-8	$+27$	$+18$	
$+5$	4	$+7$	-73	-13	$+143$	$+90$

Für litterale Wurzeln wird diese Aufgabe sehr erleichtert durch die gesetzmässigen Beziehungen, welche zwischen den Wurzeln und den zu bestimmenden Coefficienten der Gleichung $X = 0$ bestehen.

Ist die gegebene Gleichung

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \cdots + t = 0,$$

so sind die Coefficienten $a, b, c \cdots t$ die auf einander folgenden Summen der Combinationen der Wurzeln $x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_n$ zu allen Classen und zwar mit abwechselnden Vorzeichen also:

$$X = x^n - \underset{1}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n)\, x^{n-1} + \underset{2}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n)\, x^{n-2} - \underset{3}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n) x^{n-3}$$
$$+ \cdots + (-1)^n \underset{n}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0.$$

Andere abgekürzte Bezeichnungen hierfür sind:

$$X = x^n - [x_1]x^{n-1} + [x_1 x_2]x^{n-2} - [x_1 x_2 x_3]x^{n-3} + \cdots$$
$$+ (-1)^n [x_1 x_2 \ldots x_n] = \sum_{n=0}^{n=n} \underset{n}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Die speciellen Werthe dieser Symbole sind:

$$\underset{1}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n) = [x_1] = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a,$$

$$\underset{2}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n) = [x_1 x_2] = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = +b,$$

. . . .

$$\underset{n}{\Sigma C}(x_1 x_2 \ldots x_n) = [x_1 x_2 \ldots x_n] = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n\, t.$$

Demnach ist:

der negative Coefficient des zweiten Gliedes gleich der Summe aller Wurzeln,

der Coefficient des dritten Gliedes gleich der Summe der Producte aus je zwei Wurzeln, das Absolutglied t gleich dem Producte aller Wurzeln, und zwar positiv genommen, wenn die Gleichung von gerader Ordnung ist, und negativ genommen, wenn sie von ungerader Ordnung ist. Hat die Gleichung zwei Wurzeln x_1 und x_2, so ist

$$X = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0\,;$$

hat sie drei Wurzeln x_1, x_2, x_3, so ist

$$X = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0\,.$$

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu beweisen, kann man sich der Kästner'schen Beweismethode bedienen, indem man vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade auf den n^{ten} schliesst. Es sei also das Product von $n-1$ Binomialfactoren:

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) = x^{n-1} - \underset{1}{\Sigma C}\, x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \underset{n-1}{\Sigma C}$$

und der folgende Binomialfactor $x - x_n$, so erhält man durch Multiplication des Polynoms mit demselben:

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n - (\underset{1}{\Sigma C} + x_n)x^{n-1}$$

$$+ (\underset{2}{\Sigma C} + x_n \underset{1}{\Sigma C})x^{n-2} - (\underset{3}{\Sigma C} + x_n \underset{2}{\Sigma C})x^{n-3} + \cdots + (-1)^n x_n \underset{n-1}{\Sigma C}\,.$$

Rücksichtlich der Classe der Combinationen sind die Vorzeichen unverändert geblieben, rücksichtlich der Coefficienten des neuen Polynoms ist

der zweite $\underset{1}{\Sigma C} + x_n$ von der ersten Dimension, gleich $\underset{1}{SC}$;

der dritte $\underset{2}{\Sigma C} + x_n \underset{1}{\Sigma C}$ von der zweiten Dimension, gleich $\underset{2}{SC}$;

u. s. w.; endlich

der letzte $x_n \underset{n-1}{\Sigma C}$ von der n^{ten} Dimension, gleich $\underset{n}{SC}$.

Da nun vorhin gezeigt ist, dass das Gesetz für drei Binomialfactoren gilt, so gilt es auch für vier, fünf u. s. f.; folglich allgemein.

Das Gesetz der Bildung der Gleichungen aus Binomialfactoren liefert n Gleichungen mit n Unbekannten zwischen den Wurzeln und den Coefficienten. Sie sind indess im Allgemeinen zu einer directen Bestimmung der Wurzeln nicht geeignet, da sie zur Berechnung der einen Wurzel durch Elimination der $n-1$ übrigen nur die ursprüngliche Gleichung wiedergeben. Man kann diese wichtigen Relationen jedoch durch geeignete Combinationen der unbekannten Wurzeln zu neuen Unbekannten mit Vortheil zur Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden anwenden, wie im Abschnitt über die Combinationsmethoden gezeigt werden wird.

VI. Von den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln. — Cartesischer oder Harriot'scher Lehrsatz.

§ 11. Von den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln.

Lehrsatz. Wenn in einer Gleichung $X = 0$ die Vorzeichen der Glieder von gerader Ordnung geändert werden, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln denen der ursprünglichen mit entgegengesetzten Vorzeichen gleich sind.

Die gegebene Gleichung sei:

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \cdots + t = 0.$$

Setzt man $-x$ an die Stelle von x, so erhält man offenbar, n möge gerade oder ungerade sein, die folgende Gleichung:

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots + (-1)^n t = 0.$$

Lehrsatz. Sind sämmtliche Wurzeln einer Gleichung $X = 0$ positiv, so haben die Coefficienten abwechselnde Vorzeichen; sind sämmtliche Wurzeln negativ, so sind die Coefficienten ohne Ausnahme positiv.

Der erste Theil dieses Satzes folgt aus § 10, der zweite Theil aus der Form des Products:

$$X = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) \cdots (x + \tau) = 0.$$

Bei lauter positiven reellen Wurzeln hat die Gleichung also lauter Zeichenwechsel (changes, Variationen); bei lauter negativen reellen Wurzeln lauter Zeichenfolgen (continuations, Permanenzen). Diese Sätze lassen sich jedoch keineswegs umkehren.

§ 12. Harriot'scher oder Cartesischer Lehrsatz*).

Eine Gleichung $X = 0$, diese möge vollständig oder unvollständig sein, kann nicht mehr reelle positive Wurzeln haben als Zeichen-

*) Harriot, Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas. Fol. Londin. 1631 (Posthum).

Cartesius, Geometria a R. d. C. De natura aequationum. p. 70. Amstelod. 1683. — Gauss, in Crelle's Journ. Bd. III. S. 1.

wechsel und eine vollständige Gleichung nicht mehr reelle negative Wurzeln als Zeichenfolgen. Sind sämmtliche Wurzeln reell, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln gleich der Anzahl der Zeichenwechsel, die Anzahl der negativen Wurzeln gleich der der Zeichenfolgen.

Ist die Gleichung $X = 0$ vom n^{ten} Grade, so hat sie $n + 1$ Glieder und darum eine $n$fache Aufeinanderfolge von Vorzeichen. Es stimmt dieselbe also zunächst mit der Anzahl der Wurzeln überein.

Es sei nun X_1 das Product aller binomischen und aus je zwei conjugirten complexen Wurzeln gebildeten trinomischen Factoren, von denen die binomischen allein die negativen Wurzeln enthalten; ausserdem mögen α, β .. die übrigen positiven Wurzeln bezeichnen, so ist das vollständige Polynom:

$$X = X_1(x - \alpha)(x - \beta) \ldots .$$

Wenn sich aber zeigen lässt, dass das Theilpolynom X_1, einerlei welche die Reihenfolge seiner Vorzeichen auch sein möge, nach der Multiplication mit $x - \alpha$ in ein Polynom von wenigstens einem Zeichenwechsel mehr, nach der weiteren Multiplication mit $x - \beta$ in ein Polynom von wenigstens zwei Zeichenwechseln mehr übergegangen ist, so wird der Satz in Betreff der positiven Wurzeln bewiesen sein.

Es nun das Theilpolynom:

$$X_1 = x^m - ax^{m-1} + cx^{m-3} - dx^{m-4} - - - + - + ,$$

also die Aufeinanderfolge der Zeichen:

$$+ - + + - - - - + - + .$$

Man entwickele das Product $X_1(x - \alpha)$, wobei sich die Zeichen der Partialproducte auf folgende Art combiniren:

$$\begin{array}{l} + - + + - - - - + - + \\ \underline{\; - + - - + + + + - + -} \end{array}$$

woraus sich $+ - + \pm - \mp \mp \mp + - + -$

als die theils bestimmten, theils unbestimmten Vorzeichen der Glieder des Productes ergeben. Es sind in diesem concreten Falle die Zeichen von vier Gliedern zweifelhaft, wenn das Polynom X_1 elf Glieder hat. Vergleichen wir aber die Zeichen des neuen Polynoms mit denen des gegebenen, so ergibt sich daraus*), dass:

*) Man vergl. Hymers, Treatise on the theory of algebraical equations. § 55.

a) für jede Gruppe der Zeichenfolgen eine gleiche Anzahl entsprechender Gruppen von zweifelhaften Zeichen existirt;

b) die beiden Zeichen, welche unmittelbar vor und hinter den zweifelhaften Zeichen stehen, entgegengesetzt sind;

c) ein überzähliges Zeichen am Ende auftritt, entgegengesetzt dem des letzten Gliedes vom Polynom X_1.

Also im ungünstigsten Falle, im welchem alle zweifelhaften Zeichen $+$ oder $-$ sind, können wir wegen b) die oberen Zeichen nehmen. Dann sind alle Vorzeichen der Coefficienten des Products dieselben wie im Polynom X_1 und ausserdem ist am Ende ein Zeichenwechsel hinzugefügt. Würden wir statt der oberen die unteren Zeichen annehmen, so wären die Vorzeichen sämmtlich die entgegengesetzten des Polynoms X_1 mit Ausnahme des ersten, durch welches in diesem Falle ebenfalls wenigstens ein Zeichenwechsel zu den bereits vorhandenen hinzutreten würde.

Fährt man in der Multiplication mit den Binomialfactoren $x-\beta, x-\gamma \ldots.$ fort, so kommt jedesmal wenigstens ein Zeichenwechsel hinzu, wodurch der erste Theil des Satzes bewiesen ist.

Verwandelt man das Polynom X in ein anderes $\overline{X}$, dessen Wurzeln von entgegengesetzten Vorzeichen sind, so erscheinen die negativen Wurzeln der Gleichung $X=0$ als positive der Gleichung $\overline{X}=0$, und diese muss daher wenigstens eben so viele Zeichenwechsel darbieten, als X negative Wurzeln besitzt.

Da nun also jede positive Wurzel der Gleichung $X=0$ wenigstens einen Zeichenwechsel und jede negative Wurzel für sich wenigstens einen solchen in $\overline{X}=0$ erwarten lässt, so kommt dies dem Sinne nach überein mit dem Satze, dass die Gleichung $X=0$ nicht mehr positive und negative reelle Wurzeln haben kann, als X und $\overline{X}$ beziehlich Zeichenwechsel enthalten.

Ist die Gleichung $X=0$ vollständig, d. h. ist kein Coefficient derselben gleich Null, so sind in ihr eben so viele Zeichenfolgen als in $\overline{X}=0$ Zeichenwechsel, und darum hat die Gleichung $X=0$ unter derselben Voraussetzung eben so viele Zeichenfolgen als negative Wurzeln.

Weil nun bei lauter reellen Wurzeln die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln gleich der Summe der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen ist, so ergibt sich aus dem Hauptsatze, dass die Anzahl der positiven Wurzeln genau gleich der der Zeichenwechsel; die Anzahl der negativen Wurzeln gleich der der Zeichenfolgen ist.

Ist die Gleichung $X = 0$ incomplet, so hat sie nicht mehr reelle negative Wurzeln, als die Anzahl der unmittelbaren und durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen vermehrt um die Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel. Es ist nämlich evident, dass jeder wirklich vorhandene und jeder durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel in $\overline{X}$ eine ähnliche Zeichenfolge in X voraussetzt, z. B.:

$$\overline{X}:\ + - - - \cdot\cdot + - + + \cdots\cdots - \cdots + \cdot -$$
$$X:\ + + - + \cdot\cdot + + + - \cdots\cdots - \cdots + \cdot -,$$

dass dagegen jedem durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel in $\overline{X}$ ein gleicher in X entspricht.

In dem vorstehenden concreten Falle hat:

a) $\overline{X}$ drei unmittelbare und zwei durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel; ausserdem zwei durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene;

b) X drei unmittelbare und zwei durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenfolgen; ausserdem zwei durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel.

Ist in einer Gleichung vom n^{ten} Grade zufolge des Hauptsatzes die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens p, die der negativen höchstens q, also die Anzahl sämmtlicher reellen Wurzeln höchstens $p + q$, so ist die Anzahl der complexen Wurzeln mindestens $n - p - q$.

§ 13. Von der Anzahl der complexen Wurzeln.

Lehrsatz. Jede Gleichung $X = 0$, welcher eine gerade Anzahl p auf einander folgender Glieder fehlt, hat mindestens p complexe Wurzeln. Ist dagegen die Anzahl der auf einander folgenden fehlenden Glieder ungerade, so hat sie mindestens $p \pm 1$ complexe Wurzeln, je nachdem die fehlende Gruppe zwischen zwei Gliedern von demselben oder dem entgegengesetzten Zeichen sind.

Die gegebene Gleichung sei:

$$x^n + ax^{n-1} + \cdots + fx^{m+p+1} + kx^m + \cdots + sx + t = 0.$$

In ihr fehlt die Gruppe:

$$gx^{m+p} \text{ bis } ix^{m+1}$$

und das vorangehende Glied hat mit dem nachfolgenden dasselbe Zeichen. Schreibt man nun dasselbe Zeichen vor alle fehlenden Glieder, so wird die Anzahl der Zeichenwechsel etwa ω, die aller Zeichenfolgen $n - \omega$ sein. Schreibt man dagegen die Zeichen aller fehlenden Glieder der Gruppe abwechselnd $-$ und $+$, so dass p oder $p + 1$ neue Zeichenwechsel eingeführt werden, je nachdem p gerade oder ungerade ist, also:

$$p \text{ gerade:} \quad \begin{array}{l} + + \cdots\cdot + \overbrace{+ + + +} + \cdots\cdots +, \\ + + \cdots\cdot + - + - + + \cdots\cdots +, \end{array}$$

$$p \text{ ungerade:} \quad \begin{array}{l} + + \cdots\cdot + \overbrace{+ + +} + \cdots\cdots\cdot +, \\ + + \cdots\cdot + - + - + \cdots\cdots\cdot +, \end{array}$$

so sind offenbar $n - \omega - p$ oder $n - \omega - p - 1$ die Grenzen der Zahl der negativen Wurzeln. Deshalb kann es höchstens ω positive und beziehungsweise $n - \omega - p$ oder $n - \omega - p - 1$ negative Wurzeln, d. h. höchstens $n - p$ oder $n - p - 1$ reelle Wurzeln geben. Folglich ist die Anzahl der complexen Wurzeln mindestens p oder $p + 1$, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Wenn die fehlende Gruppe zwischen zwei Gliedern von entgegengesetzten Vorzeichen steht; z. B. die angedeuteten Veränderungen folgende Systeme ergeben:

$$p \text{ gerade:} \quad \begin{array}{l} + + \cdots\cdot + \overbrace{+ + + +} - \cdots\cdots +, \\ + + \cdots\cdot + - + - + - \cdots\cdots +, \end{array}$$

$$p \text{ ungerade:} \quad \begin{array}{l} + + \cdots\cdot + \overbrace{+ + +} - \cdots\cdots +, \\ + + \cdots\cdot + - + - - \cdots\cdots +, \end{array}$$

so werden für p gerade wiederum p neue Zeichenwechsel eingeführt; hingegen für p ungerade nur $p - 1$ neue Zeichenwechsel. Deshalb sind in diesem Falle $n - \omega - p$ oder $n - \omega - p + 1$ die Grenzen der Zahl der negativen Wurzeln und die Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln beziehungsweise $n - p$ oder $n - p + 1$; d. h. die Minimalzahl der complexen Wurzeln ist p oder $p - 1$, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Ist also $p = 1$, so ist die Anzahl der complexen Wurzeln wenigstens zwei, wenn das Glied zwischen einer Zeichenfolge fehlt;

dagegen ist sie unentschieden, wenn das Glied zwischen einem Zeichenwechsel fehlt. Ist z. B. die Form der Gleichung:

$$x^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + T = 0$$

und $B > 0$, so hat sie wenigstens zwei complexe Wurzeln.

Allgemein, wenn in einer defecten Gleichung die fehlenden Glieder zuerst mit solchen Vorzeichen ergänzt werden, dass die Gesammtzahl der Zeichenwechsel möglichst klein ist und gleich ω; sodann mit solchen Vorzeichen, dass die Gesammtzahl der Zeichenfolgen möglichst klein ist und gleich q, so ist die Anzahl der positiven reellen Wurzeln höchstens ω, die der negativen reellen Wurzeln höchstens q; mithin die Anzahl der complexen Wurzeln mindestens $n - \omega - q$.

Zweiter Abschnitt.

Von den Transformationen der Gleichungen und den symmetrischen Functionen der Wurzeln.

I. Vergrösserung und Verkleinerung der Wurzeln durch Addition und Subtraction. — Lineare Variation.

§ 14.

Gegeben sei die Gleichung:

$$f(x) = X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0\,.$$

Dieselbe lässt sich stets in eine andere verwandeln, deren Wurzeln um z kleiner sind, so dass in der neuen Gleichung:

$$Y = y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \cdots + T = 0$$

die Wurzel $y = x - z$ und $x = y + z$ wird. Wenn nun, was in der Folge häufig geschieht, durch die Substitution $x = y + z$ oder $x' + z$ die gegebene Gleichung in eine neue $Y = 0$ verwandelt wird, so soll die Grösse z mit dem Namen Variation bezeichnet und die neue Gleichung in y oder x' die variirte Gleichung oder kurz die Variirte genannt werden.

Durch Substitution und Entwickelung der Glieder der Gleichung $Y = 0$ erhält man nun:

$$A = \binom{n}{1} z + a \qquad = f^{n-1}(z) : (n-1)!\,,$$

$$B = \binom{n}{2} z^2 + \binom{n-1}{1} az + b \qquad = f^{n-2}(z) : (n-2)!\,,$$

. . . .

$$T = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \cdots + sz + t = f(z).$$

Wenn man die transformirte Gleichung nach steigenden Potenzen der neuen Unbekannten y ordnet, so kann man mit Einführung der derivirten Functionen, wie in § 5, schreiben:

$$f(y+z) = f(z) + f'(z)\frac{y}{1} + f''(z)\frac{y^2}{1.2} + \cdots$$
$$+ f^{n-1}(z)\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + y^n = 0.$$

Zur Substitution der linearen Function $y+\alpha$ an die Stelle der Wurzel x einer numerischen Gleichung kann man folgendes einfachere und bequemere Verfahren einschlagen. Die gegebene Gleichung und die Variirte sind:

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0,$$
$$Y = (x-\alpha)^n + A(x-\alpha)^{n-1} + B(x-\alpha)^{n-2} + \cdots + S(x-\alpha) + T = 0.$$

Da das Polynom Y durch $x-\alpha$ getheilt den Rest T und den Quotienten

$$Y_1 = (x-\alpha)^{n-1} + A(x-\alpha)^{n-2} + \cdots + S$$

gibt, so muss auch das Polynom X durch $x-\alpha$ getheilt den Rest T und den Quotienten Y_1 geben.

Wird der Quotient Y_1 abermals durch $x-\alpha$ getheilt, so erhält man den Rest S und den Quotienten

$$Y_2 = (x-\alpha)^{n-2} + A(x-\alpha)^{n-3} + \cdots + R$$

u. s. f. Die Transformation kann also einfach durch eine wiederholte Division des Polynoms bewerkstelligt werden. Die Ausführung ist bereits in § 3 demonstrirt worden.

Zahlenbeispiel. Die Gleichung:

$$x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzelwerth um 1 kleiner ist.

	1	0	— 2	4	— 8
1	1	1	— 1	3	(— 5)
	1	2	1	(4)	
	1	3	(4)		
	1	(4)			

Die Variirte ist demnach:

$$y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y - 5 = 0.$$

Ist der Coefficient des ersten Gliedes nicht 1, so ist das Verfahren ganz ähnlich.

Zahlenbeispiel. Die Gleichung:

$$3x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 54x + 127 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln y um 2 grösser sind. Die Variation ist also $x = y - 2$.

	3	-13	$+22$	-54	$+127$
-2	3	-19	$+60$	(-174)	
	3	-25	$(+110)$		
	3	(-31)			

Die Transformirte ist:

$$3y^4 - 31y^3 + 110y^2 - 174y + 127 = 0.$$

II. Vergrösserung und Verkleinerung der Wurzeln durch Multiplication und Division.

§ 15.

Wenn eine Gleichung in eine andere verwandelt werden soll, deren Wurzeln das $m$fache von denen der gegebenen betragen, so setze man in der gegebenen:

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0$$

$y:m$ an die Stelle von x. Multiplicirt man zur Wegschaffung der Quotienten die Gleichung jetzt mit m^n, so lautet die Transformirte:

$$y^n + may^{n-1} + m^2by^{n-2} + \cdots + m^{n-1}sy + m^nt = 0.$$

Man wendet diese Transformation dazu an, den ersten Coefficienten auf die Einheit zu reduciren oder vorkommende gebrochene Coefficienten verschwinden zu lassen.

Aufgabe. Den Coefficienten des ersten Gliedes der Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

auf die Einheit zu bringen.

Die Wurzeln der Gleichung seien $x_1x_2x_3\ldots x_n$. Alsdann hat die Gleichung

$$a_0y^n + a_0a_1y^{n-1} + a_0^2a_2y^{n-2} + \cdots a_0^na_n = 0$$

oder

$$y^n + a_1y^{n-1} + a_0a_2y^{n-2} + \cdots + a_0^{n-1}a_n = 0$$

die Wurzeln:

$$a_0x_1, \quad a_0x_2, \quad \ldots \quad a_0x_n.$$

Aufgabe. Die Gleichung:

$$x^n + \frac{a_1}{b_1}x^{n-1} + \frac{a_2}{b_2}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Coefficienten ganz sind.

Sind die Wurzeln $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ und m der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der Divisoren $b_1 b_2 b_3 \ldots$, so hat die Gleichung

$$y^n + \frac{m\,a_1}{b_1} y^{n-1} + \frac{m^2 a_2}{b_2} y^{n-1} + \cdots + \frac{m^n a_n}{b_n} = 0$$

die Wurzeln:

$$m x_1\,, \quad m x_2\,, \quad \ldots \quad m x_n\,,$$

und alle Coefficienten sind ganze.

In vielen Fällen erhält man indess auf die angegebene Art nicht diejenige Gleichung, welche die möglichst kleinen Coefficienten hat. Es ist klar, dass man, um dieselbe zu erlangen, m so zu bestimmen hat, dass

$$\frac{m}{b_1}, \quad \frac{m^2}{b_2}, \quad \frac{m^3}{b_3}, \ldots \frac{m^r}{b_r}$$

gleich einem Ganzen seien. So z. B. genügt der Gleichung:

$$x^3 - \frac{4}{3} x^2 - \frac{3}{8} x + \frac{5}{72} = 0$$

die Zahl $m = 12$ statt $m = 72$, und die Transformirte ist:

$$y^3 - 16 y^2 - 54 y + 120 = 0.$$

Sind die numerischen Coefficienten einer Gleichung so beschaffen, dass sie einen gemeinschaftlichen Factor in irgend welcher Potenz besitzen, so kann man unter Umständen die Wurzel der Gleichung durch Division verkleinern.

Zahlenbeispiel. Setzt man in der vorigen Gleichung:

$$x^3 - \frac{4}{3} x^2 - \frac{3}{8} x + \frac{5}{72} = 0,$$

$m = 72$, so ist die Transformirte:

$$y^3 - 96 y^2 - 1944 y + 25920 = 0,$$

oder:

$$y^3 - 3 \,.\, 2^5 y^2 - 3^5 \,.\, 2^3 y + 3^4 \,.\, 2^6 \,.\, 5 = 0.$$

Die Wurzeln lassen sich durch $3 \,.\, 2$ verkleinern, wobei man erhält $y = 3 \,.\, 2\eta$ und:

$$\eta^3 - 2^4 \eta^2 - 2 \,.\, 3^3 \eta + 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 0.$$

III. Wegschaffung des zweiten oder eines anderen Gliedes der Gleichungen. — Varianten und Retrovarianten.

§ 16. Die Reductionsformel.

Eine wichtige Anwendung der in § 14 angegebenen Transformation ist die Wegschaffung irgend eines Zwischengliedes der Gleichungen. Die Variation bietet oft ein Mittel zu einer bequemeren Auflösung derselben dar. Um die Wegschaffung des zweiten Gliedes zu bewerkstelligen, setze man in der Variirten $Y = 0$ (§ 14):

$$A = \binom{n}{1} z + a = f^{n-1}(z) : (n-1)! = 0.$$

Daraus folgt $z = -\frac{a}{n}$ und $x = y - \frac{a}{n}$ d. h. die Wurzeln müssen um $\frac{a}{n}$ vergrössert werden.

Zahlenbeispiel. Aus der Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen.

Hier ist $a = -6$, $n = 3$, also $z = 2$ und $x = y + 2$. Man bilde folgendes Schema:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -6 & +4 & -7 \\ 2 & 1 & -4 & -4 & (-15) \\ & 1 & -2 & (-8) & \\ & 1 & (0) & & \end{array}$$

Die reducirte Gleichung ist $y^3 - 8y - 15 = 0$ und ihre Wurzeln sind sämmtlich um 2 kleiner, als die der ursprünglichen. Soll das r^{te} Glied fortgeschafft werden, so hat man die Wurzel zu verkleinern um eine Grösse z, welche bestimmt wird aus der Gleichung:

$$\frac{f^{n-r+1}(z)}{(n-r+1)!} = \binom{n}{r-1} z^{r-1} + a\binom{n-1}{r-2} z^{r-2} + b\binom{n-2}{r-3} z^{r-3} + \cdots = 0.$$

Um das letzte Glied wegzuschaffen, muss man natürlich die gegebene Gleichung selbst auflösen. Die Wegschaffung des r^{ten} Gliedes kann also auf $r-1$ verschiedene Arten geschehen und es gibt wenigstens eine reelle Variation z, wenn r gerade ist. Ist aber r ungerade und die Wurzeln der Gleichung

$$f^{n-r+1}(z) = 0$$

sämmtlich complex, so kann die Gleichung $X = 0$ nicht reducirt werden, ohne dass unter den Coefficienten der reducirten Gleichung complexe Coefficienten auftreten. Wenn r grösser als $\frac{1}{2}(n+1)$ oder $\frac{1}{2}(n+2)$ ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist, so lässt sich die Bestimmungsgleichung in z reduciren auf den $n-r+1^{\text{ten}}$ Grad. Dividirt man nämlich die Gleichung $X=0$ durch x^n und schreibt sie in der Form:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n+\frac{s}{t}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\frac{r}{t}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{1}{t}=0,$$

so lassen sich durch die Variation $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+z$ auch die Glieder mit den Coefficienten s, r, u. s. w. fortschaffen.

§ 17. Die Varianten und Retrovarianten einer Gleichung.

Wenn man eine Gleichung so variirt, dass entweder das zweite oder das vorletzte Glied verschwindet, was durch eine lineare Transformation geschieht, so erhalten die übrigbleibenden Glieder Coefficienten, welche wir im ersten Falle Varianten, im zweiten Retrovarianten nennen wollen. Sie stehen im Zusammenhang mit gewissen anderen Functionen der Coefficienten, die wir später kennen lernen. Wir gehen zunächst aus von der gewöhnlichen Form:

$$X=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+sx+t=0,$$

und setzen zur Wegschaffung des zweiten Gliedes $x=y-\frac{1}{n}a$. Entwickelt man die Potenzen der Binome und ordnet die Gleichung nach der Hauptgrösse y, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&y^n-\left[\binom{n}{2}\frac{a^2}{n^2}-b\right]y^{n-2}\\
&+\left[2\binom{n}{3}\frac{a^3}{n^3}-\binom{n-2}{1}\frac{a}{n}b+c\right]y^{n-3}\\
&-\left[3\binom{n}{4}\frac{a^4}{n^4}-\binom{n-2}{2}\frac{a^2}{n^2}b+\binom{n-3}{1}\frac{a}{n}c-d\right]y^{n-4}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Soll ausser dem zweiten noch das r^{te} Glied verschwinden, so bedarf es dazu der Auflösung einer Gleichung vom $r-1^{\text{ten}}$ Grade*).

*) Tschirnhaus erfand eine Methode, durch Substitution einer Function neuer Unbekannten beliebig viele Glieder einer Gleichung zu eliminiren.

Von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der algebraischen Gleichungen sind nun diejenigen Formen, welche die Coefficienten der Variirten annehmen, wenn man von der Cayley'schen Form des Polynoms ausgeht.

Nach § 1 ist diese:

$$f(x) = ax^n + \binom{n}{1} bx^{n-1} + \binom{n}{2} cx^{n-2} + \cdots + \binom{n}{1} sx + t = 0,$$

oder mit der eingeführten symbolischen Bezeichnung:

$$(a, b, c, \ldots s, t) \frown (x, 1)^n = 0.$$

Die transformirte Gleichung lautet in diesem Falle:

$$\begin{aligned} y^n &- \binom{n}{2} \frac{1}{a^2} (b^2 - ac)\, y^{n-2} \\ &+ \binom{n}{3} \frac{1}{a^3} (2b^3 - 3abc + a^2 d)\, y^{n-3} \\ &- \binom{n}{4} \frac{1}{a^4} (3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e)\, y^{n-4} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots = 0. \end{aligned}$$

Die Variation ist nun $-\frac{b}{a}$ und $x = y - \frac{b}{a}$, also $y = \frac{ax + b}{a}$. Setzt man dies in die Transformirte ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} a^{n-1} f(x) = (ax+b)^n &- \binom{n}{2} (b^2 - ac)\,(ax+b)^{n-2} \\ &+ \binom{n}{3} (2b^3 - 3abc + a^2d)\,(ax+b)^{n-3} \\ &- \binom{n}{4} (3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e)\,(ax+b)^{n-4} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder kurz:

$$(ax+b)^n - \binom{n}{2} V_2 (ax+b)^{n-2} + \binom{n}{3} V_3 (ax+b)^{n-3} - \cdots \pm V_n = 0.$$

Die Coefficienten V_2, V_3, V_4, u. s. f. heissen der Reihe nach die quadratische, kubische, biquadratische Variante u. s. f.

Entwickelt man wiederum die Gleichung nach Potenzen von x, so erhält man durch Vergleichung der einzelnen Coefficienten mit denen der ursprünglichen Gleichung die Relationen der Varianten unter einander. Wir erhalten nämlich:

$$a^{n-1}\left[ax^n+\binom{n}{1}bx^{n-1}+\binom{n}{2}cx^{n-2}+\binom{n}{3}dx^{n-3}+\cdots\right]$$
$$=a^nx^n+\binom{n}{1}a^{n-1}bx^{n-1}+\left.\begin{array}{l}\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\\ -\binom{n}{2}V_2a^{n-2}\end{array}\right| x^{n-2}+\left.\begin{array}{l}\binom{n}{3}a^{n-3}b^3\\ -\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}V_2a^{n-3}b\\ +\binom{n}{3}V_3a^{n-3}\end{array}\right| x^{n-3}+\cdots$$

Hieraus ergeben sich folgende Beziehungen zwischen $V_2, V_3, \ldots$.

$$\begin{array}{l}
b^2-V_2=ac,\\
b^3-3bV_2+V_3=a^2d,\\
b^4-6acV_2+4bV_3-V_4=a^3e,\\
b^5-10a^2dV_2+10acV_3-5bV_4+V_5=a^4f,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b^n-\binom{n}{2}a^{n-3}rV_2+\binom{n}{3}a^{n-4}qV_3-\cdots\pm V_n=a^{n-1}t.
\end{array}$$

Wenn das vorletzte Glied verschwinden soll, so dividire man die Gleichung durch x^n, ordne die Glieder entgegengesetzt und substituire:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-\frac{s}{t},\quad \frac{t}{y}=\frac{t}{x}+s.$$

Alsdann ist:

$$\begin{aligned}
t^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{t}{x}+s\right)^n&-\binom{n}{2}\left(s^2-rt\right)\left(\frac{t}{x}+s\right)^{n-2}\\
&+\binom{n}{3}\left(2s^3-3tsr+t^2q\right)\left(\frac{t}{x}+s\right)^{n-3}\\
&-\binom{n}{4}\left(3s^4-6ts^2r+4t^2sq-t^3p\right)\left(\frac{t}{x}+s\right)^{n-4}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Coefficienten dieser Reducirten heissen Retrovarianten, welche wir mit einem doppelten Index bezeichnen.

1. Beispiel.

$$ax^2+2bx+c=0.$$

Die Reducirte ist:

$$\left(\frac{c}{x}+b\right)^2-\left(b^2-ac\right)=0,$$

und die quadratische Retrovariante der quadratischen Function:

$$V'_{2,2}=b^2-ac=V_2.$$

2. Beispiel.

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

Die Reducirte ist:

$$\left(\frac{d}{x} + c\right)^3 - 3\left(c^2 - bd\right)\left(\frac{d}{x} + c\right) + \left(2c^3 - 3bcd + d^2a\right),$$

und die quadratische Retrovariante der kubischen Function:

$$V'_{2,3} = c^2 - bd,$$

die kubische Retrovariante der kubischen Function:

$$V'_{3,3} = 2c^3 - 3bcd + d^2a.$$

3. Beispiel.

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$

Die Reducirte ist:

$$\left(\frac{e}{x} + d\right)^4 - 6\left(d^2 - ce\right)\left(\frac{e}{x} + d\right)^2$$

$$+ 4\left(2d^3 - 3cde + e^2b\right)\left(\frac{e}{x} + d\right) - \left(3d^4 - 6ed^2c + 4e^2db - e^3a\right)$$

und die quadratische Retrovariante der biquadratischen Function:

$$V'_{2,4} = d^2 - ce,$$

die kubische:

$$V'_{3,4} = 2d^3 - 3cde + e^2b,$$

die biquadratische:

$$V'_{4,4} = 3d^4 - 6ed^2c + 4e^2db - e^3a.$$

IV. Transformation einer Gleichung in die ihrer reciproken Wurzelwerthe. — Reciproke Gleichungen.

§ 18.

Wenn man in der Gleichung:

$$X = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots = 0$$

$\frac{1}{y}$ an die Stelle von x setzt, also:

$$\frac{1}{y^n} + \frac{a}{y^{n-1}} + \frac{b}{y^{n-2}} + \cdots + t = \left(\frac{1}{y} - x_1\right)\left(\frac{1}{y} - x_2\right)\left(\frac{1}{y} - x_3\right)\cdots$$

$$= \left(-1\right)^n \frac{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}{y^n}\left(y - \frac{1}{x_1}\right)\left(y - \frac{1}{x_2}\right)\cdots$$

$$= \frac{t}{y^n}\left(y - \frac{1}{x_1}\right)\left(y - \frac{1}{x_2}\right)\cdots = 0,$$

so erhält man durch Multiplication mit $y^n : t$:

$$y^n + \frac{s}{t} y^{n-1} + \frac{r}{t} y^{n-2} + \cdots + \frac{a}{t} y + \frac{1}{t} = \left(y - \frac{1}{x_1}\right)\left(y - \frac{1}{x_2}\right) \cdots = 0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln die reciproken Wurzeln der ursprünglichen sind.

Setzt man in der transformirten Gleichung x an die Stelle von y und multiplicirt sie mit der gegebenen $X = 0$, so erhält man eine Gleichung von $2n^{\text{ten}}$ Grade, deren Coefficienten vom Anfang und Ende gleich sind, nämlich:

$$x^{2n} + \left(a + \frac{s}{t}\right) x^{2n-1} + \left(b + \frac{r}{t} + a\frac{s}{t}\right) x^{2n-2} + \cdots$$
$$+ \left(a + \frac{s}{t}\right) x + 1 = 0.$$

Man nennt diese Art von symmetrischen Gleichungen reciproke. Sie bleiben nämlich dieselben, wenn man in ihnen $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x setzt. Man darf daraus schliessen, dass sie je zwei Wurzeln von der Form x_1 und $\frac{1}{x_1}$ besitzen. Es ist einleuchtend, dass wenn man jede der Wurzeln $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ mit ihren reciproken Werthen combinirt, jede reciproke Gleichung sich in n trinomische Factoren zerlegen lässt, nämlich:

$$x^2 - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) x + 1 = 0,$$
$$x^2 - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) x + 1 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^2 - \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) x + 1 = 0.$$

Man kann den Begriff der reciproken Gleichungen noch etwas verallgemeinern, indem man solche darunter versteht, deren Transformirte mit der ursprünglichen identisch bleiben, wenn man $\frac{u}{x}$ an die Stelle von x setzt. Die Gleichung hat alsdann die Form:

$$x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \cdots + bu^{n-2}x^2 + au^{n-1}x + u^n = 0,$$

für:

$$x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \cdots + rx^2 + sx + t = 0,$$

und es bestehen also die Relationen:

$$us = at, \quad u^2 r = bt, \quad u^3 q = ct, \; \ldots \; u^{2n} = t^2.$$

Ist im speciellen Falle $u^n = \pm 1$, so folgt aus der letzten Gleichung $t = \pm 1$, und je nach dem Vorzeichen $+$ oder $-$

$$
\begin{array}{llllll}
1) & s = a, & r = b, & q = c, & \dots \\
2) & s = -a, & r = -b, & q = -c, & \dots
\end{array}
$$

d. h. es müssen entweder die correspondirenden Glieder vom Anfang und Ende gezählt, gleich und von gleichem Vorzeichen sein, oder sie müssen gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sein.

Die oben zu Grunde gelegte allgemeine Form der reciproken Gleichungen ist von geradem Grade. Sie wird aber in ihrer Form nicht geändert, wenn man die Wurzel $x = \pm 1$ hinzufügt, wodurch sie eine Gleichung von ungeradem Grade wird. Wenn ferner die Gleichung von geradem Grade $2n$ ist, so gibt es offenbar ein mittelstes Glied mx^n mit der Beziehung $u^n . m = mt$. Dies gibt für $t = -1$ die Beziehung $m = 0$. Wenn daher die Gleichung von geradem Grade ist und die correspondirenden Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben, so darf es kein mittelstes Glied geben.

Da die Wurzeln $+1$ und -1 ihren reciproken Werthen gleich sind, so können sie eine beliebige Anzahl der Wurzeln reciproker Gleichungen bilden, auch für den Fall, dass die Wurzelpaare allgemein x und $\frac{u}{x}$ sind. Dabei sind $x - 1$ oder $x + 1$ die Binomialfactoren, d. h. $+1$ oder -1 die Wurzeln einer Gleichung von ungeradem Grade, jenachdem das letzte Glied -1 oder $+1$ ist; ferner sind stets beide Binomialfactoren $x - 1$ und $x + 1$ vorhanden, d. h. $+1$ und -1 die Wurzeln einer reciproken Gleichung von geradem Grade, wenn das letzte Glied -1 ist.

Wenn demnach diese Factoren eliminirt sind, so wird die reducirte Gleichung in beiden Fällen von geradem Grade mit positivem Endgliede sein.

Die vorstehenden Sätze erweisen sich analytisch auf folgende Art:

1) Die reciproke Gleichung von ungeradem Grade lässt sich schreiben, indem man die correspondirenden Glieder vereinigt:

$$(x^n \pm 1) + a(x^{n-2} \pm 1)\,x + b(x^{n-4} \pm 1)x^2 + \cdots = 0.$$

Da jedes Glied dieses Polynoms durch $x \pm 1$ theilbar ist, so sind ∓ 1 Wurzeln derselben.

2) Die reciproke Gleichung von geradem Grade mit negativem Endgliede — 1 kann ebenso geordnet werden, nämlich:

$$(x^{2n} - 1) + a(x^{2n-2} - 1)\,x + b\,(x^{2n-4} - 1)\,x^2 + \cdots = 0.$$

Dieselbe ist theilbar durch $x^2 - 1$, weswegen $+ 1$ und $- 1$ Wurzeln dieser Gleichung sind.

Die reciproken Gleichungen von gerader Ordnung lassen sich auf eine Gleichung reduciren, deren Grad nur halb so gross ist. Sie enthält nämlich, wie oben gezeigt, lauter trinomische Factoren von der Form:

$$x^2 - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)x + 1 = 0,$$

und noch eine gerade Anzahl von der Form:

$$x^2 - 1 = 0,$$

wenn das Absolutglied $+ 1$ ist; eine ungerade Anzahl dieser Form, wenn dasselbe $- 1$ ist. In dem letzteren Falle lässt sich einer derselben eliminiren; die übrigen geben je zwei und zwei das Product:

$$(x^2 - 1)\,(x^2 - 1) = (x^2 - 2x + 1)\,(x^2 + 2x + 1),$$

also ebenfalls trinomische Factoren der vorhergehenden Art. Man dividire einen jeden derselben durch x und ordne die Glieder wie folgt:

$$x + \frac{1}{x} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = 0,$$

$$x + \frac{1}{x} - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = 0,$$

. . . .

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so erhält man statt sämmtlicher quadratischer Factoren lauter lineare. Ihr Product gibt also eine Gleichung, deren Grad nur halb so gross ist als wie die Gleichung in x.

Um die reciproke Gleichung von gerader Ordnung:

$$x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \cdots + mx^n + \cdots + bx^2 + ax + 1 = 0$$

zu reduciren, dividire man dieselbe durch x^n und setze die von den Enden gleichweit abstehenden Glieder paarweise zusammen, wie folgt:

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + a\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \cdots + m = 0.$$

Man setze $x + \frac{1}{x} = y$ und suche x zu eliminiren, was leicht auf folgende Art bewerkstelligt wird. Es ist:

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) y = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}\right) + \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right),$$

folglich allgemein:

$$\left(x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}\right) = y\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) - \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right).$$

Steigt man von den kleinsten Potenzen zu den höheren aufwärts, so erhält man:

$$x + \frac{1}{x} = y,$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right) = y^2 - 2;$$
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y;$$

u. s. w. u. s. w.;

allgemein:

$$x^m + \frac{1}{x^m} = y^m - m y^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2} y^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} y^{m-6} + \cdots$$

V. Bildung der Gleichungen der Wurzelsummen und Wurzeldifferenzen. — Geminanten und Discriminanten.

§ 19. Die Gleichungen der Wurzelsummen und Wurzeldifferenzen.

Wenn man irgend eine homogene algebraische Function der Wurzeln einer Gleichung annimmt, in welcher nur jedesmal eine bestimmte Anzahl der Wurzeln enthalten sind, so ist durch verschiedene Kunstgriffe möglich eine andere algebraische Gleichung zu bilden, welche alle die möglichen Variationen jener homogenen Functionen als Wurzeln enthält. Handelt es sich darum, eine Gleichung $Y = 0$ zu bilden, deren Wurzeln alle möglichen Summen von je zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, also:

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 + x_3, \quad \text{u. s. w.}$$

so wird die neue Gleichung offenbar vom $\frac{n(n-1)}{1.2}$ten Grade sein, da dies die Anzahl aller Combinationen von n Elementen zur zweiten Klasse ist. Um zur Gleichung $Y = 0$ zu gelangen, müsste man sämmtliche Binomialfactoren:

$$[y - (x_1 + x_2)]\,[y - (x_1 + x_3)] \ldots [y - (x_2 + x_3)] \ldots$$

mit einander multipliciren und das Product gleich Null setzen. Man erhält auf diese Art die Gleichung:

$$y^r + Ay^{r-1} + By^{r-2} + \cdots = 0,$$

wo $r = \binom{n}{2}$ und $A, B, C, \ldots$ gewisse symmetrische Functionen der Wurzeln $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ sind, die sich stets durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen.

Aufgabe. Für die allgemeine kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

die Gleichung der Wurzelsummen zu bilden.

Die Wurzeln der gesuchten Gleichung sind

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 + x_3, \quad y_3 = y_2 + x_3.$$

Durch Multiplication der Binomialfactoren erhalten wir

$$y^3 - 2(x_1 + x_2 + x_3)y^2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3)y - (x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 2x_1x_2x_3) = 0,$$

oder kurz

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0.$$

Es ist demnach folgende Gruppe von Bestimmungsgleichungen vorhanden

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\
x_1x_2x_3 = -c, \\
2(x_1 + x_2 + x_3) = -A, \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = B, \\
x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3 = -C.
\end{gathered}$$

Aus diesen sechs Gleichungen folgt

$$A = 2a, \quad B = a^2 - b, \quad C = ab - c.$$

Die Gleichung der Wurzelsumme ist also

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c) = 0.$$

Für Gleichungen höherer Grade ist dies Verfahren oft mit Schwierigkeiten verknüpft und ohne Kenntniss und Anwendung der Eigenschaften der sogenannten symmetrischen Functionen der Wurzeln der Aufgabe unmöglich.

Es soll deshalb ein anderes einfacheres Verfahren entwickelt werden, wodurch zugleich die Gleichung der Wurzelsummen und der Wurzeldifferenzen erhalten wird.

Die gegebene Gleichung sei

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0,$$

und $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ ihre Wurzeln. Bezeichnet man die Summe zweier Wurzeln x_1 und x_2 mit y, ihre Differenz $x_1 - x_2$ mit z, so ist offenbar

$$x_1 = \frac{1}{2}(y + z), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y - z).$$

Da die Werthe x_1 und x_2 der Gleichung $f(x) = 0$ genügen, so ist

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^n + a\left(\frac{y+z}{2}\right)^{n-1} + b\left(\frac{y+z}{2}\right)^{n-2} + \cdots + t = 0$$

und

$$\left(\frac{y-z}{2}\right)^n + a\left(\frac{y-z}{2}\right)^{n-1} + b\left(\frac{y-z}{2}\right)^{n-2} + \cdots + t = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen z, so erhält man die Gleichung der Wurzelsummen; eliminirt man dagegen y, die Gleichung der Wurzeldifferenzen.

Zur Vereinfachung der Gleichungen setzen wir

$$\frac{1}{2} y = \eta, \quad \frac{1}{2} z = \zeta$$

und schreiben die Gleichungen in folgender Gestalt:

$$(\zeta + \eta)^n + a(\zeta + \eta)^{n-1} + b(\zeta + \eta)^{n-2} + c(\zeta + \eta)^{n-3} + \cdots = 0,$$
$$(\zeta - \eta)^n - a(\zeta - \eta)^{n-1} + b(\zeta - \eta)^{n-2} - c(\zeta - \eta)^{n-3} + \cdots = 0.$$

Werden die Binome entwickelt und nach Potenzen von ζ geordnet, so ergeben sich daraus mit Einführung der derivirten Functionen die beiden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad f(\eta) + f'(\eta)\zeta + f''(\eta)\frac{\zeta^2}{1\,.\,2} + \cdots + f^{n-1}(\eta)\frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} + \zeta^n = 0,$$

$$\text{II.} \quad f(\eta) - f'(\eta)\zeta + f''(\eta)\frac{\zeta^2}{1\,.\,2} - \cdots \mp f^{n-1}(\eta)\frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \pm \zeta^n = 0.$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man zwei andere, welche nur gerade Exponenten der Hauptgrösse enthalten, sich also auf den halben Grad bringen lassen, nämlich

$$\text{III.} \quad f(\eta) + f''(\eta)\frac{\zeta^2}{1\,.\,2} + f^{IV}(\eta)\frac{\zeta^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots = 0,$$

$$\text{IV.} \quad f'(\eta) + f'''(\eta)\frac{\zeta^2}{1.2.3} + f^{V}(\eta)\frac{\zeta^4}{1.2.3.4.5} + \cdots = 0.$$

Fährt man mit der Elimination von ζ fort, so erhält man zuletzt eine Gleichung, welche nur noch η enthält.

Entwickelt man die Binome und ordnet nach Potenzen von η, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{V.}\quad f(\zeta) + f'(\zeta)\eta + f''(\zeta)\frac{\eta^2}{1\,.\,2} + \cdots + \eta^n = 0,$$

$$\text{VI.}\quad f(-\zeta) + f'(-\zeta)\eta + f''(-\zeta)\frac{\eta^2}{1\,.\,2} + \cdots + \eta^n = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen η, so erhält man zuletzt eine Gleichung in ζ, welches die Gleichung der halben Wurzeldifferenzen ist. Dieselbe ist offenbar von doppelt so hohem Grade als die der Wurzelsummen.

Aufgabe. Für die allgemeine kubische Gleichung sowol die Gleichung der Wurzelsummen als der Wurzeldifferenzen nach vorstehender Methode zu bilden.

Es ist

$$\text{I.}\quad \zeta^3 + (3\eta+a)\zeta^2 + (3\eta^2+2a\eta+b)\zeta + (\eta^3+a\eta^2+b\eta+c)=0,$$

$$\text{II.}\quad \zeta^3 - (3\eta+a)\zeta^2 + (3\eta^2+2a\eta+b)\zeta - (\eta^3+a\eta^2+b\eta+c)=0.$$

Durch Addition und Subtraction erhält man weiter:

$$\text{III.}\quad \zeta^2 + (3\eta^2 + 2a\eta + b) = 0,$$

$$\text{IV.}\quad (3\eta + a)\zeta^2 + (\eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c) = 0,$$

und wenn man die Werthe von ζ^2 einander gleichsetzt:

$$8\eta^3 + 8a\eta^2 + 2(a^2 + b)\eta + (ab - c) = 0.$$

Setzt man wieder y an die Stelle von 2η, so erhält man die Gleichung der Wurzelsummen, nämlich

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c) = 0.$$

Geht man aus von den Gleichungen V. und VI., so ist

$$\text{V.}\quad \eta^3+(3\zeta+a)\eta^2+(3\zeta^2+2a\zeta+b)\eta+(\zeta^3+a\zeta^2+b\zeta+c)=0,$$

$$\text{VI.}\quad \eta^3-(3\zeta-a)\eta^2+(3\zeta^2-2a\zeta+b)\eta-(\zeta^3-a\zeta^2+b\zeta-c)=0.$$

Eliminirt man hieraus η, so erhält man

$$\eta = -\frac{ab - 9c - 8a\zeta^2}{2(a^2 - 3b - 12\zeta^2)},$$

und die bikubische Gleichung

$$3\left[\frac{ab - 9c - 8a\zeta^2}{2(a^2 - 3b - 12\zeta^2)}\right]^2 - 2a\,\frac{ab - 9c - 8a\zeta^2}{2(a^2 - 3b - 12\zeta^2)} + \zeta^2 + b = 0,$$

welche die Gleichung der halben Wurzeldifferenzen ist. Setzt man wieder $2\zeta = z$, so ergibt sich

$$z^6 - 2(a^2 - 3b)z^4 + (a^2 - 3b)^2 z + \frac{1}{3}(ab - 9c)^2$$

$$- \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac) = 0.$$

Man kann diese Finalgleichungen noch auf eine andere Art von zwei Sondergleichungen ableiten. Um nämlich die Gleichung der Wurzelsummen unabhängig von z zu bestimmen, beachte man, dass

$$\frac{1}{2}(y+z) = y - \frac{1}{2}(y-z)$$

oder

$$x_1 = y - x_2$$

ist, und dass demgemäss folgende beiden Gleichungen coexistiren:

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \cdots = 0$$
$$f(y-x) = (y-x)^n + a(y-x)^{n-1} + b(y-x)^{n-2} + \cdots = 0,$$

oder, wenn man die Potenzen der Binome entwickelt:

$$\text{VII.} \qquad f(y) - f'(y)x + f''(y)\frac{x^2}{1 \,.\, 2} - \cdots \pm x^n = 0,$$

$$\text{VIII.} \quad f(-x) + f'(-x)\,y + f'(-x)\frac{y^2}{1 \,.\, 2} + \cdots + y^n = 0.$$

Eliminirt man aus $f(x) = 0$ und VII. die Grösse x, so erhält man die Summengleichung $Y = 0$.

Um die Differenzengleichung unabhängig von y zu bestimmen, erwäge man, dass

$$\frac{1}{2}(y+z) = \frac{1}{2}(y-z) + z$$

ist, oder

$$x_1 = x_2 + z.$$

Es coexistiren also die Gleichungen

$$f(x) = 0,$$

und

$$f(x+z) = (x+z)^n + a(x+z)^{n-1} + b(x+z)^{n-2} + \cdots = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen x, so erhält man die Differenzengleichung $Z = 0$. Man entwickele zu dem Zwecke die zweite Gleichung in

$$\text{IX.} \qquad f(x) + f'(x)z + f''(x)\frac{z^2}{1 \,.\, 2} + \cdots + z^n = 0,$$

oder

$$\text{X.} \qquad f(z) + f'(z)x + f''(z)\frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \cdots + x^n = 0.$$

Weil $f(x) = 0$ ist, so reducirt sich die Gleichung IX. nach Division durch z auf

$$\text{XI.}\quad f'(x) + f''(x)\frac{z}{1.2} + f'''(x)\frac{z^2}{1.2.3} + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

Wenn die Gleichung $Z = 0$ mehrere Wurzeln gleich Null hat, so ist dies ein Zeichen, dass die Gleichung $X = 0$ mehrere gleiche Wurzeln hat. Es kann also die Differenzengleichung zur Auffindung derselben dienen.

Um noch zu zeigen, wie die Summen- und Differenzengleichung der allgemeinen kubischen Gleichung nach der letzten Methode gefunden wird, so bilde man die Gleichungen

$$\text{VII.}\quad (y^3+ay^2+by+c)-(3y^2+2ay+b)x+(3y+a)x^2-x^3=0$$
$$\text{X.}\quad (z^3+az^2+bz+c)+(3z^2+2az+b)x+(3z+a)x^2+x^3=0.$$

Setzt man dazu

$$f(x) = c + bx + ax^2 + x^3 = 0,$$

so hat man aus dieser und jeder der beiden andern die Grösse x zu eliminiren. Beginnt man mit der ersten, so ist die letzte Restgleichung:

$$2[y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c)]\,x$$
$$= y[y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c)].$$

Dieser Gleichung genügen die beiden andern

$$x = \frac{1}{2}y,$$
$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c) = 0.$$

Da die erste im Allgemeinen nicht stattfindet, so muss immer die zweite gelten und sie ist die Summengleichung. Im andern Falle hat man x zu eliminiren aus den Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

und

$$3x^2 + (3z + 2a)x + z^2 + az + b = 0.$$

Die letzte Restgleichung ist:

$$2(3z^2 - a^2 + 3b)x + [3z^3 + 2az^2 - (a^2 - 3b)z - (ab - 9c)] = 0,$$

woraus der Werth von x in die zweite Gleichung eingesetzt, die Gleichung $Z = 0$ ergibt.

Da sich die n Wurzeln einer Gleichung vom n^{ten} Grade stets $n(n-1)$mal zu Differenzen ohne Wiederholungen combiniren lassen, so muss die Gleichung $Z = 0$ im Allgemeinen vom $n(n-1)^{\text{ten}}$

Grade sein, und da je zwei und zwei Differenzen $x_1 - x_2$ und $x_2 - x_1$ dem absoluten Werthe nach gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen sind, so besteht die Differenzengleichung aus $n(n-1)$ Binomialfactoren:

$$(z - z_1)(z + z_1)(z - z_2)(z + z_2)(z - z_3)(z + z_3)\ldots,$$

oder aus n quadratischen Factoren:

$$(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)(z^2 - z_3^2)\ldots,$$

woraus hervorgeht, dass das Product dieser Factoren eine Gleichung von lauter geraden Potenzen bilden muss. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$z^{2m} + a_1 z^{2m-2} + b_1 z^{2m-4} + \cdots = 0$$

und setzt u an die Stelle von z^2, so erhält man eine Gleichung, deren Ordnungsexponent halb so gross ist als der der Differenzengleichung und deren Wurzeln die Wurzelquadrate derselben sind. Man nennt die Gleichung $U = 0$ deshalb auch die Gleichung der quadrirten Differenzen.

§ 20. Von den Geminanten und Discriminanten.

Es ist für die Auflösung der Gleichungen und für die Untersuchung der Natur der Wurzeln oft von Wichtigkeit, gewisse Verbindungen oder Functionen derselben zu kennen. Aus den wichtigsten sind hervorzuheben die Geminanten und die Discriminanten. Unter der Geminante G_n einer Gleichung verstehen wir das Absolutglied der Summengleichung und unter der Discriminante D_n das Absolutglied der Differenzengleichung oder der Gleichung der quadrirten Differenzen. Demgemäss ist einerseits

$$\begin{aligned} G_n = \pm (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) & \cdots (x_1 + x_n) \times \\ (x_2 + x_3)(x_2 + x_4) & \cdots (x_2 + x_n) \times \\ (x_3 + x_4) & \cdots (x_3 + x_n) \times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (x_{n-1} + x_n); \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} D_n = \pm (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2 & \cdots (x_1 - x_n)^2 \times \\ (x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2 & \cdots (x_2 - x_n)^2 \times \\ (x_3 - x_4)^2 & \cdots (x_3 - x_n)^2 \times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (x_{n-1} - x_n)^2. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen ist $\pm$, je nachdem die Anzahl der Factoren gerade oder ungerade ist.

Um die Geminante einer Gleichung vom n^{ten} Grade zu bilden, setze man in der Gleichung VIII. § 19 $y = 0$ und eliminire x aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(-x) = 0\,.$$

Ist die gegebene Gleichung

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \cdots + t = 0\,,$$

so erhält man durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen die beiden einfacheren:

$$\begin{aligned} x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + fx^{n-6} + \cdots &= 0 \\ ax^{n-2} + cx^{n-4} + ex^{n-6} + \cdots &= 0\,, \end{aligned}$$

welche nach Elimination von x die Geminante ergeben.

Dieselbe lässt sich am einfachsten in Form einer Determinante darstellen*). Ist n gerade, so hat die erste Gleichung ein Glied mehr als die zweite; ist n ungerade, so haben beide Gleichungen gleichviel Glieder. Die zu berechnende Determinante ist

$$G_n = \begin{array}{c|cccccccccc|c} - & 1 & b & d & \cdot & \cdot & r & t & 0 & 0 & \cdot & + \\ & 0 & 1 & b & d & \cdot & \cdot & r & t & 0 & \cdot & \\ & 0 & 0 & 1 & b & d & \cdot & \cdot & r & t & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & a & c & e & \cdot & \cdot & s & 0 & 0 & 0 & \cdot & \\ & 0 & a & c & e & \cdot & \cdot & s & 0 & 0 & \cdot & \\ & 0 & 0 & a & c & e & \cdot & \cdot & s & 0 & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - \end{array}$$

Ist n gerade, so bilde man $\frac{n-2}{2}$ Reihen der ersten Gruppe, $\frac{n}{2}$ Reihen der zweiten; ist n ungerade, so bilde man $\frac{n-1}{2}$ Reihen in beiden Gruppen. Die Diagonale $(+\ +)$ ist positiv gerechnet.

1. Beispiel. G_3 zu bilden.

Die beiden Gleichungen sind

*) Man sehe § 44.

$$x^2 + b = 0$$
$$ax^2 + c = 0.$$

Man findet nach der allgemeinen Anleitung

$$G_3 = \begin{array}{c} - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & b \\ a & c \end{vmatrix}\begin{array}{c} + \\ - \end{array} = -(c - ab) = -(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3).$$

2. Beispiel. G_4 zu bilden.

Die betreffenden Gleichungen sind

$$x^4 + bx^2 + d = 0$$
$$ax^2 + c \qquad = 0.$$

Die Determinante ist

$$G_4 = \begin{array}{c} - \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & b & d \\ a & c & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix}\begin{array}{c} + \\ \\ - \end{array}\begin{array}{l} = -(c^2 - abc + a^2 d) \\ = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \cdots (x_3 + x_4). \end{array}$$

Die Geminanten der Gleichungen höherer Ordnung sind:

$$G_5 = -(ad - c)^2 - (ab - c)(bc - cd),$$
$$G_6 = -\left[e(ad - e) - caf\right]\left[(ad - e) - \frac{c}{a}(ab - c)\right]$$
$$+ \left[a^3 f - ae(ab - c)\right]^2.$$

Man kann die Geminanten zur besseren Uebersicht ihres inneren Zusammenhanges auf die Form

$$G_n = -(qt - sr)P_0 + (ot - sp)P_1 + (mt - sn)P_2 - (kt - sl)P_3 + \cdots$$

bringen*). Man findet:

$$G_2 = a,$$
$$G_3 = -(1 . c - b . a)B_0, \quad B_0 = 1;$$
$$G_4 = -(ad - cb)C_0 + (0 . d - c . 1)C_1; \quad C_0 = a, \ C_1 = c;$$
$$G_5 = -(be - dc)D_0 + (1 . e - da)D_1; \ D_0 = ab - c, \ D_1 = ad - e;$$
$$G_6 = -(cf - ed)E_0 + (af - cb)E_1 - (0 . f - e . 1)E_2;$$
$$E_0 = -a(ad - e) + c(ab - c),$$
$$E_1 = -a(af - g) + e(ab - c),$$
$$E_2 = -c(af - g) + e(ad - e);$$

*) Matthiessen. Zur Theorie der bestimmten Integrale und der Gammafunctionen. Zeitschrift f. M. u. Phys. XII. 1867. S. 309.

$$G_7 = -(dg - fe)F_0 + (bg - fc)F_1 - (1 \,.\, g - fa)F_2\,;$$

$$F_0 = -(ab-c)[(ab-c)d-(af-g)]+(ad-e)[(ab-c)b-(ad-e)]$$

$$F_1 = -(ab-c)[(ab-c)f-(ah-i)]+(af-g)[(ab-c)b-(ad-e)]$$

$$F_2 = -(ad-e)[(ab-c)f-(ah-i)]+(af-g)[(ab-c)d-(ad-e)b]$$

$$G_8 = -(eh-gf)G_0+(ch-gd)G_1-(ah-gb)G_2+(0.h-g.1)G_3;$$

etc. etc.

Um die Discriminante einer Gleichung vom n^{ten} Grade zu bilden, setze man in Gleichung XI § 19 $z = 0$ mit alleiniger Beibehaltung der höchsten Potenz z^{n-1}, welche einen Theil des Absolutgliedes von $f'(x)$ bildet. Alsdann eliminire man x aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = 0\,, \quad f'(x) + z^{n-1} = 0$$

und setze $z = 0$. Für eine Gleichung vom n^{ten} Grade sind die beiden Gleichungen:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + \cdots + (s + z^{n-1}) = 0\,.$$

Von der ersten Gruppe der Elementenreihen hat man $n - 1$, von der zweiten n Reihen zu bilden. Da die höchste Potenz von z, nämlich $z^{n(n-1)}$, positiv werden muss, so hat man das Vorzeichen der Determinante umzukehren. Dieselbe lautet

$$\begin{array}{c|ccccccccccc|c}
+ & 1 & a & b & c & \cdot & \cdot & t & 0 & 0 & 0 & \cdot & - \\
 & 0 & 1 & a & b & c & \cdot & \cdot & t & 0 & 0 & \cdot & \\
 & 0 & 0 & 1 & a & b & c & \cdot & \cdot & t & 0 & \cdot & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
= & n & (n-1)a & (n-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \\
 & 0 & n & (n-1)a & (n-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 & 0 & 0 & \cdot & \\
 & 0 & 0 & n & (n-1)a & n(-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 & 0 & \cdot & \\
 & 0 & 0 & 0 & n & (n-1)a & (n-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 & \cdot & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
- & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +
\end{array}_{z=0.}$$

1. **Beispiel.** Die Discriminante D_2 zu bilden.
Man berechne die Determinante

$$D_2 = \begin{array}{c|ccc|c}
+ & 1 & a & b & - \\
 & 2 & a & 0 & \\
- & 0 & 2 & a & +
\end{array} = -(a^2 - 4b) = -(x_1 - x_2)^2\,.$$

2. **Beispiel.** Die Discriminante D_3 der kubischen Gleichung zu bilden.

Man berechne die Determinante

$$D_3 = \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & 0 \\ 0 & 1 & a & b & c \\ 3 & 2a & b & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a & b \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ \\ \\ \\ + \end{array} \begin{aligned} &= \frac{1}{3}(ab-9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2-3b)(b^2-3ac) \\ &= -(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 . \end{aligned}$$

3. **Beispiel.** Die Discriminante D_4 zu bilden.
Man findet

$$D_4 = \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c & d \\ 4 & 3a & 2b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3a & 2b & c \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array} \begin{aligned} = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2 \\ \times (x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2 \\ \times (x_3-x_4)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16}\Big\{(16d-ac)^3 - (16d-ac)\Big[4(6c-ab)(6ad-bc)$$

$$+ 2(8b-3a^2)(8bd-3c^2)\Big] + 4(8b-3a^2)(6ad-bc)^2$$

$$+ 4(8bd-3c^2)(6c-ab)^2 - (8b-3a^2)(9ac-4b^2)(8bd-3c^2)\Big\}.$$

Die Determinante D_n lässt sich noch unter einer etwas abgekürzten Form darstellen, indem man die erste Gruppe der Horizontalreihen mit n multiplicirt und die homologen Reihen der zweiten Gruppe paarweise subtrahirt. Man erhält auf diese Art:

$$\begin{array}{r} (-1)^{n-1} \times \\ n^{n-2} . D_n = \end{array} \left| \begin{array}{ccccccccc} a & 2b & 3c & \cdot & [(n-1)s-z^{n-1}] & nt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & 3c & \cdot & [(n-1)s-z^{n-1}] & nt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & 3c & \cdot & [(n-1)s-z^{n-1}] & nt & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & (n-1)a & (n-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & (n-1)a & (n-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & (n-1)a & (n-2)b & \cdot & \cdot & (s+z^{n-1}) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

Bei der Bestimmung des Vorzeichens dieser Determinante hat man auf die Anzahl der Inversionen zu achten, welche bei der Bildung der höchsten Potenz von z, nämlich $z^{n(n-1)}$ unter den Permutationen vorkommen. Das höchste Glied in der Differenzengleichung ist nämlich

$$(-1)^{n-1}\, n^{n-2}\, z^{n(n-1)}.$$

Deshalb ist die Resultante der Gleichungen, welche man durch Berechnung der Determinante erhält, durch $(-1)^{n-1}\, n^{n-2}$ zu dividiren und dann z gleich Null zu setzen. Um diese Rechnung an Beispielen zu zeigen, so ist

$$D_2 = \begin{array}{c} - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a & 2b \\ 2 & a \end{vmatrix}\begin{array}{c} + \\ - \end{array} = -(a^2 - 4b);$$

$$D_3 = \frac{1}{3}\begin{array}{c} + \\ \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} a & 2b & 3c & 0 \\ 0 & a & 2b & 3c \\ 3 & 2a & b & 0 \\ 0 & 3 & 2a & b \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ \\ \\ + \end{array} = \frac{1}{3}(ab-9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2-3b)(b^2-3ac)$$

$$= \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - \frac{4}{27}(a^2-3b)^3$$

$$= 4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2.$$

$$D_4 = \frac{1}{4^2}\begin{array}{c} - \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a & 2b & 3c & 4d & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & 3c & 4d & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & 3c & 4d \\ 4 & 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3a & 2b & c \end{vmatrix}\begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \\ - \end{array}$$

$$= \frac{1}{16}\Big\{(16d - ac)^3 - (16d - ac)\Big[4(6c - ab)(6ad - bc)$$

$$+ 2(8b - 3a^2)(8bd - 3c^2)\Big] + 4(8b - 3a^2)(6ad - bc)^2$$

$$+ 4(8bd - 3c^2)(6c - ab)^2 - (8b - 3a^2)(9ac - 4b^2)(8bd - 3c^2)\Big\}$$

$$= \frac{4}{27}(b^2 - 3ac + 12d)^3 - \frac{1}{27}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3)^2.$$

Was das Vorzeichen der Discriminante anbelangt, so hat man noch Folgendes zu beachten. Es ist $\binom{n}{2}$ gerade, wenn n von der Form $4m$ oder $4m+1$ ist, und ungerade, wenn n von der Form $4m+2$

oder $4m+3$ ist. Ist $\binom{n}{2}$ gerade, so muss für lauter reelle Wurzeln der Gleichung das Absolutglied ein $+$ Zeichen haben; ist dagegen $\binom{n}{2}$ ungerade, so muss für lauter reelle Wurzeln das Absolutglied ein $-$ Zeichen haben. Sind die Vorzeichen entgegengesetzte, so wird man hieraus schliessen müssen, dass unter den Wurzeln auch complexe vorkommen. Für lauter reelle Wurzeln ist das letzte Glied der Gleichung der quadrirten Differenzen

D_2 und D_3 negativ,
D_4 und D_5 positiv,
D_6 und D_7 negativ, u. s. f.

Man wird demnach zur Prüfung der Realität der Wurzeln einer Gleichung das Vorzeichen der Discriminante ermitteln müssen. Für die Gleichungen der ersten fünf Grade gelten folgende Regeln:

Sind D_2 und D_3 negativ, so sind alle Wurzeln reell; sind D_2 und D_3 positiv, so sind zwei Wurzeln complex. Sind ferner D_4 und D_5 positiv, so sind alle Wurzeln reell oder vier complex; sind D_4 und D_5 negativ, so sind zwei Wurzeln complex, die übrigen reell.

§ 21. Die Discriminanten der Cayley'schen Formen.

Geht man aus von der in § 1 genauer bezeichneten Form des binären Polynoms

$$f(x,y) = (a, b, c, \ldots t) \widehat{\ } (x,y)^n,$$

so nehmen die Discriminanten eine viel einfachere Gestalt an. Nach Brioschi erhält man dann die Discriminante, wenn man die beiden partiellen Differenzialquotienten $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ gleich Null setzt und die Variabeln x und y eliminirt. Dies Verfahren lässt sich von dem oben angewandten leicht ableiten. Das binäre Polynom sei

$$f(x,y) = ax^n + \binom{n}{1} bx^{n-1}y + \binom{n}{2} cx^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{1} sxy^{n-1} + ty^n = 0,$$

dann ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = nax^{n-1} + (n-1)\binom{n}{1} bx^{n-2}y + \cdots + nsy^{n-1} = 0.$$

Multiplicirt man $f(x,y)$ mit n und $\left(\frac{\partial f}{dx}\right)$ mit x, dividirt die Differenz der beiden Gleichungen durch y, so erhält man:

$$nbx^{n-1} + (n-1)\binom{n}{1} cx^{n-2}y + \cdots + nty^{n-1} = \left(\frac{\partial f}{d y}\right) = 0 .$$

Man kann also zur Elimination von x und y nehmen die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 .$$

1. **Beispiel.** Man soll die Discriminante bilden von

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 .$$

Man bilde die Determinante der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ax + by = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = bx + cy = 0 .$$

Man findet daraus

$$\overline{D}_2 = \begin{array}{c} + \\ - \end{array}\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ + \end{array} = ac - b^2 .$$

Sind $\frac{x_1}{y_1}$ und $\frac{x_2}{y_2}$ die Wurzeln der Gleichung $f(x,y) = 0$, so ist

$$\overline{D}_2 = ac - b^2 = -\frac{a^2}{4}\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2 .$$

2. **Beispiel.** Die Discriminante $\overline{D}_3$ zu bilden von

$$f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0 .$$

Man berechne die Determinante der Gleichungen

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0 .$$

Dieselbe ist

$$\overline{D}_3 = \begin{array}{c} + \\ \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ \\ \\ + \end{array} = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) .$$

Sind $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}$ die Wurzeln der kubischen Gleichung $f(x,y) = 0$, so ist

$$\overline{D}_3 = -\frac{a^4}{3^3}\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_3}{y_3}\right)^2\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3}\right)^2 .$$

3. Beispiel. Die Discriminante $\overline{D}_4$ zu bilden von

$$f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = 0.$$

Die Bestimmungsgleichungen sind

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + d = 0$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + e = 0.$$

Die Discriminante findet man durch Berechnung der Determinante

$$\overline{D}_4 = \begin{array}{r} + \\ \\ \\ \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}\begin{array}{l} - \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array}$$

Man kann dieser Determinante eine kürzere und symmetrische Form*) geben, nämlich

$$\overline{D}_4 = \begin{array}{r} + \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} (ae - bd), & 3(be - cd), & 3(ce - d^2) \\ 3(ad - bc), & ([ae - bd] + 9[bd - c^2]), & 3(be - cd) \\ 3(ac - b^2), & 3(ad - bc), & (ae - bd) \end{vmatrix}\begin{array}{l} - \\ \\ + \end{array}$$

$$= [ae - bd]^3 - 9[ad - bc)(be - cd)$$
$$+ 2(ac - b^2)(ce - d^2)][ae - bd] + 27(ac - b^2)(be - cd)^2$$
$$+ 27(ce - d^2)(ad - bc)^2 - 81(ac - b^2)(bd - c^2)(ce - d^2)$$
$$= \frac{a^6}{4^4}\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_3}{y_3}\right)^2\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_4}{y_4}\right)^2\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3}\right)^2\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_4}{y_4}\right)^2\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_4}{y_4}\right)^2.$$

Ebenso kann man die Discriminante der kubischen Gleichung abkürzen in

$$\overline{D}_3 = \begin{array}{r} + \\ \\ - \end{array}\begin{vmatrix} (ad - bc), & 2(ac - b^2) \\ \\ 2(bd - c^2), & (ad - bc) \end{vmatrix}\begin{array}{l} - \\ \\ + \end{array}$$
$$= \frac{1}{a^2}\left[(2b^3 - 3abc + a^2d)^2 - 4(b^2 - ac)^3\right].$$

Da die Discriminanten symmetrische Functionen der Wurzeln sind, so lassen sie sich auch auf verschiedene Art symmetrisch schreiben, z. B.

*) Man vergl. § 45 und § 52.

$$\overline{D}_2 = \frac{1}{2}ac - bb + \frac{1}{2}ac,$$

$$\overline{D}_3 = 2(b^2 - ac)(bd - c^2) - (ad - bc)(cb - da) + 2(c^2 - db)(ca - b^2),$$

$$\overline{D}_4 = \left[\frac{a(be-cd)^2 - 4b(ce-d^2)(ad-bc) + 4(cd-be)(b^2-ac)d - (bc-ad)^2 e}{eb^2 - d^2 a}\right]^3$$

$$- 27\left[\frac{(ad-bc)^2(ce-d^2) + (b^2-ac)(cd-be)^2}{eb^2-d^2 a}\right]^2.$$

Von der Mitte ab vertausche man rückwärtsschreitend a und e, b und d. Ausserdem lässt sich die Discriminante $\overline{D}_4$ schreiben:

$$\overline{D}_4 = (ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - e^3)^2,$$

unter welcher Form sie in der Theorie der biquadratischen Gleichungen gewöhnlich betrachtet wird.

VI. Bildung der Gleichungen der Wurzelproducte und Wurzelquotienten.

§ 22. Die Gleichungen der Wurzelproducte.

Gegeben sei die Gleichung

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots sx + t = 0.$$

Wenn eine Gleichung

$$Y = y^r + Ay^{r-1} + By^{r-2} + \ldots + T = 0$$

gesucht werden soll, deren Wurzeln sämmtliche Producte der Wurzeln von $f(x)$ zu je zweien darstellen, so dass

$$y_1 = x_1 x_2, \quad y_2 = x_1 x_3, \cdots y_r = x_{n-1} x_n$$

ist, dann wird offenbar $r = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ sein.

Zur Bestimmung der Gleichung der Wurzelproducte kann man sich einer Methode bedienen, durch welche zugleich die Gleichung der Wurzelsumme gewonnen wird. Man setze $x_1 + x_2 = s$ und $x_1 x_2 = y$; alsdann ist

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - sx + y$$

ein quadratischer und trinomischer Factor von der gegebenen Gleichung. Führt man die Division des Polynoms durch diesen Factor aus, so muss man zuletzt einen Rest von der Form $Px + Q$ erhalten, welcher gleich Null sein muss, woraus folgt

$$P = 0, \; Q = 0.$$

Nun sind P und Q ganze algebraische Functionen von s und y, aus denen durch Elimination die beiden Gleichungen

$$S = 0, \quad Y = 0$$

gewonnen werden. Multiplicirt man P mit s und addirt Q, so erhält man zwei Reihen, welche sich allgemein darstellen lassen, nämlich

$$\text{I.} \quad Ps + Q = s^n + as^{n-1} + bs^{n-2} + cs^{n-3} + \cdots + t$$
$$- y\left[\binom{n-1}{1}s^{n-2} + \binom{n-2}{1}as^{n-3} + \binom{n-3}{1}bs^{n-4} + \cdots\right]$$
$$+ y^2\left[\binom{n-2}{2}s^{n-4} + \binom{n-3}{2}as^{n-5} + \binom{n-4}{2}bs^{n-6} + \cdots\right]$$
$$- y^3\left[\binom{n-3}{3}s^{n-6} + \binom{n-4}{3}as^{n-7} + \cdots\right] + \cdots$$

$$\text{II.} \quad P = s^{n-1} + as^{n-2} + bs^{n-3} + \cdots + r$$
$$- y\left[\binom{n-2}{1}s^{n-3} + \binom{n-3}{1}as^{n-4} + \binom{n-4}{1}bs^{n-5} + \cdots\right]$$
$$+ y^2\left[\binom{n-3}{2}s^{n-5} + \binom{n-4}{2}as^{n-6} + \cdots\right] - \cdots$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$s^n + as^{n-1} + bs^{n-2} + \cdots + t = f(s),$$
$$s^{n-1} + as^{n-2} + bs^{n-3} + \cdots + s = f_1(s),$$
$$s^{n-2} + as^{n-3} + bs^{n-4} + \cdots + r = f_2(s),$$

u. s. w.,

so sind die beiden Gleichungen, welche die Gleichungen der Wurzelsummen und Wurzelproducte einzeln liefern:

$$\text{III.} \quad Ps + Q = f(s) - yf_1'(s) + \frac{y^2}{1\,.\,2}f_2''(s) - \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3}f_3'''(s) + \cdots = 0.$$

$$\text{IV.} \quad P = f_1(s) - yf_2'(s) + \frac{y^2}{1\,.\,2}f_3''(s) - \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3}f_4'''(s) + \cdots = 0.$$

Beispiel: Gegeben sei die biquadrische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

die Gleichungen $S = 0$ und $Y = 0$ zu finden.

Durch Ausführung der Division

$$\frac{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 - sx + y} = x^2 + (a+s)x + (s^2 + as + b - y) + \frac{Px + Q}{x^2 - sx + y}$$

oder auch mit Hülfe der Formeln III und IV erhält man:

$$Ps + Q = (s^4 + as^3 + bs^2 + cs + d) - y(3s^2 + 2as + b) + y^2 = 0,$$
$$P = (s^3 + as^2 + bs + c) - y(2s + a) = 0.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich weiter

$$s\left(y - \frac{d}{y}\right) = c - ay.$$

Substituirt man y aus der zweiten Gleichung in die erste, so erhält man die Gleichung der Wurzelsummen:

$$s^6 + 3as^5 + (3a^2 + 2b)s^4 + (a^3 + 4ab)s^3 + (2a^2b + ac + b^2 - 4d)s^2$$
$$+ (a^2c + ab^2 - 4ad)s - (a^2d - abc + c^2) = 0.$$

Substituirt man dagegen s aus der dritten Gleichung in eine der beiden andern, so erhält man die Gleichung der Wurzelproducte:

$$y^6 - by^5 + (ac - d)y^4 - (a^2d - 2bd + c^2)y^3$$
$$+ (ac - d)dy^2 - bd^2y + d^3 = 0.$$

§ 23. Die Gleichungen der Wurzelquotienten.

Ist die Gleichung $f(x) = 0$ gegeben und wird eine andere $Y = 0$ gesucht von der Eigenschaft, dass ihre Wurzeln allen möglichen Quotienten aus je zwei Wurzeln der Hauptgleichung gleich sind, also

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \eta_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad y_2 = \frac{x_1}{x_3}, \quad \eta_2 = \frac{x_3}{x_1}, \text{ u. s. w.}$$

so folgt aus der Form dieser Partialgleichungen, dass die Finalgleichung $Y = 0$ eine reciproke Gleichung vom $n(n-1)$ Grade sein wird. Denn bildet man aus je zwei reciproken Wurzeln y_1 und η_1 die trinomischen Factoren

$$y^2 - \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)y + 1 = 0,$$

$$y^2 - \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right)y + 1 = 0,$$

u. s. w.,

so liefert das Product aller dieser Factoren eine reciproke Gleichung von dem sovielten Grade, als von n Elementen Variationen ohne Wiederholung gebildet werden können. Die Bildung der Gleichung $Y = 0$ kann erst vorgenommen werden, sobald die Theoreme über die Berechnung der symmetrischen Bruchfunctionen der Wurzeln gegeben sind.

VII. Bildung der Gleichungen der Wurzelpotenzen.

§ 24. Die Gleichungen der Wurzelquadrate.

Ist eine Gleichung $X = 0$ gegeben, so wird zuweilen verlangt, eine Gleichung $Y = 0$ zu bilden, deren Wurzeln die Wurzelquadrate x_1^2, x_2^2, x_3^2 u. s. w. der gegebenen Gleichung sind. Diese Gleichung der Wurzelquadrate ist offenbar eine Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, in welcher die ungeraden Potenzen der Unbekannten x fehlen.

Die gegebene Gleichung sei

$$\begin{aligned} &x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \cdots + t = 0 \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) . \end{aligned}$$

Es ist alsdann auch

$$\begin{aligned} &x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots \mp t = 0 \\ &= (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3) \cdots (x + x_n) . \end{aligned}$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\begin{aligned} &(x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + \cdots)^2 - (ax^{n-1} + cx^{n-3} + ex^{n-5} + \cdots)^2 \\ &= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2) \cdots (x^2 - x_n^2) = 0 . \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung ist nun nach Entwickelung der eingeklammerten Ausdrücke

$$\begin{aligned} x^{2n} - (a^2 - 2b)x^{2n-2} + (b^2 - 2ac + 2d)x^{2n-4} \\ - (c^2 - 2bd + 2ae - 2f)x^{2n-6} + \cdots = 0 . \end{aligned}$$

Demnach wird der Coefficient irgend eines r^{ten} Gliedes der Gleichung der Wurzelquadrate gebildet durch die Verbindung des Quadrates von dem Coefficienten des r^{ten} Gliedes der ursprünglichen Gleichung mit den doppelten Producten je zweier gleichweit zu beiden Seiten von ihm abstehenden Coefficienten, diese regelmässig mit abwechselnden Vorzeichen genommen.

Die gegebene Gleichung kann nicht mehr reelle Wurzeln haben, als die ihrer Wurzelquadrate positive Wurzeln hat; sie kann also nicht mehr reelle Wurzeln haben, als die andere Zeichenwechsel hat.

§ 25. Die Gleichungen der Wurzelkuben.

Soll eine Gleichung gebildet werden, deren Wurzeln die dritten Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, so multiplicire man die drei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + \cdots + t = 0, \\
&x^n + aJ_1x^{n-1} + bJ_2x^{n-2} + cx^{n-3} + dJ_1x^{n-4} + \cdots = 0, \\
&x^n + aJ_2x^{n-1} + bJ_1x^{n-2} + cx^{n-3} + dJ_2x^{n-4} + \cdots = 0
\end{aligned}
$$

mit einander, wo J_1 und J_2 die complexen Kubikwurzeln der Einheit sind, nämlich

$$J_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad J_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Die Gleichung der Wurzelkuben wird gefunden gleich

$$
\begin{aligned}
&x^{3n} + (a^3 - 3ab + 3c)x^{3n-3} + (b^3 + 3a^2d - 3abc - 3ac - 3bd \\
&+ 3c^2 + 3f)x^{3n-6} + (c^3 + 3a^2g - 3abf - 3ace + 3ad^2 - 3ah \\
&+ 3b^2e - 3bcd - 3bg + 6cf - 3de + 3i)x^{3n-9} + \cdots + t^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Um das Gesetz der Bildung deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir die Columnen hersetzen, welche bei der Multiplication gebildet werden:

$$
\begin{array}{r|lr|lr|l}
+(2c-ba) & x^{3n-3} & +(2f-ea-db+c^2) & x^{3n-6} & +(2i-ha-gb+2fc-ed) & x^{3n-9}+\cdots \\
+a(-b+a^2) & & +a(-e+2da-cb) & & +a(-h+2ga-fb-ec+d^2) & \\
+b(-a) & & +b(-d-ca+b^2) & & +b(-g-fa+2eb-dc) & \\
+c(1) & & +c(2c-ba) & & +c(2f-ea-db+c^2) & \\
 & & +d(-b+a^2) & & +d(-e+2da-cb) & \\
 & & +e(-a) & & +e(-d-ca+b^2) & \\
 & & +f(1) & & +f(2c-ba) & \\
 & & & & +g(-b+a^2) & \\
 & & & & +h(-a) & \\
 & & & & +i(1) &
\end{array}
$$

Encke hat im Astronomischen Jahrbuche für 1841 eine andere Methode angegeben, die Gleichung der Wurzelkuben der Stammgleichung zu bilden. Er gründet dieselbe auf die identische Gleichung

$$(p+q+r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(p+q+r)(pq+pr+qr) - 3pqr.$$

Diese Gleichung hat für $p+q+r=0$ die zweite Relation

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 0$$

zur Folge. Man theilt demgemäss die Stammgleichung in folgende drei Theile:

$$
\begin{aligned}
x^n + cx^{n-3} + fx^{n-6} + ix^{n-9} + \cdots &= p, \\
ax^{n-1} + dx^{n-4} + gx^{n-7} + \cdots &= q, \\
bx^{n-2} + ex^{n-5} + hx^{n-8} + \cdots &= r.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen geben, jede für sich kubirt und auch mit einander multiplicirt, lauter kubische Potenzen der Unbekannten x. Man bildet also den Ausdruck

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 0,$$

welcher nach Potenzen von x geordnet die gesuchte Gleichung sein wird. Wir wollen hierbei das Gesetz der Coefficienten nicht weiter verfolgen.

VIII. Die symmetrischen Functionen der Wurzeln.

§ 26. Begriff der symmetrischen Functionen.

Ausser den in § 10 betrachteten Beziehungen der Wurzeln einer Gleichung zu deren Coefficienten, den Geminanten und Discriminanten, lassen sich noch viele andre rationale Beziehungen zwischen den Wurzeln und Coefficienten auffinden, deren Kenntniss für die Theorie der Gleichungen von Wichtigkeit ist. Diejenigen Relationen, welche sämmtliche Wurzeln auf eine ähnliche Art entweder unter sich oder mit andern Grössen verbunden in sich schliessen, nennt man symmetrische Functionen der Wurzeln. Man erkennt dieselben im Allgemeinen daran, dass sie ihren Werth nicht ändern, welche Permutationen man auch mit den Elementen vornimmt, woraus sie bestehen. Die wichtigsten Formen derselben sind:

$$x_1^m + x_2^m + x_3^m + x_4^m + \cdots + x_n^m = \Sigma[x_1^m] = S_m$$
$$x_1^m x_2^p + x_2^m x_1^p + x_1^m x_3^p + \cdots + x_n^m x_{n-1}^p = \Sigma[x_1^m x_2^p] = S_{m,p}$$
$$x_1^m x_2^p x_3^q + x_1^m x_3^p x_2^q + x_2^m x_1^p x_3^q + \cdots + x_n^m x_{n-1}^p x_{n-2}^q = \Sigma[x_1^m x_2^p x_3^q] = S_{m,p,q}$$

u. s. w.

Der erste Ausdruck ist die Summe aller n Wurzeln zur m^{ten} Potenz und hat $\binom{n}{1}$ Glieder.

Der zweite Ausdruck ist gebildet aus sämmtlichen Variationen ohne Wiederholungen aller n Wurzeln zur zweiten Klasse und enthält $2\binom{n}{2}$ Glieder.

Der dritte Ausdruck ist gebildet aus sämmtlichen Variationen aller n Wurzeln ohne Wiederholung zur dritten Klasse und enthält $3!\binom{n}{3}$ Glieder.

Man bezeichnet die erste dieser symmetrischen Functionen kurz mit $\Sigma[x_1{}^m]$ oder mit S_m oder auch mit $[x_1{}^m]$. Sie ist diejenige, durch welche sich alle andern ausdrücken lassen.

Newton hat in seiner Arithmetica Universalis sehr elegante Formeln gegeben, vermittels deren sich jede rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch ihre Coefficienten ausdrücken lässt, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht. Die gebrochenen Functionen lassen sich auf ganze reduciren, indem man sie auf eine gleiche Benennung bringt, wodurch man Quotienten erhält, deren Glieder ganze symmetrische Functionen bilden*).

§ 27. Die Newton'schen Formeln für $\Sigma[x_1{}^m]$ oder S_m.

Gegeben sei die Gleichung $X = f(x) = 0$. Setzt man in dem Polynome $y + z$ an die Stelle von x, so hat man

$$f(x) = f(y+z) = (y+z-x_1)(y+z-x_2)\ldots(y+z-x_n) = 0.$$

Ordnet man dieses Product nach Potenzen von y, so resultirt

$$f(y+z) = f(z) + f'(z)y + f''(z)\frac{y^2}{1.2} + \cdots + y^n,$$

und

$$f(z) = (z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)\ldots(z-x_n) = \sum_n C(z-x_1).$$

Weiter ist die erste Derivirte

$$f'(z) = (z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_{n-1}) + \cdots = \sum_{n-1} C(z-x_1).$$

Dieselbe besteht also aus n Producten von je $n-1$ Binomialfactoren.

Setzt man x an die Stelle von z, so wird

$$f'(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\left\{\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}\right\}$$
$$= \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \frac{f(x)}{x-x_3} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x_n}.$$

Führt man die Divisionen durch die Binomialfactoren aus, so erhält man

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + \begin{array}{l|l|l|l} x_1 & x^{n-2} + x_1{}^2 & x^{n-3} + x_1{}^3 & x^{n-4} + \cdots \\ +\, a & \quad\;\; +\, a x_1 & \quad\;\; +\, a x_1{}^2 & \\ & \quad\;\; +\, b & \quad\;\; +\, b x_1 & \\ & & \quad\;\; +\, c & \end{array}$$

---

*) Man vergl. Vandermonde, Mém. de l'acad. des sciences. Année 1771.

$$\frac{f(x)}{x-x_2} = x^{n-1} + \left.\begin{array}{r} x_2 \\ +\,a \end{array}\right| x^{n-2} + \left.\begin{array}{r} x_2^{\,2} \\ +\,a x_2 \\ +\,b \end{array}\right| x^{n-3} + \left.\begin{array}{r} x_2^{\,3} \\ +\,a x_2^{\,2} \\ +\,b x_2 \\ +\,c \end{array}\right| x^{n-4} + \cdots$$

u. s. w.

endlich

$$\frac{f(x)}{x-x_n} = x^{n-1} + \left.\begin{array}{r} x_n \\ +\,a \end{array}\right| x^{n-2} + \left.\begin{array}{r} x_n^{\,2} \\ +\,a x_n \\ +\,b \end{array}\right| x^{n-3} + \left.\begin{array}{r} x_n^{\,3} \\ +\,a x_n^{\,2} \\ +\,b x_n \\ +\,c \end{array}\right| x^{n-4} + \cdots$$

Addirt man diese Reihen, so resultirt

$$f'(x) = n x^{n-1} + \left.\begin{array}{r} S_1 \\ +\,na \end{array}\right| x^{n-2} + \left.\begin{array}{r} S_2 \\ +\,a S_1 \\ +\,nb \end{array}\right| x^{n-3} + \left.\begin{array}{r} S_3 \\ +\,a S_2 \\ +\,b S_1 \\ +\,nc \end{array}\right| x^{n-4} + \cdots$$

Nun ist aber auch

$$f'(x) = n x^{n-1} + (n-1) a x^{n-2} + (n-2) b x^{n-3} + (n-3) c x^{n-4} + \cdots$$

Durch Gleichsetzung der homologen Coefficienten erhält man

$$\begin{aligned} &S_1 + a = 0\,, \\ &S_2 + a S_1 + 2b = 0\,, \\ &S_3 + a S_2 + b S_1 + 3c = 0\,, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &S_m + a S_{m-1} + b S_{m-2} + \cdots + m t = 0\,. \end{aligned}$$

Man kann nun auch die Summen $S_1\, S_2 \ldots S_m$ unmittelbar durch die bekannten Coefficienten $a, b, c \ldots t$ ausdrücken. Es braucht nur nach und nach der Werth von S_1 aus der ersten in die zweite Gleichung, dieser und der für S_2 erhaltene Werth in die dritte u. s. w. gesetzt werden.

Man findet auf diese Art die Newton'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} S_1 &= -a\,, \\ S_2 &= a^2 - 2b\,, \\ S_3 &= -a^3 + 3ab - 3c\,, \\ S_4 &= a^4 - 4a^2 b + 4ac + 2b^2 - 4d\,, \\ S_5 &= -a^5 + 5a^3 b + 5ab^2 - 5a^2 c + 5ad + 5bc - 5e\,, \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Formel S_m gilt nur für den Fall, wo $m < n$ ist. Um den

Werth S_m auch für $m \geqq n$ zu erhalten, multiplicire man die Stammgleichung mit x^{m-n}, also

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + tx^{m-n} = 0.$$

Substituirt man für x successive die Wurzeln $x_1\, x_2 \ldots x_n$, und summirt diese n Gleichungen, so geht daraus hervor

$$S_m + aS_{m-1} + bS_{m-2} + \cdots + tS_{m-n} = 0.$$

Nun ist selbstverständlich

$$S_0 = x_1{}^0 + x_2{}^0 + x_3{}^0 + \cdots + x_n{}^0 = n,$$

und wenn man für m successive substituirt n, $n+1$, $n+2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} + \cdots + nt &= 0, \\ S_{n+1} + aS_n + bS_{n-1} + \cdots + tS_1 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ S_{n+m} + aS_{n+m-1} + bS_{n+m-2} + \cdots + tS_m &= 0. \end{aligned}$$

Die Summen der aufeinander folgenden Potenzen der Wurzeln einer Gleichung bilden eine sogenannte recurrirende Reihe, d. h. eine solche, in welcher eine Gleichung ersten Grades mit constanten Coefficienten Gültigkeit behält zwischen einer gewissen Anzahl auf einander folgender Glieder, woher sie auch immer genommen werden. Denn irgend eine der Grössen z. B. S_m hängt, wenn die Gleichung vollständig ist, ab von den n vorangehenden durch die Gleichung

$$S_m + aS_{m-1} + bS_{m-2} + \cdots tS_{m-n} = 0,$$

in welcher die Constanten die Coefficienten der Gleichung sind*).

Der Coefficient S_m und alle folgenden S_{m+1}, S_{m+2}, werden auf einerlei Weise dadurch erhalten, dass man eine bestimmte Anzahl von den unmittelbar vorangehenden in umgekehrter Ordnung einzeln mit den Constanten $a, b, c, \ldots t$ multiplicirt.

Diese Reihe der Constanten heisst die Relationsscala der recurrirenden Reihe.

Um die Summe der gleichen negativen Potenzen zu erhalten, setze man in der Gleichung $[S_{m+n}]$ nach und nach $m = -1, -2, -3$, u. s. w. und bestimme daraus S_{-1}, S_{-2}, u. s. w.

Mittels der voranstehenden Methode gelingt es auch leicht den Werth der Reihe

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \cdots \varphi(x_n)$$

*) Hymers, Theory of algebraical equations, pg. 173. § 151.

zu finden, wo $\varphi(x)$ eine beliebige rationale algebraische Function einer Wurzel bezeichnet. Nämlich aus der Gleichung

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n}$$

folgt

$$\frac{f'(x)\,\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{x - x_1} + \frac{\varphi(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{\varphi(x)}{x - x_n}.$$

Da die Reste der Quotienten einzeln $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ... sind, so erhält man, indem man nur die Reste betrachtet,

$$\frac{A x^{n-1} + B x^{n-2} + \cdots}{f(x)} = \frac{\varphi(x_1)}{x - x_1} + \frac{\varphi(x_2)}{x - x_2} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{x - x_n}$$

und folglich

$$A x^{n-1} + B x^{n-2} + \cdots = x^{n-1} \{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots\} + \cdots$$

Es ist folglich

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots = A$$

d. h. gleich dem Coefficienten der höchsten Potenz von x, welche in dem Reste der Division von $f'(x)\,\varphi(x)$ durch $f(x)$ enthalten ist.

Nimmt man nun an, es sei $\varphi(x) = x$, dann wird

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots = S_1\,;$$

nimmt man darauf $\varphi = x^2$, so wird

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots = S_2, \text{ u. s. f.}$$

Der Rest der Division von $f'(x) : f(x)$ ist durch $f(x)$ dividirt gleich

$$-\frac{a x^{n-1} + 2 b x^{n-2} + 3 c x^{n-3} + \cdots}{x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + \cdots}.$$

Setzt man also $\frac{1}{z}$ an die Stelle von x, so erhält man die Newtonschen Formeln ebenfalls durch Entwicklung der gebrochenen Function

$$-\frac{a + 2 b z + 3 c z^2 + 4 d z^3 + \cdots + n t z^{n-1}}{1 + a z + b z^2 + c z^3 + d z^4 + \cdots + t z^n}$$

in die Reihe

$$S_1 + S_2 z + S_3 z^2 + S_4 z^3 + \cdots$$

Beispiel.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Der erzeugende Quotient der recurrirenden Reihe ist

$$-\frac{1 + 2z + 3z^2 + 4z^3}{1 + z + z^2 + z^3 + z^4} = -1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

Es ist folglich

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = -1\,.$$

Diese Methode wird mit Vortheil angewendet in denjenigen Fällen, wo die Gleichungen von niedrigem Grade oder unvollständig sind.

§ 28. Methode der natürlichen Logarithmen.

Ebenso wie die unmittelbar vorhergehende Methode lassen sich in einfacheren Fällen die Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung unmittelbar durch die Coefficienten ausdrücken mittels Anwendung der folgenden Methode. Gegeben sei

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = (x - x_1)(x - x_2) \cdots = 0\,.$$

Substituirt man $\frac{1}{y}$ für x, so verwandelt sich die Gleichung in

$$1 + ay + by^2 + cy^3 + \cdots = (1 - x_1 y)(1 - x_2 y)(1 - x_3 y) \cdots$$

Nimmt man von beiden Seiten den natürlichen Logarithmus, so resultirt

$$\begin{array}{llllllll}
ay + & b & y^2 + & c & y^3 + & d & y^4 + \cdots \\
 & -\frac{1}{2}a^2 & & -ab & & -ac & \\
 & & & +\frac{1}{3}a^3 & & -\frac{1}{2}b^2 & \\
 & & & & & +a^2 b & \\
 & & & & & -\frac{1}{4}a^4 &
\end{array}$$

$$= -S_1 y - \frac{1}{2} S_2 y^2 - \frac{1}{3} S_3 y^3 - \frac{1}{4} S_4 y^4 - \cdots,$$

woraus sich die Newton'schen Formeln unmittelbar ergeben.

Beispiel. $x^n - 1 = 0$.

Es ist

$$x^n - 1 = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)\,,$$

und

$$1 - y^n = (1 - x_1 y)(1 - x_2 y) \cdots (1 - x_n y)\,.$$

Folglich ist

$$\log \text{nat}\,(1 - y^n) = y^n + \frac{1}{2} y^{2n} + \frac{1}{3} y^{3n} + \cdots + \frac{1}{r} y^{rn} + \cdots$$

$$= S_1 y + \frac{1}{2} S_2 y^2 + \cdots + \frac{1}{rn} S_{rn} y^{rn} + \cdots$$

Hieraus ergibt sich

$$S_1 = S_2 = \cdots = S_{n-1} = S_{n+1} = \cdots = 0,$$
$$S_n = S_{2n} = S_{3n} = \cdots = S_{rn} = n.$$

Auch mittels Reihenentwicklung der Exponentialfunction gelingt es leicht, umgekehrt die einzelnen Coefficienten einer Gleichung durch Functionen der Potenzsummen auszudrücken. Es ist nämlich

$$\log \operatorname{nat} (1 + ay + by^2 + \cdots) = - S_1 y - \frac{1}{2} S_2 y^2 - \frac{1}{3} S_3 y^3 - \cdots$$

und folglich

$$1 + ay + by^2 + \cdots = e^{-S_1 y - \frac{1}{2} S_2 y^2 - \frac{1}{3} S_3 y^3 - \cdots}$$
$$= 1 - S_1 y \begin{array}{l|l|l} - \frac{1}{2} S_2 & y^2 - \frac{1}{3} S_3 & y^3 - \cdots \\ + \frac{1}{2} S_1^2 & + \frac{1}{2} S_1 S_2 & \\ & - \frac{1}{6} S_1^3 & \end{array}$$

Demgemäss ist

$$a = - S_1,$$
$$b = - \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{1 \cdot 2} S_1^2,$$
$$c = - \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{1 \cdot 2} S_2 S_1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} S_1^3,$$

u. s. w.

§ 29. Girard's Formel für die Potenzsummen der Wurzeln*).

Der niederländische Mathematiker Albert Girard hat in einer 1629 verfassten Schrift für die Potenzsumme die Formel

$$S_m = m \Sigma \frac{(-1)^{s_1 + s_2 + \cdots + s_n} \cdot (s_1 + s_2 + \cdots + s_n - 1)! \, a^{s_1} \cdot b^{s_2} \cdot c^{s_3} \ldots t^{s_n}}{s_1! \, s_2! \, s_3! \ldots s_n!}$$

angegeben. Sie wird zumeist Waring zugeschrieben, der sie erst 1782 und zwar ohne Beweis mittheilt. In diesem Ausdrucke erstreckt

---

*) Girard, Invention nouvelle en l'Algèbre. Amsterdam 1629.
Waring, Meditationes algebraicae. 1782.
Lagrange, Mém. de l'acad. de Berlin 1768 und Traité de la résolution etc., note XI.
Serret, Cours d'algèbre supérieure III. § 196.
Unferdinger, Sitzungsber. d. Acad. d. Wissensch. in Wien. Bd. LX. S. 36. 1869.

sich die Summation auf alle positiven ganzen Zahlen einschliesslich Null für $s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$, welche der Gleichung

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots + ns_n = m$$

genügen.

Beweis von Unferdinger. Es seien $x_1 x_2 \ldots x_n$ die n reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0$$

und

$$S_m = x_1^m + x_2^m + x_3^m + \cdots + x_n^m = [m].$$

Setzt man $x = \frac{1}{y}$, so ist

$$Y = 1 + ay + by^2 + cy^3 + \cdots + ky^m + \cdots + ty^n$$
$$= (1 - x_1 y)(1 - x_2 y)(1 - x_3 y) \ldots (1 - x_n y) = 1 + z.$$

Ferner ist mit n maliger Anwendung der Formel

$$\log \text{nat} \frac{1}{1 - xy} = xy + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{3} x^3 y^3 + \cdots,$$
$$\log \text{nat} \frac{1}{Y} = [1] y + \frac{1}{2} [2] y^2 + \frac{1}{3} [3] y^3 + \cdots$$

Andrerseits ist auch

$$\log \text{nat} \frac{1}{Y} = \log \text{nat} \frac{1}{1+z} = -z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \cdots = \sum_1^\infty (-1)^r \frac{z^r}{r},$$

wobei immer so kleine Werthe von y resp. von z denkbar sind, dass beide Reihen convergiren. Um auch die zweite Entwicklung von $\log \frac{1}{Y}$ in eine Potenzreihe nach y zu verwandeln, benutzen wir den polynomischen Lehrsatz. Bezeichnen $s_1, s_2, s_2, \ldots s_n$ solche ganze positive Zahlen inclusive Null, welche die Bedingung

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = r$$

erfüllen, so ist bekanntlich:

$$z^r = \Sigma \frac{r!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_n!} \cdot a^{s_1} \cdot b^{s_2} \cdot c^{s_3} \ldots t^{s_n} \cdot y^{s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots ns_n};$$

wobei sich die Summation auf alle Werthe von s bezieht, welche die vorhergehende Bedingungsgleichung erfüllen. Hierdurch wird

$$\log \frac{1}{Y} = \sum_1^\infty \Sigma (-1)^r \frac{(r-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_n!} a^{s_1} \cdot b^{s_2} \cdot c^{s_3} \ldots t^{s_n} \cdot y^{s_1 + 2s_1 + \cdots ns_n}.$$

Wenn diese doppelte Summation nur jene Glieder zusammenfassen soll, welche die Potenz y^m enthalten, so kann dieselbe wieder auf eine einfache Summation reducirt werden, wenn man r durch

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$$

ersetzt und nur jene Werthe von $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ gelten lässt, welche die Bedingung

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots n s_n = m$$

erfüllen.

Der Coefficient von y^m in der zweiten Entwicklung von $\log \text{nat} \frac{1}{Y}$ ist daher

$$\Sigma (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \cdot \frac{(s_1 + s_2 + \cdots s_n - 1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_n!} a^{s_1} \cdot b^{s_2} \cdot c^{s_3} \ldots t^{s_n}.$$

Die Gleichstellung mit dem entsprechenden Coefficienten der ersten Entwicklung gibt alsdann die Formel von Girard. Für die Summe negativer Potenzen hat man ähnlich

$$S_{-m} = m \Sigma \frac{(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \cdot (s_1+s_2+\cdots+s_n-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_n!} \cdot \frac{s^{s_1} \cdot r^{s_2} \ldots a^{s_{n-1}} \cdot 1^{s_n}}{t^{s_1+s_2+\cdots+s_n}}.$$

Um die Anwendung der Formel zu erläutern, sollen die Formeln für eine möglichst einfache Gleichung entwickelt werden.

Beispiel. $x^n \pm a^n = 0$.

In dem vorliegenden Falle ist $a = b = c = \cdots = s = 0$ und $t = \pm a^n$. In dem Summenausdruck verschwinden also alle Glieder bis auf eins, welches

$$s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = s_{n-1} = 0, \quad n s_n = m$$

entspricht. Ist m kein Vielfaches vom n, so kann diese Bedingung nicht erfüllt werden; es ist daher

$$[m] = S_m = 0.$$

Ist dagegen $m = kn$, so wird $s_m = k$ und somit

$$[m] = (\mp 1)^k n a^{kn}.$$

Das umgekehrte Problem, die Coefficienten einer Gleichung einzeln als Functionen der Potenzsummen darzustellen, kann auch hier durch ähnliche Betrachtungen auf folgende Weise gelöst werden.

Schreibt man der Kürze wegen

$$\log \text{nat} \frac{1}{Y} = [1]\, y + \frac{1}{2} [2]\, y^2 + \frac{1}{3} [3]\, y^3 + \cdots = u,$$

so ist

$$Y = 1 + ay + by^2 + \cdots + ty^n = e^{-u}$$
$$= -u + \frac{u^2}{1 \cdot 2} - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = \sum_1^\infty (-1)^r \cdot \frac{1}{r!} \cdot u^r.$$

Bezeichnen wiederum $s_1, s_2, s_3, \ldots$ solche positive ganze Zahlen inclusive Null, welche die Bedingung

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots s_n = r$$

erfüllen, so ist nach dem polynomischen Lehrsatze

$$u^r = \Sigma \frac{r!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots} \cdot \left\{[1]\right\}^{s_1} \cdot \left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2} \ldots y^{s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots n s_n},$$

worin sich die Summation eben auf die Werthe von $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bezieht. Dadurch wird

$$Y = \sum_1^\infty \Sigma (-1)^r \frac{\left\{[1]\right\}^{s_1} \cdot \left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2} \cdot \left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3} \cdots}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots} y^{s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots}.$$

Soll diese zweifache Summation nur jene Glieder vereinigen, welche den Factor y^m enthalten, so kann man dieselbe wieder auf eine einfache Summation reduciren, wenn man r durch seinen Werth $s_1 + s_2 + s_3 + \cdots$ ersetzt und nur jene Werthe von $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ gelten lässt, welche die Gleichung

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + ns_n = m$$

erfüllen.

Der Coefficient von y^m in Y wird alsdann sein

$$\Sigma(-1)^{s_1 + s_2 + \cdots s_m} \cdot \frac{\left\{[1]\right\}^{s_1} \cdot \left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2} \cdot \left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3} \cdots \left\{\frac{1}{m}[m]\right\}^{s_m}}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!}$$

und die Gleichstellung mit dem entsprechenden Coefficienten des ersten Ausdrucks für Y gibt das Resultat

$$K = \Sigma(-1)^{s_1 + s_2 + \cdots s_m} \cdot \frac{\left\{[1]\right\}^{s_1} \cdot \left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2} \cdot \left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3} \cdots \left\{\frac{1}{m}[m]\right\}^{s_m}}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!}.$$

§ 30. Waring's Formeln für die symmetrischen Functionen der Producte aus den Wurzelpotenzen.

Mit Hülfe der Formeln für die Potenzsummen kann nun jede algebraische, rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch ihre Coefficienten ausgedrückt werden, wie z. B. die folgenden:

$$\Sigma[x_1^m x_2^p] = S_{m,p},$$
$$\Sigma[x_1^m x_2^p x_3^q] = S_{m,p,q}, \text{ u. s. w.}$$

Um zunächst $S_{m,p}$ zu finden, multiplicire man die Gleichungen

$$S_m = x_1^m + x_2^m + x_3^m + \cdots + x_n^m,$$
$$S_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p + \cdots + x_n^p$$

miteinander. Dies gibt

$$\begin{aligned} S_m \,.\, S_p = & \; x_1^{m+p} + x_2^{m+p} + \cdots + x_n^{m+p} \\ & + x_1^m x_2^p + x_1^m x_3^p + \cdots + x_2^m x_1^p + \cdots \end{aligned}$$

Die erste Reihe ist gleich S_{m+p}; die zweite besteht aus allen Variationen der Wurzeln zur zweiten Klasse ohne Wiederholung, wobei das erste Element den Exponenten m, das zweite den Exponenten p hat. Die zweite Reihe ist deshalb gleich $S_{m,p}$ und folglich

$$S_m \,.\, S_p = S_{m+p} + S_{m,p}$$

oder

$$S_{m,p} = S_m \,.\, S_p - S_{m+p}. \qquad (1)$$

Um $S_{m,p,q}$ zu erhalten, multiplicire man miteinander die Reihen

$$S_{m,p} = x_1^m x_2^p + x_1^m x_3^p + \cdots + x_2^m x_1^p + \cdots + x_n^m x_{n-1}^p,$$
$$S_q = x_1^q + x_2^q + x_3^q + \cdots + x_n^q.$$

Dies gibt

$$\begin{aligned} S_{m,p} \,.\, S_q = & \; x_1^{m+q} x_2^p + x_1^{m+q} x_3^p + x_2^{m+q} x_1^p + \cdots \\ & + x_1^m x_2^{p+q} + x_1^m x_3^{p+q} + \cdots + x_2^m x_1^{p+q} + \cdots \\ & + x_1^m x_2^p x_3^q + x_1^m x_3^p x_2^q + \cdots + x_2^m x_1^p x_3^q + \cdots \end{aligned}$$

Die erste Reihe ist gleich

$$S_{m+q,p} = \Sigma(x_1^{m+q} x_2^p),$$

die zweite Reihe ist gleich

$$S_{m,p+q} = \Sigma(x_1^m x_2^{p+q}),$$

und die dritte Reihe gleich

$$S_{m,p,q} = \Sigma(x_1^m x_2^p x_3^q).$$

Es ist folglich

$$S_{m,p} \,.\, S_q = S_{m+q,p} + S_{m,p+q} + S_{m,p,q},$$

und da man die symmetrischen Functionen von zwei Indices mit Hülfe von Formel (1) berechnen kann, so resultirt aus der vorstehenden Gleichung:

$$S_{m,p,q} = S_m S_p S_q - S_{m+p} S_q - S_{m+q} S_p - S_{p+q} S_m + 2 S_{m+p+q}. \qquad (2)$$

Führt man auf dieselbe Art mit der Multiplication fort, so kann man offenbar auch die symmetrische Function $S_{m,p,q,r}$ und so fort die jeder beliebigen höhern Combination ausdrücken. Da nun jede symmetrische Function einer der vorstehenden Arten angehört und sich durch Addition und Subtraction mehrerer symmetrischer Functionen niedrigerer Ordnung ausdrücken lässt, so folgt daraus, dass der Werth einer jeden beliebigen rationalen symmetrischen Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben mittels der Waring'schen Formeln gefunden werden kann.

Die gegebenen Formeln erleiden einige Modificationen, wenn einige der Exponenten m, p, q, r gleich sind.

Ist $p = m$, so geht Formel (1) über in

$$S_{m,m} = \frac{(S_m)^2 - S_{2m}}{1 \,.\, 2}.$$

Da nämlich in diesem Falle die Glieder $x_1^m x_2^p$ und $x_2^m x_1^p$ und alle ähnlichen Variationen einander gleich werden, so vermehrt sich ihre Anzahl $S_{m,p}$ auf $2S_{m,m}$, woraus folgt

$$S_m S_m = S_{2m} + 2S_{m,m}.$$

Ist $p = m$, so geht Formel (2) über in

$$S_{m,m,q} = \frac{S_{m,m} S_q - 2S_m S_{m+q}}{1 \,.\, 2} = \frac{S_m{}^2 S_q - S_{2m} S_q - 2S_{m+q,m}}{1 \,.\, 2},$$

indem $S_{m,m}$ aus der vorangehenden Formel ohne den Divisor 2 einzusetzen ist, da dieser schon in dem Quotienten enthalten ist.

Wenn $q = p = m$ ist, so werden die sechs Variationen in $x_1^m x_2^p x_3^q$ auf eine reducirt und es wird

$$S_{m,p,q} = 6 S_{m,m,m},$$

also

$$S_{m,m,m} = \frac{(S_m)^3 - 3S_{2m} \,.\, S_m + 2S_{3m}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Sind r Exponenten gleich, so muss die allgemeine Formel durch $r! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots r$ dividirt werden.

Beispiel. Gegeben sei die Gleichung $x^n - 1 = 0$. Es soll

$$S_{m,p} = \Sigma[x_1^m x_2^p]$$

gefunden werden.

Man erhält nach (1)

$$S_{m,p} = S_m S_p - S_{m+p}.$$

Im § 28 haben wir bereits gefunden, dass für diese Gleichung die Summe der m^{ten} Potenzen gleich n ist, wenn m ein Viel-

5*

faches von n ist; dagegen Null in allen andern Fällen. Daher ist $S_{m,p} = n^2 - n$, wenn $m = rn$, $p = kn$ ist; $S_{m,p} = -n$, wenn $m + p = in$ ist. In allen andern Fällen ist $S_{m,p} = 0$.

IX. Transformation der Gleichungen mittels symmetrischer Functionen.

§ 31. Bildung der Gleichung der Wurzelsummen.

In den Abschnitten § 19—25 ist bereits gezeigt worden, wie sich aus der Stammgleichung $X = 0$ neue Gleichungen bilden lassen, deren Wurzeln symmetrische Functionen sind, in welche jedesmal nur eine bestimmte Anzahl der Wurzeln der Stammgleichung eintreten. Man kann nun dieselben Aufgaben mit Anwendung der Formeln von Newton und Waring lösen. Es möge sich zunächst darum handeln, die Gleichung der Wurzelsummen zu bilden.

Gegeben sei die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Die Wurzeln der gesuchten Gleichung, welche vom dritten Grade sein muss, also

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0,$$

sind:

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 + x_3, \quad y_3 = x_2 + x_3.$$

Durch Multiplication der Binominalfactoren

$$[y - (x_1 + x_2)]\,[y - (x_1 + x_3)]\,[y - (x_2 + x_3)]$$

erhält man

$$-A = +2(x_1 + x_2 + x_3) = +2S_1 = -2a,$$

$$B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = S_2 + 3S_{1,1}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{S_2 + 3(S_1)^2\right\},$$

$$-C = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 2x_1x_2x_3$$
$$= S_{2,1} + 2S_{1,1,1} = S_2S_1 - S_3 + 2c.$$

Nun ist

$$S_1 = -a, \quad S_2 = a^2 - b, \quad S_3 = -a^3 + 3ab - 3c,$$

folglich die Summengleichung

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c) = 0.$$

§ 32. Eine andere Methode.

Es werde dieselbe an der allgemeinen Gleichung vom n^{ten} Grade entwickelt. Die Summengleichung sei die Gleichung vom $\binom{n}{2}$ oder r^{ten} Grade

$$y^r + Ay^{r-1} + By^{r-2} + Cy^{r-3} + \cdots + T = 0$$

und $y = x_1 + x_2$. Es gelten dann folgende Bestimmungsgleichungen

$$1)\quad y = x_1 + x_2;$$
$$\Sigma(y) = \Sigma(x_1 + x_2) = (n-1)\,S_1;$$
$$2)\quad y^2 = x_1^{\,2} + 2x_1x_2 + x_2^{\,2};$$
$$\Sigma(y^2) = \Sigma(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) + 2\Sigma(x_1x_2) = (n-1)\,S_2 + 2S_{1,1};$$
$$3)\quad y^3 = x_1^{\,3} + 3x_1^{\,2}x_2 + 3x_1x_2^{\,2} + x_2^{\,3};$$
$$\Sigma(y^3) = \Sigma(x_1^{\,3} + x_2^{\,3}) + 3\Sigma(x_1^{\,2}x) = (n-1)\,S_3 + 3S_{2,1};$$

u. s. w.

allgemein

$$\Sigma(y^m) = (n-1)\,S_m + \binom{n}{1} S_{m-1,1} + \binom{n}{2} S_{m-2,2} + \binom{n}{3} S_{m-3,3} + \cdots$$

Da man von diesen Gleichungen so viele zu bilden hat, als in $Y = 0$ unbestimmte Coefficienten $A, B, C, \ldots$ enthalten sind, so muss man bis zur $n(n-1)^{\text{ten}}$ gehen und mittels der Formel in § 28 die Coefficienten bestimmen:

$$A = -\Sigma(y),$$
$$B = -\frac{1}{2}\Sigma(y^2) + \frac{1}{1.2}[\Sigma(y)]^2,$$
$$C = -\frac{1}{3}\Sigma(y^3) + \frac{1}{1.2}\Sigma(y^2)\Sigma(y) - \frac{1}{1.2.3}[\Sigma(y)]^3,$$

u. s. w.

Ist die gegebene Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so ist

$$S_1 = -a,\quad S_2 = a^2 - 2b,\quad S_3 = -a^3 + 3ab - 3c,$$
$$S_{1,1} = \frac{(S_1)^2 - S_2}{1.2} = b,\quad S_{2,1} = S_2 . S_1 - S_3 = -ab + 3c.$$

Demnach ist

$$\Sigma(y) = -2a,\quad \Sigma(y^2) = 2a^2 - 2b,\quad \Sigma(y^3) = -2a^3 + 3ab + 3c,$$

und endlich

$$A = 2a,\quad B = a^2 + b,\quad C = ab - c.$$

Man kann dem Ausdrucke für $\Sigma(y^m)$, welcher zur Berechnung der Summengleichung in Betracht kommt, noch eine bequemere Form geben. Es ist nämlich für ganze positive Werthe von m

$$\Sigma(x+x_1)^m = nx^m + \binom{m}{1} S_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} S_2 x^{m-2} + \cdots + S_m,$$

und wenn man für x allmählich substituirt $x_1, x_2 \ldots x_n$, darauf die entstehenden Reihen addirt, so wird

$$(x_1+x_1)^m + (x_1+x_2)^m + \cdots (x_1+x_n)^m + (x_2+x_1)^m + (x_2+x_2)^m + \cdots$$
$$= nS_m + \binom{m}{1} S_{m-1} S_1 + \binom{m}{2} S_{m-2} S_2 + \cdots + \binom{m}{1} S_1 S_{m-1} + nS_m.$$

Nun ist

$$\Sigma(2x_1)^m = 2^m S_m$$

und es sind jedesmal zwei gleiche Glieder $(x_1+x_2)^m$, $(x_2+x_1)^m$ vorhanden, folglich ist

$$\Sigma(y^m) = \frac{1}{2}\left\{nS_m + \binom{m}{1} S_{m-1} S_1 + \binom{m}{2} S_{m-2} S_2 + \cdots + nS_m\right\} - 2^{m-1} S_m.$$

Ist nun m eine gerade Zahl $2k$, so ist die Anzahl der in der Klammer enthaltenen Ausdrücke eine ungerade, also

$$\Sigma(y^{2k}) = nS_{2k} + \binom{2k}{1} S_{2k-1} S_1 + \binom{2k}{2} S_{2k-2} S_2 + \cdots + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\left(S_k\right)^2 - 2^{2k-1} S_{2k}.$$

Ist dagegen m ungerade, so ist die Anzahl der eingeklammerten Ausdrücke gerade, und wenn $m = 2k+1$ ist,

$$\Sigma(y^{2k+1}) = nS_{2k+1} + \binom{2k+1}{1} S_{2k} S_1 + \cdots + \binom{2k+1}{k} S_k S_{k+1} - 2^{2k} S_{2k+1}.$$

In diesen Summationen sind nur die Newton'schen Formeln enthalten. Man findet leicht

$$\Sigma(y) = \frac{1}{2}(nS_1 + nS_1) - S_1 = (n-1) S_1,$$
$$\Sigma(y^2) = \frac{1}{2}(nS_2 + 2S_1^2 + nS_2) - 2S_2 = (n-1) S_2 + 2 S_{1,1},$$
$$\Sigma(y^3) = nS_3 + 3S_2 S_1 - 2^2 S_3 = (n-1) S_3 + 3 S_{2,1},$$
$$\Sigma(y^4) = nS_4 + 4S_3 S_1 + 3S_2^2 - 2^3 S_4;$$

u. s. w.

§ 33. Bildung der Gleichung der quadrirten Differenzen.

Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

und die Differenzengleichung

$$z^r + Az^{r-1} + Bz^{r-2} + \cdots + T = 0.$$

Um die unbestimmten Coefficienten $A, B, C, \ldots$ durch die bestimmten der Stammgleichung auszudrücken, suchen wir den allgemeinen Ausdruck für $\Sigma(z^m)$, wo $z = (x_1 - x_2)^2$. Für ganze positive Werthe von m ist

$$\Sigma(x - x_1)^m = n x^m - \binom{m}{1} S_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} S_2 x^{m-2} - \cdots + (-1)^m S_m.$$

Setzt man für x successive die Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ein und addirt die so entstandenen Gleichungen, so resultirt

$$(x_1 - x_2)^m + (x_1 - x_3)^m + \cdots + (x_1 - x_n)^m + (x_2 - x_1)^m + (x_2 - x_3)^m + \cdots$$
$$= n S_m - \binom{m}{1} S_{m-1} S_1 + \binom{m}{2} S_{m-2} S_2 - \cdots + (-1)^m n S_m.$$

Ist m ungerade, so werden beide Seiten der Gleichung gleich Null; ist aber m gerade und gleich $2k$, so ist die linke Seite $2\Sigma(z^k)$, wenn $(x_1 - x_2)^2$ gleich z gesetzt wird. Fasst man die gleichen Glieder von beiden Seiten mit Ausnahme des mittelsten zusammen, so ergibt sich

$$\Sigma(z^k) = n S_{2k} - \binom{2k}{1} S_{2k-1} S_1 + \binom{2k}{2} S_{2k-2} S_2 - \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}(-1)^k \binom{2k}{k} (S_k)^2.$$

Man findet demgemäss

$$\Sigma(z) = n S_2 - (S_1)^2 = (n-1) S_2 - 2 S_{1,1};$$
$$\Sigma(z^2) = n S_4 - 4 S_3 S_1 + 3 S_2^2 = (n-1) S_4 - 4 S_{3,1} + 6 S_{2,2},$$
$$\Sigma(z^3) = n S_6 - 6 S_5 S_1 + 15 S_4 S_2 - 10 (S_3)^2;$$

u. s. w.

Das Absolutglied der Gleichung der quadrirten Differenzen ist das wichtigste Glied derselben, da es Aufschluss darüber geben kann, ob eine Gleichung gleiche Wurzeln hat und ob unter den Wurzeln auch complexe vorkommen. Dasselbe ist eine symmetrische Function der Wurzeln der ersten Derivirten und kann mit Berücksichtigung dieses Umstandes mit Vortheil berechnet werden.

Es ist bereits in § 20 gezeigt, dass die Discriminante einer Gleichung $f(x) = 0$ gefunden wird, wenn man die Resultante der Gleichungen

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0$$

oder auch

$$n f(x) - f'(x) = 0, \quad f'(x) = 0$$

bildet. Es ist nun

$$f'(x) = \sum_{n-1} C(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) + (x - x_1)(x - x_2)\ldots$$

und wenn x irgend einen der Werthe $x_1, x_2 \ldots x_n$ annimmt, z. B. x_1, so reducirt sich der Ausdruck auf ein einziges Glied:

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n).$$

Die Differenzengleichung sei

$$z^r + Az^{r-1} + Bz^{r-2} + \cdots + U = 0,$$

dann ist

$$U = f'(x_1)\, f'(x_2)\, f'(x_3)\ldots f'(x_n).$$

Wenn nun $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ sind, dann ist

$$f(\xi_1) = (-1)^n (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_1)(x_3 - \xi_1)\ldots(x_n - \xi_1)$$

und folgeweise

$$\begin{aligned} f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) \ldots f(\xi_{n-1}) = (-1)^{n(n-1)} & (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_1) \ldots (x_n - \xi_1) \\ \times & (x_1 - \xi_2)(x_2 - \xi_2) \ldots (x_n - \xi_2) \\ \times & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times & (x_1 - \xi_{n-1})(x_2 - \xi_{n-1}) \ldots (x_n - \xi_{n-1}). \end{aligned}$$

In dieser Productenreihe ist $(-1)^{n(n-1)} = +1$ und wenn man jetzt die Verticalcolumnen zu je einem Producte verbindet, so ist

das erste Product $(x_1 - \xi_1)(x_1 - \xi_2)\ldots(x_1 - \xi_{n-1})$,
das zweite " $(x_2 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)\ldots(x_2 - \xi_{n-1})$
u. s. w.

Da nun

$$[\xi_1] = -\frac{n-1}{n} a,$$

$$[\xi_1 \xi_2] = +\frac{n-2}{n} b, \quad \text{u. s. w.},$$

so ist das erste Product gleich

$$x_1^{n-1} + \frac{n-1}{n} a x_1^{n-2} + \frac{n-2}{n} b x_1^{n-3} + \cdots = \frac{1}{n} f'(x_1);$$

das zweite

$$x_2^{n-1} + \frac{n-1}{n} a x_2^{n-2} + \frac{n-2}{n} b x_2^{n-3} + \cdots = \frac{1}{n} f'(x_2)$$

u. s. w.,

folglich

$$f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) \ldots f(\xi_{n-1}) = \frac{1}{n^n} f'(x_1) \cdot f'(x_2) \ldots f'(x_n)$$

oder

$$U = n^n f(\xi_1)\, f(\xi_2) \ldots f(\xi_{n-1}).$$

Beispiel. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Hieraus ergibt sich zunächst

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; \quad p = \xi_1 \xi_2 = \frac{1}{3} b, \; s = \xi_1 + \xi_2 = -\frac{2}{3} a.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} U &= 3^3(\xi_1{}^3 + a\xi_1{}^2 + b\xi_1 + c)(\xi_2{}^3 + a\xi_2{}^2 + b\xi_2 + c) \\ &= 3^3 \left\{ \begin{aligned} & p^3 + ap^2 s + a^2 p^2 + abps + b^2 p + bcs + c^2 \\ & \qquad + bps^2 + cs^3 + acs^2 \\ & \qquad - 2bp^2 - 3cps - 2acp \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man für p und s ihre Werthe ein, so resultirt

$$\begin{aligned} U &= + 4a^3 c - a^2 b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

§ 34. Bildung der Gleichung der Wurzelproducte.

Gegeben sei

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0.$$

Man setze $x_1 x_2 = y$, so ist

$$Y = y^r + Ay^{r-1} + By^{r-2} + \cdots + T = 0$$

und

$$\Sigma(y) = [x_1 \, x_2] = S_{1,1} = \frac{(S_1)^2 - S_2}{1\,.\,2},$$

$$\Sigma(y^2) = [x_1{}^2 x_2{}^2] = S_{2,2} = \frac{(S_2)^2 - S_4}{1\,.\,2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma(y^m) = [x_1{}^m x_2{}^m] = S_{m,m} = \frac{(S_m)^2 - S_{2m}}{1\,.\,2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} S_1 &= -a, \\ S_2 &= \quad a^2 - 2b, \\ S_3 &= -a^3 + 3ab - 3c, \\ S_4 &= \quad a^4 - 4a^2 b + 4ac + 2b^2 - 4d, \\ S_5 &= -a^5 + 5a^3 b - 5ab^2 - 5a^2 c + 5ad + 5bc - 5e, \\ S_6 &= \quad a^6 - 6a^4 b + 6a^3 c + 9a^2 b^2 - 6a^2 d - 12abc - 2b^3 \\ &\qquad + 6ae + 6bd + 3c^2 - 6f; \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Daraus folgt z. B. für $n = 4$:

$$A = -\Sigma(y) = -b\,,$$
$$B = -\frac{A\Sigma(y) + \Sigma(y)^2}{2} = ac - d\,,$$
$$C = -\frac{B\Sigma(y) + A\Sigma(y^2) + \Sigma(y^3)}{3} = -a^2d + 2bd - c^2\,;$$
$$D = -\frac{C\Sigma(y) + B\Sigma(y^2) + A\Sigma(y^3) + \Sigma(y^4)}{4} = (ac - d)d\,;$$

u. s. w.

Einfacher und allgemein ist die folgende Methode.

Gegeben sei

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0\,.$$

Setzt man $x_1 x_2 = y$, so ist für ganze positive Werthe von m

$$(xx_1)^m + (xx_2)^m + (xx_3)^m + \cdots (xx_n)^m = x^m S_m\,.$$

Wenn man nun für x successive die Wurzelwerthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ substituirt, so ist

$$(x_1 x_1)^m + (x_1 x_2)^m + (x_1 x_3)^m + \cdots + (x_1 x_n)^m = x_1{}^m S_m\,,$$
$$(x_2 x_1)^m + (x_2 x_2)^m + (x_2 x_3)^m + \cdots + (x_2 x_n)^m = x_2{}^m S_m, \text{ u. s. w.}$$

Addirt man sämmtliche so entstandene Gleichungen, so resultirt

$$S_{2m} + 2\Sigma(y^m) = S_m \,.\, S_m\,,$$

oder

$$\Sigma(y^m) = \frac{S_m S_m - S_{2m}}{2}\,.$$

Demgemäss ist nun

$$\Sigma(y) = \frac{S_1 S_1 - S_2}{2}\,,$$
$$\Sigma(y^2) = \frac{S_2 S_2 - S_4}{2}, \text{ u. s. w.}$$

Endlich ist nach § 28:

$$A = -\Sigma(y) = -\tfrac{1}{2}(S_1{}^2 - S_2),$$
$$B = \tfrac{1}{2}(\Sigma_1{}^2 - \Sigma_2) = \tfrac{1}{8}(S_1{}^4 - 2S_1{}^2S_2 + S_4),$$
$$C = -\tfrac{1}{3}(\Sigma_1{}^3 - 3\Sigma_1\Sigma_2 + 2\Sigma_3), \text{ u. s. w.}$$

§ 35. Bildung der Gleichung der Wurzelquotienten.

Dieser Aufgabe ist bereits in § 23 Erwähnung geschehen, ohne dass die Auflösung gegeben worden ist. Dieselbe möge an der allgemeinen kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

erläutert werden. Die gesuchte Gleichung wird von dem sovielten Grade sein, als die drei Wurzeln zu je zweien ohne Wiederholung variirt werden können; also vom $3.2 = 6^{\text{ten}}$ Grade. Das Absolutglied wird gleich 1 und die Gleichung eine reciproke sein müssen, also von der Form

$$y^6 + Ay^5 + By^4 + Cy^3 + By^2 + Ay + 1 = 0.$$

Es ist also

$$\frac{x_1}{x_2} = y, \quad \Sigma(y) = \frac{[x_1{}^2 x_3]}{x_1 x_2 x_3} = \frac{S_{2,1}}{-c} = -\frac{S_2 S_1 - S_3}{c},$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = y^2, \quad \Sigma(y^2) = \frac{[x_1{}^4 x_3{}^2]}{x_1{}^2 x_2{}^2 x_3{}^2} = \frac{S_{4,2}}{c^2} = \frac{S_4 S_2 - S_6}{c^2},$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = y^3, \quad \Sigma(y^3) = \frac{[x_1{}^6 x_3{}^3]}{x_1{}^3 x_2{}^3 x_3{}^3} = \frac{S_{6,3}}{-c^3} = -\frac{S_6 S_3 - S_9}{c^3},$$

u. s. w.

Mittels Anwendung der Newton'schen Formeln, die man bis S_9 zu entwickeln haben würde, findet man:

$$A = -\frac{ab - 3c}{c},$$

$$B = \frac{a^3 c - 5abc + b^3 + 6c^2}{c^2},$$

$$C = -\frac{-2a^3 c + a^2 b^2 + 6abc - 7c^2 - 2b^3}{c^2}.$$

Vorstehende Aufgabe findet sich in den Annali di matematica Tom. VII, gestellt von Tortolini*), zu der von mir in Grunert's Archiv**) folgende Lösung gegeben worden ist.

Man bilde die Quotientengleichung

$$y^6 + Ay^5 + By^4 + Cy^3 + By^2 + Ay + 1 = 0$$

mittels binomischer Factoren aus dem Producte

$$\left(y - \frac{x_1}{x_2}\right)\left(y - \frac{x_2}{x_1}\right)\left(y - \frac{x_1}{x_3}\right)\left(y - \frac{x_3}{x_1}\right)\left(y - \frac{x_2}{x_3}\right)\left(y - \frac{x_3}{x_2}\right) = 0.$$

Man findet leicht

$$y^6 - \left[\frac{x_1}{x_2}\right] y^5 + \left\{3 + \left[\frac{x_1}{x_2}\right] + \left[\frac{x_1{}^2}{x_2 x_3}\right] + \left[\frac{x_1 x_2}{x_3{}^2}\right]\right\} y^4 - \left\{2 + 2\left[\frac{x_1}{x_2}\right]\right.$$
$$\left. + \left[\frac{x_1{}^2}{x_2{}^2}\right]\right\} y^3 + \left\{3 + \left[\frac{x_1}{x_2}\right] + \left[\frac{x_1{}^2}{x_2 x_3}\right] + \left[\frac{x_1 x_2}{x_3{}^2}\right]\right\} y^2 - \left[\frac{x_1}{x_2}\right] y + 1 = 0.$$

---

*) Die Aufgabe erscheint zuerst in Educational Times, Aug. 1866, p. 108. Tortolini, Risoluzione di un problema etc. Ann. d. mat. VII. p. 297.

**) Ueber ein algebraisches Problem von Herrn Barnaba Tortolini, die kubischen Gleichungen betreffend. Grun. Arch. XLVIII, S. 460.

oder auch

$$y^6 - \left[\frac{x_1}{x_2}\right] y^5 + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^2 - \left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\right]\right\} y^4 - \left\{2 + 2\left[\frac{x_1}{x_2}\right] + \left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\right]\right\} y^3$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^2 - \left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\right]\right\} y^2 - \left[\frac{x_1}{x_2}\right] y + 1 = 0.$$

Setzt man $y + \frac{1}{y} = z$, so wird einfacher

$$z^3 - \left[\frac{x_1}{x_2}\right] z^2 + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^2 - \left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\right] - 6\right\} z - \left\{\left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\right] + 2\right\} = 0.$$

Es ist nun

$$\left[\frac{x_1}{x_2}\right] = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_3 + (x_1^2 + x_3^2)x_2 + (x_2^2 + x_3^2)x_1}{x_1 x_2 x_3} = \frac{S_1 S_2 - S_3}{-c} = \frac{ab - 3c}{c}.$$

Setzt man in diesem Coefficienten statt a, b, c die Coefficienten der Gleichung der Wurzelquadrate, so erhält man

$$\left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\right] = \frac{-(a^2 - 2b)(b^2 - 2ac) + 3c^2}{-c^2} = \frac{-2a^3c + a^2b^2 + 4abc - 3c^2 - 2b^3}{c^2},$$

und es können demnach die Coefficienten A, B, C gebildet werden.

Sind die Wurzeln x_1, x_2, x_3 einander gleich, so wird

$$y^6 - 6y^5 + 15y^4 - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1 = 0,$$

oder

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0.$$

Man erhält die Wurzeln

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 1.$$

Einfacher und allgemein ist die folgende Methode.

Gegeben sei

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0.$$

Setzt man $\frac{x_1}{x_2} = y$, so ist für ganze positive Werthe von m:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^m + \left(\frac{x}{x_2}\right)^m + \left(\frac{x}{x_3}\right)^m + \cdots + \left(\frac{x}{x_n}\right)^m = x^m \Sigma \left(\frac{1}{x_1}\right)^m = x^m S_{-m}.$$

Wenn man nun für x successive die Wurzelwerthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ substitutirt, so ist

$$\left(\frac{x_1}{x_1}\right)^m + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m + \cdots + \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^m = x_1^m S_{-m},$$
$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m + \left(\frac{x_2}{x_2}\right)^m + \cdots + \left(\frac{x_2}{x_n}\right)^m = x_2^m S_{-m},$$

u. s. w.

Addirt man sämmtliche so entstandene Gleichungen, so resultirt:

$$n + \Sigma(y^m) = S_m S_{-m},$$

oder

$$\Sigma(y^m) = S_m S_{-m} - n.$$

Demgemäss ist nun

$$\Sigma(y) = S_1 S_{-1} - n,$$
$$\Sigma(y^2) = S_2 S_{-2} - n, \text{ u. s. w.}$$

Endlich ist nach § 28:

$$A = - \Sigma(y) = - S_1 S_{-1} + n,$$
$$B = \frac{\Sigma_1{}^2 - \Sigma_2}{1 \,.\, 2} = \frac{(S_1 S_{-1} - n)^2 - (S_2 S_{-2} - n)}{1 \,.\, 2},$$
$$C = - \frac{\Sigma_1{}^3 - 3 \Sigma_1 \Sigma_2 + 2 \Sigma_3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \text{ u. s. w.},$$

wodurch die Aufgabe allgemein gelöst ist.

§ 36. Symmetrische Functionen der Wurzeln und Wurzeldifferenzen nach Meyer Hirsch und Roberts*).

Denken wir uns die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades in der gewöhnlichen Form

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \cdots + s x + t = 0$$

gegeben, so sind die symmetrischen Functionen der Wurzeln der ersten sechs Grade in folgenden Formeln enthalten:

I. $\Sigma(x_1) = - a.$

II. $\Sigma(x_1{}^2) = a^2 - 2b; \quad \Sigma(x_1 x_2) = b.$

III. $\Sigma(x_1{}^3) = - a^3 + 3ab - 3c;$

$\Sigma(x_1{}^2 x_2) = - ab + 3c; \quad \Sigma(x_1 x_2 x_3) = - c.$

IV. $\Sigma(x_1{}^4) = a^4 - 4a^2 b + 2b^2 + 4ac - 4d;$

$\Sigma(x_1{}^3 x_2) = a^2 b - 2b^2 - ac + 4d;$

$\Sigma(x_1{}^2 x_2{}^2) = b^2 - 2ac + 2d;$

$\Sigma(x_1{}^2 x_2 x_3) = bc - 4d; \quad \Sigma(x_1 x_2 x_3 x_4) = d.$

V. $\Sigma(x_1{}^5) = - a^5 + 5a^3 b - 5ab^2 - 5a^2 c + 5bc - 5ad - 5e;$

$\Sigma(x_1{}^4 x_2) = - a^3 b + 3ab^2 + a^2 c - 5bc - ad + 5e;$

$\Sigma(x_1{}^3 x_2{}^2) = - ab^2 + 2a^2 c + bc - 5ad + 5e;$

---

*) Meyer Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. I. Thl. Berlin 1809.

Fiedler, Die Vorlesungen über Algebra von Salmon. S. 444. Leipzig 1877.

Roberts, Quarterly Journal. Bd. 4.

$$\Sigma(x_1{}^3 x_2 x_3) = -a^2c + 2bc + ad - 5e;$$
$$\Sigma(x_1{}^2 x_2{}^2 x_3) = -bc + 3ad - 5e;$$
$$\Sigma(x_1{}^2 x_2 x_3 x_4) = -ad + 5e;$$
$$\Sigma(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = -e;$$

VI. $$\Sigma(x_1{}^6) = a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3 + 6a^3c - 12abc + 3c^2 - 6a^2d + 6bd + 6ae - 6f;$$
$$\Sigma(x_1{}^5 x_2) = a^4b - 4a^2b^2 + 2b^3 - a^3c + 7abc - 3c^2 + a^2d - 6bd - ae + 6f;$$
$$\Sigma(x_1{}^4 x_2{}^2) = a^2b^2 - 2b^3 - 2a^3c + 4abc - 3c^2 + 2a^2d + 2bd - 6ae + 6f;$$
$$\Sigma(x_1{}^3 x_2{}^3) = b^3 - 3abc + 3c^2 + 3a^2d - 3bd - 3ae + 3f;$$
$$\Sigma(x_1{}^4 x_2 x_3) = a^3c - 3abc + 3c^2 - a^2d + 2bd + ae - 6f;$$
$$\Sigma(x_1{}^3 x_2{}^2 x_3) = abc - 3c^2 - 3a^2d + 4bd + 7ae - 12f;$$
$$\Sigma(x_1{}^2 x_2{}^2 x_3{}^2) = c^2 - 2bd + 2ae - 2f;$$
$$\Sigma(x_1{}^3 x_2 x_3 x_4) = a^2d - 2bd - ae + 6f;$$
$$\Sigma(x_1{}^2 x_2{}^2 x_3 x_4) = bd - 4ae + 9f;$$
$$\Sigma(x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 x_5) = ae - 6f;$$
$$\Sigma(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) = f.$$

Geht man aus von der Cayley'schen Form des Polynoms

$$(a, b, c, \dots s, t)\widehat{\ }(x, y)^n,$$

so erhält man nach Roberts symmetrische Functionen, mit deren Hülfe sich die ersten Glieder der Gleichungen der quadrirten Differenzen berechnen lassen.

Man setze der Kürze wegen

$$b^2 - ac = V_2,$$
$$ae - 4bd + 3c^2 = J_{4,2},$$
$$ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = J_{4,3},$$
$$ag - 6bf + 15ce - 10d^2 = J_{6,2},$$
$$ai - 8bh + 28cg - 56df + 35e^2 = J_{8,2},$$
$$b^2g - 2cd^2 + bde - 3bcf - aeg + 3adf - 2ae^2 + 3c^2e = M.$$

Die Function M ist das Leitglied der quadratischen Covariante der Form sechsten Grades

$$(a, b, c, d, e, f, g)\widehat{\ }(x, y)^6.$$

Alsdann ist

$$a^2\,\Sigma(x_1-x_2)^2 = n^2(n-1)\,V_2\,,$$

$$a^4\,\Sigma(x_1-x_2)^4 = n^2(n-1)\left[n^2 V_2{}^2 - \frac{1}{6}(n-2)(n-3)a^2 J_{4,2}\right],$$

$$a^6\,\Sigma(x_1-x_2)^6 = n^2(n-1)\Big[n^4 V_2{}^3 - \frac{1}{4}n^2(n-2)(n-5)a^2 V_2 J_{4,2}$$

$$-\frac{1}{4}n(n-2)(7n-15)a^3 J_{4,3} - \frac{1}{120}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)a^4 J_{6,2}\Big],$$

$$a^8\,\Sigma(x_1-x_2)^8 = n^2(n-1)\Big[n^6 V_2{}^4 - \frac{1}{3}n^4(n-2)(n-7)a^2 V_2{}^2 J_{4,2}$$

$$+2n^3(n-2)(3n-7)a^3 V_2 . J_{4,3}$$

$$+\frac{1}{72}n^2(n-2)(n-3)(n^2+8n-21)a^4 J_{4,2}^2$$

$$-\frac{1}{90}n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-21)a^4 V_2 . J_{6,2}$$

$$-\frac{1}{9}n(n-2)(n-3)(n-4)(3n-7)a^5 M$$

$$-\frac{1}{7}\binom{n-2}{6}a^6 J_{8,2}\Big].$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke lassen sich die ersten fünf Glieder der Gleichung der quadrirten Differenzen berechnen.

Um für die Gleichung von der gewöhnlichen Form

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0$$

die Gleichung der quadrirten Differenzen mit Hülfe von symmetrischen Functionen zu finden, kann man auf die in § 33 angedeutete Art verfahren*). Durch Entwicklung erhält man:

$$\Sigma(x_1-x_2)^2 = (n-1)S_2 - 2S_{1,1}\,,$$

$$\Sigma(x_1-x_2)^4 = (n-1)S_4 - 4S_{3,1} + 6S_{2,2}\,,$$

$$\Sigma(x_1-x_2)^6 = (n-1)S_6 - 6S_{5,1} + 15S_{4,2} - 20S_{3,3}\,, \text{ u. s. f.}$$

Bezeichnet man die Differenzengleichung mit

$$Z = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \cdots + Mz + N = 0\,,$$

wo $m = \binom{n}{2}$, so muss man so viele Summenreihen bilden, als Z unbestimmte Coefficienten hat, also gehen bis S_{2m}. Man wird dann zuerst mit den Coefficienten der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ die Grössen S_1, S_2, S_3, u. s. f. und hieraus mit Hülfe der Waring-schen Formeln (§ 30) die vorkommenden Grössen $S_{m,p}$ und endlich mit allen diesen Werthen nach den voranstehenden Formeln die

*) Burg, Lehrbuch der höheren Mathematik. I. S. 100. Wien 1832.

Grössen $\Sigma(x_1 - x_2)^m$ berechnen. Mit Hülfe dieser lassen sich dann nach § 28 die unbestimmten Coefficienten $A, B, C, \ldots$ der Gleichung der quadrirten Differenzen finden.

X. Substitution linearer, quadratischer, kubischer und höherer algebraischer Functionen der Unbekannten.

§ 37. Allgemeine Bemerkungen.

Die algebraische Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade wird in den meisten Fällen dadurch erzielt, dass man eine geeignete ganze algebraische Function niedrigeren Grades, bestehend aus der Hauptgrösse x und einer oder mehreren neuen Unbekannten, also

$$\varphi(x, y, z, u, \ldots) = 0$$

in die gegebene Function $f(x)$ einführt, in der Weise, dass man die Hauptunbekannte x aus beiden Gleichungen eliminirt. Man kann alsdann von der Resultante

$$\Phi(y, z, u, \ldots) = 0$$

eben so viele Partialgleichungen (Resolventen)

$$Z = 0\,, \quad U = 0, \text{ u. s. w.}$$

absondern, als neue Unbekannte vorhanden sind, so dass durch diese Theilung die Auflösung des übrigen Theiles der Function Φ, also

$$F(y) = 0,$$

welcher im Allgemeinen die Reducirte (réduite, ridotta) heisst, ermöglicht, d. h. auf die einer einfacheren Gleichung reducirt und von der Ausführung einfacherer Operationen abhängig gemacht wird.

Die Substitutionsmethode ist durch Ferrari und Vieta begründet, von denen Letzterer zuerst die meisten Reductionen, namentlich die Wegschaffung des zweiten Gliedes, lehrte. Sie ist später durch Graf Tschirnhausen, Euler, Waring, Bézout und Lagrange nach verschiedenen Richtungen weiter ausgebildet worden. Die Methode von Tschirnhausen*) besteht im Wesent-

*) Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione per D. T. Acta Erudit. Lipsiae 1683, p. 204 seq.

lichen in der Substitution einer andern algebraischen Function von der Form

$$\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} + \cdots + \sigma = y,$$

um mittels derselben aus der Hauptgleichung

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \cdots + t = 0$$

beliebig viele Glieder wegzuschaffen. Genauer kommt das Verfahren darauf hinaus, anstatt der Wurzel x der Hauptgleichung eine Wurzel der Substituirten einzusetzen, oder was dasselbe ist, durch Elimination von x aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x, y, \alpha, \beta, \ldots) = 0$$

eine neue Gleichung in y zu formen, welche dadurch, dass man über die unbestimmten Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma$ disponirt, auf weniger Glieder oder überhaupt auf eine einfachere Form reducirt wird. Unter der Voraussetzung $m < n$ kommen nämlich der Unbekannten y in der Substituirten eben so viele verschiedene Werthe zu, als wie der Unbekannten x in der Hauptgleichung. Daher wird die Resultante in Bezug auf y ebenfalls vom n^{ten} Grade sein, also etwa

$$y^n + A y^{n-1} + B y^{n-2} + \cdots + T = 0.$$

Die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ sind Functionen der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Wenn man nun m Coefficienten der Resultante $Y = 0$ zum Verschwinden bringen oder ihnen sonstige Relationen unterstellen will, so hat man m Bestimmungsgleichungen zwischen $m + 1$ Unbestimmten aufzulösen, wobei eine der Unbestimmten willkürlich bleibt. Das Hauptgeschäft bei der Transformation der gegebenen Gleichung ist also die Elimination der Hauptunbekannten x aus der gegebenen und der substituirten Gleichung.

Bereits vor Tschirnhausen hatte Vieta durch Substitution

Grunert, Die Methoden von Tschirnhaus und Jerrard zur Transformation der Gleichungen. Grun. Arch. XL. S. 214. 1863.

Bring, meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum. Lundae 1786. Ein Auszug davon in Grun. Arch. XLI. S. 105. 1864.

Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouv. Mém. de l'acad. roy. des sciences, année 1770, pg. 134—215; année 1771, pg. 138—254. Berlin 1772 et 1773.

Hunrath, Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausens Methode. I. Progr. Glückstadt 1876.

einer einfachen linearen Function der Unbekannten, nämlich durch die Variation

$$x - z = y$$

die Gleichungen reducirt, um sie zu einer einfacheren Lösung vorzubereiten. Dasselbe Princip suchten spätere Algebristen für die directe Auflösung der Gleichungen zu verwerthen, indem dabei zum Theil die definitive Wurzelform a priori in Rechnung gebracht wurde. Aus der Bemerkung, dass, wenn das zweite Glied fehlt, die Form der Wurzel für die Gleichung

$$\begin{aligned} &\text{zweiten Grades } x = \sqrt[2]{y_1}\,, \\ &\text{dritten Grades } x = \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}\,, \\ &\text{vierten Grades } x = \sqrt[4]{y_1} + \sqrt[4]{y_2} + \sqrt[4]{y_3} \end{aligned}$$

wird, glaubte Euler schliessen zu dürfen, dass, wenn das zweite Glied einer Gleichung gleich Null sei, die Substitution

$$x = \sqrt[n]{y_1} + \sqrt[n]{y_2} + \sqrt[n]{y_3} + \cdots + \sqrt[n]{y_{n-1}}$$

zur Auflösung führe, oder mit andern Worten die Form der gesuchten Wurzel sei*). Dabei sollten die Grössen $y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$ die Wurzeln einer Gleichung vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade bezeichnen. Er nannte diese Hülfsgleichung die Resolvente der Hauptgleichung. Euler erkannte jedoch bald, dass die Anzahl der in der linearen Function von x enthaltenen Wurzeln den Grad der Stammgleichung bei höheren Exponenten übersteige und deshalb auch zu einer Gleichung in x führe, welche in rationaler Form von höherem Grade als dem n^{ten} sei. Deshalb stellte er später**), wie bereits zwei Jahre vor ihm Waring***), den Satz auf, dass für Gleichungen, deren zweites Glied fehle, die Substitution

$$x = y\sqrt[n]{v} + z\sqrt[n]{v^2} + u\sqrt[n]{v^3} + \cdots + w\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

als Wurzelform allen Anforderungen genüge. Gibt man nämlich $\sqrt[n]{v}$ nach einander alle Werthe von $\sqrt[n]{1} \,.\, \sqrt[n]{v}$, so erhält man nur n verschiedene Ausdrücke für x. Durch Aufhebung der Wurzelexponenten sollte man zu einer Gleichung in x vom selben Grade

*) Euler, De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. Acad. Petrop. vet. VI. p. 223. 1739.

**) Euler, De resolutione aequationum cujusvis gradus. Nov. Comm. Acad. Petrop. IX. 1764.

***) Waring, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis. pg. 44. 1762.

gelangen, wie dem der Hauptgleichung, so dass durch Gleichsetzung homologer Glieder die übrigen unbestimmten Coefficienten $y, z, u, \ldots$ sich durch eben so viele Partialgleichungen würden bestimmen lassen. Man erhält so freilich eine Finalgleichung in v, von deren Lösung dann die definitive Berechnung der Wurzel x abhängt. Die Finalgleichung in v ist nun in der That bei den kubischen Gleichungen vom zweiten, bei den biquadratischen vom dritten Grade. An dem Versuche, die Finalgleichung für die allgemeine Gleichung fünften Grades überhaupt zu erhalten, scheiterte Euler, obwohl er der Meinung blieb, sie müsse vom vierten Grade sein, da seine Methode sonst nicht den Namen einer allgemeinen verdiente*).

Bézout**) von einem ähnlichen Prinzip ausgehend, betrachtete die gegebene Gleichung als ein Resultat der Elimination von y aus den beiden Gleichungen

$$x = py + qy^2 + ry^3 + \cdots + wy^{n-1}$$

und

$$y^n - 1 = 0 .$$

Diese Methode unterscheidet sich von der Waring-Euler-schen Methode nur dadurch, dass Euler mittels der Gleichung

$$y^n - v = 0$$

eine Finalgleichung in v sucht, Bézout aber sogleich $v = 1$ annimmt und so die Operation nach einer andern Richtung vereinfacht. Bézout modificirt seine Methode noch für den Fall, dass n eine zusammengesetzte Zahl ist, z. B. $n = kl$. Er gibt für diesen Fall die Regel, die Hauptgleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

zu bilden aus den beiden andern

$$x^l - (m + py + qy^2 + \cdots + wy^{k-1})x^{l-1} + (m_1 + p_1 y + \cdots w_1 y^{k-1})x^{l-2} - \cdots \pm (m_{k-1} + p_{k-1} y + \cdots + w_{k-1} y^{k-1}) = 0$$

und

$$y^k - 1 = 0 .$$

*) Blomstrand, De methodis praecipuis etc. VII. Lundae 1847.

**) Bézout, Mémoire sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés, qui admettent une résolution algébrique. Mém. de l'acad. des sciences, année 1762. Paris 1764. — Mémoire sur la résolution générale des équations de tous les degrés. Ibid. année 1765. Paris 1768.

Die Elimination von y in dieser und der vorangehenden Methode wird in einer äusserst eleganten Weise auf die Auflösung von linearen Gleichungen (Determinante) zurückgeführt.

Obwol die besprochenen Substitutionen von der von Tschirnhausen vorgeschlagenen abzuweichen scheinen, so lassen sie sich doch auf dieselbe zurückführen. Letztere liefert nämlich mit Anwendung der Methode des grössten gemeinschaftlichen Divisors (§ 38) für die Wurzel die Form

$$x = \frac{F + Gy + Hy^2 + \cdots + Ky^\mu}{L + My + Ny^2 + \cdots + Ry^\mu},$$

wo $\mu = \frac{1}{2}n$, wenn n eine gerade Zahl, sonst $\mu = \frac{1}{2}(n-1)$ ist; ausserdem $y^n = v$. Daraus folgt, dass, wenn die Coefficienten $F, G, \ldots$ u. s. w. und y noch unbestimmt gelassen werden, es gestattet sein wird, die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ als eine solche zu betrachten, welche durch Elimination von y aus jenen beiden Gleichungen entstanden ist. Wenn die Finalgleichung in x mit der gegebenen verglichen wird, so gibt das n Bestimmungsgleichungen für eben so viele Unbestimmte, während die etwa noch übrigen willkürlich bleiben.

Einfacher wird indess die Rechnung, wenn man die gebrochene Function auf eine ganze bringt, also

$$x = o + py + qy^2 + \cdots + wy^{m-1},$$

was immer mittels der Hülfsgleichung $y^n - v = 0$ möglich ist. Um einen geeigneten Factor für den Dividenden und Divisor zu finden, braucht man nur zu setzen

$$L + My + Ny^2 + \cdots + Ry^\mu = z$$

und y mit Hülfe von $y^n = v$ zu eliminiren, wodurch man erhält

$$z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \cdots + Uz + V$$
$$= z\,(z^{n-1} + Az^{n-2} + Bz^{n-3} + \cdots + U) + V = 0.$$

Der gesuchte Factor ist also

$$z^{n-1} + Az^{n-2} + Bz^{n-3} + \cdots + U$$

und der Divisor verwandelt sich in $-V$.

Eine andere bemerkenswerthe Substitution, welche vor allen andern den Vorzug verdient, wurde von Lagrange und Vandermonde zur Auflösung der Gleichungen verwendet, und nicht unpassend mit dem Namen Combinations- oder Typenmethode bezeichnet. Während nämlich bei den früheren Substitutionen die Wurzel y der Reducirten eine ganze algebraische Function immer nur einer einzigen Wurzel der gegebenen Gleichung umfasst, z. B. bei der Tschirnhausen'schen Methode

$$\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} + \cdots + \sigma = y$$

und folgeweise

$$\alpha x_1^m + \beta x_1^{m-1} + \gamma x_1^{m-2} + \cdots + \sigma = y_1,$$
$$\alpha x_2^m + \beta x_2^{m-1} + \gamma x_2^{m-2} + \cdots + \sigma = y_2, \text{ u. s. w.},$$

suchten die letztgenannten Algebristen eine Resolvente herzustellen, deren Wurzeln aus symmetrischen Functionen einiger oder aller n Wurzeln der gegebenen Gleichung, aus sogenannten Wurzeltypen gebildet werden. Lagrange*) hatte bemerkt, dass der Gang der Auflösung immer auf gewisse einfache Functionen der unbekannten Wurzeln führe. Er fasste zuerst den scharfsinnigen Gedanken, dass für jede specielle Gleichung eine besonders geeignete Function aller Wurzeln a priori bestimmt werden müsse, der Art, dass ihre Berechnung von einer Gleichung von niedrigerem Grade abhänge oder einer solchen, die sich in mehrere einfachere Gleichungen zerlegen lasse. Es sei ausserdem erforderlich, dass man aus der entdeckten Function die Wurzeln selbst leicht herleiten könne. Er substituirt zu diesem Zweck

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n = y,$$

wo α eine der Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^n - 1 = 0$$

ist. Bei der Auflösung der biquadratischen Gleichung substituirt er auch

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = y.$$

Vandermonde**) lehnt seine Methode an die ältere von Euler an, indem er ausgeht von der Substitution

$$x = \frac{1}{n}\left\{ \sqrt[n]{y_0} + \sqrt[n]{y_1} + \sqrt[n]{y_2} + \cdots + \sqrt[n]{y_{n-1}} \right\},$$

dann aber an die Stelle von y die linearen Functionen der Wurzeln

---

*) Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouv. Mém. de l'acad. des sciences, année 1770, pg. 134—215; année 1771, pg. 138—254. Berlin 1772 et 1773.

**) Vandermonde, Mémoire sur la résolution des équations. Mém. de l'acad. roy. des sciences, année 1772. Paris 1774.

$$\begin{aligned}
y_0 &= (x_1 + \alpha_1{}^0 x_2 + \alpha_2{}^0 x_3 + \cdots)^n\,, \\
y_1 &= (x_1 + \alpha_1{}^1 x_2 + \alpha_2{}^1 x_3 + \cdots)^n\,, \\
y_2 &= (x_1 + \alpha_1{}^2 x_2 + \alpha_2{}^2 x_3 + \cdots)^n\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{n-1} &= (x_1 + \alpha_1{}^{n-1} x_2 + \alpha_2{}^{n-1} x_3 + \cdots)^n\,;
\end{aligned}$$

einsetzt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha^{n-1}$ die imaginären Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^n - 1 = 0$$

bezeichnen. Die Substituirte wird dadurch zu einer identischen Gleichung, und das Verfahren besteht weiter darin, dass er die Potenzirung der linearen Function ausführt und womöglich auf symmetrische Functionen zu bringen sucht.

Aus Allem geht nun hervor, dass bei der Auflösung der Gleichungen die wichtigste Operation in der Elimination der Hauptunbekannten besteht, und zwar im Allgemeinen aus der gegebenen Gleichung und einer zweiten, welche ausser der Unbekannten x noch irgend eine Anzahl unbestimmter Grössen enthält. Dabei sind besonders zwei Fälle zu unterscheiden:

a) die allgemeine Wurzelgrösse x wird eliminirt aus

$$f(x) = 0, \ \varphi(x, y, z, u, \cdots) = 0;$$

b) sämmtliche Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x^n$ werden eliminirt aus

$$f(x) = 0, \ [x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, y] = 0.$$

Die Elimination kann auf sehr verschiedene Arten bewerkstelligt werden, nämlich

1) durch die Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers;

2) durch die Methode der symmetrischen Functionen;

3) durch die Methode der linearen Gleichungen von Euler und Bézout;

4) durch die Methode der linearen Gleichungen und ihrer Determinante nach Hesse und Sylvester.

Wir wollen sämmtliche Methoden in den folgenden Paragraphen entwickeln.

§ 38. Methode der Elimination der Hauptunbekannten durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers beider Gleichungen.

Diese Methode wurde zuerst von Newton*) angegeben. Gegeben seien die Gleichungen

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$
$$\varphi(x, y) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + U = 0,$$

wo $A, B, C, \ldots$ unbestimmte Coefficienten sind, welche auch y enthalten. Es soll aus beiden eine Gleichung $F(y) = 0$ gebildet werden, in welcher kein x vorkommt, sondern nur Potenzen von y, deren Coefficienten Functionen von $a, b, c, \ldots$ und $A, B, C, \ldots$ sein werden.

Bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln der ersten Gleichung, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ die simultanen Wurzelwerthe von y, so ist zunächst $x = \alpha$ und $y = \alpha_1$ ein solches Paar. Denkt man sich nun den Werth α_1 für y in die zweite Gleichung substituirt, so müssen beide Polynome $f(x)$ und $\varphi(x, \alpha_1)$ den Factor $x - \alpha$ gemeinschaftlich haben. Dasselbe würde für die übrigen Paare simultaner Wurzeln gelten. Da man aber die Wurzeln selbst noch nicht kennt, so wird man den gemeinschaftlichen Factor durch die Methode des grössten gemeinschaftlichen Divisors bestimmen müssen. Es sei nun durch die Reihenfolge der Divisionen der Grad der Reste R fortwährend erniedrigt und erhalten

$$\begin{aligned} f &= q_1 \varphi + R_1, \\ \varphi &= q_2 R_1 + R_2, \\ R_1 &= q_3 R_2 + R_3, \\ &\cdots\cdots \\ R_{m-2} &= q_m R_{m-1} + R_m. \end{aligned}$$

Man gelangt schliesslich zu einem Reste R_m, welcher kein x mehr enthält. Weil nun f und φ gleich Null sind, so ist es nach der ersten Gleichung auch R_1 u. s. f. alle übrigen Reste; folglich auch $R_m = 0$. Diese Gleichung ist dann die gesuchte Finalgleichung $F(y) = 0$, welche sämmtliche Wurzeln von y liefert. Es muss diese Finalgleichung, welche ausser y noch theils bestimmte, theils un-

---

*) Man vergl. Euler, Introductio in anal. cap. 19, und Meyer Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebr. Gleichungen.

Katter, Ueber die Resultante zweier algebraischen Gleichungen. § 1. 2 u. 5.

bestimmte Grössen enthält, von demjenigen Grade in Bezug auf y sein, als verschiedene Werthe desselben möglich sind, um der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ zu genügen. Da der letzte Divisor R_{m-1} ebenfalls gleich Null und von der Form $Px + Q$ ist, so kann dieser Ausdruck als der gemeinschaftliche Factor betrachtet werden. Daraus ergibt sich sofort

$$x = -\frac{Q}{P},$$

und man kann also die zu jedem Werthe β zugehörigen Werthe von α finden, indem man die aus $R_m = 0$ gefundenen Werthe von y in diese Gleichung einsetzt.

Euler hat bewiesen,*) dass wenn die unbestimmten Coefficienten $A, B, C, \ldots$ in Bezug auf y vom ersten Grade sind, der Grad der Finalgleichung auch der n^{te} sein muss. Es ist einleuchtend, dass dies der Fall ist, da die Resultante

$$R_m = F(y) = 0$$

alle diejenigen Werthe liefern muss, welche für y in $R_{m-1} = 0$ substituirt, alle möglichen Binomialfactoren $x - \alpha$ der Hauptgleichung geben.

In vielen Fällen ist jedoch die durch diese Methode erhaltene Finalgleichung nicht genau die Resultante; sie kann entweder einen überzähligen Factor haben und sogenannte fremde Lösungen geben, oder es können im Laufe der Operationen Factoren verloren gehen, so dass man nicht die vollständige Resultante hat. Wir wollen diese Fälle einzeln betrachten.

1. Fremde Lösungen. Wenn man bei der Anwendung der Methode des grössten gemeinschaftlichen Divisors bei der Division zur Erzielung ganzer Quotienten die Factoren f_1, f_2, f_3, u. s. w. eingeführt hat, welche Functionen der bestimmten und unbestimmten Coefficienten der beiden Stammgleichungen sind, so sind die daraus entstandenen Factoren aus der Finalgleichung als fremde Lösungen zu entfernen. Für unsern Fall muss die Resultante in Bezug auf die unbestimmten Coefficienten $A, B, C, \ldots U$ vom n^{ten} Grade sein, und wenn y in allen mit Ausnahme des Absolutgliedes U fehlt, wenn z. B.

$$\varphi(x, y) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + (U - y) = 0$$

ist, auch in Bezug auf y vom n^{ten} Grade. Es ist nämlich

*) Man sehe § 39.

$$y-(A\alpha^m+B\alpha^{m-1}+\cdots+U)=0,$$
$$y-(A\beta^m+B\beta^{m-1}+\cdots+U)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y-(A\tau^m+B\tau^{m-1}+\cdots+U)=0.$$

Multiplicirt man sämmtliche Binomialfactoren, so findet man mit Anwendung der Summenformeln der symmetrischen Functionen, dass die Finalgleichung nicht bloss in Bezug auf y, sondern auch in Bezug auf die übrigen Unbestimmten vom n^{ten} Grade sein muss. Dass dies bei der Finalgleichung nicht immer zutrifft, zeigt folgendes Beispiel: x zu eliminiren aus

$$\text{I.}\quad ax^3+bx^2+cx+d=0,$$
$$\text{II.}\quad a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0.$$

Man multiplicire I. mit a', II. mit a und subtrahire; also

$$\text{III.}\quad (ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)x+(ad'-a'd)=0.$$

Darauf multiplicire man I. mit d', II. mit d und subtrahire, woraus sich ergibt

$$\text{IV.}\quad (ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)x+(cd'-c'd)=0.$$

Mit III. und IV. verfahre man auf dieselbe Art, indem man die Methode des gemeinschaftlichen Divisors nach ab- und aufsteigenden Potenzen zugleich vornimmt. Man erhält dann ein Paar Ausdrücke für den gemeinschaftlichen Divisor, welche man einander gleich setzen kann, nämlich

$$x-\frac{(ad'-a'd)^2-(ab'-a'b)(cd'-c'd)}{(ab'-a'b)(bd'-b'd)-(ad'-a'd)(ac'-a'c)}$$

und

$$x-\frac{(bd'-b'd)(ad'-a'd)-(ac'-a'c)(cd'-c'd)}{(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ad'-a'd)^2}.$$

Hieraus folgt die Finalgleichung

$$[(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ad'-a'd)^2]^2-[ab'-a'b)(bd'-b'd)$$
$$-(ad'-a'd)(ac'-a'c)][(ac'-a'c)(cd'-c'd)-(bd'-b'd)(ad'-a'd)]$$
$$=0.$$

Schreibt man der Kürze wegen $ab'-a'b=(ab)$, so erhält man nach Entwickelung der Gleichung die folgende:

$$(ad)^4-[2(ab)(cd)+(ac)(bd)](ad)^2+[(ab)(bd)^2+(ac)^2(cd)](ad)$$
$$+[(ab)(cd)-(ac)(bd)](ab)(cd)=0,$$

welche in Bezug auf a' offenbar vom vierten Grade ist. Nun ist aber

$$(ab)(cd)-(ac)(bd)=-(ad)(bc),$$

folglich ein überzähliger Factor $(ad) = ad' - a'd$. Man kann hierdurch die Finalgleichung dividiren und erhält eine Resultante bezüglich a' vom dritten Grade, nämlich:

$$(ad)^3 - [2(ab)(cd) + (ac)(bd)](ad) + [(ab)(bd)^2 + (ac)^2(cd)] - (ab)(bc)(cd) = 0.$$

2. Die vollständige Resultante. Wenn im Laufe der Division zur Vereinfachung der Rechnung aus den Resten Factoren $f_1, f_2, \ldots$, welche Functionen der nicht zu eliminirenden Unbekannten sind, ausgeschieden werden, so müssen diese Factoren der Finalgleichung als zugehörige Partialgleichungen noch mit f zur sovielten Potenz hinzugefügt werden, als der Grad des den jedesmaligen Dividenden bildenden Polynoms in Bezug auf die zu Eliminirende x Einheiten beträgt.

Beispiel: x zu eliminiren aus

$$\text{I.}\quad x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 2y^3 = A = 0;$$
$$\text{II.}\quad x^3 - 4x^2 + (6-y)x - 2y^2 = A_1 = 0.$$

A sei der erste Dividend. Es ergibt sich dann

$$R_1 = -4(y-1)x^2 + (5y^2 + y - 6)x - 2y^2(y-1) = 0.$$

Hierin ist der Factor $y - 1$ enthalten und der Dividend A_1 vom dritten Grade. Lässt man den Factor vorläufig aus der Rechnung fort, so wird der zweite Divisor

$$\text{III.}\quad 4x^2 + (5y + 6)x + 2y^2 = 0.$$

Multiplicirt man II. mit y und subtrahirt von I., so erhält man nach Division durch $y - 1$

$$\text{IV.}\quad x^2 - 6y = 0.$$

Aus III. und IV. folgt durch directe Einsetzung von x

$$2y^4 - 27y^3 + 108y^2 - 108y = 0,$$

und da die Resultante vom neunten Grade sein muss

$$(y-1)^3(2y^6 - 27y^5 + 108y^4 - 108y^3) = 0.$$

Wenn in dem gemeinschaftlichen Divisor $Px + Q$ der beiden Polynome die Coefficienten P und Q durch Substitution einer der Wurzeln von y verschwinden, so dass man für x den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ erhält, so ist dies ein Zeichen, dass für $y = \alpha_1$ dem x mehrere Wurzeln entsprechen, was für unsern Fall offenbar eintreten muss, wenn die Finalgleichung gleiche Wurzeln enthält. Man suche alsdann x aus dem Reste R_{m-2} zu bestimmen, also aus

$$R_{m-2} = O_1 x^2 + P_1 x + Q_1 = 0.$$

Wenn auch hier die Coefficienten verschwinden, aus

$$R_{m-3} = N_2 x^3 + O_2 x^2 + P_2 x + Q_2 = 0; \text{ u. s. w.}$$

§ 39. Von dem Grade der Resultanten.

Um zu wissen, ob man durch die Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors zweier Polynome ihre wahre Resultante erhalten hat, muss man den Grad derselben in Bezug auf die Coefficienten der Gleichung kennen. Bézout und Euler haben hierfür ein paar wichtige Theoreme veröffentlicht, welche sich mit Hülfe der Sätze über die symmetrischen Functionen beweisen lassen.

Theorem von Bézout*). Der Grad der Resultante zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten ist nicht grösser, als das Product der beiden Ordnungsexponenten, und genau gleich dem Producte, wenn die Gleichungen vollständig sind.

Beweis von Poisson. Der Grad der Finalgleichung wird offenbar nicht vermindert, wenn man in den Coefficienten der beiden Gleichungen in x nur immer das Glied mit der höchsten Potenz von y beibehält, wenn man also annimmt:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad x^n + ayx^{n-1} + by^2x^{n-2} + \cdots + sy^{n-1}x + ty^n = 0,\\
&\text{II.} \quad x^m + a_1yx^{m-1} + b_1y^2x^{m-2} + \cdots + s_1y^{m-1}x + t_1y^m = 0.
\end{aligned}$$

Dividirt man I. durch y^n, II. durch y^m und betrachtet $\frac{x}{y}$ als Hauptgrösse, so wird

$$\text{III.} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n + a\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + b\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \cdots + s\left(\frac{x}{y}\right) + t = 0,$$

$$\text{IV.} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^m + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} + b_1\left(\frac{x}{y}\right)^{m-2} + \cdots + s_1\left(\frac{x}{y}\right) + t_1 = 0,$$

wo die Coefficienten Zahlen bedeuten. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ die Wurzeln der ersten Gleichung, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \cdots$ die der zweiten, so hat man auch

$$\text{V.} \quad \left(\frac{x}{y} - \alpha\right)\left(\frac{x}{y} - \beta\right)\left(\frac{x}{y} - \gamma\right)\cdots = 0,$$

$$\text{VI.} \quad \left(\frac{x}{y} - \alpha_1\right)\left(\frac{x}{y} - \beta_1\right)\left(\frac{x}{y} - \gamma_1\right)\cdots = 0,$$

oder auch

---

*) Bézout, Sur le degré des équations résultant de l'évanouissement des inconnues. Mém. Par. 1764.

$$\text{VII.} \quad (x - \alpha\, y)\,(x - \beta\, y)\,(x - \gamma\, y) \cdots = 0,$$
$$\text{VIII.} \quad (x - \alpha_1 y)\,(x - \beta_1 y)\,(x - \gamma_1 y) \cdots = 0.$$

Substituirt man nun nach und nach in VII. für x die Wurzeln der Gleichung VIII., nämlich $x = \alpha_1 y$, $x = \beta_1 y, \ldots$ so erhält man, da für jede der Substitutionen das Polynom in VII. verschwinden muss, die m Gleichungen:

$$y^n\,(\alpha_1 - \alpha)\,(\alpha_1 - \beta)\,(\alpha_1 - \gamma) \cdots = 0,$$
$$y^n\,(\beta_1 - \alpha)\,(\beta_1 - \beta)\,(\beta_1 - \gamma) \cdots = 0, \text{ u. s. w.}$$

Diese Gleichungen geben sämmtliche Auflösungen von y und deren Product nothwendig die vollständige Resultante. Dies Product ist aber vom mn^{ten} Grade.

§ 40. Elimination der Hauptgrösse durch die Methode der symmetrischen Functionen. — Theorem von Euler*).

Die im Folgenden entwickelte Methode ist von Euler 1748 gegeben; sie wurde 1750 von Cramer verbessert. Das daraus abgeleitete Theorem lässt das allgemeine Gesetz erkennen, von welchem Grade in Beziehung auf die Coefficienten der beiden Gleichungen die Resultante sein muss.

Theorem von Euler. Die Resultante zweier Gleichungen vom n^{ten} und m^{ten} Grade in Bezug auf die Hauptgrösse x ist vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf ihre Coefficienten, und zwar in Bezug auf die Coefficienten der ersten vom m^{ten}, in Bezug auf die der zweiten vom n^{ten} Grade. Sie ist eine homogene Function in Bezug auf die Coefficienten.

Zum Beweise dieses Theorems nehme man an die Gleichungen seien

$$f(x) = a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + t_1 = 0,$$
$$\varphi(x) = a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \cdots + t_2 = 0.$$

Um zu untersuchen, welcher Art die gemeinschaftliche Wurzel

$$x = -\frac{Q}{P}$$

---

*) Euler, Introductio in Anal. cap. 19. Lausanne 1748.

Cramer, Analyse des courbes. 1750. Appendice II.

Poisson, Sur l'élimination dans les questions algébriques. Mém. dans le Journ. polyt. 1802.

Lacroix, Elémens d'algèbre. II. § 9. 1799.

sei, setze man die hypothetischen Wurzeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ in die zweite Gleichung ein, wodurch auch dieser Genüge geschehen muss, wenn das x der einen mit dem x der andern identisch ist. Es ist demnach

$$\varphi(\alpha_1) = a_2 \alpha_1{}^m + b_2 \alpha_1{}^{m-1} + c_2 \alpha_1{}^{m-2} + \cdots + t_2 = 0,$$
$$\varphi(\beta_1) = a_2 \beta_1{}^m + b_2 \beta_1{}^{m-1} + c_2 \beta_1{}^{m-2} + \cdots + t_2 = 0,$$

u. s. w.

Im Allgemeinen wird die Bestimmung der Wurzelwerthe $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ unausführbar sein in algebraischen Ausdrücken. Wir erhalten aber eine von x freie Finalgleichung bestehend aus Functionen von $a_2, b_2, c_2 \ldots$ und aus symmetrischen Functionen der Wurzeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$, wenn wir sämmtliche Partialgleichungen mit einander multipliciren. Die symmetrischen Functionen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ sind bestimmbare Functionen der Coefficienten $a_1, b_1, c_1 \ldots$ Die Resultante ist demnach

$$\varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\beta_1) \cdot \varphi(\gamma_1) \ldots \varphi(\tau_1) = 0.$$

Sie ist aber vollständig und hat weder fremde noch fehlende Lösungen. Wie aus der Bildung des Products hervorgeht, sind in ihr die Coefficienten in Bezug auf φ vom n^{ten} Grade, in Bezug auf f vom m^{ten} Grade vorhanden, also in Bezug auf alle Coefficienten vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade. Es ist übrigens gleichgültig, ob man

$$\varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\beta_1) \cdot \varphi(\gamma_1) \ldots \varphi(\tau_1) = 0$$

oder

$$f(\alpha_2) \cdot f(\beta_2) \cdot f(\gamma_2) \ldots f(\tau_2) = 0$$

setzt, wo $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ die Wurzeln der zweiten Gleichung sind.

§ 41. Eine andere Methode der Elimination durch die Anwendung der symmetrischen Functionen*).

In speciellen Fällen, wo der Ordnungsexponent der einen Gleichung verhältnissmässig klein ist, empfiehlt sich folgende Methode zur Anwendung. Gegeben sei

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + t = 0,$$
$$\varphi(x) = x^2 + yx + z = 0.$$

Bezeichnen y und z unbestimmte Coefficienten, so erhält man die Resultante in y oder z, wenn man die zweite Gleichung nach ihnen auflöst, also

*) Die Transformation und Auflösung der Gleichungen fünften Grade nach Jerrard und Hermite. Zeitschr. f. Math. u. Phys. IV. S. 78. 1859.

$$y = -x - z\left(\frac{1}{x}\right), \quad z = -x^2 - yx,$$

und dann die Summe der Potenzen von y oder z bestimmt. Da die Finalgleichung sowol in y als in z vom n^{ten} Grade sein muss, so sei

$$z^n + A_1 z^{n-1} + B_1 z^{n-2} + \cdots + T_1 = 0.$$

Aus

$$z = -x^2 - yx$$

olgt zunächst

$$\begin{aligned}
\Sigma(z) &= -[x_1^2] - y[x_1] = -A_1, \\
\Sigma(z^2) &= \quad [x_1^4] + 2y[x_1^3] + y^2[x_1^2] = A_1^2 - 2B_1,
\end{aligned}$$

u. s. w.

wodurch die Werthe von $A_1, B_1, C_1, \ldots$ bestimmt werden.

Um die Finalgleichung in z zu erhalten, bilde man nacheinander die Potenzen von

$$y = -x - z\left(\frac{1}{x}\right)$$

und daraus weiter

$$\begin{aligned}
\Sigma(y) &= -[x_1] - z\left[\frac{1}{x_1}\right] = -A_2, \\
\Sigma(y^2) &= \quad [x_1^2] + 2zn + z^2\left[\frac{1}{x_1^2}\right] = A_2^2 - 2B_2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Gleichungen liefern die Coefficienten der Resultante

$$y^n + A_2 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \cdots + T_2 = 0.$$

Sehr häufig wird die Aufgabe gestellt, die Resultante in Potenzen des Absolutgliedes oder eines Theiles desselben zu suchen. Gegeben seien demnach die Gleichungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0, \\
\varphi(x, y) &= x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \cdots + (\tau - y) = 0.
\end{aligned}$$

Wenn man die Gleichung

$$y = x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \cdots + \tau$$

der Reihe nach auf alle ganze Potenzen erhebt, so kommen successive alle Potenzen von der 1^{sten} bis zur mn^{ten} zum Vorschein; jedoch können $x^n, x^{n+1}, \ldots x^{mn}$ mit Hülfe der Gleichung $f(x) = 0$ entfernt werden, weil

$$\begin{aligned}
x^n &= -ax^{n-1} - bx^{n-2} - \cdots - sx - t, \\
x^{n-1} &= -ax^n - bx^{n-1} - \cdots - sx^2 - tx \\
&= (a^2 - b)x^{n-1} + (ab - c)x^{n-2} + (ac - d)x^{n-3} + \cdots
\end{aligned}$$

u. s. w.

Es bleiben daher Gleichungen von folgender Form übrig:

$$\begin{aligned}
y &= \tau + \sigma x + \varrho x^2 + \cdots + x^m \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + x^m \\
y^2 &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} \\
y^3 &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^n &= k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n-1} x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Hierin sind $b_0, b_1, b_2 \ldots$ ganze und homogene quadratische Functionen von $a_0, a_1, a_2 \ldots$ oder $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; ebenso $c_0, c_1, c_2 \ldots$ ganze und homogene kubische Functionen derselben Grössen u. s. w.

Es wird nun nach dem Theorem von Euler die Resultante in y vom Grade der Gleichung $f(x) = 0$, also vom n^{ten} Grade sein. Sie sei

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \cdots + T = 0,$$

und ihre Wurzeln $y_1, y_2, y_3 \ldots$; die zugehörigen der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechend $x_1, x_2, x_3 \ldots$ Alsdann lassen sich aus den Gleichungen für y^r immer Beziehungen herleiten zwischen den Summen

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
T_1 &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \\
T_2 &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,
\end{aligned}$$

u. s. w.,

indem man für x und y successive die verschiedenen Wurzeln derselben einsetzt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
T_1 &= na_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + S_m, \\
T_2 &= nb_0 + b_1 S_1 + b_2 S_2 + \cdots + b_{n-1} S_{n-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_n &= nk_0 + k_1 S_1 + k_2 S_2 + \cdots + k_{n-1} S_{n-1}.
\end{aligned}$$

Mittels der Newton'schen Formeln

$$\begin{aligned}
0 &= S_1 + a, \\
0 &= S_2 + aS_1 + 2b, \\
0 &= S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c, \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

können die Werthe von S_r gebildet werden. Substituirt man dieselben in T, so erhält man diese Werthe ausgedrückt in $a, b, c, \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ können dann berechnet werden aus den Newton'schen Formeln

$$0 = T_1 + A,$$
$$0 = T_2 + AT_1 + 2B,$$
$$0 = T_3 + AT_2 + BT + 3C, \text{ u. s. w.}$$

Man kann übrigens die Newton'schen Formeln umgehen, indem man in den Gleichungen für y^r die $n - 1$ Grössen

$$x,\ x^2, \ldots x^m,\ x^{m+1}, \ldots x^{n-1}$$

als eben so viele Unbekannte

$$x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_{n-1}$$

betrachtet, wodurch jene Gleichungen linear werden.

Die so gefundenen Werthe der auf einander folgenden Potenzen von x können dann in die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ ohne Weiteres eingesetzt werden, um die Resultante daraus hervorgehen zu lassen. Diese Methode hat offenbar noch den Vortheil, dass sie $x_1 = x$ rational durch y ausgedrückt liefert, also zeigt, wie die Werthe der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ gefunden werden, nachdem aus der Resultante die Wurzeln $y_1, y_2, y_3 \ldots$ gefunden sind.

§ 42. Die Methode der linearen Gleichungen von Euler*).

Euler hat eine höchst elegante Methode der Elimination gegeben, welche sich durch die Auflösung einer Reihe von linearen Gleichungen bewerkstelligen lässt. Gegeben seien die Gleichungen

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0,$$
$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \cdots + \tau = 0.$$

Ist x_1 eine gemeinschaftliche Wurzel und also $x - x_1$ ein binomischer Factor, welcher beiden Gleichungen zukommt, so kann man annehmen, es sei

*) Euler, Introductio in anal. infinit. II. cap. XIX.

—— Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations. Mém. de l'acad. de Berlin 1764. p. 91.

Bézout, Mémoire sur la résolution générale des équations de tous les degrés. Mém. de l'acad., année 1765. Paris 1768.

—— Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779.

Lacroix, Elémens d'algébre. I. § 193.

Crelle, Lehrbuch der Arithm. u. Algebra. pg. 699. Berlin 1825.

$$x^n + ax^{n-1} + \cdots = (x - x_1)(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots),$$
$$x^m + \alpha x^{m-1} + \cdots = (x - x_1)(x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots).$$

Durch Gleichsetzung der Werthe von $x - x_1$ erhält man sofort

$$(x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots)(x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \beta_1 x^{m-3} + \cdots),$$
$$= (x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \cdots)(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots).$$

Damit diese Relation unabhängig von dem besondern Werthe von x bleibe, muss man nach der ausgeführten Multiplication die homologen Coefficienten einander gleich setzen. Aus den so entstandenen $n + m - 1$ Gleichungen kann man dann die $n + m - 2$ unbestimmten Grössen $a_1, b_1, c_1, \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ nach den bekannten Methoden für lineare Gleichungen eliminiren, wobei eine Gleichung mehr vorhanden ist, als Unbestimmte. Darum bleibt eine Gleichung übrig, welche nach der Substitution der aus den übrigen gefundenen Werthen der unbestimmten Coefficienten nur die Coefficienten der gegebenen Gleichungen und kein x enthält, also die Finalgleichung ist.

Aus der Gleichung

$$x - x_1 = \frac{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots}{x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + b_1 x^{n-2} + \cdots},$$

oder

$$x - x_1 = \frac{x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \cdots}{x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \beta_1 x^{m-3} + \cdots}$$

lassen sich endlich die simultanen Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ zu $y_1, y_2, y_3 \ldots$ berechnen.

Die linearen Bestimmungsgleichungen lassen sich ordnen, wie folgt:

$$\begin{array}{llllllllll}
1 + 0 & + 0 & + 0 & . & -1 & - 0 & - 0 & - 0 & . & = 0, \\
a + 1\alpha_1 & + 0 & + 0 & . & -\alpha & - 1a_1 & - 0 & - 0 & . & = 0, \\
b + a\alpha_1 & + 1\beta_1 & + 0 & . & -\beta & - \alpha a_1 & - 1b_1 & - 0 & . & = 0, \\
c + b\alpha_1 & + a\beta_1 & + 1\gamma_1 & . & -\gamma & - \beta a_1 & - \alpha b_1 & - 1c_1 & . & = 0, \\
. + c\alpha_1 & + b\beta_1 & + a\gamma_1 & . & . & - \gamma a_1 & - \beta b_1 & - \alpha c_1 & . & = 0, \\
. \quad . & + c\beta_1 & + b\gamma_1 & . & . & . & - \gamma b_1 & - \beta c_1 & . & = 0, \\
. \quad . & . & + c\gamma_1 & . & . & . & . & - \gamma c_1 & . & = 0, \\
. \quad . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

§ 43. Die Methode der linearen Gleichungen von Bézout.

In § 37 ist mitgetheilt worden, dass Bézout bei der Transformation der Gleichung ausging von den beiden Gleichungen

$$x = py + qy^2 + ry^3 + \cdots + wy^{n-1},$$

und

$$y^n - 1 = 0.$$

Er suchte hieraus durch Elimination von y die Gleichung

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

zu bilden, was er auf folgende Weise bewerkstelligte. Man multiplicirt die erste Gleichung der Reihe nach mit $y, y^2, y^3, \ldots y^{n-1}$. Mit Anwendung der zweiten erhält man so

$$\begin{array}{l}
-x + py + qy^2 + ry^3 + \cdots + wy^{n-1} = 0, \\
w - xy + py^2 + qy^3 + \cdots + vy^{n-1} = 0, \\
v + wy - xy^2 + py^3 + \cdots + uy^{n-1} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p + qy + ry^2 + sy^3 + \cdots - xy^{n-1} = 0.
\end{array}$$

Betrachtet man hierin $y, y^2, y^3, \ldots$ als eben so viele lineare Grössen, so hat man ebenfalls eine Gleichung mehr als Unbestimmte, woraus sich die Finalgleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + T = 0$$

ergibt und woraus durch Gleichsetzung homologer Coefficienten die unbestimmten Coefficienten $p, q, r, \ldots$ gefunden werden.

Ist n eine zusammengesetzte Zahl kl, z. B. $k = 2$, $l = 3$, so geht Bézout an die Elimination von y aus den beiden Gleichungen

$$x^3 - (m + py)x^2 + (m_, + p_, y)x - (m_{,,} + p_{,,} y) = 0,$$
$$y^2 - 1 = 0.$$

Da y zwei, allgemein k Werthe hat, so liegt es nahe, die Gleichung in x in zwei Gleichungen dritten Grades zu theilen, also

$$x^3 - z_1 x^2 + u_1 x - v_1 = 0,$$
$$x^3 - z_2 x^2 + u_2 x - v_2 = 0.$$

Diese enthalten sämmtliche Wurzeln der gegebenen Gleichung und zwar die erste x_1, x_3, x_5, die zweite x_2, x_4, x_6.

Dabei ist

$$z_1 = [x_1], \quad u_1 = [x_1 x_3], \text{ u. s. w.}$$

Ist nun $\alpha = \sqrt[2]{1}$ so ist:

$$m + p \ = z_1,$$
$$m + \alpha p = z_2,$$

$$\begin{aligned}
m_{,} + p_{,} &= u_1 ,\\
m_{,} + \alpha p_{,} &= u_2 ,\\
m_{,,} + p_{,,} &= v_1 ,\\
m_{,,} + \alpha p_{,,} &= v_2 .
\end{aligned}$$

Aus diesen sechs Gleichungen lassen sich die sechs Unbestimmten leicht finden, nämlich

$$\begin{aligned}
2m &= z_1 + z_2 ,\\
2p &= z_1 - z_2 ,\\
2m_{,} &= u_1 + u_2 ,\\
2p_{,} &= u_1 - u_2 ,\\
2m_{,,} &= v_1 + v_2 ,\\
2p_{,,} &= v_1 - v_2 .
\end{aligned}$$

Man erhält zunächst

$$z_1 + z_2 = [x_1] + [x_2] = -a = 2m .$$

Ferner hängt $2m_{,} = x_1 x_3 + x_1 x_5 + x_3 x_5 + x_2 x_4 + x_2 x_6 + x_4 x_6$ von der Lösung einer Gleichung vom zehnten Grade ab, allgemein vom $\frac{n!}{k!(l!)^k}$ten Grade; ebenso $2m_{,,}$. Dagegen hängen $2p$, $2p_{,}$, $2p_{,,}$ vom zwanzigsten, allgemein vom $\frac{n!}{(l!)^k}$ten Grade ab. Bei einer biquadratischen Gleichung ist $n = 4$, also $k = 2$, $l = 2$. Die Hülfsgleichungen sind also beziehlich vom dritten und sechsten Grade.

§ 44. Methode der linearen Gleichungen und ihrer Determinante nach Hesse und Sylvester*).

Bei weiterm das eleganteste und übersichtlichste Verfahren der Elimination ist das folgende, welches mit Ausnahme der Determinantenform zuerst von Euler (§ 42) gegeben und in neuerer Zeit von Sylvester und Hesse verbessert worden ist. Dasselbe gründet sich auf einen bekannten Satz von den linearen Gleichungen.

---

*) Sylvester, A method of determining by mere inspection the derivations from two equations of any degree. Phil. Mag. XVI. London and Edinburgh 1840.

Hesse, Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht. Crelle's Journ. XXVII. S. 1. 1844. XLI. S. 253. Ztschr. f. Math. u. Phys. IV. 79. 1859.

Katter, Ueber die Resultante zweier algebraischen Gleichungen. I. § 6. 1876.

Wenn zwischen den r Unbekannten $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$ die r Gleichungen ersten Grades

$$\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_r x_r = u_1 , \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \cdots + b_r x_r = u_2 , \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_r x_r = u_3 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \cdots + r_r x_r = u_r \end{array}$$

bestehen, so gibt die Auflösung derselben die Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_r$ in Form von Brüchen, welche denselben Divisor haben, nämlich

$$x_1 = \frac{Q_1}{P}, \quad x_2 = \frac{Q_2}{P}, \quad x_3 = \frac{Q_3}{P}, \ldots$$

Hier ist der gemeinschaftliche Nenner unabhängig von u und die **Determinante** der Coefficienten der Gleichungen. Sie wird dargestellt durch r^2 Elemente in r horizontalen und r verticalen Columnen geordnet, also:

$$P = \begin{array}{r|cccccc|l} + & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & & a_r & - \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & & b_r & \\ & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & & c_r & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ - & r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & & r_r & + \end{array}$$

Die Determinante dieses Systems ist dann das Aggregrat der Producte von je r Elementen, die sämmtlich verschiedenen Zeilen und Columnen angehören. Jedes Product wird positiv oder negativ genommen, je nachdem die Complexion der Indices der Coefficienten zu den Permutationen mit einer geraden oder ungeraden Anzahl von Inversionen gehört. Das positive Anfangsglied ist das Product der Diagonalreihe

$$a_1 b_2 c_3 \ldots r_r .$$

Hieraus werden die übrigen Glieder der Determinante abgeleitet, indem man die alphabetische Ordnung beibehält und die Indices $1, 2, 3, \ldots r$ permutirt. Ist beispielsweise $r = 6$, so ist das Product

$$a_2 b_1 c_5 d_3 e_6 f_4$$

positiv zu nehmen, weil die Anzahl der Inversionen **vier** beträgt, nämlich 21, 53, 54, 64.

Wenn man nun die gegebenen Gleichungen mit den Factoren $p_1, p_2, p_3 \ldots$ multiplicirt, darauf alle zu einander addirt und $p_1, p_2, p_3 \ldots$ so gewählt denkt, dass linker Hand alle Coefficienten mit Ausnahme dessen von einer Unbekannten, z. B. x_1, verschwinden, so bleibt

$$(p_1 a_1 + p_2 b_1 + p_3 c_1 + \cdots + p_r r_1) x_1 = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_r u_r,$$

oder

$$P x_1 = Q_1 .$$

Demnach ist

$$Q_1 = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_r u_r$$

und Q_1 gleich Null, wenn alle Werthe von u gleich Null sind.

Da x_1 im Allgemeinen von Null verschieden ist, so muss $P = 0$ sein, d. h. die Determinante selbst verschwinden.

Enthält eine der Verticalreihen nur bestimmte Grössen, so braucht man sämmtliche Horizontalreihen nur mit einer und derselben beliebigen allgemeinen Grösse zu multipliciren. So haben z. B. die Gruppen

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= 0, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 &= 0, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 &= 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 &= 0, \\ b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 &= 0, \\ c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

dieselbe Determinante

$$P = \begin{array}{r|ccc|l} + & a_1 & a_2 & a_3 & - \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \\ - & c_1 & c_2 & c_3 & + \end{array} = 0,$$

welche ihren Werth auch dann nicht ändert, wenn man sie schreibt

$$P = \begin{array}{r|ccc|l} + & a_1 & b_1 & c_1 & - \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ - & a_3 & b_3 & c_3 & + \end{array} = 0,$$

Wenden wir dies Theorem zunächst auf die Euler'schen Bestimmungsgleichungen in § 42 an, so erhalten wir die Determinante

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & 0 & 0 & 0 & . \\
a & 1 & 0 & 0 & . & \alpha & 1 & 0 & 0 & . \\
b & a & 1 & 0 & . & \beta & \alpha & 1 & 0 & . \\
c & b & a & 1 & . & \gamma & \beta & \alpha & 1 & . \\
d & c & b & a & . & \delta & \gamma & \beta & \alpha & . \\
e & d & c & b & . & \varepsilon & \delta & \gamma & \beta & . \\
. & e & d & c & . & . & \varepsilon & \delta & \gamma & . \\
. & . & e & d & . & . & . & \varepsilon & \delta & . \\
. & . & . & e & . & . & . & . & \varepsilon & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}\right| = 0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & a & b & c & d & e & . & . & . & . \\
0 & 1 & a & b & c & d & e & . & . & . \\
0 & 0 & 1 & a & b & c & d & e & . & . \\
0 & 0 & 0 & 1 & a & b & c & d & e & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & . & . & . & . \\
0 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & . & . & . \\
0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & . & . \\
0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}\right| = 0.$$

Hierauf gründeten nun Sylvester und Hesse folgendes Verfahren zur Elimination von x aus zwei Gleichungen vom n^{ten} und m^{ten} Grade. Gegeben sei

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0,$$
$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \cdots + \tau = 0.$$

Man multiplicire die erste Gleichung der Reihe nach mit $x, x^2 \ldots x^m$, die zweite mit $x, x^2 \ldots x^n$. In diesen $(m+n)$ Gleichungen betrachte man die verschiedenen Potenzen von x als die Unbekannten, wodurch in ihrer Anordnung ein Quadrat von $(m+n)$ Horizontal- und Verticalreihen entsteht, unter denen m Horizontalreihen aus den Coefficienten der einen Gleichung, n aus denen der andern gebildet worden, wie folgt

$$\begin{array}{rl}
x^{n+1} + ax^n + bx^{n-1} + \cdot \quad \cdot + tx & = 0 \\
x^{n+2} + ax^{n+1} + bx^n + \cdot \quad \cdot + tx^2 \qquad & = 0 \\
x^{n+3} + ax^{n+2} + bx^{n+1} + \cdot \quad \cdot + tx^3 \qquad\qquad & = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad\qquad & \\
x^{n+m} + ax^{n+m-1} \cdot \quad \cdot + sx^{m+1} + tx^m \qquad\qquad\qquad & = 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
x^{m+1}+\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\cdots+\tau x=0\\
x^{m+2}+\alpha x^{m+1}+\beta x^m+\cdots\cdots+\tau x^2=0\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
x^{m+n}+\alpha x^{m+n-1}+\cdot\quad\cdot\quad+\tau x^n=0
\end{array}
$$

Die vorstehenden Gleichungen können nach dem Vorhergehenden nur bestehen unter der Bedingung

$$
\begin{vmatrix}
1 & a & b & c & . & . & t & 0 & 0 & .\\
0 & 1 & a & b & c & . & . & t & 0 & .\\
0 & 0 & 1 & a & b & c & . & . & t & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
1 & \alpha & \beta & \gamma & . & \tau & 0 & 0 & 0 & .\\
0 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & . & \tau & 0 & 0 & .\\
0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & . & \tau & 0 & .\\
0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & . & \tau & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{vmatrix}=0.
$$

§ 45. Die symmetrischen Determinanten nach Bézout*) und Cauchy**) zur Darstellung der Discriminante.

Sind die Gleichungen von demselben Grade, so lässt sich durch Abkürzung eine symmetrische Determinante herstellen. Dieser Fall tritt immer ein, wenn man nach dem Verfahren von Brioschi die Discriminante einer Gleichung bildet, wie in § 21 gezeigt worden ist. Bézout hat hierüber 1764 ein Mémoire veröffentlicht. Die symmetrische Determinante wird nach Cauchy's Anleitung folgendermassen gebildet. Die Derivirten seien

$$a_1 x^{n-1}+b_1 x^{n-2}+c_1 x^{n-3}+\cdots+t_1=0,$$
$$a_2 x^{n-1}+b_2 x^{n-2}+c_2 x^{n-3}+\cdots+t_2=0.$$

Cauchy schreibt sie auf folgende Art:

$$a_1x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+k_1x^{n-k-1}=-(l_1x^{n-k-2}+m_1x^{n-k-3}+\cdots+t_1),$$
$$a_2x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+k_2x^{n-k-1}=-(l_2x^{n-k-2}+m_2x^{n-k-3}+\cdots+t_2)$$

und bildet daraus das Product

$$(a_1x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+k_1x^{n-k-1})(l_2x^{n-k-2}+m_2x^{n-k-3}+\cdots+t_2),$$
$$=(a_2x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+k_2x^{n-k-1})(l_1x^{n-k-2}+m_1x^{n-k-3}+\cdots+t_1).$$

*) Bézout, Procédé de la méthode pour l'élimination et réflexions qui tendent à l'abréger. Mém. de l'acad. roy. des sciences. Paris 1764.

Bruno, Théorie générale de l'élimination. Paris 1859. pg. 53.

**) Katter, l. c. S. 14. Baltzer, Theorie der Determinanten S. 45.

Indem man nun k successive gleich $0, 1, 2, \ldots n-2$ setzt, erhält man $n-2$ mit den obigen übereinstimmende Gleichungen; denn sie sind ebenfalls vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade, da man auf beiden Seiten durch x^{n-k-1} dividiren kann.

1. Beispiel.

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0\,,$$
$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0\,.$$

Für $k = 1, 0$ erhalten wir die Gleichungen

$$(ab)x + (ac) = 0\,,$$
$$(ac)x + (bc) = 0\,,$$

also

$$D_3 = \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}\begin{vmatrix} (ab) & (ac) \\ (ac) & (ab) \end{vmatrix}\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

Es wird also durch diese Abkürzung die Anzahl der Elemente von 4^2 auf 2^2 vermindert.

2. Beispiel.

$$a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 = 0\,,$$
$$a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 = 0\,.$$

Für $k = 2, 1, 0$ erhalten wir

$$(ab)x^2 + (ac)x + (ad) = 0\,,$$
$$(ac)x^2 + [(ad)+(bc)]x + (bd) = 0\,,$$
$$(ad)x^2 + (bd)x + (cd) = 0\,;$$

also die Determinante

$$D_4 = \begin{matrix} - \\ \\ + \end{matrix}\begin{vmatrix} (ab) & (ac) & (ad) \\ (ac) & \begin{matrix}(ad) \\ +(bc)\end{matrix} & (bd) \\ (ad) & (bd) & (cd) \end{vmatrix}\begin{matrix} + \\ \\ - \end{matrix}$$

Die Anzahl der Elemente wird von 6^2 auf 3^2 verringert.

3. Beispiel.

$$a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 + d_1 x + e_1 = 0\,,$$
$$a_2 x^4 + b_2 x^3 + c_2 x^2 + d_2 x + e_2 = 0\,.$$

Für $k = 3, 2, 1, 0$ erhalten wir vier kubische Gleichungen und die Determinante

$$D_5 = \begin{vmatrix} (ab) & (ac) & (ad) & (ae) \\ (ac) & \begin{matrix}(ad)\\+(bc)\end{matrix} & \begin{matrix}(ae)\\+(bd)\end{matrix} & (be) \\ (ad) & \begin{matrix}(ae)\\+(bd)\end{matrix} & \begin{matrix}(be)\\+(cd)\end{matrix} & (ce) \\ (ae) & (be) & (ce) & (de) \end{vmatrix}$$

4. Beispiel.

$$a_1 x^5 + b_1 x^4 + c_1 x^3 + d_1 x^2 + e_1 x + f_1 = 0\,,$$
$$a_2 x^5 + b_2 x^4 + c_2 x^3 + d_2 x^2 + e_2 x + f_2 = 0\,.$$

Die Determinante ist

$$D_6 = \begin{vmatrix} (ab) & (ac) & (ad) & (ae) & (af) \\ (ac) & \begin{matrix}(ad)\\+(bc)\end{matrix} & \begin{matrix}(ae)\\+(bd)\end{matrix} & \begin{matrix}(af)\\+(be)\end{matrix} & (bf) \\ (ad) & \begin{matrix}(ae)\\+(bd)\end{matrix} & \begin{matrix}(af)\\+(be)\\+(cd)\end{matrix} & \begin{matrix}(bf)\\+(ce)\end{matrix} & (cf) \\ (ae) & \begin{matrix}(af)\\+(be)\end{matrix} & \begin{matrix}(bf)\\+(ce)\end{matrix} & \begin{matrix}(cf)\\+(de)\end{matrix} & (df) \\ (af) & (bf) & (cf) & (df) & (ef) \end{vmatrix}$$

Das Bildungsgesetz der verkürzten symmetrischen Determinante geht hieraus schon deutlich hervor.

§ 46. Die Bestimmung der gemeinsamen Wurzel zweier Gleichungen.

Wie bei der Methode des grössten gemeinschaftlichen Divisors aus dem binomischen Factor $Px + Q$ die gemeinsame Wurzel gefunden wird, so lässt sich dieselbe auch mittels der Methode der Determinanten finden, wie in Folgendem gezeigt werden soll. Gegeben seien die Gleichungen

$$a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 = 0\,,$$
$$a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 = 0\,.$$

Man findet hieraus die quadratischen Gleichungen

$$(ab)x^2 + (ac)x + (ad) = 0\,,$$
$$(ad)x^2 + (bd)x + (cd) = 0\,.$$

Man schreibe dieselben in folgender Form:

$$[(ab)x + (ac)]x + (ad) = 0\,,$$
$$[(ad)x + (bd)]x + (cd) = 0\,.$$

Die Determinante ist

$$\begin{vmatrix} (ab)x + (ac), & (ad) \\ (ad)x + (bd), & (cd) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe lässt sich zerlegen in

$$\begin{vmatrix} (ab)x, & (ad) \\ (ad)x, & (cd) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (ac), & (ad) \\ (bd), & (cd) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} (ab), & (ad) \\ (ad), & (cd) \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} (ac), & (ad) \\ (bd), & (cd) \end{vmatrix} = 0,$$

womit der binomische Factor $Px + Q$ und zugleich die gemeinsame Wurzel gefunden ist.

§ 47. Die Combinationsmethode von Lagrange*).

Es ist bei der Aufzählung der älteren Substitutionsmethoden § 37 bemerkt worden, dass Lagrange eine Substitution in Vorschlag brachte, welche sich von den übrigen dadurch unterscheidet, dass sie mehrere oder alle Wurzeln der gegebenen Gleichung zugleich umfasst. Lagrange substituirt beispielsweise

$$\alpha^0 x_1 + \alpha^1 x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots \alpha^{n-1} x_n = y$$

und

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Es mögen die Finalgleichung oder die Reducirte und die erforderlichen Resolventen bestimmt werden. Die Reducirte wird nur Potenzen von y enthalten, welche ein Vielfaches von n sind; denn wegen $\alpha^n = 1$ ist

$$\alpha^{n-r} y = \alpha^{n-r} x_1 + \alpha^{n-r+1} x_2 + \cdots + x_{r+1} + \alpha x_{r+2} + \cdots \alpha^{n-r-1} x_n$$

oder

$$\alpha^{n-r} y = \alpha^0 x_{r+1} + \alpha^1 x_{r+2} + \cdots + \alpha^{n-1} x_r.$$

Dies ist einer Verschiebung der Wurzeln $x_1, x_2 \ldots$ nach vorne gleich und $\alpha^{n-r} y$ ist ebenfalls eine Wurzel der Finalgleichung. Diese muss also unverändert bleiben, wenn man $\alpha^{n-r} y$ an die Stelle

---

*) Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Mém. nouv. de l'acad. pour l'année 1770 et 1771. Berlin 1772 et 1773.

—— Traité de la résolution des équations numériques. Note XIII.

Hymers, The Theorie of algebraical equations. Section X.

von y setzt. Es dürfen also nur Potenzen von der Form y^{kn} vorkommen, weil man so erhält:

$$y^{kn} = (\alpha^{n-r} y)^{kn}.$$

Wir können deshalb der Einfachheit wegen $y^n = z$ setzen und weil n Wurzeln in der Substituirten $1 . 2 . 3 \ldots n$ Permutationen zulassen, so wird die Gleichung in y vom ebensovielten Grade, die in z aber nur vom $1 . 2 . 3 \ldots (n-1)^{\text{ten}}$ Grade sein. Diese neue Gleichung ist nur dann vom niedrigeren Grade als die Hauptgleichung, wenn n höchstens 4 beträgt.

Bezeichnen $u_0, u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ gewisse symmetrische Functionen der n Wurzeln, welche unveränderlich bleiben, wenn man die Wurzeln permutirt, so ist

$$z = y^n = u_0 + u_1 \alpha + u_2 \alpha^2 + \cdots + u_{n-1} \alpha^{n-1}.$$

Wenn nun die symmetrischen Functionen durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt sind, so werden die Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ sich berechnen lassen. Denn seien $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ die verschiedenen Werthe von z und $1, \alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ die Wurzeln von $\alpha^n = 1$, dann erhalten wir

$$\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \qquad\quad + x_n = \sqrt[n]{z_1}, \\
\alpha^0 x_1 + \alpha^1 x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n = \sqrt[n]{z_2}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = \quad \cdot \\
\lambda^0 x_1 + \lambda^1 x_2 + \lambda^2 x_3 + \cdots + \lambda^{n-1} x_n = \sqrt[n]{z_n}.
\end{array}$$

Addiren wir sämmtliche Gleichungen und berücksichtigen die Werthe der Summe der Potenzen von $1, \alpha, \beta, \ldots \lambda$, so erhalten wir

$$n x_1 = \sqrt[n]{z_1} + \sqrt[n]{z_2} + \cdots + \sqrt[n]{z_n}.$$

Um die Werthe von $S_1, S_2, S_3, \ldots$ der Summe der aufeinanderfolgenden Potenzen von den Wurzeln der Gleichung $\alpha^n = 1$ zu erhalten, vergleiche man die Auflösung dieser Aufgabe in § 28.

Multiplicirt man das obige System von Gleichungen beziehlich mit $1, \alpha^{n-1}, \beta^{n-1}, \ldots \lambda^{n-1}$, so erhält man durch Addition derselben

$$n x_2 = \sqrt[n]{z_1} + \alpha^{n-1} \sqrt[n]{z_2} + \beta^{n-1} \sqrt[n]{z_3} + \cdots + \lambda^{n-1} \sqrt[n]{z_n}.$$

In gleicher Weise findet man die übrigen Wurzeln. Es ist nun

$$-a = \sqrt[n]{z_1},$$

folglich

$$(-a)^n = z_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},$$

und

$$z = (-a)^n + (\alpha - 1)\, u_1 + (\alpha^2 - 1)\, u_2 + (\alpha^3 - 1)\, u_3 + \cdots$$

Das Problem ist demnach darauf zurückgeführt, die Werthe dieser symmetrischen Functionen aufzusuchen. Uebrigens erinnern die Formen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ lebhaft an die Substitution von Euler und Waring.

Ist n keine Primzahl, sondern zusammengesetzt, etwa gleich kl, wo k prim ist, so lässt die Methode einige Vereinfachungen zu. Angenommen α sei eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^k - 1 = 0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} y &= \alpha^0 x_1 + \alpha^1 x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n \\ &= \alpha^0 X_1 + \alpha^1 X_2 + \alpha^2 X_3 + \cdots + \alpha^{k-1} X_k, \end{aligned}$$

wobei

$$X_r = x_r + x_{k+r} + x_{2k+r} + \cdots + x_{n-k+r}$$

ist und aus l Wurzeln besteht. Demgemäss ist

$$z = y^n = u_0 + u_1\alpha + u_2\alpha^2 + \cdots + u_{k-1}\alpha^{k-1},$$

wo $u_0, u_1, \ldots$ bekannte Functionen von $X_1, X_2, \ldots$ bedeuten. Sind dieselben in Ausdrücken der Coefficienten der gegebenen Gleichung dargestellt, so sind wir auch im Stande, die Werthe von $X_1, X_2, \ldots$ zu bestimmen. Um daraus weiter die Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ zu berechnen, müssen wir diejenigen gesondert berücksichtigen, welche in $X_1, X_2 \ldots$ enthalten sind, also zu einer Gleichung l^{ten} Grades gehören.

Die Gleichung, deren Wurzelsumme X_1 beträgt, möge sein

$$x^l - X_1 x^{l-1} + L x^{l-2} - M x^{l-3} + \cdots = 0,$$

worin $L, M, \ldots$ noch unbestimmte Coefficienten sind. Dies Polynom ist ein Factor von dem Polynom $f(x)$, weil beide dieselben Wurzeln enthalten. Führt man die Division aus und setzt die Coefficienten der Potenzen von x, welche im Reste enthalten sind, einzeln gleich Null, so erhält man l Gleichungen in $X_1, L, M, \ldots$, unter denen die $l-1$ ersten die Werthe von $L, M, \ldots$ als Ausdrücke von X_1 liefern. Es bleibt demnach die Gleichung vom l^{ten} Grade zu lösen. Auf ähnliche Art sucht man weiter aus X_2 die folgende Wurzelgruppe $x_2, x_{k+2}, x_{2k+2}, \ldots$ zu berechnen u. s. f.

§ 48. Von den quadratischen oder trinomischen Factoren einer Gleichung.

Geht man von der Annahme aus, dass ausser der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ auch noch für alle Wurzeln die quadratische Function

$$x^2 + ux + (v - y) = 0$$

gelten solle; so kann man dieselben entweder so ansehen, als ob u und v gewisse bestimmte oder constante Grössen, y eine abhängige bezeichnen, oder man kann diese Function als den allgemeinen Ausdruck sämmtlicher in der gegebenen Gleichung enthaltener quadratischer, trinomischer Factoren voraussetzen, so nämlich, dass alle Werthe von $v - y$ das Product je zweier Wurzeln, alle Werthe der Variabeln u die negative Summe derselben darstellen. Von dem ersten Gesichtspuncte aus wird die quadratische Function in der Substitutionsmethode von Tschirnhausen betrachtet und es ist die Resultante in y offenbar von demselben Grade wie die Hauptgleichung, also vom n^{ten}. Im zweiten Falle dagegen ist die Gleichung in $v - y$, oder wenn v eine beliebige Constante bezeichnet, in y vom $\frac{n(n-1)}{1.2}$ten Grade, weil man sämmtliche n Wurzeln so viele Mal zur zweiten Klasse oder zu einem einfachen Product combiniren kann. Ebenso ist die Resultante in u vom $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Grade. Man hat die beiden vorbenannten Fälle streng zu unterscheiden, da wegen der willkürlichen Annahme von u die substituirte quadratische Gleichung immer eine fremde Lösung, also nur eine wahre Wurzel von x liefert. Ebenso wird es sich mit der Substituirten höherer Grade verhalten. Sie liefern immer nur eine wahre Wurzel, welche gefunden wird, indem man den letzten Rest, der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors der beiden Polynome bleibt, gleich Null setzt und nach x auflöst, also

$$Px + Q = 0, \quad X = -\frac{Q}{P}.$$

Nur wenn P und Q gleich Null werden, was dann allemal geschieht, wenn die gegebene Gleichung gleiche Wurzel hat, liefert der angenommene quadratische Factor, gleich Null gesetzt, zwei wahre Wurzeln.

Wir betrachten zunächst die quadratischen oder trinomischen Factoren der Hauptgleichung und beweisen das von Laplace*) aufgestellte

Theorem: Jede Gleichung von geradem Grade lässt sich in lauter reelle trinomische Factoren zerlegen.

Gegeben sei die Gleichung

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0.$$

Wir setzen zunächst voraus, es sei $n = 2r$ und r ungerade, also n von der Form $4k + 2$. Man betrachte nun die Factoren zweiten Grades dieser Gleichung, gebildet aus den zu je zwei combinirten Binomialfactoren

$$\begin{aligned}
(x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0, \\
(x - x_1)(x - x_3) &= x^2 - (x_1 + x_3)x + x_1x_3 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x - x_{n-1})(x - x_n) &= x^2 - (x_{n-1} + x_n)x + x_{n-1}x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Diese Factoren sind von der Beschaffenheit der Wurzelsummen und Wurzelproducte abhängig; diese werden bestimmbare Grössen, wenn man zwei Beziehungen derselben kennt, z. B.:

$$(x_1 + x_2) + m(x_1x_2) = \alpha, \quad (x_1 + x_2) + m'(x_1x_2) = \alpha',$$

wo m und m' bestimmte Zahlen sind. Der allgemeine Werth von α sei y; dann lässt sich aus den Binomialfactoren

$$\{y - [(x_1 + x_2) + m(x_1x_2)]\}\{y - [(x_1 + x_3) + m(x_1x_3)]\} \ldots$$

eine Gleichung in y und m bilden, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln und also rationale Functionen der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ der gegebenen Gleichung sind.

Die transformirte Gleichung sei

$$\varphi(m, y) = 0;$$

der Grad derselben ist offenbar $\frac{2r(2r-1)}{1.2} = r(2r-1)$, also ungerade. Deshalb hat die Gleichung $\varphi(m, y) = 0$ wenigstens eine reelle Wurzel, welchen Werth m auch haben möge. Setzt man deshalb für m successive die Zahlen $1, 2, 3, \ldots [r(2r-1)+1]$ ein, so hat jede der zugehörigen Gleichungen

$$\varphi(1, y) = 0, \quad \varphi(2, y) = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

wenigstens eine reelle Wurzel und zwar eine der Combinationen $(x_1 + x_2) + m(x_1 x_2)$. Wir erhalten also $r(2r-1)+1$ reelle

*) Hymers, Theory of equations § 163.

Werthe dieser Combinationen von je zwei der gegebenen Gleichung. Es existiren aber, wie oben gezeigt worden ist, $r(2r - 1)$ solcher Combinationen, welche sämmtliche Wurzeln von x_1 bis x_n umfassen. Deshalb müssen wenigstens zwei Functionen dasselbe Wurzelpaar enthalten, für welche man reelle Werthe von α erhält. Wenn also die entprechenden Gleichungen

$$\varphi(m, y) = 0, \quad \varphi(m', y) = 0$$

sind, so gelten die zwei Gleichungen

$$(x_1 + x_2) + m(x_1 x_2) = \alpha, \quad (x_1 + x_2) + m'(x_1 x_2) = \alpha'$$

für zwei reelle Werthe von m und von α. Die reellen Coefficienten des ersten quadratischen oder trinomischen Factors sind also

$$x_1 + x_2 = \frac{m'\alpha - m\alpha'}{m' - m}, \quad x_1 x_2 = \frac{\alpha' - \alpha}{m' - m}.$$

Hieraus geht hervor, dass jede Gleichung, deren Ordnungsexponent nur einmal durch 2 theilbar ist, wenigstens einen reellen quadratischen Factor hat.

Um nun allgemein zu beweisen, dass der Satz von jeder Gleichung von geradem Ordnungsexponenten gilt, wenden wir die Kästner'sche Schlussmethode an. Wir wollen zu dem Ende nachweisen, dass wenn der Satz für Gleichungen Gültigkeit hat, deren Ordnungsexponenten $p$mal durch 2 theilbar sind, also für $n = 2^p r$, er auch für $n = 2^{p+1} r$ gelten muss, wo r eine ungerade Zahl bedeutet.

Angenommen, es sei $n = 2^{p+1} r$, so ist der Ordnungsexponent der transformirten Gleichung in y gleich $2^p r(2^{p+1} r - 1)$, welcher nur $p$mal durch 2 theilbar ist. Die transformirte Gleichung

$$\varphi(m, y) = 0$$

hat nun nach der Voraussetzung einen reellen quadratischen Factor, also entweder ein reelles oder ein conjugirt complexes Wurzelpaar.

Ebenso gibt noch mindestens eine andere Gleichung $\varphi(m', y) = 0$ einen reellen quadratischen Factor mit zwei reellen oder complexen Wurzeln. Wenn nun zwei Gleichungen der ersten Art gefunden sind, so folgt hieraus ebenso wie in dem ersten Falle, dass die gegebene Gleichung einen reellen quadratischen Factor besitzt. Findet man aber nur Gleichungen der zweiten Art, so sei

$$(x_1 + x_2) + m(x_1 x_2) = \xi + \eta\sqrt{-1},$$
$$(x_1 + x_2) + m'(x_1 x_2) = \xi' + \eta'\sqrt{-1}.$$

Aus der Verbindung beider ergibt sich

$$x_1 + x_2 = \gamma + \delta\sqrt{-1},$$
$$x_1 x_2 = \gamma' + \delta'\sqrt{-1},$$

und demnach würde

$$x^2 - (\gamma + \delta\sqrt{-1})\,x + (\gamma' + \delta'\sqrt{-1})$$

ein complexer quadratischer Factor von $f(x)$ sein.

Wenn aber ein reeller Ausdruck einen Factor von der Form $M + N\sqrt{-1}$ hat, so hat er ebenfalls einen zweiten von der Form $M - N\sqrt{-1}$. Denn sei

$$P = (M + N\sqrt{-1})\,(R + S\sqrt{-1})$$
$$= (MR - NS) + (MS + NR)\sqrt{-1}.$$

Ist P reell, so muss der imaginäre Theil verschwinden, woraus folgt

$$\frac{R}{S} = \frac{M}{-N},$$

oder

$$R = pM, \quad S = -pN.$$

Setzen wir diese Werthe in die erste Gleichung ein, so ergibt sich daraus

$$P = p\,(M + N\sqrt{-1})\,(M - N\sqrt{-1}).$$

Deshalb ist auch noch der Ausdruck

$$x^2 - (\gamma - \delta\sqrt{-1})\,x + (\gamma' - \delta'\sqrt{-1})$$

ein zweiter quadratischer Factor von $f(x)$ und folglich das Product beider

$$(x^2 - \gamma x + \gamma')^2 - (\delta x - \delta')^2$$

ein biquadratischer Factor von $f(x)$, welcher sich immer in zwei reelle quadratische Factoren zerlegen lässt.

Wenn die beiden quadratischen Factoren einen gemeinschaftlichen Factor haben sollten, so gelangt man noch einfacher zu demselben Resultate. Wendet man die Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors an, so kann der gemeinschaftliche Factor nur linear sein und zwar gleich $x - \frac{\delta'}{\delta}$. Die andern Factoren sind alsdann beziehungsweise

$$x - \left(\gamma - \frac{\delta'}{\delta} - \delta\sqrt{-1}\right) \quad \text{und} \quad x - \left(\gamma - \frac{\delta'}{\delta} + \delta\sqrt{-1}\right).$$

Die quadratischen Factoren sind in diesem Falle gleich

$$\left[x - \left(\gamma - \frac{\delta'}{\delta} - \delta \sqrt{-1}\right)\right]\left(x - \frac{\delta'}{\delta}\right)$$

und

$$\left[x - \left(\gamma - \frac{\delta'}{\delta} + \delta \sqrt{-1}\right)\right]\left(x - \frac{\delta'}{\delta}\right).$$

Vereinigt man die beiden ersten linearen Factoren zu einem quadratischen Factor, so wird derselbe reell und gleich

$$\left(x - \gamma + \frac{\delta'}{\delta}\right)^2 + \delta^2 = 0.$$

Demnach hat jede Gleichung vom $2^{p+1} \cdot r^{\text{ten}}$ Grade einen reellen quadratischen Factor, wenn jede vom $2^p \cdot r^{\text{ten}}$ Grade einen solchen hat. Es war aber die Gültigkeit des Satzes bewiesen für den Fall $p = 1$, also gilt er auch für $p = 2, 3, 4, \ldots$ u. s. f., ganz allgemein für jede Gleichung von geradem Grade.

Wenn der eine nothwendig vorhandene quadratische Factor durch Division aus dem Polynom $f(x)$ ausgeschieden ist, so behält man immer noch eine Gleichung von geradem Grade mit reellen Coefficienten, für welche dasselbe gilt. Es müssen deshalb alle Gleichungen von geradem Grade sich in lauter reelle quadratische Factoren zerlegen lassen.

Aufgabe. Die biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in zwei reelle quadratische Factoren

$$x^2 + p_1 x + q_1 \quad \text{und} \quad x^2 + p_2 x + q_2$$

zu zerlegen.

Diese Zerlegung lässt sich nach der in § 47 entwickelten Methode von Lagrange bewerkstelligen. Der Ordnungsexponent ist $n = 4 = 2 \cdot 2 = k \cdot l$. Es sei α eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^2 - 1 = 0$$

und es werde substituirt

$$y = x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 = X_1 + \alpha X_2,$$

wobei

$$X_1 = x_1 + x_3, \quad X_2 = x_2 + x_4.$$

Dann ist

$$z = y^2 = u_0 + \alpha u_1 = X_1^2 + X_2^2 + 2 X_1 X_2 \alpha$$

und

$$a^2 = z_1 = u_0 + u_1 .$$

Hieraus folgt nun

$$u_1 = 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) .$$

Diese Function der Wurzeln lässt noch zwei Variationen

$$2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad 2(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

zu, so dass u_1 eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$u_1^3 + Mu_1^2 + Nu_1 + P = 0$$

sein wird, deren Coefficienten M, N, P symmetrische Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, also rationale Functionen von a, b, c, d sind.

Setzen wir, um diese Gleichung exact zu machen,

$$u_1 = 2b - 2u ,$$

so erhalten wir eine Gleichung in u, deren Wurzeln sind

$$x_1 x_3 + x_2 x_4, \quad x_1 x_2 + x_3 x_4, \quad x_1 x_4 + x_2 x_3 .$$

Substituiren wir weiter $x_1 x_3 = \eta$, so ist

$$u = \eta + \frac{d}{\eta}$$

und η eine Wurzel der Gleichung der Wurzelproducte (§ 22):

$$\eta^6 - b\eta^5 + (ac - d)\eta^4 - (a^2 d - 2bd + c^2)\eta^3 + (ac - d)d\eta^2 - bd^2\eta + d^3$$
$$= \left(\eta + \frac{d}{\eta}\right)^3 - b\left(\eta + \frac{d}{\eta}\right)^2 + \left(ac - 4d\right)\left(\eta + \frac{d}{\eta}\right) - \left(a^2 d - 4bd + c^2\right)$$
$$= u^3 - bu^2 + (ac - 4d)\, u - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0 .$$

Ist u' eine Wurzel dieser Gleichung, so ist $u_1 = 2b - 2u'$. Setzt man

$$\alpha = -1, \; z_2 = u_0 - u_1 = a^2 - 2u_1 = a^2 - 4b + 4u',$$

so ist

$$X_1 + X_2 = -a, \quad X_1 - X_2 = \sqrt{z_2}$$

und

$$X_1 = -\tfrac{1}{2}\left(a - \sqrt{z_2}\right), \quad X_2 = -\tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{z_2}\right).$$

Demgemäss können die Wurzeln x_1 und x_3 als die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - X_1 x + L = 0$$

betrachtet werden. Dividirt man die gegebene Gleichung durch diesen quadratischen Factor und setzt das erste Glied des Restes gleich Null, so findet man

$$L = \frac{X_1{}^3 + aX_1{}^2 + bX_1 + c}{2X_1 + a}.$$

Die beiden andern Wurzeln x_2 und x_4 werden gefunden aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 - X_2 x + \frac{X_2{}^3 + aX_2{}^2 + bX_2 + c}{2X_2 + a} = 0.$$

Um nun noch zu zeigen, dass diese beiden quadratischen Factoren reell sind, bilde man die Gleichung in z_2, welche wegen der Relation

$$z_2 = (a^2 - 4b) + 4u'$$

ebenfalls eine kubische Gleichung sein muss. Setzt man demgemäss

$$u = \frac{1}{4}[z - (a^2 - 4b)],$$

so resultirt

$$z^3 - (3a^2 - 8b)z^2 + (3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d)z$$
$$- (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0.$$

Da das Absolutglied negativ ist, so hat die Gleichung eine positive reelle Wurzel z_2. Deswegen ist $\sqrt{z_2}$ reell, mithin auch x_1 und x_3, und die Coefficienten der beiden quadratischen Factoren

$$x^2 + p_1 x + q_1 \quad \text{und} \quad x^2 + p_2 x + q_2$$

sind reell.

§ 49. Die Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Gleichung.

Es ist in § 48 darauf hingewiesen worden, dass wenn die quadratische Function

$$x^2 + ux + v = 0$$

in eine gegebene Gleichung substituirt wird, diese quadratische Gleichung in x nur eine wahre Wurzel liefere, da die Resultante in v von demselben Grade ist wie die gegebene Gleichung. Löst man die Gleichung nach x auf, nämlich

$$x = -\frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4v} = z + y,$$

so wird

$$u = -2z, \quad v = z^2 - y^2,$$

also

$$x^2 - 2zx + (z^2 - y^2) = 0.$$

Um diese quadratische Function zu substituiren, braucht man also nur die Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Gleichung zu bilden. Die fremde Lösung wird von der wahren geschieden dadurch, dass man entweder für y das passende Vorzeichen wählt oder dass man den grössten gemeinschaftlichen Theiler von

$$f(x) = 0$$

und

$$x^2 - 2zx + z^2 - y^2 = 0$$

bestimmt.

Beispiel. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zu berechnen*).

Man bilde die Variirte

$$y^4 + (4z + a)y^3 + (6z^2 + 3az + b)y^2 + (4z^3 + 3az^2 + 2bz + c)y$$
$$+ (z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$$

oder kürzer

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0.$$

Ferner bilde man die Gleichung, deren Wurzeln die Wurzelquadrate der Variirten sind, also nach § 24

$$y'^4 - (\alpha^2 - 2\beta)y'^3 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta)y'^2 - (\gamma^2 - 2\beta\delta)y' + \delta^2 = 0,$$

oder kurz

$$y'^4 - my'^3 + ny'^2 - py' + q = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich auf eine quadratische reduciren, wenn sich die Bedingung

$$m^3 - 4mn + 8p = 0$$

erfüllen lässt. Setzt man nämlich

$$\left(y'^2 - \frac{1}{2}my' + A\right)^2 - B = 0,$$

so ist

$$y'^4 - my'^3 + \left(2A + \frac{1}{4}m^2\right)y'^2 - mAy' + (A^2 - B) = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen der Identität mit der Gleichung

$$y'^4 - my'^3 + ny'^2 - py' + q = 0$$

sind

*) Matthiessen, Neue Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VIII. S. 136. 1963.

$$n = 2A + \frac{1}{4} m^2, \quad p = mA,$$

folglich

$$A = \frac{1}{8}(4n - m^2) = \frac{p}{m},$$

oder

$$m^3 - 4mn + 8p = 0.$$

Die gesuchten Wurzeln sind aus den verschiedenen Werthen von y' zu berechnen mit Hülfe der Gleichung

$$y' = \frac{1}{4} m \pm \frac{1}{4} \sqrt{m^2 - 16\frac{p}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{p^2 - qm^2}}.$$

Es ist nun

$$m = \alpha^2 - 2\beta = 4z^2 + 2az + (a^2 - 2b),$$

$$n = \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta = 6z^4 + 6az^3 + (3a^2 - 2b)z^2 + (2ab - 6c)z$$
$$+ (b^2 - 2ac + 2d),$$

$$p = \gamma^2 - 2\beta\delta = 4z^6 + 6az^5 + (3a^2 + 2b)z^4 + 4(ab - c)z^3$$
$$+ 2(b^2 - 6d)z^2 + 2(bc - 3ad)z + (c^2 - 2bd),$$

$$A = \frac{p}{m} = z^4 + az^3 + bz^2 - \frac{1}{2}(a^3 - 4ab + 6c)z$$
$$- \frac{1}{8}(a^4 - 4a^2b + 8ac - 8d).$$

Setzt man diese Werthe in die Bedingungsgleichung

$$m^3 - 4mn + 8p = 0$$

ein, so erhält man die kubische Resolvente

$$(a^3 - 4ab + 8c)z^3 + \frac{1}{2}(3a^4 - 14a^2b + 20ac + 8b^2 - 32d)z^2$$
$$+ \frac{1}{4}[3a^5 - 16a^3b + 20a^2c + 16a(b^2 - 2d) - 16bc]z$$
$$+ \frac{1}{8}[a^6 - 6a^4b + 8a^3c + 8a^2(b^2 - 2d) - 16abc + 8c^2] = 0.$$

Wenn die Coefficienten a, b, c der Bedingungsgleichung

$$m^3 - 4mn + 8p = 0$$

schon genügen, so wird die Resolvente vom zweiten Grade. Ist ausserdem $a = 0$, so vereinfacht sich die Resolvente sehr; sie geht über in

$$8cz^3 + 4(b^2 - 4d)z^2 - 4bz + c^2 = 0,$$

und wenn man $z = -c : 2\zeta$ substituirt, so nimmt sie die Form der sogenannten Euler-Cartesischen Resolvente an, nämlich

$$\zeta^3 + 2b\zeta^2 + (b^2 - 4d)\zeta - c^2 = 0.$$

Zahlenbeispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 - 22x^2 - 24x + 45 = 0.$$

Die Resolvente ist

$$3z^3 - 19z^2 + 33z - 9 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$z_1 = 3, \quad z_2 = 3, \quad z_3 = \frac{1}{3}.$$

Nimmt man $z_1 = 3$, so bestimmen sich

$$m = 80, \quad A = 144, \quad q = (-144)^2;$$

folglich ist

$$y' = 20 \pm 16,$$

und man erhält

$$y_1 = \pm 6, \quad y_2 = \pm 2.$$

Durch Substitution des Werthes $z_3 = \frac{1}{3}$ erhält man

$$m = 44\frac{4}{9}, \quad A = 66\frac{46}{81}, \quad q = \left(34\frac{46}{81}\right)^2$$

und

$$y' = 11\frac{1}{9} \pm \sqrt{\frac{512}{9} \pm \frac{512}{9}}.$$

Hieraus folgt weiter

$$y_3 = \pm\frac{10}{3}, \quad y_4 = \pm\frac{14}{3}, \quad y_5 = \pm\frac{2}{3}.$$

Da nun $x = z + y$ ist, so würde man im Ganzen folgende Wurzelwerthe erhalten:

1) $x_1 = 3 \pm 6$, oder 9 und -3;
$x_2 = 3 \pm 2$, oder 5 und 1;

2) $x_3 = \frac{1}{3} \pm \frac{10}{3}$, oder $\frac{11}{3}$ und -3;
$x_4 = \frac{1}{3} \pm \frac{14}{3}$, oder 5 und $-\frac{13}{3}$;
$x_5 = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$, oder 1 und $-\frac{1}{3}$.

Da sämmtliche Werthe von z alle Auflösungen geben müssen, so sind die wiederholten Werthe von x wahre Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung, mithin ist $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, worunter eine Wurzel zwei Mal vorkommen muss. Man findet sie leicht aus der Bedingung

$$x_4 = -a - (-3 + 5 + 1) = -3.$$

Statt nun die übrigen Werthe von z zuzuziehen, bilde man die quadratische Function

$$x^2 - 2zx + z^2 - y^2 = 0$$

exact. Dieselbe ist im Falle 1) $x^2 - 6x - 27 = 0$.

Sucht man den grössten gemeinschaftlichen Divisor von

$$x^4 - 22x^2 - 24 + 45 = 0$$

und

$$x^2 - 6x - 27 = 0,$$

setzt darauf denselben gleich Null, so findet man $x = -3$. Dies ist eine wahre Wurzel der gegebenen Gleichung.

Die zweite Gleichung liefert die beiden Wurzeln 3 ± 6, wovon also die eine eine fremde Lösung gibt.

Wählt man dagegen $z_3 = \frac{1}{3}$, so wird die quadratische Function gleich Null gesetzt

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Sucht man hiermit den grössten gemeinschaftlichen Divisor, so verschwindet der lineare Rest und die quadratische Gleichung liefert zwei wahre Wurzeln, nämlich 1 und 5.

Nach der Methode von Lagrange ist der andere quadratische Factor

$$x^2 - X_2 x + \frac{X_2^{\,3} + a X_2^{\,2} + b X_2 + c}{2 X_2 + a} = 0,$$

und wegen $X_2 = -a - X_1 = 6$,

$$x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Dieser Factor liefert die beiden gleichen Wurzeln -3.

XI. Reduction der Gleichungen und Wegschaffung beliebig vieler Glieder derselben.

§ 50. Die Methode von Tschirnhausen*).

Es ist bereits in § 16 gezeigt worden, wie sich durch Variation der Unbekannten, also durch Substitution der linearen Function

$$x + (u - y) = 0$$

die gegebene Gleichung in eine andere von demselben Grade in y transformiren lässt, in welcher das zweite Glied oder irgend ein anderes Zwischenglied zum Verschwinden gebracht werden kann.

---

*) Die hierauf bezügliche Litteratur findet man sub § 37.

Ist die gegebene Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0,$$

so ist die Transformirte

$$y^n - \left(nu - a\right) y^{n-1} + \left[\binom{n}{2} u^2 - a\binom{n-1}{1} u + b\right] y^{n-2}$$
$$- \left[\binom{n}{3} u^3 - a\binom{n-1}{2} u^2 + b\binom{n-2}{1} u - c\right] y^{n-3} + \cdots = 0,$$

und die Bedingung, dass das r^{te} Glied oder der Coefficient von y^{n-r+1} verschwinde,

$$\frac{f^{n-r+1}(-u)}{(n-r+1)!} = \binom{n}{r-1} u^{r-1} - a\binom{n-1}{r-2} u^{r-2} + b\binom{n-2}{r-3} u^{r-3} - \cdots = 0.$$

Die Bedingungsgleichung für das Verschwinden des r^{ten} Gliedes (des $(r-1)^{\text{ten}}$ Zwischengliedes) ist demnach vom $r - 1^{\text{ten}}$ Grade. Die Aufhebung des zweiten Gliedes erfordert die Auflösung einer Gleichung vom ersten Grade, die des dritten Gliedes die Auflösung einer quadratischen Gleichung, die des vierten Gliedes die Auflösung einer kubischen Gleichung u. s. f.

Es können nun weiter mit Benutzung der Substitution

$$x^2 + ux + (v - y) = 0$$

in der Transformirten zwei Glieder zum Verschwinden gebracht werden. Ist die gegebene Gleichung vom n^{ten} Grade, so findet man mittels der gewöhnlichen Eliminationsmethode die Transformirte

$$y^n - [nv - (au - a^2 + 2b)] y^{n-1}$$
$$+ \left[\binom{n}{2} v^2 - \binom{n-1}{1} Av + B\right] y^{n-2}$$
$$- \left[\binom{n}{3} v^3 - \binom{n-1}{2} Av^2 + \binom{n-2}{1} Bv - C\right] y^{n-3}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0,$$

worin

$$A = au - (a^2 - 2b),$$
$$B = bu^2 - (ab - 3c)u + (b^2 - 2ac + 2d),$$
$$C = cu^3 - (ac - 4d)u^2 + (bc - 3ad + 5e)u - (c^2 - 2bd + 2ae - 2f),$$
$$D = du^4 - (ad - 5e)u^3 + (bd - 4ae + 9f)u^2 - (cd - 3be + 5af - 7g)u$$
$$+ (d^2 - 2ce + 2bf - 2ag + 2h), \text{ u. s. w.}$$

zu setzen ist. Das Gesetz der Bildung dieser Ausdrücke ist unschwer zu erkennen; die letzten Glieder sind sämmtlich die Coefficienten der Gleichung der Wurzelquadrate.

Die Bedingungen für das gleichzeitige Verschwinden irgend zweier Glieder, z. B. des m^{ten} und r^{ten}, werden sein

$$[v^{m-1}] = 0, \quad [v^{r-1}] = 0.$$

Da diese Gleichungen bezüglich v und u von demselben Grade sind, so ist die Resultante in v oder u im Allgemeinen vom $(m-1)(r-1)^{\text{ten}}$ Grade. Um also das zweite und dritte Glied der Transformirten zum Verschwinden zu bringen, hat man eine quadratische Gleichung zu lösen, um das zweite und vierte zum Verschwinden zu bringen, eine kubische Gleichung u. s. f.

Wenn z. B. das zweite und vierte Glied verschwinden soll so hat man zu setzen:

$$[v^1, u^1] = 0, \quad [v^3, u^3] = 0,$$

also mit Rücksicht auf die exacte Form der Gleichung in y:

$$nv - (au - a^2 + 2b) = 0,$$

$$\binom{n}{3} v^3 - \binom{n-1}{2} Av^2 + \binom{n-2}{1} Bv - C = 0.$$

Eliminirt man v, so erhält man die Resolvente dritten Grades:

$$\begin{aligned}
&[(n-1)(n-2)a^3 - 3n(n-2)ab + 3n^2c]u^3 - 3[(n-1)(n-2)a^4 \\
&- 2(n-2)(2n-1)a^2b + 2n(2n-3)ac + 2n(n-2)b^2 - 4n^2d]u^2 \\
&+ 3[(n-1)(n-2)a^5 - (n-2)(5n-4)a^3b + 5n(n-2)a^2c \\
&+ (n-2)(5n-4)ab^2 - n(5n-4)ad - n(5n-12)bc + 5n^2e]u \\
&- [(n-1)(n-2)a^6 - 6(n-1)(n-2)a^4b + 6n(n-2)a^3c \\
&+ 3n(n-2)(3n-4)a^2b^2 - 6n(n-2)a^2d - 12n(n-2)abc - 2(n-2)(n-4)b^3 \\
&+ 3n^2c^2 + 6n(n-4)bd + 6n^2ae - 6n^2f] = 0.
\end{aligned}$$

Die beiden Bedingungsgleichungen werden sehr vereinfacht, wenn $a = 0$ ist, also bereits vor der Transformation das erste Zwischenglied fehlt. Dann ist nämlich, abgesehen von den sonstigen Reductionen der Bestimmungsgleichungen, v von u unabhängig und

$$nv + (a^2 - 2b) = 0;$$

Wenn das dritte und vierte Glied der Transformirten zum Verschwinden gebracht werden soll, so hat man zu setzen

$$[v^2, u^2] = 0, \quad [v^3, u^3] = 0;$$

führt man die exacten Formeln ein, so erhält man

$$\binom{n}{2} v^2 - \binom{n-1}{1} Av + B = 0,$$

$$\binom{n}{3} v^3 - \binom{n-1}{2} Av^2 + \binom{n-2}{1} Bu - C = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist die erste Derivirte von der zweiten und diese hat also zwei gleiche Wurzeln. Die Resultante dieser beiden Gleichungen ist demnach die Discriminante der zweiten und nach § 21, Beisp. 2 gleich

$$\frac{n-1}{2(n-2)}\left\{(n-2)AB-3nC\right\}^2-\left\{2nB-(n-1)A^2\right\}\times$$
$$\left\{3(n-1)AC-2(n-2)B^2\right\}=0.$$

Da A eine Function von u vom ersten Grade, B eine solche vom zweiten und C eine vom dritten Grade ist, so ist die Resultante in u im Allgemeinen vom sechsten Grade.

§ 51. Transformation einer Gleichung in eine andere, in welcher drei Zwischenglieder verschwinden.

Die Methode von Tschirnhausen kann ebenfalls dazu verwendet werden, eine Gleichung so zu transformiren, dass in der neuen Gleichung das zweite, dritte und vierte Glied verschwinden, also die drei ersten Zwischenglieder. Man substituirt in diesem Falle die Function

$$x^3+ux^2+vx+(w-y)=0.$$

Man erhält eine Finalgleichung in y vom n^{ten} Grade, deren drei erste Zwischenglieder gleich Null gesetzt, drei Bestimmungsgleichungen für u, v und w ergeben und zwar eine lineare, eine quadratische und eine kubische. Die Resultante in u wird demnach vom sechsten Grade sein. Lagrange*) hat indess bewiesen, dass für $n=4$ diese Gleichung vom sechsten Grade sich in drei quadratische zerlegen lässt, deren Coefficienten von der Auflösung einer kubischen Gleichung abhängen. Wenn demnach die Resultante in u durch den quadratischen Factor u^2+pu+q getheilt wird, so hat man den linearen Rest gleich Null zu setzen, wodurch zwei Bestimmungsgleichungen für p und q gebildet werden, welche eine kubische Resolvente in p liefern. Hat man p gefunden, findet man leicht q und u nebst v und w, welches meistens durch lineare Gleichungen geschehen kann.

Was hier von der biquadratischen Gleichung gilt, findet aber für Gleichungen beliebigen Grades statt.

Die allgemeine Gleichung

*) Man vergl. Blomstrand, De praecipuis methodis p. 27.

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

kann immer auf die Form:

$$y^n + Dy^{n-4} + Ey^{n-5} + \cdots + T = 0$$

gebracht werden und zwar bedarf es hierzu nur der Auflösung einer kubischen Gleichung*).

Zum Beweise dieses wichtigen Theorems gehen wir aus von einer Eigenschaft der homogenen quadratischen Functionen. Jede homogene quadratische Function von k Variabeln lässt sich immer als die algebraische Summe der Quadrate von eben so viel homogenen Linearfunctionen darstellen, wobei die erste Function k Variabele und jede folgende eine Variabele weniger enthält als die vorhergehende. Bei drei Variabeln u, v, w hat man z. B.:

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw$$
$$= (A'u + B'v + C'w)^2 + (A''u + B''v)^2 + (A'''u)^2 .$$

Um dies nachzuweisen, sei die quadratische Function der k Variabeln $z_1, z_2, z_3 \ldots z_k$ ausgedrückt durch:

$$V_k = F(z_1, z_2, \ldots z_k) .$$

Dieselbe lässt sich zunächst auf die Form

$$V_k = Pz_k{}^2 + 2Qz_k + R$$

bringen, wo P eine Constante, Q eine homogene lineare Function der übrigen $k - 1$ Variabeln und R eine homogene quadratische Function derselben ist.

Gibt man der Gleichung die Form

$$V_k = \left(\sqrt{P} \,.\, z_k + \frac{Q}{\sqrt{P}}\right)^2 + \frac{PR - Q^2}{P} = L_k^2 + V_{k-1} ,$$

so erkennt man, dass V_k aus dem Quadrate einer linearen Function L_k aller k Variabeln und aus einem Reste besteht, der eine homogene quadratische Function der übrigen $k - 1$ Variabeln $z_1, z_2 \ldots z_{k-1}$ bildet und deshalb mit V_{k-1} bezeichnet werden kann. Von V_{k-1} gilt nun dasselbe wie von V_k; es ist analog

$$V_{k-1} = L_{k-1}^2 + V_{k-2} ,$$

wo L_{k-1} eine lineare Function der Variabeln $z_1, z_2 \ldots z_{k-1}$, V_{k-2} eine homogene quadratische Function von $z_1, z_2 \ldots z_{k-2}$ bezeichnet. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man schliesslich zu der Gleichung

*) Die Transformation und Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Nach Jerrard und Hermite. Zeitschr. f. Math. u. Phys. IV, S. 81 folg. 1859.

$$V_k = L_k^2 + L_{k-1}^2 + \cdots + L_2^2 + L_1^2 .$$

Bei zwei Variabeln u und v ist

$$Au^2 + Bv^2 + 2Cuv$$

$$= \left(\sqrt{B}v + \frac{C}{\sqrt{B}}u\right)^2 + \left(\frac{AB - C^2}{A}\right)u^2 = \left(A'u + B'v\right)^2 + \left(A''u\right)^2 .$$

Bei drei Variabeln u, v und w ist

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw$$

$$= \left(\sqrt{C}w + \frac{Eu + Fv}{\sqrt{C}}\right)^2 + \left(\frac{AC - E^2}{C}\right)u^2 + \left(\frac{BC - F^2}{C}\right)v^2 + 2\left(\frac{CD - EF}{C}\right)uv$$

$$= (A'u + B'v + C'w)^2 + (\alpha u^2 + \beta v^2 + 2\gamma uv)$$

$$= (A'u + B'v + C'w)^2 + (A''u + B''v)^2 + (A'''u)^2 .$$

Wir gehen nun aus von der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + t = 0$$

und denken uns dieselbe durch Substitution von

$$px^4 + qx^3 + ux^2 + vx + w - y = 0$$

transformirt in

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + Cy^{n-3} + \cdots + Sy + T = 0 .$$

Aus den in § 41 gemachten Bemerkungen über die Natur der Grössen

$$b_0, b_1 \ldots b_{n-1}; \quad c_0, c_1 \ldots c_{n-1}$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$T_p = ni_0 + i_1 S_1 + i_2 S_2 + \cdots + i_{n-1} S_{n-1}$$

geht hervor, dass T_p eine ganze und homogene Function p^{ten} Grades der fünf Elemente p, q, u, v, w ist; ebenso sind zufolge der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= T_1 + A , \\ 0 &= T_2 + AT_1 + 2B , \\ 0 &= T_3 + AT_2 + BT_1 + 3C, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

A, B, C u. s. w. ganze und homogene Functionen derselben Variabeln und zwar A vom ersten Grade, B vom zweiten, C vom dritten u. s. w.

Wenn nun aus der Resultante in y die drei ersten Zwischenglieder eliminirt werden sollen, so hat man die drei Gleichungen

$$A = 0 , \quad B = 0 , \quad C = 0$$

aufzulösen. Der ersten Gleichung kann man den Werth von w

entnehmen, ausgedrückt durch eine lineare Function von p, q, u, v und denselben in die beiden andern Gleichungen substituiren, wodurch sie übergehen in

$$B' = 0\,, \quad C' = 0\,.$$

Hier ist offenbar B' eine homogene quadratische, C' eine homogene kubische Function von den vier übrigen Grössen geblieben. Zufolge des oben erwähnten Satzes von den homogenen quadratischen Functionen kann man nun B' unter der Form

$$B' = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$$

darstellen, wo L_1, L_2, L_3 und L_4 lineare Functionen von p, q, u, v bedeuten. Die Gleichung $B' = 0$ wird nun erfüllt durch die Annahme

$$L_1^2 + L_2^2 = 0\,, \quad L_3^2 + L_4^2 = 0\,,$$

oder

$$L_1 = L_2\sqrt{-1}\,, \quad L_3 = L_4\sqrt{-1}\,.$$

Diese Gleichungen sind offenbar linear und ermöglichen u und v in linearer Form durch p und q auszudrücken. Durch Substitution dieser Werthe in die noch übrige Gleichung $C' = 0$ wird der Grad derselben nicht weiter erhöht und es geht daher die Gleichung $C' = 0$ in die neue kubische Gleichung

$$C'' = 0$$

über, wobei C'' eine homogene Function von p und q bedeutet. Man kann nun p willkürlich wählen, entweder gleich 1 oder auch gleich Null. Alsdann wird q durch Auflösung einer kubischen Gleichung gefunden, woraus weiter die übrigen Unbestimmten mit Hülfe linearer Gleichungen gefunden werden.

Die hier entwickelte Reduction der allgemeinen Gleichung vom n^{ten} Grade lässt sich also stets durch die Substitution

$$qx^3 + ux^2 + vx + w - y = 0$$

bewerkstelligen.

Man kann nun auch noch die Coefficienten A, B und D verschwinden lassen und zwar bedarf es hierzu der Substitution

$$px^4 + qx^3 + ux^2 + vx + w - y = 0$$

und der Auflösung einer Resolvente in p, q, u, v oder w vom vierten Grade. Das Verfahren ist offenbar ganz ähnlich. Man setze

$$A = 0\,, \quad B = 0\,, \quad D = 0\,.$$

Mittels der ersten Gleichung erhält man ebenso

$$B' = 0\,,\quad D' = 0\,,$$

und durch Anwendung des Satzes von den homogenen quadratischen Functionen auf B' die biquadratische Gleichung

$$D'' = 0\,.$$

Mittels Anwendung dieses Reductionsverfahrens kann die allgemeine Gleichung fünften Grades auf die Formen

$$y^5 + Dy + E = 0$$
$$y^5 + Cy^2 + E = 0$$

gebracht werden. Durch eine geeignete Substitution für y lässt sich auch noch einer der Coefficienten einer beliebigen Grösse gleich machen. Substituirt man z. B. $y = \eta \sqrt[4]{-D}$, so geht die erste Form über in

$$\eta^5 - \eta - M = 0\,,$$

welche Gleichung von Hermite*) zur Auflösung der Gleichung fünften Grades mittels elliptischer Functionen benutzt worden ist.

XII. Lineare Transformation der Cayley'schen Formen eines binären Polynoms. — Invarianten und Covarianten**).

§ 52. Lineare Transformation der binären Polynome. — Modul.

Ausser den Varianten und Retrovarianten (§ 17), den Geminanten und Discriminanten (§ 20, 21) begegnet man bei der Untersuchung der Eigenschaften und der Auflösung der algebraischen Gleichungen öfter gewissen Functionen der Coefficienten, welche man mit den Namen Invarianten und Covarianten bezeichnet hat

---

*) Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Compt. Rend. Tom. 46. pg. 508. 1858.

**) Eisenstein, Eigenschaften und Beziehungen der Ausdrücke, welche bei der Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichungen erscheinen. Crelle's Journ. XXVII. S. 319. 1844.

Cayley, Recherches sur les covariants. Crelle's Journ. XLVII. S. 109. 1853.

Brioschi, Sur une formule de Cayley. (Sur une rélation entre les covariants de la fonction biquadratique.) Crelle's Journ. LIII. S. 377. 1856.

Blerzy, Sur les invariants. Nouv. ann. d. mathém. XVII. p. 301. 1858; XVIII. p. 420. 1859.

und deren Kenntniss von besonderer Wichtigkeit ist. Diese Functionen erhalten besonders einfache Relationen unter einander, wenn man von der Cayley'schen Form binärer Polynome ausgeht, nämlich

$$U = ax^n + \binom{n}{1} bx^{n-1}y + \binom{n}{2} cx^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{1} sxy^{n-1} + ty^n$$

$$= (a, b, c, \ldots t \widehat{)(} x, y)^n .$$

Nach Cayley's Bezeichnung ist demzufolge

$$U = ax + by = (a, b \widehat{)(} x, y)$$

ein binäres lineares Binom; ferner

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c \widehat{)(} x, y)^2$$

ein binäres quadratisches Trinom; analog

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d \widehat{)(} x, y)^3$$

ein binäres kubisches Polynom, u. s. w.

Wir gehen zunächst aus von dem binären quadratischen Trinom

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 .$$

Man substituire die linearen Functionen

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y ,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y .$$

Hieraus resultirt ein neues quadratisches Trinom

$$U_1 = AX^2 + 2BXY + CY^2 = (A, B, C \widehat{)(} X, Y)^2 .$$

Löst man die linearen Substitutionen nach X und Y auf, so erhält man

$$X = \frac{\beta_2 x - \beta_1 y}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} , \quad Y = \frac{\alpha_1 y - \alpha_2 x}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} .$$

Den Nenner

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = {}^{+}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}_{+}$$

Blerzy, Usage des invariants dans la résolution algébrique des équations du III$^{\text{ième}}$ et IV$^{\text{ième}}$ degré. p. 428. ibid.

Terquem, Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants. ibid. p. 249. 299. 446. 1859.

Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra. Deutsch von Fiedler. Leipzig 1863.

Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. § 30—51. Leipzig 1872.

nennt man den Modul der Transformation. Führt man die Substitutionen aus, so erhält man

$$A = a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_2^2 = (a, b, c\widehat{)\,(}\alpha_1, \alpha_2)^2,$$

$$2B = 2[a\alpha_1\beta_1 + b(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + c\alpha_2\beta_2] = \beta_1\frac{\partial A}{\partial\alpha_1} + \beta_2\frac{\partial A}{\partial\alpha_2},$$

$$C = a\beta_1^2 + 2b\beta_1\beta_2 + c\beta_2^2 = (a, b, c\widehat{)\,(}\beta_1, \beta_2)^2.$$

Es sei ferner gegeben

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d\widehat{)\,(}x, y)^3$$

und man substituirt

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y,$$

so wird die neue Function

$$U_1 = AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3 = (A, B, C, D\widehat{)\,(}X, Y)^3.$$

Die Coefficienten der Transformation werden bestimmt durch die Gleichungen

$$A = (a, b, c, d\widehat{)\,(}\alpha_1, \alpha_2)^3,$$

$$3B = \beta_1\frac{\partial A}{\partial\alpha_1} + \beta_2\frac{\partial A}{\partial\alpha_2},$$

$$3C = \alpha_1\frac{\partial D}{\partial\beta_1} + \alpha_2\frac{\partial D}{\partial\beta_2},$$

$$D = (a, b, c, d\widehat{)\,(}\beta_1, \beta_2)^3.$$

§ 53. Von den Invarianten und ihren symmetrischen Formen.

Wir haben im vorhergehenden Abschnitte gesehen, dass man aus dem binären quadratischen Trinom

$$U = (a, b, c\widehat{)\,(}x, y)^2$$

durch lineare Transformation zu dem neuen Trinom

$$U_1 = (A, B, C\widehat{)\,(}X, Y)^2$$

gelangt. Sei $\varphi(a, b, c)$ irgend eine Function der Coefficienten a, b, c in U und $\varphi(A, B, C)$ eine homologe Function der Coefficienten A, B, C in U_1 ... Alsdann ist $\varphi(A, B, C)$ eine implicite Function von a, b, c, α und β. Ist die Function φ von der Beschaffenheit, dass man hat

$$\varphi(A, B, C) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^p\,\varphi(a, b, c),$$

wo p eine positive ganze Zahl ist, so heisst $\varphi(a, b, c)$ eine Invariante*) von U der p^{ten} Ordnung.

1. Beispiel. Es sei gegeben

$$U = (a, b, c\widehat{)\,(}x, y)^2 ,$$

und

$$\varphi(a, b, c) = ac - b^2 ,$$

so ist auch

$$\varphi(A, B, C) = AC - B^2 .$$

Führen wir die oben angenommenen Substitutionen ein, so resultirt

$$AC - B^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 (ac - b^2) .$$

Mithin ist $ac - b^2$ eine quadratische Invariante der Function

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 .$$

Es möge hier bemerkt werden, dass die betreffende Invariante $J_{2,2}$ zugleich die Discriminante der quadratischen Gleichung ist (§ 21). Es ist demnach

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

und

$$J_{2,2} = \overline{D}_2 .$$

2. Beispiel. Es sei gegeben

$$U = (a, b, c, d\widehat{)\,(}x, y)^3 ,$$

und

$$\varphi(a, b, c, d) = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = \overline{D}_3 ,$$

so ist auch

$$\varphi(A, B, C, D) = (BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) .$$

Macht man nämlich die linearen Substitutionen

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y ,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y ,$$

so findet man leicht

$$\varphi(A, B, C, D) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^3 \varphi(a, b, c, d) .$$

Da die angenommene Function der Coefficienten zugleich die Discriminante der kubischen Gleichung ist, so hat man

*) Die Function ist immer eine symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $U = 0$ und heisst Invariante, weil sie unveränderlich bleibt, wenn man sämmtliche Elemente um dieselbe Grösse z variirt.

$$J_{3,4} = \overline{D}_3 ,$$

wo der vordere Index der Invariante sich auf den Ordnungsexponenten der ursprünglichen Function U und der hintere sich auf die Ordnung der Invariante selbst bezieht, welche offenbar die vierte ist.

3. Beispiel. Es sei gegeben

$$U = (a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, y)^4 ,$$

und

$$\varphi(a, b, c, d, e) = ae - 4bd + 3c^2 .$$

Alsdann findet man mittels der beiden linearen Substitutionen

$$AE - 4BD + 3C^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^4 (ae - 4bd + 3c^2) .$$

Mit Rücksicht auf die Ordnungsexponenten ist also

$$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2$$

eine quadratische Invariante der biquadratischen Function.

Ist nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise die Function

$$U = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

so ist die quadratische Invariante

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12} (b^2 - 3ac + 12d).$$

Es lässt sich ferner zeigen, dass der Ausdruck

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = J_{4,3}$$

und nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise des Polynoms

$$\frac{1}{432}(-27a^2d + 9abc - 2b^3 + 72bd - 27c^2) = \mathfrak{J}$$

die kubische Invariante der biquadratischen Gleichung ist.

Endlich ist auch noch die Discriminante $\overline{D}_4$ eine bikubische Invariante der biquadratischen Gleichung. Dieselbe ist im § 21 entwickelt und es gilt die Relation

$$J_{4,6} = \overline{D}_4 .$$

Es wird weiter unten der Satz bewiesen werden, dass jede Discriminante zugleich eine Invariante ist. Vorher mögen noch einige Bemerkungen über die symmetrische Darstellungsweise der aufgeführten Invarianten, sowie über einige wichtige Beziehungen derselben unter einander hier Platz finden.

Zunächst ist

$$J_{2,2} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = \overline{D}_2 \,.$$

Dieselbe ist in symmetrischer Anordnung der Elemente

$$\frac{1}{2} ac - b^2 + \frac{1}{2} ca \,.$$

Die Invariante $J_{2,2}$, welche Bezeichnung von Blerzy herrührt, wird von Clebsch mit $\frac{1}{2} D$ bezeichnet.

Ferner ist

$$J_{3,4} = \begin{vmatrix} (ad - bc)\,, & 2(ac - b^2) \\ 2(bd - c^2)\,, & (ad - bc) \end{vmatrix} = \overline{D}_3 \,.$$

In symmetrischer Anordnung der Elemente hat man

$$J_{3,4} = 2(b^2 - ac)(bd - c^2) - (ad - bc)(bc - ad) + 2(b^2 - ac)(bd - c^2).$$

Von der Mitte an vertausche man rückwärtsschreitend a, d und b, c. Auch kann man schreiben

$$J_{3,4} = 2(b^2 - ac)(bd - c^2) - (ad - bc)(cb - da) + 2(c^2 - db)(ca - b^2).$$

Diese Invariante wird von Clebsch mit $-\frac{1}{2} R$ bezeichnet.

Ferner ist

$$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2 \,.$$

In symmetrischer Anordnung kann man dieselbe schreiben

$$J_{4,2} = \frac{a(be - cd)^2 - 4b(ce - d^2)(ad - bc) + 4(cd - be)(b^2 - ac)d - (bc - ad)^2 e}{eb^2 - d^2 a} \,.$$

Von der Mitte an in Zähler und Nenner vertausche man rückwärtsschreitend a, e und b, d.

Diese Invariante wird von Clebsch mit $\frac{1}{2} i$ bezeichnet.

Weiter ist

$$J_{4,3} = {}^{+}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}_{+} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 \,.$$

In symmetrischer Gestalt lässt sich dieselbe schreiben

$$J_{4,3} = \frac{(ad - bc)^2(d^2 - ce) + (ac - b^2)(cd - be)^2}{eb^2 - d^2 a} \,,$$

oder in Form einer verkürzten Determinante

$$J_{4,3} = \begin{vmatrix} (ac - b^2)\,, & (bd - c^2) \\ (bd - c^2)\,, & (ce - d^2) \end{vmatrix} : c \,.$$

Diese Invariante wird von Clebsch mit $\frac{1}{6} j$ bezeichnet.

Zwischen den Invarianten der quadratischen, kubischen und biquadratischen Formen, von denen Clebsch in seinem classischen Werke (§§ 33, 37, 43) beweist, dass die genannten die einzigen sind, finden noch folgende bemerkenswerthe Relationen statt:

$$J_{2,2} = \overline{D}_2,$$
$$J_{3,4} = J_{2,2} \,.\, J_{4,2} - aJ_{4,3} = \overline{D}_3,$$
$$J_{4,2} = (J_{3,4} + aJ_{4,3}) : J_{2,2},$$
$$J_{4,3} = (J_{2,2} \,.\, J_{4,2} - J_{3,4}) : a,$$
$$J_{4,6} = J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2 = \overline{D}_4 \,.$$

Diejenigen Gleichungen, in denen der vordere Index überall derselbe ist, gelten auch für Gleichungen der gewöhnlichen Form, also die erste und fünfte.

Von der Invariante $J_{3,4}$ oder der Discriminante $\overline{D}_3$ hat Eisenstein*) eine merkwürdige Eigenschaft entdeckt, nämlich die, dass sich ihre dritte Potenz durch eine ähnliche Function ausdrücken lässt, wenn man den Elementen Werthe gibt, die gewisse einfache Functionen der Elemente der Discriminante darstellen.

Bildet man nämlich die partiellen Differenzialquotienten der Invariante, also

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right) &= 2(2c^3 - 3bcd + ad^2) = 2D,\\
\left(\frac{\partial J}{\partial b}\right) &= -6(bc^2 + acd - 2b^2d) = -6C,\\
\left(\frac{\partial J}{\partial c}\right) &= -6(b^2c + abd - 2ac^2) = 6B,\\
\left(\frac{\partial J}{\partial d}\right) &= 2(2b^3 - 3abc + a^2d) = -2A,
\end{aligned}$$

so findet die identische Gleichung

$$J_{3,4}^3 = (BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD)$$

statt.

Eine analoge wenn auch viel einfachere Eigenschaft findet man an der Discriminante $\overline{D}_2$. Bildet man auch hier die partiellen Differenzialquotienten der Invariante, so findet man

*) Ueber eine merkwürdige identische Gleichung. Crelle Journ. Bd. XXVII. 105.

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right) = a = C,$$
$$\left(\frac{\partial J}{\partial b}\right) = -2b = -2B,$$
$$\left(\frac{\partial J}{\partial c}\right) = c = A.$$

Es ist also hier

$$J_{2,2} = (ac - b^2) = AC - B^2.$$

Wenn man wiederum von $J_{3,4}^3 = J'$ die partiellen Differenzialquotienten nach A, B, C, D bildet und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J'}{\partial A}\right) = D', \quad -\frac{1}{6}\left(\frac{\partial J'}{\partial B}\right) = C',$$
$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial J'}{\partial C}\right) = B', \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J'}{\partial D}\right) = A'$$

setzt, so findet man die merkwürdigen Beziehungen

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J'}{\partial D}\right) = aJ_{3,4}^2, \quad \frac{1}{6}\left(\frac{\partial J'}{\partial C}\right) = b\,J_{3,4}^2,$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial J'}{\partial B}\right) = c\,J_{3,4}^2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J'}{\partial A}\right) = d\,J_{3,4}^2,$$

aus welchen sich weiter die Relation

$$J_{3,4}^9 = (B'C' - A'D')^2 - 4(B'^2 - A'C')(C'^2 - B'D')$$

ableiten lässt.

Wir betrachten noch eine Eigenschaft der Invariante $J_{4,3}$, welche ein Seitenstück zu dem Vorhergehenden bildet.

Es ist nämlich

$$J_{4,3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}^{+}_{+} = \begin{vmatrix} a & b & (c+2\lambda) \\ b & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda) & d & e \end{vmatrix}_{\lambda=0}.$$

Bildet man die partiellen Differenzialquotienten

$$\left[\frac{\partial J}{\partial a}\right] = (c-\lambda)e - d^2 = P,$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial J}{\partial b}\right] = (c+2\lambda)d - be = Q_2,$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial J}{\partial (c+2\lambda)}\right] = bd - (c-\lambda)(c+2\lambda) = Q_1,$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial J}{\partial (c-\lambda)}\right] = ae - (c+2\lambda)^2 = P_1,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial J}{\partial d}\right] = b(c+2\lambda) - ad = Q,$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial e}\right] = a(c-\lambda) - b^2 = P_2,$$

und setzt $\lambda = 0$, so lässt sich das Quadrat der Invariante durch die nämliche Function ausdrücken, wie sie selbst.

Setzt man nämlich

$$a = p, \quad c - \lambda = p_1, \quad e = p_2,$$
$$d = q, \quad c + 2\lambda = q_1, \quad b = q_2,$$

so ist

$$J_{4,3} = \left[p\,p_1\,p_2 + 2q\,q_1\,q_2 - p\,q^2 - p_1\,q_1{}^2 - p_2 q_2{}^2\right]_{\lambda=0},$$

und

$$J_{4,3}^2 = \left[P\,P_1\,P_2 + 2\,Q\,Q_1\,Q_2 - P\,Q^2 - P_1\,Q_1{}^2 - P_2\,Q_2{}^2\right]_{\lambda=0}.$$

Dieser Satz rührt ursprünglich von Lagrange her.

Die quadratischen Invarianten kommen nur bei den Polynomen von geradem Grade $2m$ vor. Ihre Gleichung ist

$$J_{2m,2} = at - \binom{2m}{1} bs + \binom{2m}{2} cr - \cdots \pm \frac{1}{2}\binom{2m}{m} k^2.$$

Ihre partiellen Differenzialquotienten mit abwechselnden Vorzeichen genommen liefern die Coefficienten des Polynoms.

Jede Gleichung von ungeradem Grade $2m+1$ hat eine biquadratische Invariante

$$J_{2m+1,4} = \left\{\begin{matrix} at - \alpha_1 bs + \alpha_2 cr - \cdots \\ + \alpha_r g o \mp \cdots \pm \alpha_m . kl \end{matrix}\right\}^2 - 4J'_{2m} . J''_{2m},$$

wo J'_{2m} die quadratische Invariante von $\frac{1}{2m+1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ und

J''_{2m} die quadratische Invariante von $\frac{1}{2m+1}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ bedeuten,

α_r und α_{r-1} abgeleitet werden müssen aus den Formeln

$$\alpha_1 = 2m - 1$$
$$r\alpha_r = (2m - r + 2)\,\alpha_{r-1} - 2\binom{2m}{r-1}.$$

Dieselbe Invariante lässt sich auch schreiben in der Form

$$\mathrm{J}_{2m+1,4} = \left(\sum_{r=0}^{r=2m+1} g\,\frac{\partial J'_{2m}}{\partial f}\right)^2 - 4J'_{2m} . J''_{2m},$$

wo g den Coefficienten des $(r+1)^{\text{ten}}$, f den des r^{ten} Gliedes von U bezeichnet.

Jedes Polynom von geradem Grade $2m$ hat eine Invariante vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade von der Form

$$J_{2m,\,m+1} = \begin{vmatrix} a & b & c & . & . & k \\ b & c & d & . & . & l \\ c & d & e & . & . & m \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ k & l & m & . & . & t \end{vmatrix}.$$

Brioschi bemerkt in seinem Werke über die Determinanten, dass die Invariante φ eines Polynoms vom n^{ten} Grade dadurch characterisirt ist, dass sie der Differenzialgleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} rf\frac{\partial\varphi}{\partial g} = 0$$

genüge. Die beiden eben gegebenen exacten Formeln für $J_{2m,\,2}$ und $J_{2m+1,\,4}$ erfüllen diese Bedingungen. Zur Erläuterung mögen ein paar Beispiele dienen.

1. Beispiel. Es sei $n=2$, also $m=1$ und

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Es ist $\varphi = J_{2,\,2} = ac - b^2$, und die Bedingungsgleichung ergibt

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial b} + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial c} = 0.$$

Es ist nun $\frac{\partial\varphi}{\partial b} = -2b$, $\frac{\partial\varphi}{\partial c} = a$. Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so wird sie identisch.

2. Beispiel. Es sei $n=4$, $m=2$ und

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Zunächst ist

$$\varphi = J_{4,\,2} = ae - 4bd + 3c^2,$$

und die Bedingungsgleichung ergibt

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial b} + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial c} + 3c\frac{\partial\varphi}{\partial d} + 4d\frac{\partial\varphi}{\partial e} = 0.$$

Es ist nun

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b} = -4d,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial c} = 6c,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial d} = -4b,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial e} = a.$$

Diese Werthe genügen der vorhergehenden Gleichung.

Ferner ist

$$\varphi = J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 2(cd - be), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = (ae + 2bd - 3c^2),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d} = 2(bc - ad), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial e} = (ac - b^2).$$

Diese Werthe erfüllen die Gleichung ebenfalls.

3. Beispiel. Es sei $n = 3$, $m = 1$; also

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Zunächst sind $J'_{2,2}$ und $J''_{2,2}$ zu bestimmen. Man findet leicht

$$J'_{2,2} = ac - b^2, \quad J''_{2,2} = bd - c^2.$$

Nach der gegebenen Formel ist

$$J_{3,4} = \left(b\frac{\partial J'_{2,2}}{\partial a} + c\frac{\partial J'_{2,2}}{\partial b} + d\frac{\partial J'_{2,2}}{\partial c}\right)^2 - 4J'_{2,2}J''_{2,2}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial J'_{2,2}}{\partial a} = c, \quad \frac{\partial J'_{2,2}}{\partial b} = -2b, \quad \frac{\partial J'_{2,2}}{\partial c} = a.$$

Setzt man sämmtliche Werthe ein, so findet man

$$\varphi = J_{3,4} = (ac - bd)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Die Bedingungsgleichung ist

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial b} + 2b\frac{\partial \varphi}{\partial c} + 3c\frac{\partial \varphi}{\partial d},$$

und sie wird erfüllt durch die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = -6(bc^2 + acd - 2b^2d)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = -6(b^2c + abd - 2ac^2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d} = 2(2b^3 - 3abc + a^2d).$$

§ 54. Die Discriminanten als Invarianten.

Es lässt sich zeigen, dass für jedes binäre Polynom die Discriminante eine Invariante sein muss.

Gegeben sei das Polynom

$$U = (a, b, c, \ldots t)\widehat{\ }(x, y)^n .$$

Seine Wurzeln seien $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots \frac{x_n}{y_n}$, also der Binomialfactor des Polynoms

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{x_r}{y_r}\right).$$

Multiplicirt man diese sämmtlich mit einander und schafft die Divisoren weg, so erhält man

$$U = (xy_1 - x_1 y)(xy_2 - x_2 y) \ldots (xy_n - x_n y) = 0 .$$

Durch Vergleichung der homologen Coefficienten erhält man

$$\begin{aligned} a &= y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n , \\ b &= -\Sigma y_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t &= (-1)^n x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n . \end{aligned}$$

Nun ist

$$n\,U = x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y}$$

eine bekannte Eigenschaft homogener Functionen und weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= y_1(xy_2 - x_2 y)(xy_3 - x_3 y) \ldots (xy_n - x_n y) \\ &+ y_2(xy_1 - x_1 y)(xy_3 - x_3 y) \ldots (xy_n - x_n y) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Wurzeln also, welche U und $\frac{\partial U}{\partial x}$ gemein haben, d. h. diese Functionen gleich Null machen, lassen auch $\frac{\partial U}{\partial y}$ verschwinden. Die gemeinschaftlichen Wurzeln sind also die der Discriminante. Setzt man nun die Wurzel $\frac{x_1}{y_1}$ von U in die erste Derivirte ein, so erhält man

$$y_1(x_1\, y_2 - x_2\, y_1)(x_1\, y_3 - x_3\, y_1) \ldots (x_1\, y_n - x_n\, y_1) ;$$

analog

$$y_2(x_2\, y_1 - x_1\, y_2)(x_2\, y_3 - x_3\, y_2) \ldots (x_2\, y_n - x_n\, y_2) ;$$

u. s. w.

Das Product aller Gleichungen gibt sämmtliche gemeinschaftliche Wurzeln von U und seiner ersten Derivirten, also

$$y_1\, y_2 \ldots y_n\, (x_1\, y_2 - x_2\, y_1)^2 (x_1\, y_3 - x_3\, y_1)^2 \ldots (x_{n-1}\, y_n - x_n\, y_{n-1})^2$$

Dividirt man durch $y_1\, y_2 \ldots y_n$ oder a, so erhält man die Discriminante von U, nämlich

$$\overline{D}_n = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - x_n\, y_{n-1})^2 .$$

Nach dieser Vorbereitung möge nun U durch die linearen Substitutionen

$$\alpha_1 x + \beta_1 y \text{ für } x, \quad \alpha_2 x + \beta_2 y \text{ für } y$$

in das neue Polynom U_1 transformirt werden.

Der erste Binomialfactor von U ist $xy_1 - x_1 y$, welcher in

$$x\, Y_1 - X_1 y = (\alpha_1 x + \beta_1 y)\, y_1 - (\alpha_2 x + \beta_2 y)\, x_1$$

übergeht. Daraus folgt

$$Y_1 = \alpha_1 y_1 - \alpha_2 x_1 ; \quad X_1 = -(\beta_1 y_1 - \beta_2 x_1) ;$$

analog

$$Y_2 = \alpha_1 y_2 - \alpha_2 x_2 ; \quad X_2 = -(\beta_1 y_2 - \beta_2 x_2) .$$

Der erste Factor der Discriminante von U ist $(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$ und der von U_1 gleich $(X_1\, Y_2 - X_2\, Y_1)^2$. Setzt man die obigen Werthe in den letzteren Ausdruck ein, so erhält man

$$(X_1\, Y_2 - X_2\, Y_1)^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 ;$$

analog

$$(X_1\, Y_3 - X_3\, Y_1)^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 ;$$

u. s. f.

Demnach ist die Discriminante der Transformirten gleich der der Function U multiplicirt mit einer positiven Potenz des Modul. Die Discriminante ist also eine Invariante.

Ausser in diesen speciellen Fällen lassen sich Invarianten auf verschiedene Art auffinden. Wenn z. B. die Wurzeln eines homogenen binären Polynoms U

$$\frac{x_1}{y_1} = \alpha, \quad \frac{x_2}{y_2} = \beta, \quad \frac{x_3}{y_3} = \gamma, \text{ u. s. w.}$$

sind und sich eine symmetrische Function der quadrirten Wurzeldifferenzen von der Beschaffenheit entdecken lässt, dass jedes Glied die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gleich viel mal enthält, so ist die Summe der symmetrischen Functionen ausgedrückt durch die Coefficienten des Polynoms eine Invariante. Denn jedes Glied ist ein Product von Factoren der Form $x_1 y_2 - x_2 y_1$ und die ganze Summe ist durch a zu dividiren. Dies Resultat ist nach dem vorangehenden Theorem eine Invariante und die symmetrischen Functionen würden keine solche bilden, wenn nicht jedesmal alle Wurzeln vertreten wären.

Beispielsweise ist die symmetrische Function

$$\frac{1}{24}\Sigma(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$$

eine Invariante. Dieselbe ist gleich

$$\frac{1}{24}\times\left\{\begin{array}{l}(x_1y_2-x_2y_1)^2(x_3y_4-x_4y_3)^2\\+(x_1y_3-x_3y_1)^2(x_2y_4-x_4y_2)^2\\+(x_2y_3-x_3y_2)^2(x_1y_4-x_4y_1)^2\end{array}\right\}=ae-4bd+3c^2=J_{4,2}.$$

Hieraus folgt noch, dass die quadratische Invariante ein Theil des Coefficienten von dem dritten Gliede der Gleichung der quadrirten Differenzen ist.

Ebenso liefert die symmetrische Function

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\varepsilon-\zeta)^2$$

eine Invariante für die Polynome sechsten Grades, die Function

$$\frac{1}{144}\Sigma(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2$$

das Quadrat der Invariante $J_{4,2}$.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, gehe man aus von der Function

$$(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$$

und bilde die Gleichung dieser Wurzeln. Wir setzen also

$$\begin{aligned}y_1^2&=(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2=[(\alpha\gamma+\beta\delta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)]^2,\\y_2^2&=(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2=[(\alpha\beta+\gamma\delta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)]^2,\\y_3^2&=(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2=[(\alpha\beta+\gamma\delta)-(\alpha\gamma+\beta\delta)]^2.\end{aligned}$$

Um zu der Gleichung in y zu gelangen, setze man zunächst

$$\begin{aligned}z_1&=(\alpha\beta+\gamma\delta),\\z_2&=(\alpha\gamma+\beta\delta),\\z_3&=(\alpha\delta+\beta\gamma).\end{aligned}$$

Dies sind die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$a^2z^3-6ca^2z^2+4(4bd-ae)az-8(2b^2e-3ace+2ad^2)=0,$$

oder

$$z^3-6\frac{c}{a}z^2+\frac{4}{a^2}(4bd-ae)z-\frac{8}{a^3}(2b^2e-3ace+2ad^2)=0.$$

Um hiervon die Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen zu bilden, benutze man die Formel in § 19:

$$y^6-2(A^2-3B)y^4+(A^2-3B)^2y^2+\frac{1}{3}(AB-9C)^2$$
$$-\frac{4}{3}(A^2-3B)(B^2-3AC)=0.$$

Man erhält offenbar

$$a^6y^6-24a^4(ae-4bd+3c^2)y^4+144a^2(ae-4bd+3c^2)^2y^2-\overline{D}_4=0,$$

oder kurz

$$a^6y^6-24J_{4,2}\,a^4y^4+144J_{4,2}^2\,a^2y^2-J_{4,6}=0\,.$$

Hieraus ergeben sich die oben ausgesprochenen Sätze. Da das Absolutglied der schematischen Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen die Discriminante der kubischen Gleichung ist und nach der Natur der substituirten Functionen auch gleich $-\overline{D}_4$ sein muss, so folgt daraus noch, dass sich die Discriminante der biquadratischen Gleichung auf die Form der Discriminante $\overline{D}_3$ bringen lässt.

Man findet nach Entwickelung derselben

$$-\overline{D}_4=3(3J_{4,3}+cJ_{4,2})^2-J_{4,2}(J_{4,2}^2+3c^2J_{4,2}+18cJ_{4,3})$$

oder

$$\overline{D}_4=J_{4,2}^3-27\,J_{4,3}^2=J_{4,6}\,.$$

Die symmetrische Function $(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$ ist also eine Wurzel der Gleichung

$$a^6y^6-24J_{4,2}\,a^4y^4+144J_{4,2}^2\,a^2y^2-J_{4,2}^3+27J_{4,3}^2=0$$

und die symmetrische Function $(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2$ eine Wurzel der Gleichung der Wurzelproducte.

Von der Discriminante $\overline{D}_3$ muss noch eine Beziehung zu den Varianten und Retrovarianten (§ 17) erwähnt werden, da sie in der Theorie der kubischen Gleichungen oft in Betracht kommt. Wie zuerst Eisenstein gezeigt hat, ist

$$a^2\overline{D}_3=(a^2d-3abc+2b^3)^2-4(b^2-ac)^3\,,$$

$$d^2\overline{D}_3=(d^2a-3dcb+2c^3)^2-4(c^2-bd)^3\,.$$

Führen wir die früheren Bezeichnungen ein, so ist nach § 17 und § 52

$$a^2d-3abc+2b^3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_{3,4}}{\partial d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{D}_3}{\partial d}\right)=V_3\,,$$

$$d^2a-3dcb+2c^3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_{3,4}}{\partial a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{D}_3}{\partial a}\right)=V'_{3,3}\,,$$

$$b^2-ac=-I_{2,2}=V_2\,,$$

$$c^2-bd=V'_{2,3}\,.$$

Demnach gelten die Beziehungen

$$a^2\overline{D}_3=V_3^{\,2}-4\,V_2^{\,3}\,,\quad d^2\overline{D}_3=V'^2_{3,3}-V^3_{2,3}\,.$$

Fügt man hierzu die Function

$$e^2 b - 3edc + 2d^3 = V'_{3,4},$$

so ist noch

$$- a^2 (V_2 J_{4,2} + a J_{4,3}) = V_3{}^2 - 4 V_2{}^3,$$

und

$$- e^2 (V'_{2,4} J_{4,2} + e J_{4,3}) = V'^2_{3,4} - 4 V'^3_{2,4}.$$

Die beiden letzten Gleichungen, welche für die Theorie der biquadratischen Functionen von Wichtigkeit sind, lassen sich in eleganterer Form darstellen durch

$$V_3{}^2 = 4(b^2 - ac + a\lambda_{,})(b^2 - ac + a\lambda_{,,})(b^2 - ac + a\lambda_{,,,})$$

und

$$V^2_{3,4} = 4(d^2 - ec + e\lambda_{,})(d^2 - ec + e\lambda_{,,})(d^2 - ac + e\lambda_{,,,}),$$

wo $\lambda_{,}, \lambda_{,,}, \lambda_{,,,}$ die Wurzeln der Determinante $\varDelta$ von Aronhold sind. Dieselbe ist bereits in § 53 aufgeführt und lautet:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & (c + 2\lambda) \\ b & (c - \lambda) & d \\ (c + 2\lambda) & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$- 4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0.$$

Die erste der obigen Gleichungen ist von Hermite*) gefunden worden. Cayley hat gezeigt, dass die Discriminante $\overline{D}_4$ sich auf die Discriminante von $\varDelta$ zurückführen lässt, indem

$$\overline{D}_4 = 16(\lambda_{,} - \lambda_{,,})^2 (\lambda_{,,} - \lambda_{,,,})^2 (\lambda_{,,,} - \lambda_{,})^2 = J^3_{4,2} - 27 J^2_{4,3}$$

ist.

§ 55. Von den Covarianten der binären Polynome**).

Die Covarianten der binären Polynome unterscheiden sich von den Invarianten dadurch, dass in den letzteren nur die Coefficienten der Glieder des Polynoms, in dem ersteren ausserdem auch noch die Variabeln x und y vorkommen. Da die Resolventen der Gleichungen zuweilen in den Formen der Covarianten auftreten, so ist ihre Kenntniss von nicht geringerer Wichtigkeit als die der Invarianten.

Gegeben sei die kubische Function

---

*) Crelle Journ. Bd. 52. S. 7.

**) Terquem, Sur les covariants. Nouv. ann. XXVIII. p. 446.

$$U = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3 .$$

Transformirt man dieselbe durch Substitution von

$$x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta, \quad y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta,$$

so wird

$$U_1 = (A, B, C, D)\widehat{\ }(\xi, \eta)^3,$$

wobei wie früher (§ 52) ist

$$\text{A} \quad \cancel{N} = (a, b, c, d)\widehat{\ }(\alpha_1, \alpha_2)^3,$$

$$D = (a, b, c, d)\widehat{\ }(\beta_1, \beta_2)^3,$$

$$3B = \beta_1 \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial A}{\partial \alpha_2},$$

$$3C = \alpha_1 \frac{\partial A}{\partial \beta_1} + \alpha_2 \frac{\partial A}{\partial \beta_2}.$$

Nimmt man nun an

$$\varphi = \left[(ac - b^2),\ \frac{1}{2}(ad - bc),\ (bd - c^2)\right]\widehat{\ }\left(x, y\right)^2,$$

$$\varphi_1 = \left[(AC - B^2),\ \frac{1}{2}(AD - BC),\ (BD - C^2)\right]\widehat{\ }\left(\xi, \eta\right)^2,$$

ersetzt in φ die Werthe x und y durch ihre Werthe in ξ und η, in φ_1 die Coefficienten durch ihre Werthe ausgedrückt in a, b, c, d und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, so findet man

$$\varphi_1 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^3 \varphi.$$

Man nennt in diesem Falle φ eine Covariante von U. Wenn man gewisse Derivirte von U und U_1 nimmt, z. B.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 = \varphi,$$

und analog

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 = \varphi_1,$$

darauf die vorgeschriebenen Substitutionen vornimmt, so wird immer

$$\varphi_1 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^p \varphi = (\alpha \beta)^p \varphi,$$

wo p eine positive ganze Zahl ist. In diesem Falle ist also φ eine Covariante von U und nur wenn die Variabeln in φ verschwinden, ist φ eine Invariante.

Ist ein binäres Polynom U transformirt in U_1 durch die linearen Substitutionen

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y, \quad y = \alpha_2 X + \beta_2 Y,$$

so ist

$$(\alpha\beta) X = \beta_2 x - \beta_1 y, \quad (\alpha\beta) Y = -(\alpha_2 x - \alpha_1 y).$$

Differenzirt man diese Gleichungen partiell nach x und y, also

$$\left(\alpha\,\beta\right)\frac{\partial X}{\partial x} = \quad \beta_2, \quad \left(\alpha\,\beta\right)\frac{\partial X}{\partial y} = -\beta_1,$$

$$\left(\alpha\,\beta\right)\frac{\partial Y}{\partial y} = -\alpha_2, \quad \left(\alpha\,\beta\right)\frac{\partial Y}{\partial y} = \quad \alpha_1,$$

so erhält man wegen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}$$

die Relationen

$$-\left(\alpha\,\beta\right)\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_2\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y}\right) + \beta_2\left(\frac{-\partial U_1}{\partial X}\right),$$

$$\left(\alpha\,\beta\right)\frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_1\left(\frac{\delta U_1}{-\partial y}\right) + \beta_1\left(\frac{-\partial U_1}{\partial X}\right).$$

Demnach sind mit Ausnahme des constanten Factors $(\alpha\beta)$ $\frac{\partial U}{\partial y}$ und $-\frac{\partial U}{\partial y}$ auf dieselbe Art transformirt, wie x und y, wenn man die linearen Substitutionen damit vergleicht. Hat man also die beiden Polynome n^{ten} Grades

$$U = f(x, y), \quad U_1 = f(X, Y),$$

so hat man ebenfalls

$$\left(\alpha\,\beta\right)^n f\left(\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial x}\right) = f\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y}, \frac{\partial U_1}{\partial X}\right),$$

und die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Covariante von U. Dabei hat man zu beachten, dass in der Entwickelung der Term $x^r y^{n-r}$ bei der Differenzirung den Werth

$$\left(-1\right)^r \frac{\partial^n U}{(\partial x)^r (\partial y)^{n-r}}$$

liefert. Es soll die Theorie durch einige Beispiele erläutert werden.

1. Beispiel. Gegeben sei

$$U = ax + by = (a, b)\widehat{\ }(x, y).$$

Die Transformirte ist

$$U_1 = (a\alpha_1 + b\alpha_2) X + (a\beta_1 + b\beta_2) Y.$$

Wendet man hierauf die derivirte Function

$$a\frac{\partial U}{\partial y} - b\frac{\partial U}{\partial x}$$

an, so ist

$$\left(\alpha\beta\right)\left(a\frac{\partial U}{\partial y} - b\frac{\partial U}{\partial x}\right) = A\frac{\partial U_1}{\partial Y} - B\frac{\partial U_1}{\partial X}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial U}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial U_1}{\partial Y} = B, \quad \frac{\partial U_1}{\partial X} = A.$$

Hierdurch verschwinden die Ausdrücke identisch. Das binäre Binom hat weder eine Invariante noch eine Covariante.

2. Beispiel. Gegeben sei

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)\widehat{\ }(x, y)^3.$$

Transformirt man das Trinom in

$$U = AX^2 + 2BXY + CY^2 = (A, B, C)\widehat{\ }(XY)^3,$$

so findet man mit Anwendung der derivirten Function

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\left(\alpha\beta\right)^2\left(a\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = A\frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} - 2B\frac{\partial^2 U_1}{\partial Y \partial X} + C\frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2c, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 2b, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2a;$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} = 2C, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y \partial X} = 2B, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2} = 2A.$$

Daraus ergibt sich

$$(\alpha\beta)^2(ac - b^2) = AC - B^2.$$

Da die Variabeln verschwinden, so erhalten wir eine Invariante und zwar $J_{2,2}$. Verschwinden bei diesen Operationen die Variabeln nicht, wie das bei Polynomen höherer Ordnung der Fall ist, so gehen daraus Covarianten hervor.

3. Beispiel. Gegeben sei

$$U = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3.$$

Man wende die Derivirtenfunctionen

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

und

$$b\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2c\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + d\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

nach einander an. Die Variabeln verschwinden nicht und man erhält zwei Covarianten, nämlich, nachdem man durch 6 dividirt hat,

$$2(ac - b^2)x + (ad - bc)y = C_{3,1}$$

und

$$(ad - bc)x + 2(bd - c^2)y = C'_{3,1}.$$

Wenn man auf ein Polynom von ungeradem Grade eine Derivirtenfunction anwendet, die von der Function selbst abgeleitet, also vom selbigen Grade ist, so verschwindet die Invariante oder Covariante identisch. Die Polynome von geradem Ordnungsexponenten geben dabei stets eine quadratische Invariante. Dass die kubische Function noch zwei Covarianten mehr hat, wird weiter unten gezeigt werden.

4. Beispiel. Es sei das Polynom biquadratisch:

$$U = (a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, y)^4.$$

Man wende die Derivirtenfunction

$$a\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - 4b\frac{\partial^4 U}{\partial y^3 \partial x} + 6c\frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial x^2} - 4d\frac{\partial^4 U}{\partial y \partial x^3} + e\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$$

an, da die nächstniedrigere nichts liefert. Man findet eine Invariante, nämlich die quadratische

$$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2.$$

Wenn man die quadratischen Invarianten durch die partiellen Differenzialquotienten ausdrückt, durch welche sie aus dem Polynome abgeleitet werden, so erhält man neue Derivirtenfunctionen, welche zur Auffindung neuer Covarianten derselben oder höherer Ordnungen verwendet werden können. So ist z. B.

$$J_{2,2} = ac - b^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

$$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2 = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - 4\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + 3\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}\right)^2.$$

Die erste dieser beiden ist die sogenannte Hesse'sche Function. Es mag hinzugefügt werden, dass das Polynom seine eigene Covariante ist.

§ 56. Von der Bildung der Covarianten aus den Invarianten.

Covarianten lassen sich aus den Invarianten durch partielle Differenzirung ableiten, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Gegeben sei

$$J_{2,2} = ac - b^2.$$

Man findet

$$\frac{\partial J}{\partial c} = a, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = -2b, \quad \frac{\partial J}{\partial a} = c.$$

Die partiellen Differenziale der quadratischen Invariante geben immer wieder die ursprüngliche Function, und zwar in dem vorliegenden Falle

$$U = \left(\frac{\partial J}{\partial c}, -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial b}, \frac{\partial J}{\partial a}\right)\!\!\widehat{}\!\!\left(x, y\right)^2.$$

Man bilde demgemäss die partiellen Differenziale von

$$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2.$$

Man erhält wieder

$$U = \left(\frac{\partial J}{\partial e}, -\frac{1}{4}\frac{\partial J}{\partial d}, \frac{1}{6}\frac{\partial J}{\partial c}, -\frac{1}{4}\frac{\partial J}{\partial b}, \frac{\partial J}{\partial a}\right)\!\!\widehat{}\!\!\left(x, y\right)^4.$$

Macht man dieselbe Operation mit

$$J_{3,4} = (bc - ad)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2),$$

so erhält man eine neue Covariante der kubischen Functionen, nämlich

$$\begin{aligned} C_{3,3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial d}, \quad -\frac{1}{3}\frac{\partial J}{\partial c}, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial J}{\partial b}, \quad -\frac{\partial J}{\partial a}\right)\!\!\widehat{}\!\!\left(x, y\right)^3 \\ &= (2b^3 - 3abc + a^2 d)x^3 + 3(b^2 c + abd - 2ac^2)x^2 y \\ &\quad - 3(bc^2 + acd - 2b^2 d)xy^2 - (2c^3 - 3bcd + ad^2). \end{aligned}$$

Dieselbe ist von Clebsch mit Q bezeichnet worden.

Auf gleiche Weise lässt sich aus der Invariante

$$J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

eine neue Covariante für die biquadratischen Formen ableiten, nämlich

$$\begin{aligned} C_{4,4} &= \left(\frac{\partial J}{\partial e}, \quad -\frac{1}{4}\frac{\partial J}{\partial d}, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial J}{\partial c}, \quad -\frac{1}{4}\frac{\partial J}{\partial b}, \quad \frac{\partial J}{\partial a}\right)\!\!\widehat{}\!\!\left(x, y\right)^4 \\ &= (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3 y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2 y^2 \\ &\quad + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4. \end{aligned}$$

Diese Covariante bezeichnete Clebsch mit $\frac{1}{2}H$.

Die biquadratischen Formen haben ausserdem noch eine Covariante vom sechsten Grade, welche von Clebsch mit T bezeichnet worden ist und deren Ableitung im folgenden Paragraphen geschehen soll. Clebsch hat nun den Beweis geführt, dass ausser U, H und T keine Covarianten der biquadratischen Formen weiter existiren. Nach der vorstehenden Methode müsste allerdings noch eine zweite biquadratische Covariante existiren, nämlich

$$C'_{4,4} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial J_{4,6}}{\partial e}, \; -\frac{1}{4}\frac{\partial J_{4,6}}{\partial d}; \; \frac{1}{6}\frac{\partial J_{4,6}}{\partial c}, \; -\frac{1}{4}d\frac{\partial J_{4,6}}{\partial b}, \; \frac{\partial J_{4,6}}{\partial a}\right)\left(x, y\right)^4.$$

Es lässt sich aber zeigen, dass dieselbe in zwei andere der bekannten zerfällt. Es ist nämlich (§ 21)

$$\frac{\partial J_{4,6}}{\partial e} = 3aJ_{4,2}^2 + 54(b^2 - ac)J_{4,3},$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial J_{4,6}}{\partial d} = 3bJ_{4,2}^2 - 27(ad - bc)J_{4,3},$$

$$\frac{1}{6}\frac{\partial J_{4,6}}{dc} = 3cJ_{4,2}^2 + 9(3c^2 - 2bd - ae)J_{4,3},$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial J_{4,6}}{\partial b} = 3dJ_{4,2}^2 - 27(be - cd)J_{4,3},$$

$$\frac{\partial J_{4,6}}{\partial a} = 3eJ_{4,2}^2 + 54(d^2 - ec)J_{4,3}.$$

Die Covariante ist, wie man leicht sieht, gleich

$$J_{4,2}^2 U - 54 J_{4,3} C_{4,4}.$$

Sie liefert also keine neue Form. Entwickelt man die Ausdrücke, so erhält man

$$\frac{\partial J_{4,6}}{\partial e} = 3[a^3e^2 - 12a^2c^2e - 8a^2bde + 18a^2cd^2 - 2ab^2d^2 + 27ac^4$$
$$- 60abc^2d + 36ab^2ce - 18b^2c^3 + 36b^3cd - 18b^4e].$$

$\frac{\partial J_{4,6}}{\partial a}$ erhält man dadurch, dass man a mit e, b mit d vertauscht. Diese Coefficienten haben keinen gemeinschaftlichen Factor, denn man findet

$$\frac{e\frac{\partial J_{4,6}}{\partial e} - a\frac{\partial J_{4,6}}{\partial a}}{eb^2 - d^2a} = 54 J_{4,3}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{b\frac{\partial J_{4,6}}{\partial b} - d\frac{\partial J_{4,6}}{\partial d}}{eb^2 - d^2a} = 108 J_{4,3}.$$

In ihrer Form entspricht die gemischte Covariante ganz der $C_{3,3}$ und für diese ist

$$\frac{d\frac{\partial J}{\partial d} - a\frac{\partial J}{\partial a}}{db^3 - c^3 a} = 4,$$

$$\frac{b\frac{\partial J}{\partial b} - c\frac{\partial J}{\partial c}}{db^3 - c^3 a} = 12.$$

§ 57. Von der Bildung der Invarianten und Covarianten durch den Ueberschiebungsprocess*).

Die einfachste Art aus zwei zusammengehörigen Formen U und C alle Invarianten und Covarianten von U zu bilden, besteht darin, dass man alle Ausdrücke bildet, welche in der Differenzialgleichung

$$\Pi = \frac{1}{\binom{n}{r}\binom{m}{r} r!\, r!}\left[\frac{\partial^r U}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial^r C}{\partial y^r} - \binom{n}{1}\frac{\partial^r U}{\partial x^{r-1}\partial y}\cdot\frac{\partial^r C}{\partial x\partial y^{r-1}} + \cdots\right]$$

enthalten sind. Der Ausdruck ist der Cayley'schen Form der binären Polynome in Bezug auf die numerischen Coefficienten nachzubilden. Man nennt diese Bildungsart der Covarianten die Ueberschiebung der Function U und C, und der Ausdruck Π hat die Invarianteneigenschaft. Für $r = 1$ ist

$$\Pi = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Dieser Ausdruck lässt sich auch schreiben

$$\Pi = \frac{1}{mn}\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x}, & \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y}, & \frac{\partial C}{\partial y} \end{vmatrix}$$

und wird die Functionaldeterminante genannt. Ist $r = 2$, so resultirt aus der allgemeinen Form

$$\Pi = \frac{1}{m(m-1)n(n-1)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right).$$

Ist in einem speciellen Falle $C = U$, so geht hieraus die sogenannte Hesse'sche Form hervor, nämlich

---

*) Cayley, Fourth memoir upon quantics.
Gordan, Crelle Journ. Bd. 69, und Math. Ann. von Clebsch Bd. 2.
Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. § 30—51.

$$\frac{2}{n^2(n-1)^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right].$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist die Determinante der zweiten Differenzialquotienten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Ist der Ordnungsexponent ungerade, so verschwindet Π für $C = U$ identisch; ist der Ordnungsexponent gerade, so nimmt Π die analoge Form von $J_{2m,\,2}$ an. Die Zahl r kann von 0 bis zur kleineren Zahl von m und n variiren. Ist $m = n$, so erhält man eine Invariante.

Indem man von den Functionen U und C ausgeht, kann man die Formen über sich selbst und übereinander schieben. Man erhält auf diese Weise eine Reihe von Invarianten und Covarianten, aus welchen man mittels Vereinigung mit den ursprünglichen Functionen durch Ueberschiebung schliesslich alle Invarianten und Covarianten einer Function erhält.

Für den Zusammenhang des Ueberschiebungsprocesses hat Gordan eine Reihe von Sätzen aufgestellt, unter denen wir nur den folgenden anführen.

Theorem. Jede Covariante oder Invariante einer Form U n^{ter} Ordnung, welche in Bezug auf die Coefficienten von U vom m^{ten} Grade ist, entsteht durch Ueberschiebungen von U mit Covarianten C, welche in Bezug auf jene Coefficienten nur vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade sind. Die allgemeine Formel für Π wird besonders einfach, wenn $r = m = n$ ist. Man erhält alsdann

$$\Pi =$$
$$\left[a\frac{\partial^n C}{\partial y^n}-(n-1)!\binom{n}{1}^2 b\,\frac{\partial^n C}{\partial y^{n-1}\partial x}+(n-2)!\binom{n}{2}^2 c\,\frac{\partial^n C}{\partial y^{n-2}\partial x^2}-\cdots\right]:n!$$

Ist nun

$$C = Ax^n + Bx^{n-1}y + \cdots + Sxy^{n-1} + Ty^n\,,$$

so ist

$$\frac{d^n C}{d y^n} = n!\,T,\quad \frac{d^n C}{\partial y^{n-1}\partial x} = (n-1)!\,S,\quad \cdots\frac{\partial^n C}{\partial x^n} = n!\,A.$$

Folglich wird

$$\Pi = aT - bS + cR - \cdots \pm tA,$$

und

$$A = \pm \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad B = \mp \frac{\partial \Pi}{\partial s}, \cdots \quad T = \frac{\partial \Pi}{\partial a}.$$

Da in Π die Variabeln fehlen, so ist es eine Invariante. Wir gelangen auf diese Weise zu der Formel, welche im vorigen Paragraphen zur Bildung der Covarianten angewendet wurde. Wenn demnach C und U vom selben Grade sind, so ist eine Invariante

$$J = aT - bS + cR - \cdots \pm tA.$$

Wendet man nun die Hesse'sche Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{d^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2$$

auf die quadratische Function

$$U = (a, b, c)\widehat{\ }(x, y)^2$$

an, so kommt man auf die Invariante

$$J_{2,2} = ac - b^2.$$

Wendet man sie auf die kubische Function

$$U = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3$$

an, so erhält man ihre quadratische Covariante

$$C_{3,2} = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2.$$

Dieselbe ist von Clebsch mit $\frac{1}{2}\Delta$ bezeichnet worden. Clebsch hat bewiesen, dass es ausser Δ und Q keine symmetrischen Covarianten gibt und Gordan zuerst den Beweis geführt, dass jede Form eine endliche Anzahl von Invarianten und Covarianten besitzt.

Wenn man die Hesse'sche Form auf die biquadratischen Functionen anwendet, so findet man die Covariante $C_{4,4}$ oder $\frac{1}{2}H$.

Geht man aus von der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial x},$$

und wendet sie an auf

$$U = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3$$

und

$$C_{3,2} = \left[(ac - b^2), \frac{1}{2}(ad - bc), (bd - c^2)\right]\widehat{\ }\left(x, y\right)^2,$$

so erhält man die Covariante $C_{3,3}$ oder Q.

Wendet man die Functionaldeterminante auf die biquadratischen Formen und die zugehörigen biquadratischen Covarianten an, also auf

$$U = (a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, y)^4$$

und

$$C_{4,4} = \left[(ac - b^2), \frac{1}{2}(ad - bc), \frac{1}{6}(ae + 2bd - 3c^2), \frac{1}{2}(be - cd), (ce - d^2)\right]\widehat{\ }(x, y)^4,$$

so erhält man die bikubische Covariante, welche von Clebsch mit T bezeichnet worden ist. Es möge dabei bemerkt werden, dass nach Cayley*) zwischen U, $C_{4,4}$ und $C_{4,6}$ die Beziehung besteht

$$C_{4,6}^2 = -4C_{4,4}^3 + J_{4,2}\, C_{4,4}\, U^2 - J_{4,3}\, U^3.$$

Die Covariante lautet

$$(2b^3 - 3abc + a^2d)x^6 + (6b^2c + 2abd - 9ac^2 + a^2e)x^5y$$
$$+ 5(2b^2d - 3acd + abe)x^4y^2 + \frac{1}{2}(b^2e - ad^2)x^3y^3$$
$$- 5(2bd^2 - 3bce + ade)x^2y^4 - (6cd^2 + 2bde - 9ec^2 + e^2a)xy^5$$
$$- (2d^3 - 3cde + be^2)y^6.$$

Die Bedeutung der Coefficienten und ihre Beziehungen zu den Wurzeln von U werden in der Theorie der biquadratischen Gleichungen näher erörtert werden. Wir wollen noch die Formel

$$J = aT - bS + cR - \cdots \pm tA$$

an einigen Beispielen nachweisen. Die Bedingung ist $m = n$.

1. Beispiel.

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Die quadratische Covariante ist die Function selbst, also

$$U = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Man erhält mittels der Formel

$$J = aC - bB + cA = 2(ac - b^2) = 2J_{2,2}.$$

2. Beispiel.

$$U = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3.$$

Die kubische Covariante ist

---

*) Brioschi, Sur une formule de Cayley. Crelle's Journ. Bd. 53. S. 377. 1857.

$$C_{3,3} = \Big[(2b^3 - 3abc + a^2d), \quad + (b^2c + abd - 2ac^2),$$
$$- (bc^2 + acd - 2b^2d), \quad - (2c^3 - 3bcd + ad^2)\Big] \widehat{\ } (x, y)^3$$
$$= Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 .$$

Man findet

$$J = aD - bC + cB - dA = -2J_{3,4} .$$

3. Beispiel.

$$U = (a, b, c, d, e) \widehat{\ } (x, y)^4 .$$

Die erste biquadratische Covariante ist U selbst und

$$J = aE - bD + cC - dB + eA = 2J_{4,2} .$$

Die zweite biquadratische Covariante ist $C_{4.4}$ und man erhält

$$J = 3J_{4,3} .$$

Wenn man in Π an die Stelle der Covariante U treten lässt, so wird

$$J = at - \binom{n}{1} bs + \binom{n}{2} cr - \cdots \pm ta .$$

Diese quadratische Invariante verschwindet in allen Fällen, wo der Ordnungsexponent ungerade ist.

Wenn man in Π an die Stelle von U die Covariante C treten lässt, so erhält man

$$J = AT - \frac{BS}{\binom{n}{1}} + \frac{CR}{\binom{n}{2}} - \cdots \pm TA .$$

Auch diese Invariante verschwindet dann, wenn der Ordnungsexponent der Covariante ungerade ist. In allen übrigen Fällen gibt der Ausdruck eine Invariante oder irgend eine Potenz derselben.

1. Beispiel. Gegeben sei die Covariante $C_{3,2}$.

Man findet

$$J = 2(ac - b^2)(bd - c^2) - \frac{1}{2}(ad - bc)^2 = -\frac{1}{2} J_{3,4} = -\frac{1}{2} \overline{D}_3 ;$$

d. h. die quadratische Invariante der Covariante $C_{3,2}$ ist gleich dem vierten Theile der negativen Discriminante.

2. Beispiel. Gegeben sei die Covariante $C_{3,3}$.

Der Formel gemäss ist $J = 0$.

3. Beispiel. Gegeben sei die Covariante $C_{4,4}$.

Man erhält

$$J = 2(ac - b^2)(ce - d^2) - 2(ad - bc)(be - cd) + \frac{1}{6}(ae + 2bd - 3c^2)^2$$

$$= \frac{1}{6}(ae - 4bd + 3c^2)^2 = \frac{1}{6} J_{4,2}^2 ;$$

d. h. die quadratische Invariante der Covariante $C_{4,4}$ ist gleich dem zwölften Theile des Quadrates der quadratischen Invariante.

4. Beispiel. Gegeben sei die Covariante $C_{4,6}$.

Man erhält

$$J = 2AG - \frac{1}{3}BF + \frac{2}{15}CE - \frac{1}{20}D^2 = \frac{1}{3}J_{4,6} = \frac{1}{3}\overline{D}_4 ;$$

in Worten: die quadratische Invariante der Covariante $C_{4,6}$ ist gleich dem sechsten Theile der Discriminante.

Dritter Abschnitt.

Directe Auflösung particulärer Gleichungen.

I. Die reciproken Gleichungen.

§ 58. Allgemeine Bemerkungen.

In vielen Fällen kommen Gleichungen vor, welche sich auf andere mit einem kleineren Ordnungsexponenten herabbringen lassen, wodurch die Auffindung ihrer Wurzeln vereinfacht wird. Da die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen sich nur auf die Gleichungen der ersten vier Grade erstreckt, so kann man auch nur diejenigen Gleichungen höherer Grade auflösen, welche sich durch irgendwelche Transformationen auf Gleichungen reduciren lassen, welche den vierten Grad nicht übersteigen.

Einer der einfachsten Fälle ist derjenige, in welchem sämmtliche Exponenten der Unbekannten ein Vielfaches ein und derselben ganzen Zahl sind; also

$$x^{mn} + ax^{m(n-1)} + bx^{m(n-2)} + \cdots + t = 0\,.$$

Man kann setzen $x^m = y$, wodurch die Gleichung von dem mn^{ten} auf den n^{ten} Grad reducirt wird.

Einige andere bemerkenswerthe Fälle sind folgende:

1) die reciproken Gleichungen, deren Eigenschaften bereits in § 18 einer Betrachtung unterzogen sind;
2) die zweigliedrigen oder binomischen Gleichungen;
3) die irreductibeln Gleichungen;
4) die Gleichungen mit mehreren gleichen Wurzeln;
5) die Gleichungen mit rationalen oder commensurabeln Wurzeln;
6) die Gleichungen, deren Wurzeln gewisse gegebene Beziehungen zu einander haben oder deren Coefficienten so beschaffen sind, dass sie sich in Polynome niedrigerer Ordnung zerlegen lassen.

Wir wollen diese Fälle einer speciellen Betrachtung unterziehen.

§ 59. Die Auflösung der reciproken Gleichungen.

Diese Gleichungen sind solche, deren Transformirte mit den gegebenen identisch bleiben, wenn $\frac{\sqrt[n]{t^2}}{x}$ an die Stelle von x gesetzt wird; also

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + bu^{\frac{n}{2}-2}x^2 + au^{\frac{n}{2}-1}x + u^{\frac{n}{2}} = 0.$$

Sie lassen sich alsdann leicht auf die Normalform

$$x_{,}^n + ax_{,}^{n-1} + bx_{,}^{n-2} + \cdots + bx_{,}^2 + ax_{,} + 1 = 0$$

bringen, indem man substituirt $x = u^{\frac{1}{2}} x_{,}$.

Ist n ungerade, so ist $x = - u^{\frac{1}{2}}$ sofort eine Wurzel der Gleichung. Dividirt man die Gleichung durch den binomischen Factor $x + u^{\frac{1}{2}}$, so erhält man eine reciproke Gleichung von geradem Grade, die man auf die Normalform

$$x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + \cdots + bx^2 + ax + 1 = 0$$

bringen kann.

Gleichungen von der Form

$$x^n + aux^{n-1} + bu^2x^{n-2} + \cdots + bu^{n-2}x^2 + au^{n-1}x + u^n = 0$$

lassen sich ebenfalls auf die Normalform reduciren, indem man $\frac{x}{u} = x_{,}$ setzt. Die Transformirte bleibt mit der gegebenen identisch, wenn man $x = u^2 x_{,}$ substituirt. Wir betrachten zunächst die reciproke Gleichung von gerader Ordnung, also

$$x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + \cdots + lx^m + \cdots + ax + 1 = 0.$$

Die Eigenschaft der Gleichung, dass sie aus m trinomischen Factoren von der Form

$$x^2 - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)x + 1$$

besteht, dass also, wenn x_1 eine Wurzel derselben ist, auch $\frac{1}{x_1}$ eine solche ist, macht es möglich, eine reciproke Gleichung von der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung in eine andere von der m^{ten} Ordnung zu transformiren. Es lassen sich also die reciproken Gleichungen von gerader Ordnung allgemein bis zum achten Grade auflösen.

Wenn man die Gleichung vom $2m^{\text{ten}}$ Grade durch x^m dividirt und die von den Enden gleichweit abstehenden Glieder paarweise vereinigt, so resultirt

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + b\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \cdots + l = 0.$$

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so lässt sich nach der in § 18 gegebenen Anleitung x eliminiren mittels folgender Relationen:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

. . . .

$$x^m + \frac{1}{x^m} = y^m - my^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2} y^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} y^{m-6} + \cdots$$

Diese Substitutionen liefern eine Gleichung in y vom m^{ten} Grade. Ist y_1 eine Wurzel derselben, so erhält man zwei Wurzeln der Gleichung in x durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) x + 1 = x^2 - y_1 x + 1 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{y_1 + 2} \pm \sqrt{y_1 - 2}}{\sqrt{y_1 + 2} \mp \sqrt{y_1 - 2}} = \frac{1}{2} y_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{y_1^2 - 4}.$$

Ist die Gleichung von der allgemeineren Form

$$x^{2m} + ax^{2m-1} + \cdots + kx^{m+1} + lx^m + kux^{m-1} + \cdots + au^{m-1} + u^m = 0,$$

so setze man $x + \frac{u}{x} = y$, woraus weiter folgt

$$x^2 + \left(\frac{u}{x}\right)^2 = y^2 - 2u,$$

$$x^3 + \left(\frac{u}{x}\right)^3 = y^3 - 3uy,$$

. . . .

$$x^m + \left(\frac{u}{x}\right)^m = y^m - muy^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2} u^2 y^{m-4} - \ldots$$

Die allgemeine Formel ergibt sich aus der wiederholten Anwendung der Gleichung

$$x^{r+1} + \left(\frac{u}{x}\right)^{r+1} = y\left[x^r + \left(\frac{u}{x}\right)^r\right] - u\left[x^{r-1} + \left(\frac{u}{x}\right)^{r-1}\right].$$

Wenn bei den reciproken Gleichungen gerader Ordnung die correspondirenden Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben, so muss nach § 18 das mittlere Glied fehlen.

Ist die gegebene Gleichung dieser Art

$$x^{2m} + ax^{2m-1} + \cdots + kx^{m+1} - kx^{m-1} - \cdots - ax - 1 = 0,$$

so reducirt sie sich auf die Form

$$(x^{2m} - 1) + ax(x^{2m-2} - 1) + bx^2(x^{2m-4} - 1) + \cdots = 0,$$

woran man sofort den Factor $x^2 - 1$ erkennt. Durch Division des Polynoms mittels $x^2 - 1$ erhält man eine reciproke Gleichung der ersten Art.

Wir betrachten nun noch die reciproken Gleichungen von ungerader Ordnung von der Form

$$x^{2m+1} + ax^{2m} + \cdots + kx^{m+1} \pm kx^m \pm \cdots \pm ax \pm 1 = 0.$$

Dieselbe hat den Factor $x + 1$, wenn die oberen Vorzeichen gelten, sonst den Factor $x - 1$. Im ersten Falle ist $x_1 = -1$, im zweiten $x_1 = +1$ eine Wurzel. Dividirt man das Polynom durch $x \pm 1$, so erhält man wieder eine reciproke Gleichung gerader Ordnung.

Ist in einem speciellen Falle

$$x^n \pm ux^{n-1} + u^2x^{n-2} \pm \cdots + u^{n-1}x + u^n = 0,$$

und multiplicirt man diese Gleichung mit dem binomischen Factor $x - u$, so resultirt

$$x^{n+1} - u^{n+1} = 0.$$

Eine solche Gleichung nennt man eine zweigliedrige oder binomische Gleichung, welche also mit den reciproken Gleichungen im nahen Zusammenhange stehen und deren Auflösungsmethoden im folgenden Paragraphen abgehandelt werden sollen.

II. Die binomischen Gleichungen.

§ 60. Die algebraische Auflösung der binomischen Gleichungen durch Reduction auf reciproke Gleichungen*).

Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist

$$x^n \pm a = 0.$$

Die Coefficienten sämmtlicher Zwischenglieder, oder mit andern Worten: die Summen aller Combinationen der Wurzeln mit Ausnahme des Products derselben sind gleich Null; d. h. symbolisch ausgedrückt

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} C_m(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0.$$

*) Hymers, Theory etc. § 22. 72.

Setzt man $\sqrt[n]{a} = \alpha$ und darauf $\alpha x = \eta$, so erhält man

$$y^n \pm 1 = 0,$$

welche sofort eine reciproke Gleichung ist. Dieselbe kann unter allen Umständen algebraisch allgemein gelöst werden, wenn n aus Primfactoren besteht die nicht grösser als 7 sind. Ist nämlich $n = p \cdot q \cdot r$, so ist

$$y^n \pm 1 = \left((y^p)^q\right)^r \pm 1 = 0.$$

Durch die Substitution $(y^p)^q = z$ findet man z aus

$$z^r \pm 1 = 0$$

und wenn z_1 eine Wurzel dieser Gleichung ist, so ist

$$(y^p)^q - z_1 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in derselben Weise weiter reduciren, indem man $y^p = \zeta$ setzt u. s. f., bis man y gefunden hat.

Hat eine dieser Gleichungen die Form

$$z^5 \pm 1 = 0, \quad \text{oder} \quad z^7 \pm 1 = 0,$$

so kann man sie mittelst Division durch $z \pm 1$ auf eine reciproke Gleichung von gerader Ordnung bringen, deren halber Ordnungsexponent höchstens 3 beträgt, welche sich also noch allgemein algebraisch lösen lassen. Wir betrachten die beiden Fälle $x^n - 1 = 0$ und $x^n + 1 = 0$ einzeln.

Theorem. Alle Wurzeln der Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

sind unmöglich (complex), ausgenommen eine, wenn n ungerade, und zwei, wenn n gerade ist.

Wenn wir die Factoren $x - 1$ oder $x^2 - 1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist, ausscheiden, so erhalten wir die reducirten Gleichungen

$$\begin{aligned} n - 1 \text{ gerade}, \quad & x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0, \\ n - 2 \text{ gerade}, \quad & x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Die erste kann keine positive Wurzel haben, wie sich aus dem Vorzeichen der Glieder von selbst ergibt; aber auch keine negative, da die Stammgleichung keine hat, weil dann n gerade ist.

Die zweite, welche nur gerade Exponenten hat, kann weder eine positive noch eine negative Wurzel haben. Deswegen sind sämmtliche Wurzeln der beiden reducirten Gleichungen unmöglich, also entweder imaginär oder complex von der Form

$$\alpha \pm \beta \sqrt{-1}.$$

Da die Hauptgleichung in der Form

$$x^n = 1, \quad x = \sqrt[n]{1},$$

geschrieben und aufgelöst werden kann, so werden die n Wurzeln dieser Gleichung die n^{ten} Wurzeln der Einheit genannt. Die n^{te} Wurzel der positiven Einheit hat demnach einen reellen Werth 1 und $n - 1$ complexe Werthe.

Theorem. Alle Wurzeln der Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

sind unmöglich, ausgenommen eine, wenn n ungerade ist.

Ist nämlich n gerade, so ist einleuchtend, dass weder ein positiver noch ein negativer Werth von x das Binom verschwinden lassen. Ist n ungerade, so kann man die Gleichung durch den Binomialfactor $x + 1$ dividiren, so dass eine Wurzel x_1 den reellen Werth -1 hat und die gegebene Gleichung reducirt wird auf

$$n - 1 \text{ gerade}, \quad x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \cdots - x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung kann erstlich keine negative Wurzel haben, weil sie für x eingesetzt alle Glieder positiv machen würde; zweitens kann sie keine positive Wurzel haben, weil die Stammgleichung auch keine dergleichen hat.

Fassen wir die drei reducirten Gleichungen zusammen, so bilden sie zwei Formen, nämlich

$$x^{2m} \pm x^{2m-1} + x^{2m-2} \pm \cdots + 1 = 0,$$
$$x^{2m} + x^{2m-2} + x^{2m-4} + \cdots + 1 = 0.$$

Diese sind sämmtlich von gerader Ordnung und lassen sich in lauter reelle quadratische Factoren von den Formen resp.

$$x^2 - yx + 1, \quad x^4 - yx^2 + 1$$

zerlegen, wenn man substituirt resp.

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y.$$

Die Gleichung in y wird deshalb lauter reelle Wurzeln haben.

Ist nun α eine complexe Wurzel der Gleichung

$$x^n - 1 = 0,$$

dann ist auch α^m eine Wurzel, wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist. Denn es ist $\alpha^n = 1$, folglich auch $(\alpha^n)^m = 1$ oder $(\alpha^m)^n - 1 = 0$, woraus in Vergleich mit der gegebenen hervorgeht $x = \alpha^m$.

Gleicherweise, wenn α eine complexe Wurzel von der Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

ist, dann ist auch α^m eine Wurzel, vorausgesetzt m ungerade. Denn $\alpha^n = -1$, $(\alpha^n)^m = -1$ oder $(\alpha^m)^n + 1 = 0$.

Nach § 19 erhält man die Gleichung der quadrirten Differenzen der Gleichung $x^n \mp 1 = 0$, indem man x eliminirt, aus der Hauptgleichung und der Gleichung XI

$$f'(x) + f''(x)\frac{z}{2\,!} + f'''(x)\frac{z^2}{3\,!} + \cdots = 0.$$

Für den Fall $z = 0$, also für irgend zwei gleiche Wurzeln der Gleichung, müsste

$$x^n \mp 1 = 0,$$

und

$$n x^{n-1} = 0$$

sein, was unmöglich ist. Deshalb sind alle Wurzeln verschieden.

Theorem. Sind n und m relative Primzahlen, so haben die Gleichungen $x^n - 1 = 0$ und $x^m - 1 = 0$ keine gemeinschaftliche Wurzel ausser 1.

Angenommen α sei eine zweite gemeinschaftliche Wurzel, und a und b zwei Grössen, welche die Gleichung

$$an - bm = 1$$

erfüllen, dann wäre $\alpha^n = 1$, $\alpha^m = 1$, folglich auch $\alpha^{an} = 1$ und $\alpha^{bm} = 1$. Dividiren wir beide Gleichungen durcheinander, so erhalten wir

$$\alpha^{an-bm} = 1 = \alpha^1;$$

mithin ist doch α nur gleich 1. Wir gelangen zu demselben Resultate, wenn wir den grössten gemeinschaftlichen Divisor der beiden Binome aufsuchen; er ist $x - 1$.

Theorem. Ist n eine Primzahl, so sind die complexen Wurzeln von

$$x^n - 1 = 0$$

übereinstimmend mit den $n - 1$ ersten Potenzen irgend einer der complexen Wurzeln α.

Es ist oben bewiesen worden, dass wenn α eine complexe

Wurzel ist, auch α^m eine solche sein muss. Deshalb sind Wurzeln der Gleichung die Werthe

$$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}.$$

Keine dieser Grössen ist aber der andern gleich. Denn angenommen, es sei $\alpha^p = \alpha^q$, wo p und $q < n$ ist, so würde $\alpha^{p-q} = 1$ sein, also entweder $p = q$, da α von 1 verschieden ist, oder es müssten, weil α eine Wurzel von $x^{p-q} - 1 = 0$ sein soll und zugleich von $x^n - 1 = 0$, diese Binome eine gemeinschaftliche Wurzel haben, was des vorhergehenden Theorems wegen unmöglich ist; es sind nämlich $p - q$ und n relativ prim. Deswegen sind alle Wurzeln dargestellt durch die Reihe

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1},$$

und wenn die Reihe fortgesetzt wird, wiederholt sie sich nur von vorne, indem

$$\begin{aligned} &\alpha^n, \alpha^{n+1}, \alpha^{n+2}, \alpha^{n+3}, \ldots \alpha^{2n-1} \\ = &1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft, alle übrigen Wurzeln der Gleichung durch die aufeinander folgenden Potenzen darzustellen, kommt sämmtlichen Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma$ nur dann zu, wenn n prim ist. In andern Fällen beschränkt sich diese Eigenschaft auf die Wurzeln α^m, wo n und m relativ prim sind, oder auf ihre conjugirte Wurzel. Wenn also β irgend eine der $n - 1$ complexen Wurzeln ist, so ist zwar jede Potenz von β eine Wurzel; es können aber nicht immer alle Wurzeln der Gleichung durch die aufeinander folgenden Potenzen von β dargestellt werden.

Um diese Behauptung an einem Beispiel zu erweisen, sei

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$\begin{array}{cccccc} 1, & +\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}, & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}, & -1, & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}, & +\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}. \\ =1, & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \end{array}$$

Wählen wir

$$\beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

so sind unter den sechs ersten Potenzen nur δ, 1 und β enthalten.

Wenn wir nun aber α oder ε nehmen, so können wir daraus sämmtliche Wurzeln reproduciren.

Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, so kann man die Gleichung in Factoren zerlegen. Ist zunächst

$$n = pq,$$

so ist

$$x^{pq} - 1 = (x^p)^q - 1 = (x^q)^p - 1 = 0,$$

also sowol durch $x^p - 1$, als auch durch $x^q - 1$ theilbar, wo p und q prim sind.

Ist α eine Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, β eine von $x^q - 1 = 0$, so sind die Wurzeln von

$$\begin{array}{ll} x^p - 1 = 0: & 1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}, \\ x^q - 1 = 0: & 1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{q-1}, \end{array}$$

also beide Reihen Wurzeln von $x^n - 1 = 0$. Ebenso sind Wurzeln die Variationen beider Reihen zu je zweien; denn eine dieser Variationen ist $\alpha^r \beta^s$. Da nun

$$\alpha^{rn} = 1, \quad \beta^{sn} = 1$$

ist, so ist auch ebensogut

$$(\alpha^r \beta^s)^n = 1;$$

folglich $\alpha^r \beta^s$ eine Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$.

Keines dieser Producte ist einem andern unter ihnen gleich. Dann wäre $\alpha^r \beta^s = \alpha^\varrho \beta^\sigma$, so wäre auch $\alpha^{r-\varrho} = \beta^{\sigma-s}$. Nun ist $\alpha^{r-\varrho}$ eine Wurzel von $x^p - 1 = 0$ und $\beta^{\sigma-s}$ eine solche von $x^q - 1 = 0$. Da aber p und q relativ prim sind, so können sie keine gemeinschaftliche Wurzel haben. Demzufolge sind alle jene $p\,q$ Producte die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^{pq} = x^n = 1.$$

Wenn n aus drei Primfactoren p, q, r besteht und α, β, γ einzelne Wurzeln der drei Gleichungen

$$x^p - 1 = 0, \quad x^q - 1 = 0, \quad x^r - 1 = 0$$

sind, so lässt sich zeigen, dass $\alpha^\pi \beta^\sigma \gamma^\tau$ die allgemeine Wurzelform von

$$x^n - 1 = x^{pqr} - 1 = 0$$

ist. Dasselbe Product liefert sämmtliche Wurzeln, wenn die Exponenten alle möglichen Werthe zwischen 0 und beziehungsweise $p - 1$, $q - 1$, $r - 1$ annehmen. Wenn also die Wurzeln α, β, γ

der drei Partialgleichungen bekannt sind, so lassen sich daraus sämmtliche Wurzeln der Stammgleichung leicht bestimmen.

Wenn n die Potenz einer Primzahl ist, z. B. $n = p^2$, und die Wurzeln von

$$x^p - 1 = 0$$

folgende sind:

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{p-1},$$

dann sind diese sowol wie auch

$$1, \sqrt[p]{\alpha}, \sqrt[p]{\alpha^2}, \sqrt[p]{\alpha^3}, \ldots \sqrt[p]{\alpha^{p-1}}$$

Wurzeln der gegebenen Gleichung. Denn es ist

$$x^n - 1 = (x^p)^p - 1 = 0,$$

und wenn man vorläufig $x^p = y$ setzt, also $x = \sqrt[p]{y}$, so ist in der ersten Reihe jede Wurzel von y und in der zweiten jede Wurzel von x enthalten. Da alle Werthe von y aber auch Werthe von x sind, so ist die allgemeine Wurzelform $\alpha^r . \sqrt[p]{\alpha^s}$, wo r und s zwischen den Grenzen 0 und $p - 1$ zu nehmen sind. Dies gibt also p^2 Wurzeln, welche sämmtlich von einander verschieden und also die p^2 Wurzeln der Gleichung sind.

Wenn $n = p^3$ ist, so ist der allgemeine Wurzelausdruck

$$x = \alpha^r . \sqrt[p]{\alpha^s} . \sqrt[pp]{\alpha^t},$$

wo α eine Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$ bezeichnet.

Ist endlich n zusammengesetzt aus Primfactoren und Potenzen derselben, z. B. $n = p^2 q r$, und sind α, β, γ die Wurzeln von

$$x^p - 1 = 0, \quad x^q - 1 = 0, \quad x^r - 1 = 0,$$

so ist die allgemeine Wurzelform

$$x = \alpha^\pi . \sqrt[p]{\alpha^\varrho} . \beta^\sigma . \gamma^\tau .$$

Für sämmtliche Variationen dieses Products, welche die n Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein würden, ist π und ϱ von 0 bis $p - 1$, σ von 0 bis $q - 1$, τ von 0 bis $r - 1$ zu nehmen. Hierdurch ist die Methode der Auflösung der binomischen Gleichungen genau festgestellt.

Wir gehen zu den Methoden über, welche von **Gauss** und **Lagrange** gegeben worden sind, die binomische Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

aufzulösen, wenn n eine Primzahl ist.

§ 61. Die Methode der Auflösung binomischer Gleichungen nach Gauss*).

Im Jahre 1801 gab Gauss in seinen berühmten Disquisitiones arithmeticae eine eben so originelle als scharfsinnige Methode, die Auflösung der binomischen Gleichung $x^n - 1 = 0$, wenn n prim ist, auf die Auflösung so vieler Partialgleichungen zu reduciren, als die Zahl $n - 1$ Primfactoren enthält und deren Grade durch dieselben Primzahlen ausgedrückt werden.

So z. B. erfordert die Bestimmung der Wurzeln von $x^{13} - 1 = 0$ nur die Auflösung zweier quadratischen und einer kubischen Gleichung; die Bestimmung der Wurzeln von $x^{17} - 1 = 0$ die Auflösung von vier quadratischen Gleichungen.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^n - 1 = 0, \quad (n \text{ prim}).$$

Dividirt man das Binom durch $x - 1$, so bleibt die Gleichung vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1 = 0,$$

welche lauter complexe Wurzeln enthält. Diese Gleichung drückt zugleich die Summe aller Wurzeln der ursprünglichen Gleichung aus. Ist nämlich x_1 eine der complexen Wurzeln, so sind nach dem Früheren die übrigen

$$x_1^2, \; x_1^3, \; x_1^4, \; \ldots \; x_1^{n-2}, \; x_1^{n-1}, \; 1.$$

Gauss fasste nun den glücklichen Gedanken, an die Stelle der arithmetischen Progression der Exponenten eine geometrische zu setzen, ausgehend von dem Fermat'schen Theorem über die Primzahl n, nämlich

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Euler hat bewiesen, dass wenn man alle Glieder der Reihe $a, a^2, a^3, \ldots a^{n-1}$, wo $a < n$ ist, durch n dividirt und sich darunter Potenzen von a befinden, welche ebenfalls den Rest 1 geben, die Exponenten dieser Potenzen nothwendig Factoren von $n - 1$ sind. Um also zu sehen, ob unter den Potenzen, kleiner als der $n-1^{\text{ten}}$ von a, andere vorhanden sind, welche auch den Rest 1 geben; mit

*) Gauss, Disquisitiones arithmeticae. 1801.
Lacroix, Compléments des éléments d'algèbre. pg. 311.
Hymers, Theory of equations. § 80.

anderen Worten: ob alle Reste der Potenzen von der ersten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ verschieden sind, wird es genügen diejenigen Potenzen zu prüfen, deren Exponenten Factoren von $n-1$ sind.

Sind alle Potenzreste irgend einer Zahl a verschieden, so ist nach Euler's Bezeichnung a eine primitive Wurzel der Primzahl n. Eine solche kann man für jedes n leicht durch Versuche finden; in der Regel wird es genügen, die kleinste primitive Wurzel zu kennen. So ist z. B. 2 die kleinste primitive Wurzel von 11; denn ist E der Exponent, R der Rest der Division durch 11, so ist

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} E = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ R = & 1, & 2, & 4, & 8, & 5, & 10, & 9, & 7, & 3, & 6, & 1. \end{array}$$

Die Anzahl der primitiven Wurzeln der Primzahl n ist

$$\varphi(n-1) = (n-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots$$

wo $p, q, r, \ldots$ die Primfactoren von $n-1$ sind.

Die Zahl 11 hat im Ganzen vier primitive Wurzeln 2, 6, 7, 8. Nach Gauss ist die Anzahl gleich der Anzahl derjenigen Zahlen von 1 bis $n-1$, welche relativ prim zu $n-1$ sind, vermehrt um 1.

Nehmen wir in einem concreten Falle an, es sei $n = 11$, so sind sämmtliche complexe Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$:

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ \alpha^{10},$$

oder auch

$$\alpha^{1+z_1 n},\ \alpha^{2+z_2 n},\ \alpha^{3+z_3 n},\ \ldots,\ \alpha^{n-1+z_{10} n},$$

wo α irgend eine complexe Wurzel bedeutet.

Mit Rücksicht auf die Reihen E und R ist nun

$$\begin{array}{ll} 1 + z_1 n = a^0, & 6 + z_6 n = a^9, \\ 2 + z_2 n = a^1, & 7 + z_7 n = a^7, \\ 3 + z_3 n = a^8, & 8 + z_8 n = a^3, \\ 4 + z_4 n = a^2, & 9 + z_9 n = a^6, \\ 5 + z_5 n = a^4, & 10 + z_{10} n = a^5. \end{array}$$

Man kann demnach statt jener Reihe der Wurzeln, deren Indices in einer arithmetischen Progression fortschreiten, dieselbe so ordnen, dass die Indices nach einer geometrischen Reihe fortschreiten, also ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der Wurzeln,

$$\alpha^{a^0},\ \alpha^{a^1},\ \alpha^{a^2},\ \alpha^{a^3}\ \ldots\ \alpha^{a^{n-2}}.$$

Diese Methode hat einen doppelten Vortheil:

erstlich können die Wurzeln in Perioden getheilt werden, welche einzeln fortgesetzt, die Wurzeln der Periode in derselben Ordnung liefern,

zweitens das Product irgend einer Anzahl dieser Periode wird gleich der Summe einer gewissen Anzahl derselben.

Es sei nun a eine primitive Wurzel von n und $n-1 = p.q.r\ldots$ Betrachten wir zuerst den einfachsten Fall, wo $n-1$ nur zwei Primfactoren p und f besitzt, also $n-1 = pf$.

Dann kann man die Periode

$$a^0,\ a^p,\ a^{2p}\ \ldots\ a^{(f-1)p}$$

für sich betrachten, da die fortgesetzte Reihe

$$a^{fp},\ a^{(f+1)p},\ a^{(f+2)p},\ \ldots,\ a^{(2f-1)p}$$

wegen $fp = n-1$ durch n dividirt, dieselben Reste ergibt.

Multiplicirt man alle Glieder mit a^{mp} und geht aus von dem Exponenten, welcher das grösstmögliche Vielfache von n enthält, so erhält man wieder, nur in anderer Reihenfolge, dieselben Exponenten und Reste. Diese Reste sind sämmtlich unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots f-1$ enthalten. Nimmt man dagegen eine Zahl aus der Reihe

$$f,\ f+1,\ f+2, \ldots (n-1),$$

z. B. $f+k$, und multiplicirt die Glieder der ersten Reihe mit a^k, so erhält man

$$a^k,\ a^{p+k},\ a^{2p+k},\ \ldots a^{(f-1)p+k},$$

welche neue Reste geben, die der ersten Reihe fremd sind.

Man erhält auf diese Weise p verschiedene Horizontalreihen, nämlich

$$\begin{array}{llll}
\alpha^{a^0}, & \alpha^{a^p}, & \alpha^{a^{2p}}, & \ldots \alpha^{a^{(f-1)p}}, \\
\alpha^{a^1}, & \alpha^{a^{p+1}}, & \alpha^{a^{2p+1}}, & \ldots \alpha^{a^{(f-1)p+1}}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\
\alpha^{a^{p-1}}, & \alpha^{a^{2p-1}}, & \alpha^{a^{3p-1}}, & \ldots \alpha^{a^{fp-1}}.
\end{array}$$

Wir nehmen nun an, es sei x irgend eine der complexen Wurzeln, setzen also allgemein x an die Stelle von α, und nehmen an

$$x^{a^0} + x^{a^p} + x^{a^{2p}} + \cdots + x^{a^{(f-1)p}} = y_1,$$
$$x^{a^1} + x^{a^{p+1}} + x^{a^{2p+1}} + \cdots + x^{a^{(f-1)p+1}} = y_2,$$
u. s. f.

so sind $y_1, y_2, \ldots$ offenbar die Wurzeln einer Gleichung vom sovielten Grade, als es Horizontalreihen gibt; folglich vom p^{ten} Grade.

Wenn der zweite Factor von $n-1$, also f, nicht prim, sondern gleich $q\,.\,g$ ist, so ist $n-1=p\,.\,q\,.\,g$. Man kann also die Reihen der Exponenten abermals gruppiren in aliquoten Theilen und setzen

$$x^{a^0}+x^{a^{pq}}+x^{a^{2pq}}+\cdots+x^{a^{(g-1)pq}}=z\,.$$

Die Reihe der Exponenten wird dieselben Reste bei der Division durch n ergeben, wenn man sie nur multiplicirt mit einem Factor von der Form a^{mpq}. Wenn man dagegen die Reihe multipliciren würde mit einer der Zahlen

$$a^p,\quad a^{2p},\quad a^{3p},\ldots a^{(g-1)p},$$

so würde man jedesmal fremde Restreihen erhalten und also eben so viele verschiedene Werthe von z, nämlich

$$\begin{aligned}
x^{a^0}+x^{a^{pq}}+x^{a^{2pq}}+\cdots+x^{a^{(g-1)pq}}&=z_1\,,\\
x^{a^p}+x^{a^{(q+1)p}}+x^{a^{(2q+1)p}}+\cdots+x^{a^{(g-1)pq+p}}&=z_2\,,
\end{aligned}$$

u. s. w.

oder auch

$$\begin{aligned}
x^{a^1}+x^{a^{pq+1}}+x^{a^{2pq+1}}+\cdots+x^{a^{(g-1)pq+1}}&=z_1'\,,\\
x^{a^{p+1}}+x^{a^{(q+1)p+1}}+x^{a^{(2q+1)p+1}}+\cdots+x^{a^{(g-1)pq+p+1}}&=z_2'\,,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Jede Reihe enthält g Glieder und bildet folglich Perioden, welche von den früheren verschieden sind. Die Anzahl der Reihen beträgt q, mithin sind qg Terme vorhanden oder f und sie umfassen alle Exponenten von y. Daraus folgt, dass für jeden Werth von y die neue Unbekannte z im Ganzen q Werthe hat.

Aber z und y sind Functionen derselben Grösse x, welche sich eliminiren lässt. Deshalb ist z nothwendig eine Function von y und muss sich ausdrücken lassen durch y in einer Gleichung vom q^{ten} Grade.

Man kann in derselben Weise fortfahren, wenn $n-1$ noch mehr Primfactoren hat. Ist $g=rh$, also $n-1=pqrh$, so hat man zu setzen

$$x^{a^0}+x^{a^{pqr}}+x^{a^{2pqr}}+\cdots+x^{a^{(h-1)pqr}}=u\,.$$

Man wird sich leicht davon überzeugen, dass die Multiplication der Glieder der Exponentialreihe

$$a^0,\quad a^{pqr},\quad a^{2pqr},\ldots a^{(h-1)pqr}$$

mit irgend einem Gliede der Reihe

$$a^{pq},\quad a^{2pq},\quad a^{3pq},\ldots a^{(r-1)pq}$$

die Anzahl rh oder g Potenzen von a liefern wird, welche untereinander verschiedene Restreihen geben und zusammen diejenigen Reste, welche die Glieder der Reihe

$$a^0, \quad a^{pq}, \quad a^{2pq}, \ldots a^{(g-1)pq}$$

oder die Exponenten der Glieder eines einzigen Werthes von z geben. Die Grösse u hat also r verschiedene Werthe, welche einem und demselben z entsprechen; nämlich

$$z_1: \left\{\begin{array}{l} x^{a^0} + x^{a^{pqr}} + x^{a^{2pqr}} + \cdots + x^{a^{(h-1)pqr}} = u_1, \\ x^{a^{pq}} + x^{a^{(r+1)pq}} + x^{a^{(2r+1)pq}} + \cdots + x^{a^{(h-1)pqr+pq}} = u_2, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

$$z_1': \left\{\begin{array}{l} x^{a^1} + x^{a^{pqr+1}} + x^{a^{2pqr+1}} + \cdots + x^{a^{(h-1)pqr+1}} = u_1', \\ x^{a^{pq+1}} + x^{a^{(r+1)pq+1}} + x^{a^{(2r+1)pq+1}} + \cdots + x^{a^{(h-1)pqr+pq+1}} = u_2', \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Die Gleichung in u muss also vom r^{ten} Grade sein und die Coefficienten derselben, welche Functionen von z sind, haben eben so viele verschiedene Werthe als z, z', z'', u. s. w. annehmen, also pq Werthe.

Da $n-1$ gerade ist, so kommt unter den Primfactoren die Zahl 2 vor. Angenommen h sei dieser Factor, so erhält man

$$x + x^{a^{pqr}} = u.$$

Da nun

$$a^{pqr} = a^{\frac{n-1}{2}}$$

und

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

ist, so wird auch das Product

$$(a^{\frac{n-1}{2}} - 1)(a^{\frac{n-1}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Weil ferner der erste Factor nicht theilbar durch n sein kann, da $\frac{n-1}{2}$ zwischen 0 und $n-2$ liegt und a primitive Wurzel von n ist, so ist es jedenfalls der zweite Factor. Folglich lässt $a^{\frac{n-1}{2}}$ oder a^{pqr} durch n getheilt den Rest -1 und man kann setzen

$$x^{a^{pqr}} = x^{-1}.$$

Dadurch geht die Gleichung

$$x + x^{a^{pqr}} = u$$

über in

$$x + \frac{1}{x} = u, \quad x^2 - ux + 1 = 0.$$

Hieraus findet man schliesslich x, wobei u abhängt von z in einer Gleichung vom r^{ten} Grade, z von y in einer Gleichung vom q^{ten} Grade, y von der Auflösung einer bestimmten Gleichung vom p^{ten} Grade.

Wir wollen diese Theoreme an numerischen Beispielen erläutern.

1. Beispiel.

$$x^3 - 1 = 0.$$

Es ist $n = 3$, $n - 1 = 2$, $a = 2$. Folglich ist $p = 2$ und die Reste von $a = 1, 2$. Man setze

$$x^{a^0} = x = x_1,$$
$$x^{a^1} = x^2 = x_2.$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 + x_2 = -1, \quad x_1 x_2 = 1;$$

also sind x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

und die complexen Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = J_1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = J_2.$$

2. Beispiel.

$$x^5 - 1 = 0.$$

$n = 5$, $n - 1 = 2 \,.\, 2$, $p = 2$, $q = 2$ und $a = 3$. Die Reste ergeben sich aus den Congruenzen

$$\overset{t=3}{\underset{t=0}{3^t}} \equiv 1, 3, 4, 2 \pmod 5.$$

Man setze

$$x^{a^0} + x^{a^p} = x + x^4 = y_1,$$
$$x^{a^1} + x^{a^{p+1}} = x^3 + x^2 = y_2.$$

Hieraus findet man

$$y_1 + y_2 = -1, \quad y_1 y_2 = -1.$$

Die Gleichung in y ist demnach

$$\text{I.} \quad y^2 + y - 1 = 0,$$

und ihre Wurzeln

$$y_1 \text{ und } y_2 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Da der letzte Primfactor von $n - 1 = 2$ ist, so ist

$$\text{II.} \quad x^2 - yx + 1 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die vier complexen Wurzeln nebst einer reellen Wurzel

$$x_1 = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array}\right| = \tfrac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} x_4 \\ x_5 \end{array}\right| = \tfrac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

3. Beispiel.

$$x^7 - 1 = 0.$$

Erste Auflösung:

$$n = 7,\ n - 1 = 3 \cdot 2,\ p = 3,\ q = 2 \text{ und } a = 3.$$

Die Reste der Potenzen von a sind

$$\overset{t=5}{\underset{t=0}{a^t}} \equiv 1, 3, 2, 6, 4, 5 \pmod 7.$$

Man setze

$$\begin{aligned} x^{a^0} + x^{a^p} &= x + x^6 = y_1, \\ x^{a^1} + x^{a^{p+1}} &= x^3 + x^4 = y_2, \\ x^{a^2} + x^{a^{p+2}} &= x^2 + x^5 = y_3. \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= -1, \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 &= 2(y_1 + y_2 + y_3) = -2, \\ y_1 y_2 y_3 &= 2 + y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung in y ist demgemäss

$$\text{I.} \quad y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Dazu kommt wegen des letzten Primfactors 2

$$\text{II.} \quad x^2 - yx + 1 = 0.$$

Zweite Auflösung. Man setze $n - 1 = 2 . 3$, also $p = 2$, $q = 3$ und $a = 3$; ferner

$$\begin{aligned} x^{a^0} + x^{a^p} + x^{a^{2p}} &= x + x^2 + x^4 = y_1, \\ x^{a^1} + x^{a^{p+1}} + x^{a^{2p+1}} &= x^3 + x^6 + x^5 = y_2. \end{aligned}$$

Daraus findet man

$$y_1 + y_2 = -1, \quad y_1 y_2 = 3 + S = 2,$$

und folglich

$$\text{I.} \quad y^2 + y + 2 = 0.$$

Für die Ableitung der Gleichung in x ist jetzt

$$q = 3, \quad pq = 6, \quad g = 1.$$

Man setze demgemäss

$$x^{a^0} = x = x_1,$$
$$x^{a^p} = x^2 = x_2,$$
$$x^{a^{2p}} = x^4 = x_3.$$

Daraus berechnet man

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1,$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = y_2 = -1 - y_1,$$
$$x_1 x_2 x_3 = 1.$$

Setzt man allgemein $y_1 = y$, so ergibt sich hieraus

$$\text{II.} \quad x^3 - yx^2 - (y+1)x - 1 = 0.$$

4. Beispiel.

$$x^{11} - 1 = 0.$$

Es ist $n - 1 = 2 \,.\, 5$, $p = 2$, $q = 5$, $a = 2$. Die Reste sind

$$\overset{t=9}{\underset{t=0}{a^t}} \equiv 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 5,\ 10,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6 \pmod{11}.$$

Man setze

$$x^{a^0} + x^{a^p} + x^{a^{2p}} + x^{a^{3p}} + x^{a^{4p}} = x + x^4 + x^5 + x^9 + x^3 = y_1,$$
$$x^{a^1} + x^{a^{p+1}} + x^{a^{2p+1}} + x^{a^{3p+1}} + x^{a^{4p+1}} = x^2 + x^8 + x^{10} + x^7 + x^6 = y_2.$$

Man findet hieraus mit leichter Mühe

$$y_1 + y_2 = -1, \quad y_1 y_2 = 3,$$

also

$$\text{I.} \quad y^2 + y + 3 = 0.$$

Für die Ableitung der Gleichung in x hat man jetzt

$$q = 5, \quad pq = 10, \quad g = 1.$$

Man setze demnach

$$\begin{aligned}
x^{a^0} &= x = x_1\,, \\
x^{a^p} &= x^4 = x_2\,, \\
x^{a^{2p}} &= x^5 = x_3\,, \\
x^{a^{3p}} &= x^9 = x_4\,, \\
x^{a^{4p}} &= x^3 = x_5\,.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$[x_1] = y_1, \quad [x_1 x_2] = y_1 + y_2 = -1, \quad [x_1 x_2 x_3] = y_1 + y_2 = -1$$
$$[x_1 x_2 x_3 x_4] = y_2 = -1 - y_1\,, \quad [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5] = 1\,.$$

Setzt man y_1 allgemein gleich y, so erhält man die Gleichung

$$\text{II.} \quad x^5 - yx^4 - x^3 + x^2 - (1+y)x - 1 = 0\,,$$

deren Auflösung von Vandermonde 1771 und Lagrange 1808 gegeben ist, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden wird.

5. Beispiel.

$$x^{13} - 1 = 0\,.$$

Erste Auflösung:

Es sei $n = 13$, $n - 1 = 3 \,.\, 2 \,.\, 2$; also $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$. Die kleinste primitive Wurzel von 13 ist $a = 2$ und die Restreihe

$$\sum_{t=0}^{t=11} 2^t \equiv 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7 \pmod{13}\,.$$

Zunächst ist nach der von uns angenommenen Bezeichnung $p = 3$, $f = 4$.

Man setze

$$\begin{aligned}
x^{a^0} + a^{a^p} + x^{a^{2p}} + x^{a^{3p}} &= x + x^8 + x^{12} + x^5 = y_1\,, \\
x^{a^1} + x^{a^{p+1}} + x^{a^{2p+1}} + x^{a^{3p+1}} &= x^2 + x^3 + x^{11} + x^{10} = y_2\,, \\
x^{a^2} + x^{a^{p+2}} + x^{a^{2p+2}} + x^{a^{3p+2}} &= x^4 + x^6 + x^9 + x^7 = y_3\,.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 + y_3 &= -1\,, \\
y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = 4(y_1 + y_2 + y_3) &= -4\,, \\
y_1 y_2 y_3 &= 1\,.
\end{aligned}$$

Die Gleichung in y ist demnach

$$\text{I.} \quad y^3 + y^2 - 4y - 1 = 0\,.$$

Ferner ist für die Ableitung der Gleichung in z

$$q = 2, \quad pq = 6, \quad g = 2.$$

Man setze demgemäss

$$x^{a^0} + x^{a^{pq}} = x + x^{12} = z_1\,,$$
$$x^{a^p} + x^{a^{(q+1)p}} = x^8 + x^5 = z^2\,,$$

oder

$$x^{a^1} + x^{a^{pq+1}} = x^2 + x^{11} = z_1'\,,$$
$$x^{a^{p+1}} + x^{a^{(q+1)p+1}} = x^3 + x^{10} = z_2'\,;$$

oder

$$x^{a^2} + x^{a^{pq+2}} = x^4 + x^9 = z_1''\,,$$
$$x^{a^{p+2}} + x^{a^{(q+1)p+2}} = x^6 + x^7 = z_2''\,.$$

Aus der ersten Gruppe, welche für die Bestimmung der Gleichung in z ausreicht, ergibt sich

$$z_1 + z_2 = y_1\,,\quad z_1 z_2 = y_3 = y_1^2 + y_1 - 3\,.$$

Setzt man y_1 allgemein gleich y, so wird die Gleichung in z

$$\text{II.}\quad z^2 - yz + (y^2 + y - 3) = 0\,.$$

Hierzu kommt noch

$$\text{III.}\quad x^2 - zx + 1 = 0\,.$$

Zweite Auflösung: Man kehre die Reihenfolge der Factoren von $n-1$ um, so dass die kleineren den grösseren vorangehen; also

$$n - 1 = 2.2.3\,,\quad p = 2\,;\quad f = 6\,,\quad a = 2\,.$$

Man setze

$$x^{a^0} + x^{a^p} + \cdots + x^{a^{5p}} = x + x^4 + x^3 + x^{12} + x^9 + x^{10} = y_1\,,$$
$$x^{a^1} + x^{a^{p+1}} + \cdots + x^{a^{5p+1}} = x^2 + x^8 + x^6 + x^{11} + x^5 + x^7 = y_2\,.$$

Man findet leicht

$$y_1 + y_2 = -1\,,\quad y_1 y_2 = -3\,,$$

also

$$\text{I.}\quad y^2 + y - 3 = 0\,.$$

Für die Ableitung der Gleichung in z ist jetzt

$$q = 2\,,\quad pq = 4\,,\quad g = 3\,.$$

Man setze

$$x^{a^0} + x^{a^{pq}} + x^{a^{2pq}} = x + x^3 + x^9 = z_1\,,$$
$$x^{a^p} + x^{a^{(q+1)p}} + x^{a^{(2q+1)p}} = x^4 + x^{12} + x^{10} = z_2\,.$$

Daraus findet man

$$z_1 + z_2 = y_1\,,\quad z_1 z_2 = 2 - y_1\,,$$

also

$$\text{II.}\quad z^2 - yz - (y - 2) = 0\,.$$

Für die Herleitung der Gleichung in x ist

$$g = 3\,, \quad pqg = 12\,.$$

Man setze

$$x = x_1\,, \quad x^3 = x_2\,, \quad x^9 = x_3\,.$$

Daraus findet man

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= z_1\,, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= z_2 = y - z_1\,, \\ x_1 x_2 x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung in x ist demgemäss

$$\text{III.} \quad x^3 - zx^2 + (y - z)x - 1 = 0\,.$$

6. **Beispiel.**

$$x^{17} - 1 = 0\,.$$

Es ist $n = 17$, $n - 1 = 2.2.2.2$ und $a = 3$.

Die Restreihe ist

$$\overset{t=15}{\underset{t=0}{3^t}} \equiv 1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6 \pmod{17}$$

Zunächst ist $p = 2$, $f = 8$.

Man setze

$$\begin{aligned} x + x^9 + x^{13} + x^{15} + x^{16} + x^8 + x^4 + x^2 &= y_1\,, \\ x^3 + x^{10} + x^5 + x^{11} + x^{14} + x^7 + x^{12} + x^6 &= y_2\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$y_1 + y_2 = -1\,,$$

$$\begin{aligned} y_1 y_2 = \quad & x^4 + x^{12} + x^{16} + x + x^2 + x^{11} + x^7 + x^5 \\ & + x^2 + x^6 + x^8 + x^9 + x + x^{14} + x^{12} + x^{11} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + x^8 + x^7 + x^{15} + x^2 + x^4 + x^5 + x^{14} + x^{10} \\ = & \; y_1 + y_2 + y_1 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_2 = -4\,. \end{aligned}$$

Demgemäss ist die Gleichung in y

$$\text{I.} \quad y^2 + y - 4 = 0\,.$$

Für die Ableitung der Gleichung in z ist

$$q = 2\,, \quad pq = 4\,, \quad g = 4\,.$$

Man setze

$$\begin{aligned} x + x^{13} + x^{16} + x^4 &= z_1\,, \\ x^9 + x^{15} + x^8 + x^2 &= z_2\,, \end{aligned}$$

oder auch

$$x^3 + x^5 + x^{14} + x^{12} = z_1',$$
$$x^{10} + x^{11} + x^7 + x^6 = z_2'.$$

Daraus findet man

$$z_1 + z_2 = y_1, \quad z_1' + z_2' = y_2;$$
$$z_1 z_2 = y_1 + y_2 = -1, \quad z_1' z_2' = y_2 + y_1 = -1.$$

Demgemäss ist die Hülfsgleichung in z

$$\text{II.} \quad z^2 - yz - 1 = 0.$$

Für die Herleitung der nächstfolgenden Unbekannten u ist

$$r = 2, \quad pqr = 8, \quad h = 2.$$

Man setze

$$x + x^{16} = x + \frac{1}{x} = u_1, \qquad x^{13} + x^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = u_2;$$

$$x^3 + x^{14} = x^3 + \frac{1}{x^3} = u_1', \qquad x^5 + x^{12} = x^5 + \frac{1}{x^5} = u_2';$$

$$x^9 + x^8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = u_1'', \qquad x^{15} + x^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = u_2'';$$

$$x^{10} + x^7 = x^7 + \frac{1}{x^7} = u_1''', \qquad x^{11} + x^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} = u_2''';$$

Hieraus berechnet sich

$$u_1 + u_2 = z_1, \; u_1' + u_2' = z_1', \; u_1'' + u_2'' = z_2, \; u_1''' + u_2''' = z_2',$$
$$u_1 u_2 = z_1'; \quad u_1' u_2' = z_2; \quad u_1'' u_2'' = z_2'; \quad u_1''' u_2''' = z_1.$$

Daraus folgt

$$u^2 - z_1 u + z_1' = 0,$$

und wegen

$$z_1' = x^3 + x^5 + x^{14} + x^{12} = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_1 - y_1 - 4),$$

$$\text{III.} \quad u^2 - zu + \frac{1}{2}(z^2 + z - 4 - y) = 0.$$

Da von $n - 1$ jetzt nur noch der Factor $h = 2$ restirt, so ist

$$\text{IV.} \quad x^2 - ux + 1 = 0.$$

Die Auflösung der binomischen Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ ist demnach reducirt auf die Auflösung folgender vier quadratischen Gleichungen

$$\text{I.} \quad y^2 + y - 4 = 0,$$
$$\text{II.} \quad z^2 - yz - 1 = 0,$$
$$\text{III.} \quad u^2 - zu + \frac{1}{2}(z^2 + z - 4 - y) = 0,$$
$$\text{IV.} \quad x^2 - ux + 1 = 0.$$

7. Beispiel.

$$x^{19} - 1 = 0 .$$

Erste Auflösung: Hier ist $n - 1 = 3 . 3 . 2$, also $p = 3$, $q = 3$, $g = 2$. Die Auflösung dieser Gleichung lässt sich demnach reduciren auf die zweier kubischen und einer quadratischen. Die kleinste primitive Wurzel von 19 ist $a = 2$ und die Potenzreste:

$$\overset{t=17}{\underset{t=0}{2^t}} \equiv 1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10 \pmod{19}.$$

Zunächst ist $p = 3$, $f = 6$.

Man setze

$$\begin{aligned} x + x^8 + x^7 + x^{18} + x^{11} + x^{12} &= y_1 , \\ x^2 + x^{16} + x^{14} + x^{17} + x^3 + x^5 &= y_2 , \\ x^4 + x^{13} + x^9 + x^{15} + x^6 + x^{10} &= y_3 . \end{aligned}$$

Bildet man die Summe der Combinationen von y_1, y_2, y_3 zu allen Klassen, so erhält man

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= -1 , \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 &= 6 , \\ y_1 y_2 y_3 &= -7 . \end{aligned}$$

Die Gleichung in y ist demnach

$$\text{I.} \quad y^3 + y^2 + 6y - 7 = 0 .$$

Für die Herleitung der kubischen Gleichung in z beachte man, dass

$$q = 3 , \quad pq = 9 , \quad g = 2 .$$

Hieran knüpfen sich die Substitutionen

$$x + x^{18} = x + \frac{1}{x} = z_1 , \qquad x^2 + x^{17} = x^2 + \frac{1}{x^2} = z_1' ,$$

$$x^8 + x^{11} = x^8 + \frac{1}{x^8} = z_2 , \qquad x^{16} + x^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = z_2' ,$$

$$x^7 + x^{12} = x^7 + \frac{1}{x^7} = z_3 ; \qquad x^{14} + x^5 = x^5 + \frac{1}{x^5} = z_3' ;$$

$$x^4 + x^{15} = x^4 + \frac{1}{x^4} = z_1'' ,$$

$$x^{13} + x^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} = z_2'' ,$$

$$x^9 + x^{10} = x^9 + \frac{1}{x^9} = z_3'' .$$

Hieraus ergeben sich folgende Relationen:

$$z_1 + z_2 + z_3 = y_1 \,,$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = y_1 + y_3 \,,$$
$$z_1 z_2 z_3 = y_2 + 2 \,.$$

Um Alles durch einen einzigen Werth von y auszudrücken, z. B. y_1, berechne man

$$y_1^2 = 6 + 2(y_1 + y_3) + y_2 \,.$$

Daraus folgt

$$y_1 + y_3 = y_1^2 - 5 \,,$$

und

$$y_2 + 2 = 6 - y_1^2 \,.$$

Bilden wir die Gleichung z aus ihren Coefficienten, so ergibt sich

$$\text{II.} \quad z^3 - yz^2 + (y^2 - 5)z + y^2 - 6 = 0 \,,$$

und endlich

$$\text{III.} \quad x^2 - zx + 1 = 0 \,.$$

Zweite Auflösung: Man kehre die Reihenfolge der Operationen um und setze $n - 1 = 2.3.3$, also $p = 2$, $f = 9$.

Zunächst ist

$$x^1 + x^4 + x^{16} + x^7 + x^9 + x^{17} + x^{11} + x^6 + x^5 = y_1 \,,$$
$$x^2 + x^8 + x^{13} + x^{14} + x^{18} + x^{15} + x^3 + x^{12} + x^{10} = y_2 \,.$$

Daraus findet man

$$y_1 + y_2 = -1 \,, \quad y_1 y_2 = 5 \,;$$

also

$$\text{I.} \quad y^2 + y + 5 = 0 \,.$$

Ferner ist $q = 3$, $pq = 6$, $g = 3$. Man setze

$$x + x^7 + x^{11} = z_1 \,, \quad x^2 + x^{14} + x^3 = z_1' \,;$$
$$x^4 + x^9 + x^6 = z_2 \,, \quad x^8 + x^{18} + x^{12} = z_2' \,;$$
$$x^{16} + x^{17} + x^5 = z_3 \,. \quad x^{13} + x^{15} + x^{10} = z_3' \,.$$

Durch Berechnung findet man

$$z_1 + z_2 + z_3 = y_1 \,,$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 2(y_1 + y_2) = -2 \,,$$
$$z_1 z_2 z_3 = y_1 + 2y_2 = -2 - y_1 \,.$$

Es ist also

$$\text{II.} \quad z^3 - yz^2 - 2z + y + 2 = 0 \,.$$

Endlich hat man zu setzen

$$x = x_1\,, \quad x^7 = x_2\,, \quad x^{11} = x_3\,.$$

Man findet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= z_1\,, \\ x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 &= z_3\,, \\ x_1 x_2 x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\text{III.} \quad x^3 - z_1 x^2 + \sqrt{2z_1 + z_3}\,.\,x - 1 = 0\,.$$

Da sich z_3 immer durch z_1 ausdrücken lässt, so ergibt sich hieraus, indem man z_1 allgemein durch z bezeichnet, die allgemeine Hülfsgleichung III. in x, y und z.

§ 62. Die Methode der Auflösung binomischer Gleichungen nach Lagrange*).

Nachdem Gauss im J. 1801 seine Methode, die Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ (n prim) auf die ebensovieler particulärer Gleichungen, als die Zahl $n-1$ Primfactoren enthält, zu reduciren, in seinen Disquisitiones arithmeticae veröffentlicht hatte, gab Lagrange auf Grund seiner in § 47 entwickelten Substitutionsmethode eine andere Methode, worin er zeigte, dass man mit Hülfe jener direct die vollständige Lösung des Problems erzielen könne, ohne einer anderen intermediären Gleichung zu bedürfen, als der binomischen $\beta^p - 1 = 0$, wo p einen der Primfactoren von $n-1$ bezeichnet.

Um die Gleichung

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1 = 0\,,$$

deren Wurzeln nach Gauss durch die Reihe

$$\alpha^{a^0}, \quad \alpha^{a^1}, \quad \alpha^{a^2} \;\ldots\; \alpha^{a^{n-2}}$$

ausgedrückt werden, aufzulösen, verfahre man nach der in § 47 entwickelten Methode. Sind jene Wurzeln der Reihe nach identisch mit $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ und x_n die reelle Wurzel 1, so substituire man

$$y = x_1 + \beta x_2 + \beta^2 x_3 + \beta^3 x_4 + \cdots + \beta^{n-2} x_{n-1}\,,$$

wo β eine Wurzel von $\beta^{n-1} - 1 = 0$ bedeutet. Demzufolge ist auch

$$y = \alpha + \beta \alpha^a + \beta^2 \alpha^{a^2} + \beta^3 \alpha^{a^3} + \cdots + \beta^{n-2} \alpha^{a^{n-2}}\,.$$

*) Lagrange, La résolution générale des équations à deux termes. Note XIV du Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1808.

Entwickelt man die $n-1^{\text{te}}$ Potenz von y und beachtet, dass $\beta^{n-1}=\alpha^n=1$ ist, so erhält man

$$z=y^{n-1}=u_0+u_1\beta+u_2\beta^2+u_3\beta^3+\cdots+u_{n-2}\beta^{n-2},$$

wo $u_0, u_1, u_2\ldots$ bestimmbare rationale und ganze Functionen von α sind, welche nicht verändert werden, wenn α durch α^a, α^a durch α^{a^2} u. s. w. ersetzt werden. Denn diese Grössen u werden als symmetrische Functionen von $x_1, x_2, x_3\ldots$ nicht verändert, wenn man die Elemente in ihrer Reihenfolge cyklisch verschiebt, z. B. x_1 durch x_2, x_2 durch x_3 u. s. f. ersetzt; oder in einem andern Falle x_1 durch x_3, x_2 durch x_4, u. s. f.

Nun ist aber klar, dass jede rationale und ganze Function von α, in welcher $\alpha^n=1$ ist, auf die Form

$$A+B\alpha+C\alpha^2+\cdots+N\alpha^{n-1}$$

gebracht werden kann, worin die Coefficienten $A, B, C\ldots$ bestimmte von α unabhängige Grössen sind. Die Factoren $\alpha, \alpha^2, \alpha^3\ldots$ lassen sich ersetzen durch die nur in anderer Folge auftretenden Werthe $\alpha^{a^0}, \alpha^{a^1}, \alpha^{a^2}, \ldots \alpha^{a^{n-2}}$. Dies gibt also die Form

$$A+B\alpha^{a^0}+C\alpha^{a^1}+D\alpha^{a^2}+\cdots+N\alpha^{a^{n-2}}.$$

Wenn diese Function nun so beschaffen ist, dass sie unverändert bleibt durch den Wechsel von α, so folgt daraus, dass die Permutation

$$A+B\alpha^{a^1}+C\alpha^{a^2}+D\alpha^{a^3}+\cdots+N\alpha^{a^0},$$

indem α^a überall an die Stelle von α tritt, mit der vorigen zusammenfällt und dass

$$B=C,\quad C=D,\quad D=E,\ldots N=B$$

sein muss. Dadurch reducirt sich die Form auf die folgende:

$$A+B\left(\alpha+\alpha^a+\alpha^{a^2}+\alpha^{a^3}+\cdots+\alpha^{a^{n-2}}\right)$$

und weil der eingeklammerte Ausdruck die Summe s aller complexen Wurzeln darstellt, also gleich -1 ist, auf $A-B$. Demgemäss ist jede der Functionen $u_0, u_1, u_2,\ldots$ von der Form $A-B$, und ihr Werth wird gefunden durch die Entwicklung der Potenz $y^{n-1}=z$. Wir haben hier den Fall, wo die Werthe der Grössen $u_0, u_1, u_2,\ldots$ unmittelbar bestimmt werden, ohne dass man nöthig hat, eine Gleichung aufzulösen.

Wenn wir demnach die $n-1$ Wurzeln der Gleichung

$$\beta^{n-1}-1=0$$

der Reihe nach bezeichnen mit $1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ und die correspondirenden Werthe von z mit $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$, so erhalten wir wie früher:

$$\begin{aligned}
&\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1} = \sqrt[n-1]{z_1}\,,\\
&\alpha + \beta_1\alpha^2 + \beta_1^2\alpha^3 + \cdots + \beta_1^{n-2}\alpha^{n-1} = \sqrt[n-1]{z_2}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha + \beta_{n-2}\alpha^2 + \beta_{n-2}^2\alpha^3 + \cdots + \beta_{n-2}^{n-2}\alpha^{n-1} = \sqrt[n-1]{z_{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Addirt man sämmtliche Gleichungen, so resultirt mit Berücksichtigung der Werthe der Summen der Potenzen von β:

$$(n-1)\alpha = \sqrt[n-1]{z_1} + \sqrt[n-1]{z_2} + \sqrt[n-1]{z_3} + \cdots + \sqrt[n-1]{z_{n-1}}\,.$$

Multiplicirt man das System von Gleichungen beziehungsweise mit $1, \beta_1^{n-2}, \beta_2^{n-2} \ldots$ und addirt, so erhält man nach einander alle Wurzeln $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots$, nämlich

$$\begin{aligned}
(n-1)\alpha^2 &= \sqrt[n-1]{z_1} + \beta_1^{n-2}\sqrt[n-1]{z_2} + \beta_2^{n-2}\sqrt[n-1]{z_3} + \cdots + \beta_{n-2}^{n-2}\sqrt[n-1]{z_{n-1}}\,,\\
(n-1)\alpha^3 &= \sqrt[n-1]{z_1} + \beta_1^{n-3}\sqrt[n-1]{z_2} + \beta_2^{n-3}\sqrt[n-1]{z_3} + \cdots + \beta_{n-2}^{n-3}\sqrt[n-1]{z_{n-1}}\,;
\end{aligned}$$

u. s. w.

Man kann übrigens, nach Belieben, es auch umgehen, u_0 und z_1 zu berechnen; denn $\sqrt[n-1]{z_1}$ ist immer gleich der Summe s aller complexen Wurzeln und z kann dargestellt werden unter der Form

$$z = s^{n-1} + (\beta - 1)u_1 + (\beta^2 - 1)u_2 + (\beta^3 - 1)u_3 + \cdots,$$

worin u_0 fehlt, und man hat nur noch $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ für β zu setzen, um z zu erhalten.

1. Beispiel.

$$x^5 - 1 = 0\,.$$

Man dividire das Binom durch $x - 1$, wodurch man die biquadratische Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

übrig behält, deren Wurzeln mit

$$\alpha\,,\quad \alpha^2\,,\quad \alpha^3\,,\quad \alpha^4$$

bezeichnet werden mögen.

Die kleinste primitive Wurzel von 5 ist 2 und man hat

$$\overset{t=3}{\underset{t=0}{2^t}} \equiv 1,\ 2,\ 4,\ 3 \pmod 5\,.$$

Man setze nun nach Vorschrift

$$y = \alpha + \beta\alpha^2 + \beta^2\alpha^4 + \beta^3\alpha^3,$$

wo β eine der Wurzeln von der Gleichung $\beta^4 = 1$ ist, α eine der complexen Wurzeln der Gleichung $\alpha^5 - 1 = 0$.

Um z zu erhalten, erhebe man die Function y zur vierten Potenz und entwickele sie nach Potenzen von α und β; dies gibt

$$z = y^4 = u_0 + u_1\beta + u_2\beta^2 + u_3\beta^3,$$

wo

$$u_0 = 12 + 13s, \quad u_1 = 16 + 12s,$$
$$u_2 = 24 + 10s, \quad u_3 = 16s.$$

Da aber $s = -1$ ist, so findet man

$$z = -1 + 4\beta + 14\beta^2 - 16\beta^3.$$

Um y^4 zu entwickeln, kann man erst y^2 suchen; es ist

$$y^2 = (2 + \alpha^2 + \alpha^3) + 2\beta(\alpha^2 + \alpha^3) + \beta^2(2 + \alpha + \alpha^4) + 2\beta^3(\alpha + \alpha^4).$$

Darauf quadrire man nochmals.

Nun sind die Wurzeln der Gleichung $\beta^4 - 1 = 0$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \sqrt{-1}, \quad \beta_3 = -1, \quad \beta_4 = -\sqrt{-1}.$$

Substituiren wir dieselben in z, so erhalten wir

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -15 + 20\sqrt{-1}, \quad z_3 = 25, \quad z_4 = -15 - 20\sqrt{-1},$$

und wenn wir diese Werthe in die Functionen $(n-1)\alpha$, $(n-1)\alpha^2, \ldots$ einsetzen, die fünf Wurzelwerthe

$$x_1 = +1,$$
$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\left[-1 \pm \sqrt{5} + \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}}\right],$$
$$\left.\begin{matrix} x_4 \\ x_5 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\left[-1 \mp \sqrt{5} - \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}\right].$$

2. Beispiel. $\qquad x^7 - 1 = 0.$

Die kleinste primitive Wurzel von 7 ist $a = 3$ und

$$\overset{t=5}{\underset{t=0}{3^t}} \equiv 1, 3, 2, 6, 4, 5 \pmod{7}.$$

Man substituire

$$y = \alpha + \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 + \beta^3\alpha^6 + \beta^4\alpha^4 + \beta^5\alpha^5.$$

Dann ist

$$z = y^6 = (\alpha + \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 + \beta^3\alpha^6 + \beta^4\alpha^4 + \beta^5\alpha^5)^6,$$

und bei der Entwickelung dieses Polynoms zu berücksichtigen, dass $\alpha^7 = \beta^6 = 1$. Man bilde zunächst die dritte Potenz

$$\begin{aligned} y^3 = & -2m - 3(3+2m)\beta + 3(2+m)\beta^2 + 2(1+m)\beta^3 \\ & - 3(1-2m)\beta^4 + 3(1-m)\beta^5, \end{aligned}$$

wo $m = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$ zu setzen ist. Erhebt man dies Polynom ins Quadrat, so resultirt

$$z = y^6 = -246 - 36\beta + 6\beta^2 + 34\beta_3 + 69\beta^4 + 174\beta^5.$$

Es ist nun

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \beta_3 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

$$\beta_4 = -1, \quad \beta_5 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \beta_6 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Substituiren wir diese Werthe nach einander in z, so ergibt sich

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -248\tfrac{1}{2} + 136\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad z_3 = -318\tfrac{1}{2} - 73\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

$$z_4 = -343, \quad z_5 = -318\tfrac{1}{2} + 73\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad z_6 = -248\tfrac{1}{2} - 136\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

und hieraus werden die sieben Wurzelwerthe gefunden.

Die vorstehende allgemeine Methode wird sehr umständlich, wenn n beträchtlich gross ist. Lagrange hat nun eine einfachere Operation angegeben, indem die voranstehende sich in so viele Einzeloperationen auflösen lässt, als $n-1$ Primfactoren enthält.

Es sei zunächst $n - 1 = pf$ und β eine Wurzel der Gleichung $\beta^p - 1 = 0$, so wird die Function

$$y = y_1 + \beta y_2 + \beta^2 y_3 + \cdots + \beta^{p-1} y_p,$$

worin

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \alpha^{a^p} + \alpha^{a^{2p}} + \cdots + \alpha^{a^{(f-1)p}}, \\ y_2 &= \alpha^a + \alpha^{a^{p+1}} + \alpha^{a^{2p+1}} + \cdots + \alpha^{a^{(f-1)p+1}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_p &= \alpha^{a^{p-1}} + \alpha^{a^{2p-1}} + \alpha^{a^{3p-1}} + \cdots + \alpha^{a^{fp-1}}. \end{aligned}$$

Man hat jetzt zu bilden die Function $z = y^p$, welche von der Form

$$u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2 + \beta^3 u_3 + \cdots + \beta^{p-1} u_{p-1}$$

sein muss, da $\beta^p = 1$ ist.

Dieselbe Function muss die Eigenschaft besitzen, dass die Grössen $u_0, u_1, u_2, \cdots$ Functionen von $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sind, der Art, dass sie unveränderlich bleiben, wenn alle Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots$ cyklisch permutirt werden und zwar y_1 in y_2, y_2 in y_3, u. s. f. Nun erkennt man aus den obenstehenden Ausdrücken für $y_1, y_2, y_3, \dots$, dass, wenn man darin α^a an die Stelle von α setzt, y_1 in y_2, y_2 in y_3, u. s. f. y_p in y_1 übergeht. Demzufolge werden die Grössen u_0, u_1, u_2 solche Functionen von α sein müssen, dass sie unveränderlich bleiben, wenn α in α^a übergeht. Deshalb sind sie auch in diesem Falle wieder von der Form $A + Bs$ oder $A - B$. Dies gibt nun, weil p an die Stelle von $n-1$ zu setzen ist und s an die Stelle von $\sqrt[p]{z_1}$,

$$\begin{aligned}
py_1 &= s + \sqrt[p]{z_1} + \sqrt[p]{z_2} + \cdots \\
py_2 &= s + \beta_1^{p-1}\sqrt[p]{z_1} + \beta_2^{p-1}\sqrt[p]{z_2} + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
py_p &= s + \beta_1\sqrt[p]{z_1} \quad + \beta_2\sqrt[p]{z_2} + \cdots
\end{aligned}$$

Den Werth von u_0 braucht man nicht zu berechnen, indem man wiederum setzen kann

$$z = s^p + (\beta - 1)u_1 + (\beta^2 - 1)u_2 + (\beta^3 - 1)u_3 + \cdots$$

Der Fall $p = \frac{1}{2}(n-1)$ verdient eine besondere Aufmerksamkeit, weil er die Theilung des Kreises in p Theile liefert. Es sei also $p = \frac{1}{2}(n-1)$ und also $f = 2$; dann ist $y_1 = \alpha + \alpha^{a^{\frac{1}{2}(n-1)}}$. Da a die primitive Wurzel der Primzahl n ist, also

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

so ist nicht auch $a^{\frac{1}{2}(n-1)} \equiv 1 \pmod{n}$. Aber weil

$$a^{n-1} - 1 = (a^{\frac{1}{2}(n-1)} - 1)(a^{\frac{1}{2}(n-1)} + 1),$$

so muss doch mindestens sein

$$a^{\frac{1}{2}(n-1)} \equiv -1 \pmod{n}.$$

Demgemäss ist

$$\alpha^{a^{\frac{1}{2}(n-1)}} = \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha},$$

und

$$y_1 = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad y_2 = \alpha^a + \frac{1}{\alpha^a}, \quad y_2 = \alpha^{a^2} + \frac{1}{\alpha^{a^2}},$$

u. s. w.

Nach dem Cotesischen Theorem ist allgemein

$$\alpha^m = \cos\frac{m}{n}\,360^0 + i\sin\frac{m}{n}\,360^0\,,$$

folglich

$$y_1 = 2\cos\frac{360^0}{n}\,,\quad y_2 = 2\cos\frac{a\,.\,360^0}{n}\,,\quad y_3 = 2\cos\frac{a^2\,.\,360^0}{n}\,,$$

u. s. w.,

also sind die Werthe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ in diesem Falle alle reell und geben unmittelbar die Cosinusse der Kreistheile.

Nachdem man die Functionen $y_1, y_2, y_3 \ldots$ gefunden hat, welche offenbar die Wurzeln einer Gleichung vom p^{ten} Grade sind, muss man sehen, die p^{te} Wurzel derselben zu erhalten.

Man betrachte die f Wurzeln, welche in die Function y_1 eintreten, als Wurzeln einer Gleichung vom f^{ten} Grade und man wird sie substituiren für $x_1, x_2, x_3, \ldots x_f$ in dem allgemeinen Ausdrucke der Function y; man hat also

$$y' = \alpha + \beta\alpha^{a^p} + \beta^2\alpha^{a^{2p}} + \cdots + \beta^{f-1}\,\alpha^{a^{(f-1)p}}\,,$$

wo man für β eine Wurzel der Gleichung $\beta^f - 1 = 0$ einzusetzen hat.

Wegen $\beta^f = 1$ hat man

$$z' = y'^f = u_0' + \beta u_1' + \beta^2 u_2' + \cdots + \beta^{f-1}\,u'_{f-1}\,.$$

Diese mit $u_0', u_1', u_2' \ldots$ bezeichneten Functionen sind ebenfalls im allgemeinen Functionen von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ welche unabhängig sind von der cyklischen Vertauschung von x_2 mit x_1, x_3 mit x_2, u. s. f., und darum sind sie Functionen von α, welche sich nicht ändern, wenn man α vertauscht mit α^{a^p}.

Nun lässt sich zeigen, dass jede rationale Function von α, welche die Eigenschaft besitzt, unveränderlich zu bleiben, wenn α mit α^{a^p} vertauscht wird, nothwendig die Form

$$A + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + \cdots + Hy_p$$

haben muss, mit Beibehaltung ihrer früheren Werthe. Denn zuerst lässt sich jede rationale Function von α auf die Form

$$A + B\alpha + C\alpha^a + D\alpha^{a^2} + \cdots + N\alpha^{a^{n-1}}$$

bringen, und weil diese Function unveränderlich bleibt, wenn sich α in α^{a^p} verwandelt, so müssen die Coefficienten der Terme, welche α^{a^p}, $\alpha^{a^{2p}}$, $\alpha^{a^{3p}}, \ldots$ einschliessen, dieselben sein, wie die von α;

die Coefficienten der Terme, welche $\alpha^{a^{p+1}}$, $\alpha^{a^{2p+1}}$, $\alpha^{a^{3p+1}}$ ... einschliessen, dieselben sein, wie die von α^a; die Coefficienten der Terme $\alpha^{a^{p+2}}$, $\alpha^{a^{2p+2}}$, $\alpha^{a^{2p+3}}$, ... dieselben wie die von α^{a^2} u. s. f. Dieser Umstand reducirt die Function auf die Form, welche ihr gegeben worden ist.

Es wird nun weiter jede der Grössen u_0, u_1, u_2 ... von der Form

$$A + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + \cdots$$

und hat deshalb einen bestimmten Werth. Daher wird die Function z bekannt sein und man wird die Werthe $z_1, z_2, z_3, \ldots$ erhalten, wenn man statt β die $f-1$ Wurzeln der Gleichung $\beta^{f-1} - 1 = 0$ darin substituirt. Für α erhält man eine der früheren allgemeinen ähnliche Form, in der man f an die Stelle von $n-1$, y_1, die Summe der Wurzeln, an die Stelle des Ausdrucks $\sqrt[f]{z_1}$ setzt. Man hat also

$$\alpha = \frac{y_1 + \sqrt[f]{z_1} + \sqrt[f]{z_2} + \sqrt[f]{z_3} + \cdots}{f}.$$

Man könnte auch, wenn man wollte, die Ausdrücke der andern Wurzeln dieser Gattung α^{a^p}, $\alpha^{a^{2p}}$, ... erhalten, welche die Function y_1 zusammensetzen, indem man nämlich in dem Ausdrucke für α die Radicale multiplicirt mit β_1^{f-1}, β_2^{f-1}, β_3^{f-1}, u. s. w., dann mit β_1^{f-2}, β_2^{f-2}, β_3^{f-2}, u. s. w., also

$$f \cdot \alpha^{a^p} = y_1 + \beta_1^{f-1}\sqrt[f]{z_1} + \beta_2^{f-1}\sqrt[f]{z_2} + \beta_3^{f-1}\sqrt[f]{z_3} + \cdots$$

$$f \cdot \alpha^{a^{2p}} = y_1 + \beta_1^{f-2}\sqrt[f]{z_1} + \beta_2^{f-2}\sqrt[f]{z_2} + \beta_3^{f-2}\sqrt[f]{z_3} + \cdots$$

Ebenso würde man die Wurzeln α^{a^1}, $\alpha^{a^{p+1}}$, $\alpha^{a^{2p+1}}$, ... welche die Function y_2 bilden, finden blos durch die Betrachtung, dass y_1 übergeht in y_2, y_2 in y_3, ... wenn α in α^a übergeht; ganz ebenso, wie es hinreichend ist, in dem allgemeinen Ausdrucke von y cyklisch y_1 in y_2, y_2 in y_3, ... y_p in y_1 zu verwandeln. Aus demselben Grunde, wonach y_1 in y_3, y_2 in y_4 u. s. f. übergeht, wenn α^{a^2} an die Stelle von α tritt, wird man aus den Ausdrücken für diejenigen Wurzeln, welche die Function y_1 bilden, die Ausdrücke der Wurzeln, welche die Function y_3 bilden, leicht ableiten können dadurch, dass man in dem allgemeinen Ausdrucke von z einfach y_1 in y_3, y_2 in y_4, u. s. f., y_{p-1} in y_1, y_p in y_2 verwandelt.

Wenn die Zahl f nicht prim ist, so wird man die vorangehende Operation nochmals in mehrere einfachere zerlegen können.

Wenn $f = q.g$ ist, so hat man für β eine Wurzel der Gleichung $\beta^q - 1 = 0$ zu nehmen, so dass $\beta^q = 1$ und die Function z' wird

$$y' = v_1 + \beta v_2 + \beta^2 v_3 + \cdots + \beta^{q-1} v_q,$$

worin

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha + \alpha^{a^{pq}} + \alpha^{a^{2pq}} + \cdots + \alpha^{a^{(g-1)pq}}, \\
v_2 &= \alpha^{a^p} + \alpha^{a^{p(q+1)}} + \alpha^{a^{p(2q+1)}} + \cdots + \alpha^{a^{(g-1)pq+p}}. \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_q &= \alpha^{a^{(q-1)p}} + a^{a^{(2q-1)p}} + \alpha^{a^{(3q-1)p}} + \cdots + \alpha^{a^{(f-1)p}}.
\end{aligned}$$

Man mache jetzt

$$z' = y^{q'} = u_0' + \beta u_1' + \beta^2 u_2' + \cdots + \beta^{q-1} u'_{q-1},$$

wo $u_0', u_1', u_2', \ldots$ Functionen von $v_1, v_2, v_3, \ldots$ sein werden, welche unveränderlich bleiben, wenn auch v_1 in v_2, v_2 in v_3, u. s. w., v_q in v_1 übergeht. Man erkennt aber an den vorhergehenden Ausdrücken von v_1, v_2, dass diese Verwandlungen eintreten, wenn man α in α^{a^p} verwandelt. Demnach müssen die Grössen $u_0', u_1', u_2', \ldots$ als Functionen von α betrachtet, unverändert bleiben, sobald man α durch α^{a^p} ersetzt. Sie müssen also nothwendig von der Form

$$A + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + \cdots$$

sein. Da die Werthe von $y_1, y_2, y_3 \ldots$ schon durch die erste Operation bekannt sind, so werden $u_0', u_1', u_2' \ldots$ ebenfalls bekannt sein; also auch die Function z'. Daraus erhält man die Werthe der q Wurzeln $v_1, v_2, v_3 \ldots$ durch ähnliche Formeln, indem p in q, y in v', z in z' verwandelt und für $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die Wurzeln der Gleichung $\beta^q - 1 = 0$ mit Ausnahme der Einheit wählt; also wegen $s = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots = y_1$:

$$\begin{aligned}
qv_1 &= y_1 + \sqrt[q]{z_1'} + \sqrt[q]{z_2'} + \cdots, \\
qv_2 &= y_1 + \beta_1^{q-1} \sqrt[q]{z_1'} + \beta_2^{q-1} \sqrt[q]{z_2'} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
qv_q &= y_1 + \beta_1 \sqrt[q]{z_1'} + \beta_2 \sqrt[q]{z_2'} + \cdots
\end{aligned}$$

Der Werth von v_1 gibt nur die Summe der g Wurzeln

$$\alpha, \quad \alpha^{a^{pq}}, \quad \alpha^{a^{2pq}}, \ldots \, a^{a^{(g-1)pq}}.$$

Um α zu erhalten, muss man diese g Wurzeln noch betrachten als die Wurzeln einer Gleichung vom g^{ten} Grade und aufs Neue setzen:

$$y'' = \alpha + \beta \alpha^{a^{pq}} + \beta^2 \alpha^{a^{2pq}} + \cdots + \beta^{g-1} \alpha^{a^{(g-1)pq}},$$

wo β eine Wurzel der Gleichung $\beta^g - 1 = 0$ bezeichnet. Man entwickele die Gleichung

$$z'' = y''^g = u_0'' + \beta u_1'' + \beta^2 u_2'' + \cdots + \beta^{g-1} u_{g-1}''.$$

Wenn die Zahl g wieder zusammengesetzt ist, z. B. $g = r.h$, so kann man für β eine Wurzel der Gleichung $\beta^r - 1 = 0$ nehmen, welches y'' die Form

$$y'' = w_1 + \beta w_2 + \beta^2 w_3 + \cdots + \beta^{r-1} w_{r-1}$$

geben würde. Man fährt in dieser Operation so fort, wie vorhin, bis man zu einem Factor von $n - 1$ gelangt, der nicht mehr zusammengesetzt ist.

Der Vortheil dieser Zerlegung von $n - 1$ in seine Primfactoren besteht also hauptsächlich in der Erniedrigung der Potenzen, zu denen man die Polynome y zu erheben hat, um die Functionen z zu erhalten, sowie in der Erniedrigung der Radicale, welche in die Wurzel α eintreten.

1. Beispiel. $\qquad x^5 - 1 = 0.$

In diesem Falle ist $n - 1 = 4 = 2 . 2$; also $p = 2, f = 2$. Man nehme für β eine der Wurzeln von $\beta^2 - 1 = 0$ und es wird

$$y = y_1 + \beta y_2,$$

worin

$$y_1 = \alpha + \alpha^4, \quad y_2 = \alpha^2 + \alpha^3.$$

Nun ist

$$z = y^2 = u_0 + \beta . u_1,$$

worin

$$u_0 = y_1{}^2 + y_2{}^2, \quad u_1 = 2 y_1 y_2.$$

Substituirt man die Werthe von y_1 und y_2 in α und entwickelt die Quadrate und die Producte, indem man beachtet, dass α^5 und β^2 gleich 1 wird, so erhält man

$$\begin{aligned} u_0 &= 4 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 3, \\ u_1 &= 2(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4) = -2, \\ z &= 3 - 2\beta. \end{aligned}$$

Macht man $\beta = -1$, so erhält man $z_1 = 5$, und wegen

$$s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad y_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}).$$

Die erste Hülfsgleichung ist demnach die quadratische

$$\text{I.} \quad y^2 + y - 1 = 0.$$

Auf diese Weise erhält man durch y_1 den Werth der Summe $\alpha + \alpha^{2^2}$, d. i. zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Um α selbst zu erhalten, muss man eine zweite Berechnung machen, indem man α und α^4 als die Wurzeln einer Gleichung vom zweiten Grade betrachtet. Man setze demgemäss

$$y' = \alpha + \beta\alpha^4,$$

wo β eine Wurzel der Gleichung $\beta^2 - 1 = 0$ bezeichnet.

Daraus folgt

$$z' = y^{2\prime} = u_0' + \beta u_1',$$

wo

$$u_0' = \alpha^2 + \alpha^3, \quad u_1' = 2\alpha^5 = 2.$$

Man sieht sofort, dass die Werthe von u_0' und u_1' gegeben sind durch die schon bekannten von y_1 und y_2; denn man hat

$$u_0' = \alpha^2 + \alpha^3 = y_2, \quad u_1' = 2.$$

Daraus folgt

$$z' = y_2 + 2\beta,$$

und wenn man $\beta = -1$ setzt:

$$z_1' = y_2 - 2.$$

Die allgemeine Wurzelform liefert den gesuchten Wurzelwerth

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\left(y_1 + \sqrt{y_2 - 2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

Da $a = 2$ ist, so erhält man nach der früheren Anleitung

$$\begin{aligned}\alpha^{a^p} = \alpha^4 &= \frac{1}{2}\left(y_1 - \sqrt{y_2 - 2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

Permutirt man cyklisch y_1 in y_2, y_2 in y_1, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\alpha^a = \alpha^2 &= \frac{1}{2}\left(y_2 + \sqrt{y_1 - 2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha^{a^3} = \alpha^3 &= \frac{1}{2}\left(y_2 - \sqrt{y_1 - 2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

Kürzer erhält man die vier Wurzeln, wenn man die erste

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(y_1 + \sqrt{y_2 - 2}\right)$$

als den allgemeinen Ausdruck von x, und y_1 als den der Wurzel der Gleichung I. betrachtet. Aus I. folgt $y_2 = -1 - y_1$; also ist

$$x = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{-3 - y}\right),$$

und wenn man rational macht, sowie berücksichtigt, dass nach I. $y^2 + y = 2$ ist,

$$\text{II.} \quad x^2 - yx + 1 = 0\,.$$

2. Beispiel. $\qquad x^7 - 1 = 0\,.$

Man befreie die Gleichung von der reellen Wurzel 1; dies gibt

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0\,,$$

wovon die Wurzeln sind

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6.$$

Die kleinste primitive Wurzel von 7 ist 3; und

$$\overset{t=5}{\underset{t=0}{3^t}} \equiv 1, 3, 2, 6, 4, 5 \pmod 7.$$

Wir setzen deshalb die Reihe

$$\alpha^1 \quad \alpha^3 \quad \alpha^2 \quad \alpha^6 \quad \alpha^4 \quad \alpha^5$$

anstatt der Wurzeln der Gleichung vom sechsten Grade

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6\,.$$

Es ist nun $n - 1 = 6 = 2\,.\,3$; also $p = 2$, $f = 3$. Indem wir weiter mit β eine der Wurzeln der Gleichung $\beta^2 - 1 = 0$ bezeichnen, setzen wir

$$y = y_1 + \beta y_2,$$

worin

$$y_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \quad y_2 = \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^5\,.$$

Man hat dann weiter

$$z = y^2 = u_0 + \beta u_1\,,$$

wobei

$$u_0 = y_1{}^2 + y_2{}^2, \quad u_1 = 2 y_1 y_2$$

zu nehmen ist. Man findet nun durch Entwickelung der Quadrate mit Berücksichtigung, dass $\alpha^7 = 1$ ist,

$$\begin{aligned} u_0 &= 3(\alpha + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^5) = -3\,, \\ u_1 &= 2(3 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^5) = 4\,, \\ z &= -3 + 4\beta\,. \end{aligned}$$

Macht man darauf $\beta = -1$, so erhält man $z_1 = -7$ und wegen

$$s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-7}\right).$$

Die erste Hülfsgleichung ist demnach die quadratische

$$\text{I.} \quad y^2 + y + 2 = 0.$$

Man erhält so aber nur den Werth der Summe $\alpha + \alpha^2 + \alpha^4$; um α selbst zu erhalten, betrachten wir die drei Terme des Ausdruckes y_1 als die drei Wurzeln einer kubischen Gleichung und β als die Wurzel der Gleichung $\beta^f - 1 = \beta^3 - 1 = 0$ und setzen

$$y' = \alpha + \beta\alpha^2 + \beta^2\alpha^4.$$

Daraus ergibt sich

$$z' = y^{f'} = y^{3'} = u_0' + \beta u_1' + \beta^2 u'_2.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung $\beta^3 = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} u_0' &= 6 + \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^5 = 6 + y_2, \\ u_1' &= 3(\alpha + \alpha^2 + \alpha^4) = 3y_1, \\ u_2' &= 3(\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^5) = 3y_2, \end{aligned}$$

so dass man erhält

$$z' = 6 + y_2 + 3\beta y_1 + 3\beta^2 y_2,$$

worin $\beta = J_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $\beta^2 = J_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ ist.

Setzt man diese beiden Werthe ein, so hat man

$$\begin{aligned} z_1' &= 6 + y_2 + 3J_1 y_1 + 3J_2 y_2 \\ z_2' &= 6 + y_2 + 3J_2 y_1 + 3J_1 y_2 \end{aligned}$$

und gemäss der allgemeinen Wurzelform

$$\alpha = \frac{y_1 + \sqrt[3]{z_1'} + \sqrt[3]{z_2'}}{3}.$$

Da $a = 3$ ist, so erhält man die übrigen Wurzeln

$$\alpha^{a^p} = \alpha^2 = \frac{y_1 + \beta_1^{f-1}\sqrt[3]{z_1'} + \beta_2^{f-1}\sqrt[3]{z_2'}}{3}$$

$$\alpha^{a^{2p}} = \alpha^4 = \frac{y_1 + \beta_1^{f-2}\sqrt[3]{z_1'} + \beta_2^{f-2}\sqrt[3]{z_2'}}{3}.$$

Ferner ist

$$\alpha^{a^1} \quad = \alpha^3 = \frac{y_2 + \sqrt[3]{z_1'} + \sqrt[3]{z_2'}}{3},$$

$$\alpha^{a^{p+1}} = \alpha^6 = \frac{y_2 + \beta_1^{f-1}\sqrt[3]{z_1'} + \beta_2^{f-1}\sqrt[3]{z_2'}}{3},$$

$$\alpha^{a^{2p+1}} = \alpha^5 = \frac{y_2 + \beta_1^{f-2}\sqrt[3]{z_1'} + \beta_2^{f-2}\sqrt[3]{z_2'}}{3}.$$

Man kann übrigens sämmtliche Wurzeln durch eine kubische Gleichung in x ausdrücken vermittels der ersten Wurzel, indem wir $\alpha = x$, $y_1 = y$ setzen. Gemäss der Gleichung I. ist $y_2 = -1 - y$, also

$$z_1' = \left(6\frac{1}{2} - y\right) + \frac{3}{2}\sqrt{-3}(1 + 2y),$$

$$z_2' = \left(6\frac{1}{2} - y\right) - \frac{3}{2}\sqrt{-3}(1 + 2y).$$

Ferner ist

$$z_1' z_2' = 28y^2 + 14y + 49,$$

und wenn man gemäss I.

$$24y^2 + 24y + 48 = 0$$

subtrahirt und

$$8y^3 + 8y^2 + 16y = 0$$

addirt, so erhält man

$$z_1' z_2' = (2y + 1)^3.$$

Aus der Wurzelform

$$\alpha = \frac{y_1 + \sqrt[3]{z_1'} + \sqrt[3]{z_2'}}{3}$$

folgt nun

$$\begin{aligned}(3x - y)^3 &= z_1' + z_2' + 3\sqrt[3]{z_1' z_2'}\,(3x - y)\\ &= 13 - 2y + 3(2y + 1)(3x - y)\end{aligned}$$

und die nach Potenzen von x geordnete Gleichung

$$\text{II.} \quad x^3 - yx^2 - (y + 1)x - 1 = 0.$$

3. Beispiel.

$$x^{11} - 1 = 0.$$

Dividirt man die Gleichung durch $x - 1$, so erhält man eine reciproke Gleichung von 10ten Grade, nämlich

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

welche im Jahre 1771 zuerst von Vandermonde gelöst ist, und später von Lagrange auf folgendem Wege.

Die kleinste primitive Wurzel der Zahl 11 ist 2 und

$$\overset{t=9}{\underset{t=0}{2^t}} \equiv 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 5,\ 10,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6,\ (\mathrm{mod}\ 11).$$

Man setze

$$y = \alpha + \beta\alpha^2 + \beta^2\alpha^4 + \beta^3\alpha^8 + \beta^4\alpha^5 + \beta^5\alpha^{10} + \beta^6\alpha^9 + \beta^7\alpha^7 + \beta^8\alpha^3 + \beta^9\alpha^6,$$

wo α^i eine complexe Wurzel der Gleichung $\alpha^{11} - 1 = 0$, β eine Wurzel der Gleichung $\beta^{10} - 1 = 0$ bezeichnet.

Man bilde die Potenz $z = y^{10}$. Da aber $10 = 2 . 5$, so kann man die Operation vereinfachen, indem man sie in zwei zerlegt und zuerst β als die Wurzel der Gleichung $\beta^2 - 1 = 0$ betrachtet. Dadurch wird die Function y reducirt auf

$$y = y_1 + \beta y_2,$$

worin

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^9 + \alpha^3, \\ y_2 &= \alpha^2 + \alpha^8 + \alpha^{10} + \alpha^7 + \alpha^6 \end{aligned}$$

zu setzen ist.

Daraus findet man

$$z = y^2 = (y_1{}^2 + y_2{}^2) + 2\beta y_1 y_2 = u_0 + \beta u_1 .$$

Entwickelt man diese Ausdrücke und berücksichtigt dass $\alpha^{11} = 1$, so findet man

$$y_1{}^2 = 2y_1 + 3y_2, \quad y_2{}^2 = 2y_2 + 3y_1,$$

folglich

$$\begin{aligned} u_0 &= 5(y_1 + y_2) = -5, \\ u_1 &= 10 + 4(y_1 + y_2) = 6, \\ z &= -5 + 6\beta. \end{aligned}$$

Macht man $\beta = -1$, so wird $z_1 = -11$ und

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-11}).$$

Dies sind offenbar die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\text{I.} \quad y^2 + y + 3 = 0.$$

Um den Werth α zu finden, betrachte man die fünf Glieder von y_1 als die fünf Wurzeln einer Gleichung vom fünften Grade und β als die Wurzel von $\beta^5 - 1 = 0$. Man hat dann

$$y' = \alpha + \beta\alpha^4 + \beta^2\alpha^5 + \beta^3\alpha^9 + \beta^4\alpha^3,$$

und wenn man setzt

$$z' = y^{5'} = u_0' + \beta u_1' + \beta^2 u_2' + \beta^3 u_3' + \beta^4 u_4',$$

so findet man wegen $\beta^5 = 1$, $\alpha^{11} = 1$,

$$\begin{aligned}
u_0' &= 120 + 31y_1 + 70y_2,\\
u_1' &= 100 + 60y_1 + 45y_2,\\
u_2' &= 50 + 85y_1 + 30y_2,\\
u_3' &= \phantom{120 + {}} 60y_1 + 65y_2,\\
u_4' &= \phantom{120 + {}} 50y_1 + 75y_2.
\end{aligned}$$

Da die Werthe y_1 und y_2 bekannt sind, so findet man z' mittels der Gleichung

$$u_0' = \frac{1}{2}(139 - 39\sqrt{-11}), \quad u_1' = \frac{1}{2}(95 + 15\sqrt{-11}),$$

$$u_2' = \frac{1}{2}(-15 + 55\sqrt{-11}), \; u_3' = \frac{1}{2}(-125 - 5\sqrt{-11}),$$

$$u_4' = \frac{1}{2}(-125 - 25\sqrt{-11}).$$

Man hat ausserdem die Relationen

$$\begin{aligned}
z_1' &= u_0' + \beta\, u_1' + \beta^2 u_2' + \beta^3 u_3' + \beta^4 u_4',\\
z_2' &= u_0' + \beta^2 u_1' + \beta^4 u_2' + \beta\, u_3' + \beta^3 u_4',\\
z_3' &= u_0' + \beta^3 u_1' + \beta\, u_2' + \beta^4 u_3' + \beta^2 u_4',\\
z_4' &= u_0' + \beta^4 u_1' + \beta^3 u_2' + \beta^2 u_3' + \beta\, u_4'.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Wurzelform ergibt nun

$$\alpha = \frac{1}{5}[y_1 + \sqrt[5]{z_1'} + \sqrt[5]{z_2'} + \sqrt[5]{z_3'} + \sqrt[5]{z_4'}].$$

An die Stelle von $\beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ sind die früher gefundenen Wurzeln der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ zu setzen; die übrigen Werthe der Wurzelgruppe $\alpha, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^9, \alpha^3$ sind

$$\alpha^4 = \frac{1}{5}[y_1 + \beta^4\sqrt[5]{z_1'} + \beta^3\sqrt[5]{z_2'} + \beta^2\sqrt[5]{z_3'} + \beta\sqrt[5]{z_4'}],$$

$$\alpha^5 = \frac{1}{5}[y_1 + \beta^3\sqrt[5]{z_1'} + \beta\sqrt[5]{z_2'} + \beta^4\sqrt[5]{z_3'} + \beta^2\sqrt[5]{z_4'}],$$

$$\alpha^9 = \frac{1}{5}[y_1 + \beta^2\sqrt[5]{z_1'} + \beta^4\sqrt[5]{z_2'} + \beta\sqrt[5]{z_3'} + \beta^3\sqrt[5]{z_4'}],$$

$$\alpha^3 = \frac{1}{5}[y_1 + \beta\sqrt[5]{z_1'} + \beta^2\sqrt[5]{z_2'} + \beta^3\sqrt[5]{z_3'} + \beta^4\sqrt[5]{z_4'}].$$

Um die andere Gruppe $\alpha^2, \alpha^8, \alpha^{10}, \alpha^7, \alpha^6$, welche in die Function y_2 eintreten, zu erhalten, hat man y_2 mit y_1 zu vertauschen, also nur das Vorzeichen von $\sqrt{-11}$ in den Gleichungen für u' umzukehren.

Statt von der Gleichung $\beta^2 - 1 = 0$ auszugehen, kann man auch zuerst mit $\beta^5 - 1 = 0$ beginnen. Dann ist

$$y = y_1 + \beta y_2 + \beta^2 y_3 + \beta^3 y_4 + \beta^4 y_5,$$

wobei

$$y_1 = \alpha + \alpha^{10} = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad y_2 = \alpha^2 + \alpha^9 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2},$$

$$y_3 = \alpha^4 + \alpha^7 = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}, \quad y_4 = \alpha^8 + \alpha^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3},$$

$$y_5 = \alpha^5 + \alpha^6 = \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5}.$$

Man setze nun

$$z = y^5 = u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2 + \beta^3 u_3 + \beta^4 u_4$$

und suche die Werthe von u_0, u_1 u. s. w. in Functionen von α. Setzt man der Kürze wegen

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = s,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1640 + 1836s, \\
u_1 &= 1700 + 1830s, \\
u_2 &= 2050 + 1795s, \\
u_3 &= 1800 + 1820s, \\
u_4 &= 1900 + 1810s,
\end{aligned}$$

und wegen $s = -1$,

$$u_0 = -196, \quad u_1 = -130, \quad u_2 = 255, \quad u_3 = -20,$$
$$u_4 = -20, \quad u_5 = 90.$$

Demgemäss ist

$$z = -196 - 130\beta + 255\beta^2 - 20\beta^3 + 90\beta^4.$$

Setzt man für β der Reihe nach die andern Wurzeln von $\beta^5 - 1 = 0$, so erhält man die vier Werthe von z, nämlich

$$\begin{aligned}
z_1 &= -196 - 130\beta + 255\beta^2 - 20\beta^3 + 90\beta^4, \\
z_2 &= -196 - 130\beta^2 + 255\beta^4 - 20\beta + 90\beta^3, \\
z_3 &= -196 - 130\beta^3 + 255\beta - 20\beta^4 + 90\beta^2, \\
z_4 &= -196 - 130\beta^4 + 255\beta^3 - 20\beta^2 + 90\beta,
\end{aligned}$$

und die allgemeine Wurzelform gibt

$$y_1 = \frac{1}{5}[-1 + \sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2} + \sqrt[5]{z_3} + \sqrt[5]{z_4}].$$

Es ist nun

$$y_1 = \alpha + \frac{1}{\alpha},$$

$$y_2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = y_1^2 - 2,$$

$$y_4 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = y_1^3 - 3y_1,$$

$$y_3 = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = y_1^4 - 4y_1^2 + 2,$$

$$y_5 = \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5} = y_1^5 - 5y_1^3 + 5y_1.$$

Auch ist y_1 die Wurzel der Gleichung von Vandermonde*)

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0,$$

welche dadurch entsteht, dass man in der Gleichung vom zehnten Grade

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

$x + x^{-1} = y$ setzt. Vandermonde betrachtet statt dieser Gleichung genau genommen die Gleichung der negativen Werthe von y_1 nämlich

$$y^5 - y^4 - 4y^3 + 3y^2 + 3y - 1 = 0,$$

und findet

$$y = \frac{1}{5}(1 + \varDelta' + \varDelta'' + \varDelta''' + \varDelta''''),$$

wo

$$\varDelta' \text{ u. } \varDelta'' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} \mp 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} \pm 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)},$$

$$\varDelta''' \text{ u. } \varDelta'''' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} \mp 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} \pm 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)}.$$

4. Beispiel.

$$x^{13} - 1 = 0.$$

Die kleinste primitive Wurzel der Zahl 13 ist 2, und

$$\overset{t=11}{\underset{t=0}{2^t}} \equiv 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 3,\ 6,\ 12,\ 11,\ 9,\ 5,\ 10,\ 7 \pmod{13}.$$

Ist α eine der complexen Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so sind die andern

$$\alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8,\ \alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^{11},\ \alpha^9,\ \alpha^5,\ \alpha^{10},\ \alpha^7.$$

---

*) Vandermonde, La résolution des équations. p. 416. Mém. Par. de l'année 1771.

Man setze

$$y = \alpha + \beta\alpha^2 + \beta^2\alpha^4 + \beta^3\alpha^8 + \beta^4\alpha^3 + \beta^5\alpha^6 + \beta^6\alpha^{12} + \beta^7\alpha^{11} + \beta^8\alpha^9 + \beta^9\alpha^5 + \beta^{10}\alpha^{10} + \beta^{11}\alpha^7\,,$$

wo β eine Wurzel der Gleichung $\beta^2 - 1 = 0$ sein möge. Dadurch reducirt sich die Function y auf

$$y = y_1 + \beta y_2\,,$$

worin

$$y_1 = \alpha + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^{12} + \alpha^9 + \alpha^{10}\,,$$
$$y_2 = \alpha^2 + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^{11} + \alpha^5 + \alpha^7\,.$$

Hieraus erhält man

$$z = y^2 = u_0 + \beta u_1 = (y_1{}^2 + y_2{}^2) + 2y_1y_2\beta\,.$$

Es ist dabei

$$y_1y_2 = 3(y_1 + y_2) = -3\,,$$

also

$$y_1 + y_2 = -1\,,$$

und

$$\text{I.}\quad y^2 + y - 3 = 0\,.$$

Man betrachte nun weiter die sechs Glieder, welche in die Function y_1 eintreten, als die sechs Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade und setze von Neuem

$$y' = \alpha + \beta\alpha^4 + \beta^2\alpha^3 + \beta^3\alpha^{12} + \beta^4\alpha^9 + \beta^5\alpha^{10}\,,$$

wo β eine Wurzel von $\beta^2 - 1 = 0$ bezeichnen möge. Dann wird

$$y' = v_1 + \beta v_2\,,$$

worin

$$v_1 = \alpha + \alpha^3 + \alpha^9\,,$$
$$v_2 = \alpha^4 + \alpha^{12} + \alpha^{10}$$

zu setzen ist. Man hat demnach wie vorhin

$$z' = y^{2\prime} = u_0' + \beta u_1' = (v_1{}^2 + v_2{}^2) + 2\beta v_1v_2\,.$$

Nun ist

$$v_1 + v_2 = y_1\,,$$
$$v_1v_2 = 3 + y_2 = 2 - y_1\,,$$

also v_1 und v_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\text{II.}\quad v^2 - yv + 2 - y = 0\,.$$

Um die Gleichung in x zu erhalten, betrachte man die drei Glieder, woraus v_1 besteht, als die drei Wurzeln einer kubischen Gleichung in x und setze

$$y'' = \alpha + \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^9,$$

wo β eine Wurzel der Gleichung $\beta^3 - 1 = 0$ bezeichnet.

Dann wird

$$z'' = y''^3 = u_0'' + \beta u_1'' + \beta^2 u_2'',$$

und

$$u_0'' = 6 + v_1, \quad u_1'' = 3(v_1^2 - 2v_2),$$
$$u_2'' = 3(v_2^2 - 2v_1).$$

Bezeichnet man die complexen Wurzeln der Gleichung $\beta^3 - 1 = 0$ mit β_1 und β_2, so ist

$$z_1'' = 6 + v_1 + 3\beta_1(v_1^2 - 2v_2) + 3\beta_1^2(v_2^2 - 2v_1),$$
$$z_2'' = 6 + v_1 + 3\beta_2(v_1^2 - 2v_2) + 3\beta_2^2(v_2^2 - 2v_1),$$

und gemäss der allgemeinen Wurzelform

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(v_1 + \sqrt[3]{z_1''} + \sqrt[3]{z_2''}\right).$$

Durch Entwickelung findet man

$$z_1'' + z_2'' = 15 + 3y + 2v,$$
$$z_1'' - z_2'' = 3\sqrt{-3}(2v - y)(y + 2).$$

Aus der Wurzelform folgt

$$(3x - v)^3 = z_1'' + z_2'' + 3\sqrt[3]{z_1'' z_2''}\,(3x - v)$$
$$= 15 + 3y + 2v + 3(v^2 - 3y + 3v)(3x - v),$$

und endlich die nach Potenzen von x geordnete Gleichung

$$\text{III.} \quad x^3 - vx^2 + (y - v)x - 1 = 0.$$

§ 63. Goniometrische Auflösung der binomischen Gleichungen.

Wir entwickeln zunächst die allgemeine Auflösung der Gleichung

$$x^n - 1 = 0.$$

Ist n gerade, so hat die gegebene Gleichung nur die beiden reellen Wurzeln $+1$ und -1; ist n ungerade, so hat sie nur die eine reelle Wurzel $+1$.

Wir substituiren für die allgemeine Wurzel die complexe Form

$$x = r(\cos\vartheta + \sin\vartheta\sqrt{-1}).$$

Dann ist nach der Formel von Moivre

$$x^n = r^n(\cos n\vartheta + \sin n\vartheta\sqrt{-1}) = 1.$$

Der Werth von r bestimmt sich dadurch, dass für $\vartheta = 0$ zugleich $r^n = 1$ werden muss. Da die Gleichung zwei unbestimmte Grössen enthält, so setze man $r = 1$, woraus resultirt

$$\cos n\vartheta + \sin n\vartheta \sqrt{-1} = 1 .$$

In dieser Gleichung ist der reelle Theil und der imaginäre gleich Null zu setzen, woraus folgt

$$\cos n\vartheta - 1 = 0, \quad \sin n\vartheta = 0 .$$

Es muss also $n\vartheta = \pm 2k\pi$ sein, wenn k eine beliebige positive und ganze Zahl bezeichnet. Setzen wir die Werthe in x ein, so erhalten wir die allgemeine Form der Wurzel

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1} .$$

Dieser Ausdruck hat weder mehr noch weniger verschiedene Werthe als n. Denn gibt man k einen der Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder $\frac{1}{2}n$, jenachdem n ungerade oder gerade ist, so findet man im ersteren Falle den reellen Werth $+1$, wenn $k = 0$ ist, und ausserdem $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare complexer Werthe; mithin im Ganzen n Werthe von x. Im zweiten Falle hat x den reellen Werth $+1$ wenn $k = 0$, den reellen Werth -1 wenn $k = \frac{1}{2}n$ ist, und ausserdem $\frac{1}{2}n - 1$ Paare complexer Werthe; mithin im Ganzen auch n Werthe.

Sämmtliche n Wurzeln sind von einander verschieden, weil die Winkel

$$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{(n-2)\pi}{n}$$

alle von einander verschieden und kleiner als π sind.

Die Formel liefert aber auch nicht mehr Werthe als n. Denn wenn k negativ genommen wird, werden die beiden Werthe in

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

nicht verändert, sondern nur vertauscht. Ebenso wenn $k \geqq n$ genommen wird, so ist dies gleichbedeutend damit, dass man ein Vielfaches von 2π zu einem der Winkel

$$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}\pi \text{ oder } \frac{n-2}{n}\pi$$

addirt, wodurch weder der Werth des Cosinus noch der des Sinus verändert wird. Endlich, wenn man die Werthe von x, welche denjenigen von $k = m$ und $n - m$ entsprechen, betrachtet, so sind dieselben immer identisch. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x &= \cos\frac{2(n-m)\pi}{n} \pm \sin\frac{2(n-m)\pi}{n}\sqrt{-1} \\ &= \cos\frac{-2m\pi}{n} \pm \sin\frac{-2m\pi}{n}\sqrt{-1} \\ &= \cos\frac{2m\pi}{n} \mp \sin\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Man erhält also keine neuen Werthe für

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \mp \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wenn man k grösser als $\frac{1}{2}n$ nimmt.

Hieraus folgt denn, dass für irgend einen positiven ganzen Werth von k, ausgenommen Null oder $\frac{1}{2}n$, wenn n gerade ist, die zwei correspondirenden, gleichweit von 0 und n abstehenden Werthe conjugirt complexe sind; ausserdem ist der eine der reciproke Werth des andern, weil man hat

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right) = 1.$$

Ferner ist nach Moivre

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right)^{\pm k}.$$

Bezeichnen wir die erste complexe Wurzel

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$$

mit α, so ergibt sich daraus die Richtigkeit der bereits in § 60 gemachten Bemerkung, dass sich alle complexen Wurzeln ausdrücken lassen durch die aufeinander folgenden Potenzen der ersten complexen Wurzel.

$$\begin{array}{llllll} x_2, & x_3, & x_4, & \ldots & x_{\frac{n+1}{2}} \text{ oder } & x_{\frac{n}{2}}, \\ = \alpha, & \alpha^2, & \alpha^3, & \ldots & \alpha^{\frac{n-1}{2}} & \alpha^{\frac{n-2}{2}}, \\ x_{\frac{n+3}{2}} \text{ oder } & x_{\frac{n+2}{2}}, & \ldots & x_{n-2}, & x_{n-1}, & x_n, \\ = \frac{1}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}, & \frac{1}{\alpha^{\frac{n-2}{2}}}, & \ldots & \frac{1}{\alpha^3}, & \frac{1}{\alpha^2}, & \frac{1}{\alpha}. \end{array}$$

Da $\alpha^n = 1$ ist, so kann die letzte Reihe ersetzt werden durch

$$x_{\frac{n+3}{2}} \quad \text{oder} \quad x_{\frac{n+2}{2}}, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n,$$

$$= \alpha^{\frac{n+1}{2}}, \qquad \alpha^{\frac{n+2}{2}}, \ldots \alpha^{n-3}, \alpha^{n-2}, \alpha^{n-1}.$$

Weil ferner $\alpha^{\frac{n}{2}} = -1$, wenn n gerade ist, so sind alle Wurzeln der gegebenen Gleichung enthalten in der Reihe

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-2}, \alpha^{n-1}.$$

Wir betrachten jetzt den Fall

$$x^n + 1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind sämmtlich complex oder imaginär, ausgenommen wenn n ungerade ist, wie dies bereits in § 60 bewiesen wurde. Zur Auflösung derselben Gleichung substituiren wir

$$x = r(\cos\vartheta + \sin\vartheta\sqrt{-1}),$$

woraus folgt

$$x^n = r^n(\cos n\vartheta + \sin n\vartheta\sqrt{-1}) = -1.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge durch die Annahme $r = 1$ und $n\vartheta = \pm(2k+1)\pi$. Dies gibt

$$x = \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm \sin\frac{2k+1}{n}\sqrt{-1}.$$

Dieser Ausdruck liefert nun sämmtliche Werthe von x, aber keine mehr. Gibt man nämlich k irgend einen der Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder $\frac{1}{2}n - 1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist, so finden wir im ersteren Falle $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare complexer Werthe entsprechend den Werthen von k von 0 bis $\frac{1}{2}(n-3)$ und den reellen Werth -1 für $k = \frac{1}{2}(n-1)$, also n Werthe im Ganzen. Im zweiten Falle erhalten wir $\frac{1}{2}n$ Paare complexer Wurzeln, also auch im Ganzen n Werthe. Alle die complexen Werthe sind untereinander verschieden, weil die eintretenden Winkel

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n} \ldots \frac{(n-2)\pi}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{(n-1)\pi}{n}$$

untereinander verschieden und kleiner als π sind. Auch kann die allgemeine Wurzelformel keine neuen Werthe liefern. Denn nehmen wir irgend welche negative ungerade Vielfache von π, so bleibt der Ausdruck für x derselbe wie für die gleichen positiven Vielfachen, und nehmen wir $k \overline{>} n$, so ist dasselbe so viel, als wie ein Vielfaches von 2π zum Winkel addiren, wodurch sowol der Cosinus als der Sinus unverändert bleibt.

Setzt man k gleich einem Werthe, welcher von 0 und $n-1$ gleichweit absteht, z. B. m und $(n-1)-m$, so erhält man dieselbe Formel wieder. Es ist nämlich

$$\cos\frac{2n-m-1}{n}\pi \pm \sin\frac{2n-m-1}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} \mp \sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Bezeichnen wir die erste complexe Wurzel mit α, also

$$\cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1} = \alpha,$$

so ist nach der Moivre'schen Formel

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\sqrt{-1} = \alpha^{\pm(k+1)};$$

mithin lassen sich alle complexen Wurzeln darstellen durch aufeinander folgende ungerade Potenzen von α, nämlich

$$\alpha,\quad \alpha^3,\quad \alpha^5,\ \cdots\ \alpha^{n-2}\ \text{ oder }\ \alpha^{n-1}$$

$$\frac{1}{\alpha^{n-2}}\ \text{ oder }\ \frac{1}{\alpha^{n-1}},\ \cdots\ \frac{1}{\alpha^5},\quad \frac{1}{\alpha^3},\quad \frac{1}{\alpha}.$$

Weil nun $\alpha^n = -1$ und $\alpha^{2n} = +1$ ist, so kann man statt der zweiten Reihe setzen

$$\alpha^{n+2}\ \text{ oder }\ \alpha^{n+1},\ \ldots\ \alpha^{2n-5},\ \alpha^{2n-3},\ \alpha^{2n-1}.$$

Sämmtliche complexe Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$ sind also, wenn n ungerade ist,

$$\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \ldots\ \alpha^{n-2},\ \alpha^{n+2},\ \ldots\ \alpha^{2n-3},\ \alpha^{2n-1},$$

und wenn n gerade ist

$$\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \ldots\ \alpha^{n-1},\ \alpha^{n+1},\ \ldots\ \alpha^{2n-3},\ \alpha^{2n-1}.$$

§ 64. Zerlegung der binomischen Gleichungen in trinomische Factoren. Theorem von Cotes.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^n - 1 = 0.$$

Man kann je zwei der conjugirten complexen Wurzeln verbinden, wodurch man bei geradem n ausser den beiden binomischen Factoren $x-1$ und $x+1$ noch $\frac{1}{2}(n-2)$ quadratische oder trinomische Factoren, bei ungeradem n ausser dem einen binomischen Factor $x-1$ noch $\frac{1}{2}(n-1)$ quadratische Factoren erhält.

Sind also $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ die sämmtlichen Wurzeln von

$$x^n - 1 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0,$$

so erhält man durch Multiplication je zweier binomischen Factoren, welche conjugirte complexe Wurzeln enthalten, unter Berücksichtigung, dass

$$\left[x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\left[x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$
$$= x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}x + 1$$

ist, für ein gerades n:

$$x^n - 1 = (x^2-1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}x + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}x + 1\right) = 0,$$

und für ein ungerades n:

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}x + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x + 1\right) = 0.$$

Diese Formel ist unter dem Namen der Cotesischen Formel*) bekannt.

Wenn die Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

gegeben ist, so kann man dieselbe in ähnlicher Weise in trinomische Factoren zerlegen. Verbindet man wiederum je zwei conjugirte complexe Wurzeln in dem Producte

$$\left[x - \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right] \times$$
$$\left[x - \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right]$$

*) Cotes, Harmonia mensurarum. Cambridge 1722. pg. 114.

zu dem trinomischen Factor

$$x^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}x + 1,$$

so erhält man für ein gerades n:

$$x^n + 1 = \left(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{n}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{n}x + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x + 1\right) = 0,$$

und für ein ungerades n:

$$x^n + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{n}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{n}x + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}x + 1\right).$$

Cotes lehrte diese trinomischen Factoren zuerst geometrisch darstellen, wie in § 66 gezeigt werden wird.

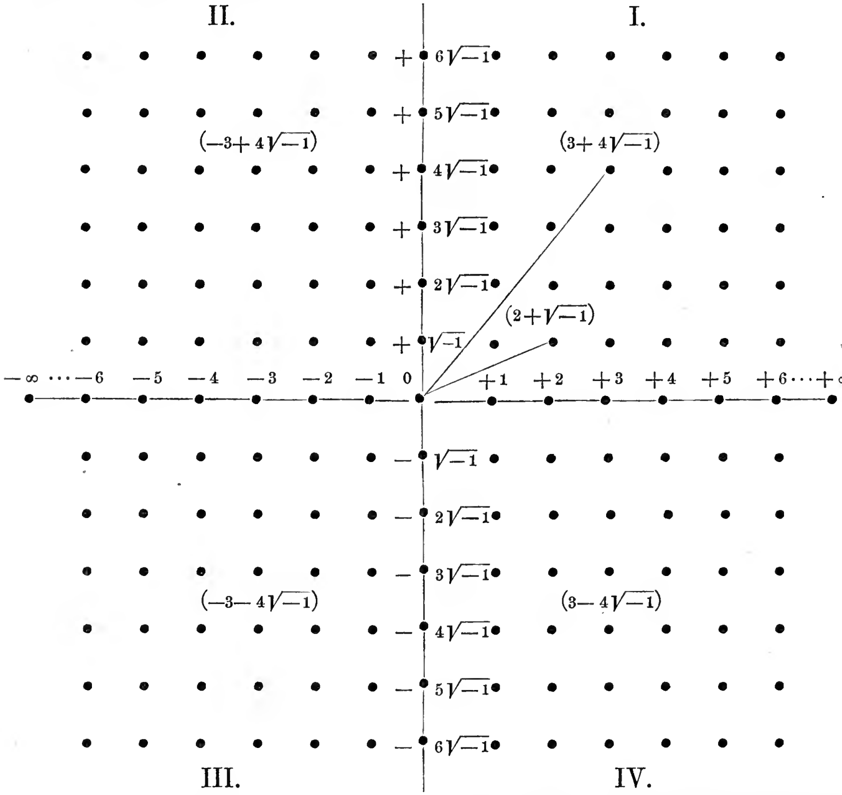
§ 65. Geometrische Deutung und Construction der Wurzeln der binomischen Gleichungen.

Indem wir für eine complexe Grösse $a + b\sqrt{-1}$ den Ausdruck $r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ setzen und mit Anwendung des Moivre'schen Satzes die Relation

$$(a + b\sqrt{-1})^n = (r\cos\varphi + r\sin\varphi\sqrt{-1})^n$$
$$= r^n\cos n\varphi + r^n\sin n\varphi\sqrt{-1}$$

gewinnen, so liegt darin deutlich ausgesprochen, dass durch die imaginäre Zahlengrösse $b\sqrt{-1}$ eine Erweiterung des reellen Zahlengebietes $-\infty$, 0, $+\infty$ postulirt wird und zwar seitwärts. Das Zahlengebiet dehnt sich nicht bloss in einer unendlichen Geraden aus, in deren Mitte die Null liegt, sondern in einer unendlichen Ebene, von welcher die Null das Centrum einnimmt. Um also jeder reellen und complexen Zahl die ihr zukommende Position zu ertheilen, muss ihr Abstand von zwei rechtwinkligen Coordinatenaxen gegeben sein, wobei die Einheit 1 das Mass für die relative Lage abgibt. Bezeichnen nun a und b die beiden Coordinaten der Position von $a + b\sqrt{-1}$, so werden dieselben durch die Substitution $r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ in Polarcoordinaten verwandelt. Dabei bezeichnet r den Radiusvector der Position oder den Abstand vom Nullpuncte, auch wohl die Richtungssumme der Zahl $a + b\sqrt{-1}$ genannt, der Winkel φ den Abstand der Richtung von der reellen

Zahlenaxe. Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so fällt die Richtung mit der Ordinatenaxe zusammen, und es verschwindet der reelle Theil. Die Ordinatenaxe ist also die Linie der imaginären Zahlen von der Form $b\sqrt{-1}$, während von der Abscissenaxe als der Linie der reellen Zahlen ausgegangen wurde. Dieser Betrachtung gemäss nimmt das Zahlengebiet folgende Form an:



Die Einheiten der vier Hauptrichtungen des Zahlengebietes und ihre Beziehungen sind folgende:

	Gauss	Mourey	Schlömilch	Riecke
$+1$	$+1$	1_0	1_0	$\left\lvert 0 \right\rvert 1$
$+\sqrt{-1}$	$+i$	1_1	$1_{\frac{1}{2}\pi}$	$\left\lvert \frac{\pi}{2} \right\rvert 1$
-1	-1	1_2	1_π	$\left\lvert \pi \right\rvert 1$
$-\sqrt{-1}$	$-i$	1_3	$1_{\frac{3}{2}\pi}$	$\left\lvert \frac{3\pi}{2} \right\rvert 1$.

Die complexen, d. h. die eine reelle und imaginäre Grösse umfassenden Zahlen, haben ihre Benennung von Cauchy erhalten, während Gauss sie „laterale“, Mourey „Richtungszahlen“ (nombres directives) nennt. Man ersieht leicht aus dem obigen Schema, dass die lateralen Zahlen die vier Quadranten I. II. III. IV. in indirecter Drehungsrichtung erfüllen. Aus den Moivre'schen Formeln

$$(r \cos \varphi + r \sin \varphi \sqrt{-1})^n = r^n \cos n\varphi + r^n \sin n\varphi \sqrt{-1}$$

und

$$(r \cos \varphi + r \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi}{n} + r^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\varphi}{n} \sqrt{-1}$$

ergibt sich weiter, dass Potenzirung und Radicirung der Zahlen gleichbedeutend ist mit Multiplication und Division des Drehungswinkels ihrer Richtung. Für die Richtungssumme, also den Radius vector, ist die Potenzirung oder Radicirung eine unmittelbare, indem r^n aus r hervorgeht. Z. B. sei

$$a + b\sqrt{-1} = +2 + \sqrt{-1}, \quad r = \sqrt{5}.$$

Es ist

$$(2 + \sqrt{-1})^2 = 3 + 4\sqrt{-1}, \quad r^2 = 5,$$

und die neue complexe Zahl liegt in einer Richtung, welche den doppelten Winkelabstand von der Axe der reellen Zahlen hat im Vergleich zur gegebenen complexen Zahl $2 + \sqrt{-1}$. Das Quadrat wird algebraisch durch Potenzirung gebildet oder goniometrisch folgendermassen.

Es sei $\qquad 2 = r \cos \varphi, \quad 1 = r \sin \varphi,$

so ist $\qquad r^2 (\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2) = r^2 = 5.$

Der reelle Theil des Quadrates ist nun

$$r^2 \cos 2\varphi = r^2 (2 \cos \varphi^2 - 1) = 8 - 5 = 3,$$

der imaginäre Theil

$$r^2 \sin 2\varphi \sqrt{-1} = 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1},$$

mithin das Quadrat $+3 + 4\sqrt{-1}$.

Da die Richtungssummen sich bei der Potenzirung in geometrischem Verhältnisse ändern, während die Winkel dies in arithmetischem Verhältnisse thun, so liegen sämmtliche Potenzen einer complexen Zahl auf einer durch die Grundzahl und die $+1$ gehenden logarithmischen Spirale. Wenn aber aus der Potenzirung der complexen Grösse zwei der Grössen

$$+1,\ +\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1}$$

hervorgehen können, was immer der Fall ist, wenn die Richtungssumme $\sqrt{a^2+b^2}$, auch Modul genannt, gleich 1 ist, so geht die logarithmische Spirale in einen Kreis über, der durch die vier Punkte

$$+1,\ +\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1}$$

geht. Hieraus lässt sich folgende geometrische Construction der Wurzeln der binomischen Gleichung

$$x^n - \sqrt[m]{1} = 0$$

herleiten.

1. Beispiel. $x^5 - 1 = 0,\ x = \sqrt[5]{+1},\ n = 5,\ m = 1$.

Man construire um den Mittelpunct der Zahlenebene einen Kreis mit dem Radius 1.

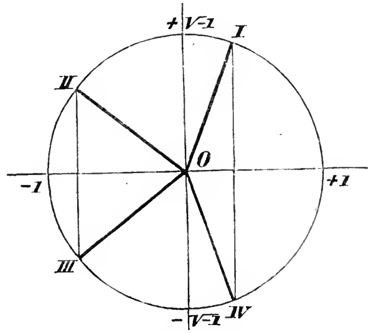


Fig. 1.

Den Kreisumfang theile man in fünf gleiche Theile von $(+1)$ ab. Dann sind die Positionswerthe der Wurzeln:

$$\text{I.}\quad \sqrt[5]{1} = \alpha^1 = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right) = x_2,$$

$$\text{II.}\quad \alpha^2 = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}\right) = x_3,$$

$$\text{III.}\quad \alpha^3 = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}\right) = x_4,$$

$$\text{IV.}\quad \alpha^4 = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right) = x_5,$$

$$\text{V.}\quad \alpha^5 = 1 = x_1.$$

Ebenso kann man beginnen mit der complexen Wurzel α^2 und also um den Winkel $\frac{4\pi}{5}$ fortschreiten, wie folgt:

$$(\alpha^2)^1 = x_3,\ (\alpha^2)^2 = \alpha^4 = x_5,\ (\alpha^2)^3 = \alpha^6 = \alpha^1 = x_2,$$
$$(\alpha^2)^4 = \alpha^8 = \alpha^3 = x_4,\ (\alpha^2)^5 = (\alpha^5)^2 = x_1.$$

2. Beispiel. $x^3 + 1 = 0, \quad x = \sqrt[3]{-1}, \quad n = 3, \quad m = 2.$
Man construire einen Kreis mit dem Radius 1 und theile ihn von (+ 1) aus in sechs gleiche Theile, d. i. den halben Kreis in drei Theile.

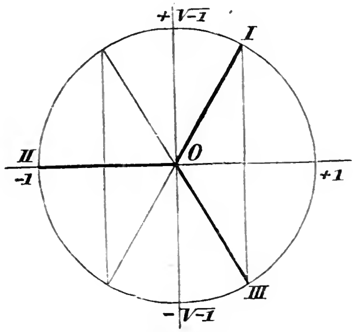


Fig. 2.

Die Positionswerthe der Wurzeln sind

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \sqrt[3]{-1} = \alpha^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} & = x_1, \\ \text{II.} & \alpha^3 = -1 & = x_2, \\ \text{III.} & \alpha^5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} & = x_3. \end{array}$$

Ebenso kann man beginnen mit der complexen Wurzel α^5 und in ungeraden Vielfachen des Winkels $\frac{5}{3}\pi$ fortschreiten, wie folgt:

$$(\alpha^5)^1 = x_3, \quad (\alpha^5)^3 = (\alpha^3)^5 = x_2, \quad (\alpha^5)^5 = x_1.$$

3. Beispiel. $x^4 - \sqrt{-1} = 0, \quad x = \sqrt[4]{\sqrt{-1}}, \quad n = 4, \quad m = 4.$
Man construire einen Kreis mit dem Radius 1 und theile den vierten Theil des Kreises in vier gleiche Theile.

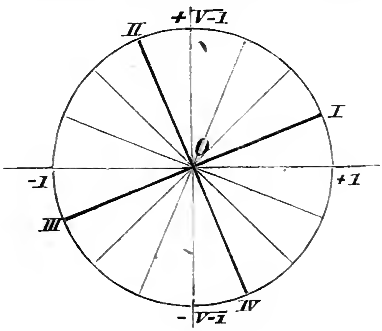


Fig. 3.

Die Positionswerthe der Wurzeln sind

I. $$\sqrt[8]{-1} = \alpha^1 = \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} + \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{-1} = x_1,$$

II. $$\alpha^5 = -\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} + \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{-1} = x_2,$$

III. $$\alpha^9 = -\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} - \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{-1} = x_3,$$

IV. $$\alpha^{13} = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} - \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{-1} = x_4.$$

Man kann auch beginnen mit der complexen Wurzel $x_2 = \alpha^5$, wie folgt:

$$(\alpha^5)^1 = x_2, \quad (\alpha^5)^5 = \alpha^9 = x_3, \quad (\alpha^5)^9 = \alpha^{13} = x_4, \quad (\alpha^5)^{13} = \alpha^1 = x_1.$$

4. Beispiel.

$$x^4 + \sqrt{-1} = 0.$$

Man construire einen Kreis mit dem Radius 1 und theile drei Viertel des Kreises in vier gleiche Theile.

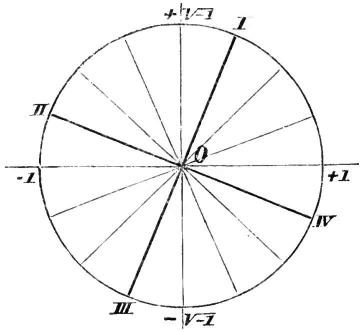


Fig. 4.

Die Positionen der vier Wurzeln sind die Punkte I. II. III. IV.

§ 66. Geometrische Interpretation der Cotesischen Formeln.*)

Substituirt man in den vier Cotesischen Formeln $\frac{x}{a}$ für x, so erhält man, nachdem mit a^n multiplicirt ist, für ein gerades n

*) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis. § 55.

$$x^n - a^n$$
$$= (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right); \qquad (1)$$

für ein ungerades n

$$x^n - a^n$$
$$= (x - a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right); \qquad (2)$$

für ein gerades n

$$x^n + a^n$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right); \qquad (3)$$

und für ein ungerades n

$$x^n + a^n$$
$$= (x + a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right). \qquad (4)$$

Diese vier Sätze lassen sich auch geometrisch interpretiren und in dieser Gestalt wurden sie zuerst von Cotes aufgestellt. Theilt man nämlich die Peripherie eines Kreises, von einem Puncte M_0 (Fig. 5) derselben ausgehend, in $2n$ gleiche Theile und zieht von einem beliebigen Puncte O des Durchmessers MC Gerade nach allen Theilpuncten, so ist das Product aller Strahlen von geradem Index: $OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \ldots = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, wenn der Punct O innerhalb des Kreises und $= \overline{CO}^n - \overline{CM}^n$, wenn er ausserhalb desselben liegt; das Product aller Strahlen von ungeradem Index $OM_1 \,.\, OM_3 \,.\, OM_5 \ldots = \overline{CO}^n + \overline{CM}^n$ in jedem Falle.

Es möge der Fall, wo der Punct O ausserhalb des Kreises gelegen ist, zuerst betrachtet werden, weil er sich unmittelbar an die Formen der Gleichungen (1) (2) (3) (4) anschliesst.

Für $CO = x$, $CM = a$ ist in Fig. 5

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{M_1P}^2 = (x - a\cos PCM_1)^2 + (a\sin PCM_1)^2$$
$$= x^2 - 2axPCM_1 + a^2.$$

Da aber der Kreis in $2n$ Theile getheilt ist, so folgt daraus $PCM_1 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{1}{n}\pi$ und

$$\overline{OM_1}^2 = x^2 - 2ax\frac{1}{n}\pi + a^2.$$

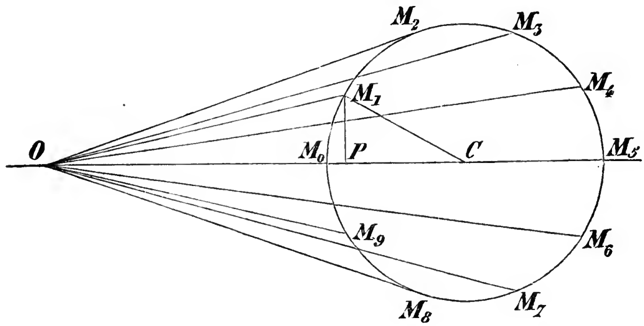


Fig. 5.

Ebenso findet man die Werthe von $\overline{OM_2}^2$, $\overline{OM_3}^2$ u. s. f., wenn man statt des Winkels PCM_1 nach der Reihe PCM_2, PCM_3 u. s. f. also $\frac{2}{n}\pi$, $\frac{3}{n}\pi$, u. s. w. an die Stelle von $\frac{1}{n}\pi$ setzt. Es ist überhaupt

$$\overline{OM_k}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2.$$

Da der Kreis in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt ist, so entspricht jedem nach einem Puncte in der oberen Hälfte gehenden Strahle ein anderer ihm gleicher in der unteren Hälfte. Es ist deshalb allgemein $OM_k = OM_{2n-k}$ und

$$\overline{OM_1}^2 = OM_1 \,.\, OM_9, \quad \overline{OM_2}^2 = OM_2 \,.\, OM_8, \text{ u. s. f.}$$

Mithin wird allgemein

$$OM_k \,.\, OM_{2n-k} = x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2.$$

Da $OM_0 = OM_{2n}$ ist, so erhält man für $k=0$, $OM_0 = x - a$ und für $k = n$, $OM_n = x + a$.

1. Setzen wir $k = 0, 2, 4, \ldots n$, wobei n gerade angenommen wird, so erhalten wir durch Multiplication aller Gleichungen

$$OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \,.\, OM_6 \ldots OM_{n-2} \,.\, OM_n$$
$$= (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\cdots\left(x^2 - 2ax\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)(x+a),$$

also nach Formel (1)

$$OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \ldots OM_n = x^n - a^n.$$

Wenn n ungerade ist, so setze man

$$k = 0, 2, 4, \ldots (n-3), (n-1)$$

und man erhält gemäss Formel (2)

$$OM_0 \,.\, OM_2 \,.\, OM_4 \ldots OM_{n-1} = x^n - a^n.$$

Demnach ist jederzeit das Product der Strahlen von geradem Index gleich $\overline{CO}^n - \overline{CM}^n$.

2. Für ein gerades n setzen wir in (1) $k = 1, 3, 5, \ldots n-1$. Durch Multiplication aller entstehenden Gleichungen erhalten wir alsdann

$$OM_1 \,.\, OM_3 \,.\, OM_5 \ldots OM_{n-3} \,.\, OM_{n-1}$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2 \cdots\right.$$
$$\cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right) = x^n + a^n.$$

Für ein ungerades n nehme man $k = 1, 3, 5 \ldots n$ und beachte, dass $OM_n = x + a$ ist. Dann resultirt

$$OM_1 \,.\, OM_3 \,.\, OM_5 \ldots OM_{n-2} \,.\, OM_n$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)(x+a) = x^n + a^n.$$

Mithin ist immer das Product der Strahlen von ungeradem Index gleich $\overline{CO}^n + \overline{CM}^n$.

Wenn der Punct O im Innern des Kreises genommen wird, so ändert sich nur die Betrachtung in 1. Statt dass oben $OM_0 = x - a$ war, wird es jetzt $a - x$. Die Functionen $x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2$ ändern ihre Werthe nicht und es besteht daher der ganze Unterschied darin, dass in den Producten das erste Glied $a - x$ ist. Dies reducirt sich aber leicht auf den obigen Fall, wenn man $-(x-a)$ für $a - x$ setzt. Der Werth des Products ist dann entsprechend $-(x^n - a^n)$, d. h. $a^n - x^n = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, wie im Anfange behauptet wurde.

III. Die irreductibeln Gleichungen.

§ 67. Die algebraische Auflösung der irreductibeln Gleichungen.

Es existirt eine Klasse von algebraischen Gleichungen von der Beschaffenheit, dass, wenn ihre reellen Wurzeln in imaginärer Form erscheinen, für ein ungerades n sämmtliche Wurzeln reell sind, und für ein gerades n entweder sämmtliche Wurzeln oder nur zwei reell sind. Solche Gleichungen werden irreductibel genannt und ihre allgemeinste Form ist

$$x^n - \frac{n}{1}\binom{n-2}{0}\frac{p}{n}x^{n-2} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}\frac{p^2}{n^2}x^{n-4} - \cdots - P = 0.$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{1}{4}\frac{n}{p}}\cdot x = \cos z, \quad P = 2\cos nz\sqrt{\left(\frac{p}{n}\right)^n},$$

so erhält man eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen dem Cosinus eines Winkels und seines n fachen ausdrückt, nämlich

$$2^{n-1}\cos z^n - 2^{n-3}\frac{n}{1}\binom{n-2}{0}\cos z^{n-2} + 2^{n-5}\frac{n}{2}\binom{n-3}{1}\cos z^{n-4} - \cdots$$
$$= \cos nz.$$

Die Wurzel dieser und der vorigen Gleichung ist offenbar

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{p}}\,x = \cos z = \frac{1}{2}\left(\cos nz + \sin nz\sqrt{-2}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\cos nz - \sin nz\sqrt{-z}\right)^{\frac{1}{n}},$$

wobei p immer als positiv betrachtet werden soll.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Ist n ungerade, so ist

$$x = \sqrt[n]{1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\sqrt{P^2 - 4\left(\frac{p}{n}\right)^n}}$$
$$+ \sqrt[n]{1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\sqrt{P^2 - 4\left(\frac{p}{n}\right)^n}}.$$

Ist n gerade, so ist das letzte Glied der goniometrischen Reihe ein Theil des Absolutgliedes P und zwar

$$\pm 2\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

je nachdem n von der Form $4m$ oder $4m+2$ ist.

Demgemäss ist für ein gerades n:

$$x = \sqrt[n]{1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}P \pm \left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{P^2 \pm 4P\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}}$$

$$+ \sqrt[n]{1}^{n-1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}P \pm \left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{P^2 \pm 4P\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}},$$

je nachdem n von der Form $4m$ oder $4m+2$ ist.

Die algebraische Auflösung kann nur in der Weise bewerkstelligt werden, dass man ausgeht von der Bemerkung, dass von einer complexen Function $f(x+y\sqrt{-1})$

$$\text{das Real} \quad = \frac{1}{2}f(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}f(x-y\sqrt{-1}),$$

$$\text{das Lateral} = \frac{1}{2}f(x+y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2}f(x-y\sqrt{-1})$$

ist, wo x und y reelle Grössen sind, unter denen y auch gleich Null werden kann. Man substituirt in der gegebenen Gleichung

$$x = \frac{1}{2}(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x+y\sqrt{-1}}$$

und sucht eine Resolvente in $x+y\sqrt{-1}$ zu erhalten. Hat man daraus einen Werth von $x+y\sqrt{-1}$ gefunden, so ist das Real hiervon eine Wurzel der Gleichung.

1. Beispiel. Aufzulösen

$$x^3 - px + q = 0.$$

Man substituire die identische Gleichung

$$x = \frac{1}{2}(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x+y\sqrt{-1}}.$$

Dies gibt

$$0 = (x+y\sqrt{-1})^3 + 3(x^2+y^2)(x+y\sqrt{-1}) + 3\frac{(x^2+y^2)^2}{x+y\sqrt{-1}} + \frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y\sqrt{-1})^3}$$

$$-4p(x+y\sqrt{-1}) - 4p\frac{(x^2+y^2)}{x+y\sqrt{-1}} + 8q.$$

Unter der Annahme

$$3(x^2+y^2)-4p=0$$

erhält man eine Resolvente vom sechsten Grade, welche sich auf eine quadratische reduciren lässt, nämlich

$$(x+y\sqrt{-1})^6+8q(x+y\sqrt{-1})^3+\frac{64}{27}p^3=0.$$

Hieraus findet man

$$x+y\sqrt{-1}=2\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}}=2\sqrt[3]{1}\,.\,u.$$

Ist $q^2-\frac{4}{27}p^3$ negativ, so ist y reell. Andrerseits erhält man

$$x-y\sqrt{-1}=\frac{x^2+y^2}{x+y\sqrt{-1}}=\frac{\frac{4}{3}p}{2\sqrt[3]{1}\,u}$$

$$=2\sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}}=2\sqrt[3]{1}^2\cdot v.$$

Man findet nun x entweder aus der halben Summe von $x+y\sqrt{-1}$ und $x-y\sqrt{-1}$ oder auch mittels Anwendung der beiden Gleichungen für das Real und Lateral. Da $\sqrt[3]{1}$ drei verschiedene Werthe hat, nämlich

$$1,\quad J_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\quad J_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

so ist

$$x_1=\text{Real }2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}}$$

$$=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}},$$

oder kürzer

$$x_1=\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1\sqrt{-1}\right)+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1\sqrt{-1}\right);$$

$$x_2=\text{Real }2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}=-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1\sqrt{3};$$

$$x_3 = \text{Real } 2\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$$
$$= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$$
$$+ \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = -\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3}.$$

Die Wurzeln sind also sämmtlich reell, wenn es y ist (casus irreductibilis). Ist $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ positiv, so hat die Gleichung eine reelle und zwei complexe Wurzeln. Die Coefficienten der gegebenen Gleichung sind also

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3} = 0,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\tfrac{3}{4}(x_1^2 + y_1^2) = -p,$$
$$x_1x_2x_3 = x_1\left(\tfrac{1}{4}x_1^2 - \tfrac{3}{4}y_1^2\right) = -q.$$

Bei Einführung der oben angenommenen kürzeren Bezeichnuug erhalten wir die Wurzelformen

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v, \\ x_2 &= J_1u + J_2v \\ x_3 &= J_2u + J_1v. \end{aligned}$$

2. Beispiel. Aufzulösen

$$x^4 - px^2 + q = 0.$$

Man substituire wiederum

$$x = \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}}.$$

Die Gleichung verwandelt sich dadurch in das Aggregat

$$0 = (x + y\sqrt{-1})^4 + 4(x^2 + y^2)(x + y\sqrt{-1})^2 + 6(x^2 + y^2)^2$$
$$+ 4\frac{(x^2 + y^2)^3}{(x + y\sqrt{-1})^2} + \frac{(x^2 + y^2)^4}{(x + y\sqrt{-1})^4} - 4p(x + y\sqrt{-1})^2$$
$$- 8p(x^2 + y^2) - 4p\frac{(x^2 + y^2)^2}{(x + y\sqrt{-1})^2} + 16q.$$

Unter der Bedingung $x^2 + y^2 = p$ folgt daraus die reducirte Gleichung

$$(x + y\sqrt{-1})^4 + (16q - 2p^2) + \frac{p^4}{(x + y\sqrt{-1})^4} = 0.$$

Hieraus findet man

$$(x + y\sqrt{-1})^8 + (16q - 2p^2)(x + y\sqrt{-1})^4 + p^4 = 0,$$

$$x + y\sqrt{-1} = 2\sqrt[4]{1}\sqrt[4]{-\tfrac{1}{2}q + \left(\tfrac{p}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4q\left(\tfrac{p}{4}\right)^2}} = 2\sqrt[4]{1}.u,$$

$$x - y\sqrt{-1} = 2\sqrt[4]{1^3}\sqrt[4]{-\tfrac{1}{2}q + \left(\tfrac{p}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4q\left(\tfrac{p}{4}\right)^2}} = 2\sqrt[4]{1^3}.v.$$

Ist $q^2 - 4q\left(\frac{p}{4}\right)^2$ negativ, so hat die Gleichung entweder vier oder nur zwei reelle Wurzeln, je nachdem q positiv oder negativ ist. Es hat nämlich $\sqrt[4]{1}$ die vier Werthe 1, $+\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{1}$. Ist nun

1) $\left(\frac{p}{4}\right)^2 > \frac{1}{4}q$ und q positiv, so hat Gleichung vier reelle Wurzeln in complexer Form (casus irreductibilis) und zwar ist

$$x = \text{Real}\, 2\sqrt[4]{1}\,.\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}},$$

folglich

$$x_1 = \text{Real}\, 2\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[4]{a - b\sqrt{-1}} = u + v,$$

$$x_2 = \text{Real}\, 2\sqrt{-1}\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}}$$
$$- \sqrt{-1}\sqrt[4]{a - b\sqrt{-1}} = \alpha u + \alpha^3 v,$$

$$x_3 = \text{Real} - 2\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} = -\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[4]{a - b\sqrt{-1}}$$
$$= -u - v,$$

$$x_4 = \text{Real} - 2\sqrt{-1}\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}}$$
$$+ \sqrt{-1}\sqrt[4]{a - b\sqrt{-1}} = -\alpha u - \alpha^3 v.$$

2) q negativ: zwei reelle, zwei complexe Wurzeln;

3) $\left(\frac{p}{4}\right)^2 < \frac{1}{4}q$ und q positiv: vier complexe Wurzeln.

3. Beispiel.

$$x^5 - px^3 + \frac{1}{5}p^2x + q = 0.$$

Man substituire

$$x = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2 + y^2}{(x + y\sqrt{-1})}$$

und setze $x^2 + y^2 = \frac{4}{5}p$. Man findet alsdann

$$x + y\sqrt{-1} = 2\sqrt[5]{1}\,.\sqrt[5]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4\left(\frac{1}{5}p\right)^5}} = 2\sqrt[5]{1}\,.\,u\,,$$

$$x - y\sqrt{-1} = 2\sqrt[5]{1^4}.\sqrt[5]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4\left(\frac{1}{5}p\right)^5}} = 2\sqrt[5]{1^4}.\,v\,.$$

Ist nun

1) $4\left(\frac{1}{5}p\right)^5 > q^2$, so hat die Gleichung fünf reelle Wurzeln (casus irreductibilis). Ist α die erste complexe Wurzel von $\sqrt[5]{1}$, so ist

$$x_1 = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4\left(\frac{1}{5}p\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4\left(\frac{1}{5}p\right)^5}}$$

$$= \sqrt[5]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[5]{a - b\sqrt{-1}}\,;$$

$$x_2 = \alpha\sqrt[5]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha^4\sqrt[5]{a - b\sqrt{-1}}\,,$$

$$x_3 = \alpha^2\sqrt[5]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha^3\sqrt[5]{a - b\sqrt{-1}}\,,$$

$$x_4 = \alpha^3\sqrt[5]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha^2\sqrt[5]{a - b\sqrt{-1}}\,,$$

$$x_5 = \alpha^4\sqrt[5]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha\sqrt[5]{a - b\sqrt{-1}}\,.$$

Diese Wurzelformen entsprechen ganz denen des irreductibeln Falles der kubischen Gleichung und zwar ist mit derselben abgekürzten Bezeichnung

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v\,, \\ x_2 &= \alpha\, u + \alpha^4 v\,, \\ x_3 &= \alpha^2 u + \alpha^3 v\,, \\ x_4 &= \alpha^3 u + \alpha^2 v\,, \\ x_5 &= \alpha^4 u + \alpha\, v\,. \end{aligned}$$

2) Ist $4\left(\frac{1}{5}p\right)^5 < q^2$; so hat die Gleichung eine reelle und vier complexe Wurzeln.

4. Beispiel.

$$x^6 - px^4 + \frac{1}{4}p^2x^2 + q = 0\,.$$

Man findet $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}p$ und

$$x + y\sqrt{-1} = 2\sqrt[6]{1}\,\sqrt[6]{-\frac{1}{2}q - \left(\frac{p}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4q\left(\frac{p}{6}\right)^3}} = 2\sqrt[6]{1}.\,u,$$

$$x - y\sqrt{-1} = 2\sqrt[6]{1}^5 \sqrt[6]{-\tfrac{1}{2}q - \left(\tfrac{p}{6}\right)^3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4q\left(\tfrac{p}{6}\right)^3}} = 2\sqrt[6]{1}^5 . v.$$

1) Ist q negativ und $q^2 + 4q\left(\frac{p}{6}\right)^3 < 0$, so hat die Gleichung sechs reelle Wurzeln (casus irreductibilis).

2) Ist q negativ und $q^2 + 4q\left(\frac{p}{6}\right)^3 > 0$, so hat sie zwei reelle und vier complexe Wurzeln.

3) Ist dagegen q positiv, so hat die Gleichung sechs complexe Wurzeln.

Die Werthe von $\sqrt[6]{1}$ sind

$$1, \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$
$$-1, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad +\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Für den irreductiblen Fall ist nun

$$x = \text{Real}\, 2\sqrt[6]{1}\sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}},$$

also

$$x_1 = \sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[6]{a - b\sqrt{-1}} = u + v,$$
$$x_2 = \alpha\sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha^5\sqrt[6]{a - b\sqrt{-1}} = \alpha u + \alpha^5 v,$$
$$x_3 = \alpha^2\sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha^4\sqrt[6]{a - b\sqrt{-1}} = \alpha^2 u + \alpha^4 v,$$
$$x_4 = -\sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[6]{a - b\sqrt{-1}} = -u - v,$$
$$x_5 = \alpha^4\sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha^2\sqrt[6]{a - b\sqrt{-1}} = -\alpha u - \alpha^5 v,$$
$$x_6 = \alpha^5\sqrt[6]{a + b\sqrt{-1}} + \alpha\sqrt[6]{a - b\sqrt{-1}} = -\alpha^2 u - \alpha^4 v.$$

Die sechs reellen Wurzeln sind demnach paarweise einander gleich vom entgegengesetzten Vorzeichen.

IV. Die Gleichungen mit mehreren gleichen Wurzeln.

§ 68. Von den Kennzeichen und der Bestimmung der gleichen Wurzeln.

Wenn eine Gleichung mehrere gleiche Wurzeln besitzt, so können dieselben aus dem Polynom ausgeschieden und dies dadurch auf einen niedrigeren Grad reducirt werden. Das Vorhandensein gleicher Wurzeln erkennt man an der Beschaffenheit der Differenzengleichung der gegebenen Gleichung. In § 19 ist gezeigt, dass, wenn die gegebene Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist, die Gleichung ihrer Differenzen ihren Ausdruck findet in

$$f'(x) + f''(x) \frac{z}{1.2} + f'''(x) \frac{z^2}{1.2.3} + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

Wenn demnach einer der Wurzelwerthe von z verschwinden soll, so muss auch

$$f'(x) = 0.$$

sein. Folglich hat die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln, wenn das Polynom $f(x)$ und ihre erste Derivirte einen gemeinschaftlichen Factor haben. (Theorem von Hudde.) Dabei können mehrere Fälle eintreten: erstlich kann eine Wurzel z. B. x_1 zwei oder mehrere Male vorkommen, die übrigen Wurzeln aber alle untereinander ungleich sein; zweitens können ausser x_1 auch noch andere Wurzeln x_2, x_3 u. s. f. verschiedene Male vorkommen, so dass man hat

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta (x - x_3)^\gamma (x - x_4) \cdots = 0.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass in diesem Falle die Derivirte immer nur theilbar ist durch

$$(x - x_1)^{\alpha-1} (x - x_2)^{\beta-1} (x - x_3)^{\gamma-1}.$$

Es sei die variirte Gleichung

$$f(x) = f(y + z) = (y + z - x_1)(y + z - x_2) \ldots (y + z - x_n).$$

Ordnet man nach Potenzen von y, so wird nach § 5 auf der linken Seite

$$f(y + z) = f(z) + f'(z) \frac{y}{1} + f''(z) \frac{y^2}{1.2} + \cdots,$$

auf der rechten Seite

$$= (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n)$$
$$+ [(z - x_2)(z - x_3) \cdots (z - x_n) + (z - x_1)(z - x_3) \cdots (z - x_n) + \cdots] y + \cdots$$

Setzt man jetzt die Coefficienten von y einander gleich und x an die Stelle von z, so ergibt sich

$$f'(x) = (x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + \cdots + (x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + \cdots + (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}),$$

in welcher Summe von Producten jedesmal ein Factor $(x - x_k)$ fehlt. Wenn also alle Binomialfactoren verschieden sind, so können

$f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Man kann ferner jenen Ausdruck von $f'(x)$ in ein Product verwandeln, nämlich

$$f'(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\left\{\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}\right\}.$$

Hat dann $f(x)$ α Factoren $x - x_1$, β Factoren $x - x_2$, γ Factoren $x - x_3$, so ist

$$f'(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta (x - x_3)^\gamma (x - x_4)\cdots(x - x_n)$$
$$\times\left\{\frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2} + \frac{\gamma}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}\right\}.$$

In diesem Falle wird nun, wie klar ist, $f'(x)$ theilbar sein durch

$$(x - x_1)^{\alpha-1}(x - x_2)^{\beta-1}(x - x_3)^{\gamma-1},$$

und dies ist der gemeinschaftliche Factor von $f(x)$ und $f'(x)$. Geht man in dieser Schlussfolge weiter, so hat offenbar

$f''(x)$ die Factoren $(x - x_1)^{\alpha-2}\,(x - x_2)^{\beta-2}\,(x - x_3)^{\gamma-2}$,
$f'''(x)$ die Factoren $(x - x_1)^{\alpha-2}\,(x - x_2)^{\beta-3}\,(x - x_3)^{\gamma-3}$,
u. s. w.
$f^m(x)$ die Factoren $(x - x_1)^{\alpha-m}\,(x - x_2)^{\beta-m}\,(x - x_3)^{\gamma-m}$,

so lange $\alpha, \beta, \gamma > m$ sind. Verschwindet einer der Exponenten, so bestimmt m die Anzahl, wie oft eine der gleichen Wurzeln vorkommt. Wenn man demnach z. B. $x = x_1$ in die Derivirten einsetzt, so verschwindet $f^\alpha(x_1)$, sobald x_1 α mal vorkommt. Ebenso bei den übrigen.

§ 69. Zerlegung eines Polynoms in andere, welche lauter ungleiche Factoren besitzen*).

Es sei

$$f(x) = X_1\, X_2^2\, X_3^3 \ldots X_m^m,$$

wo X_1 das Product aller Binomialfactoren bezeichnet, welche nur einmal vorkommen, X_2 das Product aller derjenigen, welche zweimal vorkommen, u. s. f. Wenn dann $f_1(x)$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ bezeichnet, so ist

$$f_1(x) = X_2\, X_3^2\, X_4^3 \ldots X_m^{m-1}.$$

Ferner sei $f_1'(x)$ die Derivirte von $f_1(x)$. Wenn wieder $f_2(x)$

---

*) Hymers, Theory of equations. § 62.

den grössten gemeinschaftlichen Factor von $f_1(x)$ und $f_1'(x)$ bezeichnet, wird sein

$$f_2(x) = X_3\, X_4^2\, X_5^3 \ldots X_m^{m-2}.$$

Indem man nun immer so fortfährt, kommt man schliesslich zu der Gleichung

$$f_{m-1}(x) = X_m\,.$$

In Folge dieser Betrachtung gelangen wir zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f_1(x)} &= X_1\, X_2\, X_3 \ldots X_{m-1}\, X_m = \varphi_1(x)\,,\\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= X_2\, X_3 \ldots X_{m-1}\, X_m = \varphi_2(x)\,,\\
\frac{f_2(x)}{f_3(x)} &= X_3 \ldots X_{m-1}\, X_m = \varphi_3(x)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\frac{f_{m-2}(x)}{f_{m-1}(x)} &= X_{m-1}\, X_m = \varphi_{m-1}(x)\,,\\
\frac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)} &= X_m = \varphi_m(x)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = X_1, \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = X_2\,, \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \quad \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi_m(x)} = X_{m-1}\,, \quad \varphi_m(x) = X_m\,.$$

Die Auflösung der gegebenen Gleichung ist so zurückgeführt auf die Auflösung der Partialgleichungen

$$X_1 = 0\,, \quad X_2 = 0, \ldots X_m = 0\,.$$

Das Schema der auszuführenden Rechnungen kann folgendermassen aufgestellt werden:

$$\begin{array}{ll}
f(x) & \\
 & \varphi_1(x) \\
f(x) : f'(x) = f_1(x), & \qquad X_1\,, \\
 & \varphi_2(x) \\
f_1(x) : f_1'(x) = f_2(x), & \qquad X_2\,, \\
 & \varphi_3(x) \\
f_2(x) : f_2'(x) = f_3(x), & \qquad X_3\,, \\
 & \varphi_4(x) \\
f_3(x) : f_3'(x) = f_4(x), & \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

$$f_{m-2}(x) : f'_{m-2}(x) = f_{m-1}(x), \quad \varphi_{m-1}(x) \quad X_{m-1},$$
$$f_{m-1}(x) : f'_{m-1}(x) = f_m(x), \quad \varphi_m(x) \quad X_m.$$

Die beiden letzten Verticalreihen stellen die Quotienten der voranstehenden Termen dar, zwischen deren Horizontalreihen sie einzeln liegen. Jede der Functionen $X_1, X_2 \ldots X_m$ zeigt an ihrem Index die Anzahl an, wie oftmal die betreffende Wurzel in dem Polynom vorkommt. Ist eine dieser Functionen gleich der Einheit, so deutet dieses an, dass von diesem Grade der Vielheit überhaupt keine Binomialfactoren in der Originalgleichung enthalten sind.

1. Beispiel.

$$f(x) = x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432.$$

Es ist

$$f'(x) = 8x^7 - 49x^6 - 12x^5 + 590x^4 - 1036x^3 - 249x^2 + 1224x - 108,$$
$$f_1(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18,$$
$$f_1'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 26x + 6,$$
$$f_2(x) = x - 3,$$
$$f_2'(x) = 1,$$
$$f_3(x) = 1.$$

$$f(x) : f_1(x) = \varphi_1(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$
$$f_1(x) : f_2(x) = \varphi_2(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,$$
$$f_2(x) : f_3(x) = \varphi_3(x) = x - 3.$$
$$\varphi_1(x) : \varphi_2(x) = X_1 = x + 4,$$
$$\varphi_2(x) : \varphi_3(x) = X_2 = x^2 - x - 2,$$
$$\varphi_3(x) = X_3 = x - 3.$$

Hieraus folgt die Factorenzerlegung des Polynoms $f(x)$ in

$$(x+4)(x^2-x-2)^2(x-3)^3.$$

2. Beispiel.

$$f(x) = x^8 - 12x^7 + 53x^6 - 9x^4 + 212x^3 - 153x^2 - 108x + 108 = 0.$$
$$f'(x) = 8x^7 - 84x^6 + 318x^5 - 36x^3 + 636x^2 - 306x - 108,$$
$$f_1(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18,$$
$$f_1'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 26x + 6,$$
$$f_2(x) = x - 3,$$
$$f_2'(x) = 1,$$
$$f_3(x) = 1.$$

$$
\begin{aligned}
f(x)\;:f_1(x) &= \varphi_1(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6\,,\\
f_1(x):f_2(x) &= \varphi_2(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6\,,\\
f_2(x):f_3(x) &= \varphi_3(x) = x - 3\,.\\
\varphi_1(x):\varphi_2(x) &= X_1 = x - 1\,,\\
\varphi_2(x):\varphi_3(x) &= x_2 = (x-2)(x+1)\,,\\
\varphi_3(x) &= X_3 = x - 3\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt, dass man das Polynom zerlegen kann in

$$(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^3\,.$$

V. Die Gleichungen mit rationalen Wurzeln.

§ 70. Von den Eigenschaften derjenigen numerischen Gleichungen, welche rationale (commensurable) Wurzeln haben.

Theorem. Eine numerische Gleichung, in welcher die höchste Potenz der Unbekannten den Coefficienten 1 hat und die übrigen Glieder ganze Coefficienten haben, kann keinen rationalen Bruch zur Wurzel haben.

Beweis. Angenommen es sei

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0$$

und $x = \frac{\alpha}{\beta}$. Wenn man diese Bruchform substituirt und die Gleichung mit β^{n-1} multiplicirt, so würde sein

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\alpha^{n-1} + a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2}\beta + \cdots + s\alpha\beta^{n-2} + t\beta^{n-1} = 0\,,$$

was nicht möglich ist, sobald $\frac{\alpha}{\beta}$ der auf seine kleinste Benennung gebrachte Bruch oder, was dasselbe ist, α und β relativ prim sind.

Hieraus folgt nun, dass, wenn eine Gleichung reelle Wurzeln hat, diese entweder ganze Zahlen oder irrationale sein müssen. Ist die Wurzel die ganze Zahl α, so ist

$$\alpha^n + a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} + \cdots + s\alpha + t = 0\,,$$

und da alle Glieder mit Ausnahme des letzten den Coefficienten α haben, so muss α auch ein Factor des Absolutgliedes t sein. Wenn man also das Absolutglied in seine ganzen positiven oder negativen Factoren zerlegt und alle die möglichen Factoren für x einsetzt, so sind diejenigen Factoren, welche das Polynom zu Null machen, Wurzeln der Gleichung.

Zur raschen Auffindung der Wurzeln kann man sich verschiedener Methoden bedienen, wobei man zur Vermeidung erfolgloser

Versuche sich auch der Cartesischen Regel zu erinnern hat, dass bei lauter reellen Wurzeln die Anzahl der positiven Wurzeln gleich der Zahl der Zeichenwechsel, die Anzahl der negativen Wurzeln gleich der der Zeichenfolgen ist.

§ 71. Methode der Ausschliessung der Factoren des Absolutgliedes, welche keine Wurzeln sind.

Wenn das Absolutglied viele Primfactoren und zusammengesetzte Factoren hat, so kann man mit Vortheil erst viele Factoren als Nichtwurzeln ausschliessen. Zu dem Ende substituire man in dem Polynom $x = +1$ und -1 und bezeichne die Fehler der Gleichung beziehlich mit R_1 und R_2. Diejenigen Factoren von t, welche positiv genommen um 1 vermindert, kein Mass von R_1 und um 1 vermehrt kein Mass von R_2 sind, können offenbar keine Wurzeln der Gleichung sein. Ebenso sind jene Factoren, welche negativ genommen um -1 vermindert kein Mass von R_2 und um -1 vermehrt, kein Mass von R_1, als Nichtwurzeln ausgeschlossen. Bleiben dann noch mehr Factoren übrig als es Wurzeln gibt, so schliesst man weitere Factoren aus, indem man $x = +2$ und -2 setzt u. s. f.

1. Beispiel.

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0\,; \text{ (3 positive Wurzeln).}$$

60 enthält die Factoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

$$x = +1\,;\quad f(+1) = 1 - 12 + 47 - 60 = -24 = R_1\,;$$
$$x = -1\,;\quad f(-1) = -1 - 12 - 47 - 60 = -120 = R_2\,.$$

Zunächst ist weder $+1$ noch -1 Wurzel, da R_1 und R_2 von Null verschieden sind. Für die übrigen Factoren ergibt sich

$2 - 1$ Factor von R_1,	$2 + 1$ Factor von R_2,
$3 - 1$ „ „ „	$3 + 1$ „ „ „
$4 - 1$ „ „ „	$4 + 1$ „ „ „
$5 - 1$ „ „ „	$5 + 1$ „ „ „
$6 - 1$ Nichtfactor von R_1,	$6 + 1$ Nichtfactor von R_2,
$8 - 1$ „ „ „	$8 + 1$ „ „ „

Ebenso sind alle folgenden Zahlen Nichtfactoren; demnach können nur drei unter den Zahlen 2, 3, 4, 5 Wurzeln sein. Man findet aber für

$$x = +2\,,\quad f(2) = 8 - 48 + 94 - 60 = -6\,;$$

folglich ist

$$x_1 = 3\,, \quad x_2 = 4\,, \quad x_3 = 5\,.$$

2. Beispiel.

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; (2 positive und 1 negative W.).

Factoren sind: $\pm(1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)$.

$$x = +1\,, \quad f(+1) = 1 - 3 - 10 + 24 = 12\,, \ (R_1)\,,$$
$$x = -1\,, \quad f(-1) = -1 - 3 + 10 + 24 = 30\,, \ (R_2)\,.$$

Man schliesse diejenigen positiven Factoren aus, welche um 1 vermindert keine Factoren von R_1, und um 1 vermehrt keine Factoren von R_2 sind; also $1, 3, 6, 8, 12, 24$; ferner schliesse man diejenigen negativen Factoren aus, welche um 1 vermindert kein Mass von R_2, um -1 vermehrt kein Mass von R_1 sind; also $-1, -4, -6, -8, -12, -24$. Demnach können möglicherweise nur $\pm 2, -3, +4$ Wurzeln sein. Aber -2 ist keine Wurzel, sondern $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$.

3. Beispiel.

$$x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0\,;$$

(3 negative, 1 positive Wurzel).

Factoren sind:

$$\pm(1, 7, 11, 13, 19, 77, 91, 133, 143, 209, 247 \ldots)\,.$$

Coefficienten:	1	28	42	-3452	-19019	
$+1$	1	29	71	-3381	-22400	$(= R_1)$,
-1	1	27	15	-3467	-15552	$(= R_2)$.

Nichtwurzeln sind: $7, 13, 19, 77, 91, 133$, u. s. f.
$-11, -77, -91, -133$, u. s. f.

Wurzeln sind:

$$x_1 = -7\,, \quad x_2 = +11\,, \quad x_3 = -13\,, \quad x_4 = -19\,.$$

Wenn die Coefficienten gebrochen sind oder der Coefficient des ersten Gliedes von der Einheit verschieden ist, so sind auch die Wurzeln gebrochen. Man muss alsdann erst die Gleichung in eine andere transformiren, deren Wurzeln ein Vielfaches der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

1. Beispiel.

$$x^3 - 1\tfrac{1}{12}x^2 + \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{24} = 0\,, \text{ (3 positive Wurzeln).}$$

Man setze $x = \frac{1}{12} y$, und löse die neue Gleichung

$$y^3 - 13y^2 + 54y - 72 = 0$$

auf. Factoren sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

$$y = +1, \quad f(+1) = \quad 1 - 13 + 54 - 72 = \quad 30 \; (R_1),$$
$$y = -1, \quad f(-1) = -1 - 13 - 54 - 72 = -140 \; (R_2).$$

Nichtwurzeln sind: 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
Mögliche Wurzeln sind: 3, 4, 6.

Coefficienten:	1	− 13	+ 54	− 72
+ 3	1	− 10	+ 24	(0)
+ 4	1	− 6	(0)	
+ 6	1	(0)		

Es ist also

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = 6;$$
$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

2. Beispiel.

$$3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Man substituire $x = \frac{1}{3} y$, woraus hervorgeht

$$y^4 - 4y^3 - 42y^2 - 36y + 81 = 0.$$

Man findet

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -3, \quad y_3 = -3, \quad y_4 = 9,$$
$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 3.$$

§ 72. Die Methode der Divisoren nach Newton.

Eine sehr practische Methode, die commensurabeln Wurzeln zu finden, ist die folgende von Newton vorgeschlagene. Gegeben sei die allgemeine Gleichung

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0.$$

Angenommen α sei eine ganzzahlige Wurzel, so ist

$$t + s\alpha + r\alpha^2 + \cdots + a\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0,$$

und wenn man durch α dividirt,

$$\frac{t}{\alpha} + s + r\alpha + \cdots + a\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} = 0.$$

Nun ist $\frac{t}{\alpha}$ ganzzahlig und möge mit q_1 bezeichnet werden. Setzen wir q an dieselbe Stelle und dividiren die Gleichung abermals durch α, so wird

$$\frac{q_1 + s}{\alpha} + r + \cdots + a\alpha^{n-3} + \alpha^{n-2} = 0\,.$$

Wir setzen wiederum $\frac{q_1 + s}{\alpha} = q_2$, d. i. eine ganze Zahl. Indem wir in derselben Weise fortfahren, gelangen wir schliesslich zu der Gleichung

$$\frac{q_{n-1} + a}{\alpha} + 1 = 0\,.$$

Damit α eine Wurzel sein könne, muss diese Rechnung immer zum Reste -1 führen. Zur Abkürzung der nöthigen Rechnungen ist es empfehlenswerth, erst die Gleichung auf $x = \pm 1$ zu prüfen und die Grenzen aufzusuchen, zwischen welchen die Wurzeln liegen. Für letzteres hat Newton auch eine Methode angegeben, welche im nächsten Paragraphen mitgetheilt werden soll.

1. Beispiel.

$$x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0\,.$$

Factoren des Absolutgliedes: $\pm(2, 5, 10)$.

$\alpha =$	10	5	2	-2	-5	-10
$q_1 =$	1	2	5	-5	-2	-1
$q_1 + (-8) =$	-7	-6	-3	-13	-10	-9
$q_2 =$	—	—	—	—	2	—
$q_2 + 3 =$	—	—	—	—	5	—
$q_3 =$	—	—	—	—	-1	—

Deswegen ist -5 die einzige commensurable Wurzel.

2. Beispiel.

$$x^3 + 21x^2 + 131x + 231 = 0; \text{ (3 negative Wurzeln).}$$

Factoren: $-(1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 231)$.

$x = -1$, $f(-1) = -1 + 21 - 131 + 231 = 120$.

$\alpha =$	-3	-7	-11	-21	-33	-77
$q_1 =$	-77	-33	-21	-11	-7	-3
$q_1 + (+131) =$	$+54$	$+98$	$+110$	$+120$	$+124$	$+128$
$q_2 =$	-18	-14	-10	—	—	—
$q_2 + 21 =$	$+3$	$+7$	$+11$	—	—	—
$q_3 =$	-1	-1	-1	—	—	—

Die Wurzeln sind also $x_1 = -3$, $x_2 = -7$, $x_3 = -11$.

§ 73. Methode der Aufsuchung der Wurzelgrenzen nach Newton.

Um bei der Aufsuchung der rationalen Wurzeln schneller zum Ziele zu gelangen, ohne dass man die Prüfung der Wurzeln und Nichtwurzeln auf alle ganzen Factoren des Absolutgliedes auszudehnen braucht, kann man vorher die obere und untere Grenze der Wurzeln annähernd bestimmen. Wir beweisen zu diesem Zwecke das folgende

Theorem. Jede Zahl, welche für x eingesetzt, das Polynom $f(x)$ und alle seine Derivirten positiv macht, ist eine obere Grenze der positiven Wurzeln, und jede Zahl, welche für x eingesetzt, das Polynom $f(x)$ und alle seine Derivirten abwechselnd positiv und negativ macht, ist eine untere Grenze aller Wurzeln.

Um dies zu beweisen, gehen wir aus von der Gleichung

$$f(x) = f(y + z) = f(z) + f'(z)\frac{y}{1} + f''(z)\frac{y^2}{1 \, . \, 2} + \cdots + y^n = 0 \, .$$

Ertheilt man der Variation z einen solchen Werth, dass alle Coefficienten $f(z), f'(z), f''(z), \ldots$ positiv werden, so muss jeder Werth von y negativ sein; d. h. alle Werthe $x_1 - z$, $x_2 - z$ u. s. w. negativ. Deshalb ist z grösser als die grösste unter den Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_n$; und also eine obere Grenze der Wurzeln. Wenn dagegen alle Coefficienten abwechselnde Vorzeichen haben, muss y positiv sein, d. h. alle Werthe $x_1 - z$, $x_2 - z$, u. s. w. positiv. In diesem Falle ist der betreffende Werth von z eine untere Grenze aller Wurzeln.

1. Beispiel.

$$x^5 - 5x^4 + x^3 + 16x^2 - 20x + 16 = 0 \, .$$

Man findet

$$\begin{aligned} f(y+z) = {} & (z^5 - 5z^4 + z^3 + 16z^2 - 20z + 16) \\ & + (5z^4 - 20z^3 + 3z^2 + 32z - 20)\frac{y}{1} \\ & + (20z^3 - 60z^2 + 6z + 32)\frac{y^2}{2} + (60z^2 - 120z + 6)\frac{y^3}{6} \\ & + (120z - 120)\frac{y^4}{120} \, . \end{aligned}$$

Mithin ist

$$f(z) = z^5 - 5z^4 + z^3 + 16z^2 - 20z + 16,$$
$$f'(z) = 5z^4 - 20z^3 + 3z^2 + 32z - 20,$$
$$f''(z) = 2(10z^3 - 30z^2 + 3z + 16),$$
$$f'''(z) = 6(10z^2 - 20z + 1),$$
$$f''''(z) = 120(z - 1).$$

Setzt man $z = 6$, so werden alle Derivirten positiv, und setzt man $z = -4$, so werden alle Derivirten abwechselnd positiv und negativ.

Die Factoren des Absolutgliedes sind: $\pm(1, 2, 4, 8, 16)$.

Die commensurabeln Wurzeln der gegebenen Gleichung können also nur vorkommen unter $\pm(1, 2, 4)$. In der That ist

$$x_1 = -2, \; x_2 = +2, \; x_3 = +4.$$

VI. Die Gleichungen mit bestimmten Relationen der Wurzeln untereinander.

§ 74. Von den sogenannten Reducenten.

In vielen Fällen kann die Auflösung einer gegebenen Gleichung auf diejenige einer Gleichung von niedrigerem Grade reducirt oder von der Ausführung einfacher Operationen abhängig gemacht werden, wenn entweder zwischen allen Wurzeln derselben oder auch nur zwischen zweien der Wurzeln eine gegebene algebraische Beziehung stattfindet. Im ersteren Falle lässt sich die gegebene Beziehung fast immer durch gewisse Functionen der Coefficienten der Gleichung ausdrücken. Diese Bedingungsgleichungen sind von mir in einer früheren Arbeit*) mit dem Namen „Reducenten" bezeichnet worden. Wenn irgend welche dieser Relationen zwischen den Coefficienten stattfinden, so reduciren sich z. B. die allgemeinen quadratischen Gleichungen auf rein quadratische, die kubischen auf quadratische oder rein kubische, die biquadratischen auf quadratische Gleichungen. Die in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Classen particulärer Gleichungen sind specielle Fälle der angegebenen Art. So z. B. gilt für die reciproken kubischen Gleichungen die Reducente $a^3c - b^3 = 0$, für die reciproken biquadratischen Gleichungen die Reducente $a^2d - c^2 = 0$.

---

*) Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen. S. 10—13. Leipzig 1866.

§ 75. Von der Auflösung der Gleichungen, deren Wurzeln eine arithmetische Progression bilden.

Wenn die Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0$$

gegeben und von ihren Wurzeln bekannt ist, dass dieselben eine arithmetische Progression bilden, also von der Form

$$\alpha, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha + 2\beta, \quad \alpha + 3\beta, \ldots$$

sind, so lassen sich diese auf folgende Art bestimmen.

Es ist

$$-a = \frac{1}{2}[2\alpha + (n-1)\beta]\, n = n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\beta,$$

$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= \alpha^2 + (\alpha+\beta)^2 + (\alpha + 2\beta)^2 + \cdots + [\alpha + (n-1)\beta]^2 \\ &= n\alpha^2 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]\,\alpha\beta \\ &\quad + [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]\,\beta^2 \\ &= n\alpha^2 + n(n-1)\,\alpha\beta + \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n\beta^2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit n und subtrahirt davon das Quadrat der ersten Gleichung, so erhält man

$$\beta^2 = 12\,\frac{a^2(n-1) - 2bn}{n^2(n^2-1)},$$

und mit Hülfe der ersten Gleichung

$$\alpha = -\frac{a + \frac{1}{2}n(n-1)\beta}{n}.$$

1. Beispiel. Gegeben sei die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Mit Anwendung der Formeln findet man

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - 3b)}, \qquad \alpha = -\frac{1}{3}a - \sqrt{\frac{1}{3}(a^2-3b)}.$$

Es ist also

$$x_1 = -\frac{1}{3}a - \sqrt{\frac{1}{3}(a^2-3b)},$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}a,$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{3}(a^2-3b)}.$$

Bildet man hiervon die Summe der Combinationen zu allen Classen, so erhält man die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx - \frac{2a^3 - 9ab}{27} = 0\,.$$

Damit also die Wurzeln eine arithmetische Progression bilden, muss die Reducente

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0$$

sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so verschwinden aus der Cardanischen Formel die Kubikwurzeln. Die vorstehende Reducente lässt sich auch wie alle andern Reducenten in symmetrischer Function der Wurzeln ausdrücken, nämlich

$$-(2a^3 - 9ab + 27c) = (x_1 - 2x_2 + x_3)(x_2 - 2x_3 + x_1)(x_3 - 2x_1 + x_2).$$

2. Beispiel. Gegeben sei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Mit Anwendung der Formeln findet man

$$\beta = \sqrt{\tfrac{1}{20}(3a^2 - 8b)}\,, \quad \alpha = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}(3a^2 - 8b)}\,.$$

Es ist also

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}(3a^2 - 8b)}\,,$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}(3a^2 - 8b)}\,,$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}(3a^2 - 8b)}\,,$$
$$x_4 = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}(3a^2 - 8b)}\,.$$

Bildet man nun rückwärts die Gleichung wieder aus den Binomialfactoren, so resultirt

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - \tfrac{1}{8}(a^3 - 4ab)x - \tfrac{1}{1600}(11a^4 + 8a^2b - 144b^2) = 0.$$

Die Reducente $a^3 - 4ab + 8c$ verschwindet stets, wenn die Wurzeln eine arithmetische Progression bilden, und die Reducenten

$$a^3 - 4ab + 8c \text{ und } 11a^4 + 8a^2b - 144b^2 + 1600d$$

verschwinden gleichzeitig, wenn die Wurzeln eine arithmetische Progression bilden.

Theorem. Wenn die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades von der Cayley'schen Form Wurzeln hat, welche insgesammt eine arithmetische Progression bilden, so muss die kubische Variante verschwinden.

Gegeben sei das Polynom

$$(a, b, c, \ldots t)\widehat{}(x, 1)^n$$
$$= ax^n + \binom{n}{1} bx^{n-1} + \binom{n}{2} cx^{n-2} + \cdots + \binom{n}{1} sx + t = 0 .$$

Es lässt sich beweisen, dass die Function

$$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2d = 0$$

wird, wenn die Wurzeln die arithmetische Reihe

$$\alpha, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha + 2\beta, \ldots \alpha + (n-1)\beta$$

bilden. Um die Coefficienten $b, c, d, \ldots t$ durch α und β ausdrücken zu können, berechne man $\Sigma(x)$, $\Sigma(x^2)$, $\Sigma(x^3)$, u. s. w. Man erhält mit leichter Mühe

$$\Sigma(x) = -\binom{n}{1}\frac{b}{a} = n\alpha + \frac{n(n-1)\beta}{2},$$

$$\Sigma(x^2) = \binom{n}{1}^2\frac{b^2}{a^2} - 2\binom{n}{2}\frac{c}{a} = n\alpha^2 + n(n-1)\alpha\beta + \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n\beta^2,$$

$$\Sigma(x^3) = -\binom{n}{1}^3\frac{b^3}{a^3} + 3\binom{n}{1}\binom{n}{2}\frac{bc}{a^2} - 3\binom{n}{3}\frac{d}{a} = n\alpha^3 + 3\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2\beta$$
$$+ \frac{1}{2}(2n-1)(n-1)n\alpha\beta^2 + \frac{1}{4}n^2(n-1)^2\beta^3 .$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{2}{n^2}[\Sigma(x)]^3 - \frac{3}{n}\Sigma(x)\Sigma(x^2) + \Sigma(x^3) = 0,$$

oder durch Einsetzung der Werthe in a, b, c, d

$$-6\binom{n}{3}\frac{b^3}{a^3} + 9\binom{n}{3}\frac{bc}{a^2} - 3\binom{n}{3}\frac{d}{a} = 0,$$

oder kurz

$$2b^3 - 3abc + a^2d = 0 .$$

Das vorstehende Theorem lässt sich nicht umkehren mit Ausnahme bei den kubischen Gleichungen. Verschwindet nur die erste Reducente bei den biquadratischen Gleichungen, so stehen die vier Wurzeln nur noch in einer arithmetischen Proportion

$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4$$

oder

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 .$$

Bildet man von dieser Function sämmtliche Variationen und multiplicirt sie mit einander, so erhält man

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)\times\\&(-x_1-x_2+x_3+x_4)(-x_1+x_2-x_3+x_4)(-x_1+x_2+x_3-x_4)\\&\qquad=-(a^3-4ab+8c)^2.\end{aligned}$$

Wenn die Quadrate der Wurzeln eine arithmetische Proportion bilden sollen, so muss die Reducente

$$\begin{aligned}&(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2)(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2)\\&\quad=(a^2-2b)^3-4(a^2-2b)(b^2-2ac+2d)+8(c^2-2bd)\\&\quad=a^6-6a^4b+8a^3c+8a^2b^2-8a^2d-16abc+8c^2\end{aligned}$$

verschwinden.

§ 76. Von der Auflösung der Gleichungen, deren Wurzeln eine geometrische Progression bilden.

Angenommen es seien

$$\alpha,\quad \alpha\beta,\quad \alpha\beta^2,\quad \alpha\beta^3,\ldots \alpha\beta^{n-1}$$

die n Wurzeln der Gleichung

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+sx+t=0,$$

so lassen sich α und β, folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung, durch Auflösung einer reciproken Gleichung finden.

Zunächst erhält man durch Multiplication aller Wurzeln

$$\alpha^n\beta^{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}}=\pm t,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Bildet man die Summe der Combinationen zu je zwei Wurzeln, so erhält man daneben

$$\alpha^2\beta\{(1+\beta)+2(\beta^2+\beta^3)+3(\beta^4+\beta^5)+\cdots+(\beta^{2n-5}+\beta^{2n-4})\}=b.$$

Substituirt man

$$\beta+\frac{1}{\beta}=y,$$

so erhält man mit Hülfe der in § 59 gegebenen Gleichung

$$\beta^m+\frac{1}{\beta^m}=y^m-my^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1\,.\,2}y^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3}y^{m-6}+\cdots,$$

indem man den Factor β^{n-2} aus der Klammer entfernt und zwei correspondirende Glieder verbindet:

$$b = \alpha^2 \beta^{n-1} \times \left| \begin{array}{llllll} y^{n-2} & & -(n-2)y^{n-4} & & +\frac{(n-2)(n-5)}{1.2}y^{n-6} - \dots & \\ & +y^{n-3} & & -(n-3)y^{n-5} & & +\frac{(n-3)(n-6)}{1.2}y^{n-7} - \dots \\ & & +2y^{n-4} & & -2(n-4)y^{n-6} & +\dots \\ & & & +2y^{n-5} & & -2(n-5)y^{n-7} + \dots \\ & & & & +3y^{n-6} & -\dots \\ & & & & & +3y^{n-7} - \dots \end{array} \right.$$

oder

$$b = \alpha^2 \beta^{n-1} \Big\{ y^{n-2} + y^{n-3} - (n-4)y^{n-4} - (n-5)y^{n-5}$$
$$+ \frac{1}{2}(n^2 - 11n + 32)y^{n-6} + \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 44)y^{n-7} - \dots \Big\}.$$

Potenziren wir diese Gleichung mit $\frac{1}{2}n$ und eliminiren aus dieser und der vorigen Gleichung

$$\alpha^n \beta^{\frac{n(n-1)}{1.2}} = \pm t$$

die Grösse α, so erhalten wir

$$y^{n-2} + y^{n-3} - (n-4)y^{n-4} - (n-5)y^{n-5} + \dots = b : \sqrt[n]{t^2}.$$

1. Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 21\tfrac{1}{4}x^3 + 89\tfrac{1}{4}x^2 - 85x + 16 = 0$$

bilden eine geometrische Progression; es sollen dieselben gesucht werden.

Nach der Formel ist wegen $n = 4$, $t = 16$, $b = 89\frac{1}{4}$:

$$y^2 + y = 22\tfrac{5}{16}; \quad y = \frac{-2 \pm 19}{4}.$$

Wählt man $y_1 = \frac{17}{4}$, so wird

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \frac{17}{4}, \quad \beta_1 = 4, \quad \beta_2 = \frac{1}{4}.$$

Zur Berechnung von α geht man aus von der gegebenen Gleichung

$$\alpha^4 \beta^6 = t = 16.$$

Setzt man $\beta = 4$, so resultirt daraus $\alpha = \frac{1}{4}$; setzt man $\beta = \frac{1}{4}$, so resultirt $\alpha = 16$. Die Wurzeln der Gleichung sind demgemäss mit Berücksichtigung der ersteren Werthe von α und β:

$$x_1 = \alpha = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \alpha\beta = 1,$$
$$x_3 = \alpha\beta^2 = 4, \quad x_4 = \alpha\beta^3 = 16.$$

2. Beispiel. Aufzulösen

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Wegen $n = 5$, $t = -1$, $b = 10$ erhalten wir

$$y^3 + y^2 - y = 10, \quad y = 2, \quad \beta = 1, \quad \alpha = 1.$$

Die fünf Wurzeln sind demnach $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

§ 77. Von der Reduction einer Gleichung, von der eine Relation zwischen zwei Wurzeln gegeben ist.

Jede Gleichung $f(x) = 0$ kann auf einen niedrigern Grad reducirt werden, wenn zwischen zwei ihrer Wurzeln, z. B. x_1 und x_2, die allgemeine Relation

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

gegeben ist.

Man setze $\varphi(x)$ an die Stelle von x in $f(x)$ ein und entwickele das Polynom nach Potenzen von x. Dasselbe möge mit $F(x)$ bezeichnet werden. Die beiden Functionen $f(x)$ und $F(x)$ werden gleichzeitig gleich Null werden, wenn man $x = x_1$ setzt. Es müssen demnach die beiden Polynome einen gemeinschaftlichen Factor $x - x_1$ haben, welcher leicht gefunden wird. Man erhält sodann x_1 und mittels der Annahme $x_2 = \varphi(x_1)$ auch noch x_2. Dadurch wird also die gegebene Gleichung um zwei Grade erniedrigt.

1. Beispiel. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$. Die Summe zweier Wurzeln ist 4.

Zwischen zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung gilt die Relation

$$x_2 = 4 - x_1 = \varphi(x_1).$$

Substituirt man diesen Werth in $f(x)$, so erhält man

$$F(x_1) = x_1^4 - 9x_1^3 + 29x_1^2 - 39x_1 + 18 = 0,$$

und

$$f(x_1) = x_1^4 - 7x_1^3 + 17x_1^2 - 17x_1 + 6 = 0.$$

Der gemeinschaftliche Factor ist $x_1 - 1$; folglich $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

Diese und ähnliche Bedingungsgleichungen lassen sich meistens in Functionen der Coefficienten oder in Reducenten darstellen.

Eine solche ist unter andern die Discriminante. Diese verschwindet, wenn zwei Wurzeln x_1 und x_2 einander gleich sind. Nach § 20 ist

$$D_2 = -(a^2 - 4b),$$

$$D_3 = \frac{1}{3}(ab - 9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac),$$

$$D_4 = -\frac{1}{3}\{b(ac - 4d) - 9(a^2d - 4bd + c^2)\}^2$$

$$-\frac{4}{3}(b^2 - 3ac + 12d)\{(ac - 4d)^2 - 3b(a^2d - 4bd + c^2)\};\ \text{u. s. w.}$$

Hat die Discriminante D_n den Werth Null, so findet man die beiden Wurzeln x_1 und x_2, indem man, wie früher gezeigt worden ist, den gemeinschaftlichen Factor der beiden Polynome $f(x)$ und $f'(x)$ sucht. Diese Beispiele setzen voraus, dass $\varphi(x)$ eine lineare sei; die Function kann aber jede beliebige algebraische sein; es möge ein Beispiel der Art berechnet werden.

2. Beispiel. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Zwischen x_1 und x_2 gilt die Beziehung

$$x_2 = x_1^2 + x_1 + 1 = \varphi(x_1).$$

Setzt man den Werth von x_2 in das Polynom $f(x)$ ein, so erhält man

$$x_1^6 + 3x_1^5 - 5x_1^3 - x_1^2 + 2x_1 = 0$$

und dazu

$$x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 - 6 = 0.$$

Der gemeinschaftliche Factor der beiden Polynome ist $x_1 - 1$ und folglich $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Die Hauptaufgabe der Auflösungskunst der algebraischen Gleichungen besteht im Allgemeinen darin, die gegebenen Gleichungen so zu variiren und zwar entweder linear oder quadratisch oder kubisch u. s. w., dass gewisse Reducenten verschwinden und dadurch die transformirten Gleichungen auf einen niedrigeren Grad gebracht werden können. Dies Problem bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Vierter Abschnitt.

Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Substitution.

I. Das Princip der algebraischen Methoden.

§ 78. Von den Auflösungsmethoden der algebraischen Gleichungen im Allgemeinen.

Sämmtliche Methoden, die Wurzeln einer Gleichung darzustellen, sind entweder directe, d. h. solche, welche die Wurzelwerthe der allgemeinen oder litteralen Gleichungen in einer geschlossenen endlichen Form darstellen, oder Näherungsmethoden, d. h. solche, welche die Wurzelwerthe der Gleichungen in Form einer convergenten unendlichen Reihe oder in transcendenten Ausdrücken darstellen. Zu den Methoden der ersten Art gehören die algebraischen und die geometrischen Methoden der Gleichungen der ersten vier Grade sowie einiger specieller Fälle höhern Grades*); zur zweiten Art die Näherungsmethoden der numerischen Gleichungen und die Darstellung der Wurzeln durch goniometrische und elliptische Functionen.

Die Methoden der directen Auflösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade, sowie einiger particulärer Gleichungen höherer Grade, welche sich auf jene reduciren lassen, gründen sich auf ein zweifaches Princip: sie sind entweder Substitutionsmethoden oder Combinationsmethoden.

---

*) Die Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen vom fünften und höheren Graden aufzulösen, haben Ruffini und Abel bewiesen. Man vergl. Ruffini, Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto. Mem. Soc. Ital. X. 1803; XII. 1805; Mem. Istit. Nazion. Ital. I. 1806, und Abel, Mém. sur les équations algébriques. Christiania 1826.

a. Die Substitutionsmethode, durch Ferrari und Vieta begründet, durch Tschirnhausen, Euler, Lagrange und Bézout weiter ausgebildet, besteht darin, dass man eine geeignete algebraische Function niedrigeren Grades, bestehend aus der Hauptunbekannten x und einer oder mehreren anderen neuen Hauptgrössen, also allgemein $F(x, y, z, u \ldots) = 0$ in die gegebene Function X einführt und von dieser ebensoviele neue Gleichungen (Resolventen)*) $Y = 0$, $Z = 0$, $U = 0$ u. s. w. absondert, so dass durch diese Theilung die Auflösung des übrigen Theiles der Function $X = 0$, welcher die Reducirte (réduite nach Lagrange**), ridotta ital.) heisst, ermöglicht, d. h. auf die einfacherer Gleichungen reducirt und von der Ausführung einfacherer Operationen abhängig gemacht wird. Dieses Verfahren ist durchweg ein künstliches und setzt zur Entdeckung neuer Methoden die Anwendung mannigfacher Kunstgriffe voraus.

b. Die Combinationsmethode, begründet durch Vandermonde und Lagrange, ist ein einfacheres natürlicheres Verfahren. Die verschiedenen Methoden dieser Art lassen deutlicher ihren inneren Zusammenhang, sowie die Beziehungen der Hülfsgleichungen zu den Wurzeln der Hauptgleichung erkennen, und namentlich auch den Grad derselben im Voraus bestimmen. Die Combinationsmethode besteht darin, dass man für gewisse einfache Combinationen der noch unbekannten Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 u. s. w. eine oder mehrere neue Hauptgrössen y, z, u. s. w. substituirt und für diese aus den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung $X = 0$ eine oder mehrere Hülfsgleichungen (Resolventen) $Y = 0$, $Z = 0$, u. s. w. ableitet, welche sich leichter als die gegebene lösen lassen, mithin von einem niedrigern Grade als diese sein müssen. Die Combinationen einiger oder aller Wurzeln x_1, x_2, x_3 u. s. w., welche sich zur Bildung von Resolventen besonders eignen, werden Typen***) genannt. Dieser Ausdruck ist zuerst von Vandermonde gebraucht.

---

*) Die Bezeichnung „Resolvente“ rührt von Euler her. Man vergl. Euler, De formis radicum etc. Comm. Acad. Petrop. vet. VI. p. 223. 1739.

**) Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouv. Mém. de l'acad. Berlin, 1772 et 1773.

***) Blomstrand, De methodis praecipuis etc. pg. 55.

§ 79. Von den Reducenten der Gleichungen der ersten vier Grade.

Mit dem Namen „Reducenten“ werden gewisse Functionen der Coefficienten $a, b, c \ldots$ der Hauptgleichungen bezeichnet*), welche verschwinden, wenn die Gleichungen sich auf einfachere Formen reduciren lassen. Beispiele dieser Art sind bereits in § 75 benutzt worden. Dieselben sind wol zuerst von Mallet**) zur Auflösung der variirten oder linear transformirten Gleichungen mit Erfolg angewendet worden. Im Allgemeinen ist die Resolvente einer Gleichung vom zweiten Grade eine lineare, einer Gleichung vom dritten Grade eine quadratische, einer Gleichung vom vierten Grade eine kubische. Findet jedoch zwischen den Coefficienten der vorgelegten Gleichung eine der im Folgenden aufgestellten Relationen statt, so reduciren sich die vollständigen quadratischen Gleichungen meistens auf rein quadratische, die kubischen auf rein kubische, die biquadratischen auf quadratische. Eine wichtige Anwendung der Reducenten besteht darin, dass man aus ihrer Beschaffenheit die gegenseitigen Beziehungen der Wurzeln erkennen kann, und ferner dass, wenn sie in die variirten Gleichungen eingeführt werden, sich aus ihren Resolventen, mit andern Worten Auflösungsmethoden für die Gleichungen verschiedener Grade herleiten lassen. Die Formen derselben beziehen sich zunächst auf die vollständigen Gleichungen von der gewöhnlichen Form

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0.$$

a. Reducenten der quadratischen Gleichungen:

(1) $a = 0$; (Geminante $- G_2$)

(2) $a^2 - 4b = 0$; (Discriminante $- D_2$)

(3) $a^4 - 4a^2b = 0$;

(4) $a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 4b^3 = 0$.

b. Reducenten der kubischen Gleichungen:

(5) $a = b = 0$; (Kanonizante)

(6) $a^2 - 3b = 0$; (quadratische Variante)

---

*) Matthiessen, L., die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen. C. pag. 10. Leipzig, 1866.

**) Mallet, Nova analysis aequationum secundi, tertii et quarti gradus. Nov. Act. Upsal. III. 1780.

(7) $ab - 9c = 0$;

(8) $b^2 - 3ac = 0$; (quadratische Retrovariante)

(9) I. $2a^3 - 9ab + 27c = 0$; (kubische Variante)

II. $2b^3 - 9abc + 27c^2 = 0$; (kubische Retrovariante)

(10) $a^3 - 27c = 0$;

(11) $a^3c - b^3 = 0$;

(12) $a^4 - 2a^2b - 12ac + b^2 = 0$;

(13) $a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2 = 0$;

(14) $\frac{1}{3}(ab - 9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac)$ (Discriminante D_3)

$$= \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - \frac{4}{27}(a^2 - 3b)^3$$

$$= 4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2 = 0;$$

(15) $a^2c^2 - 4ab^2c + 6bc^2 + b^4 = 0$;

(16) I. $a^3c - a^2b^2 - 6abc + 4b^3 = 0$;

II. $a^3c + 9c^2 - 6abc + b^3 = 0$;

(17) $ab - c = 0$; (Geminante G_3)

(18) $a^6 - 6a^4b + 6a^3c + 9a^2b^2 - 9abc - 3b^3 = 0$.

c. Reducenten der biquadratischen Gleichungen:

(19) $a = b = c = 0$;

(20) $a = c = 0$; (Kanonizante)

(21) I. $a^3 - 4ab + 8c = 0$; (kubische Variante)

II. $c^3 - 4bcd + 8ad^2 = 0$; (kubische Retrovariante)

(22) $a^2d - c^2 = 0$;

(23) $a^2d - 4bd + c^2 = 0$;

(24) $a^2d - abc + c^2 = 0$; (Geminante $- G_4$)

(25) $a^4 - 8a^2b + 16b^2 - 64d = 0$;

(26) $a^6 - 6a^4b + 8a^3c + 8a^2b^2 - 8a^2d - 16abc + 8c^2 = 0$;

(27) $a^6 - 8a^4b + 64a^3c - 768a^2d + 2048bd - 512c^2 = 0$;

(28) $a^4 - 4a^2b + 8ac - 16d = 0$;

(29) $b^2 - 3ac + 12d = 0$; (quadratische Invariante $12\mathcal{J}$)

(30) $-\frac{1}{3}[b(ac-4d)-9(a^2d-4bd+c^2]^2+\frac{4}{3}(b^2-3ac+12d)$

$[(ac-4d)^2-3b(a^2d-4bd+c^2)]=\frac{4}{27}(b^2-3ac+12d)^3$

$-\frac{1}{27}(72bd+9abc-27c^2-27a^2d-2b^3)^2$

$=256(\mathcal{J}^3-27\mathfrak{J}^2)=0$; (Discriminante D_4)

(31) $72bd+9abc-27c^2-27a^2d-2b^3=0$;
(kubische Invariante $432\mathfrak{J}$)

(32) $(b^2-2ac+2d)^2-3(a^2-2b)(c^2-2bd)+12d^2$

$=16\left(\frac{1}{3}b^2\mathcal{J}-6b\mathfrak{J}+\mathcal{J}^2\right)=12\mathcal{J}_2=0$;

(quadrat. Invariante der Gleichung der Wurzelquadrate)

(33) $128(b^3\mathfrak{J}-b^2\mathcal{J}^2+9b\mathcal{J}\mathfrak{J}+\mathcal{J}^3-54\mathfrak{J}^2=432\mathfrak{J}_2=0$;
(kubische Invariante der Gleichung der Wurzelquadrate)

(34) $D_{4,2}=256(\mathcal{J}_2{}^3-27\mathfrak{J}_2{}^2)=0$;
(Discriminante der Gleichung der Wurzelquadrate)

(35) $3a^4-16a^2b+64ac-256d=0$;
(biquadratische Variante $256\,V_4$)

(36) $3c^4-16bc^2d+64acd^2-256d^3=0$;
(biquadratische Retrovariante $256\,V'_{4,4}$).

Diese Reducenten sind symmetrische Functionen der Wurzeln, lassen sich also in Wurzeltypen darstellen, wodurch ihre Bedeutung in ein klareres Licht gestellt wird. Wir wollen diese Verwandlung nur bei den wichtigsten Reducenten vornehmen. Es ist nämlich

(2) $-(a^2-4b)=-(x_1-x_2)^2=(x_1-x_2)x_1+(x_2-x_1)x_2=D_2$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}^2=+\begin{vmatrix}S_0 & S_1\\ S_1 & S_2\end{vmatrix}+,$$

(6) $a^2-3b=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]$

$$\begin{aligned}
&=(x_3+J_2x_1+J_1x_2)(x_3+J_1x_1+J_2x_2)\\
&=(x_2-x_3)^2+(x_1-x_2)(x_1-x_3)\\
&=(x_1-x_2)^2-(x_1-x_2)(x_3-x_2)+(x_3-x_2)^2\\
&=(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(x_2-x_3)(x_2-x_1)\\
&\quad+(x_3-x_1)(x_3-x_2);
\end{aligned}$$

$$J_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\quad J_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad -(ab-9c) &= x_3(x_1-x_2)^2+x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2\\
&= -(x_1x_2+J_1x_2x_3+J_2x_1x_3)(x_3+J_2x_1+J_1x_2)\\
&\quad -(x_1x_2+J_2x_2x_3+J_1x_1x_3)(x_3+J_1x_1+J_2x_2)\\
&= 2x_1(x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\\
&= 2x_3(x_1-x_2)^2-(x_1+x_3)(x_1-x_2)(x_3-x_2)+2x_1(x_3-x_2)^2\\
&= (x_2+x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(x_1+x_3)(x_2-x_3)(x_2-x_1)\\
&\quad +(x_1+x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\
&= x_1(x_1x_2-2x_2x_3+x_3x_1)+x_2(x_2x_3-2x_3x_1+x_1x_2)\\
&\quad +x_3(x_3x_1-2x_1x_2+x_2x_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad b^2-3ac &= \tfrac{1}{2}[x_3^{\,2}(x_1-x_2)^2+x_1^{\,2}(x_2-x_3)^2+x_2^{\,2}(x_3-x_1)^2]\\
&= (x_1x_2+J_1x_2x_3+J_2x_1x_3)(x_1x_2+J_2x_2x_3+J_1x_1x_3)\\
&= x_1^{\,2}(x_2-x_3)^2+x_2x_3(x_1-x_2)(x_1-x_3)\\
&= x_3^{\,2}(x_1-x_2)^2-x_3x_1(x_1-x_2)(x_3-x_2)+x_1^{\,2}(x_3-x_2)^2\\
&= x_2x_3(x_1-x_2)(x_1-x_3)+x_1x_3(x_2-x_3)(x_2-x_1)\\
&\quad +x_1x_2(x_3-x_1)(x_3-x_2);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \text{I. } 2a^3-9ab+27c &= (x_1-2x_2+x_3)(x_2-2x_3+x_1)(x_3-2x_1+x_2)\\
&= -(x_1+J_1x_2+J_2x_3)^3-(x_1+J_2x_2+J_1x_3)^3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II. } -(2b^3-9abc+27c^2) &= (x_2x_3-2x_1x_3+x_1x_2)\\
&\quad \times(x_1x_3-2x_1x_2+x_2x_3)(x_1x_2-2x_2x_3+x_1x_3)\\
&= -(x_1x_2+J_1x_2x_3+J_2x_3x_1)^3-(x_1x_2+J_2x_2x_3+J_1x_3x_1)^3;
\end{aligned}
$$

$$(11)\quad a^3c-b^3=(x_1^{\,2}-x_2x_3)(x_2^{\,2}-x_1x_3)(x_3^{\,2}-x_1x_2);$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad \tfrac{1}{3}(ab-9c)^2-\tfrac{4}{3}(a^2-3b)(b^2-3ac)&\\
&= -(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2=D_3\\
&= -\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^{\,2} & x_2^{\,2} & x_3^{\,2}\end{vmatrix}^2 = +\begin{vmatrix}S_0 & S_1 & S_2\\ S_1 & S_2 & S_3\\ S_2 & S_3 & S_4\end{vmatrix}+\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16)\quad \text{II. } a^3c+9c^2-6abc+b^3 &= (x_1^{\,2}x_2+x_2^{\,2}x_3+x_3^{\,2}x_1)\\
&\quad \times(x_1x_2^{\,2}+x_2x_3^{\,2}+x_3x_1^{\,2});
\end{aligned}
$$

$$(17)\quad ab-c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=G_3;\quad \text{(Geminante)}$$

$$
\begin{aligned}
(21)\quad \text{I. } -(a^3-4ab+8c) &= (x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)\\
&\quad \times(x_1-x_2-x_3+x_4)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{a}\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & +^{*)} \\ & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 & \\ & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & \\ + & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \end{array}$$

$$=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)$$
$$+(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)+(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$
$$=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)+(x_2+x_1)(x_2+x_3)(x_2+x_4)$$
$$+(x_3+x_1)(x_3+x_2)(x_3+x_4)+(x_4+x_1)(x_4+x_2)(x_4+x_3)$$
$$-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)-(x_1+x_2)(x_2+x_4)(x_4+x_1)$$
$$-(x_1+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_1)-(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_2);$$

$$(a^3-4ab+8c)^2=(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)$$
$$\times(x_1-x_2-x_3-x_4)(-x_1-x_2+x_3+x_4)$$
$$\times(-x_1+x_2-x_3+x_4)(-x_1+x_2+x_3-x_4);$$

(21) II. $-(c^3-4bcd+8ad^2)=(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4-x_1x_2x_4-x_1x_2x_3)$
$$\times(x_2x_3x_4-x_1x_3x_4+x_1x_2x_4-x_1x_2x_3)$$
$$\times(x_2x_3x_4-x_1x_3x_4-x_1x_2x_4+x_1x_2x_3);$$

(22) $a^2d-c^2=(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3);$

(23) $a^2d-4bd+c^2=(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3);$

(24) $-(a^2d-abc+c^2)=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)$
$$\times(x_2+x_4)(x_3+x_4);$$

(26) $a^6-6a^4b+8a^3c+8a^2b^2-8a^2d-16abc+8c^2$
$$=(a^2-2b)^3-4(a^2-2b)(b^2-2ac+2d)+8(c^2-2bd)$$
$$=(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2)$$
$$\times(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2);$$

(28) $-(a^4-4a^2b+8ac-16d)=(x_1+x_2+x_3-x_4)$
$$\times(x_1+x_2-x_3+x_4)(x_1-x_2+x_3+x_4)(-x_1+x_2+x_3+x_4);$$

(29) $12\mathfrak{J}=b^2-3ac+12d=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2$
$$+(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2+(x_2-x_3)^2(x_1-x_4)^2]$$
$$=[(x_1x_2+x_3x_4)+J_2(x_1x_3+x_2x_4)+J_1(x_1x_4+x_2x_3)]$$
$$\times[(x_1x_2+x_3x_4)+J_1(x_1x_3+x_2x_4)+J_2(x_1x_4+x_2x_3)]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} [(x_1x_3+x_2x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]^2 \\ +[(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]^2 \\ +[(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1x_3+x_2x_4)]^2 \end{array}\right\}$$

---

*) Zehfuss, Anwendungen einer besondern Determinante. Zeitschr. f. Math. und Phys. VII. S. 441. Leipzig 1862.

$$\begin{aligned}
&=[(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]^2\\
&\quad+[(x_1x_3+x_2x_4)-(x_1x_2+x_3x_4)]\\
&\times[(x_1x_3+x_2x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]\\
&=[(x_1x_3+x_2x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]^2\\
&\quad+[(x_1x_3+x_2x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]\\
&\times[(x_1x_4+x_2x_3)-(x_1x_2+x_3x_4)]\\
&\quad+[(x_1x_4+x_2x_3)-(x_1x_2+x_3x_4)]^2\\
&=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]x_4^2\\
&\quad-[x_3(x_1-x_2)^2+x_1(x_2-x_3)^2+x^2(x_3-x_1)^2]x_4\\
&\quad+\frac{1}{2}[x_3^2(x_1-x_2)^2+x_1^2(x_2-x_3)^2+x_2^2(x_3-x_1)^2];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(30)\quad D_4&=256(\mathcal{J}^3-27\mathfrak{J}^2)\\
&=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)\\
&=-D_3(x_1,x_2,x_3)f^2(x_4)=-D_3(x_1,x_2,x_4)f^2(x_3)=\cdots\\
&=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x^2_2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}^2=\frac{1}{a^2}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^4&x_2^4&x_3^4&x_4^4\end{vmatrix}^2\\
&=\begin{vmatrix}S_0&S_1&S_2&S_3\\S_1&S_2&S_3&S_4\\S_2&S_3&S_4&S_5\\S_3&S_4&S_5&S_6\end{vmatrix},\quad\text{(Salmon)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(31)\quad 432\mathfrak{J}&=72bd+9abc-27c^2-27a^2d-2b^3\\
&=[(x_1+x_2)(x_3+x_4)-2(x_1x_2+x_3x_4)]\\
&\times[(x_1+x_3)(x_2+x_4)-2(x_1x_3+x_2x_4)]\\
&\times[(x_1+x_4)(x_2+x_3)-2(x_1x_4+x_2x_3)]\\
&=[-(x_1-x_3)(x_2-x_4)-(x_2-x_3)(x_1-x_4)]\\
&\times[-(x_3-x_2)(x_1-x_4)-(x_1-x_2)(x_3-x_1)]\\
&\times[-(x_2-x_1)(x_3-x_4)-(x_3-x_1)(x_2-x_4)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(32)\quad 12\mathcal{J}_2&=(b^2-2ac+2d)^2-3(a^2-2b)(c^2-2bd)+12d^2\\
&=\frac{1}{2}[(x_1^2-x_2^2)^2(x_3^2-x_4^2)^2+(x_1^2-x_3^2)^2(x_2^2-x_4^2)^2\\
&\qquad+(x_2^2-x_3^2)^2(x_1^2-x_4^2)^2]\\
&=[(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)+J_2(x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2)+J_1(x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2)\\
&\times[(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)+J_1(x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2)+J_2(x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2)
\end{aligned}$$

$$=\frac{16}{3}b^2\mathfrak{J}-96b\mathfrak{F}+16\mathfrak{J}^2;$$

(33) $$432\mathfrak{F}_2=-2(b^2-2ac+2d)^3-27(a^2-2b)^2d^2-27(c^2-2bd)^2$$
$$+9(a^2-2b)(b^2-2ac+2d)(c^2-2bd)+72(b^2-2ac+2d)d^2$$
$$=[-(x_1^2-x_3^2)(x_2^2-x_4^2)-(x_2^2-x_3^2)(x_1^2-x_4^2)]$$
$$\times[-(x_3^2-x_2^2)(x_1^2-x_4^2)-(x_1^2-x_2^2)(x_3^2-x_4^2)]$$
$$\times[-(x_2^2-x_1^2)(x_3^2-x_4^2)-(x_3^2-x_1^2)(x_2^2-x_4^2)]$$
$$=128(b^3\mathfrak{F}-b^2\mathfrak{J}^2+9b\mathfrak{J}\mathfrak{F}+\mathfrak{J}^3-54\mathfrak{F}^2);$$

(34) $$D_{4,2}=D_4(b^3-9b\mathfrak{J}+54\mathfrak{F})^2=D_4(a^2d-abc+c^2)^2;$$

(35) $$256\,V_4=-(3x_1-x_2-x_3-x_4)(-x_1+3x_2-x_3-x_4)$$
$$\times(-x_1-x_2+3x_3-x_4)(-x_1-x_2-x_3+3x_4).$$

d. Discussion der wichtigsten Reducenten der Cayley'schen Formen.

$$(a,b,c)\widehat{\ }(x,y)^2,$$
$$(a,b,c,d)\widehat{\ }(x,y)^3,$$
$$(a,b,c,d,e)\widehat{\ }(x,y)^4.$$

Bei der Transformation der vorangehenden in der Auflösung der Gleichungen vorzugsweise in Betracht kommenden Reducenten werden wir uns der Kürze wegen folgender Bezeichnungen bedienen:

(2)γ. $$\overline{D}_2=ac-b^2=J_{2,2};$$

(2)γ $$\overline{D}_2=\overset{+}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}}_{+};$$

(6)γ $$J_{2,2}=ac-b^2=-V_2;$$

(7)γ $$ad-bc=-\overline{V}_2;$$

(8)γ $$bd-c^2=-V'_{2,3};$$

(9)γ $$\text{I. } 2b^3-3abc+a^2d=V_3;$$
$$\text{II. } 2c^3-3bcd+ad^2=V_{3,3};$$

(11)γ $$b^3d-ac^3=\Gamma;$$

(14)γ $$a^2\overline{D}_3=(2b^3-3abc+a^2d)^2-4(b^2-ac)^3$$
$$=a^2J_{3,4}=V_3^2-4V_2^3;$$
$$d^2\overline{D}_3=(2c^3-3dcb+d^2a)^2-4(c^2-bd)^3$$
$$=d^2J_{3,4}=V'^2_{3,3}-4V'^3_{2,3};$$

$$(14)\gamma \quad \overline{D}_3 = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$$

$$= {}^{+}\begin{vmatrix} (ad - bc)\,, & 2(ac - b^2) \\ 2(bd - c^2)\,, & (ad - bc) \end{vmatrix}_{+}$$

$$= {}^{+}\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}_{+} .$$

Nach Cayley findet noch zwischen der Discriminante $\overline{D}_3$ und ihren partiellen Differenzialquotienten folgende Beziehung statt:

$$432\,\overline{D}_3^{\,2} = {}^{+}\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a\,\partial b}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a\,\partial c}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a\,\partial d}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b\,\partial a}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b\,\partial c}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b\,\partial d}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c\,\partial a}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c\,\partial b}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c\,\partial d}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d\,\partial a}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d\,\partial b}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d\,\partial c}\right) & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d^2}\right) \end{vmatrix}_{+} .$$

$$(21)\gamma \quad \text{I.}\ V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d\,;$$

$$\text{II.}\ V'_{3,4} = 2d^3 - 3cde + e^2 b\,;$$

$$(22)\gamma \quad \Pi = b^2 e - ad^2\,;$$

$$(23)\gamma \quad \overline{V}_3 = 2b^2 e - 3ace + 2ad^2\,;$$

$$(24)\gamma \quad \Sigma = b^2 e - 6bcd + ad^2 = {}_{+}\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ b & 0 & d \\ 3c & d & e \end{vmatrix}^{+}\,;$$

$$(26)\gamma \quad W = 32b^6 - 72ab^4c + 16a^2b^3d + 36a^2b^2c^2 - a^3b^2e - 12a^3bcd + a^4d^2\,;$$

$$(28)\gamma \quad \Phi = 16b^4 - 24ab^2c + 8a^2bd - a^3e\,;$$

$$(29)\gamma \quad J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2\,;$$

$$(29)\gamma \quad J_{4,2} = \frac{a(be-cd)^2 - 4b(ce-d^2)(ad-bc) + 4(cd-be)(b^2-ac)d - (bc-ad)^2e}{eb^2 - d^2a}$$

$$(30)\gamma \quad \overline{D}_4 = J_{4,6} = J_{4,2}^3 - 27J_{4,3}^2\,;$$

$$(30)\gamma \quad \overline{D}_4 = [ae - bd]^3 - 9[(ad-bc)(be-cd) + 2(ac-b^2)(ce-d^2)]\,[ac-bd$$

$$+ 27(ac - b^2)(be - cd)^2 + 27(ce - d^2)(ad - bc)^2$$
$$- 81(ac - b^2)(bd - c^2)(ce - d^2)$$

$$= + \begin{vmatrix} (ae-bd), & 3(be-cd), & 3(ce-d^2) \\ 3(ad-bc), & ([ae-bd]+9[bd-c^2]), & 3(be-cd) \\ 3(ac-b^2), & 3(ad-bc), & (ae-bd) \end{vmatrix} +$$

$$= + \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix} +$$

Ist die bikubische Covariante

$$C_{4,6} = (A, B, C, D, E \widehat{)} (x, y)^6,$$

so ist nach Salmon

$$\tfrac{1}{6}\overline{D}_4 = AG - 6BF + 15CE - 10D^2,$$

d. i. die quadratische Invariante von $C_{4,6}$, und

$$-\tfrac{1}{36}\overline{D}_4 = BF - 4CE + 3D^2,$$

d. i. die quadratische Invariante von der Form

$$(B, C, D, E, F \widehat{)} (x, y)^4.$$

Es lassen sich noch andere Formen von $\overline{D}_4$ aufstellen. Ist nämlich

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & (c+2\lambda) \\ b & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda) & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

so ist

$$\overline{D}_4 = 16(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2.$$

Sind ferner

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right), \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right), \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\right), \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right), \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)$$

die partiellen Differenzialquotienten der $\varDelta$-Determinante, so ist

$$\overline{D}_4 = 4 \,.\, \left| \begin{array}{ccc} \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1}} & \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1} \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_2}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2}} & \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2} \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_3}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3}} & \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3} \end{array} \right|^2$$

$$= \frac{\left[16\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1\right]\left[16\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_2\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2\right]\left[16\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_3\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3\right]}{2^8 \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3}} \,.$$

Bezeichnen endlich φ, ψ, χ die drei verschiedenen Werthe der Function

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)} z^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)}} z + \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)}$$

und beziehungsweise $\Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\chi$ ihre Discriminanten, so ist

$$\overline{D}_4 = -16 \Delta\varphi \,.\, \Delta\psi \,.\, \Delta\chi \,.$$

$$(31)\gamma \quad J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$
$$= -\frac{1}{a}[(ad - bc)^2 - (ac - b^2)(ae - c^2)]$$
$$= -\frac{1}{e}[(eb - dc)^2 - (ec - d^2)(ae - c^2)]$$
$$= \begin{vmatrix} +a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e+ \end{vmatrix} .$$

$$(35)\gamma \quad V_4 = 3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e \,;$$
$$(36)\gamma \quad V'_{4,4} = 3d^4 - 6ed^2c + 4e^2db - e^3a \,.$$

Die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ können im Allgemeinen als die Abscissen der Durchschnittspuncte der Curve $y = f(x)$ mit der Abscissenaxe betrachtet werden. Von diesem Gesichtspuncte aus wollen wir vorläufig die Bedeutung jener Fälle hervorheben, in denen die vorstehenden Functionen der Coefficienten verschwinden.

1. Die Reducenten der quadratischen Gleichungen.

(1)γ. Wenn die Geminante G_2 verschwindet, also

$$G_2 = 0$$

wird, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln von entgegengesetztem Vorzeichen.

(2)γ. Wenn die Discriminante $\overline{D}_2$ verschwindet, also

$$\overline{D}_2 = J_{2,2} = -V_2 = 0$$

ist, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzelwerthe.

2. Die Reducenten der kubischen Gleichungen.

(6)γ, (7)γ, (8)γ. Wenn die Covariante $C_{3,2}$ identisch d. h. mit allen ihren Coefficienten verschwindet, so sind alle drei Wurzeln einander gleich. Demnach ist für

$$V_2 = \overline{V}_2 = V'_{2,3} = 0$$

die gegebene Function f ein vollständiger Kubus und

$$f = a(x + \frac{b}{a} y)^3 .$$

(9)γ. I. Wenn die kubische Variante verschwindet, also

$$V_3 = 0$$

wird, so ist eine Wurzel das arithmetische Mittel der beiden übrigen; d. h. die drei Wurzelwerthe sind einander arithmetisch zugeordnet oder bilden eine stetige arithmetische Proportion.

(9)γ. II. Wenn die kubische Retrovariante verschwindet, also

$$V'_{3,3} = 0$$

wird, so ist eine Wurzel das harmonische Mittel der beiden übrigen, mit andern Worten: die drei Wurzelwerthe sind einander harmonisch zugeordnet oder bilden eine harmonische Proportion.

(11)γ. Wenn die Function Γ verschwindet, also

$$\Gamma = 0$$

wird, so ist eine Wurzel der kubischen Gleichung $f(x) = 0$ das geometrische Mittel der beiden andern, d. h. die drei Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3 sind einander geometrisch zugeordnet oder bilden eine stetige geometrische Proportion.

(14)γ. Wenn die Discriminante oder die biquadratische Invariante der kubischen Gleichung verschwindet, also

$$\overline{D}_3 = J_{3,4} = 0$$

wird, so hat die Gleichung mindestens zwei gleiche Wurzeln.

(21)γ. I. Wenn die kubische Variante der biquadratischen Gleichungen verschwindet, also

$$V_3 = 0$$

wird, so bilden die Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3, x_4 eine arithmetische Proportion und im speciellen Falle eine arithmetische Progression. Man kann auch sagen: die vier Wurzelwerthe sind einander arithmetisch zugeordnet.

(21)γ. II. Wenn die kubische Retrovariante verschwindet, also

$$V'_{3,4} = 0$$

wird, so bilden die vier Wurzeln im speciellen Falle eine harmonische Reihe, z. B.

$$x_1 , \quad \frac{3 x_1 x_4}{x_1 + 2 x_4} , \quad \frac{3 x_1 x_4}{2 x_1 + x_4} , \quad x_4 .$$

(22)γ. Wenn die Function

$$\Pi = 0$$

wird, so haben die vier Wurzeln je zwei und zwei gleiche oder lauter gleiche Vorzeichen und bilden eine geometrische Proportion, im speciellen Falle eine geometrische Progression. Man kann auch sagen: die Wurzeln sind einander geometrisch zugeordnet.

(23)γ. Wenn die Function

$$\overline{V}_3 = 0$$

wird, so haben die vier Wurzeln je ein und drei gleiche Vorzeichen und ihre Quadrate bilden eine geometrische Proportion.

(24)γ. Wenn die Geminante verschwindet, also die Function

$$G_4 = -\Sigma = 0$$

wird, so hat die Gleichung mindestens ein Paar gleiche Wurzeln von entgegengesetztem Vorzeichen. Wenn also ihre Discriminante nicht gleich Null ist, so verschwindet jedenfalls die Discriminante $\overline{D}_{4,2}$ der Gleichung ihrer Wurzelquadrate.

(26)γ. Wenn die Function

$$W = 0$$

wird, so bilden die Quadrate der vier Wurzeln eine arithmetische Proportion oder sind einander arithmetisch zugeordnet.

(28)γ. Wenn die Function

$$\Phi = 0$$

wird, so ist eine Wurzel gleich der Summe der drei übrigen.

(29)γ. Wenn die quadratische Invariante verschwindet, also

$$J_{4,2} = 0$$

wird, so sind die vier Wurzeln entweder einander äquianharmonisch zugeordnet oder die Gleichung hat drei gleiche Wurzeln. In diesem Falle muss aber zugleich die Discriminante $\overline{D}_4$ verschwinden. Da nun

$$\overline{D}_4 = J_{4,2}^3 - 27\,J_{4,3}^2$$

ist, so muss ebenfalls die kubische Invariante $J_{4,3}$ verschwinden.

(31)γ. Wenn die kubische Invariante verschwindet, also

$$J_{4,3} = 0$$

wird, so bilden die vier Durchschnittspuncte der Curve $y = f(x)$

mit der Abscissenaxe auf dieser vier harmonische Puncte. Denn aus

$$(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2 - 2x_3)(x_1 + x_2 - 2x_4) = 0$$

folgt

$$\frac{1}{x_2 - x_4} - \frac{1}{x_3 - x_4} = \frac{1}{x_3 - x_4} - \frac{1}{x_1 - x_4}$$

oder

$$x_3 - x_4 = \frac{2(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)}{(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)},$$

d. h. die Differenz der Wurzel x_4 von einer der drei übrigen, z. B. x_3, ist das harmonische Mittel der Differenzen derselben Wurzel von den beiden andern x_1 und x_2. Die Gleichung bleibt bestehen, wenn $x_1 = x_2 = x_4$ ist, also drei Wurzeln einander gleich sind. Hieraus erklärt sich, warum $J_{4,3}$ zugleich mit $J_{4,2}$ verschwindet.

(35) γ. Wenn die biquadratische Variante verschwindet, also die Function

$$V_4 = 0$$

wird, so ist eine Wurzel gleich dem arithmetischen Mittel der drei übrigen.

§ 80. Von den substituirten Functionen.

Die Substitutionen willkürlicher algebraischer Functionen, welche von den Algebristen angewendet worden sind, um die Reduction einer Gleichung zu bewerkstelligen, sind von der verschiedensten Art. Das Verfahren führt im Allgemeinen zu zwei besonderen Functionen, einer Resolventen und einer Reducirten. Der wesentliche Unterschied zwischen der Reducirten und der Resolventen ist der, dass die Reducirte von dem Grade der gegebenen Gleichung bleibt oder wenigstens den Charakter derselben beibehält, die Resolvente aber von einem andern zumeist nächstniedrigerem Grade ist. So ist z. B. bei den biquadratischen Gleichungen jede Resolvente vom dritten Grade oder wenigstens stets auf denselben reducirbar, was in dem Umstande begründet ist, dass sich die vier Wurzeln auf drei- (oder 6) fache Art zu zweien combiniren lassen. Die Form der Resolventen kann je nach der Methode der Auflösung eine sehr verschiedene sein. Indess wird sich in der Folge ergeben, dass, wie zuerst Ball*) gezeigt hat, sämmtliche Auflösungsmethoden der biquadratischen Gleichungen auf die gemeinschaftliche Resolvente

$$z^3 - \mathfrak{J}z + 2\mathfrak{F} = 0$$

führen, wo $\mathfrak{J}$ die quadratische, $\mathfrak{F}$ die kubische Invariante der biquadratischen Gleichung bezeichnen. Aehnliches gilt von den Resolventen der kubischen Gleichungen.

Es sollen hier zunächst sämmtliche bis jetzt angewandten Substitutionen in einer bestimmten Ordnung zusammengestellt werden. Dieselben lassen sich in sieben gesonderte Klassen eintheilen, wobei die eingeführten Hülfsgrössen mit der Unbekannten x eine algebraische Function von verschiedenem Grade bilden und zwar

a. eine lineare Function von x:

(1) (I, III)**) $\left.\begin{array}{r} x - (u + v) = 0 \\ \text{oder } x - (z_1 + z_2) = 0 \end{array}\right\}$? Ferro (1505 oder 1515), Tartaglia* (1541), Cardano* (1545), Hudde* (1659), Euler* (1770), Hulbe* (1794), Guglielmini* (1809), Grunert (1863).

(2) (II, III, IV) $x - (x' + z) = 0$; (lineare Variation) Vieta (1615), Mallet (1780), Hulbe (1794), Schönberg (1812), Francoeur* (1837), Cockle (1841), Bretschneider (1844), Schlesicke (1851), Björling (1852), Arndt (1864), Unferdinger (1864).

(3) (III) $x - \left(\frac{1}{u} + z\right) = 0$; Hulbe (1794), Vériot (1865).

(4) (II, IV) $x - (yu + z) = 0$; Schlömilch (1861).

---

*) Quart. Journ. of Math. VII. p. 6 u. 358. 1866. Man vergleiche Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVIII. S. 94. 1873.

**) Die römischen Ziffern bezeichnen den Grad der Gleichung. Die mit * bezeichneten Methoden setzen die Wegschaffung des zweiten Gliedes voraus. Die Substitutionen, bei denen kein Name verzeichnet ist, sind vom Verfasser mit Erfolg angewendet worden. Da es unmöglich ist, bei den einzelnen Autoren ihre Abhandlungen zu citiren, durch welche dieser Zweig der Analysis in irgend einer Hinsicht gefördert worden ist, so möge es gestattet sein, nur die Jahreszahlen hinzuzusetzen und den Leser auf das im VIII. Abschnitte aufgestellte Verzeichniss der Gesammtlitteratur hinzuweisen.

(5) (III) $x - \left(\frac{b}{z} - z\right) = 0$ oder $z^2 + xz - b = 0$ Vieta* (1615), Ditton* (1709), Halcke* (1719), Hulbe* (1794), Michaelis* (1852).

(6) (III) $xv - \frac{1}{9}[9v^2 - 3av + (a^2 - 3b)] = 0$; Schlesicke (1848), Grunert (1848).

(7) (III) $xz - \left(z^2 - \frac{1}{3}az + u\right) = 0$.

(8) (III) $xv - [z^3 + az^2 + (b + v)z + c] = 0$; Hulbe (1794).

(9) (IV) $xz^2 + \left(z^3 + Cz - \frac{1}{8}c\right) = 0$; Hulbe* (1794).

(10) (IV) $xz^2 + \left(z^3 + \frac{1}{4}az^2 + Cz + D\right) = 0$; M. (1866).

(11) (III) $x(3z^2 + 3uz + b) - (3uz^2 - 2bz - 3c) = 0$; Lockhardt* (1825).

(12) (III) $x\left[3z^2 + 3uz - \frac{1}{3}(a^2 - 3b)\right]$
$-\left[3uz^2 + \frac{2}{3}(a^2 - 3b)z - \frac{1}{9}(2a^3 - 9ab + 27c)\right] = 0$; (1866).

(13) (III, IV) $x - (u + v + w) = 0$; Euler* (1732), Lagrange* (1794), Bourdon* (1830), Grunert (1863).

(14) (II, III, IV) $x - (\sqrt[n]{z_1} + \sqrt[n]{z_2} + \sqrt[n]{z_3} + \cdots) = 0$; Euler* (1732), Lagrange.

(15) „ $x - \left(A\sqrt[n]{u} + B\sqrt[n]{u^2} + C\sqrt[n]{u^3} + \cdots\right) = 0$; Euler* (1763), Waring* (1762).

(16) „ $x - \left(A\sqrt[n]{1^1} + B\sqrt[n]{1^2} + C\sqrt[n]{1^3} + \cdots\right) = 0$; Bézout* (1762).

(17) (III, IV) $x - (z_1\sqrt[n]{1^1} + z_2\sqrt[n]{1^2} + z_3\sqrt[n]{1^3} + \cdots) = 0$; Mossbrugger (1857).

(18) (IV) $x - [\sqrt{Az_1 + B} + \sqrt{Az_2 + B} + \sqrt{Az_3 + B}] = 0$; Cayley, Lebesgue*, Hesse, Hermite (1858).

(19) (II) $x - (u + v\sqrt{-1} + w\sqrt{\div\sqrt{-1}}) = 0$; Scheffler (1851).

(20) (III) $x - [(u + v\sqrt{-1}) + (u_1 + v_1\sqrt{-1})] = 0$; Grunert* (1845).

(21) (IV) $x - (t + u + v + w) = 0$; Grunert (1863).

(22) (III) $x - \frac{1}{2}\left[x + y\sqrt{-1} + \frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}}\right] = 0$; M. (1866).

(23) (II, III, IV) $x - v\frac{u + y}{u + z} = 0$; Hulbe (1794).

(24) „ $x - \frac{z_1 + z_2 u}{1 + u} = 0$; Bézout* (1762), Legendre (1811), Bretschneider (1844), Heilermann (1855), Spitz (1859), Matthiessen (1866).

(25) „ $x - \left(z + y\frac{u + 1}{u - 1}\right) = 0$; Sommer (1856).

(26) (II, III) $\frac{x + z_1}{x + z_2} - u = 0$; Bézout (1762), Matthiessen (1866).

(27) (II, III, IV) $x - \left(z + \frac{yu}{u - 1}\right) = 0$.

(28) „ $x - \frac{u}{2}\left(\frac{u + z}{z}\right) = 0$.

(29) „ $x - \frac{2zu}{z + u} = 0$.

(30) „ $x - \frac{zu}{2z - u} = 0$.

(31) (II) $x - \frac{u - b}{a - v} = 0$.

(32) (II) $x - z\frac{u}{u + 1} = 0$.

(33) (III) $x - \frac{1}{3}uv(u + v) = 0$.

(34) (II, III) $x - \frac{z}{u - 1} = 0$.

b. eine quadratische Function von x:

(35) (II) $\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = 0$; Diophant (360), Aryabhatya (500), Brahmegupta (630), Omar Alkhayyami (1050), Bhascara (1180), Fibonacci (1202), Pin Kue (1593).

(36) (II, III, IV) $x^2 - (u + v) = 0$.

(37) „ $x^2 - 2zx + z^2 - u = 0$; Hulbe (1794), Matthiessen (1863).

(38) (II, III, IV) $x^2 + vx + u = 0$.

(39) „ $x^2 + vx + (u - y) = 0$; Tschirnhaus* (1683), Bring* (1786), Lagrange (1770).

(40) (II) $x^2 + vx - b = 0$.

(41) „ $\left(\frac{x + \frac{1}{2}a + u}{x + \frac{1}{2}a + v}\right)^2 - \frac{u}{v} = 0$.

(42) „ $\left(\frac{x + z_1}{x + z^2}\right)^2 + 1 = 0$.

(43) „ $\left(\frac{x + z_1}{x + z_2}\right)^2 - u = 0$.

(44) „ $$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^2 = \frac{a + 2z_1}{a + 2z_2} = \frac{b - z_1{}^2}{b - z_2{}^2} = \frac{a z_1{}^2 + 2b z_1}{a z_2{}^2 + 2b z_2} = \frac{z_1{}^2 + a z_1 + b}{-(z_2{}^2 + a z_2 + b)} = \frac{(z_1 + a)^2 - b}{(z_2 + a)^2 - b}.$$

(45) „ $\left(\frac{x + z}{x - z}\right)^2 - \frac{a - 2z}{a + 2z} = 0$.

(46) (III) $\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 2ax + b - y = 0, \\ 3x + a - z = 0, \end{array}\right\}$; Arndt (1864).

(47) „ $\left(x^2 + ax + \frac{2}{3}b\right) T_1 + \left(x + \frac{1}{3}a\right) T_2 - y = 0$; Hermite (1856).

c. eine kubische Function von x:

(48) (III) $x^3 - (x' + z) = 0$.

(49) „ $\left(\frac{x + u}{x + v}\right)^3 - w = 0$; Bézout* (1762).

(50) „ $\left(\frac{x + u}{x + v}\right)^3 - \frac{u}{v} = 0$; Jourdain* (1859).

(51) „ $\left(\frac{x + \frac{1}{3}a + u}{x + \frac{1}{3}a + v}\right)^3 - \frac{u}{v} = 0$.

(52 a) „ $\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3 - \frac{a + 3z_1}{a + 3z_2} = 0$; Faure (1864).

(52 b) „ $$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3 = \frac{a + 3z_1}{a + 3z_2} = \frac{3z_1{}^2 - b}{3z_2{}^2 - b} = \frac{z_1{}^3 + c}{z_2{}^3 + c} = \frac{az_1{}^2 + bz_1}{az_2{}^2 + bz_2} = \frac{bz_1{}^3 + 3cz_1{}^2}{bz_2{}^3 + 3cz_2{}^2} = \frac{az_1{}^3 - 3cz_1}{az_2{}^3 - 3cz_2}$$

$$= \frac{z_1^3 + az_1^2 + bz_1 + c}{z_2^3 + az_2^2 + bz_2 + c} = \frac{(z_1 + a)^3 - (ab - c)}{(z_2 + a)^3 - (ab - c)};$$

Matthiessen.

(53) (III) $x^3 + vx^2 + ux - c = 0$.

(54 a) (IV) $tx^3 + ux^2 + vx + (w - y) = 0$; Tschirnhaus (1683), Lagrange (1770), Bring (1786), Jerrard (1856).

(54 b) „ $\left(x^3 + ax^2 + bx + \frac{3}{4}c\right)T_1 + \left(x^2 + ax + \frac{1}{2}b\right)T_2 + \left(x + \frac{1}{4}a\right)T_3 - y = 0$; Hermite (1856).

d. eine biquadratische Function von x:

(55) (IV) $(x^2 + y)^2 - (x\sqrt{2y - b} + \sqrt{y^2 - d})^2 = 0$; Ferrari* (1545), Bombelli* (1572).

(56) „ $\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + y\right)^2 - \left[x\sqrt{2y + \frac{1}{4}a^2 - b} + \sqrt{y^2 - d}\right]^2 = 0$; Simpson (1745), Lagrange, Waring (1762).

(57) „ $\left(\frac{x^2 + y}{x + u}\right)^2 - w^2 = 0$; Bézout* (1762).

(58) „ $\left(\frac{x^2 + \frac{1}{2}ax + z}{x + y}\right)^2 - u^2 = 0$.

(59) „ $\left(\frac{x^2 + y_1x + z_1}{x^2 + y_2x + z_2}\right)^2 = \frac{a - 2y_1}{a - 2y_2} = \frac{b - y_1^2 - 2z_1}{b - y_2^2 - 2z_2}$

$$= \frac{c - 2y_1z_1}{c - 2y_2z_2} = \frac{d - z_1^2}{d - z_2^2}.$$

(60) „ $\left(\frac{x^2 + yx + z_1}{x^2 - yx + z_2}\right)^2 - \frac{a - 2y}{a + 2y} = 0$.

(61) „ $\left(\frac{x^2 + y_1x + z_1}{x^2 + y_1x + z_2}\right)^2 - \frac{y_1}{y_2} = 0$; Jourdain* (1859).

(62) „ $\left(\frac{x + y_1}{x + y_2}\right)^2 + \left(\frac{x + z_1}{x + z_2}\right)^2 = 0$.

Mit Variation: $x - (x' + z) = 0$ und Reducenten:

(63) (IV) $\left(\frac{x'^2 + yx' + v}{x'^2 - yx' + v}\right)^2 - u^2 = 0$; Reducente (22): $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$.

(64) „ $\left(\frac{x'^2 + y_2x' + v}{x'^2 + y_1x' + v}\right)^2 - \frac{y_2}{y_1} = 0$; „ „

(65) „ $\left(\frac{x'^2 + y_1x' + v}{y_2x'}\right)^2 - 1 = 0$; „ „

(66) (IV) $\left(\frac{x'^2 + yx' + z_1}{x'^2 + z_2}\right)^2 - \frac{z_1}{z_2} = 0;$ Reducente (23): $\alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0.$

(67) „ $\left(\frac{x'^2 + y_1 x' + z_1}{y_2 x' + z_2}\right)^2 - \frac{y_1^{\,2}}{y_2^{\,2}} = 0;$ Reducente (24): $\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0.$

(68) „ $\left(\frac{x'^2 + y_1 x' + z_1}{y_1 x' + z_2}\right)^2 - 1 = 0.$ „ „

(69) „ $\left(\frac{x'^2 + \frac{1}{2} a x' + z_1}{x'^2 + \frac{1}{2} a x' + z_2}\right)^2 - \frac{z_2}{z_1} = 0;$ Reducente (21): $\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma = 0.$

(70) „ $\left(\frac{x'^2 + yx' + z_1}{z_2}\right)^2 - 1 = 0.$ „ „

e. zwei lineare Functionen von x:

(71) (II) $\left(x + \frac{1}{2} a + u\right)\left(x + \frac{1}{2} a - u\right) = 0.$

(72) (II, IV) $x - (u \pm \sqrt{-v}) - 0;$ Franke (1850).

(73) „ $x - \varrho(1 \pm \sqrt{-n});$ Job (1864).

(74) „ $x - (\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = 0;$ Eytelwein (1824).

f. zwei quadratische Factoren:

(75) (IV) $(x^2 + ux + v)(x^2 - ux + p) = 0;$ Cartesius* (1637), Catalan* (1863).

(76) „ $(x^2 + ux + v)(x^2 + px + q) = 0;$ Lacroix (1799), Ley (1850), Grunert (1862).

(77) „ $\left[x^2 + \left(\frac{1}{2} a + u\right)x + v\right]\left[x^2 + \left(\frac{1}{2} a - u\right)x + p\right] = 0.$

(78) „ $\left[x^2 + \left(\frac{1}{2} a + u\right)x + (z + v)\right]$
$\times\left[x^2 + \left(\frac{1}{2} a - u\right)x + (z - v)\right] = 0;$ Simpson (1745), Euler (1770).

(79) „ $\left[x^2 + ux + \frac{1}{2}(b + u^2) - \frac{c}{2u}\right]$
$\times\left[x^2 - ux + \frac{1}{2}(b + u^2) + \frac{c}{2u}\right] = 0;$ Cartesius* (1637), Euler* (1764), Bézout* (1765), Lebesgue* (1858).

(80) (IV) $\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2y}\right)x+\left(y+\sqrt{y^2-d}\right)\right]$
$\times\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2y}\right)x+\left(y-\sqrt{y^2-d}\right)\right]$
$=0$; Simpson (1745), Lagrange (1770), Waring, Bellavitis.

(81) „ $\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4z}\right)x\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{2}[b-z]+\frac{1}{2}\sqrt{(b-z)^2-4d}\right)\right]$
$\times\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4z}\right)x\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{2}[b-z]-\frac{1}{2}\sqrt{(b-z)^2-4d}\right)\right]=0$; Ley (1850), Spitz (1859).

(82) „ $\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{8}{3}b+16z}\right)x\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{6}b+2z+\sqrt{\left(\frac{1}{6}b+2z\right)^2-d}\right)\right]$
$\times\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{8}{3}b+16z}\right)x\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{6}b+2z-\sqrt{\left(\frac{1}{6}b+2z\right)^2-d}\right)\right]=0$;
Bardey (1871).

(83) „ $\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a+z\right)x\right.$
$\left.+\frac{1}{16}\left(8z^2+4az+2[a^2-4b]-\frac{a^3-4ab+8c}{z}\right)\right]$
$\times\left[x^2+\left(\frac{1}{2}a-z\right)x\right.$
$\left.+\frac{1}{16}\left(8z^2-4az+2[a^2-4b]+\frac{a^3-4ab+8c}{z}\right)\right]=0$;
Blomstrand (1847).

Mit Variation: $x-(x'+z)=0$ und Reducenten:

(84) (IV) $(x'^2+ux'+p)(x'^2+vx'+p)=0$; Reducente (22): $\alpha^2\delta-\gamma^2=0$.

(85) „ $(x'^2+ux'+p)(x'^2+vx'-p)=0$; Reducente (23) $\alpha^2\delta-4\beta\delta+\gamma^2=0$.

(86) „ $(x'^2+v)(x'^2+ux'+p)=0$; Reducente (24): $\alpha^2\delta-\alpha\beta\gamma+\gamma^2=0$.

(87) (IV) $(x'^2 + ux' + p)(x'^2 + ux' + v) = 0$; Reducente (21): $\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma = 0$.

g. vier lineare Factoren:

(88) (IV) $[x - (u + v\sqrt{-1})]\,[x - (u - v\sqrt{-1})] \times [x - (p + q\sqrt{-1})]\,[x - (p - q\sqrt{-1})] = 0$.

(89) „ $[x - (y + r\cos\alpha)]\,[x - (y - r\cos\alpha)] \times [x + (y - r\sin\alpha)]\,[x + (y + r\sin\alpha)] = 0$; Bette* (1854).

(90) „ $[x - (u + \sqrt{v})]\,[x - (u - \sqrt{v})]\,[x + (u + \sqrt{w})] \times [x - (u - \sqrt{w})] = 0$; Arndt* (1864).

In den vorstehenden Formeln sind skizzenartig die Fortschritte der Algebra zusammengestellt, welche seit den ältesten Zeiten gemacht worden sind. Zugleich ist in diesem und den vorhergehenden Paragraphen der allgemeine Gesichtspunkt eröffnet, von welchem aus durch ein Substitutionsverfahren das vorgestellte Problem zu lösen ist. Ehe wir jedoch zur Anwendung des Princips auf die directe Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade fortschreiten, möge noch zur leichteren Orientirung in dem Gange der Entwickelungen, insbesondere zur klareren Einsicht in den inneren Zusammenhang der speciellen Methoden der Algebristen, eine tabellarische Uebersicht über die verschiedenen Resolventen vorausgeschickt werden.

§. 81. Die Resolventen der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Da in der modernen höheren Algebra statt der gewöhnlichen Form des Polynoms

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + sx + t = 0$$

die sogenannte Cayley'sche Form

$$(a, b, c, \ldots, s, t,)\widehat{\ }(x, 1)^n$$
$$= ax^n + \binom{n}{1} bx^{n-1} + \binom{n}{2} cx^{n-2} + \cdots + \binom{n}{1} sx + t = 0$$

zum Ausgangspunkte der Untersuchungen genommen wird, so sollen im Folgenden einige der wichtigsten Resolventen der gewöhnlichen Form auch in die der Cayley'schen Form transformirt werden.

Diese sind zur deutlichen Unterscheidung von den ersteren immer mit dem Index γ bezeichnet worden.

a. Die Resolventen der quadratischen Gleichungen.

I. $z + \frac{1}{2} a = 0$.

I γ. $az + b = 0$.

b. Die Resolventen der kubischen Gleichungen.

II. $(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0$ (Covariante).

III. $+ 3bz^2 + 9cz - b^2 = 0$. (Bézout.)

IV a. IV b. $\begin{cases} 2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0, \\ 4(a^2 - 3b)^2 y^2 - 3D_3 = 0, \quad y^2 = \frac{1}{3}(3z^2 + 2az + b). \end{cases}$

V a. V b. $\begin{cases} 9(a^2 - 3b)z + (a^3 - 27c) = 0; \\ (a^2 - 3b)^2 y^2 - 3D_3 = 0. \end{cases}$

VI a. VI b. $\begin{cases} (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0, \\ (a^2 - 3b)^2 y^2 - 3D_3 = 0. \end{cases}$

VII a. $z^6 + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + \frac{1}{729}(a^2 - 3b)^3 = 0$, (Lagrange).

VII b. $z^6 + cz^3 - \frac{1}{27} b^3 = 0$, (Vieta, Hudde, Euler, Hulbe).

VIII. $z^2 + 3(ab - 3c)z + 9(a^3c + 9c^2 - 6abc + b^3) = 0$; (Lagrange).

IX. $$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c)z + \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0.$$

X. $(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{3}(2a^3 - 9ab + 27c)z + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)^2 = 0$.

XI. $$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{4}(2a^3 - 5ab - 9c)z + \frac{1}{16}(a^4 - 2a^2b - 12ac + b^2) = 0.$$

II γ. $(ac - b^2)z^2 + (ad - bc)z + (bd - c^2) = 0$; (Covariante)

$$C_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & -z & z^2 \\ a & b & c \\ b & c & d \end{vmatrix} = (az + b)(cz + d) - (bz + c)^2$$

$$= -\frac{1}{9}a^2\,[(x_1+J_1x_2+J_2x_3)z+(x_2x_3+J_1x_3x_1+J_2x_1x_2)]$$
$$\times\,[(x_1+J_2x_2+J_1x_3)z+(x_2x_3+J_2x_3x_1+J_1x_1x_2)].$$

IV γ. $\begin{cases}2(b^2-ac)z+(bc-ad)=0,\\ 4(b^2-ac)^2y^2-\overline{D}_3=0.\end{cases}$

V γ. $\begin{cases}3a(b^2-ac)z+(b^3-a^2d)=0,\\ (b^2-ac)^2y^2-\overline{D}_3=0.\end{cases}$

VI. γ $\begin{cases}(bc-ad)z+2(c^2-bd)=0,\\ 4(b^2-ac)^2y^2-\overline{D}_3=0.\end{cases}$

VII γ. $z^6+(2b^3-3abc+a^2d)z^3+(b^2-ac)^3=0.$

X γ. $(b^2-ac)z^2+(2b^3-3abc+a^2d)z+(b^2-ac)^2=0.$

Die Resolventen lassen sich sämmtlich in einander transformiren. Substituirt man

in II:	$4z+a$	anstatt z,	so	erhält	man	XI,
„ II:	$-2z-a$	„	„	„	„	„	IX,
„ II:	$-z-\frac{1}{3}a$	„	„	„	„	„	X,
„ IX:	$\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}a$	„	„	„	„	„	X,
„ X:	$9z^3:(a^2-3b)$	„	„	„	„	„	VII,
„ VII:	$-\frac{1}{9}(a^2-3b)\left(z-\frac{1}{3}a\right)$	„	z^3,	„	„	„	II,
„ II:	$y-\frac{ab-9c}{2(a^2-3b)}$	„	z,	„	„	„	IV b,
„ IX:	$2z+\frac{ab-9c}{2(a^2-3b)}$	„	„	„	„	„	XI.

c. Die Resolventen der biquadratischen Gleichungen.

XII. $z^3-\frac{1}{2}bz^2-dz+\frac{1}{8}(4bd-c^2)=0;$ (Ferrari).

XIII. $z^3-bz^2+(ac-4d)z-(a^2d-4bd+c^2)=0;$ (Simpson).

XIV. $z^6+2bz^4+(b^2-4d)z^2-c^2=0;$ (Cartesius).

XV. $z^3+\frac{1}{2}bz^2+\frac{1}{16}(b^2-4d)z-\frac{1}{64}c^2=0;$ (Euler).

XVI. $z^3-2bz^2+(ac+b^2-4d)z+(a^2d-abc+c^2)=0;$ (Schlesicke).

XVII. $z^6-(3a^2-8b)z^4+(3a^4-16a^2b+16ac+16b^2-64d)z^2$ $-(a^3-4ab+8c)^2=0;$ (Lagrange, Grunert).

XVIII. $z^6-(3a^2-8b)z^4+(3a^4-16a^2b+64ac-256d)z^2$ $-(a^6-8a^4b+64a^3c-768a^2d+2048bd-512c^2)=0.$

XIX. $(a^3-4ab+8c)z^3-(3a^4-16a^2b+16ac+16b^2-64d)z^2$
$+(3a^5-20a^3b+24a^2c+32ab^2-64bc)z$
$-(a^3-4ab+8c)^2=0;$ (Lagrange)

oder: $z^3-\left[\frac{(a^2-4b)^2-64d}{a^3-4ab+8c}+2a\right]z^2+(3a^2-8b)z$
$-(a^3-4ab+8c)=0.$

XX. $(a^3-4ab+8c)z^3-(3a^4-14a^2b+20ac+8b^2-32d)z^2$
$+(3a^5-16a^3b+20a^2c+16ab^2-32ad-16bc)z$
$-(a^6-6a^4b+8a^3c+8a^2b^2-8a^2d-16abc+8c^2)=0;$
(Lagrange).

XXI. $(a^3-4ab+8c)z^6-(a^2c-4bd+8ad)z^4$
$-(ac^2-4abd+8cd)z^2+(c^3-4bcd+8ad^2)=0;$
(Heilermann).

XXII. $(a^3-4ab+8c)z^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)z^2$
$+(a^2c-4bc+8ad)z+(a^2d-c^2)=0;$ (Mallet, Hulbe);

oder: $(4z^3+3az^2+2bz+d)^2-(4z+a)^2(z^4+az^3+bz^2+cz+d)=0.$

XXIII. $(c^2-a^2d)z^3+(ac^2-4abd+8cd)z^2$
$+(bc^2+2acd-4b^2d+16d^2)z+(c^3-4bcd+8ad^2)=0;$

oder: $d(az^3+2bz^2+3cz+4d)^2$
$-(cz+4d)^2(z^4+az^3+bz^2+cz+d)=0.$

XXIV. $z^6+\frac{3}{2}az^5+\frac{1}{4}(3a^2+2b)z^4+\frac{1}{8}(a^3+4ab)z^3$
$+\frac{1}{16}(2a^2b+ac+b^2-4d)z^2+\frac{1}{32}(a^2c+ab^2-4ad)z$
$-\frac{1}{64}(a^2d-abc+c^2)=0;$ (Lacroix).

XXV. $z^6+\frac{3}{2}az^5+\frac{1}{4}(3a^2+2b)z^4+\frac{1}{8}(a^3+4ab)z^3$
$\frac{1}{8}(a^2b+2ac-8d)z^2+\frac{1}{8}(a^2c-4ad)z$
$+\frac{1}{8}(a^2d-4bd+c^2)=0;$

oder: $(6z^2+3az+b)^3-36\mathfrak{J}(6z^2+3az+b)-432\mathfrak{J}=0.$

XXVI. $z^6-bz^5+(ac-d)z^4-(a^2d-2bd+c^2)z^3+(ac-d)dz^2$
$bd^2z+d^3=0;$

oder: $\left(z+\frac{d}{z}\right)^3-b\left(z+\frac{d}{z}\right)^2+(ac-4d)\left(z+\frac{d}{z}\right)$
$-(a^2d-4bd+c^2)=0.$

XXVII. $z^6 + (2ac - b^2 + 4d)z^4 + (a^2c^2 - 2a^2bd + 8acd - 2bc^2)z^2 - (c^2 - a^2d)^2 = 0.$

XXVIII. $z^3 - (ac - 4d)z^2 + (a^2d - 4bd + c^2)bz - (a^2d - 4bd + c^2)^2 = 0.$

XXIX. $z^3 - \frac{ac - 4d}{\sqrt{a^2d - 4bd + c^2}} z^2 + bz - \sqrt{a^2d - 4bd + c^2} = 0.$

XXX. $z^3 - \frac{1}{12}(b^2 - 3ac + 12d)z + \frac{1}{216}(72bd + 9abc - 27a^2d - 27c^2 - 2b^3) = 0;$ (Strehlke).

oder: $\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0.$

XXXI. $(a^3 - 4ab + 8c)z^6 + 2(a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)z^5 + 5(a^2c + 8ad - 4bc)z^4 + 20(a^2d - c^2)z^3 - 5(ac^2 - 4abd + 8cd)z^2 - 2(bc^2 + 2acd - 4b^2d + 16d^2)z - (c^3 - 4bcd + 8ad^2) = 0;$ (Covariante).

XXXII. $27\mathfrak{J}z^3 - 9J^2z^2 + 27J\mathfrak{J}z + J^3 - 54\mathfrak{J}^2 - 0.$

XXI γ. $(2b^3 - 3abc + a^2d)z^6 - (2b^2d - 3acd + abe)z^4 - (2bd^2 - 3bce + ade)z^2 + (2d^3 - 3cde + be^2) = 0.$

XXII γ. $(2b^3 - 3abc + a^2d)z^3 + \frac{1}{2}(6b^2c + 2abd - 9ac^2 + a^2e)z^2 + (2b^2d - 3acd + abe)z + \frac{1}{2}(eb^2 - d^2a) = 0.$

XXIII γ. $\frac{1}{2}(ad^2 - b^2e)z^3 + (2bd^2 - 3bce + ade)z^2 + \frac{1}{2}(6cd^2 + 2bde - 9ec^2 + ae^2)z + (2d^3 - 3cde + be^2) = 0.$

XXX γ. $$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & b, & c+2\lambda \\ b, & c-\lambda, & d \\ c+2\lambda, & d, & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0;$$ (Heilermann, Aronhold);

oder: $-4\lambda^3 + (ae - 4bd + 3c^2)\lambda - (ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) = 0;$

oder: $(ad^2 - b^2e)\lambda^3 + \frac{1}{4}[a(cd - be)^2 - 4b(d^2 - ce)(bc - ad) + 4d(be - cd)(ac - b^2) - (ad - bc)^2e]\lambda - \frac{1}{4}[(ad - bc)^2(d^2 - ce) + (ac - b^2)(cd - be)^2] = 0;$

oder: $\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\partial \varDelta}{de}\right) = 0;$

$$\text{oder: } 6\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right):\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)+\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)\right]-\left[\left(\frac{\delta \Delta}{\partial \lambda}\right)+\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)\right]:6\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)=0,$$

oder:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & -\frac{1}{4}a(x_1+x_2+x_3+x_4), & \frac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4) \\ -\frac{1}{4}a(x_1+x_2+x_3+x_4), & \frac{1}{4}a(x_1+x_2)(x_3+x_4), & -\frac{1}{4}a(x_1x_2[x_3+x_4]+x_3x_4[x_1+x_2]) \\ a(x_1x_2+x_3x_4), & -\frac{1}{4}a(x_1x_2[x_3+x_4]+x_3x_4[x_1+x_2]), & a(x_1x_2x_3x_4) \end{vmatrix} = 0.$$

XXXI. γ. $(2b^3-3abc+a^2d)z^6+(6b^2c+2abd-9ac^2+a^2e)z^5$
$+5(2b^2d-3acd+abe)z^4+10(b^2e-ad^2)z^3$
$-5(2bd^2-3bce+ade)z^2-(6cd^2+2bde-9ec^2+e^2a)z$
$-(2d^3-3cde+be^2)=0$; (Covariante).

XXXII γ. $27J_{4,3}z^3-9J_{4,2}^2z^2+27J_{4,2}J_{4,3}z+J_{4,2}^3-54J_{4,3}^2=0.$

Die vorstehenden Resolventen lassen sich wie die früheren sämmtlich in einander transformiren. Die wichtigste unter ihnen und zugleich einfachste Form ist die Resolvente XXX γ, auch die Δ-Determinante von Aronhold genannt. Sie ist zuerst in der Form XXX von Strehlke, später als Resultante dreier linearer Gleichungen dargestellt von Heilermann.

Substituirt man in

XIII:	$z=y+\frac{d}{y}$,	so erhält man XXVI;
XIII:	$z=\frac{1}{4}[y^2-(a^2-4b)]$,	„ „ „ XVII;
XVII:	$z^2=8\xi+\frac{1}{3}(3a^2-8b)$,	„ „ „ XXX;
XIX:	$z=(a^3-4ab+8c):y^2$,	„ „ „ XVII;
XX:	$z=\frac{1}{2}(y+a)$,	„ „ „ XIX;
XX:	$z=2y+a$,	„ „ „ XXII;
XXIV:	$z^2+\frac{1}{2}az+\frac{1}{4}y=0$,	„ „ „ XVI;
XXIV:	$z^2+\frac{1}{2}az+\frac{1}{4}(b+y)=0$,	„ „ „ XIII;
XXIV:	$z=\frac{1}{4}(y-a)$,	„ „ „ XVII;
XXV:	$z^2+\frac{1}{2}az+\frac{1}{2}y=0$,	„ „ „ XIII;

XXVI: $z^2 - \frac{1}{3}(b+6y)z + d = 0$, so erhält man XXX;

XXVI: $z^2 - yz + d = 0$, „ „ „ XIII;

XXVI: $z^2 - yz - d = 0$, „ „ „ XXVII;

XXI: $(ab-6c+6a\zeta)z^2-(bc-6ad+6c\zeta)=0$, „ „ „ XXX;

XXII: $(3a^2-8b+24\zeta)z+(ab-6c+6a\zeta)=0$, „ „ „ XXX;

XXIII: $(3c^2-8bd+24d\zeta)+(bc-6ad+6c\zeta)=0$, „ „ „ XXX.

Substituirt man in

XXI γ: $(bc-ad+2b\lambda)z^2-(cd-bc+2d\lambda)=0$, so kommt XXX γ;

XXII γ: $2(b^2-ac+a\lambda)z-(ad-bc-2b\lambda)=0$, „ „ XXX γ;

XXIII γ: $2(d^2-ce+e\lambda)+(cd-be+2d\lambda)z=0$, „ „ XXX γ;

XXXI γ: $z^2+\frac{bc-ad+2b\lambda}{b^2-ac+a\lambda}z+\frac{cd-be+2d\lambda}{bc-ad+2b\lambda}=0$, „ „ XXX γ.

Die Coefficienten dieser vier letzten Substitutionen sind die partiellen Differenzialquotienten der $\varDelta$-Determinante nach den Coefficienten a, b, c, d, e der biquadratischen Form

$$(a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, 1)^4.$$

II. Von der Auflösung der linearen Gleichungen.

§ 82. Die Methode der Transpositionen.

(Arab. *aldjebr w'almokabala*, lat. *capitulum numerationis secundum augmentum et diminutionem*, ind. *samasodanam*, *tulya çuddhis*, griech. *ἀφαίρεσις τῶν ὁμοίων καὶ προστίθησις τῶν λειπόντων*). Insofern im gegenwärtigen und allen folgenden Abschnitten immer vorausgesetzt wird, dass die aufzulösenden Gleichungen bereits auf ihre einfachste Form gebracht sind, also in dem speciellen hier in Betracht kommenden Falle es sich nur um die Auflösung der Gleichung

$$ax + b = 0$$

handelt, bedarf es natürlich keiner besondern Kunstgriffe, z. B. der Substitution einer besondern Function der Unbekannten. Da es aber in dem Plane des vorliegenden Werkes liegt, auch den Gang der historischen Entwickelung der Algebra klar darzulegen, so wird es hoffentlich den Beifall des Lesers gewinnen, wenn wir der Wichtigkeit entsprechend, welche die Alten der Auflösung der

Gleichungen ersten Grades beilegten, etwas genauer auf ihre Methoden eingehen. Da die alten Algebristen in ihrer Analysis meist von einer nicht geordneten, sich aus einer eingekleideten Aufgabe unmittelbar ergebenden Gleichung ausgingen, so wurden sie auch auf verschiedene Methoden der Entwickelung geführt, unter denen es auch nicht an Substitutionen fehlt, wie z. B. bei der sogenannten *regula infusa.* Die gebräuchlichste Methode, welche wir mit dem Namen „Transpositionsmethode" bezeichnen, findet sich bei den Indern, Egyptern, Griechen und Arabern. Sie besteht in der Anwendung folgender sich aus den arithmetischen Verbindungen von Gleichem mit Gleichem ergebenden Regeln:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x + a = b, \\ x = b - a. \end{cases} \quad \text{II.}\ \begin{cases} x - a = b, \\ x = b + a. \end{cases} \quad \text{III.}\ \begin{cases} a - x = b, \\ x = a - b. \end{cases}$$

$$\text{IV.}\ \begin{cases} ax = b, \\ x = b : a. \end{cases} \quad \text{V.}\ \begin{cases} x : a = b, \\ x = b \,.\, a. \end{cases} \quad \text{VI.}\ \begin{cases} a : x = b, \\ x = a : b. \end{cases}$$

$$\text{VII.}\ \begin{cases} \sqrt[m]{x} = a, \\ x = a^m. \end{cases} \quad \text{VIII.}\ \begin{cases} x^m = a, \\ x = \sqrt[m]{a}. \end{cases}$$

Ist demnach die gegebene Gleichung

$$ax + b = 0,$$

so findet man mit Anwendung von I. und IV. die Wurzel der Gleichung

$$x = -b : a.$$

Historische Bemerkungen. Das Wort Algebra stammt her von dem arabischen Wort *al-djebr.* Indess sind die beiden von den Arabern (zuerst von Mohammed ben Musa, dem Chowarizmier [um 830]) immer zusammen gebrauchten, wahrscheinlich dem Indischen entlehnten Ausdrücke *aldjebr w' almokabâ**) nur die Bezeichnungen für zwei bei der Auflösung der Gleichungen häufig vorkommende specielle Operationen. Der persische Mathematiker Beha Eddin (1547 — 1622) sagt in seiner „Quintessenz der Rechenkunst", indem er von der Einrichtung und Ordnung der algebraischen Gleichungen redet: „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet ist, wird ergänzt und etwas dieser Gleiches auf der anderen Seite addirt; das ist *al-djebr.* Die homogenen und gleichen Glieder werden ausgeworfen und das ist *almokabalâ.*" *Aldjebr* ist demnach die Ergänzung (lat. *augmentum*, griech. *προςτίθησις τῶν λειπόντων*) von *djabarâ* (*restauravit*), z. B.

---

*) Moh. ben Musa Alchowaresmi *Algebra oualmokabala,* publ. by Rosen. London 1831.

$$px - q = x^2,$$
$$px = x^2 + q.$$

Al-mokabalâ kommt her von *kabalâ* (*oppositus fuit*); die gegenüberstehenden gleichen Glieder werden gehoben (griech. *ἀφαίρεσις τῶν ὁμοίων*, lat. *diminutio*, ind. *tulya-çuddhis*). Für die beiden genannten arabischen Bezeichnungen gebraucht Bhascara das Wort *sama-sodanam* (Transposition). Ein algebraisches Beispiel dieser Art ist

$$x^3 + r = x^2 + px + r,$$
$$x^3 = x^2 + px.$$

Aldjebr ist eine Hauptoperation bei den Alten, weil sie die Gleichungen ausschliesslich unter dieser positiven Form beider Seiten betrachten; denn eine Gleichung der auf Null gebrachten modernen Form

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{(Harriot)}$$

ist für sie ein Unding und gehört zu den Unmöglichkeiten, wozu sie dem entsprechend auch die negativen Wurzeln rechnen.

Bemerkenswerth sind noch die Bezeichnungen der bestimmten und der unbekannten Grössen, die Art wie die Gleichungen geschrieben und classificirt werden, so wie die Nomenclatur der algebraischen Analysis.

Bei den Indern werden die bestimmten Zahlen oder die Einheiten mit *rupa* (synk. *ru*) bezeichnet, bei Diophant mit dem Worte *μονάδες* (synk. $\mu^{\bar{o}}$) Die Araber bezeichnen dasselbe mit „Zahl", die Chinesen mit *taë*. Die Coefficienten der Unbekannten werden von den Indern *pracriti*, von Diophant *πλῆθος* genannt.

Die verschiedenen Unbekannten oder Hauptgrössen algebraischer Gleichungen, welche wir mit den letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets zu bezeichnen pflegen, werden von den Indern „Farben" genannt und durch die vorderen Charaktere der Farbennamen ausgedrückt, wie का *Ka* (*kálaca*, schwarz), नी *Ni* (*nílaca*, blau), पी *Pi* (*pítaca*, gelb), लो *Lo* (*lóhitaca*, roth), u. s. w. Die Zahlencoefficienten werden hinter diese Charaktere gesetzt und die negativen Glieder durch einen Punkt über denselben angedeutet. Bei den Chinesen z. B. *Pin kue* lib. V. trifft man auf Bezeichnungen verschiedener Unbekannten mittels der Charaktere der Bilder des chinesischen Thierkreises: Maus, Ochs, Tiger u. s. w. Diophant unterscheidet mehrere Unbekannte eines algebraischen Ausdruckes durch Ordnungszahlen: *ὁ πρῶτος ἀριθμὸς, ὁ δεύτερος, ὁ τρίτος*. Eben so verschieden bei den Völkern des Alterthums war die Bezeichnungsweise der Potenzscala einer und derselben Unbekannten. Handelt es sich um die Bezeichnung oder Benennung einer Hauptunbekannten oder gesuchten Zahl, so gebrauchen die Inder die Worte *Javat-tavat* (synk. *Ja*, या); die Chinesen das Wort *yuen*; die Egypter das Wort *hā'* (Haufen). Es ist die erste Potenz der Unbekannten, also x, griech. *ἀριθμὸς*, (synk. ς́, oder ς^{o}, Plur. ς ς̃), arab. *chaï*, Ding (synk. ش) oder *djizr* (*radix*), lat. *res* (synk. *R*), später in Nachahmung von Diophant *numerus* (synk. N), ital. *cosa* (*causa*, *chose*). Die zweite Potenz der Unbekannten, also x^2, ist im Indischen *varga* (synk. या व), egypt. *Katze*, arab. *mâl* (synk. م), griech. δύναμις (synk. $\delta^{\bar{\upsilon}}$, Plur. $\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$), lat. *census*, später *quadratum* (synk. Z und $A\,q = a^2$). x^3 ist egypt. *Maus*, arab. *kab* (synk. ك), griech. $\kappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\alpha}$ u. s. w.

Wie die alten Algebristen die Gleichungen schrieben, möge ebenfalls durch einige Proben veranschaulicht werden, aus denen hervorgeht, dass die Inder die correspondirenden Glieder der Seiten der Gleichung übereinander setzen, dass die älteren Araber sie im rhetorischen Style ausdrücken, Diophant dagegen so wie die späteren Araber und die älteren Italiener zur Zeit Cardano's und Vieta's die Gleichungen in synkopirter Form ähnlich wie wir schreiben:

Hā' *neb-f* *ma-f* *ro sefeχ-f* *hi-f* *χeper-f* *em sa sefeχ*;

Haufen sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es gibt : 37

d. i. $x\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + 1\right) = 37$

(Ahāmesu, Papyrus Rhind [1700 v. Chr.]).

याव २	या १	रू ३०	=	*Ja bha* 2	*Ja* 1	*Ru* 30
याव ०	या ०	रू ८		*Ja bha* 0	*Ja* 0	*Ru* 8

$$\text{mod.}\left\{\begin{array}{rrr} 2x^2 - & x & + 30 \\ = 0x^2 + & 0x & + 8 \end{array}\right\} \text{ oder: } 2x^2 - x + 30 = 8; \text{ (Bhascara).}$$

$x^3 + 15x^2 + 66x = 360$; (Tsin Kiu Tschau).

Die positiven Zahlen werden mit rother, die negativen mit schwarzer Tinte geschrieben.

$\kappa^{\bar{\upsilon}}\,\beta\ \ \delta^{\bar{\upsilon}}\,\bar{\alpha}$ ἴση $\varsigma\varsigma^{o\bar{\iota}\varsigma}\,\delta$ ⋔ $\mu^{\bar{o}}\,\overline{\iota\beta}$,

$2x^3 + x^2 = 4x - 12$; (Diophantus).

Census et quinque radices equantur viginti quatuor;

$x^2 + 5x = 24$; (Moh. ben Musa).

Cubus, latera et numerus aequales sunt quadratis;

$x^3 + bx + c = ax^2$;

(Omar Alkhayyami).

م ش

١ ١٩ ل ٣٨

$38 = 19x + x^2$; (Moh. Alkalzadi).

16 *census et* 2000 *aequales* 680 *rebus*; (Regiomontanus).

$16x^2 + 2000 = 680x$.

Cubus $\bar{p}$ 6 *rebus aequalis* 20; (Cardano),
$x^3 + 6x = 20$;
$1C - 8Q + 16N$ *aequ.* 40; (Vieta),
$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$;
1 ③ ∞ 13 ① + 12; (Girardus).
$x^{3*} + px + q \infty 0$; (Cartesius).

Wenn nun auch in dieser verschiedenen Schreibweise der algebraischen Gleichungen eine gewisse Ordnung der Glieder nach den Potenzen der Unbekannten erkennbar ist, so weicht doch die Classification der Gleichungen bei den älteren Algebristen wesentlich von der modernen ab. Während wir die Gleichungen nach dem höchsten Exponenten der Unbekannten classificiren in Gleichungen ersten, zweiten, dritten Grades u. s. w., werden sie bei Diophant, entschieden aber bei den Arabern seit Mohammed ben Musa nach der Anzahl der Glieder eingetheilt. So heisst es bei Letzterem: Zur Rechnung der Algebra können drei Grössen verbunden werden: die Wurzel, das Quadrat und die Zahl und zwar:

1. Ein Quadrat ist gleich Wurzeln; $(x^2 = ax)$;
2. Ein Quadrat ist gleich einer Zahl; $(x^2 = a)$;
3. Wurzeln sind gleich einer Zahl; $(ax = b)$.

Dann gibt es drei zusammengesetzte Fälle:

4. Ein Quadrat und Wurzeln sind gleich einer Zahl; $(x^2 + ax = b)$;
5. Ein Quadrat und eine Zahl sind gleich Wurzeln; $(x^2 + a = bx)$;
6. Wurzeln und eine Zahl sind gleich einem Quadrat; $(ax + b = x^2)$.

Ebenso ist die Eintheilung in sechs Fälle noch bei Alkalzadi († 1477). Aber bei Omar Alkhayyami († 1123), von dem wir ein Werk über die geometrische Auflösung der kubischen Gleichungen besitzen, sind auch die kubischen Formen berücksichtigt. Derselbe theilt die Gleichungen zunächst ein in einfache und zusammengesetzte; darauf die letzteren in dreigliedrige und viergliedrige. Auf diesem Wege findet Omar im Ganzen 25 specielle Fälle, die er dann einzeln löst.

Was endlich noch die Nomenclatur der Algebra als Wissenschaft anbetrifft, so heisst bei den Indern die allgemeine Arithmetik *Bija ganita*, die Algebra im engern Sinne *Avyakta ganita* (Rechnung mit Unbekannten). Die Chinesen bezeichnen mit den Worten *Tien yuen* die Auflösung der Gleichungen. Die Griechen, von denen wir Schriften über Algebra im engern Sinne nicht besitzen, da die Arithmetik des Diophant wesentlich zahlentheoretische Probleme behandelt, rechnen die Algebra unter die Logistik oder das practische Rechnen, und so heisst sie zuweilen auch bei den Algebristen des XVI. Jahrhunderts (Peucer). Bei den älteren Italienern heisst die Algebra entweder ebenso oder *ars magna, ars rei et census, la regola o l'arte della cosa*; auch latinisirt *ars cossica* und *regula cosae*. Zur Zeit Rudolffs, Stifel's und Peucer's nannte man die Algebra bald einfach *Coss* oder *regula coss*, bald wieder *Algebra* oder *Logistice*. Vieta gebrauchte auch den Ausdruck *arithmetica speciosa*, Reimarus *arithmetica analytica*. In neuester Zeit ist die Benennung bestimmte Analytik vielfach in Gebrauch gekommen, um die Algebra der bestimmten Gleichungen von der Diophantischen Algebra der unbestimmten Gleichungen oder der sogenannten unbestimmten Analytik zu unterscheiden.

Zu der obenerwähnten Transpositionsmethode, welche in der Scheidung der bekannten und unbekannten Grössen auf die entgegengesetzten Seiten der Gleichung, sowie in der Vereinigung homogener Grössen besteht, finden wir Erläuterungen bei Diophantus, Brahmegupta, Mohammed ben Musa, Bhascara, Alkalzadi, Beha Eddin und Nejm Eddin. Die Anleitung des Beha Eddin ist bereits oben wörtlich dem Texte seines Werkes entnommen. Zur Vergleichung fügen wir noch die allgemeinen Regeln hinzu, welche von Diophantus, Bhascara und Nejm Eddin gegeben worden sind. Wenn dieselben in der Sache auch nichts Neues bieten, so sind sie doch charakteristisch theils durch ihre Form theils durch ihren Inhalt. Diophantus (Def. XI) sagt: „Wenn man bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, welche auf beiden Seiten homogene Grössen in verschiedener Anzahl enthält, so muss man Gleiches von Gleichem abziehen, bis ein Glied einem Gliede gleich wird. Wenn aber auf einer oder auf beiden Seiten negative Glieder vorhanden sind, so muss man die negativen Glieder auf beiden Seiten ergänzen, bis auf beiden Seiten die Glieder positiv geworden sind; und wieder muss man Gleiches von Gleichem subtrahiren, bis auf jeder Seite ein Glied übrig bleibt. Späterhin werde ich Dir zeigen, wie die Aufgabe gelöst wird, wenn zwei Ausdrücke gleich einem übrig bleiben.“ Mit den letzten Worten meint Diophant offenbar die zusammengesetzten Formen der quadratischen Gleichungen.

Bhascara Acharya gibt im vierten Kapitel des ersten Buches seiner *Bija ganita* folgende Anleitung: „Wenn die Aufgabe zu einer Gleichung geführt hat, so muss die Unbekannte oder das Quadrat der Unbekannten einer Seite von der andern Seite abgezogen werden, wenn hier eine solche Unbekannte ist; sonst von Null. Ferner subtrahirt man die Zahlen oder die Irrationalzahlen der andern Seite von der ersten Seite, so dass also die Unbekannten auf einer Seite und die Zahlen auf der andern bleiben. Die Zahl oder was sonst nachblieb, wird durch den Coefficienten der Unbekannten dividirt und der Quotient ist der Werth der Unbekannten.“

Darauf folgt die Lösung folgender Aufgabe: „Ein Mann hatte 300 Rupien und 6 Pferde; ein anderer 10 Pferde und 100 Rupien Schulden. Das Vermögen Beider war gleichgross und ebenso der Preis jedes Pferdes. Wie gross ist der Preis eines Pferdes?

Auflösung: Das Eigenthum des ersten Mannes betrug

$$Ja\ 6 \mid ru\ 300\,,$$

das Eigenthum des zweiten

$$Ja\ 10 \mid ru\ \dot{1}00\,.$$

Diese sind gleich. Zuerst schreibe ich sie über einander:

$$\frac{Ja\ \ 6 \mid ru\ 300}{Ja\ 10 \mid ru\ \dot{1}00}\,.$$

Dann nehme ich -100 Rupien von $+300$ Rupien; das gibt $+400$ Rupien; und ich nehme $6x$ von $10x$, wobei bleiben $4x$. 400 Rupien sind gleich $4x$:

$$\frac{ru\ 400}{Ja\ 4}\,.$$

Ich dividire das Erste durch das Zweite, 100 Rupien ist der Quotient und dies ist der Preis eines Pferdes."

Nejm Eddin Ali Khan gibt in seiner Algebra folgende bei den Mathematikern des Orients beliebten Regelverse, welche im Original in gereimten Distichen geschrieben und von Nesselmann (Algebra d. Griech. S. 50) ins Deutsche übertragen sind:

Die Seite, die ein Minusglied enthält,
Ergänz' und setze ein demselben gleiches
Bejahend auf die andre, o Gelehrter!
Im Kunstausdrucke nennt man dieses Djebr.
Zur Zeit, wenn Du die Gleichung bildest, wisse:
Wenn sich's ereignet, dass gewisse Glieder
Einander homogen und völlig gleich,
Auf beiden Seiten unverhüllt sich zeigen,
So wirf auf beiden Seiten sie heraus,
Und dieses nenne dann Mokabala.

§ 83. Die Substitutionsmethode von Job ben Salomon*).

(Regula infusa.)

Gegeben sei eine lineare Gleichung von der Art

$$\text{I.} \quad m(ax+b)+c=0\,.$$

Man substituire

$$\text{II.} \quad ax+b=y\,,$$

woraus sich ergibt

$$\text{III.} \quad my+c=0\,.$$

Man berechne mit Hülfe der Transpositionsregeln y aus III., setze den gefundenen Werth in II. ein und berechne daraus x.

---

*) Liber augmenti et diminutionis — — ab Abram Ibn Esra. Libri Hist. I. Note VI. p. 276.

Aufgabe aus Abraham Ibn Esra:

$$\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) = 20.$$

Man substituire $x - \frac{1}{3}x - 4 = y$ und berechne y zuerst aus

$$y - \frac{1}{4}y = 20.$$

Man findet $y = 26\frac{2}{3}$ und x aus

$$x - \frac{1}{3}x - 4 = 26\frac{2}{3}.$$

§ 84. Die Methode der falschen Substitutionen.

(Arab. *hisab al-khataayn*, *regula falsorum*, Rechnung der beiden Abweichungen oder Fehler; auch *arab. åml bi 'l kaffatain*, *regula lancium s. bilancis*; Methode der Wagschalen; endlich auch *hisab almafrûd*, *numeratio divinationis*, Rechnung der Annahme, Muthungsrechnung.) Die *regula falsorum* ist eine in vielen Fällen höchst practische Methode, welche von den neuern Algebristen leider nicht genug gewürdigt wird. Sie erfordert keine besondere Ordnung und Einrichtung der Gleichungen; nur darf die Unbekannte nicht in den Divisoren der etwa vorhandenen Quotienten vorkommen. Das in Rede stehende Verfahren besteht in Folgendem:

Gegeben sei die Gleichung

$$ax + b = 0.$$

Sind z_1 und z_2 zwei beliebige Zahlenwerthe und

$$\left.\begin{aligned} az_1 + b &= \varphi_1 \\ az_2 + b &= \varphi_2 \end{aligned}\right\} \text{(Fehler der Gleichung)},$$

so ist

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Allgemein: Ist gegeben die Gleichung

$$f(x) = 0$$

und $f(x)$ eine algebraische lineare Function, ferner z_1 und z_2 zwei beliebige Substitutionen, wobei

$$f(z_1) = \varphi_1, \quad f(z_2) = \varphi_2$$

wird, so ist die gesuchte Wurzel

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Beweis 1*). Es sei

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u, \quad \text{also} \quad x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u}.$$

Setzen wir den Werth von x in die gegebene Gleichung ein und ordnen nach u, so wird

$$(az_2 + b)u - (az_1 + b) = 0.$$

Demgemäss ist

$$u = \frac{az_1 + b}{az_2 + b} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2};$$

folglich

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Allgemein: Ist die gegebene Gleichung linear und

$$f(x) = 0,$$

so erhält man nach der Substitution

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} = \frac{z_1}{1 - u} - \frac{z_2 u}{1 - u},$$

und wenn man die Gleichung mit $u - 1$ multiplicirt,

$$f(z_2)u - f(z_1) = 0;$$

folglich ist

$$u = \frac{f(z_1)}{f(z_2)} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Beweis 2**). Substituirt man in der gegebenen Gleichung für x nach einander die falschen Wurzelwerthe oder Annahmen z_1 und z_2, so erhält man für die Function $f(x) = ax + b$ zwei Werthe, welche im Allgemeinen von Null verschieden sein werden. Die Abweichungen $az_1 + b$ und $az_2 + b$, welche man die Fehler *(falsa)* der Gleichung nennt, seien beziehungsweise φ_1 und φ_2. Es ist also

$$\begin{aligned} ax + b &= 0, \\ az_1 + b &= \varphi_1, \\ az_2 + b &= \varphi_2. \end{aligned}$$

---

*) L. Matthiessen, Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung derselben zur directen Auflösung der quadratischen und kubischen litteralen Gleichungen. Zeitschr. für Math. u. Phys. XV. S. 45. 1870.

**) Schlüssel zur Aufgabensammlung von Heis, herausgegeben von L. Matthiessen. I. § 61. Köln 1873. 2. Aufl. 1878.

Man subtrahire die beiden Fehlergleichungen von der gegebenen Gleichung, wodurch man erhält

$$a(x - z_1) = -\varphi_1\,, \quad a(x - z_2) = -\varphi_2\,.$$

Es ist folglich

$$a = \frac{\varphi_1}{z_1 - x} = \frac{\varphi_2}{z_2 - x}\,,$$

oder

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\,.$$

Die Abweichungen $x - z_1$ und $x - z_2$ der Annahmen von der Wurzel nennt man die Fehler der Substitutionen, und es verhalten sich also die Fehler der Gleichung wie die Fehler der Substitutionen. Aus dieser Proportion ergibt sich weiter

$$\varphi_1(z_2 - x) = \varphi_2(z_1 - x)$$

und der Wurzelwerth

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\,.$$

Das Charakteristische der Methode besteht darin, dass die Unbekannte mittels einer geometrischen Proportion gefunden wird.

Historische Bemerkungen. Die im Vorangehenden entwickelte Methode der Auflösung von Gleichungen ersten Grades, welche jetzt nur vorzugsweise noch als Näherungsmethode bei der Auflösung höherer numerischer Gleichungen angewandt wird und allgemein unter dem Namen *regula falsi* bekannt ist, findet sich in verschiedenen mathematischen Schriften der Araber, bei Abraham ben Esra (1130), Ibn Albanna (1222), Alkalzadi († 1486) und Beha Eddin (1547—1622). Die Methode ist indischen Ursprungs und nach einigen in der Pariser Bibliothek vorhandenen lateinischen Manuscripten das indische Werk von dem in der ersten Hälfte des XII. Jahrh. lebenden spanischen Juden Abraham ben Esra ins Hebräische, dieser Text aber später von Andern ins Lateinische übersetzt worden. Der vollständige Titel der lateinischen Uebersetzung, welche in *Libri, Hist. des sciences mathém.* I. Note VI abgedruckt ist, heisst: *Liber augmenti et diminutionis (aldjebr w'al mokabalâ), vocatus numeratio divinationis ex eo, quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est, composuit.* (Man vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys. IV. S. 383.) Leider ist das indische Originalwerk verloren gegangen und in den bekannten indischen Werken findet sich nirgend die Anwendung der Methode vor. Nun heissen in der angeführten lateinischen Uebersetzung die beiden Annahmen z_1 und z_2 für die Unbekannte *„lances“* (Wagschaalen); der Ursprung dieser Metapher ist aber räthselhaft. Im Arabischen heisst diese Rechnung geradezu *aml bi'l* *kaffat* (Methode der Wagschaalen) und in einzelnen Werken z. B. im Talkhys findet man auch die einer gleicharmigen Waage ähnliche Figur als Berechnungsschema gezeichnet. Auf die Schaalen werden die zwei willkürlichen Annahmen geschrieben.

Um diese Rechenmethode der älteren Algebristen zu veranschaulichen, mögen hier einige kurze Auszüge aus den erwähnten Schriftstellern wörtlich mitgetheilt werden.

Abraham, Liber augmenti et diminutionis etc. Capitulum de negociatione aliud: „Quod si tibi dixerit: Mercatus est quidam cum censu et duplatus est ei census, ex quo donavit duas dragmas et mercatus est cum residuo et duplatus est. Ex quo donavit quatuor dragmas, deinde negociatus est cum residuo et duplatus est ei. Donavit autem ex eo sex dragmas et nil remansit ei. Numerus ergo primi census quantus est?) Capitulum numerationis ejus secundum augmentum et diminutionem est ut assumas lancem ex tribus**) et duples eam, et erit sex; deinde dones ex eo duas dragmas. Et remanebunt quattuor. Ipsum ergo dupla et erit octo. Ex quo dona quattuor dragmas, et remanebunt quattuor dragme. Dupla ergo ipsum, et erunt octo. Ex eo itaque dona sex dragmas, et remanebunt due. Oppone ergo per ea non rem. Ipse vero jam dixit: non remansit ei res. Iam igitur errasti cum duobus additis. Deinde accipe lancem secundam divisam a prima, quae sit ex quattuor***), et dupla eam, et erit octo, ex quo dona duas, et remanebunt sex. Ea igitur dupla, et erunt duodecim. Et dona ex eis quattuor; remanebunt ergo octo. Ea vero dupla et erunt sedecim. Et dona ex eis sex, et remanebunt decem. Iam autem dixit, quod nihil ei remansit. Iam ergo errasti cum decem additis. Multiplica igitur lancem primam in errorem lancis secunde, quod est ut multiplices tria in decem, et fiunt triginta†). Deinde multiplica lancem secundam in errorem lancis prime. Quod est ut multiplices quattuor in duo, et erit octo††). Minue ergo minorem duorum numerorum ex majore eorum. Quod est ut demas octo et triginta, et remanent viginti duo; deinde minue minorem duorum errorum ex majore eorum. Quod est ut demas duo ex decem, et remanebunt octo. Deinde ergo viginti duo per octo et pervenient tibi duo et tres quarte†††). Hic igitur est numerus quem vis scire.“*

Es ist nun bemerkenswerth, dass ausser dieser Methode der Wagschaalen noch drei andere Methoden zur Lösung angewandt wurden, nämlich die *regula infusa,* die Transpositionsmethode, und die Methode der Umkehrung (*modus inveniendi quod est in sermone dicentis*).

---

*) Ist census $= x^2$, so ist $2\big(2(2x^2 - 2) - 4\big) - 6 = 0$.

**) $z_1 = 3$ (lanx prima), $\varphi_1 = +2$ (error lancis primae).

***) $z_2 = 4$ (lanx secunda), $\varphi_2 = +10$ (error lancis secundae).

†) $z_1 \varphi_2 = 30$.

††) $z_2 \varphi_1 = 8$.

†††) $\dfrac{z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \dfrac{22}{8} = 2\dfrac{3}{4} = x^2$.

Diese Methoden mit Ausnahme der *regula infusa* finden wir auch noch bei Beha Eddin (Kap. X), nur mit dem Unterschiede, dass von ihm nicht der Ausdruck *al-kaffat* (*balanx*), sondern *al-mafrûd* (Annahme) gebraucht wird.

Beha Eddin (Kap. IV. Aufsuchung der Unbekannten durch die Rechnung der beiden Abweichungen) sagt: „Nimm für die Unbekannte Beliebiges an und nenne es die erste Annahme und rechne damit der Aufgabe gemäss; stimmt es, so ist sie es. Wenn es aber abweicht, nach einer oder der andern Seite, so nenne dieses die erste Abweichung. Dann nimm eine andere Zahl und nenne sie die zweite Annahme; wenn sie abweicht, so entsteht daraus die zweite Abweichung. Darauf multiplicire die erste Annahme in die zweite Abweichung und nenne das Product das erste Resultat; und darauf die zweite Annahme in die erste Abweichung und das ist das zweite Resultat. Sind nun beide Abweichungen (zugleich) positiv oder negativ, so dividire die Differenz der beiden Resultate durch die Differenz der beiden Abweichungen; sind sie aber verschieden, so dividire die Summe der beiden Resultate durch die Summe der Abweichungen und der Quotient ist die gesuchte Zahl.“

Charakteristisch ist es für die Mathematik bei den Arabern, sowie bei den Indern und Chinesen, dass sie jeden Beweis der Richtigkeit aller Regeln für überflüssig hielten. Sie betrachteten vielmehr jede Entdeckung auf diesem Gebiete als eine Inspiration der Gottheit. Nur in Griechenland hatte sich die Mathematik von den Fesseln eines Monopols der Priester befreit. Wenn der Araber nicht ganz seiner Deductionen sicher ist, so entschuldigt er sich mit den Worten: Gott weiss die Wahrheit besser!

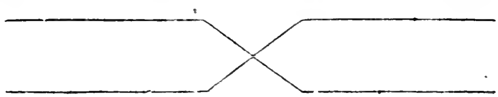
Die schematische Behandlung der *regula falsorum* ist als Methode der Wagschaalen am meisten ausgebildet bei *Ibn Albanna* und seinem Commentator *Alkalzadi*, weshalb wir hierauf noch etwas näher eingehen.

Talkhys amâli al hissâb d'Abu'l Abbas Ahmed Ibn Albannâ sagt P. II.: „Ueber die Methoden der Bestimmung der Unbekannten aus bekannten und gegebenen Grössen.“

„Dies Kapitel zerfällt in zwei Abschnitte: Abschnitt über die Methode der Proportion und Abschnitt über *aldjebr w' almokabala.*“

Erster Abschnitt. „Es ist die Methode der Proportion. Sie wird auf zweierlei Arten angewandt, durch die geometrische Proportion und durch die Methode der Wagschaalen.“ — (Die erste Methode wird erläutert und ist identisch mit unserm Regeldetrisatz.)

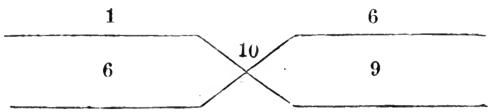
„Die Wagschaalen. Diese Methode ist geometrisch“ (arab. *hindissîje*, welches aber auch übersetzt werden kann „indisch“); „dieselbe ist folgende: Du nimmst eine Waage von folgender Gestalt,



stellst das, was bekannt und bestimmt ist, über den Drehpunct, legst auf eine der beiden Schaalen eine beliebige Zahl, rechnest dazu das Uebrige, was aufgegeben ist zu addiren, zu subtrahiren oder sonst was und vergleiche dann das Resultat mit dem, was über dem Drehpuncte steht. Hast Du es gerade getroffen, so gibt die Schaale die Unbekannte an. Hast Du es nicht getroffen, bemerke den Fehler über der Schaale, wenn das Resultat zu gross ist, und unter der Schaale, wenn es zu klein ist. Dann setze auch auf die andere Schaale eine andere beliebige Zahl und verfahre ebenso. Jetzt multiplicire den Fehler jeder Schaale mit dem Aufsatz der andern. Sind die beiden Fehler positiv oder beide negativ, so subtrahire den kleineren vom grösseren, ebenso das kleinere Product vom grösseren und dividire die Differenz der Producte durch die Differenz der Fehler. Ist dagegen der eine Fehler positiv, der andere negativ, so dividire die Summe der Producte durch die Summe der Fehler."

Ibn Albanna gibt noch einige Modificationen der Regel der Wagschaalen an, die in den folgenden Paragraphen demonstrirt werden sollen.

1. Zahlenbeispiel: Eine Zahl zu finden, welche um ihr Zweidrittelfaches und 1 vermehrt 10 gibt (Beha Eddin, kholâsat).



$$\text{Erste Schaale (rechts) } 9, \quad 9 + \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = 10 + 6;$$

erster Fehler $+6$;

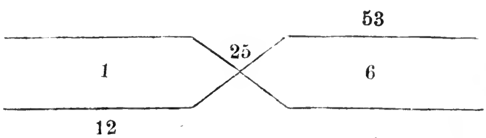
$$\text{zweite Schaale (links) } 6, \quad 6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + 1 = 10 + 1;$$

zweiter Fehler $+1$.

Folglich ist

$$x = \frac{6 \times 6 - 1 \times 9}{6 - 1} = 5\frac{2}{5}.$$

2. Zahlenbeispiel: Eine Zahl zu finden, deren Sechsfaches nebst ihrem Siebenfachen zusammen 25 ausmachen. (Commentar von Al-Kalzadi zum Talkhys.)



$$\text{Erste Schaale } 6, \quad 6 \times 6 + 6 \times 7 = 25 + 53;$$

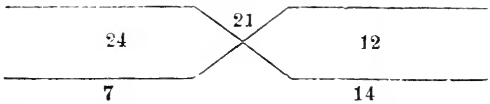
erster Fehler $+53$;

$$\text{zweite Schaale } 1, \quad 1 \times 6 + 1 \times 7 = 25 - 12;$$

zweiter Fehler -12.

$$x = \frac{53 \times 1 + 12 \times 6}{53 + 12} = 1\frac{12}{13}.$$

3. Zahlenbeispiel: Suche eine Zahl, deren Drittel und Viertel 21 ausmachen. (Arithmetik von Al-Kalzadi.)



Erste Schaale 12, das Resultat $= 21 - 14$; erster Fehler $- 14$,
zweite Schaale 24, das Resultat $= 21 - 7$; zweiter Fehler $- 7$.

$$x = \frac{14 \times 24 - 7 \times 12}{14 - 7} = 36.$$

§ 85. Modification der regula lancium bei Ibn Albannâ.

Ibn Albannâ sagt: „Wenn Du willst, kannst Du auch auf die zweite Schaale die Zahl der ersten oder eine andere setzen, berechne den Ansatz und vergleiche ihn mit dem, was über dem Drehpuncte steht; multiplicire das zweite Resultat mit der ersten Annahme und den ersten Fehler mit der zweiten. Ist der erste Fehler negativ, addire die Producte; ist er positiv, nimm den Unterschied derselben. Du dividirst dies Resultat durch das Resultat der zweiten Annahme und erhältst die gesuchte Zahl.“

Um die Richtigkeit dieser Regel zu beweisen, nehmen wir an die gegebene Gleichung sei

$$ax + b = 0.$$

Es sei z_1 eine beliebige Zahl eine Annahme für den unbekannten Wurzelwerth. Dann ist

$$\begin{aligned} ax + b &= 0, \\ az_1 + b &= \varphi_1, \end{aligned}$$

mithin az_1 das Resultat und φ_1 der Fehler.

Durch Subtraction erhält man hieraus

$$a = \frac{\varphi_1}{z_1 - x}.$$

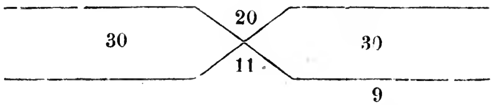
Setzt man diesen Werth in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$x\frac{\varphi_1}{z_1 - x} + b = 0$$

und

$$x = \frac{z_1 b}{b - \varphi_1} = \frac{z_1 (a z_1) - z_1 \varphi_1}{a z_1} = \frac{z_1 (\varphi_1 - b) - z_1 \varphi_1}{\varphi_1 - b}.$$

Zahlenbeispiel. Suche die Zahl, deren Fünftel und Sechstel zusammen 20 betragen. (A. Marre, Talkhys d'Ibn Albannâ.)



Annahme 30, Resultat 11, Fehler — 9.
Die gesuchte Zahl ist

$$x = \frac{30 \times 11 + 30 \times 9}{11} = 54\frac{6}{11}.$$

Um die Richtigkeit der andern Regel zu beweisen, gehen wir wieder aus von der Gleichung

$$ax + b = 0.$$

Man mache zwei verschiedene Substitutionen z_1 und z_2 für x, so erhält man ausser der gegebenen Gleichung noch zwei andere Bestimmungsgleichungen für die Constanten; nämlich

$$a z_1 + b = \varphi_1,$$
$$a z_2 + b = \varphi_2.$$

Aus der ersteren folgt durch Elimination von b

$$a = \frac{\varphi_1}{z_1 - x},$$

aus der zweiten durch Substitution von a

$$\frac{\varphi_1}{z_1 - x} z_2 + b = \varphi_2.$$

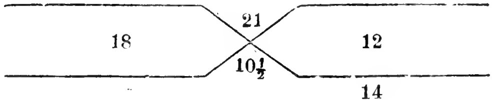
Hieraus ergibt sich der Wurzelwerth

$$x = \frac{z_1 (\varphi_2 - b) - z_2 \varphi_1}{\varphi_2 - b} = \frac{z_1 (a z_2) - z_2 \varphi_1}{a z_2},$$

oder kürzer

$$x = \frac{a z_1 - \varphi_1}{a}.$$

Zahlenbeispiel. Eine Zahl zu finden, deren Drittel und Viertel zusammen 21 ausmachen. (A. Marre, Talkhys d'Ibn Albannâ.)



Erste Annahme 12, erstes Resultat 7, erster Fehler — 14.

Zweite Annahme 18, zweites Resultat $10\frac{1}{2}$, zweiter Fehler — $10\frac{1}{2}$.

Man erhält hieraus

$$x = \frac{12 \times 10\frac{1}{2} + 18 \times 14}{10\frac{1}{2}} = 36.$$

§ 86. Geometrische Discussion der Methode der Wagschaalen.

Es muss jedem Leser des Talkhys auffallend erscheinen, dass Ibn Albannâ die Methode der Wagschaalen unter die Proportionen rechnet und sie auch „geometrisch" nennt, wenn man davon absieht, das Attribut „*hindissije*" mit „indisch" zu übersetzen, da wir in den Schriften der Hindu nichts dergleichen finden. Albannâ gibt uns nichts von irgend einem Beweise seiner Methode oder auch nur eine Andeutung über die ursprüngliche Beziehung der schematischen Figur zu der in Rede stehenden Methode. Es möge hier nur eine geometrische Erläuterung der *regula lancium* gegeben werden, worin sich allenfalls der Ursprung des von den Arabern benutzten Rechenschemas in Form einer *bilanx* vermuthen lässt.

Angenommen die Gleichungen, welche bei der Berechnung in Betracht kommen, seien

$$\begin{aligned} ax &= b, \\ az_1 &= b + \varphi_1, \\ az_2 &= b + \varphi_2. \end{aligned}$$

In der nebenstehenden Figur sei $OX = x$, $OZ_1 = z_1$, $OZ_2 = z_2$; ferner $Z_1M = \varphi_1$, $Z_2N = \varphi_2$; dann ist offenbar

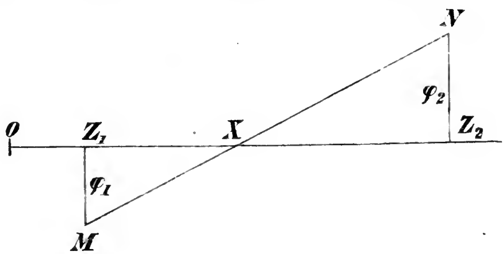


Fig. 6.

$$Z_1M : (OZ_1 - OX) = Z_2N : (OZ_2 - OX)$$

oder

$$\frac{\varphi_1}{z_1 - x} = \frac{\varphi_2}{z_2 - x};$$

folglich

$$x = \frac{z_2 \varphi_1 - z_1 \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Schreibt man an die Stelle X das Resultat der Gleichung bei fehlerfreier Substitution, also b; auf die Flächen die beiden Annahmen z_1 und z_2, bei M und N die beiden Fehler der Gleichung, also φ_1 und φ_2, so nimmt das Schema die folgende Gestalt an, welche dem arabischen „kaffat" in der That ziemlich genau entspricht:

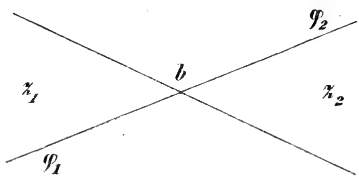


Fig. 7.

III. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§ 87. Methode von Brahmegupta und Bhascara*).

(Sansc. *mad' hyamaharana***) oder Herausbringung des mittelsten Gliedes.) Die Inder Brahmegupta und Bhascara geben zur Auflösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx = c$$

folgende Regel: „Man nehme die Zahl 4 und multiplicire sie mit dem Coefficienten des Quadrats der Unbekannten und multiplicire mit dem Producte beide Seiten der Gleichung und addire beiderseits das Quadrat des Coefficienten der Unbekannten. Alsdann nimm auf beiden Seiten die Quadratwurzel, transponire und der Werth der Unbekannten wird gefunden."

In algebraischen Zeichen ist die Auflösung der vorgelegten allgemeinen quadratischen Gleichung also folgende:

---

*) Brahmegupta and Bhascara, Algebra with arithmetic and mensuration, from the sanscrit translated by A. T. Colebrooke. London 1817.

**) Colebrooke übersetzt diesen term. techn. mit „Elimination des mittelsten Gliedes", Strachey „interposition of unknown" oder wörtlich „unknown means". Es ist wol nicht wahrscheinlich, dass der indische Ausdruck gleichbedeutend sei mit dem Arabischen „capitulum de mediatione radicum" (Methode der Halbirung der Wurzeln) bei Moh. ben Musa, da Brahmegupta mehrfach das Glied, welches die erste Potenz der Unbekannten enthält, das „mittelste" nennt.

$$ax^2 + bx = c,$$
$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac,$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2,$$
$$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2},$$
$$2ax = -b + \sqrt{4ac + b^2},$$
$$x = \frac{-b + \sqrt{4ac + b^2}}{2a}.$$

Die vorstehende algebraische Entwickelung ist sowol bei Brahmegupta als Bhascara im rhetorischen Stile gegeben; bei letzterem finden sich indessen auch Aufgaben in symbolischer und synkopirter Schreibweise gelöst, wovon eine Probe gegeben werden soll. Wir schicken nur noch die Bemerkung voraus, dass es sich bei den älteren Algebristen meistens nur darum handelt, positive Wurzelwerthe zu erhalten. Demgemäss statuiren sie nur folgende drei Fälle:

$$\text{I.}\quad x^2 + px = q;\quad x = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q};$$
$$\text{II.}\quad x^2 + q = px;\quad x = \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q};$$
$$\text{III.}\quad px + q = x^2,\quad x = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}.$$

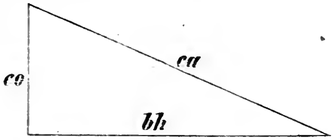
Für den Fall II. werden immer zwei Wurzelwerthe angegeben. In der 8. und 9. Aufgabe der *Bija ganita* von Bhascara Acharya heisst es: „Wenn (nach der Extrahirung der Wurzel) auf der einen Seite die Unbekannte und eine negative Zahl ist und auf der anderen Seite die Zahl kleiner als diese negative Zahl gefunden wird, dann gibt es zwei Auflösungen, indem man die Vorzeichen der andern Seite wechselt.“ Es ist nämlich

$$\sqrt{p^2 - 4q} < p,$$

folglich
$$x - \frac{1}{2}p = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}.$$

Derselbe Fall wird auch bei den Arabern stets berücksichtigt.

Aufgabe aus der *Bija ganita*: Wenn die Summe der beiden Katheten *(bhoje, cote)* und der Hypotenuse *(carna)* eines rechtwinkligen Dreiecks gleich 56 und ihr Product gleich 4200 ist, wie gross sind die Seiten?



(Pers. die Figur der Braut.)

Fig. 8.

Auflösung: Ich nehme an die *carna* ist *Ja* 1 und nehme ihr Quadrat, das ist *Ja bha* 1. Dies ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten nach der Figur der Braut. Da 4200 das Product der drei Seiten ist, so dividire ich 4200 durch die Unbekannte; der Quotient $\frac{ru\ 4200}{Ja\ 1}$ ist das Rechteck aus den beiden Katheten. Es ist bewiesen worden, dass der Ueberschuss des Quadrates der Summe zweier Zahlen über die Summe ihrer Quadrate gleich dem doppelten Rechteck aus beiden sei. Die Summe der beiden Katheten ist *Ja* $\dot{1}$ *ru* 56. Ich bilde das Quadrat *Ja bha* 1 *Ja* $1\dot{1}2$ *ru* 3136 und die Summe der Quadrate ist *Ja bha* 1. Ich nehme die Differenz, nämlich *Ja* $1\dot{1}2$ *ru* 3136 und diese ist gleich dem doppelten Rechteck aus den Katheten, also $\frac{ru\ 8400}{Ja\ 1}$. Folglich ist

(nach dem Text)	(in modernen Ausdrücken)
$\begin{array}{l\|l} Ja\ 1\dot{1}2 & ru\ 3136 \\ \hline Ja\ \ 0 & \frac{ru\ 8400}{Ja\ 1} \end{array}$	$\begin{array}{c} -112x+3136 \\ =0x+\frac{8400}{x}. \end{array}$

Dividire beiderseits durch 112, also

$\begin{array}{l\|l} Ja\ \dot{1} & ru\ 28 \\ \hline Ja\ 0 & \frac{ru\ 75}{Ja\ 1} \end{array}$	$\begin{array}{c} -x+28 \\ =0x+\frac{75}{x}. \end{array}$

Man schaffe die Brüche fort:

$\begin{array}{l\|l\|l} Ja\ bha\ \dot{1} & Ja\ 28 & ru\ \ 0 \\ \hline Ja\ bha\ 0 & Ja\ \ 0 & ru\ 75 \end{array}$	$\begin{array}{c} -x^2+28x \\ =0x^2+0x+75. \end{array}$

Multiplicire mit — 4 und addire das Quadrat von 28:

$\begin{array}{l\|l\|l} Ja\ bha\ 4 & Ja\ 1\dot{1}2 & ru\ 784 \\ \hline Ja\ bha\ 0 & Ja\ 0 & ru\ 484 \end{array}$	$\begin{array}{c} 4x^2-112x+784 \\ =484. \end{array}$

Die Quadratwurzel ist

$\begin{array}{l\|l} Ja\ 2 & ru\ \dot{2}8 \\ \hline Ja\ 0 & ru\ 22 \end{array}$	$2x-28=22;$

addire beiderseits 28, also

$\frac{ru\ 50}{Ja\ 2}$	$2x=50$

und dividire durch 2; dies gibt 25, welches ist *Ja* 1, also die gesuchte Hypotenuse *(carna)*.

Berechne nun *bhoje* und *cote*. Alle drei multiplicirt mit einander geben 4200. Dividire durch *carna*, also

$$\frac{4200}{25} = 168 = bhoje \times cote.$$

Die Summe von *bhoje* und *cote* ist 31 und $168 \times 4 = 672$. Das Quadrat von 31 ist gleich 961 und (die Differenz) 289. Die Quadratwurzel hiervon ist die Differenz von *bhoje* und *cote*, also 17. Subtrahire dies von einander, das gibt 14. Die Hälfte 7 ist *bhoje* und 31 vermehrt um 17 gleich 48, wovon die Hälfte 24 ist *cote*."

Ein anderes Beispiel. „Jemand gab mehrere Tage Almosen, und zwar in täglich gleichmässig wachsenden Portionen. Wird 1 von der Anzahl der Tage subtrahirt und der Rest halbirt, so ist diese Hälfte der Anzahl Dirhems, welche die Person am ersten Tage gab. Dieselbe nahm immer zu um die Hälfte, und die Anzahl der Dirhems ist gleich dem Product aus der Zahl der Tage, der Anzahl der ersten Dirhems und dem Werthe der Zunahme vermehrt um ein Siebentel des Productes."

Auflösung: Die Anzahl der Tage sei $4x + 1$; dann betrug die Gabe am ersten Tage $2x$ und x den täglichen Zuwachs, also

$$(4x + 1) \times 2x \times x = 2x^2 + 8x^3,$$

und dies vermehrt um $\frac{1}{7}$ desselben, also $(16x^2 + 64x^3) : 7$ die Summe der Dirhems. Nach einer Regel der *Lilavati* (die Progressionen betr.) ist nun $[(4x + 1) - 1]\, x + 2x$ gleich der letzten Gabe. Die Hälfte der Gabe des ersten und letzten Tages ist gleich der des mittelsten Tages. Multiplicire diese mit der Anzahl der Tage, so erhältst Du $8x^3 + 10x^2 + 2x$, welches gleich $\frac{16x^2 + 64x^3}{7}$ sein wird. Daraus folgt

$$8x^2 - 54x = 14.$$

Multiplicire diese Gleichung mit 8, denn in diesem Falle ist der Coefficient des mittelsten Gliedes gerade, und darum nimm den Coefficienten des Quadrats selber; addire das Quadrat des halben Coefficienten der Unbekannten; dies gibt

$$64x^2 - 432x + 729 = 841,$$

$$8x - 27 = 29,$$

$$x = \frac{29 + 27}{8} = 7.$$

§ 88. Methode von Diophantos*).

Diophant geht bei seiner Auflösung der quadratischen Gleichungen ebenfalls von dem allgemeinen Falle

$$ax^2 = bx + c$$

aus. Aus seiner durch viele Beispiele erläuterten Behandlung der quadratischen Formen geht sein Verfahren hervor, welches sich kurz so ausdrücken lässt: Man erhebe den halben Coefficienten von x zum Quadrat und addire dazu das Product aus der Zahl c und dem Coefficienten von x^2. Ziehe hieraus die Quadratwurzel, addire den halben Coefficienten von x und dividire die Summe durch den Coefficienten von x^2.

Die Wurzelform des Algebristen ist demnach

$$x = \frac{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + ac}}{a}.$$

Diese Methode ergibt sich aus seiner Behandlung folgender Beispiele:

		Norm:
IV. 33.	$3x + 18 = 5x^2;$	$ax + b = cx^2;$
IV. 45.	$6x + 18 = 2x^2;$	
VI. 6.	$6x^2 + 3x = 7;$	$ax^2 + bx = c;$
VI. 24.	$336x^2 + 24 = 172x;$	$ax^2 + b = cx.$

Es sind dies lauter Beispiele von „zusammengesetzten" Fällen, in denen zwei Glieder einem Gliede gleich sind und worauf sich die Worte Diophant's in seiner XI. Def. beziehen: „ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται."

§ 89. Methode von Mohammed ben Musa.
*(Capitulum de mediatione radicum).***)

Der Chowaresmier statuirt wiederum die bekannten drei zusammengesetzten Fälle, nur mit dem Unterschiede, dass das Quadrat den Coefficienten 1 hat; nämlich

*) Diophanti Alexandrini Arithmeticorum lib. IV et VI. Man vergl. auch Nesselmann, die Algebra der Griechen. S. 317—323.

**) Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala. Libri, Hist. I. Note IV

$$\text{I.}\quad x^2 + px = q, \qquad x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q},$$

$$\text{II.}\quad x^2 + q = px, \qquad x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q},$$

$$\text{III.}\quad px + q = x^2. \qquad x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}.$$

Die Auflösung wird in rhetorischem Stile numerisch geführt und nachträglich geometrisch bewiesen. Wir werden später diese Demonstrationen auseinandersetzen nebst ähnlichen Beweisen von Omar Alkhayyami, welcher, wie es scheint, zuerst die Bemerkung macht, dass sich diese Gleichungen geometrisch mit Hülfe des Kreises lösen lassen. Wir geben hier eine Probe aus der Algebra des Chowaresmiers über die Behandlung des zweiten Falles, welcher zwei positive Wurzeln liefert.

Aufgabe. *„Census et viginti una dragma equantur decem radicibus.“*

$$x^2 + 21 = 10x.$$

„Die Regel ist dass Du die Wurzeln halbirst; es sind fünf. Multiplicire sie mit sich selbst und es kommt 25 heraus. Davon subtrahire 21 und es bleiben 4, woraus Du die Quadratwurzel ziehst, welche 2 ist. Diese ziehe von der Hälfte der Wurzeln ab, welche 5 ist. Es bleibt also 3 und dies ist die Wurzel. Wenn Du willst, kannst Du die Wurzel zur Hälfte der Wurzeln addiren und die Wurzel ist 7. Wenn also eine Aufgabe Dich auf diese Gleichung führt, dann versuche es mit der Addition. Stimmt dies nicht, dann gelingt es ohne Zweifel mit der Subtraction. In diesem einen der Fälle gelingt es sowol mit der Addition als mit der Subtraction. Du musst Dir aber merken, dass wenn Du in diesem Falle die Hälfte der Wurzeln quadrirst und dies Quadrat kleiner als die Zahl wird, die Aufgabe unmöglich ist; ferner dass, wenn das Quadrat gleich der Zahl wird, die Wurzel gleich der halben Anzahl der Unbekannten ist ohne Addition und Subtraction. Und alles, was Du aus zwei oder mehr oder weniger Quadraten der Unbekannten bekommst, reducire auf das einfache Quadrat.“

In diesen letzten Worten ist also ausgedrückt, dass wenn die gegebene Gleichung von der Form

$$ax^2 + b = cx$$

ist, man erst die Gleichung auf die Form

$$x^2 + \frac{b}{a} = \frac{c}{a} x$$

reduciren solle. Unter dieser Form werden die quadratischen Gleichungen auch bei allen andern arabischen Mathematikern discutirt. Dass Mohammed die Gleichungen mit gebrochenen Coefficienten geläufig sind, zeigt die behandelte Gleichung

$$x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4} x,$$

wenn er auch meistens der Kürze wegen, ohne die Lösung selbst anzugeben, das Weitere dem Leser überlässt, etwa mit den vertröstenden Worten: *„Fac ergo per ea sicut est illud quod retuli tibi de mediatione radicum, si Deus voluerit.“*

Historische Bemerkungen. Es herrscht noch ein Streit darüber, ob die Auflösung der bestimmten Gleichungen zweiten Grades und die Algebra überhaupt eine Erfindung der Inder oder der alexandrinischen Griechen sei*). Eine vollständige den Anforderungen der heutigen elementaren Algebra entsprechende Methode der Auflösung der bestimmten Gleichungen ersten und zweiten Grades nebst Anwendung auf Aufgaben aus dem praktischen Leben finden wir zuerst bei den Indern in dem 18. Kap. der Astronomie von Brahmegupta (um 630). Ihre Theorie wird auf den älteren Mathematiker und Astronomen Aryabatthiya (geb. 476) zurückgeführt. Der verhältnissmässig höhere Standpunkt der indischen Zahlenlehre (Algorithmus) im Vergleich mit der griechischen war ein Hebel dieses bei den Indern mit Vorliebe behandelten Zweiges der Mathematik. Die Behandlung der unbestimmten Gleichungen mittels der Kettenbrüche und der cyklischen Methode bildet den schönsten Theil der indischen Algebra. Ferner zeichnen sich die Aufgaben in den indischen Werken über Algebra aus durch die gefällige Form, worin dieselben eingekleidet sind. Sie behandeln meist Fälle aus dem praktischen Leben oder aus der Geometrie. Ein Beispiel dieser Art ist bereits in § 87 aus der Algebra des Bhascara mitgetheilt.

Ein Jahrhundert vor Aryabatthiya tritt nun der Alexandriner Diophantos mit seinem Werke: *ἀριθμητικῶν βιβλία ιγ̅* hervor, ohne dass uns ein Vorgänger oder Nachfolger in diesem Fache unter den Griechen bekannt wäre. Er lebte nach Abulfarag (Al-fihrist) unter Julianus Apostata in Alexandrien. Sein Werk, welches zahlentheoretische Untersuchungen über algebraische Gleichungen enthält, wurde von Abulwafa um 970 ins Arabische übersetzt. Abulwafa schrieb nach dem Al-fihrist auch einen Commentar zu Hipparchus († 125 v. Chr.) „Algebra“, der nicht mehr vorhanden ist, so dass man auch über dies Werk des berühmten Astronomen nichts weiss. Vielleicht

*) Man vergl. Gräko-indische Studien von Mor. Cantor. Ztschft. f. Math. u. Phys. XXII. Heft 1. 1877. — Nesselmann, die Algebra der Griechen. Kap. VIII.

wurde Diophant's Werk schon früher übersetzt. Nach Ibn Abi Oseibia schrieb Kosta ben Luca (900) ein „Buch betreffend Uebersetzung des Diophant über *al-djebr w' almokabala*". Diophant's Werk hat eine auffallende Aehnlichkeit mit den algebraischen Arbeiten der Inder über unbestimmte Analytik. Allein es fehlt in demselben die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades und die der bestimmten Gleichungen zweiten Grades, obwol die erstere Art der Gleichungen Diophantische genannt zu werden pflegen. Wir besitzen übrigens nicht 13, sondern nur 6 Bücher, und höchstwahrscheinlich ist aus dem angeführten Grunde ein Defect zwischen dem ersten Buche (bestimmte Gleichungen ersten Grades) und dem zweiten (unbestimmte Gleichungen zweiten Grades). In der Defin. XI fährt Diophant nach den bekannten Transpositionsregeln fort mit den Worten: „Später will ich dir zeigen, wie man die Aufgabe löst, wenn zwei Glieder einem Gliede gleich sind". Damit meint Diophant offenbar die trinomischen Formen: $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + b = cx$ und $ax + b = cx^2$. Die versprochene Auflösungsmethode erfolgt aber nicht in Form einer bestimmten Vorschrift, wie wir sie in den Werken der Inder finden; indess wendet er sie bei seinen zahlentheoretischen Untersuchungen quadratischer Formen mit rationalen Wurzeln überall an, z. B.:

VI. 6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu suchen, so dass die Summe des Inhalts und einer Kathete einer gegebenen Zahl gleich sei. Es wird angenommen, die Zahl sei 7 und die Seiten $3x$, $4x$, $5x$. Dann ist $6x^2 + 3x = 7$:

$$\delta^{\bar{\upsilon}}\ \bar{\varsigma}\ \varsigma\varsigma^{oi}\ \bar{\gamma}\ \text{ἴσοι εἰσὶν}\ \mu^{\bar{o}}\ \bar{\zeta}.$$

Nun forscht Diophant aber immer darnach, ob die Gleichung eine rationale Wurzel (ἀριθμός ῥητός) habe. Er fährt darum so fort: „*καὶ δεῖ τῶν ἀριθμῶν τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτὸ προσθεῖναι τὰς δυνάμεις καὶ ποιεῖν τετράγωνον· οὐ ποιεῖται δέ.*" In der That ist

$$x = \frac{1}{6}\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 7 \,.\, 6}\right).$$

Noch ausführlicher entwickelt er die Form der Wurzel der Ungleichung IV. 45:

$$\delta^{\bar{\upsilon}}\ \bar{\beta}\ \text{μείζονές εἰσιν}\ \varsigma\bar{\varsigma}\ \bar{\varsigma}\ \mu^{\bar{o}}\ \overline{\iota\eta}\cdot$$

also: $2x^2 > 6x + 18$. Diophant sagt: Wir erheben den halben Coefficienten von x ins Quadrat und wir erhalten 9. Nun multipliciren wir den Coefficienten von x^2 mit der Zahl 18; das gibt 36. — *Ποιοῦμεν τῶν* $\varsigma\bar{\varsigma}$ *τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ, ὅθεν εὑρίσκεται* $\mu^{\bar{o}}\ \bar{\vartheta}$· *καὶ τὰς* $\delta^{\bar{\upsilon}}\ \bar{\beta}$ *ἐπὶ τὰς* $\mu^{\bar{o}}\ \overline{\iota\eta}$, *ὅθεν εὑρήσομεν* $\mu^{\bar{o}}\ \overline{\gamma\varsigma}$· Dazu addiren wir den halben Coefficienten von x und dividiren durch den Coefficienten von x^2."
Die Auflösung ist demnach

$$x > \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{9 + 18 \,.\, 2}\right).$$

Aus vorstehenden Beispielen geht deutlich genug hervor, dass dem Diophant die Auflösung der quadratischen Gleichungen geläufig war, wenn auch gar keine Bücher über die directe Auflösung der bestimmten Gleichungeu zweiten Grades von ihm vorhanden sind. Wenn es sich also darum handelt, den Griechen oder den Indern die Priorität der Erfindung der Algebra zu vindiciren, so lässt sich diese Frage jetzt noch nicht entschieden beantworten. Wahrscheinlich aber sind die Principien der Algebra numerischer Gleichungen auf Vorgänger Diophant's und Aryabatthiya's zurückzuführen. Wir stimmen übrigens gerne dem Urtheile Cantor's bei, dass indische und griechische (alexandrinische) Mathematik sich nicht unabhängig von einander entwickelten. Unser Wissen über die mathematische Litteratur der Griechen und Inder leitet uns zu der Vermuthung, dass die Inder Lehrer der Griechen in der Arithmetik und Algebra, die Griechen Lehrer der Inder in der Geometrie sein konnten. Etwas den Werken Euklidis, Archimedis und Apollonii Gleiches haben die Inder nicht geschaffen und schaffen können, aber auch umgekehrt suchen wir bei den Griechen vergeblich nach einem in der Praxis brauchbaren Zahlensysteme, nach der eleganten Anwendung der Kettenbrüche auf Probleme der unbestimmten Analytik und einer Anwendung der Algebra auf die verschiedenen Fälle des praktischen Lebens. Die politische Arithmetik wurde bei den orientalischen Völkern, namentlich bei den Chinesen, schon in sehr früher Zeit der praktischen Richtung und dem Erwerbsfleisse dieses Volkes entsprechend als ein wichtiger Theil des öffentlichen Unterrichts angesehen und durch Regeln und Beispiele in Rechenbüchern erläutert. Ein solches populäres praktisches Rechenbuch ist das berühmte uralte Buch *Kiu-tschang* oder die neun Sectionen*). Im Uebrigen ist die Auffindung der Ueberbleibsel der griechisch-mathematischen Litteratur als abgeschlossen zu betrachten, wogegen dies bei der indischen und insonderheit der chinesischen nicht der Fall ist. So ist z. B. erst neuerdings das bis jetzt als das älteste angesehene indische mathematische Werk des Aryabatthiya nach Handschriften veröffentlicht, nachdem es lange Zeit für verloren galt. Viel älter ist der algebraische Papyrus von Ahāmesu.

Auffallend ist allerdings die Erscheinung, dass in Indien von Brahmegupta bis Bhascara Acharya die Mathematik keine wesentlichen Schritte vorwärts machte, sondern nur eine Reihe von sonst scharfsinnigen, aber nicht productiven Compilatoren und Commentatoren das Interesse für die mathematischen Wissenschaften rege hielten. Wir sind aber keineswegs geneigt, dem Urtheile Cantor's in diesem Puncte beizustimmen, wenn er sagt: „Einen Rückschritt in der leidenschaftslosesten und religiös neutralsten Wissenschaft, in der Geometrie, wie er in Indien von Brahmegupta bis zu Bhascara sich zeigt, vermögen wir nur dann zu begreifen, wenn es der grossen Hauptsache

*) Eine detaillirte Inhaltsanzeige davon gibt Ed. Biot im Journ. des Savants 1835 und Journ. asiatique VII. pg. 201. 1839. Man vergl. unten VIII. Abschn. Gesammtlitteratur. I. a. Art. *Pin-kue.*

nach um fremdländisches, nicht naturgemäss auf heimischem Boden Erwachsenes sich handelte.“ Die Ursache des Stillstandes und des dadurch unvermeidlich eintretenden Rückschrittes lag allerdings einerseits in einer Art von mönchischem Formalismus und der religiösen Befangenheit in dem Respect vor dem Katechismus des Althergebrachten bei den Orientalen. Wie kann man es sich sonst erklären, dass bei den Chinesen das Buch von den neun Sectionen immer und immer wieder mindestens drei Jahrtausende hindurch von Lischau bis Pinkue herab unter diesem selben Titel erschien; dass man, den Bedürfnissen der Zeit Rechnung tragend, endlich nicht auch einmal statt der üblichen neun z. B. zehn oder zwölf Kapitel schrieb, sondern das Heterogenste in die neun Kapitel hineinzwängte? Es muss jedoch bemerkt werden, dass schon früh andere mathematische Werke daneben erschienen, wissenschaftlicheren Inhalts, wie z. B. die unbestimmte Analytik von Sun Tse. Andererseits lag die Ursache des Rückschrittes in der unwissenschaftlichen Methode, in einer Methode, die jedes strengen Beweises ermangelte und einzig und allein auf die Bedürfnisse des praktischen Lebens oder der Astronomie und der Zeitbestimmung gerichtet war. Wenn ein Theorem gefunden war, so wurde es in Regelverse eingekleidet und an Beispielen erläutert. Jeder Eingeweihte begriff den Satz, und einen strengen Beweis seiner Richtigkeit zu geben, fiel Niemandem ein — er verstand sich ja ganz von selbst. Dieser Formalismus der Orientalen war nicht etwa durch die Dogmen ihrer geistlosen bizarren Religion geboten, aber ein mit Nothwendigkeit erzeugtes Product derselben. Der Grund, warum die mathematischen Wissenschaften bei den Orientalen nicht weiter kamen, sondern zurückgingen, ist in mehr als einem Umstande zu suchen. Wie z. B. bei den Chinesen ein weitverbreitetes Rechenbuch immer denselben Titel führte, so war es bei den Indern nicht ungewöhnlich der Fall, dass die Leitung mathematischer Schulen in einer Familie erblich war. Wenn, wie Cantor meint, die Mathematik bei den Indern zurückging, weil sie von aussen Hereingebrachtes war, so würde dies auch von den Völkern gelten, welche sich in der Gegenwart der modernen Cultur erschliessen und überhaupt wissenschaftlich zu denken befähigt sind. Man kann vielleicht mit gleichem Rechte behaupten, sie ging zurück, weil den Indern die streng wissenschaftliche Methode fehlte, weil sie nichts von den Griechen gelernt hatten und zwar nichts auf dem directen Wege des wissenschaftlichen Verkehrs, höchstens auf dem indirecten Wege des Geschäftslebens.

Unter den Arabern vermischte sich Indisches oder Persisches mit griechischem Eigenthum; darum sind aus arabischen Werken wenig zuverlässige Argumente zu ziehen. Das älteste arabische Werk über Algebra soll um 830 n. Chr. von Mohammed ben Musa, dem Chowarizmier, nach indischen Vorlagen verfasst worden sein. Hankel*)

*) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, S. 261. Leipzig 1874.

verbreitet sich in seiner Geschichte über den Ursprung dieses Werkes, und ist der Ansicht, dass er jedenfalls nach einer Tradition arbeitete, diese aber weder von den Griechen noch den Indern stammen könne. Hankel ist geneigt, den Ursprung bei den Persern zu suchen, welche vor der mohammedanischen Zeit unter dem doppelten Einflusse griechischer und indischer Wissenschaft gestanden haben möchten und bei denen sich eine numerische Algebra entwickelt hatte, welche Züge beider in sich aufnahm, wie sich aus der Terminologie Mohammed's schliessen lässt. Mit Bezug auf letztere möchten wir noch auf eine eigenthümliche technische Bezeichnung in der Methode des Mohammed hinweisen, welche möglicherweise auf die Vorbilder seines algebraischen Werkes führen kann. Mohammed nennt nämlich zu oft wiederholten Malen die Methode der Auflösung der gemischt quadratischen Gleichungen *capitulum de mediatione radicum* nach dem Wortlaut der in Libri's Geschichte mitgetheilten lateinischen Uebersetzung. Es bezieht sich dieser Ausdruck auf die bekannte Auflösungsformel

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

der vorgelegten quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$, worin das zweite Glied ax allgemein mit „*radices*“ bezeichnet wird. Nun wird dieselbe Methode bei Brahmegupta und Bhascara mit dem technischen Worte *mad' hyama hárana*, wörtlich „Herausbringung des Mittelsten“, bezeichnet und der persische Commentator der *Bija ganita* Fyzi übersetzt diesen indischen Term durch die Worte „*tausît maghul*“, von denen das erste übersetzt werden kann durch *dissectio per medium et in duas partes*, während *maghul* die Unbekannte ist. Entweder ist der persische Ausdruck also nur eine Umschreibung des indischen mittels eines den persischen Mathematikern geläufigen Kunstausdrucks oder es kann der indische möglicherweise ebenso verstanden werden. Im ersten Falle wäre jedenfalls noch zu untersuchen, ob die Perser den Kunstausdruck von den Arabern angenommen haben, oder umgekehrt die Araber von den Persern.

Die geometrische Beweisführung, welche in ausführlicher Weise den die Methode des Mohammed erläuternden Zahlenbeispielen folgt, ist von Euklidischem Beigeschmack, obwol nur eine einzige der Figuren in den Elementen (Buch II. 4) sich vorfindet. Der Chowarizmier sagt, nachdem er die sogenannten „sechs“ Fälle an Zahlenbeispielen erläutert hat:

„Wir haben dasjenige, was von der Halbirung der Unbekannten „*(ex mediatione radicum)* in den drei andern Fällen nöthig ist, mit be- „bestimmten Beispielen dargelegt. Nun wollen wir für jeden dieser „drei Fälle eine Darstellungsform wählen, in welcher der Grund der „Halbirung erkannt wird.“ Darauf folgen die drei geometrischen Beweise. Nach Ibn Khaldun wurde nun freilich zuerst Euclides von den Arabern übersetzt, aber wann ist ungewiss. Wenn dem Chowarizmier indische Quellen dabei als Vorlage dienten und man bei diesen griechischen Einfluss vermuthet, so bleibt doch auffallend, dass man den

Euclidischen Beweis des Pythagoreischen Satzes nicht in den Schriften der Inder findet, wol aber einen arithmetischen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass altpersische und syrische Wissenschaft den Arabern und Indern gemeinsame Vorbilder hergaben, wie auch die Ausdrucksweise „Satz von der Figur der Braut“, womit die Perser den Satz vom rechtwinkligen Dreieck bezeichneten, eine ganz eigenthümliche ist.

Der etwa zwei Jahrhunderte später lebende arabische Algebrist und Geometer Omar Alkhayyami hat zuerst die Algebra der Gleichungen in eine wissenschaftliche Form gebracht und die allgemeine Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen durch geometrische Construction mit Hülfe des Kreises und der Kegelschnitte gelehrt. Für die erstere Art gibt er sowol algebraische als geometrische Beweise. Die geometrischen Beweise der Auflösungsmethoden der quadratischen Gleichungen stützt er auf Sätze von Euclid, die der kubischen Gleichungen auf Sätze von Apollonius*). In der Auflösungskunst der kubischen Gleichung hatte Omar schon ein hervorragendes Muster in den mathematischen Schriften seines berühmten Zeitgenossen Abul Djud, welcher unter andern eine Abhandlung schrieb: „Ueber die Auflösung der (kubischen) Formen und über die Art, die meisten derselben mittels der Analysis auf Kegelschnitte zurückzuführen“. Omar selbst gibt eine systematische Darstellung der Auflösung sämmtlicher trinomischer und quadrinomischer kubischen Formen in elegantem Stile, welcher einem modernen Schriftsteller Ehre machen würde. Eine arithmetische Lösung der kubischen Gleichungen ist, wie er selbst eingesteht, ihm freilich nicht gelungen; und um so weniger, da er sich unter einer arithmetischen Lösung immer nur eine Auffindung ganzer positiver und zwar rationaler Wurzeln denkt. Die Auflösung der zusammengesetzten Gleichungen von höherem als dem dritten Grade auf geometrischem Wege hielt er mit Ausnahme der binomischen geradezu für unmöglich.

Um einen Begriff von den Auflösungsmethoden der beiden öfter genannten Araber zu geben, werden wir zunächst die Klassification der Gleichungen durch Omar und dann die geometrischen Beweismethoden sowol des Chowarizmiers als von Omar mittheilen. Zur Einführung in den Geist des letzteren gelehrten Autors wird es sich empfehlen, denselben selbst reden zu lassen, wobei wir der Uebersetzung von Wöpcke folgen. Auf die geometrische Behandlungsweise der kubischen Gleichungen von Omar soll im siebenten Abschnitte ausführlicher eingegangen werden.

§. 90. Die Classification der algebraischen Gleichungen nach Omar.

Nach einer längeren Einleitung zu seiner Algebra fährt Omar fort in folgenden Worten:

*) Omar Alkhayyami, Ueber die Beweise der algebraischen Theorie. Von Wöpcke ist diese Schrift unter dem Titel: *L'algèbre d'Omar* arabisch und französisch herausgegeben.

„Die Algebra ist eine Wissenschaft. Ihr Gegenstand ist die absolute Zahl und die (geometrisch) messbaren Grössen als Unbekannte, aber bestimmt durch eine bekannte Grösse, woraus sie berechnet werden können. Die Bekannte ist eine Grösse oder eine bestimmte Relation, so dass man jene erkennt, wenn man diese aufmerksam erwägt. Was man in dieser Wissenschaft erforscht, das sind die Relationen, welche die gegebenen Grössen mit demjenigen verbindet, welches nach dem Vorhergesagten den Gegenstand der Algebra bildet. Die Vollendung der Kunst besteht in der Kenntniss der mathematischen Methode, vermittels deren man im Stande ist, die gedachte Bestimmung der Unbekannten auszuführen, möge diese nun numerisch oder geometrisch sein. Unter messbaren Grössen verstehe ich die continuirlichen Grössen, wovon es vier Arten gibt: die Linie, die Fläche, den Körper und die Zeit, wie man sie allgemein auseinandergesetzt findet in den Kategorien und speciell in der Metaphysik. Einige Gelehrte betrachten den Zeitraum als eine Unterabtheilung der Fläche subordinirt unter die Gattung der continuirlichen Grössen. Aber eine genauere Betrachtung dieser Frage beweist, dass sie sich im Irrthum befinden. Das Wahre ist, dass der Zeitraum eine Fläche ist, in einem Zustande und unter Umständen, deren genaue Feststellung unserm Gegenstande fern liegt. Es ist nicht Gebrauch, die Zeit unter die Gegenstände der algebraischen Probleme einzuführen; wenn man es aber gethan hätte, würde das vollkommen zulässig gewesen sein."

„Die Algebristen pflegen in ihrer Kunst die zu berechnende Unbekannte ein „Ding"*) zu nennen und sein Product in sich selbst „Quadrat", das Product aus dem Quadrate und dem Dinge „Kubus", das Product aus dem Quadrate in sich selbst „Biquadrat", das Product des Würfels und Quadrates „Quadratkubus", das Product des Würfels in sich selbst „Bikubus" und so weiter fort nach Belieben. Es ist bekannt aus den Elementen des Euclid, dass alle diese Grössen in fortlaufender Proportion stehen; d. h. dass die Einheit sich verhält zur Wurzel**), wie die Wurzel zum Quadrat und wie das Quadrat zum Kubus, folglich die Zahl zu Wurzeln, wie die Wurzeln zu Quadraten, wie die Quadrate zu Kuben, wie die Kuben zu Biquadraten u. s. f."

*) الشى al-chaï, المال al-mâl, الكعب al-kab.

**) الجذر al-djizr.

„Man muss wissen, dass diese Abhandlung nur verstanden werden kann von Denen, welche eine vollständige Kenntniss der Werke über die Elemente und Daten des Euclid, sowie der zwei Bücher über die Kegelschnitte von Apollonius besitzen. Für Jeden würde im Falle der Unkenntniss dieser drei Werke es kein Mittel geben, vollständig die Theoreme zu begreifen, welche ich zu entwickeln im Begriff bin. Auch ist es mir nicht ohne Mühe gelungen, mich in den künftigen Citaten auf jene drei Werke zu berufen.“

„Die algebraischen Auflösungen lassen sich nur mit Hülfe der Gleichungen bewerkstelligen, d. h. durch Gleichsetzung jener Grade, wie es genugsam bekannt ist. Wenn der Algebrist das Biquadrat in den Problemen des Masses anwendet, so ist dies metaphorisch und nicht eigentlich zu verstehen, da es absurd ist, dass das Biquadrat zu den messbaren (geometrischen) Grössen gehöre. Was in die Kategorie der messbaren Grössen eintritt, das ist von vornherein eine Dimension*), nämlich die Wurzel, oder in Bezug auf ihr Quadrat die Seite; dann zwei Dimensionen, also die Fläche; und das Quadrat gehört zu den messbaren Grössen, weil es die Quadratfläche ist. Endlich drei Dimensionen, also das Parallelepipedon und der Kubus gehören zu den messbaren Grössen, da das Parallelepipedon von sechs Vierecken begränzt ist. Da es nun keine andern Dimensionen mehr gibt, so kann weder das Biquadrat und noch weniger ein höherer Grad in die Kategorie messbarer Grössen eintreten. Und wenn man sagt, dass das Biquadrat einen Theil der messbaren Grössen ausmacht, so ist dies mit Rücksicht auf seinen reciproken Werth, wie er in den geometrischen Problemen angewandt wird, zu verstehen und nicht weil die biquadratischen Grössen selbst messbare Grössen sind; was einen Unterschied macht. Das Biquadrat ist kein Theil messbarer Grössen weder innerlich noch äusserlich und man kann es nicht mit dem Geraden und Ungeraden vergleichen, welches eine äusserliche Eigenschaft desselben bildet, mit Rücksicht auf die Zahl, vermittels deren die Continuität der messbaren Grössen in discontinuirlicher Form dargestellt wird.“

---

*) Man sieht, wie trotz allen Ringens dieses eminenten Mathematikers es ihm unmöglich war, sich vom Begriffe der concreten Zahl zur abstracten zu erheben. Abul Wafa scheint der einzige gewesen zu sein, der diese Schranken mit den Mitteln der Geometrie zu übersteigen versuchte. Durchbrochen wurden sie erst durch Ferrari's Entdeckung.

„Alles, was man in den Werken der Algebristen bezüglich jener vier mathematischen Grössen, aus welchen die Gleichungen gebildet werden, nämlich: absolute Zahl, Seiten, Quadrate und Kuben, findet, das sind drei Gleichungen, enthaltend die Zahl, Seiten und Quadrate. Wir dagegen wollen Methoden entwickeln, vermittels deren man die Unbekannte in einer Gleichung bestimmen kann, welche die vier Grade enthält, von denen wir gesagt haben, dass sie ausschliesslich zu den messbaren Grössen gehören, nämlich die Zahl, das Ding, das Quadrat und der Kubus“.

„Die Methoden derjenigen Klasse von Gleichungen, bei denen die Auflösung von den Eigenschaften des Kreises abhängt, d. h. von den beiden Werken des Euclides über die Elemente und die Data, lassen sich sehr leicht beweisen. Für die Methoden derjenigen Klasse, bei denen die Auflösung nur mit Hülfe der Kegelschnitte bewerkstelligt werden kann, muss man sich auf das beziehen, was in den zwei (ersten) Büchern der Kegelschnitte enthalten ist. Wenn der Gegenstand des Problems eine absolute Zahl ist*), so ist es weder mir noch irgend einem andern Algebristen gelungen, die Auflösungen anderer Gleichungen zu entdecken (und vielleicht wird ein Anderer nach uns diese Lücke ausfüllen), als wenn sie nur die drei ersten Grade enthalten, nämlich die Zahl, die Unbekannte und das Quadrat. Für diese Klasse von Gleichungen, deren Auflösung sich mit Hülfe der Euclidischen Bücher bewerkstelligen lässt, werde ich die numerische Entwickelung mittheilen.

„Und merket, dass der geometrische Beweis der Methoden nicht den ihres numerischen Beweises überflüssig macht, wenn der Gegenstand der Aufgabe eine Zahl ist und nicht eine messbare Grösse. Auch erkennnt ihr wol, dass Euclides, nachdem er gewisse auf die Proportionalität geometrischer Grössen bezügliche Theoreme bewiesen hat, in dem fünften Buche seines Werkes, von neuem den Beweis für genau dieselben Theoreme der Proportionalität liefert, wenn ihr Gegenstand eine Zahl ist, im siebenten Buche.“

„Die Gleichungen, welche zwischen den vier Graden stattfinden,

*) Alkhayyami meint hier die numerische Auflösung der kubischen Gleichungen und die Feststellung der Bedingungen, unter welchen die Wurzel eine absolute, d. i. eine ganze Zahl wird. Man vergleiche weiter unten § 90 B.

sind entweder einfache oder zusammengesetzte. Von den einfachen gibt es sechs Formen*):

1⁰. Eine Zahl ist gleich einer Wurzel;
2⁰. Eine Zahl ist gleich einem Quadrat;
3⁰. Eine Zahl ist gleich einem Kubus;
4⁰. Wurzeln sind gleich einem Quadrat;
5⁰. Quadrate sind gleich einem Kubus;
6⁰. Wurzeln sind gleich einem Kubus."

„Drei dieser Formen sind erwähnt in den Werken der Algebristen. Sie sagen: die Unbekannte verhält sich zum Quadrat, wie das Quadrat zum Kubus. Es folgt nothwendig daraus, dass die Gleichung zwischen Quadrat und Kubus gleichbedeutend ist mit der Gleichung zwischen der Unbekannten und dem Quadrat; und ebenso verhält sich die Zahl zum Quadrat, wie die Unbekannte zum Kubus. Aber sie haben das geometrisch nicht bewiesen. Was die Zahl anbelangt, wenn sie dem Kubus gleich ist, so ist man nur im Stande die Seite des letzteren mit Hülfe der vorläufigen Kenntniss der Kubikzahlen zu finden, wenn die Aufgabe numerisch ist; ist sie geometrisch, so lässt sie sich nur mit Hülfe der Kegelschnitte lösen."

„Die zusammengesetzten Gleichungen sind theils trinomisch, theils quadrinomisch. Von den trinomischen Gleichungen gibt es im Ganzen zwölf Formen:

1⁰. Ein Quadrat und Wurzeln sind gleich einer Zahl;
2⁰. Ein Quadrat und eine Zahl sind gleich Wurzeln;
3⁰. Wurzeln und eine Zahl sind gleich einem Quadrat."

„Diese drei Formen**) sind erwähnt in den Werken der Algebristen und sind daselbst geometrisch bewiesen, aber nicht numerisch."

„Die drei folgenden Formen sind***):

1⁰. Ein Kubus und Quadrate sind gleich Wurzeln;
2⁰. Ein Kubus und Wurzeln sind gleich Quadraten;
3⁰. Wurzeln und Quadrate sind gleich einem Kubus."

„Die Algebristen sagen, dass diese drei Formen den drei vorangehenden proportional seien, jede der correspondirenden, also

---

*) I. $r = x$; II. $r = x^2$; III. $r = x^3$; IV. $qx = x^2$; V. $qx = x^3$; VI. $px^2 = x^3$.

**) VII. $x^2 + px = q$; VIII. $x^2 + q = px$; IX. $px + q = x^2$.

***) X. $x^3 + px^2 = qx$; XI. $x^3 + qx = px^2$; XII. $qx + px^2 = x^3$.

z. B. die Gleichung: „Ein Kubus und Wurzeln sind gleich Quadraten“ lässt sich reduciren auf die andere: „Ein Quadrat und eine Zahl sind gleich Wurzeln“; und ebenso die übrigen. Aber sie haben sie nicht discutirt, wenn die Gegenstände der Aufgabe geometrische Grössen sind. Für den Fall, wo der Gegenstand der Aufgabe eine Zahl ist, ist das eine unmittelbare Folgerung aus den Elementen. Nun aber werde ich auch den geometrischen Fall discutiren.“

Die sechs Formen, welche von den zwölf angezeigten übrig bleiben, sind folgende*):

1⁰. Ein Kubus und Wurzeln sind gleich einer Zahl;
2⁰. Ein Kubus und eine Zahl sind gleich Wurzeln;
3⁰. Eine Zahl und Wurzeln sind gleich einem Kubus;
4⁰. Ein Kubus und Quadrate sind gleich einer Zahl;
5⁰. Ein Kubus und eine Zahl sind gleich Quadraten;
6⁰. Eine Zahl und Quadrate sind gleich einem Kubus.“

„Von diesen sechs Formen findet man nichts in den Werken über Algebra, ausgenommen die vereinzelte Discussion einer unter ihnen**). Ich werde sie entwickeln und geometrisch beweisen, nicht numerisch. Die Auflösung dieser sechs Formen ist nur möglich mittels der Eigenschaften der Kegelschnitte.“

„Was die zusammengesetzten quadrinomischen Gleichungen anbelangt, so gibt es deren zwei Klassen: erstlich solche, in denen drei Grade gleich einem Grade sind. Dies sind vier Formen***):

1⁰. Ein Kubus, Quadrate und Wurzeln sind gleich einer Zahl;
2⁰. Ein Kubus, Quadrate und eine Zahl sind gleich Wurzeln;
3⁰. Ein Kubus, Wurzeln und eine Zahl sind gleich Quadraten;
4⁰. Ein Kubus ist gleich Wurzeln, Quadraten und einer Zahl.“

„Die zweite Klasse begreift diejenigen Gleichungen, in welchen zwei Grade zweien Graden gleich sind. Es gibt deren drei Formen†):

---

*) XIII. $x^3 + qx = r$; XIV. $x^3 + r = qx$; XV. $qx + r = x^3$; XVI. $x^3 + px^2 = r$; XVII. $x^3 + r = px^2$; XVIII. $px^2 + r = x^3$.

**) Es ist die Gleichung von Almahani (XVII) gemeint.

***) XIX. $x^3 + px^2 + qx = r$; XX. $x^3 + px^2 + r = qx$; XXI. $x^3 + qx + r = px^2$; XXII. $px^2 + qx + r = x^3$.

†) XXIII. $x^3 + px^2 = qx + r$; XXIV. $x^3 + qx = px^2 + r$; XXV. $x^3 + r = px^2 + qx$.

1⁰. Ein Kubus und Quadrate sind gleich Wurzeln und einer Zahl;
2⁰. Ein Kubus und Wurzeln sind gleich Quadraten und einer Zahl;
3⁰. Ein Kubus und eine Zahl sind gleich Wurzeln und Quadraten.“

„Dies sind die sieben quadrinomischen Formen; jede derselben ist uns gelungen geometrisch aufzulösen. Einer unserer Vorgänger*) wurde durch eine Aufgabe auf einen speciellen Fall einer dieser Formen geführt, welchen ich nicht verfehlen werde anzuführen. Die Auflösung dieser Formen kann allein mit Hülfe der Eigenschaften der Kegelschnitte erzielt werden.“

„Nun werde ich Schritt für Schritt alle fünfundzwanzig Formen discutiren und ihre Auflösungsmethoden beweisen; und ich erflehe den Beistand Allah's: Jeder, der ihm aufrichtig vertraut, Allah leitet ihn und hilft ihm.“

Omar discutirt nun die sechs einfachen oder binomischen Gleichungen mit Ausnahme von III., die er unter den kubischen behandelt, und geht darauf zur Auflösung der trinomischen Gleichungen über. Wir werden seine Auflösungsmethoden und Beweise sowie die von Mohammed ben Musa bezüglich der drei Formen:

VII. $x^2 + px = q$; VIII. $x^2 + q = px$; IX. $px + q = x^2$

ausführlich mittheilen.

§ 91. Methode der Auflösung der Gleichung VII. $x^2 + px = q$; $(x^2 + 10x = 39)$.

A. Methode und Beweis von Mohammed ben Musa**).

Angenommen das Quadrat der Unbekannten x sei x^2 oder AB (Fig. 9) und die vier Rechtecke g, h, t, k von der Breite $\frac{1}{4}p\left(=2\frac{1}{2}\right)$. Damit nun die ganze Figur ein vollkommenes Quadrat werde, muss man noch viermal das Quadrat von $\frac{1}{4}p\left(=2\frac{1}{2}\right)$, also $\frac{1}{4}p^2$ $(=25)$ hinzuaddiren. Darum wird die ganze Figur gleich $\frac{1}{4}p^2 + q$, $(25+39=64)$.

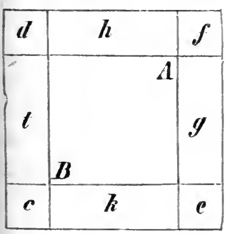


Fig. 9.

*) Abul Djud oder Alchanni. S. Woepecke, Omar, p. 57.

**) Man vergl. Moh. ben Musa edit. by Rosen p. 13; Libri, Hist. I. p. 233; Omar, Algebra, publ. et trad. par Woepcke p. 19; Cardani, Ars magna, cap. III. Wir geben den übermässig gründlichen Beweis von dem Chowarizmier in etwas abgekürzter Form wieder.

Eine der Seiten ist die Quadratwurzel $x+\frac{1}{2}p\,(=8)$. Nun subtrahire $\frac{2}{4}p\,(=5)$ von der Seite der ganzen Figur; es bleibt die Wurzel $x\,(=3)$.

Bemerkung. Das Princip dieser Entwicklung besteht also in der Ergänzung des Quadrates oder in der linearen Substitution

$$x+2\left(\frac{1}{4}p\right)=x+\frac{1}{2}p=y\,,$$

woraus sich weiter ergibt

$$x^2+4\left(\frac{p}{4}x\right)+4\left(\frac{p}{4}\right)^2=x^2+px+\frac{1}{4}p^2=y^2\,,$$

und wegen

$$x^2+px=q$$

die neue Gleichung

$$\frac{1}{4}p^2+q=y^2\,,$$

und folgeweise

$$\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}=y=x+\frac{1}{2}p\,,$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}-\frac{1}{2}p=x\,.$$

Während Mohammed hier die vorderen Formen der Gleichungen benutzt, leitet er aus den synkopirten Formen einen zweiten Beweis ab, welcher folgendermassen lautet:

Angenommen das Quadrat sei AB (Fig. 10). Wir halbiren die Wurzeln; das gibt $5\left(=\frac{1}{2}p\right)$, und construiren über den Seiten zwei Rechtecke g und d von der Länge $5\left(=\frac{1}{2}p\right)$ und es entsteht noch ein Quadrat von der Grösse $25\left(=\frac{1}{4}p^2\right)$. Die ganze Figur wird also gleich $25+39$ oder $64\left(=\frac{1}{4}p^2+q\right)$.

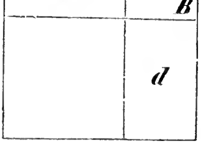


Fig. 10.

Die Seite derselben ist $8\left(=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}\right)$. Wenn wir nun von ihr subtrahiren, was zuvor addirt wurde, nämlich $5\left(=\frac{1}{2}p\right)$, so erhalten wir 3 und damit die Wurzel $(=x)$.

B. Methode und Beweis von Omar Alkhayyami.

Aufgabe: Ein Quadrat und zehn Wurzeln sind gleich neununddreissig*).

Omar sagt: „Multiplicire die Hälfte der Wurzeln mit sich selbst; addire das Product zur Zahl und subtrahire von der Quadratwurzel hieraus die Hälfte der Wurzeln. Der Rest ist die Wurzel des Quadrats.“

„Wenn die Aufgabe arithmetisch ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein; erstens: dass die Zahl der Wurzeln gerade sei, so dass sie eine Hälfte hat; zweitens: dass das Quadrat der Hälfte und die Zahl zusammen ein Quadrat bilden; sonst ist diese Aufgabe arithmetisch unmöglich. Geometrisch bietet dieser Fall durchaus keine Schwierigkeiten**).

„Der algebraische Beweis ist leicht und übereinstimmend mit dem geometrischen. Hier der letztere: Angenommen das Quadrat sei AC (Fig. 11) und vermehrt um zehn Wurzeln gleich neunund-

---

*) $x^2 + 10x = 39$. Dasselbe Zahlenbeispiel findet sich bei Moh. ben Musa.

**) Aus dieser Discussion geht nun deutlich hervor, was Omar unter einer arithmetischen oder numerischen Lösung versteht, wie es auch in seiner Einleitung von Woepcke richtig aufgefasst ist. Omar begreift unter dem Ausdrucke „numerische Lösung“ erstens die Darstellung der Form der Wurzel und zweitens die Determination der Bedingungen, unter welchen die Wurzelform eine ganze oder „absolute“ Zahl wird. Nur dann nennt er die Auflösung „möglich“. Es ist in der That unverständlich, wie Omar, der eine Algebra der Gleichungen und keine Zahlentheorie schreiben will, diese mit in seine Discussion zieht, sonst sind es jedenfalls keine „bestimmten“ Gleichungen, um deren Auflösung es sich handelt, sondern Diophantische. Dass er sich nicht auch eine Auflösung von numerischen Gleichungen mit (positiven) gebrochenen, ja irrationalen Wurzeln habe denken können, ist ganz unglaublich, denn sonst würde man hierin einen entschiedenen Rückschritt gegen die Leistungen von dem Chowarizmier bemerken, der mit grosser Gewandtheit Gleichungen mit gebrochenen Wurzeln löste. Uebrigens irrt sich Omar, wie Woepcke schon bemerkt hat, darin, dass er zwei Bedingungen aufstellt. Denn sei α eine positive und ganze Zahl; ferner $q = \sigma\alpha$, $p = \sigma - \alpha$, also $\sigma > \alpha$, so ist

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p = \frac{\sigma + \alpha}{2} - \frac{\sigma - \alpha}{2} = \alpha .$$

Die Wurzel kann also positiv und ganz sein, möge q und p positive ganze oder gebrochene, ja selbst irrationale Zahlen sein, z. B. $x^2 + 1\frac{1}{2}x = 13\frac{1}{2}$. Ist p positiv und ganz, so ist auch x positiv und ganz, wenn allgemein $q = pm + m^2$ ist.

dreissig; ferner angenommen zehn Wurzeln seien dargestellt durch das Rechteck CE. Die Linie DE wird gleich zehn sein. Man halbire sie im Punkte Z. Da die Linie DE in Z halbirt ist, und wenn man zu ihr noch in ihrer geraden Verlängerung das Stück AD hinzufügt, so wird das Product aus EA und AD, welches gleich dem Rechteck EB ist, addirt zum Quadrate über ZD, gleich sein dem Quadrate über ZA*). Aber das Quadrat über DZ, welche die Hälfte der Wurzeln ist, ist bekannt, und das Rechteck BE, welches die gegebene Zahl ist, ist gleichfalls bekannt. Folglich werden das Quadrat über ZA und die Linie ZA bekannt sein, und wenn wir ZD von ZA abschneiden, so wird der Rest AD bekannt sein."

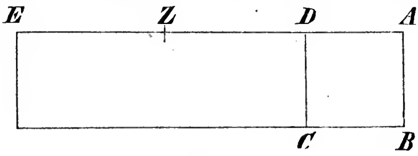


Fig. 11.

Das Princip dieser Entwicklung ist demnach folgendes: Der Satz im Euclides (Elem. II, 6) drückt aus

$$(p+x)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2.$$

Es ist aber

$$(p+x)x=x^2+px=q$$

also

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2$$

oder

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}=x.$$

Die Figur im Euclides ist vollständiger, nämlich

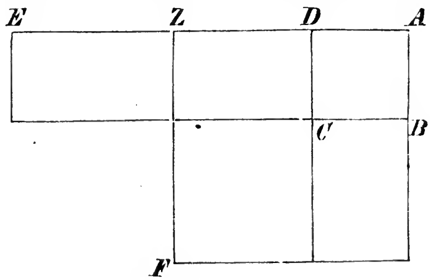


Fig. 12.

*) $EA \cdot AD + DZ^2 = ZA^2$ (Eucl. Elem. II, 6).

Hierin ist also noch das Quadrat über AZ ($= AF$) und das Quadrat über DZ ($= CF$) verzeichnet*).

Omar fügt als zweiten Beweis hinzu den ersten Beweis von dem Chowarizmier. Darauf gibt er noch an, wie auf Grund von Euclides Elem. VI. 29 die geometrische Construction der Wurzel ausgeführt wird, wie folgt:

„Angenommen, die Linie AB (Fig. 13) sei gleich zehn und man suche das Quadrat, welches hinzufügt zum Producte aus seiner

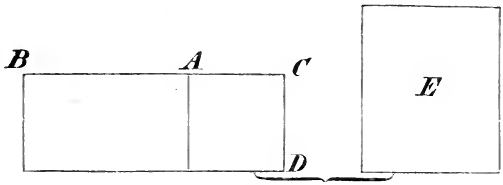


Fig. 13.

Seite und AB, gleich der gegebenen Zahl wird. Stellen wir die gegebene Zahl durch das Rechteck E dar, construiren an die Linie AB ein Parallelogramm gleich dem Rechteck E und überschreitend um ein Quadrat, so wie es Euclides in seinem sechsten Buche auseinander gesetzt hat. Das Rechteck sei BD und das Quadrat AD; die Seite des Quadrats wird bekannt sein, so wie man es in den Daten auseinandergesetzt findet.“

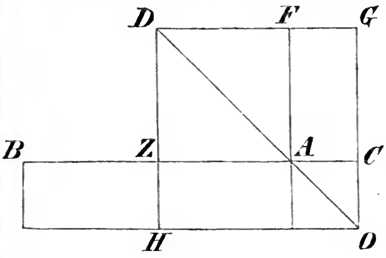


Fig. 14.

Die Angabe der Construction ist freilich nur oberflächlich. Nach Euclides würde dieselbe in Folgendem bestehen:

Man halbire AB (Fig. 14) in Z und construire über ZA das Quadrat AD. Alsdann verwandelt man die Summe der Vierecke

*) Die Auflösung der drei Fälle VII, VIII und IX hat Lucas de Burgo in lateinische Regelverse gebracht. Es war dies eine Sitte, die aus dem Orient stammte. Wir finden die Regelverse und Reime bei den indischen, chinesischen, persischen und arabischen Algebristen. Wahrscheinlich dienten sie zur Erleichterung für das Gedächtniss. Der Fall VII wird nach Lucas de Burgo in folgender Weise gelöst:

„Si res et census numero coequantur, a rebus
„Dimidio sumpto, censum producere debes
„Addereque numero, cujus a radice totius
„Tolle semis rerum, census latusque redibit.“

DA und E in ein Quadrat; dessen Seite sei DG. Man vervollständige das Quadrat $DGOH$, so ist $AC = x$. Der Beweis ist leicht und die Construction der Gleichung $(p + x)x = q$ entsprechend.

§ 92. Methode der Auflösung der Gleichung VIII. $x^2 + q = px$; $(x^2 + 21 = 10x)$.

A. Methode und Beweis von Mohammed ben Musa*).

Angenommen das Quadrat der Unbekannten sei die Oberfläche des Quadrats AB (Fig. 15). Man setze daran ein eben so breites

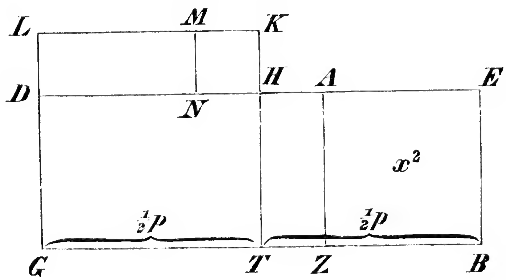


Fig. 15.

Rechteck GA, so dass es zusammen 21 $(= q)$ wird. Die Länge GB ist dann 10 $(= p)$. Man halbire DE in H, fälle die Senkrechte HT und verlängere sie um HK, so dass KT gleich DH und das Viereck LT ein Quadrat wird. Sein Inhalt ist $5 \times 5 \left(= \frac{1}{4} p^2\right)$. Nun construire man das Quadrat MH und es ist wegen $TK = HE$ offenbar $HK = AH$ und $ML = HT$. Daraus folgt Rechteck $LN = AT$ und hieraus weiter, dass das Quadrat $GH \left(= 25 = \frac{1}{4} p^2\right)$ vermindert um das Rechteck AG $(= 21 = q)$ gleich dem Quadrate NK, also gleich $4 \left(= \frac{1}{4} p^2 - q\right)$ ist und seine Seite HK oder HA gleich $2 \left(= \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}\right)$. Subtrahiren wir dies von der halben Anzahl der Wurzeln, so erhalten wir 3 und dies ist die Wurzel

Bemerkung. Das Princip dieser Entwicklung besteht in dem arithmetischen Satze, dass

*) Man vergl. Mohammed ben Musa edit. by Rosen p. 16; Libri, Hist. I. p. 236; Omar, Algebra, publ. et trad. par Woepcke, p. 22.

$$\left(\frac{1}{2}p\right)^2 - \left(\frac{1}{2}p - x\right)^2 = x(p-x) = px - x^2 = q$$

ist. Daraus folgt durch Transposition

$$\left(\frac{1}{2}p - x\right) = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

und

$$x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q^2}.$$

Nimmt man an $x > \frac{1}{2}p$ und stellt die entsprechenden geometrischen Betrachtungen an, so erhält man

$$\left(\frac{1}{2}p\right) - \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 = x(p-x) = q,$$

$$x - \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q},$$

$$x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Diesen zweiten Fall, der gleichfalls auf einen positiven Wurzelwerth führt, berücksichtigt Mohammed ben Musa an dieser Stelle nicht.

B. Methode und Beweis von Omar Alkhayyami.

Aufgabe: Ein Quadrat und eine Zahl sind gleich Wurzeln.

Omar sagt: „In diesem Falle ist es erforderlich, dass die Zahl nicht grösser sei als das Quadrat der Hälfte der Wurzeln; sonst ist die Aufgabe unmöglich. Wenn die Zahl gleich dem Quadrate der Hälfte der Wurzeln ist, so ist die Hälfte der Wurzeln die Wurzel selbst. Wenn die Zahl kleiner ist, subtrahirt man sie von dem Quadrate der Hälfte der Wurzeln, zieht aus dem Reste die Quadratwurzel und addirt diese zu der Hälfte der Wurzeln oder subtrahirt sie von derselben. Das Resultat ist in beiden Fällen die Wurzel.“

„Der algebraische Beweis ist übereinstimmend mit dem geo-

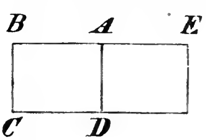


Fig. (16, a).

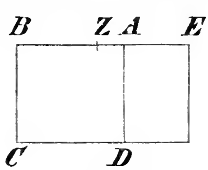


Fig (16, b).

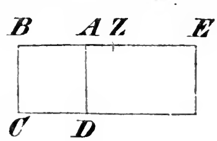


Fig (16, c).

metrischen. Angenommen das Quadrat sei $ABCD$ (Fig. 16) und

ED gleich der Zahl an das Quadrat angefügt. Das Rechteck EC wird also gleich zehn Seiten des Quadrats sein und folglich EB gleich 10*). In der ersten Figur sei AB gleich der Hälfte von BE, in der zweiten grösser, in der dritten kleiner als die Hälfte. Dann wird in der ersten Figur AB gleich 5 sein. In der zweiten und dritten Figur theilen wir BE in Z, so dass die Linie EB in zwei gleiche Theile in Z getheilt wird und in zwei ungleiche Theile in A. Folglich wird das Rechteck aus EA und AB, zum Quadrat über ZA hinzugefügt, gleich dem Quadrat über ZB sein, wie dies im zweiten Buche der Elemente steht**). Das Rechteck aus EA und AB, welches der Zahl gleich ist, ist bekannt; folglich, wenn man es von dem Quadrate über ZB abschneidet, welches die Hälfte der Wurzeln ist, so wird das Quadrat über dem Reste ZA bekannt sein. Wenn man in der dritten Figur ZA von ZB abschneidet und in der zweiten ZA zu ZB hinzufügt, erhält man zum Reste oder zur Summe die Linie AB. Und diese ist es, um deren Berechnung es sich handelte."

Das Princip dieser Entwicklung ist offenbar folgendes:

Der Satz von Euclides enthält für den Fall $AB > \frac{1}{2} EB$ die Relation

$$x(p-x) + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2.$$

Es ist aber

$$px - x^2 = q,$$

folglich ist

$$x - \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q},$$

$$x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Für den Fall $AB < \frac{1}{2} EB$ enthält der Satz 5 von Euclides die Relation

*) Omar hat hier offenbar auch die Gleichung des Chowarizmiers vor Augen.

**) Eucl. Elem. II, 5. Führt man die Construction, welche Omar angibt, vollständig aus, so erhält man eine Figur, die mit der von Mohammed ben Musa gegebenen im Wesentlichen übereinstimmt.

$$x(p-x)+\left(\frac{1}{2}p-x\right)^2=\left(\frac{1}{2}p\right)^2,$$

woraus nun folgt

$$\frac{1}{2}p-x=\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},$$

$$x=\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

Omar gibt nach der Bemerkung, dass man diese Methode auch noch anders beweisen könne, was er aber, um Weitschweifigkeit zu vermeiden, unterlassen wolle, darauf weiter an, wie auf Grund von Euclides Elem. VI. 28 die geometrische Construction der Wurzel ausgeführt wird*).

„Angenommen die Linie AB (Fig. 17) sei gleich zehn und es werde verlangt von ihr eine solche Linie abzuschneiden, dass, wenn man sie mit AB multiplicirt, dies Product gleich dem Quadrate

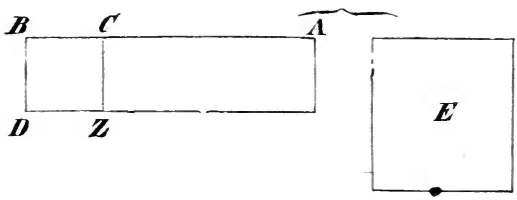


Fig. 17.

über derselben Linie vermehrt um ein anderes Rechteck sei, welches nicht grösser ist als das Quadrat der Hälfte von AB, d. h. also vermehrt um die gegebene Zahl, welche durch das Rechteck E dargestellt wird.“

„Wir stellen uns demnach die Aufgabe, von AB eine Linie abzuschneiden, deren Quadrat vermehrt um das Rechteck E gleich dem Product von AB in dieser Linie ist**). Nun, man setze an die Linie AB ein Rechteck gleich dem bekannten Rechteck E, so dass noch ein Quadrat fehlt, was immer möglich ist, weil das Rechteck E nicht grösser ist, als das Quadrat über $\frac{1}{2}AB$.“

„Es sei dies das Rechteck AZ und das fehlende Quadrat CD,

*) Obgleich die geometrischen Constructionen der Wurzeln weiter unten im VII. Abschnitt besonders abgehandelt werden, wird es doch zweckmässig sein, zu einer vollständigen Charakteristik der Fortschritte der Araber auf diesem Gebiete, die Methoden von Omar schon hier vorzutragen.

**) Die Aufgabe ist: aufzulösen $x^2+q=px$.

20*

so wie es von Euclides in dem VI. Buche der Elemente auseinandergesetzt ist. Die Seite CB wird alsdann bekannt sein, so wie es in den Daten bewiesen steht. Aber das ist es ja, um dessen Nachweis es sich handelte.“

Die wirkliche Construction muss man sich in den Elementen von Euclid suchen; dieselbe würde auf folgende Weise auszuführen sein:

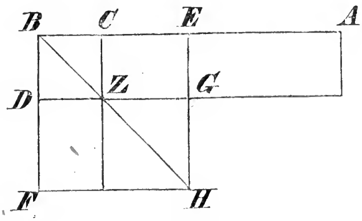


Fig. 18.

Man halbire AB (Fig. 18) in E, und construire über BE das Quadrat BH. Alsdann verwandele man die Differenz der Vierecke BH und E in ein Quadrat; dessen Seite sei ZG. Man construire das Quadrat ZH und vervollständige das Quadrat $BCZD$, so ist $BC = x$.

Was nun Omar noch über die Lösung der Aufgabe in ganzen Zahlen sagt, ist oberflächlich, indem er meint, es wäre hier gerade so wie vorhin. Woepcke sagt dazu in seinen Anmerkungen, die eine Wurzel könne auch ganz sein, selbst wenn keine einzige der von Omar aufgestellten Bedingungen erfüllt wäre. Wenn die Wurzeln aber beide ganze Zahlen werden sollten, so sei die erste Bedingung, dass p gerade sei, nicht nothwendig, und was die zweite beträfe, so sei für den Fall, dass p ungerade sei, genügend, dass das Doppelte der Quadratwurzel ganz sei.

§ 93. Methode der Auflösung der Gleichung IX. $px + q = x^2$; $(3x + 4 = x^2)$.

A. Methode und Beweis von Mohammed ben Musa*).

Angenommen das Quadrat der Unbekannten sei die Oberfläche des Quadrates AD (Fig. 19). Man schneide davon ab das Rechteck ED, so dass EG gleich der Anzahl der Wurzeln, also $3 (= p)$ wird. Der Rest EB wird $4 (= q)$ sein. Wir halbiren die Linie EG in H und construiren über EH das Quadrat ET, dessen Inhalt ist $2\frac{1}{4}\left(= \frac{1}{4} p^2\right)$. Nun construire über AH das Quadrat AL und man findet, dass die Vierecke KL und MZ congruent sind. Es-

*) Man vergl. Moh. ben Musa edit. by Rosen, p. 19; Libri, Hist. I., p. 236; Omar, Algebra, p. 24.

ist also die Summe der Vierecke $AN + KL$ gleich AZ $(= 4)$. Daraus folgt, dass der Inhalt des Quadrats AL gleich $2\frac{1}{4}$ ist ver-

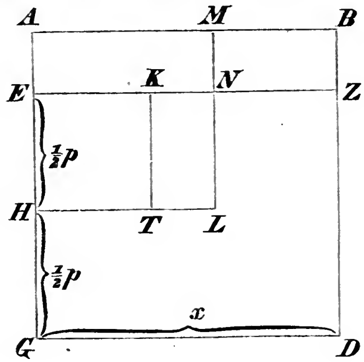


Fig. 19.

mehrt um $4\left(=\frac{1}{4}p^2 + q\right)$; dieses macht $6\frac{1}{4}$ und die Wurzel $2\frac{1}{2}$ ist die Seite AH. Das übrige Stück der Seite $AG = GH$ d. i. die halbe Anzahl der Wurzeln, nämlich $1\frac{1}{2}$; folglich ist AG gleich

$$4 = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$$

und das ist die gesuchte Wurzel.

Bemerkung. Das Princip dieser Entwicklung besteht in der Anwendung des arithmetischen Satzes

$$x(x - p) + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2.$$

Es ist aber

$$x(x - p) = q,$$

folglich

$$x - \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p^2 + q,$$

$$x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}.$$

B. Methode und Beweis von Omar Alkhayyami.

Aufgabe: Eine Zahl und Wurzeln sind gleich einem Quadrat.

Omar sagt: „Man addire das Quadrat der halben Anzahl der Wurzeln zur Zahl, dann bilde man die Quadratwurzel der Summe und addire sie zur Hälfte der Wurzeln. Was herauskommt, ist die Wurzel des Quadrats.

Beweis: Das Quadrat $ABCH$ (Fig. 20) sei gleich fünf Wurzeln vermehrt um sechs Einheiten*). Schneiden wir davon ab die Zahl, welche durch das Rechteck AD dargestellt werden möge. Es bleibt übrig das Rechteck EC, gleich der Anzahl der Wurzeln, welche fünf beträgt. Wir halbiren sie im Punkte Z. Die Linie EB wird also im Punkte Z in zwei Hälften getheilt und zugleich fügt man daran den Theil EA, woraus folgt, dass das Rechteck aus BA und AE, also AD vermehrt um das kekannte Quadrat über EZ, gleich dem Quadrate über ZA ist. Das Quadrat über ZA und ZA selbst werden bekannt sein. Nun ist aber BZ bekannt, folglich auch AB.“

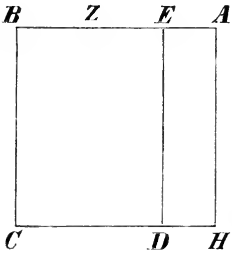


Fig. 20.

Das Princip dieser Entwicklung ist also folgendes: Der Satz von Euclides**) erhält die Relation

$$x(x-p)+\left(\frac{1}{2}p\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}p\right)^2.$$

Es ist aber

$$x(x-p)=q,$$

folglich

$$x=\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}.$$

Omar gibt nun nach der Bemerkung, dass es noch andere Beweise dieses Satzes gäbe, deren Auffindung er dem Leser zur Uebung überlasse***), weiter an, wie man die Wurzelform geometrisch construiren könne, nämlich:

„Angenommen, die Linie BE (Fig. 21) sei gleich der Anzahl der Wurzeln und es werde gesucht ein Quadrat und seine Seite, so dass dies Quadrat gleich sei einer gegebenen Anzahl der Seiten vermehrt um die gegebene Zahl. Die gegebene Zahl sei dargestellt durch das Rechteck T, und H sei ein Quadrat diesem Rechteck gleich. Man construire ein Quadrat gleich der Summe des Quadrates H und des Quadrates über EK, welche Linie gleich der halben Anzahl der Wurzeln ist. Das so construirte Quadrat sei Z. Man

*) Das Zahlenbeispiel, welches Omar hier wählt, ist $x^2=5x+6$.

**) Eucl. Elem. II, 6.

***) Vervollständigt man die Figur von Omar, so erhält man genau dieselbe Figur wie die von Moh. ben Musa. Welche andere Beweise er sich gedacht hat, ist nicht zu errathen.

mache KC gleich der Seite von Z und vervollständige das Quadrat

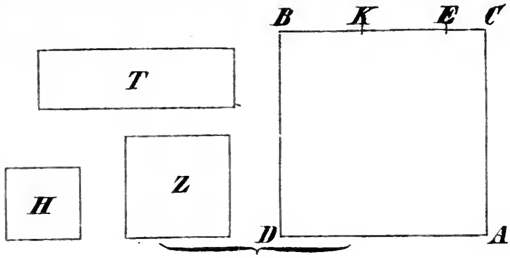


Fig. 21.

$ABCD$. Dies wird das Quadrat sein, von dem die Wurzel gesucht wurde.“

Die vollständige Construction würde im Folgenden bestehen: Man halbire BE (Fig. 22) in K und construire unter BK das Quadrat BF. Alsdann verwandle man die Summe der Vierecke BF und E in ein Quadrat, dessen Seite sei KC. Man vervollständige das Quadrat $BCAD$, so ist BC gleich x.

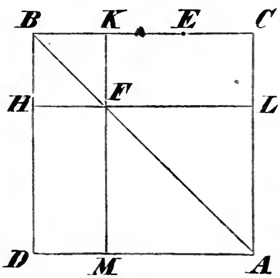


Fig. 22.

Nachdem wir uns in den vorangehenden Abschnitten eingehender mit den Methoden der Alten beschäftigt haben, gehen wir nunmehr zu der Entwicklung der Auflösungsmethoden der neuern Algebristen über, wobei wir uns kürzer fassen können.

§ 94. Methode von Vieta*).

(Capitulum de expurgatione per uncias.)

Vieta's Methode besteht in der Reduction der gemischten quadratischen Gleichung auf eine rein quadratische durch Wegschaffung des zweiten Gliedes.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

*) Vietae Fontanaensis de aequationum recognitione et emendatione tractatus duo. Tract. II. Cap. I. Paris 1615.

Eine genaue historische Reihenfolge bei der Aufzählung der Methoden festzuhalten, sowie ein bestimmtes Eintheilungsprincip zu Grunde zu legen, liegt nicht in dem Plane dieses Werkes; es wird aber geschehen, so viel irgend möglich ist.

Man substituire für x die lineare Function $u + z$ und bilde also die Variirte

$$u^2 + (2z + a)u + (z^2 + az + b) = 0,$$

oder kurz

$$u^2 + \alpha u + \beta = 0.$$

Damit diese Gleichung eine rein quadratische werde, nehme man an

$$\alpha = 2z + a = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$z = -\frac{1}{2}a.$$

Die transformirte Gleichung in u wird dadurch

$$u^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = 0,$$

und die Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = u + z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Um die Art der Auflösung bei Vieta zu zeigen, theilen wir eine Probe seiner Analysis mit. In den Abschnitte überschrieben:

De reductione quadratorum adfectorum ad pura.
Formulae tres.

sagt Vieta:

I.

Si A quad. $+ B 2$ in A, aequetur Z plano. $A + B$ esto E. Igitur E quad., aequabitur Z plano $+ B$ quad.

Consectarium. Itaque $\sqrt{Z \text{ plani} + B \text{ quad.}} - B$ fit A, de qua primum quaerebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1 $Q + 2$ N, aequatur 20. et fit 1 $N \sqrt{21} - 1$.

II.

Si A quad. $- B$ in A 2, aequetur Z plano. $A - B$ esto E. Igitur E quad. aequabitur Z plano $+ B$ quad.

Consectarium. Itaque $\sqrt{Z \text{ plani} + B \text{ quad.}} + B$ fit A, de qua primum quaerebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1 $Q - 2$ N, aequabitur 20. et fit N. $\sqrt{21} + 1$.

III.

Si D 2 in A — A quad., aequetur Z plano. $D - E$, vel $D + E$ esto A. E quad., aequabitur D quad. — Z plano.

Consectarium. Itaque, D minus, plusve $\sqrt{D \text{ quad.} - Z \text{ plano}}$ fit A, de qua primum quaerebatur.

Sit D 5. Z planum 20. A 1 N. 10 N — 1 Q, aequatur 20. et fit 1 N. $5 - \sqrt{5}$, vel $5 + \sqrt{5}$.

Historische Bemerkungen. Während Lucas de Burgo (1494) unter dem Einflusse der arabischen Litteratur stehend noch an der Beschränkung der Wurzelformen festhielt, finden wir zuerst bei Cardano (1545) auch die negativen Wurzeln der Gleichungen berücksichtigt; er nennt sie aber noch *radices fictae* im Gegensatze zu den positiven Wurzeln (*radices verae*). Vieta machte eine sehr erfolgreiche Entdeckung in der Algebra, indem er erkannte, dass bei der quadratischen Gleichung der Coefficient des zweiten Gliedes die Summe, das Absolutglied das Product der Wurzeln sei. In dieser Periode macht sich die Algebra allmälig frei von den Fesseln der geometrischen Grundanschauung, aber die vollständige Befreiung ging erst von Cartesius aus, wiewol sie theilweise vorbereitet war, so z. B. von Ferrari durch die algebraische Auflösung biquadratischer Formen. Trotz dieser merkwürdigen Entdeckung hielt Cardano, der sie uns selbst mittheilt, an der geometrischen Grundanschauung in der Discussion der Gleichungen fest; die Beweise der Wurzelformen der quadratischen Gleichungen sind bei ihm dieselben wie bei Mohammed ben Musa, dem Chowarizmier, und auch die Auflösung der kubischen Gleichungen wusste er nur geometrisch zu demonstriren. Mit der Entwicklung der Theorie der Gleichungen hielt auch die Technik derselben gleichen Schritt, deren bisherige Unvollkommenheit jedem Fortschritte hemmend entgegentreten musste. Da sich aber mit dem Beginne des XVII. Jahrh. auch die algebraische Technik rasch entwickelte, so wird es gerechtfertigt erscheinen, von hier ab die Symbole und Begriffe der modernen Algebra in die Entwicklung der Methoden eintreten zn lassen.

§ 95. Methode der Elimination mittels symmetrischer Functionen der Wurzeln*).

Man substituire in die Normalform der Gleichung wiederum die lineare Function

$$x - (u + z) = 0,$$

und eliminire x aus dieser und der gegebenen Gleichung. Man

*) Man vergl. § 41.

erhält daraus eine andere quadratische Gleichung in u, worin die willkürliche Grösse z vorkommt, also allgemein

$$u^2 + Au + B = 0.$$

Um die exacte Gleichung zu erhalten, beachte man, dass wenn die Wurzeln der Gleichung in x mit x_1 und x_2, diejenige der Gleichung in u mit u_1 und u_2 bezeichnet werden, folgende Relationen stattfinden:

$$u_1 = x_1 - z, \quad u_2 = x_2 - z,$$

$$\Sigma(u) = \Sigma(x) - 2z = -(a + 2z) = -A.$$

Wegen der weiteren Beziehungen

$$u_1^{\,2} = x_1^{\,2} - 2zx_1 + z^2, \quad u_2^{\,2} = x_2^{\,2} - 2zx_2 + z^2,$$

ist nun auch noch

$$\Sigma(u^2) = \Sigma(x^2) - 2z\Sigma(x) + 2z^2 = A^2 - 2B.$$

Da ferner

$$\Sigma(x^2) = a^2 - 2b, \quad [\Sigma(x)]^2 = a^2$$

ist, so erhält man

$$B = z^2 + az + b,$$

und folglich

$$u^2 + (2z + a)u + (z^2 + az + b) = 0.$$

Durch Einführung der Resolvente I, nämlich

$$z + \frac{1}{2}a = 0,$$

erhält man wieder

$$u_1 \text{ und } u_2 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

Nach § 79 a. (2) ist nun $a^2 - 4b = -D_2$ (Discriminante); es ist demnach

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}.$$

Daraus ergeben sich folgende drei Fälle:

1) wenn die Discriminante der quadratischen Gleichung positiv ist, so hat die Gleichung zwei complexe Wurzeln;

2) wenn die Discriminante negativ ist, so hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln;

3) wenn die Discriminante gleich Null ist, so hat die Gleichung zwei gleiche und reelle Wurzeln.

§ 96. Methode der Elimination nach Euler und Bézout, verbessert von Sylvester und Hesse*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0\,.$$

Man substituire $x - (u + z) = 0$ und bilde zur Elimination von x folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llllll}
x^3 & + ax^2 & + bx = x''' & + ax'' & + bx' & = 0, \\
 & x^2 - (u+z)x = & & x'' - (u+z)x' & & = 0, \\
x^3 - (u+z)x^2 & & = x''' - (u+z)x'' & & & = 0.
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & -(u+z) \\ 1 & -(u+z) & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

oder

$$(a + u + z)(u + z) + b = 0\,.$$

Ordnet man nach Potenzen von u, so resultirt daraus die Variirte

$$u^2 + (2z + a)u + (z^2 + az + b) = 0\,.$$

Es ist demnach für $z = -\frac{1}{2}a$:

$$u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,,$$

und

$$x = u + z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

---

*) Hesse, Crelle's Journ. Bd. XXVII. 1844; Sylvester, Phil. Mag. 1840. Man vergl. auch Zeitschr. f. Math. u. Phys. von Schlömilch. IV. S. 79. 1859; sowie oben § 44. Ferner auch: Die algebraischen Methoden etc. S. 15. § 6.

§ 97. Methode von Grunert*).

Man substituire in der gegebenen Gleichung die lineare Function

$$x - (u + z) = 0 .$$

Zwischen u und z gilt immer die Gleichung

$$(u + z)^2 - 2u(u + z) + (u^2 - z^2) = 0 .$$

Die Grössen u und z lassen sich bestimmen durch Vergleichung dieser identischen Gleichung mit der gegebenen

$$x^2 + ax + b = 0 .$$

Die Bestimmungsgleichungen sind

$$-2u = a, \quad u^2 - z^2 = b .$$

Aus der ersteren folgt $u = -\frac{1}{2} a$ und aus der zweiten durch Einsetzung von u:

$$z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{- D_2} .$$

Man gelangt auf diesem Wege zu der bekannten Wurzelform

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} \sqrt{- D_2} .$$

§ 98. Methode von Job**).

Zur Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

wendet Job die Substitution des complexen Binoms

$$x - \varrho(1 \pm \sqrt{- n}) = 0$$

an. Ordnet man die Gleichung nach Potenzen von ϱ, so erhält man

$$(1 \pm 2\sqrt{- n} + n)\varrho^2 + a(1 \pm \sqrt{- n})\varrho + b = 0 .$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die reellen und die imaginären Glieder verschwinden, also

$$\text{I.} \quad (1 - n)\varrho^2 + a\varrho + b = 0 ;$$

$$\text{II.} \quad \pm (2\sqrt{- n} \,.\, \varrho^2 + a\sqrt{- n} \,.\, \varrho) = 0 .$$

---

*) Grunert's Arch. XL., S. 249.

**) Job, Beiträge zur Auflösung der Gleichungen. Dresden 1864. S. 9. Job (ibid.), ebenso Eytelwein (Grundl. I. § 133) und Franke (Elem. der Zahlenlehre § 139) wenden diese Substitution auch mit Vortheil zur Auflösung biquadratischer Gleichungen an. Eytelwein bedient sich dazu der linearen Function $x - (\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$ und Franke der Function $x - (\alpha \pm \sqrt{-\beta})$.

Aus II. folgt

$$\varrho = -\frac{1}{2}a,$$

und aus I.

$$n = \frac{\varrho^2 + a\varrho + b}{\varrho^2} = -\frac{a^2 - 4b}{a^2}.$$

Demgemäss ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

§ 99. Andere Methode der Substitution eines complexen Binoms.

Man gehe aus von der linearen Function

$$(x - z_1) - u(x - z_2) = 0.$$

Gibt man dieser Gleichung die Form

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u$$

und erhebt sie zum Quadrat, so erhält man die nach x geordnete Gleichung

$$x^2 - \frac{2(z_1 - z_2u^2)}{1 - u^2}x + \frac{z_1{}^2 - z_2{}^2u^2}{1 - u^2} = 0.$$

Man kann nun annehmen, dass diese Gleichung mit der ursprünglichen identisch sei, woraus folgt:

$$2(z_1 - z_2u^2) : (1 - u^2) = -a,$$
$$(z_1{}^2 - z_2{}^2u^2) : (1 - u^2) = b.$$

Da diese beiden Bestimmungsgleichungen drei Unbekannte enthalten, so bleibt eine derselben willkürlich. Man setze $u^2 = -1$, woraus folgt

$$z_1 + z_2 = -a, \quad z_1{}^2 + z_2{}^2 = 2b.$$

Weil aber

$$(z_1 + z_2)^2 - (z_1{}^2 + z_2{}^2) = 2z_1z_2 = a^2 - 2b$$

ist, so findet man

$$z_1 - z_2 = \pm\sqrt{a^2 - 4b}\,.\sqrt{-1},$$

und wegen

$$x - z_1 = (x - z_2)\sqrt{-1}$$

auch noch

$$x = \frac{1}{2}\left[(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)\sqrt{-1}\right].$$

Demgemäss ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 4b}\right) = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{-D_2}\right).$$

§ 100. Methode der Auflösung durch Zerlegung der Gleichung in zwei lineare, binomische Factoren*).

Angenommen, ein binomischer Factor der trinomischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

sei von der Form

$$x + \left(\frac{1}{2}a + u\right) = 0.$$

Man suche den andern durch Division zu bestimmen, wie folgt

$$\frac{x^2 + ax + b}{x + \left(\frac{1}{2}a + u\right)} = x + \left(\frac{1}{2}a - u\right) + \frac{u^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b)}{x + \left(\frac{1}{2}a + u\right)}.$$

Da der Rest verschwinden muss, wenn auch der andere binomische Factor verschwindet, so erhält man

$$x + \left(\frac{1}{2}a - u\right) = 0,$$

$$u^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-D_2}$$

und

$$x_1 = -\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}.$$

Bemerkung. In den bis jetzt entwickelten Methoden tritt überall die Wurzel der Gleichung in Form eines zweigliedrigen Ausdruckes auf. Es gibt nun eine Reihe von Substitutionen, durch welche die Wurzelwerthe der quadratischen Gleichung in Form von Quotienten und zwar symmetrisch gebildet werden. Unter diesen Methoden sind einige besonders merkwürdig, weil sie bei Anwendung derselben Substitution auf die Auflösung der Gleichungen vom ersten, dritten und vierten Grade ganz ähnliche Wurzelformen liefern.

*) Die algebraischen Methoden etc. S. 18. § 13.

§ 101. Die Methode der falschen Substitutionen*).

Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sind z_1 und z_2 zwei Substitutionen und zwei Zahlenwerthe, welche der Gleichung

$$2az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + 2c = 0$$

genügen; ferner

$$\left.\begin{array}{l} az_1^2 + bz_1 + c = \varphi_1, \\ az_2^2 + bz_2 + c = \varphi_2, \end{array}\right\} \text{(Fehler der Gleichung);}$$

so ist

$$x = \frac{z_2\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{1}\,.\,z_1\sqrt{\varphi_2}\sqrt{-1}}{\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{1}\,.\,\sqrt{\varphi_2}\sqrt{-1}},$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} = \frac{z_2\sqrt{\varphi_1} \mp iz_1\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1} \mp i\sqrt{\varphi_2}}.$$

Beweis. Es sei

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u, \quad x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u}.$$

Setzen wir den Werth von x in die gegebene Gleichung ein und ordnen nach Potenzen von u, so wird

$$(az_2^2 + bz_2 + c)u^2 - (2az_1z_2 + b[z_1 + z_2] + 2c)u$$
$$+ (az_1^2 + bz_1 + c) = 0.$$

Diese Gleichung wird rein quadratisch, wenn man setzt

$$az_1z_2 + \frac{1}{2}b(z_1 + z_2) + c = 0.$$

Man kann dieser Gleichung immer genügen dadurch, dass man z_1 oder z_2 beliebig wählt und die andere Grösse berechnet. Demgemäss ist nun

$$u = \sqrt[2]{1}\sqrt{\frac{az_1^2 + bz_1 + c}{-(az_2^2 + bz_2 + c)}} = \pm\frac{\sqrt{\varphi_1}}{\sqrt{-\varphi_2}},$$

folglich

---

*) L. Matthiessen, Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung derselben zur directen Auflösung der quadratischen und kubischen litteralen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Physik. XV. S. 45. 1870. Man vergl. auch oben § 84.

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u = \pm \frac{\sqrt{\varphi_1}}{\sqrt{-\varphi_2}},$$

und endlich

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} = \frac{z_2 u - z_1}{u - 1} = \frac{z_2 \sqrt{\varphi_1} \mp i z_1 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1} \mp i \sqrt{\varphi_2}}.$$

Die Ausdrücke $x - z_1$ und $x - z_2$ sind die sogenannten Fehler der Substitutionen und φ_1 und φ_2 die Fehler der Gleichung. Es verhalten sich also die Fehler der Gleichung wie die Quadrate der Fehler der Substitutionen.

In der Bestimmungsgleichung für die Grössen z_1 und z_2 ist eine derselben oder auch eine der beiden Verbindungen $z_1 z_2$ und $z_1 + z_2$ willkürlich, mit Ausnahme der Fälle

$$z_1 = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}, \quad z_1 - z_2 = 0.$$

Dagegen wendet man mit Vortheil an die Annahmen

$$z_2 = 0, \quad z_1 = 0 \quad \text{oder} \quad z_1 + z_2 = 0.$$

Setzt man z. B. $z_2 = 0$, so wird

$$z_1 = -2c : b$$

und

$$u = \mp \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{b^2}} = \mp \sqrt{\frac{\varphi_1}{-c}}.$$

Daraus erhält man

$$x = \frac{z_1}{1 - u} = -\frac{2c}{b} : \left(1 \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{b^2}}\right)$$

und

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2a}\left(b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right),$$

oder auch

$$x = \frac{z_1}{1 - u} = \frac{z_1 \sqrt{c}}{\sqrt{c} \pm \sqrt{-\varphi_1}} \text{ *)}.$$

Besonders bemerkenswerth ist aber die Wurzelform welche entsteht, wenn man $z_1 + z_2 = 0$ setzt. Wir setzen voraus, die quadratische Gleichung habe die gewöhnliche Form

$$x^2 + ax + b = 0;$$

*) Man vergl. § 85 die zweite Regel von Ibn Albannâ.

alsdann geht die Gleichung für z_1 und z_2 über in

$$z_1 z_2 + \frac{1}{2} a(z_1 + z_2) + b = 0,$$

und wegen $z_2 = - z_1$,

$$z_1 z_2 = - z_1^2 = - b,$$

oder

$$z_1 = + \sqrt{b}, \quad z_2 = - \sqrt{b}.$$

Weiter ist

$$u = \mp \sqrt{\frac{z_1^2 + a z_1 + b}{-(z_2^2 + a z_2 + b)}} = \mp \sqrt{\frac{a + 2\sqrt{b}}{a - 2\sqrt{b}}},$$

und

$$\frac{x - \sqrt{b}}{x + \sqrt{b}} = \frac{\mp \sqrt{a + 2\sqrt{b}}}{\sqrt{a - 2\sqrt{b}}}.$$

Durch eine einfache Verwandlung dieser Proportion erhält man

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{b} \, \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{b}} \mp \sqrt{a + 2\sqrt{b}}}{\sqrt{a - 2\sqrt{b}} \pm \sqrt{a + 2\sqrt{b}}} = - \frac{1}{2} \left(a \mp \sqrt{- D_2}\right).$$

Wenn die Gleichung die Cayley'sche Form $ax^2 + 2bx + c = 0$ hat, so findet man

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \frac{\sqrt{b - \sqrt{ac}} \mp \sqrt{b + \sqrt{ac}}}{\sqrt{b - \sqrt{ac}} \pm \sqrt{b + \sqrt{ac}}}.$$

1. Beispiel. Aufzulösen: $8x^2 - 10x + 3 = 0$.

Die Gleichung der beiden Substitutionen z_1 und z_2 ist in diesem Falle

$$16 z_1 z_2 - 10(z_1 + z_2) + 6 = 0.$$

Man setze $z_1 = 1$, also $z_2 = \frac{2}{3}$; dann ist

die erste Abweichung: $8 z_1^2 - 10 z_1 + 3 = 1 = \varphi_1$,

die zweite Abweichung: $8 z_2^2 - 10 z_2 + 3 = - \frac{1}{9} = \varphi_2$.

Mithin ist

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt{\varphi_1} - i z_1 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1} - i \sqrt{\varphi_2}} = \frac{\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{9}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{3}{4};$$

$$x_2 = \frac{z_2 \sqrt{\varphi_1} + i z_1 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1} + i \sqrt{\varphi_2}} = \frac{\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{1}{9}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{2}.$$

2. Beispiel. Aufzulösen: $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Die Gleichung der Substitutionen ist

$$2z_1 z_2 - 5(z_1 + z_2) + 8 = 0.$$

Man nehme an $z_1 + z_2 = 0$; dann wird $z_1 = 2$, $z_2 = -2$.

Erste Substitution $z_1 = 2$; erste Abweichung $\varphi_1 = -2$;

zweite Substitution $z_2 = -2$; zweite Abweichung $\varphi_2 = +18$.

Darnach ist

$$x = \frac{-2\sqrt{-2} \mp 2\sqrt{-18}}{\sqrt{-2} \mp \sqrt{-18}} = \frac{-2 \mp 6}{1 \mp 3};$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1.$$

Die symmetrische Wurzelform, nämlich

$$x = \sqrt{b}\,\frac{\sqrt{a - 2\sqrt{b}} \mp \sqrt{a + 2\sqrt{b}}}{\sqrt{a - 2\sqrt{b}} \pm \sqrt{a + 2\sqrt{b}}}$$

gibt für den vorliegenden Fall die Wurzel

$$x = 2\,\frac{\sqrt{9} \mp \sqrt{1}}{\sqrt{9} \pm \sqrt{1}} = 2\,\frac{3 \mp 1}{3 \pm 1}; \quad x_1 = 1, \; x_2 = 4.$$

3. Beispiel. Aufzulösen: $x^2 + x + 1$.

Mit Hülfe der symmetrischen Wurzelform findet man

$$x = \frac{\sqrt{-1} \mp \sqrt{3}}{\sqrt{-1} \pm \sqrt{3}}; \quad x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

§ 102. Geometrische Discussion der vorhergehenden Methode.

Die Reduction der Wurzel einer quadratischen Gleichung auf die Wurzelform der *regula falsorum s. lancium* lässt sich durch geometrische Betrachtungen illustriren, wie wir dieselben auch zur Begründung der Regel in ihrer Anwendung auf die Gleichungen ersten Grades angestellt haben.

Gegeben sei die Gleichung

$$f(x) = x^2 - ax - b = 0.$$

Man setze $f(x)$ gleich $y\sqrt{b}$, so ist für veränderliche Werthe von x die Gleichung

$$x^2 - ax - b = y\sqrt{b}$$

die Gleichung einer Parabel. Sind OX und OY (Fig. 23) die Coordinatenaxen, $OB = x_1$ und $OA = x_2$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung, CU die Axe der Parabel, so ist

$$OF = \frac{1}{2}a, \quad OD = -\sqrt{b} \quad \text{und} \quad FC = -(a^2 + 4b) : 4\sqrt{b}.$$

Substituirt man nun $z_1 = a = OM$ für x, so wird die

erste Abweichung $z_1^2 - az_1 - b = \varphi_1 = -b = +y_1\sqrt{b}$;

also

$$MP = y_1 = -\sqrt{b}.$$

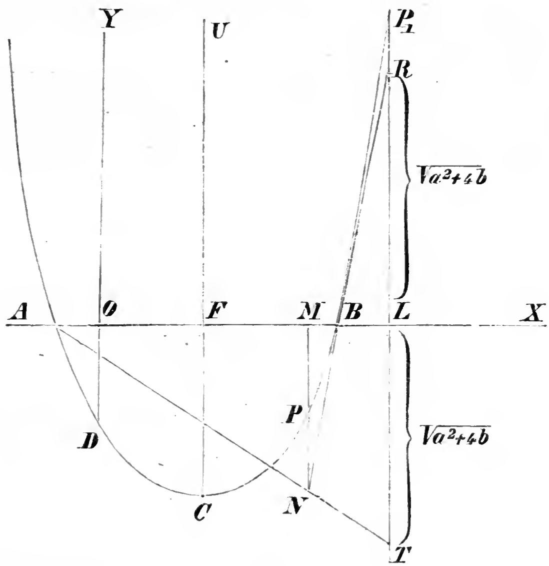


Fig. 23.

Dann ist wegen

$$2z_1z_2 - a(z_1 + z_2) - 2b = 0$$

an die Stelle von x zum zweiten Male zu setzen

$$z_2 = a + \frac{2b}{a} = OL;$$

folglich wird die

zweite Abweichung $z_2^2 - az_2 - b = \varphi_2 = b + \frac{4b^2}{a^2} = y_2\sqrt{b}$,

also

$$LP_1 = y_2 = \frac{\sqrt{b}}{a^2}(a^2 + 4b).$$

Da nun der Theorie gemäss

$$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^2 = \frac{\varphi_1}{-\varphi_2},$$

oder

$$\left(\frac{x-z_1}{x-z_2}\right)^2 = \frac{(x-a)^2}{\left(x-a-\frac{2b}{a}\right)^2} = \frac{b}{b+\frac{4b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+4b}$$

ist, so ist

$$\frac{x-a}{\pm\left(x-a-2\frac{b}{a}\right)} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+4b}}$$

eine lineare geometrische Proportion, die sich aus der Figur folgendermassen herleiten lässt.

Man construire unter M die Senkrechte MN gleich a, über L die Senkrechte LR gleich $\sqrt{a^2+4b}$, so muss RN durch den Punkt B gehen. Es ist nämlich $OB = x_1$, $OM = a$, $MB = x_1 - a$; ferner ist

$$OL = a + \frac{2b}{a}, \quad BL = a + \frac{2b}{a} - x_1;$$

folglich ist mit Rücksicht auf das untere Vorzeichen

$$MB : BL = MN : RL$$

und NBR eine Gerade.

Trägt man LR nach unten ab bis T, macht also auch $LT = \sqrt{a^2+4b}$, so ist $OA = x_2$, $MA = x_2 - a$ und

$$LA = x_2 - a - 2\frac{b}{a}.$$

Gemäss der oben gefundenen Relation aber, mit Berücksichtigung des oberen Vorzeichens, ist

$$\frac{x_2 - a}{x_2 - a - 2\frac{b}{a}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}},$$

oder

$$MA : LA = MN : LT,$$

also auch ANT eine Gerade.

§ 103. Ableitung verschiedener Wurzelformen aus der vorangehenden Methode.

Die Substitution

$$\frac{x-z_1}{x-z_2} = u, \quad \text{oder} \quad x = \frac{z_1 - z_2 u}{1-u}$$

ist ungemein fruchtbar für die Theorie der Gleichungen der ersten vier Grade. Bézout*) wandte sie zuerst an zur Auflösung der reducirten kubischen Gleichung. Legendre**) soll sie später empfohlen haben zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Zur Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichungen wurde die in Rede stehende Function mit Erfolg angewendet von Bretschneider***) und Spitz†), auf quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen in einer verallgemeinerten Form von Heilermann††), auf Gleichungen der ersten vier Grade vom Verfasser selbst†††). Heilermann von dem Princip ausgehend, dass der symmetrischen Wurzelform vor allen andern der Vorrang gebühre, setzt voraus die Cayley'sche Form des Trinoms

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

und macht die symmetrischen Substitutionen

$$x = \alpha\xi + \beta\eta\,, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta\,.$$

Dividirt man die gegebene Gleichung durch y^2 und macht $\frac{x}{y}$ zur Hauptgrösse, so vereinigen sich die beiden Substitutionen, nachdem man x an die Stelle von $\frac{x}{y}$ gesetzt hat, zu der zusammengesetzten Substitution

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} = \frac{\frac{\alpha\xi}{\delta\eta} + \frac{\beta}{\delta}}{\frac{\gamma\xi}{\delta\eta} + 1}\,.$$

Setzt man weiter

$$\frac{\gamma\xi}{\delta\eta} = -u\,, \quad \frac{\beta}{\delta} = z_1\,, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = z_2\,,$$

so resultirt

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} \text{ oder } \frac{x - z_1}{x - z_2} = u\,.$$

---

*) Bézout, Mém. sur plusieurs classes d'équations etc. Mém. Par. pour l'année 1762. Paris 1764.

**) Vielleicht in s. Exercices de calcul intégral, Paris 1811; oder im Traité des fonctions elliptiques I. Paris 1825.

***) Grun. Arch. IV. S. 411. 1844.

†) Grun. Arch. XXXII. S. 199. 435. 1859; XXXIII. S. 442.

††) Programm. Trier 1855; Ztschft. f. Math. u. Phys. XXI. S. 364. 1876.

†††) Die algebraischen Methoden. S. 14. 16. 24. 34. Leipzig 1866; Ztschft. f. Math. u. Phys. XV. S. 41. 1870; Commentar zu Heis' Aufgabensammlung § 69. Köln 1874; Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung Bd. I. S. 449. II. 330. 336. Köln 1873.

Hieraus erklärt sich, warum durch diese Substituirte die Wurzelausdrücke immer auf eine symmetrische Form gebracht werden. Setzt man noch $u = v : w$, so wird

$$x = \frac{z_1 w - z_2 v}{w - v},$$

woraus zu ersehen ist, warum bei dieser Substitutionsmethode die Auflösungen die Wurzelform der Methode der falschen Substitutionen annehmen.

Wir wollen nun zeigen, wie mittels dieses Princips eine Anzahl von symmetrischen Wurzelformen hergeleitet werden kann.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0 .$$

Man substituire für x den Ausdruck $(z_1 - z_2 u) : (1 - u)$ und ordne nach Potenzen von u; alsdann erhält man

$$(z_2^2 + az_2 + b)u^2 - (2z_1 z_2 + a[z_1 + z_2] + 2b)u + (z_1^2 + az_1 + b) = 0.$$

Es ist nun auch noch

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u .$$

Erhebt man diese Gleichung beiderseits zum Quadrat und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man

$$x^2 - 2\frac{z_1 - z_2 u^2}{1 - u^2}x + \frac{z_1^2 - z_2^2 u^2}{1 - u^2} = 0 = x^2 + ax + b .$$

Durch Vergleichung der homologen Glieder erhält man

$$u^2 = \frac{2z_1 + a}{2z_2 + a} = \frac{z_1^2 - b}{z_2^2 - b} .$$

Hieraus folgt

$$z_1 z_2 (z_1 - z_2) + \frac{1}{2}a(z_1^2 - z_2^2) + b(z_1 - z_2) = 0 ,$$

und weil $z_1 - z_2$ nicht verschwinden darf, indem so $u = 1$ werden würde und x unbestimmt bliebe, so ergibt die Division der linken Seite durch $z_1 - z_2$

$$z_1 z_2 + \frac{1}{2}a(z_1 + z_2) + b = 0 .$$

Demnach verschwindet in der vorher abgeleiteten Gleichung in u das zweite Glied und man erhält daraus für u^2 noch eine dritte Bestimmungsgleichung, nämlich

$$u^2 = \frac{z_1^2 + az_1 + b}{-(z_2^2 + az_2 + b)} = \frac{\varphi_1}{-\varphi_2} .$$

Hier bezeichnen wieder wie früher φ_1 und φ_2 die Fehler der Gleichung, wenn z_1 und z_2 die Substitutionen, sowie $x - z_1$ und $x - z_2$ die Fehler der Substitutionen sind.

Für u^2 lassen sich noch andere symmetrische Functionen von z_1 und z_2 erfinden, z. B.

$$u^2 = \frac{a z_1^2 + 2b z_1}{a z_2^2 + 2b z_2}.$$

Weil nämlich

$$2 z_1 z_2 + a(z_1 + z_2) + 2b = 0$$

ist, so hat man auch

$$a + 2 z_1 = -\frac{a z_1 + 2b}{z_2}, \quad a + 2 z_2 = -\frac{a z_2 + 2b}{z_1}.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so resultirt

$$\frac{a + 2 z_1}{a + 2 z_2} = \frac{a z_1^2 + 2 b z_1}{a z_2^2 + 2 b z_2}.$$

Ausserdem findet man leicht

$$u^2 = \frac{(z_1 + a)^2 - b}{(z_2 + a)^2 - b},$$

so dass sich für u^2 folgende Ausdrücke ergeben:

$$\frac{a+2z_1}{a+2z_2} = \frac{z_1^2 - b}{z_2^2 - b} = \frac{a z_1^2 + 2 b z_1}{a z_2^2 + 2 b z_2} = \frac{z_1^2 + a z_1 + b}{-(z_2^2 + a z_2 + b)} = \frac{(z_1 + a)^2 - b}{(z_2 + a)^2 - b}.$$

Zur Berechnung der Wurzel kann man hieraus beliebige Ausdrücke auswählen. Nimmt man den ersten, so ist

$$u_1 = +\sqrt{\frac{a + 2 z_1}{a + 2 z_2}}, \quad u_2 = -\sqrt{\frac{a + 2 z_1}{a + 2 z_2}},$$

und wegen

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u$$

erhält man die Wurzelformen

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt{a + 2 z_1} - z_1 \sqrt{a + 2 z_2}}{\sqrt{a + 2 z_1} - \sqrt{a + 2 z_2}},$$

$$x_2 = \frac{z_2 \sqrt{a + 2 z_1} + z_1 \sqrt{a + 2 z_2}}{\sqrt{a + 2 z_1} + \sqrt{a + 2 z_2}}.$$

Die übrigen Ausdrücke für u_2 geben

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt{z_1^2 - b} - z_1 \sqrt{z_2^2 - b}}{\sqrt{z_1^2 - b} - \sqrt{z_2^2 - b}},$$

$$x_2 = \frac{z_2\sqrt{z_1^2 - b} + z_1\sqrt{z_2^2 - b}}{\sqrt{z_1^2 - b} + \sqrt{z_2^2 - b}};$$

u. s. w.

Für die Functionen $f(z_1)$ und $f(z_2)$ erhalten wir folgende verschiedene Ausdrücke:

$$f(z_1) = z_1^2 + az_1 + b = (z_1 - z_2)\left(z_1 + \frac{1}{2}a\right) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}(z_1^2 - b)$$

$$= -\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}\left(\frac{1}{2}az_1^2 + bz_1\right);$$

$$f(z_2) = z_2^2 + az_2 + b = -(z_1 - z_2)\left(z_2 + \frac{1}{2}a\right) = -\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}(z_2^2 - b)$$

$$= \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}\left(\frac{1}{2}az_2^2 + bz_2\right).$$

Aus diesen vier Formen lassen sich offenbar so viele verschiedene Wurzelformen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ ableiten, als die Anzahl der Variationen von vier Elementen mit Wiederholungen beträgt, nämlich 16. Variationen mit Wiederholungen derselben Form sind:

$$x = \frac{z_2\sqrt{z_1^2 + az_1 + b} - z_1\sqrt{-1}\sqrt{z_2^2 + az_2 + b}}{\sqrt{z_1^2 + az_1 + b} - \sqrt{-1}\sqrt{z_2^2 + az_2 + b}} \text{ *)}$$

$$= \frac{z_2\sqrt{2z_1 + a} - z_1\sqrt{1}\sqrt{2z_2 + a}}{\sqrt{2z_1 + a} - \sqrt{1}\sqrt{2z_2 + a}} \text{ **)}$$

$$= \frac{z_2\sqrt{z_1^2 - b} - z_1\sqrt{1}\sqrt{z_2^2 - b}}{\sqrt{z_1^2 - b} - \sqrt{1}\sqrt{z_2^2 - b}}$$

$$= \frac{z_2\sqrt{z_1(az_1 + 2b)} - z_1\sqrt{1}\sqrt{z_2(az_2 + 2b)}}{\sqrt{z_1(az_1 + 2b)} - \sqrt{1}\sqrt{z_2(az_2 + 2b)}}.$$

Setzt man zwei verschiedene Ausdrücke für $f(z_1)$ und $f(z_2)$ in die allgemeine Wurzelform

$$x = \frac{z_2\sqrt{f(z_1)} - z_1\sqrt{1}\sqrt{-f(z_2)}}{\sqrt{f(z_1)} - \sqrt{1}\sqrt{-f(z_2)}}$$

im Dividenden und Divisor ein, so erhält man die Variationen ohne Wiederholungen. Bezeichnen wir den ersten Ausdruck mit I, den zweiten mit II u. s. w., so erhält man

---

*) L. Matthiessen, Die regula falsi bei den Indern und Arabern etc. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XV. S. 45. 1870. Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung I. Bd. § 59. S. 450. 1873.

**) L. Matthiessen, Commentar zu Heis' Sammlung. § 69. III. 1874.

$$\text{I, II,}\quad x = \sqrt{\frac{z_1+z_2}{2}}\cdot\frac{z_2\sqrt{2z_1+a}-z_1\sqrt{1}\sqrt{2z_2+a}}{\sqrt{z_1^2-b}-\sqrt{1}\sqrt{z_2^2-b}}$$

$$= -\frac{z_2\sqrt{(z_1+z_2)(2z_1+a)}-z_1\sqrt{z_2^2-b}}{\sqrt{(z_1+z_2)(2z_2+a)}-\sqrt{z_1^2-b}}$$

$$= \sqrt{-z_1z_2}\cdot\frac{z_2\sqrt{2z_1+a}-z_1\sqrt{1}\sqrt{2z_2+a}}{\sqrt{az_1^2+2bz_1}-\sqrt{1}\sqrt{az_2^2+2bz_2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\cdot\frac{z_2\sqrt{z_1(2z_1+a)}-z_1\sqrt{-1}\sqrt{az_2+2b}}{\sqrt{z_2(2z_2+a)}-\sqrt{-1}\sqrt{az_1+2b}}$$

$$= \sqrt{-\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}\cdot\frac{z_2\sqrt{z_1^2-b}-z_1\sqrt{1}\sqrt{z_2^2-b}}{\sqrt{az_1^2+bz_1}-\sqrt{1}\sqrt{az_2^2+bz_2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\cdot\frac{z_2\sqrt{2z_1(z_1^2-b)}-z_1\sqrt{-1}\sqrt{(z_1+z_2)(az_2+2b)}}{\sqrt{2z_2(z_2^2-b)}-\sqrt{-1}\sqrt{(z_1+z_2)(az_1+2b)}}\,.$$

Ist die quadratische Gleichung eine reciproke, also von der Form

$$x^2+ax+1=0\,,$$

so ist die Gleichung der Substitutionen

$$2z_1z_2+a(z_1+z_2)+2=0\,.$$

Nimmt man an $z_1+z_2=0$, so wird $x_1=\pm 1$, $z_2=\mp 1$. Wenn man nun z. B. die oberen Vorzeichen wählt, so erhält man die eleganten und symmetrischen Wurzelausdrücke

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{a-2}\mp\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-2}\pm\sqrt{a+2}}\,.$$

1. Beispiel. Aufzulösen: $x^2-2\frac{1}{6}\,x+1=0$.

Die vorstehende Methode liefert die Wurzeln

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{4\frac{1}{6}}\pm\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{4\frac{1}{6}}\mp\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{5\pm 1}{5\mp 1};\quad x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{2}{3}\,.$$

2. Beispiel. $x^2-(1+a)x+1=0$.

Die gewöhnliche Lösung liefert die Wurzelwerthe

$$x=\frac{1}{2}\left(1+a\pm\sqrt{a^2+2a-3}\right).$$

Die vorstehende Methode dagegen liefert die symmetrischen Wurzelwerthe

$$x=\frac{\sqrt{a+3}\pm\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+3}\mp\sqrt{a-1}}\,.$$

§ 104. Die allgemeine Wurzelform der quadratischen Gleichung.

Aus der im vorigen Paragraphen abgeleiteten symmetrischen Wurzelform

$$x = \frac{z_2\sqrt{a+2z_1} \mp z_1\sqrt{a+2z_2}}{\sqrt{a+2z_1} \mp \sqrt{a+2z_2}},$$

worin zwischen den Grössen z_1 und z_2 die Relation

$$z_1 z_2 + \frac{1}{2} a (z_1 + z_2) + b = 0$$

stattfinden muss, lässt sich nun noch eine Wurzelform ableiten, welche eine willkürliche Grösse enthält und deshalb die allgemeine Wurzelform der quadratischen Gleichungen genannt wird. Multiplicirt man Dividend und Divisor mit $\sqrt{a+2z_1}$, so resultirt

$$x = -\frac{az_1 + 2b \pm z_1\sqrt{a^2-4b}}{2z_1 + a \mp \sqrt{a^2-4b}},$$

wo nun z_1 eine ganz willkürliche Grösse ist.

Multiplicirt man Dividend und Divisor der letzten Form mit $2z_1 + a \pm \sqrt{a^2-4b}$, so erhält man

$$x = \frac{4(z_1^2 + az_1 + b)}{4(z_1^2 + az_1 + b)}\left(-\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right) = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-4b}).$$

Geht man aus von der Cayley'schen Form der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = (a, b, c \between x, 1)^2 = 0,$$

so ist die allgemeine Wurzelform

$$x = -\frac{bz_1 + c \pm z_1\sqrt{b^2-ac}}{az_1 + b \mp \sqrt{b^2-ac}},$$

und wenn man $z_1 = y_1 : y_2$ setzt,

$$x = -\frac{by_1 + cy_2 \pm y_1\sqrt{b^2-ac}}{ay_1 + by_2 \mp y_2\sqrt{b^2-ac}} = -\frac{by_1 + cy_2 \pm y_1\sqrt{-D_2}}{ay_1 + by_2 \mp y_2\sqrt{-D_2}}.$$

In dieser Form ist sie zuerst dargestellt von Clebsch*).

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen § 33. Leipzig 1872. Man vergl. § 123 unten.

Diekmann, Zur Theorie der Gleichungen zweiten Grades. Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht. IV. S. 392. 1873. V. S. 222. 362, 1874.

Zu der allgemeinen Wurzelform

$$x = -\frac{az + 2b \pm z\sqrt{a^2 - 4b}}{2z + a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}$$

der Normalgleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

gelangt man auch auf synthetischem Wege auf folgende Art:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 + ax + b = 0\,, \\ \text{II.} & 2zx + \left(az \mp z\sqrt{a^2 - 4b}\right) = 0\,, \\ \text{III.} & \left(a \mp \sqrt{a^2 - 4b}\right)x + 2b = 0\,. \end{array}$$

Die Addition der Gleichungen II und III ergibt

$$\left[(2z + a) \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right]x + \left[(az + 2b) \mp z\sqrt{a^2 - 4b}\right] = 0\,,$$

woraus sich sofort die allgemeine Wurzelform herleiten lässt.

Setzt man

$$a^2 - 4b = -D_2 \quad \text{(Discriminante)}$$
$$2z + a = Z\,,$$

so ist auch noch

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\,\frac{aZ + D_2 \pm (Z - a)\sqrt{-D_2}}{Z \mp \sqrt{-D_2}}\,,$$

wo Z eine willkürliche Grösse ist.

§ 105. Verbesserte Methode von Hulbe*).

Dieser Algebrist empfiehlt in seiner lesenswerthen Schrift die Function

$$x = \frac{u + y}{u + z}$$

zu substituiren, die Gleichung nach Potenzen von u zu ordnen, z willkürlich anzunehmen und mit Anwendung der Reducente (2), nämlich

$$\alpha^2 - 4\beta = 0$$

eine Resolvente in y zu bilden. Er führt dies aber selbst nicht aus, sonst würde er auf die Bedingung $y = z$ gerathen sein, was einen widersinnigen Wurzelwerth für x ergeben würde. Es ist nämlich die nach u geordnete Gleichung

$$u^2 + \frac{2y + a(y + z) + 2bz}{1 + a + b}\,u + \frac{y^2 + ayz + bz^2}{1 + a + b} = 0\,,$$

---

*) Hulbe, Analyt. Entdeckungen u. s. w. § 91.

oder kurz

$$u^2 + \alpha u + \beta = 0.$$

Die Einführung der Reducente (2) ergibt nun

$$[2y + a(y + z) + 2bz]^2 - 4(1 + a + b)(y^2 + ayz + bz^2) = 0,$$

woraus folgt $y = z$.

Setzt man dagegen

$$x = v\frac{u + y}{u + z},$$

so resultirt

$$u^2 + \frac{2yv^2 + a(y + z)v + 2bz}{v^2 + av + b}u + \frac{y^2v^2 + ayzv + bz^2}{v^2 + av + b} = 0.$$

Setzt man $y = -z = 1$, so wird $v = \sqrt{b}$ und

$$u = \pm\sqrt{-\frac{v^2 - av + b}{v^2 + av + b}}.$$

Da andrerseits

$$x = v\frac{u + 1}{u - 1}$$

so, erhält man

$$u = \frac{x + v}{x - v} = \sqrt{-\frac{v^2 - av + b}{v^2 + av + b}},$$

und folglich

$$\frac{x + \sqrt{b}}{x - \sqrt{b}} = \pm\sqrt{\frac{a - 2\sqrt{b}}{a + 2\sqrt{b}}}.$$

Der Werth der Unbekannten ist demgemäss

$$x = \sqrt{b}\,\frac{\sqrt{a - 2\sqrt{b}} \mp \sqrt{a + 2\sqrt{b}}}{\sqrt{a - 2\sqrt{b}} \pm \sqrt{a + 2\sqrt{b}}} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

§ 106. Methode von Sommer*).

Diese Methode ist im Princip mit der Methode der beiden falschen Substitutionen verwandt und auch mit der oben entwickelten verbesserten Substitutionsmethode von Hulbe. Beide lassen sich aus jener herleiten, welche von folgender Form ist:

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} = \frac{z_2 u - z_1}{u - 1}.$$

*) Grun. Arch. Bd. XXVII. 354.

Setzt man $z_2 = y + z$, $z_1 = z - y$, so geht dieselbe über in

$$x = z + y\,\frac{u+1}{u-1}.$$

Diese Substitution ist von Sommer mit gutem Erfolge zur Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen angewandt worden. Ist $z = 0$, so nimmt sie die Form der verbesserten Hulbe'schen Substitution an. Aus der Gleichung folgt noch

$$u = \frac{(x-z)+y}{(x-z)-y}.$$

Setzt man vorläufig

$$y\,\frac{u+1}{u-1} = x',$$

so wird

$$x = x' + z.$$

Man bilde also zunächst die Variirte

$$x'^2 + \alpha x' + \beta = 0.$$

Führt man nun für x' seinen Werth ein und ordnet nach u, so erhält man

$$u^2 + 2\,\frac{y^2-\beta}{y^2+\alpha y+\beta}\,u + \frac{y^2-\alpha y+\beta}{y^2+\alpha y+\beta} = 0.$$

Damit diese Gleichung rein quadratisch werde, nehme man an

$$y^2 - \beta = 0,$$

also

$$y = \sqrt{\beta} = \sqrt{z^2 + az + b}.$$

Da z willkürlich bleibt, so kann man $z = 0$ setzen, woraus hervorgeht

$$y = \sqrt{b},$$

und

$$u = \pm\sqrt{-\frac{y^2 - ay + b}{y^2 + ay + b}} = \pm\sqrt{\frac{a-2\sqrt{b}}{a+2\sqrt{b}}}.$$

Gemäss der substituirten Function ist

$$u = \frac{x+y}{x-y} = \frac{x+\sqrt{b}}{x-\sqrt{b}} = \pm\sqrt{\frac{a-2\sqrt{b}}{a+2\sqrt{b}}},$$

und der Wurzelwerth der Gleichung

$$x = \sqrt{b}\,\frac{\sqrt{a-2\sqrt{b}} \mp \sqrt{a+2\sqrt{b}}}{\sqrt{a-2\sqrt{b}} \pm \sqrt{a+2\sqrt{b}}}.$$

§ 107. Methode der Auflösung mittels der harmonischen Proportion*).

Es sei

$$(u - x) : (x - z) = u : z$$

oder

$$x = \frac{2uz}{u + z}.$$

Substituirt man diesen Werth von x in die gegebene Gleichung, so wird

$$4u^2z^2 + 2auz(u + z) + b(u + z)^2 = 0,$$

und nach Potenzen von u geordnet

$$(4z^2 + 2az + b)u^2 + 2(az^2 + bz)u + bz^2 = 0.$$

Damit diese Gleichung eine rein quadratische werde, setze man

$$az^2 + bz = 0, \quad z = -b : a.$$

Dann wird

$$u = \pm\sqrt{\frac{-bz^2}{4z^2 + 2az + b}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2 - 4b}},$$

und

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b}{-\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

§ 108. Andere Methode der Auflösung mittels einer harmonischen Proportion**).

Es sei

$$(x - u) : (u - z) = x : z,$$

oder

$$u = \frac{2xz}{x + z}, \quad x = \frac{uz}{2z - u}.$$

Quadrirt man u und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man

$$x^2 - \frac{2u^2z}{4z^2 - u^2}x - \frac{u^2z^2}{4z^2 - u^2} = 0,$$

und durch Vergleichung der homologen Coefficienten der gegebenen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$,

$$z = 2b : a, \quad u = \pm 4b : \sqrt{a^2 - 4b}.$$

---

*) Die algebraischen Methoden etc. S. 17. § 9.

**) Die algebraischen Methoden etc. S. 17. § 10.

Nach der Annahme ist nun

$$u = \frac{2xz}{x+z} = \pm \frac{4b}{\sqrt{a^2-4b}},$$

folglich die Wurzel der Gleichung

$$x = \frac{2b}{\mp\sqrt{a^2-4b}-a} = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{-D_2}\right).$$

§ 109. Methode der Auflösung mittels einer disharmonischen Proportion*).

Es sei

$$x = \frac{2xz}{u+z}, \quad \text{also } x = \frac{u(u+z)}{2z}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in die gegebene Gleichung, so ergibt sich

$$(u^2+2au+4b)z^2 + 2(au^2+u^3)z + u^4 = 0.$$

Mit Anwendung der Reducente (1) erhält man

$$u = -a, \quad z = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2-4b}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Substitutionsformel ein, so erhält man nach einer leichten Reduction

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}.$$

§ 110. Methode mittels Substitution der Formel (31)**).

Man kann ausgehen von der Relation

$$x - \frac{u-b}{a-v} = 0.$$

Setzt man für x die angenommene Function zweier neuer Unbekannten u und v in die gegebene Gleichung ein, und ordnet nach Potenzen von v, so erhält man

$$v^2 - \frac{a}{b}(u+b)v + \frac{u^2+(a^2-2b)u+b^2}{b} = 0.$$

Diese Gleichung wird rein quadratisch durch die Annahme

$$u = -b.$$

*) Die algebraischen Methoden etc. S. 18. § 11.

**) Sämmtliche Substitutionen sind in § 80 aufgezählt.

Daraus folgt

$$v = \pm\sqrt{-D_2}$$

und

$$x = \frac{2b}{-a \pm \sqrt{-D_2}} = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{-D_2}).$$

§ 111. Methode der Auflösung durch Bildung der Gleichung der Wurzelquadrate der Hülfsgrösse.

Man substituire

$$x - (u + z) = 0$$

und bilde die Gleichung der Wurzelquadrate der Gleichung in u, also von

$$u - (x - z) = 0.$$

Die gesuchte Gleichung ist

$$u^2 - (x^2 - 2zx + z^2) = 0,$$

oder nach x geordnet

$$x^2 - 2zx + (z^2 - u^2) = 0.$$

Vergleicht man die correspondirenden Glieder der gegebenen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0,$$

so erhält man

$$z = -\frac{1}{2}a, \quad u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-D_2}.$$

Demgemäss sind die Wurzelwerthe

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}.$$

§ 112. Auflösung einer quadratischen Gleichung durch Variation der Gleichung ihrer Wurzelquadrate.

Die gegebene Gleichung sei wiederum

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Man bilde die Gleichung ihrer Wurzelquadrate

$$(x^2)^2 - (a^2 - 2b)x^2 + b^2 = 0.$$

Alsdann substituire man

$$x^2 = x' + z,$$

woraus man erhält die Variirte

$$x'^2 + (2z - [a^2 - 2b])x' + (z^2 - [a^2 - 2b]z + b^2) = 0.$$

Das mittlere Glied verschwindet durch die Annahme

$$z - \frac{1}{2}(a^2 - 2b) = 0.$$

Demgemäss ist

$$x_1' \text{ und } x_2' = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 - 4b},$$

und entweder

$$x = +\sqrt{x' + z} = -\frac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2 - 4b})$$

oder

$$x = -\sqrt{x' + z} = +\frac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Der zweite Wurzelwerth gehört nun aber zu der Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0,$$

ist also eine fremde Auflösung.

Wenn man sich auch der vorstehenden Methode in praktischen Fällen nicht bedienen wird, so haben wir doch dieselbe hier entwickelt, um an einem Beispiele zu zeigen, wie durch gewisse Operationen fremde Lösungen hereingebracht werden, die man sorgfältig von den wahren Wurzeln zu unterscheiden hat. Fremde Lösungen treten immer da auf, wo die substituirte Function von höherem als dem ersten Grade ist.

§ 113. Methode der Auflösung durch Bildung der Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Gleichung*).

Diese Transformation ist gleichbedeutend mit der Substitution der quadratischen Function

$$(x - z)^2 - u = x^2 - 2zx + (z^2 - u) = 0.$$

Die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten, nämlich

$$x'^2 + \alpha x' + \beta = 0$$

ist nach dem Früheren

$$u^2 - (\alpha^2 - 2\beta)u + \beta^2 = u^2 + \alpha' u + \beta' = 0.$$

Hieraus folgt

$$-\alpha' = \alpha^2 - 2\beta = 2z^2 + 2az + (a^2 - 2b),$$
$$\beta' = \beta^2 = (z^2 + az + b)^2.$$

*) L. Matthiessen, Neue Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen. Ztschr. f. Math. u. Phys. VIII. S. 133. 1863

Mit Anwendung der Reducente (2) oder (3), nämlich

$$\alpha'^2 - 4\beta' = \alpha^2(\alpha^2 - 4\beta) = 0\,,$$

erhält man die Resolvente

$$z^2 + az + \frac{1}{4}a^2 = 0\,,$$

welche sich auf die Form der Resolvente I. reducirt, also auf

$$z + \frac{1}{2}a = 0\,.$$

Da nun

$$u^2 - \frac{1}{2}(a^2 - 4b)u + \frac{1}{16}(a^2 - 4b)^2 = 0$$

ist, so erhält man den gesuchten Wurzelwerth

$$x = z \pm \sqrt{u} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

§ 114. Methode der Substitution einer quadratischen Function.

Mehrere der im Vorangehenden entwickelten Methoden und Wurzelformen geben Veranlassung, nunmehr die Auflösung auch mit der Substitution quadratischer Functionen zu versuchen, z. B.

$$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^2 - \frac{a + 2z_1}{a + 2z_2} = 0\,,$$

oder, wenn man zwischen z_1 und z_2 die Beziehung $z_1 + z_2 = 0$ annimmt,

$$\left(\frac{x - z}{x + z}\right)^2 - \frac{a + 2z}{a - 2z} = 0\,.$$

Entwickeln wir diese Gleichung und ordnen sie nach Potenzen von x, so erhalten wir

$$x^2 + ax + z^2 = 0\,,$$

und wenn man diese Gleichung mit der gegebenen Glied für Glied vergleicht,

$$z^2 = b\,, \quad z = \sqrt{b}\,.$$

Da hieraus und aus der substituirten Function folgt

$$\frac{x - \sqrt{b}}{x + \sqrt{b}} = \pm\sqrt{\frac{a + 2\sqrt{b}}{a - 2\sqrt{b}}}\,,$$

so ergeben sich hieraus wieder die bereits früher gefundenen symmetrischen Wurzelformen.

§ 115. Andere Methode der Substitution einer quadratischen Function.

Man nehme an

$$\left(\frac{x+\frac{1}{2}a+z_1}{x+\frac{1}{2}a+z_2}\right)^2-\frac{z_1}{z_2}=0\,,$$

und entwickele den Ausdruck nach Potenzen von x.

Dies gibt

$$x^2+ax+\frac{1}{4}(a^2-4z_1z_2)=0\,.$$

Durch Vergleichung dieser mit der gegebenen Gleichung

$$x^2+ax+b=0$$

erhält man

$$z_1z_2=-\frac{1}{4}D_2\,,$$

und da eine der unbestimmten Grössen z_1 und z_2 willkürlich bleibt, so setze man

$$z_2=z_1=z\,,$$

also

$$z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

Wegen der hieraus folgenden Relation

$$\frac{x+\frac{1}{2}a+z}{x+\frac{1}{2}a+z}=\pm 1$$

erhält man nun mit Berücksichtigung des zweiten Vorzeichens

$$x+\frac{1}{2}a+z=0$$

und demgemäss die Wurzelform

$$x=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

§ 116. Methoden der Substitution quadratischer Functionen von Mallet*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0 .$$

1. Man substituire die Identität derselben mit der andern

$$(mx + n)^2 = p^2 x^2 ,$$

oder

$$(m^2 - p^2) x^2 + 2mnx + n^2 = 0 .$$

Aus der Vergleichung homologer Coefficienten folgt

$$m^2 - p^2 = 1 , \quad 2mn = a , \quad n^2 = b .$$

Aus diesen Bestimmungsgleichungen für m, n und p zieht man die Relationen

$$4m^2 n^2 = 4m^2 b = a^2 ,$$
$$m^2 = a^2 : 4b = p^2 + 1 ,$$

endlich noch

$$p = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b} - 1} , \quad m = \frac{a}{2\sqrt{b}} , \quad n = \sqrt{b} .$$

Demgemäss ist

$$\frac{ax}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} = \pm x \sqrt{\frac{a^2}{4b} - 1} ,$$

$$x = \frac{-2b}{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}} = -\frac{1}{2} a \mp \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b} .$$

2. Man substituire die Identität der vorgelegten Gleichung mit der einfacher zu lösenden

$$(x + z)^2 = y^2 ,$$

d. h. mit

$$x^2 + 2zx + (z^2 - y^2) = 0 .$$

Dies gibt die Bestimmungsgleichungen

$$z = \frac{1}{2} a , \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b} ;$$

folglich ist auch so

$$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b} .$$

---

*) Mallet, Nova analytis aequationum II^i^, III^i^ et IV^i^ gradus. Nov. Act. Upsal. Vol III. p. 248. 1780.

3. Man substituire die quadratische Function

$$(mx + n)^2 = (px + q)^2$$

oder

$$(m^2 - p^2)x^2 + 2(mn - pq)x + (n^2 - q^2) = 0\,.$$

Hierin ist eine Grösse willkürlich. Es ist nämlich

$$p = \sqrt{m^2 - 1}\,, \quad q = \sqrt{n^2 - b}\,;$$

daher

$$mn - \frac{1}{2}a = (m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(n^2 - b)^{\frac{1}{2}}\,,$$

und wenn man beiderseits quadrirt,

$$n^2 - amn = b - \frac{1}{4}a^2 - m^2 b\,.$$

Wir sind so zu einer andern quadratischen Gleichung gelangt, n welcher m willkürlich genommen, n gefunden wird, nämlich

$$n = \frac{1}{2}am \pm \sqrt{(m^2 - 1)\left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)}$$
$$= \frac{1}{2}am \pm p\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}\,.$$

§ 117. Methode der Auflösung durch das Aufsuchen gleicher Wurzeln der transformirten Gleichung.

Es sei wiederum

$$x^2 - 2zx + z^2 = u\,,$$

also die Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Hauptgleichung

$$F(u) = u^2 + \alpha' u + \beta' = 0\,.$$

Die Variation ist immer in der Weise möglich, dass die Variirte zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen erhält, also die Gleichung ihrer Wurzelquadrate zwei gleiche Wurzeln. Um für diese die Bestimmungsgleichungen zu erhalten, bilde man die erste Derivirte

$$F'(u) = 2u + \alpha'\,.$$

Sucht man nun den gemeinschaftlichen Theiler der beiden Polynome $F(u)$ und $F'(u)$, so erhält man ihn in der Form des letzten Divisors, nämlich $2u + \alpha'$ unter der Voraussetzung, dass die Division keinen Rest lasse, oder vielmehr, dass der Rest ebenfalls gleich Null sei; mithin

$$-(\alpha'^2 - 4\beta') = 0\,; \quad \beta' = \frac{1}{4}\alpha'^2\,.$$

Setzt man den letzten Divisor gleich Null, so wird

$$u_1 = u_2 = -\frac{1}{2}\alpha'\,.$$

Aus der substituirten Function folgt $z = -\frac{1}{2}a$, also

$$-\alpha' = \alpha^2 - 2\beta = 2z^2 + 2az + (a^2 - 2b) = -\frac{1}{2}D_2\,.$$

Demgemäss ist

$$u_1 = u_2 = -\frac{1}{4}D_2$$

und

$$x = z \pm \sqrt{u} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

§ 118. Methode der quadrirten Wurzeldifferenzen.

Gegeben sei die Normalgleichung

$$f(x) = x^2 + ax + b = 0\,.$$

Man bilde die erste Derivirte

$$f'(x) = 2x + a\,.$$

Die Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen wird nun gefunden durch Elimination von x aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = x^2 + ax + b = 0\,,$$
$$f'(x) + z = 2x + a + z = 0\,.$$

Dies gibt die Gleichung

$$z^2 + D_2 = 0\,, \quad z = \pm\sqrt{-D_2}\,.$$

Mit Hülfe der zweiten Gleichung erhält man

$$2x + a \pm \sqrt{-D_2} = 0\,,$$

und

$$x = -\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

§ 119. Methode von Tschirnhausen oder die Methode der gemeinschaftlichen Wurzeln zweier Polynome*).

Die Methode von Tschirnhausen besteht darin, dass man eine ganze algebraische Function derselben Unbekannten von demselben oder einem niedrigeren Grade mit unbestimmten Coefficienten substituirt und durch Elimination der Unbekannten eine Finalgleichung (Determinante) erzielt, welche die substituirte Gleichung zu einer bestimmten und leichter lösbaren umformt. Dieselbe Methode ist bereits in § 96 mit Anwendung des Eliminationsverfahrens von Hesse bei Substitution einer linearen Function auf die Auflösung quadratischer Gleichungen angewendet worden. Es sei also

$$x^2 + ax + b = 0\,,$$
$$x^2 + vx + u = 0\,,$$

und v von a verschieden. Es ist von vorne herein klar, dass die substituirte Gleichung eine fremde Lösung enthält. Die Finalgleichung ist

$$+\begin{vmatrix} u - b\,, & v - a \\ au - bv\,, & u - b \end{vmatrix}+ = 0\,,$$

oder in exacter Form

$$(u - b)^2 - (v - a)(au - bv) = 0\,.$$

Ordnet man nach u, so resultirt

$$u^2 - [av - (a^2 - 2b)]\,u + b(v^2 - av + b) = 0\,,$$

und wenn man will, nach v geordnet,

$$bv^2 - (au + ab)v + [u^2 + (a^2 - 2b)u + b^2] = 0\,.$$

Damit die erste der beiden Resultanten eine rein quadratische werde, setze man

$$av - (a^2 - 2b) = 0\,,$$

woraus folgt

$$v = (a^2 - 2b) : a\,,$$

und

$$u^2 = -\,b\,(v^2 - av + b) = -\frac{b^2}{a^2}\,D_2\,.$$

Demgemäss ist

$$x^2 + vx + u = x^2 + \frac{a^2 - 2b}{a}\,x \pm \frac{b}{a}\sqrt{-\,D_2} = 0\,.$$

*) Man vergl. § 50.

Da mit dieser Gleichung zugleich die Hauptgleichung bestehen muss, so findet man durch Subtraction beider Gleichungen von einander

$$\frac{2b}{a}x = -b \pm \frac{b}{a}\sqrt{-D_2}$$

oder

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

Auch kann man die Gleichung in v zu einer rein quadratischen machen, indem man $u = -b$ setzt.

Durch Subtraction der Hauptgleichung von der substituirten erhält man

$$x = \frac{u-b}{a-v},$$

welche Function bereits in § 110 zu einer Auflösungsmethode angewendet worden ist.

Die beiden Gleichungen

$$x^2 + ax + b = 0\,,$$
$$x^2 + vx + u = 0\,,$$

haben nämlich für den Fall, dass v von a verschieden ist, nur eine Wurzel mit einander gemein; die zweite Wurzel der Substitution ist eine fremde Lösung. Sie haben alsdann beide auch einen binomischen linearen Factor gemein, der sich nach den bekannten Methoden finden lässt. Gleich Null gesetzt, gibt er die gemeinschaftliche Wurzel, nämlich

$$(a-v)\,x + (b-u) = 0\,,$$

also mit Berücksichtigung der obigen Bestimmungen von u und v

$$x = \frac{u-b}{a-v} = \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{-D_2} - b}{a - \frac{a^2-2b}{a}} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,.$$

Die einzige wahre Wurzel, welche $x^2 + vx + u = 0$ liefert, ist aus

$$x^2 + \frac{a^2-2b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-4b} = 0\,,$$

$$x = -\frac{a^2-2b}{2a} - \frac{2b + a\sqrt{a^2-4b}}{2a} = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{-D_2}\,;$$

aus

$$x^2 + \frac{a^2 - 2b}{a} x + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - 4b} = 0 ,$$

$$x = - \frac{a^2 - 2b}{2a} - \frac{2b - a\sqrt{a^2 - 4b}}{2a} = - \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \sqrt{- D_2} .$$

§ 120. Eliminationsmethode von Lacroix und Poisson*).

Um aus den beiden Gleichungen

$$x^2 + ax + b = 0 , \quad x^2 + vx + u = 0$$

durch Elimination von x die Finalgleichung zu finden, setze man nach einander die beiden Wurzeln x_1 und x_2 der Hauptgleichung in die substituirte ein und multiplicire die entstehenden Polynome mit einander. Die Coefficienten des Products sind symmetrische Functionen der Unbekannten und lassen sich mittels der Coefficienten der Hauptgleichung bestimmen.

Es sei

$$x_1 + x_2 = s_1 , \quad x_1^2 + x_2^2 = s_2 ;$$

alsdann ist

$$(x_1^2 + vx_1 + u)(x_2^2 + vx_2 + u) = x_1^2 x_2^2 + v x_1 x_1 x_2 s_1 + v^2 x_1 x_2 \\ + us_2 + uvs_1 + u^2 = 0 .$$

Weiter hat man

$$s_1 = - a , \quad s_2 = a^2 - 2b , \quad x_1 x_2 = b ,$$

folglich

$$u^2 - (av - a^2 + 2b) u + b(v^2 - av + b) = 0 .$$

Die Gleichung wird eine rein quadratische, wenn man annimmt

$$av - a^2 + 2b = 0 .$$

Statt x_1 und x_2 als die Wurzeln der Hauptgleichuug anzusehen, kann man sie auch als Wurzeln der substituirten betrachten. Dann ist

$$s_1 = - v , \quad s_2 = v^2 - 2u , \quad x_1 x_2 = u ,$$

worin v und u bestimmbare Grössen sind. Wird angenommen, dass im Allgemeinen v von a und u von b verschieden sei, so hat die Hülfsgleichung in x, v und u für jeden der beiden Werthe von u eine wahre und eine fremde Lösung, wie es ausführlich im vorigen Paragraphen demonstrirt worden ist.

---

*) Lacroix, Elémens d'algèbre II. § 10. Paris 1799.
Poisson, Mém. sur l'élimination dans les questions algébriques. II[me] cah. du Journ. polyt. Paris 1802.

Beispiel. Aufzulösen:

$$x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

Die Resolvente

$$av - (a^2 - 2b) = 0$$

liefert die Werthe

$$v = -\frac{13}{5}\,, \quad u^2 = \frac{36}{25}\,, \quad u = \pm\frac{6}{5}\,.$$

Die Hülfsgleichung ist demnach

$$x^2 - \frac{13}{5}x \pm \frac{6}{5} = 0\,,$$

ihre Wurzeln für

$$u = +\frac{6}{5}: \quad x = \frac{13}{10} \pm \frac{17}{10} = 3 \text{ oder } -0{,}7\,;$$

$$u = -\frac{6}{5}: \quad x = \frac{13}{10} \pm \frac{7}{10} = 2 \text{ oder } +0{,}6\,.$$

Die wahren Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung sind 3 und 2; fremde Lösungen $-0{,}7$ und $0{,}6$.

Die fremden Lösungen lassen sich auf folgende Art in die Gleichung introduciren:

$$x^2 - 5x + 6 = 0\,, \quad x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\,.$$

Man multiplicire die Wurzelgleichung mit $+2{,}4$ und addire sie zu der quadratischen wie folgt:

$$\begin{array}{rrrrl} x^2 & -\;5x & +\;6 & & = 0 \\ & 2{,}4x & -\;6 & \pm\;1{,}2 & = 0 \\ \hline x^2 & -\;2{,}6x & & \pm\;1{,}2 & = 0\,. \end{array}$$

Diese Gleichung ist die benutzte Hülfsgleichung.

§ 121. Methode der Factorenzerlegung des binären Trinoms von Heilermann*).

Heilermann geht aus von der Cayley'schen Form eines binären Trinoms

$$(1) \quad f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)\widehat{}(x,y)^2$$

*) Heilermann, Zerlegung der homogenen quadratischen, kubischen und biquadratischen Functionen zweier Veränderlichen in Factoren. Progr. Trier 1855.

und sucht dasselbe in das Product zweier linearer Functionen zu zerlegen, also in eine Gleichung von der Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$$

herzustellen. Sind die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erst bestimmt, so werden die beiden binomischen Factoren gleich Null gesetzt, also

$$\alpha x + \beta y = 0\,, \quad \gamma x + \delta y = 0$$

die Auflösungen der quadratischen Function $f(x, y)$ sein. Zunächst müssen die vier unbestimmten Coefficienten den Gleichungen

$$\alpha\gamma = a\,, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = 2b\,, \quad \beta\delta = c \tag{2}$$

Genüge leisten, sowie denjenigen, welche sich aus ihnen ableiten lassen, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) &= a + 2b + c\,, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= \pm 2\sqrt{b^2 - ac}\,, \\ \alpha\delta &= b \pm \sqrt{b^2 - ac}\,, \\ \beta\gamma &= b \mp \sqrt{b^2 - ac}\,. \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c} = \frac{a}{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}\,, \\ \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{c} = \frac{a}{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Nun ist die Discriminante der Function $f(x, y)$

$$\overline{D}_2 = -\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2 = -(b^2 - ac)\,,$$

und ausserdem möge der Kürze wegen die Summe der Coefficienten der Function mit S bezeichnet werden, also

$$a + 2b + c = S\,.$$

Zu den Gleichungen (2), durch welche die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht vollständig bestimmt sind, möge noch die Bedingung

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta$$

hinzugefügt werden; alsdann folgt zunächst

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \sqrt{S}\,. \tag{4}$$

Durch die Verbindung der Gleichung (4) mit dem System (3) erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{a + b \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,, \quad \beta = \frac{b + c \mp \sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,, \\ \gamma &= \frac{a + b \mp \sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,, \quad \delta = \frac{b + c \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

und durch Einsetzung dieser Werthe die Factorenzerlegung

$$(6)\quad f(x,y) = \left\{\frac{a+b+\sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,x + \frac{b+c-\sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,y\right\}\times$$
$$\left\{\frac{a+b-\sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,x + \frac{b+c+\sqrt{-\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,y\right\}.$$

In engem Zusammenhange mit derselben steht die folgende Darstellung der Function (1):

$$(7)\quad f(x,y) = \frac{[(a+b)x+(b+c)y]^2 - (-\overline{D}_2)(x-y)^2}{S},$$

durch welche sie als Differenz oder Summe zweier Quadrate ausgedrückt wird, je nachdem die Discriminante negativ oder positiv ist. Ferner lässt sich die Transformation

$$(8)\quad f(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\frac{a+b+\sqrt{\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,x + \frac{b+c-\sqrt{\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,y\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{a+b-\sqrt{\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,x + \frac{b+c+\sqrt{\overline{D}_2}}{\sqrt{S}}\,y\right\}^2$$

bewerkstelligen, welche zeigt, dass ein binäres Trinom immer als halbe Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann, deren Grundgrössen reell sind, wenn die Discriminante positiv, also die Factoren der Function complex sind, und dass jene Grundgrössen von diesen Factoren sich nur durch das Vorzeichen der Discriminante unterscheiden.

Die vorstehenden Transformationen des Trinoms sind nur dann unmöglich, wenn

$$S = a + 2b + c = 0.$$

Unter dieser Bedingung ist aber auch

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 0,$$

also entweder

$$\alpha+\beta = 0, \text{ oder } \gamma+\delta = 0.$$

Nehmen wir an, es sei $\gamma+\delta=0$ und setzen $\gamma = -\delta = 1$, so ist gemäss (2) $\alpha = a$, $\beta = -c$, folglich

$$(9)\qquad f(x,y) = (ax-cy)(x-y).$$

Wenn die Discriminante verschwindet, also

$$\overline{D}_2 = ac - b^2 = 0$$

ist, so ist $b = \pm\sqrt{ac}$ und es gehen nach den Gleichungen (5) die Werthe der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ über in

$$\alpha = \pm\sqrt{a}\,,\quad \beta = \pm\sqrt{c}\,,\quad \gamma = \pm\sqrt{a}\,,\quad \delta = \pm\sqrt{c}\,.$$

Die vorgelegte Function ist dann ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$(10)\qquad f(x, y) = (\sqrt{a}\,.\,x \pm \sqrt{c}\,.\,y)^2\,,$$

wo das doppelte Vorzeichen demjenigen von b entspricht.

Durch die Factorenzerlegung (6) sind nun die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

gefunden und zwar

$$\frac{x_1}{y_1} \text{ und } \frac{x_2}{y_2} = -\frac{b + c \mp \sqrt{-D_2}}{a + b \pm \sqrt{-D_2}}\,.$$

Man übersieht nun leicht, dass, wenn man von der Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

ausgeht, die Glieder der Binomialfactoren in (6) nicht homogen sind. Sie lassen sich indess leicht homogen machen, indem man statt der ersten Gleichung in (3) setzt

$$(\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta) = az^2 + 2bz + c = S\,,$$

und statt der Gleichung (4) die andere

$$\alpha z + \beta = \gamma z + \delta = \sqrt{S}\,.$$

Berechnet man so $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so erhält man durch Einsetzung dieser Werthe die Factorenzerlegung

$$f(x, y) = \left\{\frac{az + b + \sqrt{-D_2}}{\sqrt{S}}\,x + \frac{bz + c - z\sqrt{-D_2}}{\sqrt{S}}\,y\right\} \times$$
$$\left\{\frac{az + b - \sqrt{-D_2}}{\sqrt{S}}\,x + \frac{bz + c + z\sqrt{-D_2}}{\sqrt{S}}\,y\right\},$$

wo z eine beliebige Grösse ist. Ist $y = 1$, so erhält man auf diesem Wege die allgemeine Wurzelform (§ 104)

$$x = -\frac{bz + c \mp z\sqrt{-D_2}}{az + b \pm \sqrt{-D_2}}\,.$$

§ 122. Ueber eine synthetische Bildung der allgemeinen Wurzelform*).

Gegeben sei die Gleichung

$$(a, b, c)\widehat{\ }(x, y)^2 = 0\,.$$

Schreibt man folgende Gleichungen unter einander:

*) Man vgl. § 104.

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy \qquad\qquad &= -\, cy^2 \\ -\, bxy \pm xy\sqrt{b^2 - ac} &= -\, bxy \pm xy\sqrt{b^2 - ac}, \end{aligned}$$

addirt dieselben und setzt vorne den Factor x, hinten y heraus, so erhält man

$$x\left(ax + by \pm y\sqrt{b^2 - ac}\right) = -\, y\left(bx + cy \mp x\sqrt{b^2 - ac}\right)$$

und

$$\frac{x}{y} = -\frac{bx + cy \mp x\sqrt{b^2 - ac}}{ax + by \pm y\sqrt{b^2 - ac}}.$$

Wenn sich nun zeigen lässt, dass die rechte Seite einen bestimmbaren Werth hat, so wird dieser die gesuchte Wurzel sein. Multiplicirt man Dividend und Divisor mit

$$ax + by \mp y\sqrt{b^2 - ac},$$

so erhält $\frac{x}{y}$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$. Daraus folgt, dass dieser Factor selbst gleich Null ist, also

$$1)\quad \frac{x}{y} = -\frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

oder es folgt daraus, dass Dividend und Divisor gleich Null sind, woraus man erhalten würde

$$2)\quad \frac{x}{y} = -\frac{a}{b \mp \sqrt{b^2 - ac}} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

$$3)\quad \frac{x}{y} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Dies führt aber alles auf denselben Werth; er ist also die gesuchte Wurzel.

Der Werth $\frac{0}{0}$ lässt sich auch noch auf dieselbe Art bestimmen, wie man gewöhnlich diesen Werth bei Functionen mehrerer Veränderlichen bestimmt. Es ist nämlich

$$\frac{x}{y} = \frac{F(x, y)}{\Phi(x, y)} = \frac{z\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}}{z\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}}$$

$$= -\frac{bz + c \mp z\sqrt{b^2 - ac}}{az + b \pm \sqrt{b^2 - ac}},$$

welches die allgemeine Wurzelform ist.

§ 123. Methode von Clebsch*).

Gegeben sei die Gleichung

$$(a, b, \widehat{c) (x}, 1)^2 = 0 .$$

Man substituire

$$\varphi = (ay_1 + by_2)x + (by_1 + cy_2)$$

und erhebe diese Gleichung zum Quadrat, also

$$\begin{aligned}\varphi^2 = a^2y_1{}^2x^2 &+ 2aby_1y_2x^2 + b^2y_2{}^2x^2 \\ &+ 2aby_1{}^2x + 2acy_1y_2x + 2b^2y_1y_2x + 2bcy_2{}^2x \\ &+ b^2y_1{}^2 + 2bcy_1y_2 + c^2y_2{}^2 .\end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung der gegebenen Gleichung findet man die Summe aus dem ersten und vierten Term gleich $-acy_1{}^2$, die Summe aus dem zweiten, sechsten und neunten Term gleich $-2b^2y_1y_2x$, die Summe aus dem siebenten und zehnten Term gleich $-acy_2{}^2x^2$. Demnach ist

$$\varphi^2 = (y_2x - y_1)^2(b^2 - ac) = (y_2x - y_1)^2(-D_2)$$

und

$$\varphi \pm (y_2x - y_1)\sqrt{-D_2} = 0 .$$

Setzt man für φ seinen Werth wieder ein, so erhält man die allgemeine Wurzelform

$$x = -\frac{by_1 + cy_2 \mp y_1\sqrt{-D_2}}{ay_1 + by_2 \pm y_2\sqrt{-D_2}} ,$$

wo y_1 und y_2 beliebige Grössen sind.

Eine etwas allgemeinere Herleitung der Wurzelform mittels Anwendung der sogenannten Typen gibt Clebsch in § 87 seiner Theorie der binären algebraischen Formen. Wenn man ausgeht von den Substitutionen

$$\xi = \frac{1}{n}\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1 z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1 z_2}\right] ,$$

$$\eta = z_1 y - z_2 x ,$$

so haben diese die Eigenschaft die Function von ihrem zweiten Term zu befreien. Gegeben sei also

$$f(x, y) = (a, b, \widehat{c) (x}, y)^2 ,$$

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 33 und § 87. Man vergl. auch § 187 und § 189.

so ist $n = 2$ und

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1 z_2} = 2(a z_1 + b z_2)\,,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1 z_2} = 2(b z_1 + c z_2)\,.$$

Es ist alsdann

$$f(x, y) \,.\, f(z_1, z_2) = \xi^2 + \overline{D}_2 \eta^2\,.$$

Für $f(x, y) = 0$ erhält man sofort die rein quadratische Gleichung

$$\xi^2 + \overline{D}_2 \eta^2 = 0\,,$$

also

$$\xi = \pm \eta \sqrt{-\overline{D}_2}\,.$$

Demgemäss ist

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{1}{2} \frac{x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1 z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1 z_2}}{z_1 y - z_2 x} = \pm \sqrt{-\overline{D}_2}\,,$$

und daher, was auch z_1 und z_2 sein mögen:

$$\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1 z_2} \pm z_1 \sqrt{-\overline{D}_2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1 z_2} \mp z_2 \sqrt{-\overline{D}_2}}\,,$$

was mit der vorigen Lösung übereinstimmt.

§ 124. Geometrische Interpretation der allgemeinen Wurzelform der quadratischen Gleichungen nach Diekmann*).

Diekmann benutzt die Bemerkung, dass eine quadratische Gleichung eine harmonische Zuordnung zu zweien durch die Gleichung gegebenen festen Punkten bestimme, zur Ableitung der allgemeinen Wurzelform. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$f(x) = (a, b, c \widehat{)} (x, 1)^2 = 0\,,$$

so ist bekanntlich

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}{a}\,.$$

---

*) Diekmann, Zur Theorie der Gleichungen zweiten Grades. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. IV. S. 392. 1873; V. S. 222 u. 362. 1874.

—— Einl. in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung. § 11. Essen 1876.

Denken wir uns allgemein

$$y = f(x)$$

als die Gleichung einer ebenen Curve, so werden die Durchschnittspuncte der Curve auf der Abscissenaxe die Wurzelwerthe der Gleichung $y = 0$ repräsentiren.

Ist $\overline{D}_2 = 0$, so fallen die beiden Puncte zusammen, und dies Zusammenfallen ändert sich nicht bei einer linearen Variation, d. h. bei einer Verschiebung des Coordinatenanfangspunctes. Variirt man die Wurzeln um z, und setzt also $x = x' + z$, so wird

$$a(x' + z)^2 + 2b(x' + z) + c = 0$$

und

$$x' = \frac{-(az + b) \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}{a}.$$

Mit Hülfe der quadratischen Ergänzung erhält man

$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{-\overline{D}_2}}{a}.$$

Die quadratische Ergänzung bedeutet demnach geometrisch, dass der Anfangspunct um die Strecke $\frac{b}{a}$ verschoben wurde. Mit Rücksicht auf diesen neuen Anfangspunct bekommt man als Wurzeln die beiden gleichen Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen

$$x' = \pm \frac{\sqrt{-\overline{D}_2}}{a},$$

wenn angenommen wurde, $x = x' - \frac{b}{a}$, also $z = -\frac{b}{a}$. Es ist aber $-\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, d. h. der neue Coordinatenanfangspunct liegt in der Mitte zwischen x_1 und x_2. Diese specielle Form der Substitution gibt indessen nicht die allgemeinste Wurzelform, denn setzt man an die Stelle der vorgelegten Gleichung

$$c\frac{1}{x^2} + 2b\frac{1}{x} + a = 0,$$

was gestattet sein wird, wenn x von Null verschieden ist, so findet man auf dem gewöhnlichen Wege

$$\frac{1}{x} = \frac{-b \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}{c},$$

oder

$$x = \frac{c}{-b \pm \sqrt{-D_2}}\,.$$

Es lässt sich nun eine Wurzelform ableiten, in welcher die beiden obigen Formen, als speciell der Substitution der quadratischen Ergänzung angehörig, enthalten sind. Führen wir statt der Coefficienten die symmetrischen Functionen der Wurzeln ein, so erhalten wir aus

$$ax^2 + 2bx + c = 0\,,$$

$$x = -\frac{bx + c}{ax + b} = \frac{-\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}{x + \frac{b}{a}}$$

oder

$$x = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)x - x_1 x_2}{x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}\,.$$

Bezeichnen wir vorläufig den Ausdruck auf der rechten Seite mit y, so ist in vorstehender Gleichung eine Zuordnung von Puncten ausgesprochen; jedem Puncte $x = z$ entspricht ein Punct y, und zwar findet ein zweimaliges Zusammenfallen statt: für $z = x_1$ wird auch $y = x_1$ und für $z = x_2$ wird $y = x_2$.

Um die Natur des Abhängigkeitsverhältnisses zu erkennen, geben wir einem Puncte z den Werth des arithmetischen Mittels der beiden Wurzeln, setzen also $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; alsdann liegt der zugeordnete Punct y im Unendlichen, $y = \infty$. Dadurch wird die Vermuthung nahe gelegt, dass die Zuordnung derartig sei, dass die vier Puncte x_1, z, x_2, y harmonisch zugeordnet sind, dass also ist

$$\frac{z - x_1}{x_2 - z} = \frac{y - x_1}{y - x_2} = \frac{-\frac{bz + c}{az + b} - x_1}{-\frac{bz + c}{az + b} - x_2}\,.$$

Dies ist in der That eine identische Gleichung und es folgt daraus, dass durch eine quadratische Gleichung in allgemeinster Weise eine harmonische Zuordnung von Puncten zu zwei festen, durch die quadratische Gleichung gegebenen, ausgedrückt ist.

Um die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c = 0$$

u finden, können wir auch umgekehrt zu den beiden Puncten z nd y die beiden festen harmonischen Puncte suchen.

Es sei allgemein

$$(az+b)(x-y) = (az+b)x + (bz+c) = \xi\,,$$
$$x - z = \eta\,,$$

o sollen zwei Puncte gesucht werden, welche zu

$$\xi = 0\,,\quad \eta = 0$$

armonisch liegen. Da

$$\frac{z-x_1}{z-x_2} : \frac{y-x_1}{y-x_2} = -1$$

ein soll, so kann man annehmen

$$\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{(x_1-y)(az+b)}{x_1-z} = \lambda\,,$$
$$\frac{\xi_2}{\eta_2} = \frac{(x_2-y)(az+b)}{x_2-z} = -\lambda\,.$$

Die gesuchten Wurzeln müssen also enthalten sein in der leichung

$$\xi^2 - \lambda^2\eta^2 = 0$$

nd es muss daher diese Gleichung bis auf einen constanten Factor R gleich $f(x)$ sein.

Es sei deshalb

$$Rf(x) = \xi^2 - \lambda^2\eta^2\,,$$

vorin λ und R noch zu bestimmen sind. Setzt man die betreffenen Werthe ein, so ist

$$R(ax^2+2bx+c) = [(az+b)^2-\lambda^2]x^2$$
$$+ 2[(az+b)(bz+c)+z\lambda^2]x + (bz+c)^2 - z^2\lambda^2\,,$$

nd es folgt aus der Vergleichung homologer Coefficienten auf eiden Seiten

$$\text{I.}\quad Ra = (az+b)^2 - \lambda^2\,,$$
$$\text{II.}\quad Rb = (az+b)(bz+c) + \lambda^2 z\,,$$
$$\text{III.}\quad Rc = (bz+c)^2 - \lambda z^2\,.$$

Aus I und II folgt

$$R = az^2 + 2bz + c = f(z)\,,$$

nd aus III

$$\lambda = \pm\sqrt{-D_2}\,.$$

Demgemäss ist

$$f(x) \cdot f(z) = \xi^2 + D_2 \eta^2,$$

in welcher Form die Gleichung zuerst von Clebsch dargestellt ist. Die Function $f(x)$ gestattet also die Factorenzerlegung

$$f(x) = \frac{1}{f(z)} \left(\xi + \sqrt{-D_2} \,.\, \eta\right) \left(\xi - \sqrt{-D_2} \,.\, \eta\right)$$

oder

$$f(x) = \left[\frac{az+b+\sqrt{-D_2}}{\sqrt{f(z)}}\, x + \frac{bz+c-z\sqrt{-D_2}}{\sqrt{f(z)}}\right]$$
$$\times \left[\frac{az+b-\sqrt{-D_2}}{\sqrt{f(z)}}\, x + \frac{bz+c+z\sqrt{-D_2}}{\sqrt{f(z)}}\right] = 0,$$

wo z eine beliebige Grösse ist. Für $z = 1$ erhält man die Factorenzerlegung von Heilermann (§ 121).

Aus den beiden linearen Factoren der Function $f(x)$ erhält man wieder die allgemeine Wurzelform, nämlich

$$x = -\frac{bz + c \mp z\sqrt{-D_2}}{az + b \pm \sqrt{-D_2}}.$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung geschieht gewöhnlich durch die quadratische Ergänzung. Es ist dies ein specieller Fall der allgemeinen Auflösung, wo $z = \infty$ und $y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ist, also der eine der harmonischen Puncte im Unendlichen, der andere in der Mitte zwischen x_1 und x_2 liegt. Setzt man nämlich $z = \infty$, so nimmt die Wurzel die Form

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-D_2}}{a}$$

an. Setzen wir $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, so wird $y = \infty$ und ebenfalls $x = \left(-b \pm \sqrt{-D_2}\right) : a$. Nimmt man dagegen an $z = 0$, d. h. bildet der Coordinatenanfangspunkt den einen der vier harmonischen Puncte, so wird

$$y = -\frac{c}{b} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2},$$

d. h. der andere y wird das harmonische Mittel zwischen x_1 und x_2. Setzt man zunächst $z = 0$, so erhält man die Wurzelform, welche durch Auflösung der Gleichung nach $\frac{1}{x}$ entsteht, nämlich

$$x = \frac{c}{-b \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}.$$

Zu ganz derselben Form gelangt man, wenn man den ent-
prechenden Werth von y, also $-\frac{c}{b}$, an die Stelle von z einsetzt;
enn es ist

$$x = \frac{\pm c\sqrt{-\overline{D}_2}}{-(ac-b^2) \pm b\sqrt{-\overline{D}_2}} = \frac{c}{-b \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}.$$

Die Gleichung

$$f(x)f(z) = \xi^2 + \overline{D}_2\,\eta^2$$

ührt noch zu zwei neuen Formen für die quadratischen Gleichungen, elche direct die Auflösungen enthalten. Exact heisst nämlich die orstehende Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c)(az^2 + 2bz + c) = [(az+b)x + (bz+c)]^2 - (b^2 - ac)(x-z)^2.$$

Dividirt man beiderseits durch z^2 und setzt $z = \infty$, so wird

$$a(ax^2 + 2bx + c) = (ax+b)^2 - (b^2 - ac),$$

der

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}[(ax+b)^2 + \overline{D}_2]$$

Ist $f(x) = 0$, so ist die neue Form der Gleichung

$$(ax+b)^2 + \overline{D}_2 = 0.$$

Setzt man dagegen $z = 0$, ehe man beiderseits durch z^2 di-
idirt hat, so resultirt

$$f(x) = \frac{1}{c}[(bx+c)^2 + \overline{D}_2 x^2]$$

nd für $f(x) = 0$

$$\left(\frac{bx+c}{x}\right)^2 + \overline{D}_2 = 0.$$

Es sind dies dieselben Formen der transformirten Gleichung, elche wir bereits in der Theorie der Varianten und Retrovarianten § 17) kennen gelernt haben. Die quadratischen Formen haben nur ine Variante V_2 und eine Retrovariante $V_{2,2}'$, die aber einander leich sind und zwar gleich dem negativen Werthe der Discrimi-
ante $\overline{D}_2$. Es ist nämlich

$$af(x) = (ax + b)^2 - V_2 = (ax + b)^2 + \overline{D}_2,$$
$$cf\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{bx + c}{x}\right)^2 - V_{2,2}' = \left(\frac{bx + c}{x}\right)^2 + \overline{D}_2.$$

§ 125. Methode von Cayley*).

Die Ausdrücke, welche bei der Zerlegung einer „Quadric" in lineare Factoren in Betracht kommen, sind folgende:

$$f = (a, b, c) \widehat{\ } (x, y)^2,$$
$$\overline{D}_2 = ac - b^2.$$

Die Discriminante ist zugleich die quadratische Invariante $J_{2,2}$ und die Hesse'sche Form, welche man durch Entwickelung der Function

$$\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$$

erhält. Cayley nennt nun die Function

$$\left[\left(\frac{\partial \overline{D}_2}{\partial c}\right), -\left(\frac{\partial \overline{D}_2}{\partial b}\right), \left(\frac{\partial \overline{D}_2}{\partial a}\right)\right] \widehat{\ } \left(x, y\right)^2 = f$$

die Evectante der Discriminante; sie ist gleich der Quadric. Es ist ferner

$$\left(a, b, c\right) \widehat{\ } \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right), \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right] = 4\overline{D}_2;$$

die linke Seite heisst die Provectante der Quadric, ist also gleich der vierfachen Discriminante.

Endlich ist

$$(a, b, c)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]^2 = \overline{D}_2 . f,$$

eine Gleichung, welche ausdrückt, dass eine Transmutante der Quadric gleich ist dem Producte aus der Discriminante in die Quadric.

Wird nun die Quadric durch ihre Wurzeln ausgedrückt, so resultirt

$$f = a(x - x_1 y)(x - x_2 y)$$
$$\overline{D}_2 = -\frac{1}{4} a^2 (x_1 - x_2)^2.$$

Sind die Wurzeln einander gleich, so hat man

*) Cayley, A fifth memoir upon Quantics. Phil. Trans. vol. 148. p. 429. sqq. London 1858.

$$f = a(x - x_1 y)^2,$$
$$\overline{D}_2 = 0.$$

Um nun lineare Factoren der quadratischen Gleichung in symmetrischer Form zu erhalten, muss man willkürliche Grössen einführen, welche keinen Einfluss auf die Grösse der Wurzeln ausüben. Die Auflösung ist abhängig von der linearen Transformation der Quadric, indem man setzt

$$(a, b, c)\widehat{\ }(\alpha x + \beta y,\ \ \gamma x + \delta y)^2 = (a', b'\ c')\widehat{\ }(x, y)^2.$$

Daraus folgt folgendes System

$$a' = (a, b, c)\widehat{\ }(\alpha, \gamma)^2,$$
$$b' = (a, b, c)\widehat{\ }(\alpha, \gamma)\widehat{\ }(\beta, \delta),$$
$$c' = (a, b, c)\widehat{\ }(\beta, \delta)^2,$$

und man erhält

$$a'c' - b'^2 = (ac - b^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

oder in einer andern Form

$$(a,b,c)\widehat{\ }(x,y)^2 . (a,b,c)\widehat{\ }(\xi, \eta)^2 - [(a,b,c)\widehat{\ }(x,y)\widehat{\ }(\xi, \eta)]^2 = \overline{D}_2\,(\eta x - \xi y)^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass ein linearer Factor der vorgelegten Gleichung ist

$$(a, b, c)\widehat{\ }(x, y)\widehat{\ }(\xi, \eta) + \sqrt{-\overline{D}_2}\,(\eta x - \xi y),$$

wo ξ und η beliebige Grössen sind. In einer andern Gestalt lässt sich die Wurzelform schreiben

$$\frac{1}{2}\,\frac{x\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{\xi,\eta} + y\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi,\eta}}{\xi y - \eta x} = \pm\sqrt{-\overline{D}_2}.$$

§ 126. Eine andere Methode der Factorenzerlegung eines binären Trinoms.

Um die quadratische Function

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$$

in lineare Factoren zu zerlegen, setzen wir

$$x = \alpha\xi + \beta\eta,\quad y = \gamma\xi + \delta\eta.$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man

$$af(x) = (ax+b)^2 - V_2 = (ax+b)^2 + \overline{D}_2,$$
$$cf\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{bx+c}{x}\right)^2 - V'_{2,2} = \left(\frac{bx+c}{x}\right)^2 + \overline{D}_2.$$

§ 125. Methode von Cayley*).

Die Ausdrücke, welche bei der Zerlegung einer „Quadric" in lineare Factoren in Betracht kommen, sind folgende:

$$f = (a, b, c)\widehat{\ }(x, y)^2,$$
$$\overline{D}_2 = ac - b^2.$$

Die Discriminante ist zugleich die quadratische Invariante $J_{2,2}$ und die Hesse'sche Form, welche man durch Entwickelung der Function

$$\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$$

erhält. Cayley nennt nun die Function

$$\left[\left(\frac{\partial \overline{D}_2}{\partial c}\right), -\left(\frac{\partial \overline{D}_2}{\partial b}\right), \left(\frac{\partial \overline{D}_2}{\partial a}\right)\right]\widehat{\ }\left(x, y\right)^2 = f$$

die Evectante der Discriminante; sie ist gleich der Quadric. Es ist ferner

$$\left(a, b, c\right)\widehat{\ }\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right), \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right] = 4\overline{D}_2;$$

die linke Seite heisst die Provectante der Quadric, ist also gleich der vierfachen Discriminante.

Endlich ist

$$(a, b, c)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]^2 = \overline{D}_2 \cdot f,$$

eine Gleichung, welche ausdrückt, dass eine Transmutante der Quadric gleich ist dem Producte aus der Discriminante in die Quadric.

Wird nun die Quadric durch ihre Wurzeln ausgedrückt, so resultirt

$$f = a(x - x_1 y)(x - x_2 y)$$
$$\overline{D}_2 = -\frac{1}{4}a^2(x_1 - x_2)^2.$$

Sind die Wurzeln einander gleich, so hat man

*) Cayley, A fifth memoir upon Quantics. Phil. Trans. vol. 148. p. 429. sqq. London 1858.

$$f = a(x - x_1 y)^2,$$
$$\overline{D}_2 = 0.$$

Um nun lineare Factoren der quadratischen Gleichung in symmetrischer Form zu erhalten, muss man willkürliche Grössen einführen, welche keinen Einfluss auf die Grösse der Wurzeln ausüben. Die Auflösung ist abhängig von der linearen Transformation der Quadric, indem man setzt

$$(a, b, c \widehat{)\,(} \alpha x + \beta y, \quad \gamma x + \delta y)^2 = (a', b' c' \widehat{)\,(} x, y)^2.$$

Daraus folgt folgendes System

$$a' = (a, b, c \widehat{)\,(} \alpha, \gamma)^2,$$
$$b' = (a, b, c \widehat{)\,(} \alpha, \gamma \widehat{)\,(} \beta, \delta),$$
$$c' = (a, b, c \widehat{)\,(} \beta, \delta)^2,$$

und man erhält

$$a'c' - b'^2 = (ac - b^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

oder in einer andern Form

$$(a, b, c \widehat{)\,(} x, y)^2 . (a, b, c \widehat{)\,(} \xi, \eta)^2 - [(a, b, c \widehat{)\,(} x, y \widehat{)\,(} \xi, \eta)]^2 = \overline{D}_2 (\eta x - \xi y)^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass ein linearer Factor der vorgelegten Gleichung ist

$$(a, b, c \widehat{)\,(} x, y \widehat{)\,(} \xi, \eta) + \sqrt{-\overline{D}_2}\, (\eta x - \xi y),$$

wo ξ und η beliebige Grössen sind. In einer andern Gestalt lässt sich die Wurzelform schreiben

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x \left(\frac{df}{dx}\right)_{\xi, \eta} + y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi, \eta}}{\xi y - \eta x} = \pm \sqrt{-\overline{D}_2}.$$

§ 126. Eine andere Methode der Factorenzerlegung eines binären Trinoms.

Um die quadratische Function

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$$

in lineare Factoren zu zerlegen, setzen wir

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta.$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man

Man kann aber auch die Elimination von $\frac{\alpha}{\gamma}$ unterlassen, wobei die Wurzelform symmetrisch wird, nämlich

$$x = \frac{\beta\sqrt{\gamma}\sqrt{a\alpha + b\gamma} \mp \alpha\sqrt{\delta}\sqrt{a\beta + b\delta}}{\delta\sqrt{\gamma}\sqrt{a\alpha + b\gamma} \mp \gamma\sqrt{\delta}\sqrt{a\beta + b\delta}}.$$

Solcher symmetrischer Wurzelformen lassen sich noch mehrere andere herstellen, wie aus den Deductionen in § 103 ersichtlich ist, z. B.

$$x = \frac{\beta\gamma\sqrt{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2} \mp \alpha\delta\sqrt{-1}\sqrt{a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2}}{\delta\sqrt{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2} \mp \gamma\sqrt{-1}\sqrt{a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2}}.$$

IV. Von der Auflösung der kubischen Gleichungen.

§ 127. Methode und Formel von Scipio Ferreo, Nicol. Tartaglia und Hieron. Cardano*).

(Capitulum cubi et rerum numero aequalium.)

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + px = q,$$

dann ist die Wurzelform

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} + \frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} - \frac{1}{2}q}.$$

Die Vorschrift, welche Cardano zur Auflösung dieser Gleichung gibt, sowie der Beweis derselben lauten im 11. Kap. seiner Algebra folgendermassen:

De cubo et rebus aequalibus Numero.

Demonstratio.

Sit igitur exempli causa cubus *gh*, et sexcuplum lateris *gh* aequale 20. et ponam duos cubos *ae* et *cl*, quorum differentia sit 20. ita quod productum *ac* lateris in *ck* latus, fit 2. tertia scilicet numeri rerum pars, et abscindam *cb* aequalem *ck*, dico**), quod si

*) Hieron. Cardani Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus. Papiae 1545. Cap. XI.

Nicolaus, Quesiti ed invenzioni diverse. Venezia 1546.

Boncompagni, Note sur Ferro Scipione. N. ann. Math. XXI. 1862.

**) Cubus $ae = y$, cubus $cl = z$, $\sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z} = \frac{1}{3}p$,

$$y - z = q \therefore x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}.$$

ita fuerit, lineam ab residuum, esse aequalem gh et ideo rei aestimationem, nam de gh iam supponebatur, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi sexti capituli hujus libri, corpora da, de, df, ut per dc intelligamus cubum bc, per df, cubum ab, per da triplum cb in quadratum ab, per de triplum ab in quadratum bc. Habebimus igitur quatuor*) supposita, quorum duo dicta iam sunt, scilicet quod ex ac in ck, vel cb fit 2. Et quod differentia cubi ac a cubo cb est 20. tertium deducitur ex his et est quod cum

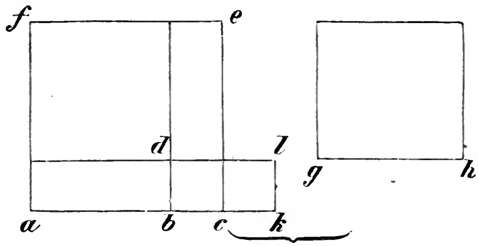


Fig. 24.

id, quod producitur ex ab, bc, ac ter sit aequale differentiae de et da et triplum producti ex ab, ac, bc sexcuplum ab, nam productum ex ac in cb, est 2. ex primo supposito, ergo triplum ejus est sex, et productum hoc in ab sexcuplum ipsius ab. Hoc autem est differentia de et da. Quartum quod patet ex primo et secundo corollario sexti capituli quod df est differentia cubi ac cum triplo ac in quadratum cb a cubo cb cum triplo cb in quadratum ac. Ponatur igitur cubus ac, α, cubus bc, β, triplum cb in quadratum ac, γ, triplum ac in quadratum cb, δ, differentia α et β, ε, differentia γ et δ, ζ, differentia α et δ a β et γ, ϑ. Igitur cum ε componatur ex ζ et ϑ, ut facile est demonstrare in numeris quos et pro exemplo a latere proposui ε autem est 20. ex secundo supposito et ζ sexcuplum ab et ϑ cubus ab. igitur cubus ab cum sexcuplo ab quod est cum sex rebus, nam ab est latus sui cubi, aequatur 20. igitur cum gh cubus cum sexcuplo gh aequetur 20. erit gh cubus cum sexcuplo

*) I. $\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}=2$; II. $y-z=20$; III. $3\left(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}\right)\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}=6\left(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}\right)$;
IV. $\left(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}\right)^3=y+3\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z^2}-z-3\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{z}$; $y=\alpha$, $z=\beta$,

$$3\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{z}=\gamma,\ 3\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z^2}=\delta,\ y-z=\alpha-\beta=\varepsilon;$$

$$3\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{z}-3\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z^2}=\gamma-\delta=\zeta,\ (\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)=\left(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}\right)^3=\vartheta;$$

gh aequalia cubo *ab* cum sexcuplo *ab*, igitur *ab* est res, et ipsa est differentia duorum laterum producentium 2. et quorum cubi differunt in 20. quod erat demonstrandum. Ex his conficiemus regulam.

Regula.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidii numeri aequationis, et totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam servabis unique dimidium numeri quod iam in se duxeras, adjicies, ab altera dimidium idem minues, habebisque Binomium cum sua Apotome, inde detracta R. cubica Apotomae ex R. Cubica sui Binomii, residuum quod ex hoc relinquitur, est rei aestimatio. Exemplum

	cubus $\bar{p}$. 6. rebus aequalis	20.
	2.	20.
	8.	10.
	108.	
	R. 108. $\bar{p}$. 10.	
	R. 108. $\bar{m}$. 10.	
	R. u. Cu. R. 108. $\bar{p}$. 10.	
$\bar{m}$	R. u. Cu. R. 108. $\bar{m}$. 10.	

Cardano zählt 13 verschiedene Formen der kubischen Gleichungen auf, welche positive Wurzeln geben; es sind dieselben 13 Formen, welche bereits von Omar Alkhayyami in seiner Algebra angegeben sind (§ 90). Nach dem gegebenen Auszuge erläutert er seine Auflösungsmethode numerisch und geometrisch auf folgende Art:

Es mögen y und z zwei Kuben bezeichnen, also $\sqrt[3]{y}$ und $\sqrt[3]{z}$ ihre Kanten. Es sollen diese Kanten derartig bestimmt werden, dass die Differenz der Kuben gleich der Zahl q, das Product ihrer Kanten gleich dem dritten Theil ihrer Zahl p und die Differenz der Kanten die Unbekannte x werde, dass also folgende Relationen bestehen:

$$y - z = q, \quad \sqrt[3]{y}\,\sqrt[3]{z} = \frac{1}{3}p, \quad \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} = x.$$

Es lässt sich nun geometrisch beweisen, dass

$$\left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^3 + 3\sqrt[3]{y}\,\sqrt[3]{z}\left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right) = y - z,$$

also

$$x^3 + px = q$$

werde.

Es sei (Fig. 25) der Kubus $AG = y$, also die Kante $AB = \sqrt[3]{y}$; der Kubus $AM = z$, also Kante $AJ = \sqrt[3]{z}$. Dann ist

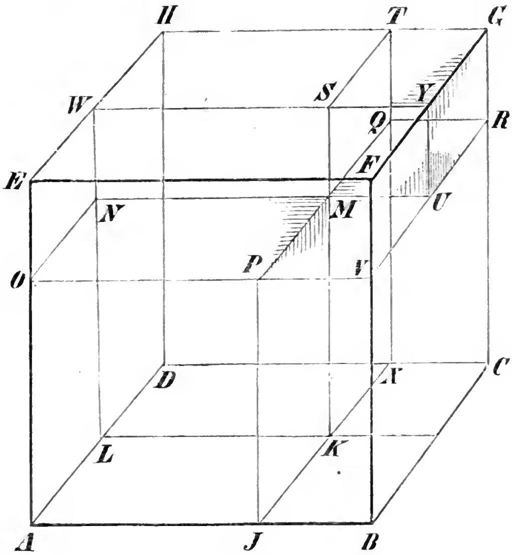


Fig. 25.

$$MU = MS = MQ = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} = x.$$

Jetzt besteht der Würfel AG aus zwei Würfeln AM und MG; ausserdem aus den drei congruenten Parallelelepipeden JR, LT und OY. Dabei ist

$$JR = JX \cdot JP \cdot JB = \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z} \cdot \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right).$$

Folglich ist

$$y = z + \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^3 + 3\sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z}\left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right),$$

oder

$$\left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^3 + 3\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}\left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right) = y - z.$$

Vergleicht man diese geometrisch abgeleitete Gleichung mit der vorgelegten

$$x^3 + px = q,$$

so ergibt sich daraus folgende Regel zur Auflösung dieser Form der kubischen Gleichungen: Man suche die Werthe von y und z aus

$$yz = \frac{1}{27} p^3, \quad y - z = q,$$

so ist

$$x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}.$$

Historische Bemerkungen. Unter den kubischen Gleichungen sind die reinen früher gelöst als die gemischten. Die älteste Auflösung rein kubischer Gleichungen ist die des Platonikers Menächmus (370 v. Chr.). Sie wurde von dem Erfinder der Kegelschnitte bewerkstelligt mittels Construction zweier Kegelschnitte. Veranlassung dazu gab die Aufgabe des Hippokrates (450 v. Chr.) zu zwei gegebenen Linien zwei mittlere Proportionalen zu finden*). Seien nämlich a und b die gegebenen Linien, x und y die mittleren Proportionalen, so sollen x und y so bestimmt werden, dass

$$a : x = x : y = y : b.$$

Man zieht hieraus die beiden Gleichungen

$$y^2 = bx \text{ (Parabel)},$$

$$xy = ab \text{ (gleichseitige Hyperbel)},$$

und

$$x^3 = a^2 b.$$

Ist ausserdem $b = 2a$, so ist zu lösen die Gleichung

$$x^3 = 2a^3,$$

in Worten: Die Kante x eines Würfels zu finden, dessen Inhalt das Doppelte eines gegebenen beträgt. Diese letztere Aufgabe ist unter dem Namen „Delisches Problem“ bekannt (Verdoppelung des Würfels, *διαπλασιασμὸς τοῦ στερεοῦ*, *duplicatio cubi*). Sie ist eines der drei Cordinalprobleme der griechischen Geometrie, welche in der *duplicatio cubi*, *trisectio anguli* und *quadratura circuli* bestehen und sich nicht auf elementarem Wege, sondern nur vermittels Curven höherer Ordnung geometrisch lösen lassen. Nach den Erzählungen von Plutarch (Moral. III, 579) und Philoponos war den Deliern vom Apollo das Orakel gesprochen worden, dass die allgemeinen Calamitäten Griechenlands nicht eher aufhören würden, bis sie den Altar von Delos verdoppelt hätten. (Dieser war von Gold und ein Würfel.) Da man dieses nicht zu bewerkstelligen gewusst, habe man sich deswegen nach Athen begeben und an Plato gewandt. Dieser habe ihnen geantwortet, man müsse zu zwei gegebenen Linien zwei mittlere Proportionalen suchen. Eudoxus werde ihnen das genauer auseinandersetzen. Plato, den dies Problem lebhaft interessirte, hat selbst eine mechanische Lösung davon

*) Man vergl. Eutocius ad Archimedem lib. II, éd. d'Oxf. p. 135. Der Commentator Eutocius lebte 540 n. Chr., aus Askalon gebürtig.

gegeben*). Eine ältere Sage von Minos in Kreta erzählt Eratosthenes bei Eutocius (*ad Archim.* pg. 144).

Was nun die gemischten kubischen Gleichungen anbelangt, so ist nach dem Zeugniss Omar Alkhayyami's**), welcher ein berühmtes Werk über die geometrische Auflösung der kubischen Gleichungen mittels der Apollonischen Kegelschnitte geschrieben hat, der Perser Abu Djafar Alkhâzin (950) der erste Mathematiker, welcher die gemischten kubischen Gleichungen mittels Intersection zweier Kegelschnitte löste. Veranlassung dazu gab ein Problem in Archimedis *lib. II. de sphaera et cylindro,* welches auf die Proportion

$$(c - x) : b = a^2 : x^2$$

führt. Hieraus folgt nämlich

$$x^3 + a^2 b = cx^2.$$

Diese Gleichung war bei den Arabern unter dem Namen: Gleichung von Almâhânî (860) bekannt. Moh. ben Iça Abu Abdallah Almahani schrieb einen Commentar zum II. Buche des Archimedes und versuchte vergeblich jene aus Prop. IV des Buches deducirte Gleichung zu lösen. Eutocius gibt freilich an, dass Archimedes selbst eine Construction mittels der Kegelschnitte

$$x^2 = \frac{a^2}{c} y \text{ (Parabel)}, \quad y(c - x) = bc \text{ (Hyperbel)}$$

gegeben habe. Abul Hassan ben Alhaitham***) († 1038) bediente sich zur Construction der Wurzel der Curven

$$x^2 = ay \text{ (Parabel)}, \quad y(c - x) = ab \text{ (Hyperbel)}.$$

Die algebraische Auflösung der gemischten kubischen Gleichung $x^3 + px = q$ wurde zuerst von Scipione dal Ferro, Prof. der Math. in Bologna (geb. —?, Prof. 1496—1525, gest. 1525) 1515 entdeckt und erst 30 Jahre später durch Cardano veröffentlicht. Cardano schreibt hierüber in seinem *Lib. artis magnae* cap. 1, p. 5: „*Temporibus Nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit, rem sane pulchram et admirabilem. — — Hujus aemulatione Nicolaus Tartalea, Brixellensis amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Florido venisset, capitulum idem ne vinceretur invenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit.*“ Im

*) Eutocius ad Archimedem prop. III. Auch übersetzt (980) von Thabit ben Korrah. Dieser Theil des Commentars enthält Auflösungen des Delischen Problems oder der Aufgabe von den zwei mittleren Proportionalen mit 18 Figuren illustrirt und zwar von 11 Geometern, nämlich Hero, Philon, Apollonius, Diocles, Pappus, Sporus, Menächmus, Eratosthenes, Plato, Archytas, Nicomedes. Man vergl. Omar, Woepcke p. XIII. u. p. 94.

**) Man vergl. *Aldjebr w' almuchabala* d'Omar Alkhayyami *publ. et trad. par.* F. Woepcke p. 2. Paris 1851.

***) Omar, par Woepcke. Add. A.

XI. Kap. wiederholt Cardano, dass Scipione dal Ferro seine Entdeckung dem Venetianer Antonio Maria Florido (*alias* dal Fiore) mitgetheilt, Tartalea dieselbe selbstständig wiederholt und ihm (dem Cardano) ohne den Beweis mitgetheilt habe; diesen habe er nun mit vieler Mühe gefunden. Cardano erläutert die Auflösung und seine bereits oben wörtlich mitgetheilte Regel an folgender Aufgabe oder Gleichung:

Cubus $\bar{p}$ 6. rebus aequalis 20.

Die Auflösung davon ist

R. v. cu. R. 108 $\bar{p}$. 10 | $\bar{m}$. *R. v. cu. R.* 108 $\bar{m}$ 10;

wörtlich: *radix universalis cubica radicis ex* 108 *plus* 10, *minus radice universali cubica radicis ex* 108 *minus* 10; also in moderner Schreibweise

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Der geometrische Beweis, den wir oben mitgetheilt haben, bezweckt nur eben dasselbe, was für die Auflösung der quadratischen Gleichungen die geometrische Beweise von Mohammed ben Musa bedeuten, nämlich eine geometrische Demonstration der dritten Potenz einer zweitheiligen Grösse. Diese algebraischen Formeln arithmetisch zu behandeln, scheint den Arabern und ihren Nachfolgern unendlich schwer gewesen zu sein. Durch diesen Umstand musste jeder Fortschritt in der analytischen Kunst gehemmt werden, in welcher Diophant und die Inder ihnen als Meister vorangegangen waren, von denen sie aber nichts gelernt hatten. Eine Demonstration der vierten Potenz einer zweitheiligen Grösse war von diesem Gesichtspuncte aus nicht mehr möglich und begreiflicherweise ebensowenig die Discussion einer biquadratischen Gleichung, weil schon die kubischen Gleichungen aus geometrischen Problemen des Archimedes deducirt wurden. Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass selbst die Chinesen lange vorher in der Analytik bedeutendere Fortschritte gemacht hatten. Tsin kiu Tschaü (1220—1290) verfasste um 1290 ein Werk: Leih tien yuen yih, worin die Auflösung höherer numerischer Gleichungen mit Hülfe der Lihn-Tafel oder des arithmetischen Dreiecks gelehrt wird. Die Potenztafel der Binome findet sich auch bei Tschu Schi Kih (1303), welcher sie eine „alte“ Methode nennt. In Europa scheint sie erst von Pascal (1623—1662) erfunden zu sein, nachdem jene Lihn-Tafel das Pascal'sche Dreieck genannt wird.

Es bleibt noch übrig einige Bemerkungen über die Umstände der Entdeckung von Ferro, die Geheimhaltung derselben, sowie die Art der Veröffentlichung des Geheimnisses durch Cardano hinzuzufügen. Der Grund der Geheimhaltung liegt zum Theil in der Sitte jener Zeit, öffentliche Certamina abzuhalten, um durch Lösung vorgelegter Aufgaben vor dem Publicum zu glänzen; Tartaglia wünschte aber ausserdem seine Entdeckungen später in einem eigenen Werke über Algebra zu veröffentlichen. Jedoch bewog ihn Cardano, ihm sein Verfahren mitzutheilen. Wegen der sechs Jahre nachher erfolgten Veröffentlichung des ihm von Tartaglia anvertrauten Geheimnisses ist Cardano vielfach angegriffen worden*). Wie nun aus einem lateinischen Cartello Ferrari's**), eines Schülers und Freundes des Cardano, datirt vom J. 1547 hervorgeht, war diese wichtige Entdeckung von Ferro in einem Manuscript an seinen Schwiegersohn und Nachfolger Annibale dalla Nave vererbt worden. Ein gewisser dal Fiore, den Cardano Antonio Maria Florido nennt, ein Schüler von Ferro, hatte von der Auflösungsmethode Kenntniss erhalten und Nicolo, genannt Tartaglia (der Stotterer) in der Begierde dieselbe kennen zu lernen, sie im J. 1535 selbständig nacherfunden. Auf dringendes Bitten von Seiten Cardan's theilte im J. 1539 Tartaglia diesem gegen einen Schwur, das Geheimniss zu bewahren, seine in Versen***) versteckte Regel mit. Sie lauten:

Quando che'l cubo con le cose appresso,
  Se agguaglia à qualche numero discreto: $x^3 + px = q$
  Trovan dui altri, differenti in essò. $y - z = q$

Dapoi terrai, questo per consueto
  Che'l lor produtto, sempre sia eguale $yz = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
  Al terzo cubo, dellè cose neto;

El residuo poi suo generale,
  Delli lor lati cubi, bene sostratti
  Varrà la tua Cosa principale. $x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\,.$

In dem erwähnten Cartello ist nun mitgetheilt, dass Cardano und Ferrari im J. 1542, also 3 Jahre nachher, das von Ferro geschriebene Werk von Annibale Nave zur Durchsicht gezeigt worden sei. Nach abermals 3 Jahren im J. 1545 erschien die *Ars magna*, worin Cardano diese Methode veröffentlichte. In Folge dessen veröffentlichte Tartaglia 1546 in Venedig seine *Quesiti*, worin er seine Anrechte an die Entdeckung geltend machte. Den Vorwürfen gegenüber, womit der erboste Tartaglia den Cardano nach dem Bruche seines Versprechens überschüttete, mag dies bei dem sonstigen Charakter

*) Hankel, Gesch. der Algebra während der Renaissance; in dem Werke: Zur Gesch. der Math. in Alterthum u. Mittelalter, S. 360 u. ff. Man vergl. Nicolo (Tartaglia), *Ques. ed invenz. div. lib. IX. Ques. XXV ff. ed General trattato de' numeri e misure*, p. II. fol. 41. Venezia 1558.

Gerhardt, Die Algebra in Italien seit Fibonacci; Grunert's Arch. III. S. 284. 1843.

**) Man sehe: Gherardi, Beitr. zur Gesch. der math. Facult. der Univ. Bologna. Grun. Arch. LII. S. 143 u. ff.

***) Gherardi, Beitr. etc. Grun. Arch. LII. S. 188: *Capitulo in terza Rima* zur Auflösung der Gleichung $x^3 + px = q$ von Tartaglia am 25. März 1539 an Cardano mitgetheilt.

des Cardano, der ein Wüstling war, zur Entschuldigung dienen, denn auch Ferrari vertheidigt ihn lebhaft.

Hankel hat uns in seiner Geschichte eine Darstellung der Streitigkeiten und der Anrechte des Nicolo nach dem 9. Bd. der *Quesiti* gegeben, worin er den Cardano sehr hart verurtheilt, und bei wem sollte nicht das Schicksal des Tartaglia Theilnahme erwecken? Doch geht er vielleicht in seinem Eifer für Tartaglia in manchen Stücken zu weit. Er bemerkt unter Anderem, von gegnerischer Seite sei keine Darstellung der Streitigkeiten gegeben worden und erwähnt jenes Cartello gar nicht. Freilich ist es unbegreiflich, wenn Cardano einen Einblick in das Werk Ferro's gewonnen hatte, warum er dies nirgend in seiner Algebrà erwähnt; denn dann war die Sache doch ja nur mehr ein öffentliches Geheimniss, und Cardano brauchte sich nur noch mit Tartaglia um den Modus der Publication zu verständigen. Weiter schliesst Hankel seine Darstellung mit den Worten: „Der Mann, dem wir den grössten Fortschritt in diesem Jahrhundert verdanken, wurde vergessen, seine Methode als die von Hudde bezeichnet, und nach dem treulosen Cardano wurde die dem Tartaglia entwendete Formel bezeichnet.“ Die Anrechte Tartaglia's sind genugsam bekannt; er gewann sie aber nur, nachdem Ferro auf die Veröffentlichung verzichtet hatte. Im Uebrigen sind doch wol Methode, Formel und Beweis noch verschiedene Dinge strenge genommen. Im Ganzen genommen ist der Sachverhalt wol so: Ferro war der erste Erfinder (1515), wir kennen von ihm aber weder seine Methode, noch seine Begründung derselben. Tartaglia gab 1539*) seine Methode und Cardano 1545 die exacte Formel und den Beweis dazu. Der Beweis von Hudde ist allerdings nur als eine Modification des Cardani'schen Beweises anzusehen.

Was die Auflösungsmethode des Tartaglia und Cardano anbetrifft, so werden wir aus dem erwähnten Cartello schliessen dürfen, dass es die Methode des ersten Erfinders Ferro selbst war. Das Charakteristische an derselben ist, dass sie eine Substitutionsmethode ist und dass sie, wenn auch im Allgemeinen von späteren Algebristen beibehalten, doch im Unterschiede von diesen die Wurzelform bald als Differenz, bald als Summe zweier Kubikwurzeln darstellt. Dasselbe geschieht auch noch bei Vieta, der als substituirte Function je nach der Form der Gleichung bald eine Differenz, bald eine Summe wählt.

In Deutschland fand die Lehre von der Auflösung kubischer Gleichungen (*cubiccoss*) Eingang durch Stifel, Xylander und Faulhaber. Während die ersten Beiden der Cardani'schen Regel nur Erwähnung thun, gab Faulhaber i. J. 1604 selbständig einen „Arithmetischen cubiccossischen Lustgarten“ heraus.

---

*) Tartaglia gibt selbst an, seine Methode 1534 entdeckt zu haben.

§ 128. Methode von Vieta*).
(Capitulum de duplicata hypostasi.)

Vieta, welcher zuerst die Wegschaffung des zweiten Gliedes einer vollständigen Gleichung lehrte, betrachtet die algebraische Auflösung der beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad x^3 + 3bx = 2c;$$
$$\text{II.}\quad x^3 = 3bx + 2c.$$

Vieta sagt**): Problema I.: Cubum adfectum sub latere adfirmato, ad quadratum radicem habens solidam idemque affectum, reducere.

I. Proponatur A cubus $+$ B plano 3 in A, aequari Z solido 2 Oportet facere quod propositum est. E quad. $+$ A in E, aequetur B plano.

Unde B planum ex hujusmodi aequationis constitutione, intelligitur rectangulum sub duobus lateribus quorum minus est E, differentia a majore A; igitur $\frac{B \text{ planum} - E \text{ quad}}{E}$ erit A.

Quare

$$\frac{B \text{ plano-plano-plano} - E \text{ quad in } B \text{ plano-planum } 3 + E \text{ quad. quad in } B \text{ planum } 3 - E \text{ cubo-cubo}}{E \text{ cubo}}$$
$$+ \frac{B \text{ pl. pl. } 3 - B \text{ pl. in } E \text{ qu. } 3}{E}$$

aequabitur Z solido 2.

Et omnibus per E cubum ductis et ex arte concinnatis E cubi quad. $+$ Z solido 2 in E cubum, aequabitur B plani-cubo.

---

*) *Opera mathem. IV. De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo, tract. II. cap. VII.* (Zuerst publicirt von Alex. Anderson. Paris 1615.)

Beaune, de, *De aequationum natura cap. XV.* Frankfurt 1695.

**) Commentar: I. Gegeben sei $x^3 + 3bx = 2c$. Man setze $z^2 + xz = b$. Daraus folgt, dass $\frac{b - z^2}{z} = x$ ist und weiter

$$\frac{b^3 - 3b^2z^2 + 3bz^4 - z^6}{z^3} + \frac{3b^2 - 3bz^2}{z} = 2c.$$

Wird alles mit z^3 multiplicirt und Gleiches vereinigt, so erhält man

$$z^6 + 2cz^3 = b^3.$$

Dieses ist die Gleichung eines positiv gemischten Quadrates, welches eine Kubikwurzel hat. Damit ist die Reduction des Problems gefunden.

Quae aequatio est quadrati affirmate affecti, radicem habentis solidam. Facta itaque reductio est quae imperabatur.

Consectarium: Itaque si A cubus et B plano 3, aequetur Z solido 2, et $\sqrt{B \text{ plano-plano-plani} + Z \text{ solido-solido}} - Z$ solido, aequetur D cubo, ergo $\frac{B \text{ planum} - D \text{ quad.}}{D}$, fit A de qua quaeritur.

II. E quad. — A in E, aequetur B plano. Unde B planum ex hujusmodi aequationis constitutione, intellegitur rectangulum sub duobus lateribus, quorum majus est E, excessus vero ejusdem supra minorem A. igitur $\frac{E \text{ quad} - B \text{ plano}}{E}$, aequabitur A. Quare per ea quae proponuntur, omnibus ex arte concinnatis. E cubi-quadratum — Z solido 2 in E cubum aequabitur B plani-cubo. Quae aequatio est quadrati negate adfecti, radicem habentis solidam. Facta itaque est rursus reductio quae imperabatur.

Consectarium secundum: Itaque si A cubus $+ B$ plano 3 in A, aequetur Z solido 2, et

$$\sqrt{B \text{ plano-plano-plani} + Z \text{ sol. solido}} + Z \text{ solido}$$

aequetur G cubo: ergo $\frac{G \text{ quad} - B \text{ plano}}{G}$, aequabitur A.

Consectarium universale: Denique sunt duo latera, unum idemque minus D, alterum idemque majus G, quorum differentia est A de qua quaeritur.

---

1. Folgerung: Wenn also

$$x^3 + 3bx = 2c$$

und

$$\sqrt{b^3 + c^2} - c = z_1,$$

so ist

$$x = \frac{b - z_1^2}{z_1}.$$

Es sei ferner $z^2 - xz = b$. Daraus folgt, dass $\frac{z^2 - b}{z} = x$ ist, und ferner

$$z^6 - 2cz^3 = b^3.$$

Dieses ist die Gleichung eines negativ gemischten Quadrates, welches eine Kubikwurzel hat, womit ebenfalls die Reduction bewerkstelligt ist.

2. Folgerung: Wenn demnach $x^3 + 3bx = 2c$ ist und

$$\sqrt{b^3 + c^2} + c = z_2,$$

so ist

$$x = \frac{z_2^2 - b}{z_2}.$$

Itaque

$$\sqrt{C.\sqrt{B \text{ pl. pl. pl.} + Z \text{ sol. sol.}} + Z \text{ solido}}$$
$$-\sqrt{C.\sqrt{B \text{ pl. pl. pl.} + Z \text{ sol. sol.}} - Z \text{ solido}}$$

est A quaesita.

Problema II.: Cubum adfectum sub latere negate, ad quadratum sub radice solida negatum de plano, reducere.

Oportet autem in aequatione proposita cubum e triente coefficientis adfectionis, cedere solidi comparationis sub quadruplo quadrato.

Proponatur A cubus — B plano 3 in A, aequari Z solido 2.

Oportet facere quod propositum est. A in E — E quad. aequetur B plano.

Unde B planum ex hujusmodi aequationis constitutione, intelligitur rectangulum sub duobus lateribus, quorum majus minusve est E, summa vero minoris ac majoris A. Igitur $\frac{B \text{ planum} + E \text{ quad.}}{E}$, aequabitur A. Quare

$$\frac{B \text{ plano plano planum} + E \text{ q. in } B \text{ pl. plan } 3 + E \text{ q. quad in } B \text{ planum } 3 + E \text{ cubo-cubo}}{E \text{ cubo}}$$
$$\frac{- B \text{ plano-plano } 3 - B \text{ plano in } E \text{ quad. } 3}{E},$$

aequabitur Z solido 2.

Allgemein: Es gibt zwei Werthe, einen kleineren z_1 und einen grösseren z_2, deren Differenz gleich x ist. (Es ist nämlich

$$b = z_1 x + z_1^2 = z_2^2 - z_2 x \quad \text{und} \quad x = z_2 - z_1).$$

Demgemäss ist

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{b^3 + c^2} + c} - \sqrt[3]{\sqrt{b^3 + c^2} - c}.$$

II. Gegeben sei $x^3 - 3bx = 2c$. Man setze $zx - z^2 = b$. Daraus folgt $\frac{b + z^2}{z} = x$ und weiter

$$\frac{b^3 + 3b^2z^2 + 3bz^4 + z^6}{z^3} - \frac{3b^2 + 3bz^2}{z} = 2c.$$

Wird Alles mit z^3 multiplicirt und Gleiches vereinigt, so erhält man

$$2cz^3 - z^6 = b^3.$$

Dieses ist die Gleichung eines negativen Quadrats, welches eine Kubikwurzel hat, womit die Reduction bewerkstelligt ist. Es geht aus der Reducirten hervor, dass $c^2 > b^3$ sein muss.

Die Wurzel der gegebenen Gleichung ist demgemäss

$$x = \sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 - b^3}} + \sqrt[3]{c - \sqrt{c^2 - b^3}}.$$

Et omnibus per E cubum ductis et ex arte concinnatis. Z solidum 2 in E cubum — E cubi-quadrato, aequabitur B plani-cubo.

Quae aequatio est quadrati inverse negata, radicem habentis solidam. Facta itaque est reductio quae imperabatur.

Apparet autem ex aequationis illius ad quam reductio facta est proprietate, Z solidi quadratum praestare debere B plani-cubo: quo pertinet apposita lex Problemati.

Consectarium: Itaque si A cubus — B plano 3 in A, aequetur Z solido 2.

$$\sqrt{C.\,Z \text{ sol.} + \sqrt{Z \text{ sol. sol.} - B \text{ pl. pl. pl.}}}$$
$$+ \sqrt{C.\,Z \text{ sol.} - \sqrt{Z \text{ sol. sol.} - B \text{ pl. pl. pl.}}}$$

Est A de qua quaeritur.

§ 129. Methode von Hudde*).

Hudde geht aus von der reducirten kubischen Gleichung

$$x^3 = qx + r.$$

Derselbe sagt**): „Proponatur aequatio $x^3 \infty qx \,.\, r$.

*) Joh. Huddenii Epist. I. de reductione aequationum; Regula XXI. exempl. 4. Amsterdam 1658.

**) Uebersetzung: Gegeben sei die Gleichung $x^3 = qx + r$. Es sei $x = y + z$ und es wird sein $x^3 + y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3 = qx + r$.

Aus dieser Gleichung mögen nun zwei andere gebildet werden dadurch, dass man substituirt

$$3zy^2 + 3z^2y = qx \quad \text{und} \quad y^3 + z^3 = r.$$

Dividirt man die erste durch $y + z$, so erhält man

$$3zy = q, \quad y^3 = r - z^3.$$

Ferner ergibt sich

$$y = \frac{1}{3} q : z$$

und

$$y^3 = \frac{1}{27} q^3 : z^3 = r - z^3.$$

Hieraus erhält man weiter

$$z^3 = \frac{1}{2} r \pm \sqrt{\frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{27} q^3}$$

und

$$y^3 = \frac{1}{2} r \mp \sqrt{\frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{27} q^3},$$

oder

In qua x designet quantilatem, cujus valor quaeritur; q & r autem quantitates cum suis signis, quales illae in aequatione reperiuntur.

Esto etiam $x \infty y + z$. Eritque

$$x^3 \infty y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 \infty qx + r.$$

Ex hac autem aequatione fiant jam duae aliae, ponendo

$$3zyy + 3zzy \infty qx, \qquad \text{et } y^3 + z^3 \infty r$$

$$\text{div. per } y + z \quad \text{fit } 3zy \infty q \qquad \text{vel } y^3 \infty r - z^3$$

$$y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 \infty \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} \infty r - z^3$$

$$z^3 \infty \frac{1}{2}r \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$$

$$\text{et} \quad y^3 \infty \frac{1}{2}r \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}, \text{ quia } y^2 \infty r - z^3.$$

$$\text{vel } y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\frac{1}{2}r \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}, \quad \text{quia } y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$\text{et} \quad x \infty \sqrt{C.\frac{1}{2}r \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$+ \sqrt{C.\frac{1}{2}r \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{quia} \quad x \infty z + y$$

$$y = \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}}}$$

und

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}}$$

oder

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Da nun in dem ersten Theile der Wurzel x das doppelte Vorzeichen $\pm$ und

$$\text{vel} \quad x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}\,r \;8\; \sqrt{\frac{1}{4}\,rr - \frac{1}{27}\,q^3}},$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\,q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}\,r \;8\; \sqrt{\frac{1}{2}\,rr - \frac{1}{27}\,q^3}}}.$$

Quonjam vero in prima parte prioris valoris ipsius x reperitur signum 8, et in secunda signum ȣ, atque quantitates per ea conjunctae omnino eaedem existunt; et quonjam ad obtinendum valorem ipsius x, duae illae partes simul addi debent; poterunt ipsa determinari, ponendo pro uno $+$, et pro altero $-$, ita ut habeatur

$$x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}\,r + \sqrt{\frac{1}{4}\,rr - \frac{1}{27}\,q^3}}$$
$$+ \sqrt{C.\,\frac{1}{2}\,r - \sqrt{\frac{1}{4}\,rr - \frac{1}{27}\,q^3}}.$$

§ 130. Modification der Methode von Tartaglia und Cardano nach Lacroix*).

Es sei die allgemeine kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

durch Wegschaffung des zweiten Gliedes auf die Form

$$x^3 + px + q = 0$$

gebracht. Nach Vieta**), geschieht dieses indem man $x + \frac{1}{3}\,a = u$ setzt. Man erhält alsdann die Reducirte

im zweiten $\mp$ steht, und die Werthe ganz dieselben sind und zur Summe verbunden, so kann man die oberen Vorzeichen wählen, so dass man hat

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\,r + \sqrt{\frac{1}{4}\,r^2 - \frac{1}{27}\,q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\,r - \sqrt{\frac{1}{4}\,r^2 - \frac{1}{27}\,q^3}}.$$

Bemerkung. Vergleicht man die Ableitung der Formel von Hudde mit der von Cardano, so ist sie nur als eine Modification derselben anzusehen.

*) Compl. des élémens d'algèbre. § 68. Paris 1799.

**) Vieta, De emendatione aequationum. Tract. II. sub capite: De reductione cuborum adfectorum tam sub quadrato quam latere, ad cubos adfectos simpliciter sub latere.

I. Si A cubus $+ B$ 3 in A quad. $+ D$ plano in A, aequetur Z solido, $A + B$ esto E. E cubus $\overline{+ D \text{ plano} - B \text{ quad.}}$ in E aequabitur Z solido $+ D$ plano in $B - B$ cubo 2.

$$u^3 - \frac{1}{3}(a^2 - 3b)\,u + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c) = 0.$$

In einer etwas andern Form kann man dies so bewerkstelligen. Man bilde die Variirte und setze den Coefficienten des zweiten Gliedes gleich Null, also

$$u^3 + (3z + a)u^2 + (3z^2 + 2az + b)u + (z^3 + az^2 + bz + c) = 0,$$
$$3z + a = 0.$$

Daraus folgt

$$x = u + z = u - \frac{1}{3}a,$$

und die Reducirte nimmt die obige Form an.

Um nun die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ aufzulösen, setze man $x = y + z$ und bilde eine der Resolventen $Y = 0$ oder $Z = 0$. Diese sind vom sechsten Grade, lassen sich aber auf eine quadratische Gleichung bringen.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3yz(y + z) + z^3 \\ px &= p(y + z) \\ q &= q \end{aligned}$$

folglich

$$0 = y^3 + z^3 + q + (3yz + p)(y + z).$$

Unter den verschiedenen Arten, auf welche man diese Bestimmungsgleichung von y und z in zwei andere zerlegen kann, sieht man leicht, dass die folgende

$$(3yz + p)(y + z) = 0,$$
$$y^3 + z^3 + q = 0$$

die einzige ist, welche die Lösung des Problems vereinfacht. Da nun $y + z = x$ im Allgemeinen von Null verschieden ist, so folgt aus der ersten

$$3yz + p = 0,$$

und man erhält

$$y^3 + z^3 = -q, \quad y^3 z^3 = -\frac{1}{27}p^3.$$

Demnach sind y^3 und z^3 die Wurzeln t_1 und t_2 der quadratischen Gleichung

$$t^2 + qt - \frac{1}{27}p^3 = 0$$

und

$$y = \sqrt[3]{t_1}, \quad z = \sqrt[3]{t_2}.$$

Bezeichnen wir die Werthe von y mit

$$y_1 = \sqrt[3]{t_1}, \quad y_2 = J_1 \sqrt[3]{t_1}, \quad y_3 = J_2 \sqrt[3]{t_1},$$

diejenige von z mit

$$z_1 = \sqrt[3]{t_2}, \quad z_2 = J_1 \sqrt[3]{t_2}, \quad z_3 = J_2 \sqrt[3]{t_3},$$

so haben wir diese Werthe so zu combiniren, dass

$$yz = -\frac{1}{3} p = \sqrt[3]{t_1 t_2}$$

werde. Demgemäss ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = u + v, \\ x_2 &= J_1 \sqrt[3]{t_1} + J_2 \sqrt[3]{t_2} = J_1 u + J_2 v, \\ x_3 &= J_2 \sqrt[3]{t_1} + J_1 \sqrt[3]{t_2} = J_2 u + J_1 v, \end{aligned}$$

wo

$$J_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad J_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

zu setzen ist.

Setzen wir diese Zahlenwerthe ein, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}} \\ &= 1 \,.\, u + 1 \,.\, v, \\ x_2 &= J_1 u + J_2 v = -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v)\sqrt{-3}, \\ x_3 &= J_2 u + J_1 v = -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}(u - v)\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

§ 131. Eine zweite Modification derselben Methode.

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Man substituire

$$x - \frac{1}{3} uv(u + v) = 0.$$

Durch Potenzirung ergibt sich daraus

$$x^3 - \frac{1}{3} u^3 v^3 x - \frac{1}{27} u^3 v^3 (u^3 + v^3) = 0.$$

Die Identität beider Gleichungen erfordert

$$u^3 v^3 = -3p, \quad u^3 + v^3 = 9q : p.$$

Durch Combination dieser beiden Bestimmungsgleichungen erhält man auch noch

$$uv = -\sqrt[3]{3p}, \quad u^3 - v^3 = \pm 9\frac{q}{p}\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}},$$

woraus sich die Cardani'sche Formel ableiten lässt, also

$$x_1 = \sqrt{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}}.$$

§ 132. Von den drei Wurzeln einer kubischen Gleichung.

Dass eine kubische Gleichung drei Wurzeln habe und wie diese zu finden seien, haben Euler (1738) und Maclaurin gezeigt. Ferner wurde schon früh erkannt, dass unter gewissen Bedingungen in der Cardani'schen Formel die Wurzel unter imaginärer Form erscheine *(casus irreductibilis)*. Diesen Fall lehrt Schooten*) durch die *trisectio anguli*, also auf trigonometrischem Wege zu lösen; Leibnitz**) 1698 dagegen durch Entwickelung in unendliche Reihen. Dass in diesem Falle die drei Wurzeln der kubischen Gleichung reell sind, bewiesen Clairaut***) 1746 und Kaestner†) 1745. Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie man bei den kubischen Gleichungen mittels der Cardani'schen Wurzel die beiden andern findet, und es sollen die beiden Fälle discutirt werden, wenn die Gleichung mit reellen Coefficienten

a) eine reelle und zwei complexe Wurzeln,

b) drei reelle Wurzeln besitzt††).

Die gegebene Gleichung sei

$$x^3 + px + q = 0.$$

Man setze $x = y + z$, so erhält man

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = u \,.\, \sqrt[3]{1},$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = v \,.\, \sqrt[3]{1}.$$

---

*) Fr. v. Schooten, App. de cubicarum aequationum solutione, p. 345.

**) Leibnitz in Epist. ad Wallisium. Wallisii opera T. III. Epist. 27.

***) Clairaut, Elém. d'Algèbre. P. V. § VII. Paris 1746.

†) Kästner, Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere ostendit. Prop. II. Index prael. Gottingae 1757.

††) Man vergl. Kästner, l. c. Prop. II.

Da $\sqrt[3]{1}$ drei verschiedene Werthe hat, nämlich

$$1, \quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=J_1, \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=J_2,$$

so ergeben sich aus der Resolvente

$$y^6+qy^3-\frac{1}{27}p^3=0$$

folgende sechs Wurzelwerthe:

$$\begin{aligned} y_1 &= u, \quad y_2 = J_1 u, \quad y_3 = J_2 u, \\ z_1 &= v, \quad z_2 = J_1 v, \quad z_3 = J_2 v. \end{aligned}$$

Da aber die Bedingung $yz=-\frac{1}{3}p$ erfüllt werden muss, so sind nur drei Combinationen von y und z zur Summe $y+z=x$ zulässig, nämlich

$$x_1=u+v, \quad x_2=J_1u+J_2v, \quad x_3=J_2u+J_1v.$$

Dagegen sind die übrigen Systeme

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} y & u & u & J_1u & J_1u & J_2u & J_2u \\ z & J_1v & J_2v & v & J_2v & v & J_2v \end{array}$$

weil sie complexe Producte geben, von der Untersuchung auszuschliessen.

Zu den beiden andern Wurzelwerthen, also

$$x_2=J_1u+J_2v=-\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3}$$

$$x_3=J_2u+J_1v=-\frac{1}{2}(u+v)-\frac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3}$$

gelangen wir auch auf folgende Art:

Ist $x_1=u+v$ die reelle Cardani'sche Wurzel, welche jede Gleichung von ungeradem Grade haben muss, so ist nach § 130

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0.$$

Um zu der quadratischen Gleichung zu gelangen, welche die beiden andern Wurzeln liefert, dividire man die kubische Gleichung durch den binomischen Factor $x-(u+v)=0$, wodurch man erhält

$$x^2+(u+v)x+(u^2-uv+v^2)=0.$$

Hieraus folgt ohne Weiteres

$$x_2 \text{ und } x_3=-\frac{1}{2}(u+v)\pm\frac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3}.$$

Sind demnach u und v reelle Grössen, so ist die Cardani'sche Wurzel reell, die beiden übrigen aber sind complex.

Anders verhält es sich, wenn u und v complexe Grössen sind, was offenbar der Fall ist, wenn der Term unter der Quadratwurzel negativ, also

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 < 0$$

ist, wenn es sich also um Auflösung von kubischen Gleichungen der Form $x^3 - px \pm q = 0$ handelt. Es erscheinen dann alle drei Wurzeln mit imaginären Elementen und sie sind auf eine rein algebraische Form nur dann zu reduciren, wenn der Radicand der Kubikwurzel ein vollständiger Kubus ist (Bombelli). Ist dies nicht der Fall, so ist dies nur möglich durch Entwicklung in unendliche Reihen (*casus irreductibilis*), wie zuerst Leibnitz 1698, Colson 1736, Nicole 1738 und Clairaut 1746 gezeigt haben. Ein Beispiel der ersten Art ist

$$x^3 - 63x - 162 = 0;$$

die Cardani'sche Wurzel ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= (-3 + 2\sqrt{-3}) + (-3 - 2\sqrt{-3}) = -6. \end{aligned}$$

Theorem: Sind u und v complexe Grössen, so sind alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung reell.

Dies Theorem, welches von Clairaut, Kästner und Maria Gaetana Agnesi*) bewiesen ist, lässt sich auf folgende Art zeigen:

Zunächst ist eine der drei Wurzeln immer reell, weil die aufzulösende Gleichung vom ungeraden Grade ist. Eine solche ist die Cardani'sche Wurzelform. Man kann dieselbe kürzer schreiben in der Form

$$x_1 = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}.$$

In Berücksichtigung des bekannten Satzes nun, dass die Summe zweier gleicher Functionen von zweien oder beliebig vielen Paaren conjugirt complexer Grössen immer reell, die Differenz dagegen imaginär ist, wird diese Wurzel einen reellen Werth haben, nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} \\ &= (\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\alpha - \beta\sqrt{-1}) = 2\alpha. \end{aligned}$$

---

*) Instituzioni analitiche ad usu della gioventù Italiana. I. § 187. Milano 1748.

Die beiden andern Wurzeln sind dann

$$x_2 = J_1 \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + J_2 \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = -\alpha - \beta\sqrt{3},$$
$$x_3 = J_2 \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + J_1 \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = -\alpha + \beta\sqrt{3}.$$

Es sind demnach für den angenommenen Fall alle drei Wurzeln, obschon von imaginärer Form, doch von reellen Werthe.

Kästner beweist dies Theorem so: Es ist evident, dass

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

sein muss, weil der Kubus einer reellen Grösse nicht complex sein kann; es ist nämlich

$$a + b\sqrt{-1} = (\alpha^3 - 3\beta\alpha^2) + (3\alpha\beta^2 - \beta^3)\sqrt{-1}.$$

Es sei nun

$$\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = \gamma - \delta\sqrt{-1},$$

dann ist

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2} = (\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}$$

nothwendig eine reelle Grösse und demgemäss

$$\beta\gamma - \alpha\delta = 0, \quad \text{oder} \quad \delta = \beta\gamma : \alpha.$$

Bildet man die dritte Potenz beider Seiten, so wird

$$a - b\sqrt{-1} = (\gamma^3 - 3\gamma\delta^2) + 3(\gamma\delta^2 - \delta^3)\sqrt{-1},$$

folglich

$$a = \gamma^3 - 3\gamma\delta^2 = \gamma^3(\alpha^2 - 3\beta^2) : \alpha^2 = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2),$$

und

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \beta.$$

Hieraus folgt also

$$\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

und

$$x_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \alpha - \beta\sqrt{-1} = 2\alpha \text{ (reell)}.$$

Das zweite Theorem lässt sich aber noch auf einem andern Wege demonstriren. Die eine reelle Wurzel der kubischen Gleichung sei α; sie genügt der gegebenen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ und es ist also auch

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0.$$

Die Differenz dieser und der gegebenen Gleichung muss ebenfalls verschwinden, also

$$(x^3 - \alpha^3) + p(x - \alpha) = 0$$

sein. Dividirt man diese Gleichung durch den binomischen Factor $x - \alpha$, worin x von α verschieden ist, so resultirt

$$x^2 + \alpha x + (\alpha^2 + p) = 0,$$

welche quadratische Gleichung die beiden andern von α verschie denen Wurzelwerthe

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2 - p}$$

liefert*).

Diese Wurzeln sind offenbar complex, so lange $p > -\frac{3}{4}\alpha^2$ oder $\alpha^2 > -\frac{4}{3}p$ ist, wobei p sowol positiv als negativ sein kann.

Die Bedingung

$$\alpha^2 > -\frac{4}{3}p$$

kann auch ersetzt werden durch die andere

$$(\alpha^2 + p)^2 > \frac{1}{9}p^2.$$

Ist nämlich p positiv, so ist jedenfalls diese Ungleichung richtig; ist $0 > p > -\frac{3}{4}\alpha^2$, also etwa

$$p = \frac{m}{n}\left(-\frac{3}{4}\alpha^2\right), \quad n > m, \quad \text{und } m \text{ wie } n \text{ positiv,}$$

so ist

$$\alpha^2 = -\frac{4n}{3m}p,$$

und wegen

$$\left(1 - \frac{4n}{3m}\right)^2 > \frac{1}{9}$$

auch noch immer

$$(\alpha^2 + p)^2 > \frac{1}{9}p^2.$$

Es ist aber auch

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0$$

---

*) Eine andere Form gibt Young: The analysis and solution of cubic and biquadratic equations. London 1842. Man vergl. Lobatto, Journ. math. IX. p. 177. 1844.

oder

$$q^2 = \alpha^2(\alpha^2 + p)^2,$$

und wegen der vorhergehenden beiden Ungleichungen

$$q^2 > -\frac{3}{4}p \cdot \frac{1}{9}p^2,$$

oder endlich

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 > 0.$$

Die beiden Wurzeln x_2 und x_3 sind ferner reell, wenn

$$p \leqq -\frac{3}{4}\alpha^2 \quad \text{oder} \quad \alpha^2 \leqq -\frac{4}{3}p$$

ist. Es muss also in diesem Falle p wesentlich negativ sein wie die rechte Seite.

Man kann nun leicht zeigen, dass unter dieser Voraussetzung

$$q^2 = \alpha^2(\alpha^2 + p)^2 \leqq -\frac{4}{27}p^3$$

sein muss.

Sei nämlich der Bedingung zufolge

$$\alpha^2 = -\frac{4}{3}\frac{m}{n}p, \quad m < n, \quad m \text{ und } n \text{ positiv},$$

so ist

$$\alpha^2(\alpha^2 + p)^2 = -\frac{4}{27}p^3\left[\frac{m}{n}\left(3 - \frac{4m}{n}\right)^2\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{m}{n}\left(3 - 4\frac{m}{n}\right)^2 < 1,$$

folglich die beiden Wurzeln x_2 und x_3 ebenfalls reell, wenn

$$q^2 \leqq -\frac{4}{27}p^3,$$

oder

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 \leqq 0$$

ist, d. h. also wenn die Cardani'sche Formel in complexer Form erscheint.

Ist im speciellen Falle $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 0$, so ist

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} = -2\sqrt{-\frac{1}{3}p};$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = \sqrt{-\frac{1}{3}p}.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ ist nun ein aliquoter Theil der Discriminante der kubischen Gleichung. Die Discriminante der vollständigen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ist nach dem Früheren

$$D_3 = -(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$$
$$= \frac{1}{3}(ab - 9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac).$$

In der angenommenen Gleichung ist nun $a = 0$, $b = p$ und $c = q$, also

$$D_3 = 4p^3 + 27q^2 = 108\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right).$$

Die beiden oben ausgesprochenen Theoreme über die Realität der Wurzeln lassen sich demnach auch auf folgende Art ausdrücken:

1. Wenn die Discriminante der kubischen Gleichung positiv ist, so hat die Gleichung eine reelle und zwei complexe Wurzeln;
2. wenn die Discriminante negativ ist, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln;
3. wenn die Discriminante gleich Null ist, so sind die drei Wurzeln reell, jedoch zwei derselben einander gleich.

Ist nämlich die Discriminante

$$D_3 = -(x_1 - x_2)^2\,(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = 0,$$

so ist einer der Factoren gleich Null, d. h. es sind zwei Wurzeln einander gleich.

Die Auffindung der reellen Wurzelwerthe im *casus irreductibilis* geschieht entweder mittels Reduction der Aufgabe auf die der Dreitheilung eines Winkels oder durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes, oder durch verschiedene Näherungsmethoden, wenn die Gleichung numerisch ist. Wenn die beiden Binome unter den Kubikwurzeln vollständige Kuben sind, so lassen sich die Wurzeln entweder durch Probiren oder durch Auflösung der Factorenzerlegung des Absolutgliedes finden. So z. B. hat die Gleichung

$$x^3 - 5x + 4 = 0$$

die rationale Wurzel 1 und deshalb sind die Radicanden in der Cardani'schen Wurzelform

$$x_1 = \sqrt[3]{-2 + \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{-17}{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{-17}{3}}}$$

vollständige Kuben und zwar von

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{17}{3}} \text{ und } \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{17}{3}}.$$

Ist überhaupt die gegebene Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

und x_1 die rationale Wurzel, so ist

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} = \tfrac{1}{2}x_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x_1^2 + \tfrac{1}{3}p}.$$

Man kann in ähnlichen Fällen leicht die Kubikwurzeln aus surdischen oder complexen Binomen ziehen. Dies Verfahren wird meist Bombelli zugeschrieben, findet sich aber schon bei Cardano im 25. Kap. des Buches: De regula Aliza. Will man die Kubikwurzeln der Binome in Reihen verwandeln, so kann dies auch mittels des Binomialtheorems geschehen. Eine andere Methode die Wurzel mittels Integralcalcüls in unendliche Reihen zu verwandeln, ist von Colson*) angegeben worden. Nach dem Binomialtheorem**) ist für $a > b$

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1.2b^2}{3.6a^2} - \frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12a^4} + \cdots\right),$$

für $a < b$:

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$
$$= -2b^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\frac{a}{b} - \frac{1.2.5a^3}{3.6.9b^3} + \frac{1.2.5.8.11a^5}{3.6.9.12.15b^5} - \cdots\right).$$

Die Methode der Binomialreihen ist indess für numerische

---

*) Isaac Newton's Method of Fluxions; with a perpetual comment. by John Colson, p. 308.

**) Man vergl. Heis' Sammlung von Aufgaben § 92. Nr. 24; und Matthiessen, Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung § 92. Nr. 24; § 95 b Nr. 25 u. 29; § 101. Nr. 9; § 105. Nr. 25. Köln 1878.

Berechnungen unpraktisch, wenn a nicht mindestens gleich $3b$ oder b gleich $3a$ ist.

§ 133. Methode der Integration von Landen*).

Joh. Landen hat gezeigt, wie man durch Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung die algebraische Wurzelform einer kubischen Gleichung herstellt. Die Methode ist elegant und „ingeniös", wie Kästner sich ausdrückt. Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 - px + q = 0.$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$x = \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{1^2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Man bilde die Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -(3x^2 - p),$$
$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -6x,$$
$$\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = -6.$$

Die letzte Gleichung multiplicire man mit $\partial^2 q$, also

$$\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}\partial^2 q = -6\partial^2 q$$

und integrire. Man erhält

$$-6\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)^2 + C.$$

Die Constante C wird gefunden durch die Erwägung, dass für $x = 0$, $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ und $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$ werden.

Demgemäss ist die Constante gleich $-6p$ und das vollständige Integral

$$-12\frac{\partial q}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)^2 - 12p.$$

---

*) Joh. Landen, Mathematical lucubrations. London 1755. Kaestner, Index praelectionum 1757. Prop. IV. pg. 12.

Hieraus folgt nun

$$2\sqrt{3} = \frac{-\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}{\sqrt{p - \frac{\partial q}{\partial x}}}.$$

Man multiplicire beiderseits mit ∂q und integrire abermals, wodurch man erhält

$$3\sqrt{3} \cdot q = +\sqrt{p - \frac{\partial q}{\partial x}} \cdot \left(2p + \frac{\partial q}{\partial x}\right) + C_1.$$

Die Constante C_1 wird gefunden durch die Erwägung, dass für $x = 0$, $q = 0$ und $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ wird. Die Constante C_1 ist also gleich Null. Erhebt man die Gleichung beiderseits zum Quadrat, so resultirt

$$4p^3 - 27q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^3 + 3p\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + 3p\right]\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2.$$

Aus der ersten der drei Differenzialgleichungen folgt aber

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -(3x^2 - p),$$

und wenn man diesen Werth in die eckige Klammer einsetzt:

$$27q^2 - 4p^3 = [3x^2 - 4p]\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2.$$

Es ist folglich

$$\frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - \frac{4}{3}p}} = -\frac{\partial q}{3\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$x + \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}p} = \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-4q + 4\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}} = \sqrt[3]{1} \cdot u.$$

Transponirt man nun wie folgt:

$$x = \sqrt[3]{1} \cdot u - \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}p}$$

und erhebt beiderseits zum Quadrat, so erhält man

$$\sqrt{x^2 - \frac{4}{3}p} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1} \cdot u - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{\sqrt[3]{1} \cdot u}.$$

Wegen der Relation

$$\sqrt[3]{x^2 - \frac{4}{3}p} = \sqrt[3]{1} \cdot u - x$$

ist weiter

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{1}\cdot u - \frac{2}{3}\cdot\frac{p}{\sqrt[3]{1}\,.\,u} = \sqrt[3]{1}\cdot u - x,$$

folglich

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1}\cdot u + \frac{2}{3}\sqrt[3]{1}^2\cdot\frac{p}{u}.$$

Setzt man an die Stelle von u wieder seinen ursprünglichen Werth, so erhält man die allgemeine Wurzelform

$$x = \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}} + \sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}}.$$

Die vorhergehende Methode führte Colson zur Reduction der algebraischen Auflösung auf das Problem von der trisectio anguli.

Betrachten wir die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - \frac{4}{3}p}} = -\frac{\partial q}{3\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}},$$

so lässt dieselbe sich auch schreiben

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\frac{4}{3}p - x^2}} = -\frac{\partial q}{3\sqrt{\frac{4}{27}p^3 - q^2}}.$$

Dies sind offenbar die Differenziale der Bögen zweier Winkel, nämlich von

$$\text{arc sin}\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{3}\text{ arc sin}\frac{-q\,.\,3\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}.$$

Man setze nun

$$\frac{-q\,.\,3\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}} = \alpha$$

und den kleinsten Winkel, welcher dann sin $(=\alpha)$ entspricht, gleich 3φ, so ist

$$\text{arc sin}\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{p}} = \varphi$$

und

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\sin\varphi.$$

Die Auflösung der Gleichungen mittels goniometrischer Functionen wird ausführlicher im sechsten Abschnitt vorgetragen.

§ 134. Eine Methode der Behandlung des irreductiblen Falls*).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Man gehe von der Bemerkung aus, dass eine jede reelle Grösse dargestellt werden kann entweder in der reellen Form $f(x)$ oder auch in der complexen Form

$$\frac{1}{2} f(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2} f(x - y\sqrt{-1}),$$

wo x und y reelle Werthe haben, y auch gleich Null sein kann.

Man multiplicire die gegebene Gleichung mit 8 und substituire die identische Gleichung

$$2x = (x + y\sqrt{-1}) + \frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}}.$$

Dies gibt

$$0 = (x + y\sqrt{-1})^3 + 3(x^2 + y^2)(x + y\sqrt{-1}) + 3\frac{(x^2 + y^2)^2}{x + y\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{(x^2 + y^2)^3}{(x + y\sqrt{-1})^3} + 4p(x + y\sqrt{-1}) + 4p\frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}} + 8q.$$

Unter der Annahme

$$3(x^2 + y^2) + 4p = 0$$

erhält man eine Resolvente vom sechsten Grade, welche sich auf eine quadratische reduciren lässt, nämlich

$$(x + y\sqrt{-1})^6 + 8q(x + y\sqrt{-1})^3 - \frac{64}{27}p^3 = 0.$$

Man findet hieraus

$$x + y\sqrt{-1} = 2\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = 2\sqrt[3]{1}\,.\,u.$$

Wenn also die Discriminante $27q^2 + 4p^3$ negativ ist, so ist y reell, während x den reellen Theil der Function u bezeichnet; u hat also einen complexen Werth. Es ist nun weiter

$$x - y\sqrt{-1} = \frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}} = \frac{-\frac{4}{3}p}{2\sqrt[3]{1}\,.\,u}$$

$$= 2\sqrt[3]{1}^{\,2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = 2\sqrt[3]{1}^{\,2}.v.$$

---

*) Matthiessen, Die algebraischen Methoden etc. D. 27. Leipzig 1866. —— Schlüssel zu Heis' Sammlung. II. Bd. S. 321.
Man vergleiche auch III. Abschn., III. Die irreductiblen Gleichungen. § 67.

Um x, d. i. den Wurzelwerth der vorgelegten Gleichung, zu erhalten, kann man entweder die halbe Summe von $x + y\sqrt{-1}$ und $x - y\sqrt{-1}$ nehmen oder auch mittels des Theorems

$$\text{Real } f(x + y\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2} f(x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2} f(x - y\sqrt{-1})$$

aus der complexen Function u den reellen Werth ausscheiden, welcher gleich x sein wird. Es ist demnach

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}};$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$$

setzt,

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} \\ &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Da $\sqrt[3]{1}$ die drei verschiedenen Werthe

$$1,\ J_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},\ J_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

besitzt, so ist

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \text{ Real}\left[\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}\right] \\ &= J_1\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + J_2\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3}; \\ x_3 &= 2 \text{ Real}\left[\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}\right] \\ &= J_2\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + J_1\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = -\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Die Coefficienten der vorgelegten Gleichungen sind demnach

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{-3} - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{-3} = 0,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -\tfrac{3}{4}(x_1^2 + y_1^2) = p,$$

$$x_1 x_2 x_3 = \tfrac{1}{4}x_1(x_1^2 - 3y_1^2) = -q.$$

§ 135. Methode von Hulbe*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 .$$

Man nehme an die neuen Unbekannten z und u dergestalt, dass

$$z^2 - xz + u = 0$$

ist und bilde hiervon die Gleichung der Wurzelkuben (cf. § 25). Dieselbe ist

$$z^6 - (x^3 - 3ux)z^3 + u^3 = 0 .$$

Nimmt man nun an es sei $u = -\frac{1}{3}p$, so wird

$$x^3 - 3ux = x^3 + px = -q$$

und

$$z^6 + qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0 .$$

Weil ferner x der Coefficient des zweiten Gliedes der substituirten Function ist, so ist

$$x = z_1 + z_2 ,$$

woraus sich also die Cardani'sche Formel ergibt.

Die Art, wie Hulbe zu dieser hübschen Methode geführt wurde, mag in folgender Schlussfolgerung beruhen. Die Substituirte des Vieta ist ganz dieselbe und führt ebenfalls zu jener bikubischen Resolvente. Diese ist aber, wie man leicht sieht, die Gleichung der Wurzelkuben einer quadratischen Gleichung

$$z^2 - mz + n = 0 .$$

Bildet man die Gleichung der Wurzelkuben, so resultirt

$$z^6 - (m^3 - 3mn)z^3 + n^3 = 0 ,$$

also

$$m^3 - 3mn = -q , \quad n^3 = -\frac{1}{27}p^3 , \quad n = -\frac{1}{3}p .$$

Daraus folgt ohne Weiteres

$$m^3 + pm + q = 0$$

und $m = x$.

*) Dieser leider in Vergessenheit gerathene Algebrist hat eine Menge scharfsinniger Auflösungen der kubischen und biquadratischen Gleichungen erfunden. Hulbe, Secretär der Königl. Lotterie in Berlin, schrieb: Analytische Entdeckungen in der Verwandlungs- und Auflösungskunst der höheren Gleichungen. Berlin und Stralsund 1794. Die vorstehende Methode ist S. 134 beschrieben.

§ 136. Methode von Tschirnhausen*).

Eine Methode, welche die Möglichkeit ihrer Anwendung zur directen Auflösung der Gleichungen aller Grade zu versprechen schien, verdanken wir Tschirnhausen. Ihr Princip ist bereits im allgemeinen Theile auseinandergesetzt worden. Dasselbe stützt sich auf die Voraussetzung, dass, so wie nach Vieta's Verfahren das zweite Glied einer Gleichung durch die Substitution ersten Grades

$$x + a + y = 0$$

zum Verschwinden gebracht werden kann, sich auch m Glieder werden fortschaffen lassen durch eine Substitution m^{ten} Grades z. B.

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \cdots + sv + t + y = 0,$$

wo p, q u. s. w. neue Bestimmungsgrössen bezeichnen.

Die substituirte Function ist in Bezug auf x von niedrigerem Grade als die gegebene Gleichung. Durch Elimination von x aus beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung in y, welche von demselben Grade ist, als die gegebene. In der Resultante $Y = 0$ kann man dann beliebig viele Glieder gleich Null setzen, so dass sie dadurch direct lösbar wird. Tschirnhausen hat seine Methode nur auf die unvollständige kubische Gleichung angewendet; Lagrange und Bring haben dieselbe auch zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen benutzt, sowie auch damit die der Gleichungen vom fünften Grade versucht.

Die vorgelegte Gleichung sei wiederum

$$x^3 + px + q = 0$$

und die substituirte Function die quadratische

$$x^2 + vx + w = y,$$

Mittels dieser Substitution lässt sich nun die gegebene Gleichung auf eine binomische von der Form

$$y^3 = C$$

reduciren. Setzt man einstweilen u an die Stelle von $w - y$, so erhält man durch die Elimination von x mittels Anwendung der

*) Tschirnhausen, Graf von (1651—1708), Herr von Kieslingswalde und Stoltzenberg in der Oberlausitz. Auswärt. Mitgl. der Pariser Acad. seit 1682. Schrieb: Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione per D. T. Act. Erudit. II. 204. Lipsiae 1683. Die Theorie dieser Methode ist entwickelt in § 50, und die auf die Methode bezügliche Litteratur in § 37 zu finden.

Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Polynome die Relation

$$u(p+v^2-u)^2-(q+vu)\,[v\,(p+v^2-u)-(q+vu)]=0,$$

und der letzte Divisor ist

$$(p+v^2-u)x+(q+vu).$$

Ordnet man die Gleichung nach Potenzen von u, so wird

$$u^3-2pu^2+(p^2+pv^2+3qv)u+q(q-pv-v^3)=0,$$

und wenn man an die Stelle von u wiederum $w-y$ setzt,

$$\begin{aligned}y^3-(3w-2p)y^2+(3w^2-4pw+p^2+pv^2+3qv)y\\-[w^3-2pw^2+(p^2+pv^2+3qv)w+q(q-pv-v^3)]=0.\end{aligned}$$

Setzt man die beiden mittleren Glieder gleich Null, so liefern diese Relationen die Werthe von v und w, nämlich

$$w=\frac{2}{3}p,\quad v=-\frac{3}{p}\left(\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\right).$$

Demnach ist

$$y^3=C=\frac{pv}{3}\left(v+\frac{1}{3}\frac{p}{v}\right)^3$$

und

$$y_1=\sqrt[3]{C},\quad y_2=J_1\sqrt[3]{C},\quad y_3=J_2\sqrt[3]{C}.$$

Da der letzte Divisor der beiden Polynome gleich Null gesetzt, einen Wurzelwerth der vorgelegten Gleichung liefern muss, so ist allgemein

$$x=\frac{q+v\,(w-y)}{p+v^2-(w-y)}.$$

Setzt man die drei Werthe von y nach einander in diesen Ausdruck ein, so erhält man die drei verlangten Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung.

Dieselben lassen sich mit leichter Mühe auf die Cardani'schen Wurzelformen reduciren. Man erhält nämlich zunächst aus der rein kubischen in y

$$y=\sqrt[3]{1}\left(v+\frac{1}{3}\frac{p}{v}\right)\sqrt{\frac{pv}{3}}=\sqrt[3]{1}\left(v+\frac{1}{3}\frac{p}{v}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Führt man diesen Werth von y und den für w erhaltenen Werth in die Gleichung des letzten oder gemeinschaftlichen Divisors der Polynome ein, so resultirt

$$x=\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\frac{pv}{3}}-\frac{\sqrt[3]{1}^{\,2}}{3}p:\sqrt[3]{\frac{pv}{3}}.$$

Durch Einsetzung des Werthes von v erhält man dann die Cardani'sche Wurzelform.

Die Gleichung in v (Resolvente) ist quadratisch und hat also zwei Wurzelwerthe, welche der Auflösung genügen. Um zu sehen, warum v zwei verschiedene Werthe haben kann, müssen wir untersuchen, von welcher Art die Function der Wurzeln x_1, x_2, x_3 ist. Demgemäss eliminiren wir w und $y = \sqrt[3]{1}\,.\,\sqrt[3]{C}$ aus den drei Gleichungen:

$$x_1^2 + vx_1 + w - \sqrt[3]{C} = 0\,,$$
$$x_2^2 + vx_2 + w - J_1\sqrt[3]{C} = 0\,,$$
$$x_3^2 + vx_3 + w - J_2\sqrt[3]{C} = 0\,.$$

Die Elimination wird bewerkstelligt dadurch dass man sie addirt, nachdem man die zweite mit J_1, die dritte mit J_2 multiplicirt hat. Es resultirt

$$v_1 = -\frac{x_1^2 + J_1 x_2^2 + J_2 x_3^2}{x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3}\,.$$

Diese Wurzelfunction hat nur zwei Werthe, denselben und den zweiten

$$v_2 = -\frac{x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_1 x_3^2}{x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3}\,.$$

Alle andern Permutationen gehen hervor aus diesen beiden, wenn man Zähler und Nenner nach einander mit J_1 und J_2 multiplicirt; so hat v nur zwei verschiedene Werthe. Was w anbetrifft, so erhält man durch Addition jener drei Gleichungen, wegen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,

$$w = -\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{2}{3}p\,,$$

wie wir bereits oben fanden.

Wenn man die beiden Ausdrücke für v_1 und v_2 auf gleiche Benennung bringt, so wird der Nenner gleich

$$(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$+ (J_1 + J_2)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = S_2 - p = -3p\,.$$

Ebenso findet man

$$(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)(x_1^2 + J_1x_2^2 + J_2x_3^2)$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + J_1(x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2) + J_2(x_1^2x_2 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3).$$

Wenn wir aber $z_1 = \frac{1}{3}(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)$ zur dritten Potenz erheben, so erhalten wir

$$27 z_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3 J_1 (x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2)$$
$$+ 3 J_2 (x_1^2 x_2 + x_3^2 x_1 + x_2^2 x_3) + 6 x_1 x_2 x_3 .$$

Demgemäss ist

$$J_1 (x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2) + J_2 (x_1^2 x_2 + x_3^2 x_1 + x_2^2 x_3)$$
$$= \frac{1}{3} (27 z_2^3 - S_3 - 6 x_1 x_2 x_3) = 9 z_2^3 + 2q - \frac{1}{3} S_3 ,$$

und folglich

$$v_1 = - \frac{S_3 + 9 z_2^3 + 2q - \frac{1}{3} S_3}{-3p} = \frac{3 z_2^3}{p} ,$$
$$v_2 = \frac{3 z_1^3}{p} ,$$

woraus wieder die Cardani'sche Formel hervorgeht.

§ 137. Methode von Euler*).

Aus der Bemerkung, dass durch die Substitutionen

$$x = \sqrt[2]{v} ,$$
$$x = \sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2} ,$$
$$x = \sqrt[4]{v_1} + \sqrt[4]{v_2} + \sqrt[4]{v_3} ,$$

eine Auflösung der reducirten Gleichungen 2^{ten}, 3^{ten} und 4^{ten} Grades liefern, glaubte Euler irriger Weise schliessen zu dürfen, dass es gelingen werde, alle um das zweite Glied reducirten Gleichungen höheren Grades aufzulösen, wenn gesetzt werde

$$x = \sqrt[n]{v_1} + \sqrt[n]{} + \sqrt[n]{v_3} + \cdots + \sqrt[n]{v_{n-1}} ,$$

wo v die Wurzel einer Resolvente von nächst niedrigerem Grade bezeichnet. Da er hiermit bei Gleichungen von höheren als dem 4^{ten} Grade nichts ausrichtete, corrigirte Euler

$$x = z_1 \sqrt[n]{v} + z_2 \sqrt[n]{v}^{\,2} + z_3 \sqrt[n]{v}^{\,3} + \cdots ,$$

worin dem Werthe $\sqrt[n]{v}$ nacheinander zu unterstellen sind die Grössen

$$1 . \sqrt[n]{v} , \quad \alpha \sqrt[n]{v} , \quad \alpha^2 \sqrt[n]{v} , \cdots \alpha^{n-1} \sqrt[n]{v} ,$$

wo α irgend eine der complexen n^{ten} Wurzeln der Einheit bedeutet.

---

*) De resolutione aequationum cujusvis gradus. Nov. Comm. Acad. Petrop. T. IX. 1764. Man vergl. Blomstrand, De methodis praecipuis etc. p. 36; ferner oben § 37.

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Wir setzen der Kürze wegen $\sqrt[n]{v} = y$ und substituiren

$$x = z_1 y + z_2 y^2, \quad y^3 - v = 0.$$

Die vorgelegte Gleichung geht dadurch über in

$$x^3 - 3 z_1 z_2 v x - (z_1{}^3 v + z_2{}^3 v^2) = 0.$$

Aus der Vergleichung dieser abgeleiteten Gleichung mit der gegebenen folgen die Bestimmungsgleichungen für z_1, z_2 und v, nämlich

$$3 z_1 z_2 v = -p, \quad z_1{}^3 v + z_2{}^3 v^2 = -q.$$

Da diese beiden Gleichungen drei Unbestimmte enthalten, so ist eine willkürlich. Setzt man $z_1 = 1$, so wird $z_2 = -p : 3v$ und die Resolvente ist

$$v^2 + qv - \frac{1}{27} p^3 = 0.$$

Es ist nun

$$x = y - \frac{p y^2}{3v} = y - \frac{p}{3y}.$$

Diese stimmt mit der Cardani'schen Wurzelform überein und es sind die Wurzelwerthe

$$x_1 = p - \frac{p}{3y}, \quad y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}},$$

$$x_2 = \alpha y - \frac{p}{3 \alpha y} = J_1 y - J_2 \frac{p}{3y},$$

$$x_3 = \alpha^2 y - \frac{p}{3 \alpha^2 y} = J_2 y - J_1 \frac{p}{3y}.$$

§ 138. Methode von Bézout*).

Zur Auflösung der reducirten Gleichungen empfiehlt Bézout in seinem Memoire als erste Methode y zu eliminiren aus den Gleichungen

$$y^n - 1 = 0$$

und

$$x = z_1 y + z_2 y^2 + z_3 y^3 + \cdots + z_{n-1} y^{n-1}.$$

---

*) Bézout, Mém. sur la résolution générale des équations de tous les degrés. Mém. Par. pour l'année 1765. Paris 1768.

Man vergl. Blomstrand, De meth. praec. pg. 42.

Die Resultante werde mit der gegebenen Gleichung verglichen; dies führt zu einer Anzahl von Bestimmungsgleichungen der unbestimmten Coefficienten z_1, z_2, u. s. w. Diese Methode unterscheidet sich von der vorhergehenden nur in ihrer Entwicklung, indem nämlich in jener eine Resolvente in v oder y gesucht und eine der unbestimmten Grössen willkürlich angenommen wird, wogegen Bézout sofort $v = 1$ setzt.

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

Man substituire

$$x = z_1 y + z_2 y^2\,, \quad y^3 - 1 = 0\,.$$

Wird die erste nach einander mit y und y^2 multiplicirt, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x - z_1 y - z_2 y^2 &= 0\,, \\ yx - z_1 y^2 - z_2 &= 0\,, \\ y^2 x - z_1 - z_2 y &= 0\,. \end{aligned}$$

Betrachtet man y und y^2 als zwei verschiedene lineare Grössen und eliminirt y, so erhält man

$$x^3 - 3 z_1 z_2 x - (z_1{}^3 + z_2{}^3) = 0\,,$$

und wenn man die Vergleichung mit der vorgelegten Gleichung vornimmt, erhält man die Resolvente

$$z^6 + q z^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0\,.$$

Die drei Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung sind dem Princip der Methode gemäss

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 z_1 + y_1 z_2\,, \\ x_2 &= y_2 z_1 + y_3 z_2\,, \\ x_3 &= y_3 z_1 + y_2 z_2\,, \end{aligned}$$

wo

$$y_1 = 1\,, \quad y_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = J_1\,,$$

$$y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = J_2$$

zu setzen ist.

Es möge nun noch untersucht werden, wie die Wurzeln der bikubischen Resolvente von den Wurzeln der vorgelegten Gleichung abhängen. Zu diesem Zwecke multipliciren wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 \, , \\ x_2 &= J_1 z_1 + J_2 z_2 \, , \\ x_3 &= J_2 z_1 + J_1 z_2 \, , \end{aligned}$$

einmal der Reihe nach mit 1, J_2, J_1 und einmal mit 1, J_1, J_2. Addiren wir dieselben, so resultirt

$$z_1 = \frac{1}{3}(x_1 + J_1 x_3 + J_2 x_2)$$

und

$$z_2 = \frac{1}{3}(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_2) \, .$$

Daraus folgt

$$J_1 z_1 = \frac{1}{3}(x_2 + J_1 x_1 + J_2 x_3) \, ,$$

$$J_2 z_1 = \frac{1}{3}(x_3 + J_1 x_2 + J_2 x_1) \, ,$$

und

$$J_1 z_2 = \frac{1}{3}(x_3 + J_1 x_1 + J_2 x_2) \, ,$$

$$J_2 z_2 = \frac{1}{3}(x_2 + J_1 x_3 + J_2 x_1) \, .$$

Hieraus geht hervor, dass z eine solche Function der Wurzelwerthe ist, dass durch ihre Bestimmung die Wurzeln leicht gefunden werden und zwar durch Auflösung der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \, , \\ x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3 &= 3 z_1 \, , \\ x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3 &= 3 z_2 \, . \end{aligned}$$

Ferner ist z von der Beschaffenheit, dass diese Grösse, obgleich sie sechs Werthe hat, nur von der Auflösung einer quadratischen und rein kubischen Gleichung abhängig ist, weil diese Werthe so mit einander zusammenhängen, dass, wenn einer gleich z_1 ist, die andern beiden $J_1 z_1$ und $J_2 z_1$ sind. Dass aber die Resolvente in z vom sechsten Grade sein muss, folgt daraus, dass z als eine Function der Coefficienten und also symmetrischer Functionen der Wurzeln, so viele Werthe haben muss, als drei Elemente permutirt werden können, also 1 . 2 . 3 oder 6 Werthe.

§ 139. Methode von Mossbrugger*).

Diese Methode ist, genau genommen, nur eine Illustration der Bézout'schen. Gegeben sei die Gleichung $x^3 + px + q = 0$. Sind y_1, y_2 und y_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$y^3 + 1 = 0$$

und

$$z^6 + qz^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0,$$

so ist

$$x_1 = y_1 z_1 + y_1 z_2, \quad x_2 = y_2 z_1 + y_3 z_2, \quad x_3 = y_3 z_1 + y_2 z_2,$$

wo

$$z_1 \text{ und } z_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}}$$

zu setzen sind.

Um die Wurzelformen zu verificiren, ist nachzuweisen, dass sie den vorgelegten Gleichungen genügen. Zunächst ist

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

weil

$$(y_1 + y_2 + y_3)(z_1 + z_2) = 0.$$

Ferner findet man

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3 z_1 z_2 = p.$$
$$x_1 x_2 x_3 = z_1^3 + z_2^3 = -q.$$

Die Resultante ist mit der von Vieta übereinstimmend und die drei Wurzelwerthe

$$x_1 = -(z_1 + z_2),$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\sqrt{-3},$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\sqrt{-3}.$$

§ 140. Aeltere Methode von Bézout**).

Dieselbe besteht ebenso wie die spätere in § 138 entwickelte Methode darin, dass eine Gleichung in x vom selben Grade wie

*) Grunert's Arch. XXVIII. S. 219.

**) Mém. sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés, qui admettent une solution algébrique. Mém. Par. année 1762. Paris 1764. Man vergl. Blomstrand, de meth. praec. p. 39.

die gegebene erhalten wird durch Elimination von y aus der bimischen Gleichung $y^n + v = 0$ und einer andern Gleichung zwischen x und y.

Um die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

in derselben Form mit unbestimmten Coefficienten zu erhalten, wählt Bézout die Substitutionen

$$\frac{x + z_1}{x + z_2} = y\,, \quad y^3 + v = 0\,.$$

Aus beiden folgt ohne Weiteres

$$\left(\frac{x + z_1}{x + z_2}\right)^3 + v = 0\,.$$

Durch Entwicklung dieser Gleichung erhält man

$$x^3 + \frac{3(z_1 + z_2 v)}{1 + v} x^2 + \frac{3(z_1{}^2 + z_2{}^2 v)}{1 + v} x + \frac{z_1{}^3 + z_2{}^3 v}{1 + v} = 0\,.$$

Vergleicht man diese mit der vorgelegten Gleichung, so erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$3\frac{z_1 + z_2 v}{1 + v} = 0\,, \quad 3\frac{z_1{}^2 + z_2{}^2 v}{1 + v} = p\,, \quad \frac{z_1{}^3 + z_2{}^3 v}{1 + v} = q\,.$$

Daraus folgt weiter

$$v = -\frac{z_1}{z_2}\,, \quad 1 + v = \frac{z_2 - z_1}{z_2}\,.$$

Setzt man diese Werthe in die beiden andern Gleichungen ein, so erhält man

$$3z_1 z_2 = -p\,, \quad z_1 z_2(z_1 + z_2) = -q\,, \quad z_1 + z_2 = 3q : p\,.$$

Es sind demnach z_1 und z_2 die Wurzeln der Resolvente

$$z^2 - \frac{3q}{p} z - \frac{1}{3} p = 0\,.$$

Die gesuchten Wurzeln sind nun

$$x_1 = \frac{z_2 y - z_1}{1 - y} = \frac{z_2 \sqrt[3]{z_1} - z_1 \sqrt[3]{z_2}}{\sqrt[3]{z_2} - \sqrt[3]{z_1}} = \sqrt[3]{z_1{}^2 z_2} + \sqrt[3]{z_1 z_2{}^2}\,;$$

$$x_2 = J_1 \sqrt[3]{z_1{}^2 z_2} + J_2 \sqrt[3]{z_1 z_2{}^2}\,; \quad x_3 = J_2 \sqrt[3]{z_1{}^2 z_2} + J_1 \sqrt[3]{z_1 z_2{}^2}\,.$$

Geht man von der Formel

$$x = \sqrt[3]{z_1{}^2 z_2} + \sqrt[3]{z_1 z_2{}^2}$$

aus, so erhält man die Resolvente leicht wieder. Bildet man nämlich den Kubus, so erhält man

$$x^3 - 3z_1z_2x - z_1z_2(z_1 + z_2) = 0\,,$$

also

$$z_1z_2 = -\frac{1}{3}p\,, \quad z_1 + z_2 = 3q : p\,,$$

und

$$z^2 - 3\frac{q}{p}z - \frac{1}{3}p = 0\,.$$

Die Wurzelwerthe dieser Resolvente sind

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \frac{3}{p}\left[\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right].$$

Da nun

$$x = \sqrt[3]{z_1z_2}\,\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}p}\,\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right)$$

ist, so ergibt sich daraus wieder die Cardani'sche Formel.

Die vorstehende Methode lässt sich auch mit Vortheil auf die Auflösung der vollständigen Gleichung anwenden. Es liegt derselben das von allen eleganteste Princip zu Grunde, dessen Tragweite von Bézout noch nicht erkannt wurde. Wir werden später zeigen, dass das Bézout'sche Princip sich auf die Auflösungen aller vollständigen Gleichungen der ersten vier Grade anwenden lässt und dass es das alleinige ist, mittels dessen die Wurzeln auf eine symmetrische Form gebracht werden*).

Das Princip der Bézout'schen Methode lässt sich noch von einer andern Seite beleuchten. Zu dem Ende suchen wir z_1 und z_2 zu bestimmen aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + (x_1 + z_2)\sqrt[3]{v} + z_1 &= 0\,, \\ x_2 + (x_2 + z_2)J_1\sqrt[3]{v} + z_1 &= 0\,, \\ x_3 + (x_3 + z_2)J_2\sqrt[3]{v} + z_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Multipliciren wir die zweite mit J_1, die dritte mit J_2 und addiren alle drei Gleichungen, so erhalten wir

$$(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3) + (x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)\sqrt[3]{v} = 0\,;$$

und wenn wir die drei Gleichungen ohne Weiteres addiren, weil der erste Term verschwindet,

$$(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)\sqrt[3]{v} + 3z_1 = 0\,.$$

*) Man vergl. § 84 und § 101.

Daraus folgt

$$z_1 = \frac{(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)^2}{3(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3)},$$

und wenn man die zweite mit J_2, die dritte mit J_1 multiplicirt,

$$z_2 = \frac{(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3)^2}{3(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)}.$$

Weil nun der eine Werth aus dem andern abgeleitet werden kann durch Vertauschung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, so müssen sie sich aus einer und derselben Gleichung berechnen lassen, welche quadratisch sein wird, da kein neuer Werth durch Vertauschung sich ergibt.

Bringen wir die Werthe von z_1 und z_2 auf gleiche Benennung, so wird

$$z_1 = \frac{(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)^3}{-9p} = \frac{-3t_2}{p},$$

und ebenso wegen

$$(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3) = -3p,$$

$$z_2 = -\frac{3t_1}{p},$$

wo t_1 und t_2 die beiden Wurzeln der Resolvente

$$t^2 + qt - \frac{1}{27} p^3 = 0$$

sind. Setzen wir die Werthe ein in

$$\frac{x + z_1}{x + z_2} = \sqrt[3]{-v} = \sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}},$$

so erhalten wir

$$x = \frac{\frac{3}{p}\left(t_2 \sqrt[3]{t_1} - t_1 \sqrt[3]{t_2}\right)}{\sqrt[3]{t_1} - \sqrt[3]{t_2}} = -\frac{3}{p} \sqrt[3]{t_1 t_2} \left(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}\right).$$

Da aber

$$t_1 t_2 = -\frac{1}{27} p^3$$

ist, so erhält man einfach

$$x = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2},$$

woraus wiederum der Zusammenhang der Methode mit der Cardanischen hervortritt.

Jourdain*) geht aus von der Substitution

$$\left(\frac{x+z_1}{x+z_2}\right)^3 - \frac{z_1}{z_2} = 0 .$$

Durch Entwicklung derselben gelangt man auf einfacherem Wege zu der Resolvente und der Wurzelform von Bézout.

§ 141. Methode von Guglielmini**).

Dieselbe erfordert ebenfalls die Wegschaffung des zweiten Gliedes der vollständigen kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Angenommen es sei

$$x - (u + z) = 0 , \quad \text{oder} \quad x - z = u .$$

Erhebt man die zweite Gleichung zur dritten Potenz, so wird

$$x^3 - 3zx^2 + 3z^2x - (z^3 + u^3) = 0 .$$

Man nehme an, es sei

$$-3zx^2 + 3z^2x = ax^2 + bx ,$$

also

$$x = \frac{3z^2 - b}{3z + a} = u + z .$$

Weil nun $c = -(z^3 + u^3)$ ist, so folgt daraus zunächst

$$u = -\sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{c + z^3} ,$$

$$x = u + z = z - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{c + z^3}$$

und

$$\frac{z(3z + a) - 3z^2 + b}{3z + a} = \sqrt[3]{c + z^3} .$$

Hieraus folgt die Resolvente

$$(az + b)^3 - (z^3 + c)(3z + a)^3 ,$$

oder entwickelt die bikubische Resolvente

$$z^6 + az^5 + \frac{1}{3}a^2z^4 + cz^3 + a\left(c - \frac{1}{9}ab\right)z^2 + \frac{1}{3}a\left(ac - \frac{1}{3}b^2\right)z$$
$$+ \frac{1}{27}(a^3c - b^3) = 0 .$$

Bemerkenswerth ist, dass in den drei letzten Gliedern die Reducenten (7), (8) und (11) (§ 79) als Factoren auftreten. Dieselbe

*) Journ. math. XXIV. p. 205. Paris 1859.

**) Guglielmini, Equazioni di terzo grado. Bologna 1809.

wird lösbar, wenn entweder $a = 0$ oder $a^2 - 3b = 0$ ist, wenn also die Gleichung von der Form $x^3 + px + q = 0$ ist oder sich auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reduciren lässt.

§ 142. Methode von Lockhart*).

Diese Methode besteht in der Reduction der gemischten kubischen Gleichung auf eine rein kubische. Gegeben sei

$$x^3 + px + q = 0 .$$

Man substituire

$$x - \frac{3uz^2 - 2pz - 3q}{3z^2 + 3uz + p} = 0 ,$$

oder auch, indem $v : z$ an die Stelle von u gesetzt wird,

$$x - \frac{(3v - 2p)z - 3q}{3z^2 + (3v + p)} = 0 .$$

Man erhält auf diese Weise die unvollständige kubische Gleichung

$$u^3 - \left(\frac{1}{3}p^2 - 3qz - pz^2\right)\frac{u}{z^2}$$
$$- \left[\left(q^2 + \frac{2}{27}p^3\right) + pqz + \frac{2}{3}p^2z^2 - qz^3\right]\frac{1}{z^3} = 0 .$$

Setzt man den Coefficienten des zweiten Gliedes gleich Null, so erhält man eine rein kubische Gleichung in u und die Resolvente

$$pz^2 + 3qz - \frac{1}{3}p^2 = 0 .$$

Demnach ist

$$u = \sqrt[3]{1} \cdot \frac{1}{z}\left(q^2 + \frac{4}{27}p^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{3z^2}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sqrt[3]{1} \cdot \frac{1}{z}\left(\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)^{\frac{1}{3}}(z^3 + pz + q)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1} \cdot w ,$$

und

$$u_1 = w , \quad u_2 = J_1 w , \quad u_3 = J_2 w ,$$

woraus sich die drei Wurzelwerthe der Gleichung berechnen lassen.

*) Resolution of cubic equations. Harlem 1825 and Oxford 1837.

§ 143. Die algebraischen Formen der vollständigen kubischen Gleichungen.

Nachdem wir in den vorangehenden Paragraphen die bekanntesten Methoden der Auflösung der unvollständigen kubischen Gleichungen entwickelt haben, gehen wir nunmehr über zur Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung von der gewöhnlichen Form

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

und der binären Cayley'schen Form

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0\,.$$

Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst diejenigen algebraischen Formen zusammen, welche für die Discussion der speciellen Methoden von besonderer Wichtigkeit sind.

1. Die variirten Gleichungen erster und zweiter Ordnung.

Substituirt man $x = x' + z$, wo z die Variation der Hauptgrösse x ist, so erhält man (§ 14) die variirte Gleichung der ersten Ordnung:

$$\begin{aligned} x'^3 + (3z + a)x'^2 + (3z^2 + 2az + b)x' + (z^3 + az^2 + bz + c) \\ = x'^3 + \frac{1}{2}f''(z)x'^2 + f'(z)x' + f(z) \\ = x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0\,. \end{aligned}$$

Setzt man $(x - z)^2 = x'$ und bildet also die Gleichungen der Wurzelquadrate der variirten Gleichung, so erhält man die Variirte der zweiten Ordnung (§ 49):

$$\begin{aligned} x'^3 - (\alpha^2 - 2\beta)x'^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x' - \gamma^2 \\ = x'^3 + \alpha_1 x'^2 + \beta_1 x' + \gamma_1 = 0\,, \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} -\alpha_1 &= (\alpha^2 - 2\beta) = 3z^2 + 2az + a^2 - 2b\,, \\ \beta_1 &= \beta^2 - 2\alpha\gamma = 3z^4 + 4az^3 + 2a^2z^2 + 2(ab - 3c)z + b^2 - 2ac\,, \\ -\gamma_1 &= \gamma^2 = (z^3 + az^2 + bz + c)^2 \end{aligned}$$

zu setzen ist.

2. Die Resolventen und die substituirten Functionen.

Die erstere Klasse von Formen sind bereits in § 81 b aufgezählt, die zweite in § 80. Es wird überflüssig sein, dieselben hier noch einmal zu wiederholen. Sie lassen sich sämmtlich auf die Normalform II zurückführen.

3. Die Reducenten.

Diese sind ebenfalls schon in § 79b tabellarisch zusammengestellt. Wir wollen zunächst die reducirten Formen der Gleichung aufzählen, welche die variirte Function annimmt, wenn ihre Reducenten verschwinden und sie dann geometrisch interpretiren.

Variirt man die gegebene Gleichung $f(x) = 0$, so wird dieselbe durch die betreffende Reducente folgendermassen reducirt:

(6) $\alpha^2 - 3\beta = 0\,, \qquad (x'^2 + m)^3 + n = 0\,;$

(7) $\alpha\beta - 9\gamma = 0\,,$

$$(m + n)(3x' + n)^3 - (m - n)(3x' - n)^3 = 0\,,$$

(8) $\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0\,, \qquad (mx' + n)^3 - p^3 x'^3 = 0\,,$

(9) I. $2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma = 0\,.$

$$\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right)(x'^2 + mx' + n) = 0\,,$$

(10) $\alpha^3 - 27\gamma = 0\,, \qquad \left(\sqrt[3]{x'} + m\right)^3 + n = 0\,,$

(11) $\alpha^3\gamma - \beta^3 = 0\,, \qquad \left(x' + \frac{\beta}{\alpha}\right)(x'^2 + mx' + n) = 0\,,$

(13) $\alpha_1{}^2 - 3\beta_1 = 0\,, \qquad (x' + m)^3 + n = 0\,,$

(14) $D_3 = 0\,, \qquad (x' + m)(x' + n)^2 = 0\,.$

Um die Reducenten zum Verschwinden zu bringen, sind nicht immer lineare Transformationen hinreichend. Die Ordnung der Transformation ist abhängig von der Natur der symmetrischen Function, in welche sich die Reducenten verwandeln lassen. Wir wollen jetzt in Kürze andeuten, welche Wurzelformen sich aus den angeführten reducirten Formen der Function ergeben.

a) Wenn $\alpha^2 - 3\beta = 0$ ist, also die Gleichung die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 x' + \gamma = 0$$

hat, so ist

$$x' = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha^3 - 27\gamma}\,.$$

b) Wenn $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ ist, also die Gleichung die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{9}\alpha\beta = 0$$

hat, so ist

$$(\alpha + \sqrt{3\beta})(3x' + \sqrt{3\beta})^3 - (\alpha - \sqrt{3\beta})(3x' - \sqrt{3\beta})^3 = 0$$

und

$$x' = \sqrt{\frac{1}{3}\beta}\,\frac{\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}{\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}.$$

c) Wenn $\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0$ ist, also die Gleichung die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{\beta^2}{3\alpha} = 0$$

hat, so ist

$$(\alpha x' + \beta)^3 - \alpha(\alpha^2 - 3\beta)x'^3 = 0$$

und

$$x' = \frac{\beta}{\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha(\alpha^2 - 3\beta)} - \alpha}.$$

d) Wenn $2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma = 0$ ist, also die Gleichung die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' - \frac{1}{27}(2\alpha^3 - 9\alpha\beta) = 0$$

hat, so ist

$$f(x') = \left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right)\left(x'^2 + \frac{2}{3}\alpha x' - \frac{1}{9}[2\alpha^2 - 9\beta]\right) = 0,$$

also

$$x_1' = -\frac{1}{3}\alpha, \quad x_2' \text{ und } x_3' = -\frac{1}{3}\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{3}(\alpha^2 - 3\beta)}.$$

e) Wenn $\alpha^3 - 27\gamma = 0$ ist, also die Gleichung die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{27}\alpha^3 = 0$$

hat, so ist

$$x' = -\frac{1}{27}\left(A - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{A^3 - 27C}\right),$$

wo

$$C = \frac{1}{3}\alpha, \quad A = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\alpha \pm \frac{3}{2}\sqrt{5\alpha^2 + 12\beta}}$$

zu setzen ist.

f) Wenn $\alpha^3\gamma - \beta^3 = 0$ ist, also die Gleichung die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{\beta^3}{\alpha^3} = 0$$

hat, so ist

$$\left(x' + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x'^2 + \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha}x' + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = 0,$$

also

$$x_1' = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_2' \text{ und } x_3' = \frac{-(\alpha^2 - \beta) \pm \sqrt{\alpha^4 - 2\alpha^2\beta - 3\beta^2}}{2\alpha}.$$

g) Wenn die Discriminante verschwindet, also

$$(2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma)^2 - 4(\alpha^2 - 3\beta)^3 = 0$$

wird, so kann dies geschehen entweder dadurch, dass beide Ausdrücke zusammen oder jeder für sich verschwindet. Im ersten Falle hat die Gleichung zwei, im dritten drei gleiche Wurzeln. Nehmen wir den ersten Fall an, so wird die Gleichung von der Form

$$(x' + m)(x' + n)^2 = 0,$$

nämlich

$$\left[x' + \frac{\alpha\beta - 9\gamma}{2(\alpha^2 - 3\beta)}\right]\left[x' + \frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 9\gamma}{(\alpha^2 - 3\beta)}\right]^2 = 0.$$

Im zweiten Falle sind alle Wurzeln einander gleich, woraus folgt

$$\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right)^3 = 0$$

und

$$x_1' = x_2' = x_3' = -\frac{1}{3}\alpha.$$

4. Geometrische Discussion der Reducenten.

Es sei allgemein

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = y.$$

Betrachtet man alsdann x als Abscisse, y als Ordinate einer ebenen Curve, so werden alle Werthe der Abscisse x, für welche die Ordinate y verschwindet, Wurzeln der Gleichung sein. Durch die lineare Transformation $x = x' + z$ können nun die Ordinaten parallel mit sich verschoben werden, so dass eine oder die andere der Reducenten verschwindet. Bei allen ist dies nicht möglich, man kann jedoch eine Variation zweiter Ordnung anwenden, indem man die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten bildet. Dabei wird also substituirt $(x - z)^2 = x'$. Eine solche Variation höherer Ordnung, im analytisch-geometrischen Sinne erfasst, würde offenbar bedeuten, dass die Curve ihren Charakter ändert, indem ihre Elemente sich strecken; eine Gerade würde beispielsweise in einen Kegelschnitt übergeführt werden. Durch diesen Transformationsprocess werden offenbar fremde Lösungen in das Problem hereingezogen, die von den wahren auszuscheiden sind. Wir wollen versuchen, die Reducenten von diesem geometrischen Standpuncte aus zu interpretiren.

(6). Wenn die quadratische Variante

$$V_2 = a^2 - 3b$$

verschwinden soll, so kann dies nicht durch eine lineare Transformation bewerkstelligt werden, wohl aber durch eine Variation zweiten Grades, wobei die Resolvente quadratisch wird. Setzt man nämlich $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet z aus der Function gänzlich, d. h. $\alpha^2 - 3\beta = a^2 - 3b$. Setzt man dagegen $(x - z)^2$ an die Stelle von x, so verschwindet die Variante V_2 der Variirten, wenn man annimmt

$$\begin{aligned}&[(x_1 - z)^2 - (x_2 - z)^2]^2 + [(x_2 - z)^2 - (x_3 - z)^2]^2\\ &+ [(x_3 - z)^2 - (x_1 - z)^2]^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2 - 2z)^2\\ &+ (x_2 - x_3)^2(x_2 + x_3 - 2z)^2 + (x_3 - x_1)^2(x_3 + x_1 - 2z)^2 = 0.\end{aligned}$$

Um die Resolvente exact d. h. in Coefficienten der Function $f(x)$ zu erhalten, entwickle man die Gleichung

$$\alpha_1{}^2 - 3\beta_1 = 0,$$

wo

$$\begin{aligned}&-\alpha_1 = \alpha^2 - 2\beta = 3z^2 + 2az + (a^2 - 2b),\\ &\beta_1 = \beta^2 - 2\alpha\gamma = 3z^4 + 4az^3 + 2a^2z^2 + 2(ab - 3c)z + b^2 - 2ac,\\ &-\gamma_1 = \gamma^2 = (z^3 + az^2 + bz + c)^2\end{aligned}$$

zu setzen ist. Man erhält dadurch die Resolvente IX (§ 81) nämlich

$$\begin{aligned}(a^2 - 3b)z^2 &+ \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c)z\\ &+ \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0.\end{aligned}$$

Durch die Reducente (6) wird das Coordinatensystem derartig verändert, dass die Kuben der Abweichungen der Wurzeln der Variirten von dem arithmetischen Mittel derselben einander gleich werden, d. h.

$$(x_1' - 2x_2' + x_3')^3 = (x_2' - 2x_3' + x_1')^3 = (x_3' - 2x_1' + x_2')^3.$$

Beispiel. Die vorgelegte Gleichung sei

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5.$$

Die Resolvente ist

$$3z^2 - 24z + 48\frac{1}{4} = 0,$$

also

$$z_1 \text{ und } z_2 = 4 \pm \frac{1}{6}\sqrt{-3}.$$

Wählt man die erste Variation z_1, so wird

$$(x_1 - z)^2 = x_1' = \frac{11}{12} + \frac{1}{3}\sqrt{-3},$$

$$(x_2 - z)^2 = x_2' = -\frac{1}{12},$$

$$(x_3 - z)^2 = x_3' = \frac{11}{12} - \frac{1}{3}\sqrt{-3}.$$

Das arithmetische Mittel dieser drei Wurzeln ist gleich $\frac{7}{12}$, und es ist allgemein

$$\left(x' - \frac{7}{12}\right)^3 = -\frac{8}{27}.$$

(7). Wenn die Function

$$\overline{V}_2 = ab - 9c$$

verschwinden soll, so kann dies durch eine lineare Transformation bewerkstelligt werden, und die Resolvente ist eine Gleichung vom ersten Grade, nämlich IVa (§ 81). Setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so wird die Function $\overline{V}_2$ der Variirten zum Verschwinden gebracht, wenn man annimmt

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2(x_3 - z) + (x_2 - x_3)^2(x_1 - z) + (x_3 - x_1)^2(x_2 - z)\\ = x_3(x_1 - x_2)^2 + x_1(x_2 - x_3)^2 + x_2(x_3 - x_1)^2\\ - 2[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3]z\\ = (ab - 9c) + 2(a^2 - 3b)z = 0.\end{aligned}$$

Durch die Reducente (7) wird das Coordinatensystem derartig verschoben, dass der Ausdruck

$$\left[\frac{x' + \sqrt{x_1'x_2'x_3'}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right)}}{x' - \sqrt{x_1'x_2'x_3'}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right)}}\right]^3$$

für alle drei Werthe von x' gleich wird.

(8). Wenn die quadratische Retrovariante

$$V'_{2,3} = b^2 - 3ac$$

durch Variation der Wurzeln zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt dazu eine lineare Transformation und die Resolvente ist die quadratische II (§ 81). Setzt man nämlich $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet die quadratische Retrovariante der Variirten, wenn man annimmt

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2(x_3 - z)^2 + (x_2 - x_3)^2(x_1 - z)^2 + (x_3 - x_1)^2(x_2 - z)^2 \\ = x_3{}^2(x_1 - x_2)^2 + x_1{}^2(x_2 - x_3)^2 + x_2{}^2(x_3 - x_1)^2 \\ - 2[x_3(x_1 - x_2)^2 + x_1(x_2 - x_3)^2 + x_2(x_3 - x_1)^2]z \\ + 2(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)z^2 .\end{aligned}$$

Diese Resolvente ist vom zweiten Grade und lässt sich leicht in Coefficienten der gegebenen Function $f(x)$ ausdrücken, entweder mit Hülfe der symmetrischen Function oder durch Einführung der Reducente in die Coefficienten der Variirten. Es ist gemäss

$$\begin{aligned}&(8)\quad x_3{}^2(x_1-x_2)^2+x_1{}^2(x_2-x_3)^2+x_2{}^2(x_3-x_1)^2 = 2(b^2-3ac), \\ &(7)\quad x_3(x_1-x_2)^2 + x_1(x_2-x_3)^2 + x_2(x_3-x_1)^2 = -(ab-9c), \\ &(6)\quad x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 = a^2 - 3b .\end{aligned}$$

Dies gibt also die quadratische Covariante II (§ 81)

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0 .$$

Durch die Reducente (8) wird das Coordinatensystem derartig verschoben, dass die Kuben der Abweichungen der reciproken Wurzelwerthe der Variirten von dem arithmetischen Mittel derselben gleich werden, d. h.

$$\left(\frac{1}{x_1'} - \frac{2}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right)^3 = \left(\frac{1}{x_2'} - \frac{2}{x_3'} + \frac{1}{x_1'}\right)^3 = \left(\frac{1}{x_3'} - \frac{2}{x_1'} + \frac{1}{x_2'}\right)^3 .$$

Beispiel. Gegeben sei $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$.

Die Wurzeln sind $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ und die Resolvente der variirten Gleichung

$$3z^2 - 24z + 49 = 0 ,$$

also

$$z_1 \text{ und } z_2 = 4 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}} .$$

Wählt man die erste Variation z_1, so werden die variirten Wurzeln

$$x_1' = -1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}, \quad x_2' = -\sqrt{-\frac{1}{3}}, \quad x_3' = 1 - \sqrt{-\frac{1}{3}},$$

und die Variirte

$$x'^3 + \sqrt{-3}\cdot x'^2 - 2x' - \frac{4}{9}\sqrt{-3} = 0\,.$$

Die Gleichung ihrer reciproken Wurzelwerthe ist

$$\frac{1}{x'^3} - \frac{3}{2}\sqrt{-3}\cdot\frac{1}{x'^2} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x'} + \frac{3}{4}\sqrt{-3} = 0$$

und das arithmetische Mittel der reciproken Wurzeln gleich $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Es ist alsdann

$$\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

und zwar gültig für jeden der drei Werthe von x'. Die Verschiebung des Coordinatenanfangspunctes ist hier eine doppelte, sowol in der Richtung der Abscissen- als der Ordinatenaxe. Die neue Curve $y = F(x)$ wird nach der Verschiebung nicht mehr geschnitten, wogegen die Curve $y = f(x)$ drei reelle Durchschnitte mit der Axe hat.

(6). (7). (8). Es kann nun auch eine jede kubische Function dergestalt transformirt werden, dass die Functionen V_2, $\overline{V}_2$, $V'_{2,3}$ zugleich verschwinden. In diesem Falle verschwindet die Covariante $C_{3,2}$ identisch und auch die Discriminante D_3 wird gleich Null. Es ist

$$a^2 - 3b = ab - 9c = b^2 - 3ac = 0\,,$$

folglich

$$b = \frac{1}{3}\,a^2\,,\quad c = \frac{1}{27}\,a^3\,,$$

und

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\,a\right)^3 = 0\,;$$

d. h. die Gleichung hat drei gleiche Wurzeln. Die Transformation der allgemeinen kubischen Gleichung in eine solche lässt sich weder durch eine lineare noch durch eine quadratische Variation bewerkstelligen, wol aber, wie eine einfache geometrische Discussion dies im Voraus erkennen lässt, durch eine biquadratische. Denn seien die Wurzeln der Stammgleichung

$$x_1 = 1\,,\quad x_2 = 4\,,\quad x_3 = 5\,,$$

und man setze z gleich dem arithmetischen Mittel zweier unter ihnen, z. B. $z = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_3) = 3$. Quadrirt man die variirten Wurzeln, indem $(x - z)^2 = x'$ gesetzt wird, so erhält man

$$x_1' = 4\,, \quad x_2' = 1\,, \quad x_3' = 4\,.$$

Sucht man abermals das arithmetische Mittel zweier ungleicher unter diesen Wurzeln, z. B. $\zeta = \frac{1}{2}(x_1' + x_2') = 2\frac{1}{2}$ und quadrirt die nochmals variirten Wurzeln, indem man $(x' - \zeta)^2 = x''$, also

$$[(x - z)^2 - \zeta]^2 = x''$$

annimmt, so erhält man drei gleiche Wurzeln

$$x_1'' = x_2'' = x_3'' = 2\frac{1}{4}\,.$$

(9) I. Wenn die kubische Variante

$$V_3 = \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt nicht eine lineare, wol aber eine quadratische Transformation und die Resolvente ist kubisch. Setzt man nämlich $(x - z)^2$ an die Stelle von x, so wird die kubische Variante der Variirten gleich Null, wenn man annimmt

$$\begin{aligned}(x_1' - 2x_2' + x_3') &= (x_1 - z)^2 - 2(x_2 - z)^2 + (x_3 - z)^2 \\ &= (x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^3) - 2(x_1 - 2x_2 + x_3)z = 0\,.\end{aligned}$$

Da die Function V_3 drei verschiedene Factoren besitzt, so wird die Gleichung in z kubisch. Man gelangt zu derselben durch Entwickelung von

$$2\alpha_1^3 - 9\alpha_1\beta_1 + 27\gamma_1 = 0\,,$$

wo für $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die früher angegebenen Werthe einzusetzen sind. Einfacher jedoch kommt man zum Ziele, wenn man $\zeta - a$ an die Stelle von $2z$ setzt und das Product aus den drei Factoren

$$\begin{aligned}&(x_1 - 2x_2 + x_3)\,\zeta + (x_2 x_3 - 2x_1 x_3 + x_1 x_2)\,,\\ &(x_2 - 2x_3 + x_1)\,\zeta + (x_1 x_3 - 2x_1 x_2 + x_2 x_3)\,,\\ &(x_3 - 2x_1 + x_2)\,\zeta + (x_1 x_2 - 2x_2 x_3 + x_1 x_3)\end{aligned}$$

entwickelt. Dies führt auf die kubische Covariante

$$\begin{aligned}C_{3,3}(\zeta) = (2a^3 - 9ab + 27c)\,\zeta^3 + 3(a^2b + 9ac - 6b^2)\,\zeta^2 \\ - 3(ab^2 + 9bc - 6a^2c)\zeta - (2b^3 - 9abc + 27c^2) = 0\,.\end{aligned}$$

Es wird weiter unten gezeigt, dass x_1, x_2, x_3 und ζ vier harmonische Puncte auf der Abscissenaxe bilden.

Durch die Reducente (9) I mit Anwendung der Resolvente

$$\begin{aligned}(2a^3 - 9ab + 27c)(2z + a)^3 + 3(a^2b + 9ac - 6b^2)(2z + a)^2 \\ - 3(ab^2 + 9bc - 6a^2c)(2z + a) - (2b^3 - 9abc + 27c^2) = 0\end{aligned}$$

wird das Coordinatensystem derartig verändert, dass die Wurzeln der Variirten eine stetige arithmetische Proportion bilden.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^3 - 9x'^2 + 23x' - 15 = 0 .$$

Die Wurzeln sind

$$x_1' = 1 , \quad x_2' = 3 , \quad x_3' = 5 .$$

Alsdann ist

$$2\alpha_1^3 - 9\alpha_1\beta_1 + 27\gamma_1 = -2 . 9^3 + 9 . 9 . 23 - 27 . 15 = 0$$

und

$$x_1' - 2x_2' + x_3' = 0$$

oder

$$x_1' - x_2' = x_2' - x_3' .$$

Wenn die vorgelegte Gleichung die Form

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

hat, so sind die drei Factoren der Resolvente in ζ

$$0\zeta + 8 = 0 , \quad -6\zeta + 14 = 0 , \quad 6\zeta - 22 = 0 ;$$

folglich

$$\zeta_1 = \infty , \quad \zeta_2 = 2\frac{1}{3} , \quad \zeta_3 = 3\frac{2}{3} .$$

Daraus ergeben sich die drei harmonischen Doppelverhältnisse

$$(x_1 x_3 x_2 \zeta_1) = (x_1 x_2 \zeta_2 x_3) = (x_1 \zeta_3 x_2 x_3) = 1 .$$

(9) II. Wenn die kubische Retrovariante

$$V'_{3,3} = \frac{1}{27}(2b^3 - 9abc + 27c^2)$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt zwar eine lineare Transformation, aber die Resolvente ist kubisch, nämlich $C_{3,3}(z) = 0$. Denn setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet die Retrovariante, wenn man annimmt

$$\begin{aligned} x_2' x_3' - 2x_1' x_3' + x_1' x_2' &= (x_2 - z)(x_3 - z) - 2(x_1 - z)(x_3 - z) \\ &+ (x_1 - z)(x_2 - z) = (x_2 x_3 - 2x_1 x_3 + x_1 x_2) \\ &+ (x_1 - 2x_2 + x_3)z = 0 . \end{aligned}$$

Da die Function drei solche Factoren besitzt, so wird die Gleichung in z kubisch. Nach der vorhergehenden Entwickelung ist die Resolvente

$$C_{3,3}(z) = 0$$

und die Wurzeln x_1, x_2, x_3, z repräsentiren vier harmonische Puncte auf der Abscissenaxe, d. h. es ist

$$(x_1 x_3 x_2 z_1) = (x_1 x_2 z_2 x_3) = (x_1 z_3 x_2 x_3) = 1 .$$

Durch die Reducente (9) II wird das Coordinatensystem derartig verschoben, dass die Wurzeln der Variirten eine harmonische Reihe bilden.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^3 - 11'^2 + 36x' - 36 = 0 .$$

Die Wurzeln sind

$$x_1' = 2 , \quad x_2' = 3 , \quad x_3' = 6 .$$

Alsdann ist

$$2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\gamma^2 = 2 . 36^3 - 9 . 11 . 36^2 + 27 . 36^2 = 0$$

und

$$x_2' = \frac{2x_1' x_3'}{x_1' + x_3'} .$$

Ist die vorgelegte Gleichung

$$x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0 ,$$

also die Wurzeln

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = 4 , \quad x_3 = 5 ,$$

so sind die drei Factoren, worin die Resolvente in z zerfällt:

$$-2z + 14 = 0 , \quad -5z + 17 = 0 , \quad 7z - 31 = 0,$$

folglich

$$z_1 = 7 , \quad z_2 = 3\frac{2}{5} , \quad z_3 = 4\frac{3}{7} .$$

Demgemäss sind die drei harmonischen Doppelverhältnisse

$$(x_1 x_3 x_2 z_1) = (x_1 x_2 z_2 x_3) = (x_1 z_3 x_2 x_3) = 1 .$$

(11). Wenn die Function

$$\Gamma = a^3 c - b^3$$

verschwinden soll, so genügt dazu zwar eine lineare Transformation, aber die Resolvente wird vom dritten Grade, so dass durch Variation keine Reduction der allgemeinen kubischen Gleichung erzielt wird, wenn nicht an und für sich schon $\Gamma = 0$ ist. Setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet die Function Γ der Variirten, wenn man annimmt

$$\begin{aligned} x_1'^2 - x_2' x_3' &= (x_1 - z)^2 - (x_2 - z)(x_3 - z) \\ &= (x_1^2 - x_2 x_3) + (x_2 - 2x_1 + x_3)z = 0 . \end{aligned}$$

Da die Function drei solche Factoren besitzt, so wird die Gleichung in z vom dritten Grade sein. Man gelangt zu derselben, wenn man die Function

$$\alpha^3\gamma - \beta^3 = 0$$

nach Potenzen von z entwickelt, nachdem man gesetzt hat:

$$\alpha = 3z + a\,, \quad \beta = 3z^2 + 2az + b\,,$$
$$\gamma = z^3 + az^2 + bz + c\,.$$

Die Resolvente lautet

$$(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + (a^4 - 3a^2b + 27ac - 9b^2)z^2$$
$$+ (a^3b - 6ab^2 + 9a^2c)z + (a^3c - b^3) = 0\,.$$

Durch die Reducente (11) wird das Coordinatensystem derartig verschoben, dass die Wurzeln der Variirten eine stetige geometrische Proportion bilden. Die Variirte lässt sich also auf eine reciproke Gleichung reduciren.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^3 + 3x'^2 - 6x' - 8 = 0\,.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$x_1' = 2\,, \quad x_2' = -4\,, \quad x_3' = -1\,.$$

Es ist alsdann

$$\alpha^3\gamma - \beta^3 = -3^3\,.\,8 + 6^3 = 0$$

und

$$x_2' : x_1' = x_1' : x_3'\,.$$

(14). Wenn die Discriminante

$$D_3 = \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - \frac{4}{27}(a^2 - 3b)^3$$

verschwinden soll, so genügt dazu eine quadratische Variation der Wurzeln, indessen wird die Resolvente vom dritten Grade. Setzt man blos $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet die Variation z gänzlich aus der Function D_3; setzt man aber $(x - z)^2$ anstatt x, so verschwindet die Discriminante der variirten Gleichung, wenn man annimmt

$$x_1' - x_2' = (x_1 - z)^2 - (x_2 - z)^2 = (x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2)z = 0\,.$$

Daraus folgt

$$z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\,.$$

Da die Function D_3 drei verschiedene Factoren hat, so wird die Gleichung in z vom dritten Grade. Sie ist identisch mit der Gleichung der halben Wurzelsummen der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$. Dieselbe lautet (§ 19)

$$z^3 + az^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)z + \frac{1}{8}(ab - c) = 0 .$$

5. Die Varianten und Retrovarianten.

Diese Constanten sind bereits in § 17 allgemein entwickelt worden. Wir berücksichtigen hier nur diejenigen Formen, welche der Cayley'schen Form

$$f(x) = (a, b, c, \widehat{d)\,(x}, 1)^3$$

angehören. Zur Wegschaffung des zweiten Gliedes der Function bedarf es der linearen Variation $z = -\frac{b}{a}$, wodurch

$$x = x' - \frac{b}{a}, \text{ also } ax' = ax + b$$

wird. Die transformirte Gleichung ist alsdann

$$a^2 f(x) = (ax + b)^3 - \binom{3}{2} V_2(ax + b) + V_3 = 0 .$$

Die Varianten sind für alle Ordnungsexponenten der Function dieselben und zwar hat die kubische nur zwei, nämlich

$$V_2 = b^2 - ac, \text{ (quadratische Variante)},$$
$$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d, \text{ (kubische Variante)}.$$

Zur Wegschaffung des vorletzten Gliedes dividire man die Gleichung durch x^3, ordne die Glieder entgegengesetzt und substituire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} - \frac{c}{d}, \quad \frac{d}{x'} = \frac{d}{x} + c .$$

Die Transformirte ist dann

$$d^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{d}{x} + c\right)^3 - \binom{3}{2} V'_{2,3}\left(\frac{d}{x} + c\right) + V'_{3,3} = 0 ,$$

und

$$V'_{2,3} = c^2 - bd, \text{ (quadratische Retrovariante)},$$
$$V'_{3,3} = 2c^3 - 3bcd + ad^2, \text{ (kubische Retrovariante)}.$$

6. Die Invarianten und die Discriminante.

Die kubische Gleichung hat nur eine Invariante $J_{3,4}$, welche zugleich die Discriminante $\overline{D}_3$ ist, nämlich für die Cayley'sche Form (§§ 52 bis 54):

$$J_{3,4} = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = \overline{D}_3 .$$

Hierfür kann man nach Eisenstein noch setzen

$$a^2 J_{3,4} = a^2 \overline{D}_3 = (2b^3 - 3abc + a^2 d)^2 - 4(b^2 - ac)^3 = V_3^{\,2} - 4V_2^{\,3},$$
$$d^2 J_{3,4} = d^2 \overline{D}_3 = (2c^3 - 3bcd + d^2 a)^2 - 4(c^2 - bd)^3 = V'^{\,2}_{3,3} - 4V'^{\,3}_{2,3} .$$

Die Discriminante ist von Wichtigkeit für die Prüfung der Wurzeln auf ihre Realität und Gleichheit. Ist nämlich

a) $\overline{D}_3 > 0$, so sind zwei Wurzeln complex;

b) $\overline{D}_3 < 0$, so sind alle drei Wurzeln reell;

c) $\overline{D}_3 = 0$, so sind wenigstens zwei Wurzeln einander gleich, ausserdem alle drei Wurzeln reell.

Unter steter Voraussetzung reeller Coefficienten der vorgelegten kubischen Gleichung seien

I. die Wurzeln $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$,

also sämmtlich reell, so ist offenbar

$$\overline{D}_3 = -(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 ,$$

d. h. negativ.

II. x_1 und $x_2 = \alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}$, $x_3 = \alpha_3$;

dann wird

$$\overline{D}_3 = 4\beta_1^{\,2}[(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + \beta_1^{\,2}], \text{ d. h. positiv.}$$

III. $x_1 = x_2 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_3$;

dann ist $\overline{D}_3 = 0$.

7. Die Covarianten.

Gehen wir wieder aus von der Cayley'schen Form eines binären Polynoms

$$f = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3 ,$$

so hat diese nach § 57 zwei Covarianten, und zwar eine quadratische $C_{3,2}$ und eine kubische $C_{3,3}$. Dieselben sind

$$C_{3,2} = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2,$$

und

$$C_{3,3} = (2b^3 - 3abc + a^2 d)x^3 + 3(b^2 c + abd - 2ac^2)x^2 y$$
$$- 3(bc^2 + acd - 2b^2 d)xy^2 - (2c^3 - 3bcd + ad^2)y^3 .$$

Zwischen diesen beiden Covarianten und der Function f findet folgende bemerkenswerthe Relation statt:

$$C_{3,3}^2 = -4C_{3,2}^3 + \overline{D}_3 f^2 .$$

Die beiden Covarianten lassen sich in den beiden Varianten V_2 und V_3 ausdrücken, wenn man $a\frac{x}{y} = \xi - b$ substituirt.

Es ist nämlich

$$-\frac{a^2}{y^2}C_{3,2} = V_2\xi^2 - V_3\xi + V_2^2,$$

und

$$\frac{a^3}{y^3}C_{3,3} = V_3\xi^3 - 6V_2^2\xi^2 + 3V_2V_3\xi - (V_3^2 - 2V_2^3).$$

Ist in einem speciellen Falle $V_3 = 0$, so reduciren sich jene Formen auf die einfacheren

$$-\frac{a^2}{y^2}C_{3,2} = V_2(\xi^2 + V_2),$$

$$\frac{a^3}{y^3}C_{3,3} = -2V_2^2(3\xi^2 - V_2).$$

Zwischen den Covarianten, der Function und ihrer Discriminante gilt nun nach der Bezeichnung von Clebsch

$$\varDelta^3 = -2\left(Q^2 + \frac{1}{2}Rf^2\right)$$

und nach der von uns angenommenen Bezeichnung

I. $\quad 4C_{3,2}^3 = \overline{D}_3f^2 - C_{3,3}^2$.

Ausser dieser gelten noch die drei folgenden Relationen, wobei wir der Einfachheit wegen $y = 1$ annehmen,

II. $\quad 3f.f'' - 2f'^2 - 18C_{3,2} = 0$,

III. $\quad C_{3,2}f'' - 2C'_{3,2}f' + 3C''_{3,2}f = 0$,

IV. $\quad 27(a^2f^2 - 2V_3f + \overline{D}_3) = af'^3 - 9V_2f'^2$.

Die Grössen $f', f'', C'_{3,2}$ und $C''_{3,2}$ sind die partiellen Differentialquotienten von f und $C_{3,2}$ nach x genommen.

Setzen wir zum Zwecke der Discussion dieser Ausdrücke z an die Stelle von x, so wird

$$f(z) = az^3 + 3bz^2 + 3cz + d,$$

$$f'(z) = 3(az^2 + 2bz + c),$$

$$f''(z) = 6(az + b),$$

$$C_{3,2}(z) = (ac - b^2)z^2 + (ad - bc)z + (bd - c^2),$$

$$C'_{3,2}(z) = 2(ac - b^2)z + (ad - bc) = C_{3,1}(z), \ (\S\ 55),$$

$$C''_{3,2}(z) = 2(ac - b^2) = 2J_{2,2}, \ (\S\ 56).$$

Nimmt man nun an

$$C_{3,2}(z) = 0 \text{ (Resolvente II}\gamma),$$

so geht die Formel I. über in

$$C_{3,3}(z) = f(z)\sqrt{\overline{D}_3}\ .$$

Wenn die Discriminante $\overline{D}_3$ verschwindet, was immer der Fall ist, wenn entweder die Gleichung $f(z) = 0$ drei gleiche Wurzeln oder doch wenigstens zwei solche hat, so wird auch

$$C_{3,3}(z) = 0\ .$$

Im ersten Falle ist

$$ac - b^2 = ad - bc = bd - c^2 = 0\ ,$$

d. h. $C_{3,2}(z)$ verschwindet identisch; im zweiten Falle ist

$$C'_{3,2}(z) = 2(ac - b^2)z + (ad - bc) = 0\ ,$$

also

$$z = -\frac{ad - bc}{2(ac - b^2)}\ .$$

Diese Wurzel von z ist offenbar eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen

$$C_{3,2}(z) = 0\ , \quad C_{3,3}(z) = 0\ .$$

Es lässt aber zeigen, dass jener Werth von z zugleich der Werth der beiden gleichen Wurzeln von

$$f(x) = f(z) = 0$$

sein muss. Aus Formel III. folgt aus der gemachten Voraussetzung, dass $C_{3,2}(z) = 0$ und $C'_{3,2}(z) = 0$ sein sollen, sofort

$$C''_{3,2}(z) \,.\, f(z) = 0\ ,$$

und wenn $C''_{3,2}(z)$ von Null verschieden ist,

$$f(z) = 0\ ,$$

und somit

$$z = -\frac{ad - bc}{2(ac - b^2)}\ .$$

In der That ist dies nur eine andere Form der auf gewöhnlichem Wege gewonnenen Wurzelform der beiden gleichen Wurzeln

$$x = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}\ ,$$

wobei die Kubikwurzeln verschwinden.

Es lassen sich noch einige andere nützliche Formeln aus den

Gleichungen I, II, III ableiten. Ist angenommen, wie vorhin, dass $C_{3,2}(z)$ verschwinde, so wird

$$C'_{3,2}(z) = \sqrt{\overline{D}_3}$$

und in Folge dessen gemäss III.

$$\frac{f(z)}{f' z} = \frac{2\,C'_{3,2}(z)}{3\,C''_{3,2}(z)} = \frac{2\sqrt{\overline{D}_3}}{3\,C''_{3,2}(z)}\,.$$

Ferner erhält man in Berücksichtigung der Formel II:

$$\frac{f(z)}{f''(z)} = \frac{2\,\overline{D}_3}{3\,C''_{3,2}(z)\,.\,C''_{3,2}(z)}\,, \quad \frac{f'(z)}{f''(z)} = \frac{\sqrt{\overline{D}_3}}{C''_{3,2}(z)}\,,$$

und

$$3f(z)\,.\,f''(z) = 2f'(z)\,.\,f'(z)\,.$$

Verschwindet demnach $\overline{D}_3$, ohne dass zugleich $C''_{3,2}(z)$ verschwindet, was bei zwei gleichen Wurzeln der Fall ist, so muss sowol $f(z)$ als $f'(z)$ verschwinden, was auch sonst bekannt ist.

Aus der Formel I. ergibt sich dann noch

$$\frac{f(z)\,.\,f(z)}{f'(z)} = \frac{2\,C_{3,3}(z)}{3\,C''_{3,2}(z)}\,.$$

Für die späteren Betrachtungen wird es von Nutzen sein, diese Relationen in die entsprechenden Formen der gewöhnlichen Gleichung

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

zu übertragen. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 + az^2 + bz + c\,,\\
f'(z) &= 3z^2 + 2az + b\,,\\
f''(z) &= 2(3z + a)\,,\\
C_{3,2}(z) &= (a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac)\,,\\
C'_{3,2}(z) &= 2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c)\,,\\
C''_{3,2}(z) &= 2(a^2 - 3b)\,,\\
C_{3,3}(z) &= (2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + 3(a^2b + 9ac - 6b^2)z^2\\
&\quad - 3(ab^2 + 9bc - 6a^2c)z - (2b^3 - 9abc + 27c^2).
\end{aligned}$$

Die Formeln I, II, III und IV gehen über in

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && 4C_{3,2}^3 = C_{3,3}^2 - 27D_3 f^2\,,\\
&\text{II.} && 3f\,.\,f'' - 2f'^2 + 2C_{3,2} = 0\,,\\
&\text{III.} && C_{3,2}f'' - 2C'_{3,2}\,.\,f' + 3C''_{3,2}\,.\,f = 0\,,\\
&\text{IV.} && 27f^2 - 2V_3 f + D_3 = f'^3 - (a^2 - 3b)f'^2\,.
\end{aligned}$$

Nimmt man an

$$C_{3,2}(z) = 0, \quad \text{(Resolvente II)},$$

so geht Formel I. über in

$$C_{3,3}(z) = 3f(z)\sqrt{3D_3} = \frac{(3D_3)^{\frac{3}{2}}(3z+a)}{(a^2-3b)^2}.$$

Wenn die Discriminante D_3 verschwindet, so wird auch

$$C_{3,3}(z) = 0.$$

Im ersten Falle ist

$$a^2 - 3b = ab - 9c = b^2 - 3ac = 0,$$

im zweiten

$$C'_{3,2}(z) = 2(a^2-3b)z + (ab-9c) = 0$$

und

$$z = -\frac{ab-9c}{2(a^2-3b)}.$$

Dieser Werth ist zugleich der Werth der beiden gleichen Wurzeln von $f(z) = 0$. Die gleichwerthige auf gewöhnlichem Wege durch die verallgemeinerte Cardani'sche Formel gefundene Wurzelform ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{a^2-3b}.$$

Für den Fall, dass $C_{3,2}(z) = 0$ ist, wird für die gewöhnliche Form der Function $f(z)$

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{2C'_{3,2}(z)}{3C''_{3,2}(z)} = \frac{2\sqrt{3D_3}}{3C''_{3,2}(z)},$$

$$\frac{f(z)}{f''(z)} = \frac{2D_3}{C''_{3,2}(z)\,.\,C''_{3,2}(z)}, \quad \frac{f'(z)}{f''(z)} = \frac{\sqrt{3D_3}}{C''_{3,2}(z)},$$

und mit Berücksichtigung von Formel I.

$$\frac{f(z)\,.\,f(z)}{f'(z)\,.\,f''(z)} = \frac{2C_{3,3}(z)}{9f''(z)C''_{3,2}(z)} = \frac{4\,.\,(3D_3)^{\frac{3}{2}}}{9\,.\,[C''_{3,2}(z)]^3}.$$

Die Formel IV. kann dazu benutzt werden, eine Auflösungsmethode zu gewinnen. Es wird nämlich aus ihr für $f(x) = 0$

$$f'^3(x) - (a^2-3b)f'^2(x) = D_3,$$

oder wenn man der vorgelegten Gleichung die Form

$$-(x^3 + ax^2 + bx) = c$$

gibt,

$$[3x^2 + 2ax + b - (a^2 - 3b)]\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 = D_3 .$$

Hieraus kann, wie in § 145 gezeigt werden wird, ein logarithmisches Integral gebildet werden.

8. Ueber das Verhältniss der Wurzeln der Covarianten zu denen der Hauptfunction.

Wenn die beiden Covarianten $C_{3,2}(z)$ und $C_{3,3}(z)$ verschwinden, so finden zwischen den Wurzeln derselben und den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ einige bemerkenswerthe Beziehungen statt.

Theorem. Wenn

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

und

$$C_{3,2}(z) = (a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0$$

ist, so sind die Wurzeln x_1, x_2, x_3 und z einander äquianharmonisch zugeordnet, d. h. es ist

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z}{x_3 - z} = -J_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \text{ oder } -J_1,$$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - z}{x_2 - z} = -J_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \text{ oder } -J_2 .$$

Beweis. Drückt man die Coefficienten der Covariante $C_{3,2}(z)$ durch symmetrische Functionen der Wurzeln aus, so hat man

$$\begin{aligned} C_{3,2}(z) &= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]z^2 \\ &\quad - [x_3(x_1 - x_2)^2 + x_1(x_2 - x_3)^2 + x_2(x_3 - x_1)^2]z \\ &\quad + \frac{1}{2}[x_3^2(x_1 - x_2)^2 + x_1^2(x_2 - x_3)^2 + x_2^2(x_3 - x_1)^2] \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2(x_3 - z)^2 + (x_1 - x_3)^2(x_2 - z)^2 \\ &\quad + (x_2 - x_3)^2(x_1 - z)^2] = 0 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{(x_1 - x_2)^2 (x_3 - z)^2}{(x_3 - x_2)^2 (x_1 - z)^2} + \frac{(x_1 - x_3)^2 (x_2 - z)^2}{(x_2 - x_3)^2 (x_1 - z)^2} = -1 ,$$

oder kurz

$$\text{I.} \quad P^2 + Q^2 = -1 .$$

Ferner ist

$$C_{3,2}(z) = [(x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]z^2 - [2x_1(x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]z + [x_1^2(x_2 - x_3)^2 + x_1x_3(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]$$
$$(= x_1 - x_2)(x_3 - z)(x_1 - x_3)(x_2 - z) + (x_2 - x_3)^2(x_1 - z)^2 = 0 .$$

Hieraus folgt

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - z)}{(x_3 - x_2)(x_1 - z)} \cdot \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - z)}{(x_2 - x_3)(x_1 - z)} = 1,$$

oder kürzer

$$\text{II.} \quad P \, . \, Q = 1 \, .$$

Aus den beiden Gleichungen I. und II. folgt

$$P + Q = 1 \, , \quad P - Q = \pm \sqrt{-3} \, ,$$

und

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} = -J_2 \, , \quad Q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3} = -J_1 \, .$$

Die beiden Gleichungen geben für $P + Q$ den zweifachen Werth ± 1, wovon nur das oberste Zeichen gilt, indem nur in diesem Falle die Gleichung

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - z)}{(x_3 - x_2)(x_1 - z)} + \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - z)}{(x_2 - x_3)(x_1 - z)} = +1$$

identisch verschwindet.

Auf einem etwas kürzeren Wege kommt man zu demselben Resultate, wenn man schreibt

$$\begin{aligned} C_{3,2}(z) = & \; [(x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (x_3 - x_2)^2] \, z^2 \\ & - [2 x_3 (x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + 2 x_1 (x_3 - x_2)^2] \, z \\ & + [x_3^2 (x_1 - x_2)^2 - x_1 x_3 (x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + x_1^2 (x_3 - x_2)^2] = 0 \, . \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{(x_1 - x_2)^2 (x_3 - z)^2}{(x_3 - x_2)^2 (x_1 - z)^2} - \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - z)}{(x_3 - x_2)(x_1 - z)} + 1 = 0 \, ,$$

also

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - z)}{(x_3 - x_2)(x_1 - z)} = -J_1 \text{ oder } -J_2 \, .$$

Da nun die Identität

$$(x_1 - x_3)(x_2 - z) + (x_3 - x_2)(x_1 - z) = (x_1 - x_2)(x_3 - z)$$

stattfindet, so folgt daraus noch

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - z)}{(x_2 - x_3)(x_1 - z)} = -J_2 \text{ oder } -J_1 \, .$$

Aus dem vorstehenden Theorem lassen sich andere wichtige Folgerungen ziehen. Wir können zunächst die beiden Wurzeln der quadratischen Resolvente (Covariante) $C_{3,2}(z) = 0$ in folgender Form schreiben:

$$z_1 = \frac{x_3(x_1 - x_2) + J_2 x_1 (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2) + J_2(x_3 - x_2)} = \frac{x_2(x_1 - x_3) + J_1 x_1 (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3) + J_1(x_2 - x_3)}$$
$$= - \frac{x_1 x_2 + J_1 x_2 x_3 + J_2 x_1 x_3}{x_3 + J_1 x_1 + J_2 x_2},$$
$$z_2 = \frac{x_3(x_1 - x_2) + J_1 x_1 (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2) + J_1(x_3 - x_2)} = \frac{x_2(x_1 - x_3) + J_2 x_1 (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3) + J_2(x_2 - x_3)}$$
$$= - \frac{x_1 x_2 + J_2 x_2 x_3 + J_1 x_1 x_3}{x_3 + J_2 x_1 + J_1 x_2}.$$

Sind demnach die Wurzeln der kubischen Gleichung sämmtlich reell, so sind die der Resolvente conjugirt complex; sind dagegen zwei Wurzeln conjugirt complex, so sind die der Resolvente reell; sind alle Wurzeln gleich, so verschwindet die Covariante $C_{3,2}(z)$ identisch, d. h. z ist willkürlich; ist endlich $(x_1 - x_2) = J_1(x_2 - x_3)$, so ist z gleich ∞.

Ferner lässt sich die Covariante schreiben:

$$C_{3,2}(z) = \{[(x_1-x_2)+J_2(x_3-x_2)]z-[x_3(x_1-x_2)+J_2x_1(x_3-x_2)]\}\times$$
$$\{[(x_1-x_2)+J_1(x_3-x_2)]z-[x_3(x_1-x_2)+J_1x_1(x_3-x_2)]\}=0.$$

Wir werden später sehen, dass diese verschiedenen Formen der quadratischen Covariante $C_{3,2}$ im innigen Zusammenhange stehen mit der quadratischen Invariante $\mathfrak{J}$ der biquadratischen Gleichung.

Theorem. Wenn

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

und

$$C_{3,3}(z) = (2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + 3(a^2b + 9ac - 6b^2)z^2$$
$$- 3(ab^2 + 9bc - 6a^2c)z - (2b^3 - 9abc + 27c^2) = 0$$

ist, so sind die Wurzeln x_1, x_2, x_3 und z einander harmonisch zugeordnet, d. h. es ist

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z}{x_3 - z} = -1, \quad \text{oder } 2, \quad \text{oder } \frac{1}{2},$$
$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - z}{x_2 - z} = -1, \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \;,$$
$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} : \frac{x_2 - z}{x_3 - z} = -1, \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \;.$$

Beweis. Drückt man die Coefficienten der Covariante $C_{3,3}(z)$ durch symmetrische Functionen der Wurzeln aus, so hat man

$$C_{3,3}(z) = [(x_1 - 2x_2 + x_3)z + (x_2x_3 - 2x_1x_3 + x_1x_2)]\times$$
$$[(x_2 - 2x_3 + x_1)z + (x_1x_3 - 2x_1x_2 + x_2x_3)]\times$$
$$[(x_3 - 2x_1 + x_2)z + (x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1x_3)] = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$z_1 = -\frac{x_2x_3 - 2x_1x_3 + x_1x_2}{x_1 - 2x_2 + x_3} = -x_1x_2x_3\frac{\frac{1}{x_1} - 2\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}{x_1 - 2x_2 + x_3},$$

$$z_2 = -\frac{x_1x_3 - 2x_1x_2 + x_2x_3}{x_2 - 2x_3 + x_1} = -x_1x_2x_3\frac{\frac{1}{x_2} - 2\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1}}{x_2 - 2x_3 + x_1},$$

$$z_3 = -\frac{x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1x_3}{x_3 - 2x_1 + x_2} = -x_1x_2x_3\frac{\frac{1}{x_3} - 2\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{x_3 - 2x_1 + x_2}.$$

Dies sind zugleich die Wurzelformen der kubischen Covariante. Sie liefern unmittelbar die aufgestellten Doppelverhältnisse.

Wenn die Wurzeln der Hauptgleichung reell sind, so sind es auch die Wurzeln von $C_{3,3}(z) = 0$; ist eine Wurzel reell, die andere conjugirt complex, so besitzt auch die Gleichung $C_{3,3}(z) = 0$ solche Wurzeln; sind alle Wurzeln gleich, so verschwindet die Covariante identisch, d. h. z ist willkürlich; ist endlich eine Wurzel das arithmetische Mittel der beiden andern, so wird $z = \infty$.

Wir werden später bei der Untersuchung der biquadratischen Gleichungen sehen, dass die kubische Covariante $C_{3,3}$ im innigen Zusammenhange mit der kubischen Invariante $\mathfrak{J}$ der biquadratischen Gleichungen steht.

§ 144. Die Verallgemeinerung der Cardani'schen Formel nach Lagrange.

Die Wurzelform der vollständigen kubischen Gleichung lässt sich leicht direct aus der Cardani'schen Formel ableiten, indem man die Gleichung durch Variation auf eine andere reducirt, in welcher das zweite Glied fehlt.

Gegeben sei

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man bilde daraus mit Anwendung der Vieta'schen Emendation die unvollständige Gleichung

$$x'^3 + px' + q = 0,$$

indem man $x = x' - \frac{1}{3}a$ setzt. Dies gibt

$$p = -\frac{1}{3}(a^2 - 3b), \quad q = \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c),$$

welche Werthe man in die Cardani'sche Formel einzusetzen hat. Man erhält auf diese Weise die Wurzelform

$$x = -\frac{1}{3}a$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3-9ab+27c)+\frac{1}{2}\sqrt{(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3}}$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt[3]{1^2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3-9ab+27c)-\frac{1}{2}\sqrt{(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3}}.$$

Man erkennt auf den ersten Blick, dass in dieser allgemeinen Wurzelform die quadratische und kubische Variante auftreten.

Lagrange verallgemeinert die Cardani'sche Formel durch folgende Modification der Methode von Hudde. Man setze

$$x + \frac{1}{3}a = y + z$$

und erhebe beiderseits zur dritten Potenz. Dies gibt

$$x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}a^2x + \frac{1}{27}a^3 = y^3 + z^3 + 3yz\left(x + \frac{1}{3}a\right),$$

oder nach Potenzen von x geordnet,

$$x^3 + ax^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 - 3yz\right)x + \left(\frac{1}{27}a^3 - ayz - y^3 - z^3\right) = 0.$$

Vergleicht man die homologen Coefficienten dieser und der gegebenen Gleichung, so erhält man die Bestimmungsgleichungen für y und z:

$$yz = \frac{1}{9}(a^2 - 3b), \quad y^3 + z^3 = -\frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c).$$

y und z sind demnach die Wurzelwerthe der Resolvente VII:

$$z^6 + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + \frac{1}{729}(a^2 - 3b)^3,$$

oder der Gleichung der Wurzelkuben von

$$z^2 - \left(x + \frac{1}{3}a\right)z + \frac{1}{9}(a^2 - 3b) = 0. \quad (\S\ 158.)$$

Von der Resolvente VII. sind die sechs Wurzeln

$$y, \quad J_1y, \quad J_2y, \quad z, \quad J_1z, \quad J_2z,$$

unter denen die Variationen der beiden Gruppen zur zweiten Klasse so zu bilden sind, dass sie die Gleichung

$$yz = \frac{1}{9}(a^2 - 3b)$$

erfüllen. Es sind also nur die Variationen

$$y, \quad z \mid J_1 y, \quad J_2 z \mid J_2 y, \quad J_1 z$$

zulässig, und die drei Wurzelwerthe der vollständigen kubischen Gleichung sind

$$x_1 = -\frac{1}{3} a + y + z,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} a + J_1 y + J_2 z,$$

$$x_3 = -\frac{1}{3} a + J_2 y + J_1 z.$$

§ 145. Verallgemeinerung der Methode von Landen*).

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man bilde zunächst die Derivirten des Absolutgliedes c,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -(3x^2 + 2ax + b),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -(6x + 2a),$$

$$\frac{\partial^3 c}{\partial x^3} = -6.$$

Man multiplicire die letzte Differenzialgleichung mit $\partial^2 c$ und integrire. Dies gibt

$$-6 \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)^2 + C.$$

Die Constante C wird bestimmt durch die Erwägung, dass für

$$x = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = -b \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -2a$$

wird. Es ist demnach

$$6b = \frac{1}{2}(4a^2) + C, \quad C = -2(a^2 - 3b).$$

Folglich ist

$$-12 \frac{\partial c}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)^2 - 4(a^2 - 3b),$$

oder

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - 3b) - \frac{\partial c}{\partial x}}.$$

*) Man vergl. § 133.

Diese Gleichung verwandele man in

$$2\sqrt{3} = -\frac{\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}}{\sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - 3b) - \frac{\partial c}{\partial x}}},$$

multiplicire mit ∂c und integrire. Das vollständige Integral ist

$$3\sqrt{3}\,.\,c = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - 3b) - \frac{\partial c}{\partial x}} \cdot \left[\frac{2}{3}(a^2 - 3b) + \frac{\partial c}{\partial x}\right] + C_1.$$

Die Constante ergibt sich aus der Erwägung, dass für

$$x = 0, \quad c = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial c}{\partial x} = -b$$

wird; mithin ist

$$C_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\,a\left(a^2 - \frac{9}{2}b\right).$$

Schafft man die Constante auf die linke Seite und quadrirt, so erhält man

$$\left[3\sqrt{3}\,.\,c + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot a\left(a^2 - \frac{9}{2}b\right)\right]^2 - \frac{4}{27}(a^2 - 3b)^3$$
$$= -\left[(a^2 - 3b) + \frac{\partial c}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2.$$

Die linke Seite ist die Discriminante D_3. Setzt man noch in der Klammer zur Rechten

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -(3x^2 + 2ax + b)$$

ein, so wird

$$D_3 = [3x^2 + 2ax - (a^2 - 4b)]\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2.$$

Indem man weiter hieraus die Quadratwurzel zieht, erhält man durch Transposition

$$\frac{\partial x}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}(a^2 - 4b)}}$$
$$= -\frac{\partial c}{3\sqrt{c^2 + \frac{2}{27}(2a^3 - 9ab)c - \frac{1}{27}(a^2b^2 - 4b^3)}}.$$

Durch Integration dieser Gleichung und in Erwägung, dass x und c zugleich verschwinden müssen, erhält man

$$x + \frac{1}{3}a + \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}(a^2 - 4b)}$$
$$= \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{4}{27}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{4}{27}\sqrt{27D_3}}\,.$$

Bezeichnet man die rechte Seite mit $u\sqrt[3]{1}$ und transponirt, so erhält man

$$x + \frac{1}{3}a = \sqrt[3]{1}\,.\,u - \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}(a^2 - 4b)}\,.$$

Wenn man nun beiderseits zum Quadrat erhebt, erhält man durch Transposition

$$\frac{4}{9}(a^2 - 3b) = \sqrt[3]{1}^2\,.\,u^2 - 2\sqrt[3]{1}\,.\,u\sqrt{x^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}(a^2 - 4b)}$$

und wegen der Beziehung

$$\sqrt{x^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}(a^2 - 4b)} = \sqrt[3]{1}\,.\,u - \left(x + \frac{1}{3}a\right),$$
$$\frac{4}{9}(a^2 - 3b) = 2\sqrt[3]{1}\,.\,u\left(x + \frac{1}{3}a\right) - \sqrt[3]{1}^2\,.\,u^2,$$

oder

$$x + \frac{1}{3}a = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1}\,.\,u + \frac{2}{9}\sqrt[3]{1}^2\,.\,\frac{a^2 - 3b}{u}\,.$$

Setzt man für u seinen Werth wieder ein, so erhält man die bekannte Wurzelform (§ 144)

$$x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{1}{2}\sqrt{27D_3}}$$
$$+ \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{1}{2}\sqrt{27D_3}}\,.$$

§ 146. Methode von Hulbe mittels Anwendung der Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$*).

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Man suche dieselbe auf die Form

$$(x' + m)^3 + n = 0$$

zu reduciren. Entwickelt man die Reducirte in

$$x'^3 + 3mx'^2 + 3m^2x' + m^3 + n = 0$$

*) Analytische Entdeckungen u. s. w S. 95; Vériot, Compt. rend. LX. p. 556. Paris 1865. Man vergl. § 79 b.

oder kurz in

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0,$$

so erhält man durch Vergleichung der homologen Coefficienten die Bedingungsgleichungen

$$3m = \alpha, \quad 3m^2 = \beta,$$

welche sich auf die eine

$$\alpha^2 - 3\beta = 0$$

reduciren und worin wir die Form der Reducente (6) erkennen.

Diese Reduction lässt sich nun aber nicht durch einfache Variation der vorgelegten Gleichung beschaffen. Denn setzt man in der Variirten (§ 143, 1)

$$\alpha^2 - 3\beta = (3z + a)^2 - 3(3z^2 + 2az + b) = 0,$$

so erhält man wieder $a^2 - 3b = 0$.

Hulbe geht deshalb aus von der Substitution

$$x = \frac{1}{u} + z$$

und ordnet das Polynom nach Potenzen von u, wie folgt:

$$u^3 + \frac{3z^2 + 2az + b}{z^3 + az^2 + bz + c} u^2 + \frac{3z + a}{z^3 + az^2 + bz + c} u + \frac{1}{z^3 + az^2 + bz + c} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nun mittels der Reducente (6) auf die obige Art reduciren. Die Bedingung wird erfüllt durch die Gleichung

$$(3z^2 + 2az + b)^2 - 3(z^3 + az^2 + bz + c)(3z + a) = 0,$$

d. h. sie lässt sich auf die Resolvente II.

$$(a^2 - 3b) z^2 + (ab - 9c) z + (b^2 - 3ac) = 0$$

bringen. Die Wurzelwerthe dieser Gleichung sind

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(ab - 9c) \pm \sqrt{(ab - 9c)^2 - 4(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac)}}{2(a^2 - 3b)}$$

$$= \frac{-(ab - 9c) \pm \sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)}.$$

Aus der Reducirten

$$u^3 + Au^2 + \frac{1}{3} A^2 u + C = 0$$

folgt nun

$$u_1 = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\sqrt[3]{A^3 - 27C},$$

$$u_2 = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}J_1\sqrt[3]{A^3 - 27C},$$

$$u_3 = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}J_2\sqrt[3]{A^3 - 27C};$$

und endlich

$$x_1 = \frac{1}{u_1} + z_1, \quad x_2 = \frac{1}{u_2} + z_1, \quad x_3 = \frac{1}{u_3} + z_1,$$

oder auch

$$x_1 = \frac{1}{u_1} + z_2, \quad x_2 = \frac{1}{u_2} + z_2, \quad x_3 = \frac{1}{u_3} + z_2,$$

je nachdem in A einer der beiden Wurzelwerthe z_1 und z_2 der Resolvente eingesetzt worden ist.

Die von Vériot gegebene Methode ist nur eine Wiederholung der Entdeckung von Hulbe.

§ 147. Hulbe's Methode der Auflösung durch die Bildung der Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten*).

Da es nicht gelingt, die Variirte mittels Anwendung der Reducente (6) auf den Kubus eines Binoms zu bringen, versuche man es mit der Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0..$$

Man setze $x' = \sqrt{y}$ und bilde die Gleichung der Wurzelquadrate

$$y^3 - (\alpha^2 - 2\beta)y^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)y - \gamma^2 = 0.$$

Nimmt man nun an

$$(\alpha^2 - 2\beta)^2 - 3(\beta^2 - 2\alpha\gamma) = 0,$$

so wird die Gleichung in y von der Form

$$y^3 + Ay^2 + \frac{1}{3}A^2y + C = 0.$$

Zur Bestimmung von A und C hat man

*) Hulbe, Analytische Entdeckungen u. s. w.

L. Matthiessen, Neue Auflösungen u. s. w. Ztschr. f. Math. u. Phys. VIII. S. 134. Leipzig 1863.

—— Schlüssel zu Heis's Aufgabensammlung. II. Bd. § 95a. Nr. 5. Köln 1878.

$$-A=\alpha^2-2\beta=3z^2+2az+a^2-2b,$$
$$\frac{1}{3}A^2=\beta^2-2\alpha\gamma=3z^4+4az^3+2a^2z^2+2(ab-3c)z+b^2-2ac,$$
$$-C=\gamma^2=(z^3+az^2+bz+c)^2.$$

Die beiden ersten Gleichungen liefern die Resolvente IX:

$$(a^2-3b)z^2+\frac{1}{2}(2a^3-7ab+9c)z$$
$$+\frac{1}{4}(a^4-4a^2b+6ac+b^2)=0,$$

woraus ein Werth von z gefunden wird und somit auch

$$x=x'+z=\sqrt{y}+z.$$

Die drei Wurzelwerthe von y sind

$$y_1, y_2, y_3=-\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{A^3-27C}.$$

Zur definitiven Berechnung von x ist dann noch über das Vorzeichen von $\sqrt{y}$ zu entscheiden. Die vorstehende Methode liefert also auch fremde Auflösungen, wie dies bei allen Substitutionen höheren Grades als dem ersten der Fall ist. Die Substituirte ist nämlich eine quadratische, weil aus der Annahme $x=\sqrt{y}+z$ folgt

$$x^2-2zx+z^2-y=0.$$

Demnach lässt sich durch die Substitution einer quadratischen Function die Reducente (6) erfüllen.

1. Beispiel. Aufzulösen: $x^3-3x+2=0$.

Die Resolvente dieser kubischen Gleichung ist

$$z^2+z+\frac{1}{4}=0$$

und ihre Wurzeln $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}$. Daraus berechnet man $A=-6\frac{3}{4}$, $C=-\gamma^2=-11\frac{25}{64}$; also ist

$$y=2\frac{1}{4},\quad x'=\sqrt{y}=\pm\frac{3}{2}.$$

Ueber das richtige Vorzeichen entscheidet man durch Probiren oder durch Substitution des zweiten Wurzelwerthes von z in A und C. Im vorliegenden Falle gibt das letztere Verfahren offenbar denselben Werth von x. Daher sind beide Vorzeichen gültig und die Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, wie vorherzusehen war, da die Discriminante aus z verschwindet. Es ist

$$x = z_1 + x' = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$$

2. Beispiel. Aufzulösen: $x^3 - 24x - 48 = 0$.
Die Resolvente ist

$$z^2 - 3z + 2 = 0,$$

und ihre Wurzeln $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Für $z_1 = 1$ findet man

$$A = -51, \quad C = -\gamma^2 = -71^2; \quad y = 17 + \sqrt[3]{128} = 22{,}03968.$$

Daraus ergibt sich

$$x' = \pm\sqrt{y} = \pm 4{,}69464; \quad x = z_1 + x' = \pm 4{,}69464 + 1.$$

Ueber das wahre Vorzeichen von x' entscheidet der Wurzelwerth z_2. Für diesen findet man

$$A = -60, \quad C = -88^2; \quad y = 20 + \sqrt[3]{-256} = 13{,}65040.$$

Daraus ergibt sich

$$x' = \pm\sqrt{y} = \pm 3{,}69464; \quad x = z_2 + x' = \pm 3{,}69464 + 2.$$

Demnach ist das obere Vorzeichen zu nehmen. Die Gleichung hat nur eine reelle Wurzel, da die Discriminante positiv ist, oder die Resolvente reelle Wurzeln besitzt. Die Wurzeln sind

$$x_1 = 5{,}69464, \quad x_2 \text{ und } x_3 = -2{,}84732 \pm 0{,}532\sqrt{-1}.$$

§ 148. **Eine dritte Substitutionsmethode von Hulbe mittels Anwendung der Reducente** (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$*).

In der vorgelegten vollständigen kubischen Gleichung

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

substituire man

$$x + \frac{z^3 + az^2 + bz + c}{u} + z = \frac{f(z) + uz}{u}$$

und ordne die resultirende Gleichung nach Potenzen von u, wie folgt

$$u^3 + (3z^2 + 2az + b)u^2 + [3z^4 + 4az^3 + (a^2 + 3b)z^2 + (ab + 3c)z + ac]u$$
$$+ [z^6 + 2az^5 + (a^2 + 2b)z^4 + 2(ab + c)z^3 + (b^2 + 2ac)z^2 + 2bcz + c^2] = 0,$$

oder kurz

$$u^3 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

*) Hulbe, Analyt. Entdeckungen u. s. w. S. 94.

Durch Einführung der Reducente (6) gelangt man zur Resolvente II:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Den Werth von u erhält man aus der Gleichung

$$\left(u + \frac{1}{3}\alpha\right)^3 - \frac{1}{27}(\alpha^3 - 27\gamma) = 0.$$

Dadurch ist also x bestimmt. Mit Hülfe der Formeln in § 143, 7. kann man die Ausdrücke noch abkürzen. Es ist zunächst

$$u = -\frac{1}{3}f'(z) + \frac{1}{3}\sqrt[3]{f'^3(z) - 27f^2(z)},$$

und wegen

$$f^2(z) = \frac{4}{3}\frac{D_3}{C''_{3,2}(z)^2}f'^2(z),$$

$$u = -\frac{1}{3}f'(z) + \frac{1}{3}f'(z)\sqrt[3]{1 - 36\frac{D_3}{f'(z)\,.\,C''_{3,2}(z)^2}}.$$

Gemäss der Substitution

$$x = \frac{f(z)}{u} + z = \frac{2\sqrt{3D_3}}{3uC''_{3,2}(z)}f'(z) + z$$

ist dann

$$x = z - \frac{2\sqrt{3D_3}}{C''_{3,2}(z) - \sqrt[3]{C''_{3,2}(z)^3 - 36\frac{D_3}{f'(z)}C''_{3,2}(z)}}.$$

Wenn $D_3 = 0$ ist und nicht zugleich $C''_{3,2}(z) = 0$, so ist $f'(z) = 0$ und den Entwickelungen in § 143, 7 gemäss

$$x = z = -\frac{ab - 9c}{2(a^2 - 3b)} = -\frac{2(b^2 - 3ac)}{ab - 9c},$$

oder

$$x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}.$$

Die Gleichung hat dann zwei gleiche Wurzeln von diesem Werthe. Sie hat d r e i gleiche Wurzeln gleich $-\frac{1}{3}a$ oder $-\frac{1}{3}\sqrt{3b}$ oder $-\sqrt[3]{c}$, wenn

$$a^2 - 3b = 0, \quad ab - 9c = 0, \quad \text{und } b^2 - 3ac = 0.$$

§ 149. Verbesserung einer vierten Substitutionsmethode von Hulbe*).

Bei einer der Hulbe'schen Auflösungsmethoden der quadratischen Gleichungen ist bemerkt worden, dass Hulbe zur Auflösung aller Gleichungen von den ersten vier Graden vorschlägt zu substituiren

$$x = \frac{u + y}{u + z}.$$

Er führt dies aber selbst nicht aus, sonst würde er auf die Gleichung $y = z$ gerathen sein, was unstatthaft ist. Zur Auflösung der kubischen Gleichungen räth Hulbe an, z willkürlich, von Null verschieden anzunehmen und die Reducente (6) einzusetzen, was aber auch nicht zum Ziele führt.

Wir substituiren nun ähnlich wie in § 105 allgemeiner

$$x = v\frac{u + y}{u + z} = \frac{v\frac{y}{z} + v\frac{u}{z}}{1 + \frac{u}{z}}.$$

Setzt man ferner $-u$ an die Stelle von $\frac{u}{z}$, z_1 an die Stelle von $v\frac{y}{z}$, z_2 an die Stelle von v, so erhält man die Bézout'sche Function**)

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u}.$$

Diese Substitution ist zuerst von Bretschneider zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung angewandt worden. Der Werth von z ist ein Wurzelwerth der Resolvente II. Dieselbe Function haben wir bereits zur Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades unter der Bezeichnung „Methode der falschen Substitutionen" (*regula falsorum* s. *hisab al-khataayn*) angewandt. Die Methode verdient als eine allgemeine Methode zur Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade unstreitig vor allen übrigen den Vorzug, besonders aus dem Grunde, weil sie die Wurzelform in symmetrischer Form darstellt. Sie soll deswegen weiter unten ausführlicher entwickelt werden.

---

*) Analytische Entdeckungen u. s. w. § 91.

**) Man vergl. § 101 und § 140.

§ 150. Methode von Mallet und Cockle mittels Einführung der Reducente (8) $\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0$*).

Wir haben in einer der vorangehenden Methoden gesehen, dass die Reduction der Variirten

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0$$

auf die rein kubische Form

$$(x' + m)^3 + n = 0$$

nicht mittels der Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ beschafft werden kann. Dies gelingt dagegen leicht mittels der Reducente (8)

$$\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0.$$

Sie wird hierdurch auf die rein kubische Gleichung

$$(mx' + n)^3 = p^3 x'^3$$

gebracht. Entwickelt man diese Substitutionsgleichung in

$$(m^3 - p^3)x'^3 + 3m^2 n x'^2 + 3mn^2 x' + n^3 = 0$$

oder

$$x'^3 + 3\frac{m^2 n}{m^3 - p^3} x'^2 + 3\frac{mn^2}{m^3 - p^3} x' + \frac{n^3}{m^3 - p^3} = 0$$

und vergleicht sie mit der Variirten Glied für Glied, so sind die Bedingungsgleichungen der Identität

$$\frac{3m^2 n}{m^3 - p^3} = \alpha, \quad \frac{3mn^2}{m^3 - p^3} = \beta, \quad \frac{n^3}{m^3 - p^3} = \gamma,$$

woraus sich sofort die Reducente (8) ergibt. Setzt man in der Variirten jetzt $\beta = \sqrt{3\alpha\gamma}$ und dividirt durch x'^3, so resultirt

$$\left(\frac{1}{x'}\right)^3 + \sqrt{\frac{3\alpha}{\gamma}}\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{x'}\right) + \frac{1}{\gamma} = 0,$$

welche eine Reducirte ist und sich auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse bringen lässt, nämlich

$$\left(\frac{\beta x' + 3\gamma}{x'}\right)^3 = 3\gamma(\alpha\beta - 9\gamma).$$

Auch kann man zufolge der Substitution setzen

$$x' = \frac{n}{p\sqrt[3]{1 - m}}.$$

*) Mallet, Nov. Act. Societ. Upsal. III. p. 249. 1780; Cockle, Cambr. Math. Journ. Nr. XII. vol. II. p. 248. 1841; XIX. 1848; Grun. Arch. I. 254; Ztschr. f. Math. u. Phys. VIII. S. 138. 1863; Bretschneider in Grun. Arch. IV. S. 419. 1843; Alexandre in N. ann. math. XXV. 1866.

Es bleiben also noch die Grössen α, β, γ zu bestimmen welches nach Mallet's Verfahren auf folgende Weise geschieht.

Die gegebene Gleichung sei

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man setze $x = x' + z$ und man wird erhalten

$$x'^3 + (3z + a)x'^2 + (3z^2 + 2az + b)x' + (z^3 + az^2 + bz + c) = 0.$$

Um die Gleichung auf die substituirte Form zu bringen, nehmen wir an, es sei $\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0$ oder

$$(3z^2 + 2az + b)^2 - 3(3z + a)(z^3 + az^2 + bz + c) = 0.$$

Dies gibt die quadratische Resolvente II:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

z wird demnach durch eine quadratische Gleichung bestimmt, welche zwei Werthe von der Eigenschaft liefert, dass

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{\beta^2}{3\alpha} = 0$$

wird. Multiplicirt man diese Gleichung mit $3\alpha\beta$ und transponirt, so erhält man

$$(\alpha x' + \beta)^3 = \alpha(\alpha^2 - 3\beta)x'^3,$$

und wegen

$$\alpha^2 - 3\beta = a^2 - 3b,$$

$$ax' + \beta = x'\sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z + a)}.$$

Setzt man wieder $x' = x - z$, so erhält man

$$x = -\frac{(az + b) + z\sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z + a)}}{3z + a - \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z + a)}}.$$

Mallet setzt nun vorläufig $a = 0$, indem er die allgemeineren Formen später wieder aufnimmt. Die Wurzelformel wird in diesem Falle

$$x = \frac{-\frac{1}{3}b + z\sqrt[3]{\frac{1}{3}bz}}{z + \sqrt[3]{\frac{1}{3}bz}}.$$

Setzt man $\frac{1}{3}b = M^3$, $z = Z^3$, so wird

$$x = \frac{M}{Z}\cdot\frac{Z^4 - M^2}{Z^2 + M} = \frac{M}{Z}(Z^2 - M) = MZ - \frac{M^2}{Z},$$

oder

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3} bz} - \frac{\frac{1}{3} b}{\sqrt[3]{\frac{1}{3} bz}}.$$

Aus der Resolvente

$$z^2 + 3\frac{c}{b} z - \frac{1}{3} b = 0$$

folgt nunmehr

$$\frac{1}{3} bz = -\frac{1}{2} c \pm \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - \frac{4}{27} b^3},$$

und die Cardani'sche Formel

$$x = \sqrt[3]{1} \sqrt[3]{-\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - \frac{4}{27} b^3}} + \sqrt[3]{1}^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2} c - \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - \frac{4}{27} b^3}}.$$

Wir kehren zu der vollständigen Gleichung in x zurück. Es mögen noch die Wurzelformen für einige specielle Fälle untersucht werden.

1. Es sei $a^2 - 3b = 0$; dann ist

$$z = -\frac{b^2 - 3ac}{ab - 9c} = -\frac{1}{3} a = -\frac{b}{a}.$$

Daher wird vermöge der variirten Gleichung

$$ax + b = (b^3 - a^3 c)^{\frac{1}{3}}.$$

2. Es sei $b^2 - 3ac = 0$. Dann ist

$$z^2 + \frac{ab - 9c}{a^2 - 3b} z = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{1}{3} a = -\frac{3c}{b}.$$

Man findet daraus

$$ax + b = x\,(a^3 - 3ab)^{\frac{1}{3}}.$$

3. Es sei $ab - 9c = 0$. Die Resolvente ergibt alsdann

$$z = \pm \sqrt{-\frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b}} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} b} = \pm \sqrt{\frac{3c}{b}},$$

und Mallet findet die elegante Relation

$$\frac{3x + \sqrt{3b}}{3x - \sqrt{3b}} = \left(\frac{a - \sqrt{3b}}{a + \sqrt{3b}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

4. Unter Zusammenfassung aller drei Reducenten sei

$$a^2 + ab + b^2 = 3(b + 3c + ac).$$

Dann ist z einwerthig, nämlich

$$z = \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b}.$$

Der Wurzelwerth der variirten Gleichung ist dann gegeben durch die Beziehung

$$\alpha x' + \beta = x'(\alpha^3 - 3\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

§ 151. Methode von Arndt mittels Einführung der Reducente (8) $\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0$*).

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man bilde die Gleichung der reciproken Wurzeln der Variirten, nämlich

$$f\left(\frac{1}{x'}\right) = \gamma\left(\frac{1}{x'}\right)^3 + \beta\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \alpha\left(\frac{1}{x'}\right) + 1 = 0,$$

und substituire

$$f'\left(\frac{1}{x'}\right) = 3\gamma\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{1}{x'}\right) + \alpha = u,$$

$$\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{x'}\right) = 3\gamma\frac{1}{x'} + \beta = v.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander und subtrahirt davon das 9fache der reciproken Wurzeln, so erhält man

$$2(\beta^2 - 3\alpha\gamma)\frac{1}{x'} + (\alpha\beta - 9\gamma) = uv.$$

Durch Einführung der Reducente (8) wird

$$uv = \alpha\beta - 9\gamma$$

und

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Weil nun $v^2 = 3\gamma u$ ist, so ergibt sich daraus

$$v^2 = 3\gamma(\alpha\beta - 9\gamma),$$

und aus der zweiten Substitution

$$x' = \frac{3\gamma}{-\beta + v} = \frac{3\gamma}{-\beta + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3\gamma(\alpha\beta - 9\gamma)}} = \frac{\beta}{-\alpha + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha(\alpha^2 - 3\beta)}}$$

*) Arndt, Beiträge zur Aufl. der kub. und biquadr. Gleichungen S. 4. Progr. Spandau 1864.

oder

$$x' = -\frac{\beta}{\alpha} : \left(1 - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\frac{\alpha^2 - 3\beta}{\alpha^2}}\right).$$

Macht man den Nenner rational, so resultirt

$$x' = -\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha(\alpha^2 - 3\beta)} - \frac{1}{3\alpha}\sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta)^2}.$$

Diese Wurzelform lässt sich noch vereinfachen durch Berücksichtigung der Beziehung

$$\alpha^2 - 3\beta = a^2 - 3b.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ &= -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha(a^2 - 3b)} + \sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha}(a^2 - 3b)^2}\right] \end{aligned}$$

und

$$x = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2 - 3b}\left[\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{\frac{a^2 - 3b}{\alpha}}\right].$$

Nun ist

$$\alpha = 3z + a = \frac{2a^3 - 9ab + 27c \pm \sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)},$$

und man erhält auf diesem Wege wieder die verallgemeinerte Cardani'sche Formel.

§ 152. Methode von Bretschneider, die kubische Gleichung mittels der Reducente (7) $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ aufzulösen*).

Die Form der Discriminante der allgemeinen kubischen Gleichung

$$D_3 = \frac{1}{3}(ab - 9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac)$$

führt uns leicht auf den Gedanken, zu versuchen, ob die algebraische Form $ab - 9c$ eine Reducente der kubischen Gleichung sei. Dies ist nun in der That der Fall, wie zuerst von Bretschneider gezeigt worden ist. Bildet man die Variirte mittels der Substitution $x = x' + y$ und setzt $\alpha\beta - 9\gamma = 0$, also

$$(3y + a)(3y^2 + 2ay + b) - 9(y^3 + ay^2 + by + c) = 0,$$

*) Grun. Arch. IV. S. 419. 1843. Man vergl. auch Mallet, Nova analysis aequationum etc. Nova Acta Upsal. S. 252. 1780.

so erhält man die Resolvente IVa:

$$2(a^2 - 3b)y + (ab - 9c) = 0.$$

Um nun die Reducirte

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{9}\alpha\beta = 0$$

aufzulösen, gibt Bretschneider folgende elegante allgemeine Auflösung der kubischen Gleichung. Derselbe substituirt die Bézout'sche Function

$$x' = \frac{z_1 + z_2 u}{1 + u}$$

in die Variirte und ordnet nach Potenzen von u, wie folgt:

$$\begin{aligned}(z_2^3 &+ \alpha z_2^2 + \beta z_2 + \gamma)u^3 \\ &+ [z_2(3z_1z_2 + \alpha[z_1 + z_2] + \beta) + (\alpha z_1 z_2 + \beta[z_1 + z_2] + 3\gamma)]u^2 \\ &+ [z_1(3z_1z_2 + \alpha[z_1 + z_2] + \beta) + (\alpha z_1 z_2 + \beta[z_1 + z_2] + 3\gamma)]u \\ &+ (z_1^3 + \alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma) = 0.\end{aligned}$$

Man hat nun z_1 und z_2 so zu bestimmen, dass die mittelsten Glieder verschwinden. Dies geschieht durch die beiden Annahmen

$$\text{I.}\quad 3z_1 z_2 + \alpha[z_1 + z_2] + \beta = 0,$$
$$\text{II.}\quad \alpha z_1 z_2 + \beta[z_1 + z_2] + 3\gamma = 0.$$

Die transformirte Gleichung wird demgemäss

$$u^3 + \frac{z_1^3 + \alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma}{z_2^3 + \alpha z_2^2 + \beta z_2 + \gamma} = u^3 + \frac{\alpha + 3z_1}{\alpha + 3z_2} = 0.$$

Aus den Gleichungen I. und II. folgert Bretschneider noch

$$\frac{\alpha + 3z_1}{\alpha + 3z_2} = \frac{\alpha z_1^2 + \beta z_1}{\alpha z_2^2 + \beta z_2} = \frac{\beta z_1^3 + 3\gamma z_1^2}{\beta z_2^3 + 3\gamma z_2^2}.$$

Da u drei Werthe hat, so findet man aus denselben mit Hülfe von z_1 und z_2 leicht die drei Werthe von x. Es folgt aber aus I. und II.

$$z_1 + z_2 = -\frac{\alpha\beta - 9\gamma}{\alpha^2 - 3\beta}, \quad z_1 z_2 = \frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{\alpha^2 - 3\beta}.$$

Demnach sind z_1 und z_2 die beiden Wurzelwerthe der quadratischen Resolvente II:

$$(\alpha^2 - 3\beta)z^2 + (\alpha\beta - 9\gamma)z + (\beta^2 - 3\alpha\gamma) = 0.$$

Da nun zuvor angenommen worden ist, es sei $\alpha\beta - 9\gamma = 0$, so wird

$$z^2 = -\frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{\alpha^2 - 3\beta} = -\frac{1}{a^2 - 3b}[(a^2 - 3b)y^2 + (ab - 9c)y + (b^2 - 3ac)]$$

oder

$$z^2 = \frac{3\,D_3}{4(a^2-3\,b)^2} = \frac{1}{3}\beta \quad \text{und} \quad \frac{3\,x'+\sqrt{3\,\beta}}{3\,x'-\sqrt{3\,\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha-\sqrt{3\,\beta}}{\alpha+\sqrt{3\,\beta}}} \quad \text{(Mallet).}$$

Die Hülfsresolvente ist demnach die quadratische IV b:

$$4(a^2-3b)^2z^2 - 3\,D_3 = 0\,.$$

Die Wurzelform der vorgelegten Gleichung wird nun auf folfolgende Weise bestimmt. Zunächst ist

$$u^3 + \frac{\alpha+3\,z_1}{\alpha+3\,z_2} = u^3 + \frac{g^3}{h^3} = 0\,.$$

Daraus folgt

$$u_1 = -\frac{g}{h}, \quad u_2 = -J_1\frac{g}{h}, \quad u_3 = -J_2\frac{g}{h}\,.$$

Mit Rücksicht auf u_1 ist

$$\alpha + 3z_1 = g^3, \qquad \alpha + 3z_2 = h^3,$$
$$z_1 = \frac{1}{3}(g^3-\alpha), \quad z_2 = \frac{1}{3}(h^3-\alpha),$$

folglich

$$x_1' = \frac{1}{3}\frac{(g^3-\alpha)+(h^3-\alpha)u_1}{1+u_1} = \frac{1}{3}\frac{g^3+h^3u_1}{1+u_1} - \frac{1}{3}\alpha$$
$$= -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\frac{g^3h-h^3g}{h-g} = -\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}gh(g+h)\,.$$

Aus u_2 und u_3 findet man weiter

$$x_2' \text{ und } x_3' = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}gh\,\frac{g+h\mp(g-h)\sqrt{-3}}{2}\,.$$

Die Werthe von g und h berechnet man aus

$$g^3 = \alpha + 3z_1 = \alpha + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\,D_3}}{(a^2-3\,b)} = \frac{(2\,a^3-9\,ab+27\,c)+3\sqrt{3\,D_3}}{2(a^2-3\,b)},$$
$$h^3 = \alpha + 3z_2 = \alpha - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\,D_3}}{(a^2-3\,b)} = \frac{(2\,a^3-9\,ab+27\,c)-3\sqrt{3\,D_3}}{2(a^2-3\,b)}\,.$$

Endlich findet man

$$x = x' + y = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}gh(g+h)\,.$$

Ist $a = 0$, so erhält man wieder die ältere Wurzelform von Bézout.

§ 153. Eine andere Methode der Auflösung mittels Anwendung der Reducente (7) $\alpha\beta - 9\gamma = 0$*).

Da die vorhergehende Methode eine allgemeine von der speciellen Anwendung einer Reducente unabhängige Methode ist, so wollen wir noch auf andere Weise zeigen, wie man zu den Wurzelformen mittels Reducente (7) gelangt. Bildet man die Variirte und führt wie zuvor die Reducente (7) ein, so erhält man die Reducirte

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{9}\alpha\beta = 0 .$$

Zur Berechnung der Coefficienten bedarf es der Auflösung der linearen Resolvente IVa.

$$2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0 .$$

Man muss hiernach vermuthen, dass es zur Reduction der kubischen Gleichung noch einer zweiten und zwar quadratischen Resolvente bedarf. Zu derselben gelangt man auf folgende Art: Man substituire

$$\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right) - \frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2 - v^2}\left[\sqrt[3]{u+v} + \sqrt[3]{u-v}\right] = 0 .$$

Macht man diese Gleichung rational, so resultirt

$$\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right)^3 - \frac{1}{3}(u^2 - v^2)\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right) - \frac{2}{27}u(u^2 - v^2) = 0 .$$

Man bringe die Variirte auf die ähnliche Form

$$\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right)^3 - \frac{1}{3}(\alpha^2 - 3\beta)\left(x' + \frac{1}{3}\alpha\right) + \frac{2}{27}\alpha(\alpha^2 - 3\beta) = 0 .$$

Aus beiden Gleichungen ergeben sich dann folgende Bestimmungsgleichungen für u und v:

$$u = -\alpha = -(3z + a) = -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2(a^2 - 3b)},$$

$$v = \sqrt{3\beta} = \frac{3\sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)} = 3y .$$

Aus der letzten Gleichung folgt die zweite Resolvente IVb:

$$4(a^2 - 3b)^2 y^2 - 3D_3 = 0 .$$

---

*) Matthiessen, Die algebraischen Methoden etc. S. 21. Leipzig 1866. —— Schlüssel zur Aufgabensammlung von Heis. §95b. Nr. 31. IV. Köln 1878. Arndt, Beiträge. S. 5. Spandau 1864.

Demgemäss ist nun

$$x' = -\frac{1}{3}\left[\alpha - \sqrt[3]{\alpha^2 - 3\beta}\left(\sqrt[3]{-\alpha + \sqrt{3\beta}} + \sqrt[3]{-\alpha - \sqrt{3\beta}}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\alpha + \sqrt[3]{\alpha^2 - 3\beta}\left(\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} + \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\beta}\,\frac{\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} + \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}{\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} - \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}.$$

Die Grössen α und β werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2(a^2 - 3b)}, \quad \beta = \frac{9D_3}{4(a^2 - 3b)^2},$$

$$\alpha^2 - 3\beta = a^2 - 3b.$$

Multiplicirt man in der Wurzelform x' den Dividenden und Divisor mit $\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}$, so wird daraus

$$x' = \sqrt{\frac{1}{3}\beta}\,\frac{\sqrt[3]{a^2 - 3b} + \sqrt[3]{(\alpha + \sqrt{3\beta})^2}}{\sqrt[3]{a^2 - 3b} - \sqrt[3]{(\alpha + \sqrt{3\beta})^2}}$$

oder

$$x' = -\frac{1}{3}\left[\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2(a^2 - 3b)} + \sqrt[3]{\frac{2a^3 - 9ab + 27c + 3\sqrt{3D_3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2a^3 - 9ab + 27c - 3\sqrt{3D_3}}{2}}\right].$$

Endlich ergibt sich hieraus

$$x = x' + z = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}}.$$

Man erhält alle drei Wurzeln, wenn man zuvor in der Wurzelform der Variirten

$$x' = \sqrt{\frac{1}{3}\beta}\,\frac{\sqrt[3]{(\alpha - \sqrt{3\beta})} + \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}{\sqrt[3]{(\alpha - \sqrt{3\beta})} - \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}$$

an die Stelle von $\sqrt[3]{1}$ nach einander die Werthe 1, J_1 und J_2 einsetzt.

§ 154. Methode von Alexandre die kubische Gleichung mittels der Reducente (7) $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ aufzulösen*).

Man bilde mittels der Resolvente IVa:

$$2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0$$

die Reducirte

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{9}\alpha\beta = 0 .$$

Jetzt substituire man weiter

$$x' = y\frac{u+1}{u-1};$$

dies gibt die Gleichung

$$y(y^2+\beta)(u^3+1) + \alpha\left(y^2 + \frac{1}{9}\beta\right)(u^3-1) + uy(3y^2-\beta)(u+1)$$
$$+ \alpha u\left(y^2 - \frac{1}{3}\beta\right)(u-1) = 0 .$$

Setzt man

$$y^2 = \frac{1}{3}\beta = \frac{3D_3}{4(a^2-3b)^2},$$

also

$$4(a^2-3b)^2y^2 - 3D_3 = 0, \quad \text{(IVb)},$$

so verschwinden die beiden letzten Glieder der Gleichung in u und y und die beiden andern Glieder geben

$$u^3 = \frac{\alpha - 3y}{\alpha + 3y},$$

woraus x' berechnet werden kann. Es ist dann

$$x' = y\frac{\sqrt[3]{\alpha - 3y} + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha + 3y}}{\sqrt[3]{\alpha - 3y} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha + 3y}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{3}\beta}\,\frac{\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}{\sqrt[3]{\alpha - \sqrt{3\beta}} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{3\beta}}}.$$

Für die Grössen α und β gelten dann wieder wie in der vorhergehenden Auflösungsmethode die Gleichungen

$$\alpha = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2(a^2-3b)}, \quad \beta = \frac{9D_3}{4(a^2-3b)^2},$$
$$\alpha^2 - 3\beta = a^3 - 3b .$$

---

*) Nouv. Ann. de Math. II. Sér. T. IX. p. 299. Paris 1870.

§ 155. Verallgemeinerung der Methode von Lockhart.

In § 142 ist eine Methode von Lockhart zur Auflösung de[r] unvollständigen kubischen Gleichung mitgetheilt. Dieselbe läss[t] sich auf verschiedene Art zum Zwecke der Auflösung vollständige[r] kubischer Gleichungen verallgemeinern.

Wir substituiren $x - \frac{1}{3}a = x'$ und

$$x' = \frac{3uz^2 - \frac{3}{2}(a^2 - 3b)z - \frac{1}{9}(2a^3 - 9ab + 27c)}{3z^2 - 3uz - \frac{1}{3}(a^2 - 3b)}.$$

Hierdurch erhält man folgende kubische Gleichung in u:

$$u^3 - \frac{1}{3z^2}\left[(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{3}(2a^3 - 9ab + 27c)z + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)^2\right]u$$
$$+ \frac{1}{27z^3}\Big[(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + 2(a^2 - 3b)^2z^2$$
$$+ \frac{1}{3}(a^2 - 3b)(2a^3 - 9ab + 27c)z$$
$$+ \frac{1}{27}([2a^3 - 9ab + 27c]^2 - 2[a^2 - 3b]^3)\Big] = 0.$$

Setzt man den zweiten Coefficienten gleich Null, so erhält ma[n] die Resolvente X:

$$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{3}(2a^3 - 9ab + 27c)z + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)^2 = 0,$$

und die Gleichung in u wird rein kubisch.

Wenn die Discriminante

$$D_3 = \frac{1}{27}[(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 4(a^2 - 3b)^3]$$

verschwindet, so verschwindet auch das Absolutglied der Gleichun[g] in u und u wird gleich Null. In diesem Falle ist

$$x' = -\frac{2(a^2 - 3b)z + \frac{1}{3}(2a^3 - 9ab + 27c)}{9z^2 - (a^2 - 3b)} = \frac{0}{0}.$$

Wenden wir auf diesen Ausdruck die gewöhnliche Method[e] der Differenzialrechnung an, so erhalten wir

$$x' = -\frac{2(a^2 - 3b)}{18z} = \frac{2}{3}\frac{(a^2 - 3b)^2}{(2a^3 - 9ab + 27c)},$$

$$x'^2 = \frac{4}{9}\frac{(a^2 - 3b)^4}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2} = \frac{1}{9}(a^2 - 3b)$$

und

$$x' = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\,, \quad x = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b} = -\frac{ab - 9c}{2(a^2 - 3b)}\,.$$

Wir können die Methode noch abändern, indem wir substituiren $x = x' + z$ und

$$x' = \frac{3uz^2 + \left[2au + \frac{2}{3}(a^2 - 3b)\right]z + \frac{1}{3}(a^2u + ab - 9c)}{3z^2 + (3u + 2a)z + (au + b)}\,.$$

Dies gibt

$$u^3 - \frac{1}{3\left(z + \frac{1}{3}a\right)^2}[(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac)]u$$

$$- \frac{1}{27\left(z + \frac{1}{3}a\right)^3}[(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + 3(a^2b + 9ac - 6b^2)z^2$$

$$- 3(ab^2 + 9bc - 6a^2c)z - (2b^3 - 9abc + 27c^2)] = 0\,.$$

Diese Gleichung ist dadurch merkwürdig, dass in ihr die Covarianten $C_{3,2}(z)$ und $C_{3,3}(z)$ auftreten. Sie lässt sich also kurz schreiben

$$u^3 - \frac{u}{3\left(z + \frac{1}{3}a\right)^2}C_{3,2}(z) - \frac{1}{27\left(z + \frac{1}{3}a\right)^3}C_{3,3}(z) = 0\,.$$

Setzt man

$$C_{3,2}(z) = (a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0\,,$$

(Resolvente II),

so wird

$$u = \frac{\sqrt[3]{1}}{3\left(z + \frac{1}{3}a\right)}\sqrt[3]{C_{3,3}(z)}\,.$$

Wenn die Discriminante D_3 verschwindet, so wird wegen der Formel § 143, I. auch $C_{3,3}(z) = 0$, also $u = 0$. In diesem Falle wird

$$x' = \frac{2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c)}{3(3z^2 + 2az + b)} = \frac{0}{0}\,.$$

Man findet hieraus weiter die bestimmten Werthe

$$x' = \frac{2(a^2 - 3b)}{6(3z + a)} = \frac{2(a^2 - 3b)^2}{3(2a^3 - 9ab + 27c)}$$

und

$$x = -\frac{ab - 9c}{2(a^2 - 3b)}\,.$$

§ 156. Methode von Schlesicke*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Man substituire

$$x = \frac{z^2 - \frac{1}{3}az + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)}{z} = -\frac{1}{3}a + z + \frac{a^2 - 3b}{9z} .$$

Hieraus ergibt sich die Resolvente VII:

$$z^6 + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + \frac{1}{729}(a^2 - 3b)^3 = 0 ,$$

oder kurz

$$z^6 + Az^3 + \frac{1}{4}(A^2 - C^2) = 0 .$$

Die Wurzeln derselben sind auch Wurzeln der Gleichung

$$z^3 + \frac{1}{2}(A \mp C) = 0 .$$

Angenommen u_1, u_2, u_3 seien die Wurzelwerthe der Gleichung

$$z^3 + \frac{1}{2}(A - C) = 0$$

und v_1, v_2, v_3 die Wurzelwerthe der Gleichung

$$z^3 + \frac{1}{2}(A + C) = 0 .$$

Dann ist

$$u_1 = u_1 , \quad u_2 = J_1 u_1 , \quad u_3 = J_2 u_1 ,$$
$$v_1 = v_1 , \quad v_2 = J_1 v_1 , \quad v_3 = J_2 v_1 .$$

Es sei nun u_1 eine beliebige Wurzel der ersten, v_1 eine solche der zweiten Gleichung, dann ist

$$u^3 + \frac{1}{2}(A - C) = 0, \quad v^3 + \frac{1}{2}(A + C) = 0$$

oder

$$u^3 = -\frac{1}{2}(A - C), \quad v^3 = -\frac{1}{2}(A + C) .$$

Multiplicirt man die Gleichungen miteinander, so erhält man

*) Ueber die Auflösung der Gleichungen des III. Grades von Grunert und Schlesicke. Grunert's Arch. Bd. XI. S. 345. 1848.

$$u^3 v^3 = \frac{1}{4}(A^2 - C^2) = \frac{1}{729}(a^2 - 3b)^3 .$$

Durch Auflösung dieser reinen kubischen Gleichung erhält man nun

$$uv = \sqrt[3]{1} \cdot \frac{1}{9}(a^2 - 3b),$$

d. h. das Product einer Wurzel der ersten Gleichung in z in eine Wurzel der zweiten Gleichung in z ist entweder

$$\frac{1}{9}(a^2 - 3b), \text{ oder } \frac{1}{9}(a^2 - 3b) J_1 \text{ oder } \frac{1}{9}(a^2 - 3b) J_2 .$$

Es mögen nun u_1 und v_1 diejenigen Wurzeln der beiden Hülfsgleichungen sein, deren Product $\frac{1}{9}(a^2 - 3b)$ ist, so dass also $u_1 v_1 = \frac{1}{9}(a^2 - 3b)$ ist, so ist offenbar auch

$$u_2 v_3 = u_3 v_2 = \frac{1}{9}(a^2 - 3b) .$$

Nach der Annahme ist dann allgemein

$$x = \frac{z^2 - \frac{1}{3} a z + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)}{z} .$$

Wir können also auch

$$x_1 = \frac{u_1^2 - \frac{1}{3} a u_1 + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)}{u_1}$$

setzen. Dann ist ebenfalls

$$x_1 = \frac{u_1 v_1 \left(u_1 - \frac{1}{3} a\right) + \frac{1}{9}(a^2 - 3b) v_1}{u_1 v_1},$$

d. i. nach den vorangehenden Deductionen

$$x_1 = \frac{u_1 v_1 \left(u_1 - \frac{1}{3} a\right) + u_1 v_1^2}{u_1 v_1} = -\frac{1}{3} a + u_1 + v_1 .$$

Ferner können wir

$$x_2 = \frac{u_2^2 - \frac{1}{3} a u_2 + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)}{u_2}$$

setzen. Dann ist auch

$$x_2 = \frac{u_2 v_3\left(u_2 - \frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)v_3}{u_2 v_3} = \frac{u_2 v_3\left(u_2 - \frac{1}{3}a\right) + u_2 v_3^2}{u_2 v_3}$$

oder

$$x_2 = -\frac{1}{3}a + u_2 + v_3 .$$

Endlich können wir noch

$$x_3 = \frac{u_3^2 - \frac{1}{3}a u_3 + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)}{u_3}$$

setzen. Dann ist auch

$$x_3 = \frac{u_3 v_2\left(u_3 - \frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)v_2}{u_3 v_2} = \frac{u_3 v_2\left(u_3 - \frac{1}{3}a\right) + u_3 v_2^2}{u_3 v_2}$$

oder

$$x_3 = -\frac{1}{3}a + u_3 + v_2 .$$

Hiernach sind die Werthe der drei Wurzeln

$$x_1 = -\frac{1}{3}a + u_1 + v_1 ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}a + J_1 u_1 + J_2 v_1 = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{1}{2}(u_1 - v_1)\sqrt{-3},$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}a + J_2 u_1 + J_1 v_1 = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{1}{2}(u_1 - v_1)\sqrt{-3}.$$

Das hier entwickelte Verfahren von Schlesicke und Grunert kann als eine Verallgemeinerung der Substitutionsmethode von Vieta angesehen werden.

§ 157. Methode von Grunert*).

In der vollständigen kubischen Gleichung substituire man die lineare Function

$$x = u + v + w .$$

Es gilt nun zwischen drei Grössen u, v, w stets folgende identische Gleichung

$$(u + v + w)^3 - 3u(u + v + w)^2 + 3(u^2 - vw)(u + v + w) \\ - (u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw) = 0 .$$

Identificirt man diese Gleichung mit der vorgelegten

$$(u + v + w)^3 + a(u + v + w)^2 + b(u + v + w) + c = 0 ,$$

*) Grunert, Die allgemeine Cardani'sche Formel. Grun. Arch. XL. S. 246. 1863.

so ergeben sich daraus folgende Bestimmungsgleichungen für u, v und w

$$u = -\frac{1}{3}a, \quad u^2 - vw = \frac{1}{3}b, \quad u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = -c.$$

Aus der ersten und zweiten folgt

$$vw = \frac{1}{9}(a^2 - 3b), \quad 3uvw = -\frac{1}{9}a(a^2 - 3b);$$

aus diesen beiden und der dritten

$$v^3 + w^3 = -\frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c),$$

$$v^3 w^3 = \frac{1}{27^2}(a^2 - 3b)^3.$$

Demnach sind v und w die Wurzeln der Resolvente VII:

$$z^6 + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + \frac{1}{27^2}(a^3 - 3b)^3 = 0.$$

Man findet nun leicht

$$v^3 - w^3 = \pm\frac{1}{9}\sqrt{3D_3}$$

und

$$v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}},$$

$$w = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}}.$$

Die sechs Wurzeln der Gleichung in z sind nun

$$\begin{array}{lll} v_1, & J_1 v_1, & J_2 v_1, \\ w_1, & J_1 w_1, & J_2 w_1. \end{array}$$

Da das Product aus zwei conjugirten Werthen von z reell, nämlich

$$vw = \frac{1}{9}(a^2 - 3b)$$

sein soll, so sind nur drei Variationen jener Gruppe zulässig, nämlich

$$\begin{array}{l|l|l} v_1 & J_1 v_1 & J_2 v_1 \\ w_1 & J_2 w_1 & J_1 w_1 \end{array}.$$

Demnach sind die drei Wurzelwerthe der vorgelegten kubischen Gleichung

$$x_1 = -\frac{1}{3}a + v_1 + w_1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}a + J_1 v_1 + J_2 w_1 = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}(v_1 + w_1) + \frac{1}{2}(v_1 - w_1)\sqrt{-3},$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}a + J_2 v_1 + J_1 w_1 = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}(v_1 + w_1) - \frac{1}{2}(v_1 - w_1)\sqrt{-3}.$$

Drückt man Alles durch v aus, so geht die Substituirte

$$x = u + v + w$$

über in

$$x = \frac{v^2 - \frac{1}{3}av + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)}{v},$$

welche in der vorhergehenden Methode von Grunert und Schlesicke angewandt wird.

§ 158. Methode der Auflösung kubischer Gleichungen durch die Bildung der Gleichung der Wurzelkuben der substituirten Function*).

Es ist bereits in § 135 eine von Hulbe erfundene elegante Auflösungsmethode für die unvollständige kubische Gleichung entwickelt worden. Dasselbe Princip lässt sich mit demselben Grade von Einfachheit verallgemeinern zu einer Auflösungsmethode der vollständigen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Wir gehen aus von der Substitution

$$z^2 - \left(x + \frac{1}{3}a\right)z + u = 0$$

und bilden hiervon die Gleichung der Wurzelkuben von z; dieselbe lautet gemäss § 25:

$$z^6 - \left[x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}(a^2 - 9u)x + \frac{1}{27}(a^3 - 27au)\right]z^3 + u^3 = 0.$$

Setzt man im Coefficienten des zweiten Gliedes

$$\frac{1}{3}(a^2 - 9u) = b\,,$$

so geht der Coefficient des zweiten Gliedes über in

$$\frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)$$

und man erhält wieder die Resolvente VII:

$$z^6 + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + \frac{1}{729}(a^2 - 3b)^3 = 0\,.$$

Weil nun $x + \frac{1}{3}a$ der Coefficient des zweiten Gliedes der

*) Man vergl. § 135, und Matthiessen, Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung II. Bd. § 95b. Nr. 31. VI.

Substituirten ist, so ist $x + \frac{1}{3}a$ gleich der Summe zweier conjugirter Wurzelwerthe von z, deren Product $z_1 z_2$ gleich

$$u = \frac{1}{9}(a^2 - 3b)$$

sein muss. Diese Wurzeln z_1 und z_2 können auch complex sein (*casus irreductibilis*). Die drei Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung sind wieder

$$x_1 = -\frac{1}{3}a + z_1 + z_2\,,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}a + J_1 z_1 + J_2 z_2\,,$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}a + J_2 z_1 + J_1 z_2\,.$$

§ 159. Methode der Auflösung einer kubischen Gleichung mittels Einführung der Reducente (10) $\alpha^3 - 27\gamma = 0$ *).

Bildet man aus der Gleichung

$$y^3 + Ay^2 + \frac{1}{3}A^2 y + C = 0$$

die Gleichung ihrer Wurzelkuben

$$y^9 + 3Cy^6 + \frac{1}{27}(A^6 + 27A^3C + 81C^2)y^3 + C^3 = 0$$

und identificirt dieselbe mit der Variirten

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0\,,$$

so genügt dieselbe offenbar der Reducente (10)

$$\alpha^3 - 27\gamma = 0\,.$$

Bildet man demnach von der vollständigen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

die Variirte und setzt $\alpha^3 - 27\gamma = 0$, so nimmt diese die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{27}\alpha^3 = 0$$

an, wo z bestimmbar ist durch die Resolvente Va:

$$9(a^2 - 3b)z + (a^3 - 27c) = 0\,.$$

Um die Variirte aufzulösen, suche man die Gleichung ihrer Kubikwurzeln

*) Die algebraischen Methoden etc. D. § 28. Leipzig 1866.

$$y^3 + Ay^2 + \frac{1}{3}A^2y + C = 0.$$

Zur Berechnung der unbestimmten Coefficienten A und C hat man

$$C = \frac{1}{3}\alpha, \quad A = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\alpha \pm \frac{3}{2}\sqrt{5\alpha^2 + 12\beta}}$$

oder

$$A = \sqrt[3]{\frac{3(2a^3 - 9ab + 27c) \pm 9\sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)}}.$$

Es ist folglich

$$\left(y + \frac{1}{3}A\right)^3 = \frac{1}{27}(A^3 - 27C) = -\frac{(2a^3 - 9ab + 27c) \mp 3\sqrt{3D_3}}{18(a^2 - 3b)}$$

und weiter

$$y = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{A^3 - 27C}.$$

Daraus resultirt

$$x' = y^3 = -\frac{1}{27}\left(A - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{A^3 - 27C}\right)$$

und

$$x = x' + z.$$

Neben der linearen Resolvente Va. ist offenbar noch die rein quadratische

$$9\eta^2 = 5\alpha^2 + 12\beta = \frac{27D_3}{(a^2 - 3b)^2},$$

oder

$$(a^2 - 3b)^2\eta^2 - 3D_3 = 0 \quad \text{(Vb.)}$$

zur Auflösung erforderlich.

§ 160. Methode von Sommer*).

Von der kubischen Gleichung bilde man die Variirte und setze

$$x = x' + z = z + y\frac{u+1}{u-1} = z - y\frac{1+u}{1-u}.$$

Ordnet man die Transformirte nach Potenzen von u, so erhält man

*) Grunert's Arch. XXVII. S. 354. 1856.

$$u^3 + \frac{3y^3 + \alpha y^2 - \beta y - 3\gamma}{y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma} u^2 + \frac{3y^3 - \alpha y^2 - \beta y + 3\gamma}{y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma} u$$
$$+ \frac{y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma}{y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma} = 0\,.$$

Diese Gleichung wird rein kubisch, wenn man die mittleren Glieder gleich Null setzt, wenn also angenommen wird

$$3y^3 + \alpha y^2 - \beta y - 3\gamma = 0\,,$$
$$3y^3 - \alpha y^2 - \beta y + 3\gamma = 0\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch successive Addition und Subtraction

$$\beta = 3y^2\,, \quad \gamma = \frac{1}{3}\alpha y^2\,.$$

Diese beiden Bestimmungsgleichungen ergeben unmittelbar die Reducente (7) $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ und führen somit zur Resolvente IVa:

$$2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0\,.$$

Da nun auch

$$y^2 = \frac{1}{3}(3z^2 + 2az + b)$$

ist, so besteht neben der linearen Resolvente IVa. auch immer noch die rein quadratische IVb:

$$4(a^2 - 3b)^2 y^2 - 3D_3 = 0\,.$$

Man findet nun weiter

$$u = -\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\frac{y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma}{y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma}} = \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\frac{(3z + a) - 3y}{(3z + a) + 3y}}\,,$$

und aus der substituirten Function folgt

$$u = \frac{(x - z) + y}{(x - z) - y} = \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\frac{(3z + a) - 3y}{(3z + a) + 3y}}\,,$$

woraus man die Wurzelwerthe der vorgelegten kubischen Gleichung erhält, nämlich

$$x = z - y\,\frac{\sqrt[3]{(3z + a) + 3y} + \sqrt[3]{(3z + a) - 3y}}{\sqrt[3]{(3z + a) + 3y} - \sqrt[3]{(3z + a) - 3y}}\,,$$

wobei es gleichgültig ist, welchen der beiden Werthe von y man einsetzt. Man kann die Wurzelform auch noch verwandeln in

$$x = -\frac{1}{3}\left[a + \sqrt[3]{(3z+a)^2 - 9y^2}\left(\sqrt[3]{(3z+a)+3y} + \sqrt[3]{(3z+a)-3y}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2 - 3b}\left(\sqrt[3]{(3z+a)+3y} + \sqrt[3]{(3z+a)-3y}\right).$$

Setzt man für y und z ihre Werthe aus den Resolventen ein, so erhält man die verallgemeinerte Cardani'sche Formel. Man erkennt in der Formel die Beziehungen leicht wieder, welche auftreten, wenn die Reducente (7) in die Variirte eingeführt wird oder diese die Form

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \frac{1}{9}\alpha\beta = 0$$

annimmt.

§ 161. Die Methode der falschen Substitutionen*).

Gegeben sei die allgemeine kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Sind z_1 und z_2 zwei Substitutionen für die Unbekannte x, welche den beiden Gleichungen

$$3az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + c = 0,$$
$$bz_1z_2 + c(z_1 + z_2) + 3d = 0$$

genügen und sind

$$az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = \varphi_1,$$
$$az_2^3 + bz_2^2 + cz_2 + d = \varphi_2$$

die Fehler der Gleichung, so ist

$$x = \frac{z_2\sqrt[3]{\varphi_1} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\varphi_2}}.$$

Um dies zu erreichen, nehmen wir an, es sei

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u, \quad x = \frac{z_1 - z_2u}{1 - u}.$$

Es ist diese Substituirte ganz dieselbe, deren wir uns schon zur Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades bedienten, und die Methode dieselbe, welche unter dem Namen *regula falsorum* bekannt ist. Die Ausdrücke $x - z_1$ und $x - z_2$ heissen Fehler der Substitutionen, φ_1 und φ_2 die beiden Abweichungen (*falsa*,

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. XV. S. 45. 1870. Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung II. § 95b. Nr. 31. II. Man vergl. auch oben § 84, § 101 u. § 152.

arab. *al-khata'ain*). Durch die substituirte Function von x suchen wir nun zu einer Reducirten in u und zu einer Resolvente in z zu gelangen. Dies kann auf verschiedenen Wegen erreicht werden.

Man setze den Werth von x in die vorgelegte Function $f(x)$ ein und ordne nach Potenzen von u; dies gibt

$$\begin{aligned}&(az_2^3 + bz_2^2 + cz_2 + d)u^3\\ &- [(3az_2^2 + 2bz_2 + c)z_1 + (bz_2^2 + 2cz_2 + 3d)]u^2\\ &+ [(3az_1^2 + 2bz_1 + c)z_2 + (bz_1^2 + 2cz_1 + 3d)]u\\ &- (az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird rein kubisch, wenn die beiden mittleren Glieder verschwinden, wenn man also setzt

$$\begin{aligned}(3az_2^2 + 2bz_2 + c)z_1 + (bz_2^2 + 2cz_2 + 3d) = 0,\\ (3az_1^2 + 2bz_1 + c)z_2 + (bz_1^2 + 2cz_1 + 3d) = 0.\end{aligned}$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander und dividirt durch $z_2 - z_1$, so erhält man

$$\text{I.}\quad 3az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + c = 0.$$

Multiplicirt man diese mit z_2 und subtrahirt sie von der ersten, so erhält man

$$\text{II.}\quad bz_1z_2 + c(z_1 + z_2) + 3d = 0.$$

Aus I. und II. zieht man nun ohne Schwierigkeiten die der quadratischen Covariante entsprechende Resolvente

$$(b^2 - 3ac)z^2 + (bc - 9ad)z + (c^2 - 3bd) = 0.$$

Die Gleichung in u wird

$$u^3 - \frac{f(z_1)}{f(z_2)} = u^3 - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0,$$

also

$$u = \sqrt[3]{1}\,\frac{\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_2}}.$$

Da nun

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u = \sqrt[3]{1}\,\frac{\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_2}}$$

ist, so folgt daraus das Theorem, dass sich die beiden Fehler der Gleichung zu einander verhalten, wie die Kuben der Fehler der Substitutionen.

Bezeichnet man wie sonst die Kubikwurzeln der Einheit mit 1, J_1 und J_2, so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - \sqrt[3]{\varphi_2}}, \quad x_2 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 J_1 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - J_1 \sqrt[3]{\varphi_2}},$$

$$x_3 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 J_2 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - J_2 \sqrt[3]{\varphi_2}}.$$

Beispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$2x^3 + 5x^2 + 4x + \frac{20}{21} = 0.$$

Die Resolvente ist

$$7z^2 + 20z + 12 = 0,$$

und ihre Wurzelwerthe $z_1 = -\frac{6}{7}$, $z_2 = -2$.

Nimmt man den Wurzelwerth $z_1 = -\frac{6}{7}$, so ist der erste Fehler der Gleichung $\varphi_1 = -\frac{64}{1029}$; nimmt man den zweiten Werth $z_2 = -2$, so wird der zweite Fehler $\varphi_2 = -\frac{64 \cdot 49}{1029}$. Die drei Wurzeln sind demnach

$$x_1 = -\frac{2}{7} \frac{7 - 3\sqrt[3]{49}}{1 - \sqrt[3]{49}}, \quad x_2 = -\frac{2}{7} \frac{7 - 3 J_1 \sqrt[3]{49}}{1 - J_1 \sqrt[3]{49}},$$

$$x_3 = -\frac{2}{7} \frac{7 - 3 J_2 \sqrt[3]{49}}{1 - J_2 \sqrt[3]{49}}.$$

§ 162. Ueber verschiedene Wurzelformen, welche durch die Methode der falschen Substitutionen gewonnen werden *).

Wir wollen nun zeigen, wie ungemein fruchtbar das in der vorangehenden Methode angewandte Bézout'sche Princip der Substitution für die Theorie der höheren Gleichungen ist. Es lassen sich mittels desselben eine Menge von symmetrischen Wurzelformen und damit zugleich eine Reihe von Substitutionsfunctionen herleiten. Wir gehen dabei aus von der gewöhnlichen Form der vollständigen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

während wir uns vorbehalten, die Resultate der Forschungen

*) Vergl. § 103 und § 152.

der neueren Algebra an der Cayley'schen Form der kubischen Function zu demonstriren.

Wir setzen nun

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u, \quad x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} = \frac{z_1 w - z_2 v}{w - v},$$

wo $v : w$ zur Verallgemeinerung an die Stelle von u gesetzt ist. Erhebt man die erste dieser Gleichungen zur dritten Potenz und ordnet nach Potenzen der Unbekannten, so erhält man

$$x^3 - 3\,\frac{z_1 - z_2 u^3}{1 - u^3}\,x^2 + 3\,\frac{z_1{}^2 - z_2{}^2 u^3}{1 - u^3}\,x - \frac{z_1{}^3 - z_2{}^3 u_3}{1 - u^3} = 0.$$

Durch Vergleichung der homologen Coefficienten dieser und der ursprünglichen kubischen Gleichung erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für z_1 und z_2:

$$u^3 = \frac{3z_1 + a}{3z_2 + a} = \frac{3z_1{}^2 - b}{3z_2{}^2 - b} = \frac{z_1{}^3 + c}{z_2{}^3 + c}.$$

Aus jeder dieser Quotientengleichungen erhält man die Resolvente II:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Bildet man mittels der zweiten nach x aufgelösten Form der Substituirten die Gleichung in u, so verschwinden die mittleren Glieder und man erhält noch

$$u^3 = \frac{z_1{}^3 + az_1{}^2 + bz_1 + c}{z_2{}^3 + az_2{}^2 + bz_2 + c}.$$

Mittels einfacher Verwandelungen dieser und der vorhergehenden Quotientengleichungen ergeben sich nun folgende Ausdrücke für u, von denen vier schon von Bretschneider angegeben worden sind,

$$u^3 = \frac{3z_1 + a}{3z_2 + a} = \frac{3z_1{}^2 - b}{3z_2{}^2 - b} = \frac{z_1{}^3 + c}{z_2{}^3 + c} = \frac{az_1{}^2 + bz_1}{az_2{}^2 + bz_2} = \frac{bz_1{}^3 + 3cz_1{}^2}{bz_2{}^3 + 3cz_2{}^2}$$
$$= \frac{az_1{}^3 - 3cz_1}{az_2{}^3 - 3cz_2} = \frac{z_1{}^3 + az_1{}^2 + bz_1 + c}{z_2{}^3 + az_2{}^2 + bz_2 + c} = \frac{(z_1 + a)^3 - (ab - c)}{(z_2 + a)^3 - (ab - c)}$$
$$= \frac{C_{3,\,3}(z_1)}{C_{3,\,3}(z_2)}.$$

Diese Ausdrücke geben eben so viele verschiedene symmetrische Ausdrücke für die drei Wurzeln der kubischen Gleichung.

Nimmt man den ersten, so ist

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{3z_1 + a}{3z_2 + a}}, \quad u_2 = J_1\sqrt[3]{\frac{3z_1 + a}{3z_2 + a}}, \quad u_3 = J_2\sqrt[3]{\frac{3z_1 + a}{3z_2 + a}},$$

und

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{3 z_1 + a} - z_1 \sqrt[3]{3 z_2 + a}}{\sqrt[3]{3 z_1 + a} - \sqrt[3]{3 z_2 + a}},$$

$$x_2 = \frac{z_2 \sqrt[3]{3 z_1 + a} - z_1 J_1 \sqrt[3]{3 z_2 + a}}{\sqrt[3]{3 z_1 + a} - J_1 \sqrt[3]{3 z_2 + a}},$$

$$x_3 = \frac{z_2 \sqrt[3]{3 z_1 + a} - z_1 J_2 \sqrt[3]{3 z_2 + a}}{\sqrt[3]{3 z_1 + a} - J_2 \sqrt[3]{3 z_2 + a}}.$$

Wir wollen hier noch einmal die Bedingungen der Realität der Wurzeln aus der Beschaffenheit der Resolvente herleiten. Aus derselben folgen die Relationen

$$2(a^2 - 3b)z_1 + (ab - 9c) = + \sqrt{3 D_3},$$
$$2(a^2 - 3b)z_2 + (ab - 9c) = - \sqrt{3 D_3},$$

und hieraus

$$z_1 - z_2 = \frac{\sqrt{3 D_3}}{(a^2 - 3b)}.$$

Ist demnach $D_3 = 0$, so wird $z_2 = z_1$ und $x = z$, d. h.

$$x = - \frac{ab - 9c}{2(a^2 - 3b)}.$$

Multiplicirt man die oben angegebene Wurzelform von x_1 im Dividenden und Divisor mit $\sqrt[3]{\frac{2}{3}(a^2 - 3b)}$, so geht sie über in

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}} - z_1 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}}}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}}}$$

eine Form der Wurzel, welche sich ebenfalls durch ihre Symmetrie auszeichnet. Sie nimmt für $D_3 = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Für die Realität der Wurzeln gelten folgende Sätze:

a) Ist die Discriminante D_3 positiv, also

$$D_3 = \frac{1}{3}(ab - 9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac) > 0,$$

so sind die Wurzeln der Resolvente II. reell, die eine Wurzel der kubischen Gleichung reell, die beiden andern complex.

b) Ist die Discriminante D_3 gleich Null, so hat die Resolvente zwei gleiche Wurzeln; die Wurzeln der kubischen Gleichung sind sämmtlich reell und zwei unter ihnen einander gleich.

c) Ist die Discriminante D_3 negativ, so hat die Resolvente zwei complexe Wurzeln, die kubische Gleichung dagegen drei reelle Wurzeln (*casus irreductibilis*).

Um dies noch auf andere Art als früher zu beweisen, setze man die beiden Werthe von z in die Function ein und bezeichne die Werthe der Function oder die Fehler der Gleichung beziehungsweise mit φ_1 und φ_2.

Es wurde im vorhergehenden Paragraphen gefunden

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - \sqrt[3]{\varphi_2}}, \quad x_2 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 J_1 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - J_1 \sqrt[3]{\varphi_2}},$$

$$x_3 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 J_2 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - J_2 \sqrt[3]{\varphi_2}}.$$

Sind z_1 und z_2 reell, so sind es auch die Werthe von $\varphi_1 = f(z_1)$ und $\varphi_2 = f(z_2)$ und ebenso von x_1. Die beiden andern Werthe x_2 und x_3 dagegen sind complex, wie aus ihren Ausdrücken unmittelbar hervorgeht.

Sind z_1 und z_2 complex, also etwa

$$z_1 = w + vi, \quad z_2 = w - vi,$$

so wird

$$\varphi_1 = M + Ni, \quad \varphi_2 = M - Ni.$$

Man setze nun

$$M \pm Ni = R(\cos\vartheta \pm i \sin\vartheta);$$

dann ist nach dem Moivre'schen Satze

$$\sqrt[3]{\varphi_1} = R^{\frac{1}{3}} \left(\cos \tfrac{1}{3}\,\vartheta + i \sin \tfrac{1}{3}\,\vartheta\right),$$

$$\sqrt[3]{\varphi_2} = R^{\frac{1}{3}} \left(\cos \tfrac{1}{3}\,\vartheta - i \sin \tfrac{1}{3}\,\vartheta\right),$$

$$J_1 \sqrt[3]{\varphi_1} = R^{\frac{1}{3}} \left(\cos \tfrac{1}{3}\,[2\pi + \vartheta] + i \sin \tfrac{1}{3}\,[2\pi + \vartheta]\right),$$

$$J_2 \sqrt[3]{\varphi_2} = R^{\frac{1}{3}} \left(\cos \tfrac{1}{3}\,[2\pi + \vartheta] - i \sin \tfrac{1}{3}\,[2\pi + \vartheta]\right),$$

$$J_2 \sqrt[3]{\varphi_1} = R^{\frac{1}{3}} \left(\cos \tfrac{1}{3}\,[4\pi + \vartheta] + i \sin \tfrac{1}{3}\,[4\pi + \vartheta]\right),$$

$$J_1 \sqrt[3]{\varphi_2} = R^{\frac{1}{3}} \left(\cos \tfrac{1}{3}\,[4\pi + \vartheta] - i \sin \tfrac{1}{3}\,[4\pi + \vartheta]\right).$$

Bezeichnen wir die drei Werthe von $(M \pm Ni)^{\frac{1}{3}}$ mit

$$m_1 \pm n_1 i, \quad m_2 \pm n_2 i, \quad m_3 \pm n_3 i,$$

so ist

$$x_1 = \frac{(w - vi)(m_1 + n_1 i) - (w + vi)(m_1 - n_1 i)}{(m_1 + n_1 i) - (m_1 - n_1 i)} = \frac{wn_1 - vm_1}{n_1},$$

$$x_2 = \frac{(w - vi)(m_2 + n_2 i) - (w + vi)(m_2 - n_2 i)}{(m_2 + n_2 i) - (m_2 - n_2 i)} = \frac{wn_2 - vm_2}{n_2},$$

$$x_3 = \frac{(w - vi)(m_3 + n_3 i) - (w + vi)(m_3 - n_3 i)}{(m_3 + n_3 i) - (m_3 - n_3 i)} = \frac{wn_3 - vm_3}{n_3}.$$

In dem zweiten Falle sind also alle drei Wurzeln reell.

Beispiel. Aufzulösen: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Die Resolvente ist

$$z^2 - 4z + 4\frac{1}{3} = 0,$$

und ihre Wurzeln

$$z_1 \text{ und } z_2 = 2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-3}.$$

Demgemäss ist

$$\varphi_1 = f(z_1) = -\frac{4}{9}\sqrt{-3}, \quad \varphi_2 = f(z_2) = \frac{4}{9}\sqrt{-3}.$$

Hieraus ergibt sich

$$u^3 = \varphi_1 : \varphi_2 = -1$$

und

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = \sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1 \text{ oder } -J_1 \text{ oder } -J_2.$$

Aus dem ersten dieser drei Werthe erhält man

$$x_1 = \frac{z_1 - z_2 u_1}{1 - u_1} = \frac{z_1 + z_2}{2} = 2;$$

aus dem zweiten

$$x_2 = \frac{\left(2 - \frac{1}{3}\sqrt{-3}\right) - \left(2 + \frac{1}{3}\sqrt{-3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\left(2 - \frac{1}{3}\sqrt{-3}\right) - \left(2 + \frac{1}{3}\sqrt{-3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)} = 3.$$

In diesem Beispiele stösst man nicht auf die bekannte Schwierigkeit, welche sonst die Wurzelausziehung aus complexen Ausdrücken in dem irreductibeln Falle bietet. Dies kommt daher, dass die Variante $2a^3 - 9ab + 27c$ verschwindet, oder was dasselbe ist, dass die Reducente (9) I. in die vorgelegte Gleichung eintritt.

§ 163. Von einigen speciellen Fällen der kubischen Gleichung.

Es gibt einige Reducenten der kubischen Gleichungen, welche weder auf eine lineare noch eine quadratische Resolvente der Varirten führen, also entweder keine Resolvente überhaupt, oder auch nur eine neue kubische Resolvente ergeben, so dass sie keine besondere Verwendung für Auflösungsmethoden finden. Sie sind aber nichtsdestoweniger in ihrem Auftreten beachtenswerth. Dahin gehören die Reducenten (9) I., (9) II., (11) und (17), nämlich

$$(9)\quad \begin{matrix} \text{I.} \\ \text{II.} \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} 2a^3 - 9ab\ \ + 27c\ &= 0, \\ 2b^3 - 9abc + 27c^2 &= 0, \end{aligned} \right. \qquad \begin{aligned} (11)\quad a^3c - b^3 &= 0, \\ (17)\quad ab\ - c\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen hier einige Theoreme über dieselben beweisen.

1. Theorem: Die Reducente (9) I oder die kubische Variante verschwindet jedesmal, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung eine arithmetische Progression bilden.

Sind x_1, x_2, x_3 die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so ist bekanntlich nach dem Satze von Harriot

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Wenn nun $2x_1 = x_2 + x_3$, d. h. die eine der Wurzeln das arithmetische Mittel der beiden andern ist, so geht die Gleichung über in

$$x^3 - \frac{3}{2}(x_2 + x_3)x^2 + \frac{1}{2}[(x_2 + x_3)^2 + 2x_2x_3]x - \frac{1}{2}x_2x_3(x_2 + x_3) = 0.$$

Aus der Vergleichung dieser mit der vorgelegten Gleichung folgt

$$x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}a, \quad x_2 x_3 = b - \frac{2}{9}a^2, \quad x_2 x_3 (x_2 + x_3) = -2c.$$

Diese drei Gleichungen bestehen nur neben einander, wenn

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

2. Theorem: Wenn die Reducente (9) I verschwindet

so lässt sich die vollständige Gleichung so variiren, dass das zweite und das vierte Glied zugleich verschwinden.

Es soll also nachgewiesen werden, dass in dem angenommenen Falle die kubische Gleichung sich auf die Form

$$x'^3 + px' = 0$$

reduciren lässt. Man bilde die Variirte

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0$$

und setze $2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma = 0$. Man erhält dann keine Resolvente, sondern die Bedingung

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0\,.$$

Daraus folgt, dass man durch eine lineare Transformation der Gleichung diese Reducente nicht erfüllen kann, wenn sie nicht schon an und für sich stattfindet. Da man z nicht auf diesem Wege bestimmen kann, so gehe man von der Reducirten aus und setze

$$(3z + a)x'^2 + (z^3 + az^2 + bz + c) = 0,$$
$$x'^3 + (3z^2 + 2az + b)x' = 0\,.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{z^3 + az^2 + bz + c}{3z + a} = 3z^2 + 2az + b,$$

und wenn man auf der linken Seite die Division ausführt, den Rest $2a^3 - 9ab + 27c = 0$ setzt,

$$\frac{1}{3}\left[z^2 + \frac{2}{3}\,az - \frac{1}{9}\,(2a^2 - 9b)\right] = 3z^2 + 2az + b,$$

oder

$$z^2 + \frac{2}{3}\,az + \frac{1}{36}\,(a^2 + 9b) = 0.$$

Die Wurzelwerthe sind

$$z_1 \text{ und } z_2 = -\frac{1}{3}\,a \pm \frac{1}{6}\sqrt{3(a^2 - 3b)}\,.$$

Substituirt man dies in eine der Partialgleichungen, z. B.

$$x'^3 + (3z^2 + 2az + b)x' = 0,$$

so ist

$$x_1' = 0,\quad x_2' \text{ und } x_3' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\,(a^2 - 3b)}\,.$$

Daraus folgt

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3}\,a \pm \frac{1}{3}\sqrt{3(a^2 - 3b)},\quad x_3 = -\frac{1}{3}\,a\,.$$

3. Theorem. Wenn die kubische Variante

$$V_3 = \frac{1}{27}(2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma)$$

einer durch eine quadratische Substitution

$$x^2 + vx + \frac{c}{z} = 0$$

variirten kubischen Gleichung verschwindet, so wird auch die kubische Covariante $C_{3,3}(z)$ gleich Null.

Auf dies Theorem, welches sich aus den in § 143 (9) I. angestellten Betrachtungen ergibt, werden wir bei der Anwendung quadratischer Transformationen (§ 172) zurückkommen. Wir beschränken uns hier auf die Bemerkung, dass die Resolvente nicht quadratisch, sondern wieder kubisch ist.

4. Theorem. Die kubische Retrovariante

$$(9)\ \text{II.} \quad 2b^3 - 9abc + 27c^2$$

verschwindet jedesmal, wenn die Wurzeln der Gleichung eine harmonische Progression bilden.

Angenommen also, es sei $x_1 = \frac{2x_2x_3}{x_2 + x_3}$, so geht die Gleichung

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$$

über in

$$x^3 - \frac{2x_2x_3 + (x_2 + x_3)^2}{x_2 + x_3}x^2 + 3x_2x_3 . x - \frac{2x_2{}^2x_3{}^2}{x_2 + x_3} = 0 .$$

Aus der Gleichsetzung der homologen Coefficienten folgt

$$\frac{2x_2x_3 + (x_2 + x_3)^2}{x_2 + x_3} = -a, \quad 3x_2x_3 = b, \quad \frac{2x_2{}^2x_3{}^2}{x_2 + x_3} = -c.$$

Diese drei Gleichungen können nur nebeneinander bestehen, wenn

$$2b^3 - 9abc + 27c^2 = 0$$

ist, d. h. wenn die kubische Retrovariante verschwindet.

5. Theorem. Die Reducente (11) verschwindet, wenn die drei Wurzeln eine geometrische Progression bilden.

Angenommen also, es sei $x_1 = \sqrt{x_2x_3}$, so ergeben sich folgende Relationen für die drei Wurzeln:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = -a, \quad x_1(x_2 + x_3) + x_1{}^2 = b, \quad x_1{}^3 = -c.$$

Setzt man $x_2 + x_3 = -(a + x_1)$ in die zweite Gleichung ein, so entsteht

$$x_1(-a - x_1) + x_1{}^2 = -ax_1 = b,$$

und aus der Verbindung dieser Gleichung mit der dritten

$$a^3 c - b^3 = 0 .$$

6. Theorem. Wenn die Reducente (11) verschwindet, so lässt sich die Gleichung immer auf eine reciproke Gleichung reduciren.

Es sei gegeben

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Man bilde die Variirte und setze $\alpha^3\gamma - \beta^3 = 0$. Man erhält dann die kubische Resolvente

$$\begin{aligned}(2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + (a^4 - 3a^2 b + 27ac - 9b^2)z^2 \\ + a(a^2 b + 9ac - 6b^2)z + (a^3 c - b^3) = 0 .\end{aligned}$$

Der erste und der dritte Coefficient sind Coefficienten der kubischen Covariante und es folgt aus der Gleichung, dass die allgemeine Gleichung nur durch Auflösung einer kubischen Resolvente auf eine reciproke gebracht werden kann.

Um die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + b^3 : a^3 = 0$$

aufzulösen, setze man $x = \frac{b}{a} y$, woraus resultirt

$$y^3 + \frac{a^2}{b} y^2 + \frac{a^2}{b} y + 1 = 0 .$$

Die Wurzelwerthe sind

$$y_1 = -1, \quad \left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{a^2 - 3b} \mp \sqrt{a^2 + b}}{\sqrt{a^2 - 3b} \pm \sqrt{a^2 + b}} .$$

Demgemäss sind die Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung

$$x_1 = -\frac{b}{a}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - 3b} \mp \sqrt{a^2 + b}}{\sqrt{a^2 - 3b} \pm \sqrt{a^2 + b}} .$$

7. Theorem. Die Geminante G_3 verschwindet jedesmal, wenn zwei Wurzeln gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen sind.

Angenommen es sei $x_2 = -x_1$ oder $x_1 + x_2 = 0$, so geht die kubische Gleichung

$$\begin{aligned}&x^3 + ax^2 + bx + c \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)x - x_1 x_2 x_3 = 0\end{aligned}$$

über in

$$x^3 - x_3 x^2 + x_1 x_2 \,.\, x - x_1 x_2 x_3 = 0 .$$

Aus der Vergleichung homologer Coefficienten folgt

$$x_3 = -a, \quad x_1 x_2 = b, \quad x_1 x_2 x_3 = -c.$$

Mithin ist $ab - c = 0$.

8. Theorem. Wenn die Reducente (17) verschwindet, so lässt sich die vollständige Gleichung so variiren, dass das letzte Glied verschwindet.

Bildet man die Variirte und setzt das Absolutglied

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

so erhält man wegen $c = ab$

$$z^3 + az^2 + bz + ab = 0,$$

oder

$$(z + a)(z^2 + b) = 0.$$

Daraus folgt

$$z_1 = -a, \quad z_2 \text{ und } z_3 = \pm\sqrt{-b}.$$

Die Reducirte ist demgemäss im ersten Falle,

$$x'^3 - 2ax'^2 + (a^2 + b)x' = 0$$

also

$$x_1' = 0, \quad x_2' \text{ und } x_3' = a \pm \sqrt{-b};$$

im zweiten Falle

$$x'^3 + (a \pm 3\sqrt{-b})\, x'^2 - 2(b \mp a\sqrt{-b})\, x' = 0,$$

also

$$x_1' = 0, \quad x_2' = \mp 2\sqrt{-b}, \quad x_3' = -a \mp \sqrt{-b}.$$

§ 164. Methode der Auflösung mittels harmonischer Proportion.

Man suche zwei Grössen u und z zu bestimmen, zu denen die Unbekannte x die mittlere harmonische Proportionale bildet, also

$$u : z = (u - x) : (x - z), \quad \text{oder} \quad x = \frac{2uz}{u + z}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so erhält man folgende nach Potenzen von u geordnete Gleichung

$$(8z^3 + 4az^2 + 2bz + c)\, u^3 + (4az^3 + 4bz^2 + 3cz)u^2 \\ + (2bz^3 + 3cz^2)\, u + cz^3 = 0.$$

Durch Einführung der Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ erhält man die Resolvente II in der modificirten Form

$$(a^2 - 3b)\, z^2 + \frac{1}{4}(ab - 9c)\, z + \frac{1}{16}(b^2 - 3ac) = 0.$$

Die Gleichung in u wird so auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reducirt, wodurch u und z gefunden werden; mittels der Substituirten also auch x.

§ 165. Eine andere Methode der Auflösung durch ein harmonisches Mittel.

Man suche zwei Grössen u und z zu bestimmen, von der Art, dass die eine derselben z. B. u die mittlere harmonische Proportionale zwischen z und der gesuchten Wurzel x wird. Es sei also

$$x : z = (x - u) : (u - z)$$

oder

$$\frac{2xz}{x + z} = u, \quad x = \frac{uz}{2z - u}.$$

Substituirt man den Werth von x in die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so resultirt folgende nach Potenzen von u geordnete Gleichung

$$(z^3 - az^2 + bz - c)\,u^3 + (2az^3 - 4bz^2 + 6cz)\,u^2 \\ + (2bz^3 - 12cz^2)\,u + 8cz^3 = 0,$$

oder, nach z geordnet,

$$(u^3 + 2au^2 + 4bu + 8c)\,z^3 - (au^3 + 4bu^2 + 12cu)\,z^2 \\ + (bu^3 + 6cu^2)\,z - cu^3 = 0.$$

Führt man die Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ in die erste ein, so findet man, dass die Bestimmung der Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung abhängig von der Auflösung der quadratischen Resolvente II

$$(a^2 - 3b)\,z^2 - (ab - 9c)\,z + (b^2 - 3ac) = 0$$

und einer kubischen Gleichung, welche sich auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse bringen lässt.

§ 166. Methode der Auflösung mittels einer disharmonischen Proportion.

Es sei

$$\frac{2xu}{u + z} = z \quad \text{oder} \quad x = \frac{(u + z)z}{2u}.$$

Substituirt man den Werth von x in die vollständige kubische Gleichung und ordnet die Transformirte nach u, so resultirt

$$(z^3 + 2az^2 + 4bz + 8c)\,u^3 + (3z^4 + 4az^3 + 4bz^2)\,u^2 \\ + (3z^5 + 2az^4)\,u + z^6 = 0.$$

Durch Einführung der Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$, erhält man die Resolvente

$$(a^2 - 3b)\, z^2 + 2(ab - 9c)\, z + 4(b^2 - 3ac) = 0,$$

so dass die weitere Bestimmung von x keine weiteren Schwierigkeiten darbietet.

§ 167. Methode die kubische Gleichung durch die Bildung der Gleichung ihrer Quadratwurzeln aufzulösen.

Wir gehen aus von der Bemerkung, dass aus der Reducente (6) sich noch die Reducente (12) $\alpha^4 - 2\alpha^2\beta - 12\alpha\gamma + \beta^2 = 0$ herleiten lässt.

Es sei

$$u^3 + Au^2 + \frac{1}{3} A^2 u + B = 0,$$

welche Gleichung sich auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reduciren und deswegen leicht auflösen lässt. Es ist also auch direct lösbar die Gleichung ihrer Wurzelquadrate

$$u^6 - \frac{1}{3} A^2 u^4 + \frac{1}{9}(A^4 - 18AB)u^2 - B^2 = 0\,,$$

oder kurz

$$u'^3 + \alpha' u'^2 + \beta' u' + \gamma' = 0.$$

Hieraus folgt offenbar

$$(\alpha'^2 - \beta')^2 - 12\alpha'\gamma' = \alpha'^4 - 2\alpha'^2\beta' - 12\alpha'\gamma' + \beta'^2 = 0.$$

Dies führt zu der folgenden Auflösungsmethode der allgemeinen kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Man bilde mittels der Substitution $x - (x' + z) = 0$ die Variirte und verfahre umgekehrt, indem man aus der Variirten die Gleichung bestimmt, deren Wurzeln die Quadratwurzeln von x' darstellen. Zu diesem Zwecke führen wir die Reducente (12) ein, woraus sich die Resolvente XI, nämlich

$$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{4}(2a^3 - 5ab - 9c)\,z + \frac{1}{16}(a^4 - 2a^2 b - 12ac + b^2) = 0$$

ergibt. Es bleibt nun $\sqrt{x'}$ zu bestimmen aus

$$x'^{\frac{3}{2}} + \sqrt{-3\alpha}.x' - \alpha x'^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\gamma} = 0,$$

also ist

$$\sqrt{x'} = \sqrt{-\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\sqrt{-3\alpha}^3 + 9\sqrt{-\gamma}}}\,.$$

Aus dem Obigen geht hervor, dass jede kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + \frac{a^4 - 2a^2b + b^2}{12a} = 0$$

eine Reducirte, also eine direct lösbare Gleichung ist.

Es ist nämlich die Gleichung ihrer Quadratwurzeln

$$x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{-3a} \,.\, x - ax^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2 - b}{2\sqrt{-3a}} = 0,$$

welche sich auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reduciren lässt.

§ 168. Methode der Gleichung der quadrirten Differenzen.

Gegeben sei

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Man bilde hiervon die derivirten Functionen

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 2(3x + a)$$

und eliminire x aus $f(x) = 0$ und

$$3x^2 + 2ax + [b + (3x + a)\,y + y^2] = 0\,.$$

Es wird demnach eine quadratische Function der Unbekannten substituirt. Da dies aber wieder eine vollständige kubische Gleichung geben würde, so muss man erst die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten bilden. Man setze deshalb $(x - z)^2 - u = 0$ und eliminire u aus

$$u^3 - (\alpha^2 - 2\beta)\,u^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)\,u - \gamma^2 = 0$$

oder

$$u^3 + \alpha_1 u^2 + \beta_1 u + \gamma_1 = 0,$$

und

$$3u^2 + 2\alpha_1 u + [\beta_1 + (3u + \alpha_1)\,y + y^2] = 0\,.$$

Die Finalgleichung hat die Form

$$y^6 + Ay^4 + By^2 + C = 0\,.$$

Schreibt man die quadratische Gleichung in folgender Form

$$u^2 + \frac{1}{3}(3y + 2\alpha_1)\,u + \frac{1}{3}(y^2 + \alpha_1 y + \beta_1) = 0\,,$$

so erhält man mit Anwendung der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers

$$y^6 - 2(\alpha_1{}^2 - 3\beta_1)\,y^4 + (\alpha_1{}^2 - 3\beta_1)^2\,y^2 + D_{u,\,3} = 0,$$

wo $D_{u,\,3}$ die Discriminante der kubischen Gleichung in u bezeichnet. Setzt man nun $\alpha_1^2 - 3\beta_1 = 0$, so ergibt sich daraus die Resolvente IX.:

$$(a^2-3b)z^2+\frac{1}{2}(2a^3-7ab+9c)z+\frac{1}{4}(a^4-4a^2b+6ac+b^2)=0,$$

und die Gleichung in y wird rein kubisch, nämlich

$$y^6+\frac{1}{27}(\alpha_1^3-27\gamma_1)^2=0.$$

Hieraus folgt zunächst

$$y^2=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{(\alpha_1^3-27\gamma_1)^2}$$

und

$$y_1 \text{ und } y_2=\pm\sqrt{-\frac{1}{3}\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{(\alpha_1^3-27\gamma_1)}}.$$

Aus den Gleichungen $[z^2]=0$ und $[u^2]=0$ kann alsdann x berechnet werden.

Die Gleichung $y^6+Ay^4+By^2+C=0$ hat mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften. Einmal ist

$$y^2=-\frac{1}{2}A+\sqrt{\frac{D_{u,\,3}}{\frac{1}{2}A-\sqrt{\frac{D_{u,\,3}}{\frac{1}{2}A-\cdots}}}}$$

Sodann, wenn $y^2=uv$ und $u+v=\sqrt{\alpha_1^2-3\beta_1}$ gesetzt wird, findet man

$$u^7+v^7$$
$$=\sqrt{\alpha_1^2-3\beta_1}\left[(\alpha_1^2-3\beta_1)^3-9\tfrac{1}{3}(\alpha_1^2-3\beta_1)(\beta_1^2-3\alpha_1\gamma_1)+2\tfrac{1}{3}(\alpha_1\beta_1-9\gamma_1)^2\right]$$
$$=\sqrt{\alpha_1^2-3\beta_1}\left[(\alpha_1^2-3\beta_1)^3-7D_{u,\,3}\right].$$

Aus der Gleichung in y folgt noch, dass $D_3=0$ eine Reducente der kubischen Gleichungen sein muss, weil man für $D_{u,\,3}=0$ erhält

$$y^2=\alpha_1^2-3\beta_1,$$

weil sich also sonst durch eine lineare Transformation das Absolutglied fortschaffen liesse, was doch ohne die Auflösung einer anderen kubischen Resolvente nicht möglich ist. Aus diesem Grunde muss die Gleichung $D_{u,\,3}=0$ eine vollständige kubische Gleichung in z geben.

§ 169. Die Methode der gleichen Wurzeln.

Eine kubische Gleichung wird eine Reducirte, wenn sie zwei gleiche Wurzeln hat. Es liegt der Gedanke nahe, eine solche Variation oder Transformation der vorgelegten Gleichung aufzusuchen, dass die transformirte Gleichung zwei gleiche Wurzeln erhält. Man erkennt leicht, dass dies durch eine lineare Transformation nicht gelingen kann, wol aber durch eine quadratische Variation.

Man bilde die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten, setze also

$$(x - z)^2 - u = x^2 - 2zx + (z^2 - u) = 0 .$$

Die Transformirte sei

$$f(u) = u^3 + \alpha_1 u^2 + \beta_1 u + \gamma_1 = 0 ,$$

wo $\alpha_1 = -(\alpha^2 - 2\beta)$, $\beta_1 = \beta^2 - 2\alpha\gamma$, $\gamma_1 = -\gamma^2$ zu setzen ist.

Die Derivirte ist

$$f'(u) = 3u^2 + 2\alpha_1 u + \beta_1 = 0 .$$

Man suche nun den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $f(u)$ und $f'(u)$. Derselbe hat die Form

$$2(\alpha_1 - 3\beta_1)u - (4\alpha_1{}^3 - 15\alpha_1\beta_1 + 27\gamma_1)$$

und liefert gleich Null gesetzt den Werth der gleichen Wurzeln von u unter der Voraussetzung, dass der Rest der Division verschwindet. Dieser ist

$$D_{u,\,3} = \frac{1}{3}(\alpha_1\beta_1 - 9\gamma_1)^2 - \frac{4}{3}(\alpha_1{}^2 - 3\beta_1)(\beta_1{}^2 - 3\alpha_1\gamma_1) .$$

Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, führt wie oben bemerkt auf eine kubische Resolvente in z, deren Wurzeln z_1, z_2, z_3 die arithmetischen Mittel der Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind.

Es ist nämlich

$$u_1 = u_2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{u_1} = \pm\sqrt{u_2} .$$

Wählt man das obere Vorzeichen, so erhält man nur die Identität

$$x_1 - z_1 = x_1 - z_1 ;$$

wählt man dagegen das untere Vorzeichen, so erhält man nacheinander die Variationen

$$\sqrt{u_1} = -\sqrt{u_2}, \quad x_1 - z_1 = -(x_2 - z_1), \quad z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),$$

$$\sqrt{u_1} = -\sqrt{u_3}, \quad x_1 - z_2 = -(x_3 - z_2), \quad z_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3),$$

$$\sqrt{u_2} = -\sqrt{u_3}, \quad x_2 - z_3 = -(x_3 - z_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3).$$

In der That ist die fragliche Resolvente

$$z^3 + az^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)z + \frac{1}{8}(ab - c) = 0.$$

Variirt man sie mit ζ, also

$$z'^3 + Az'^2 + Bz' + C = 0,$$

und führt die Reducente (8) $B^2 - 3AC = 0$ ein, so erhält man die Resolvente IX. in ζ, nämlich

$$(a^2 - 3b)\zeta^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c)\zeta + \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0.$$

Mittels dieser lassen sich die Wurzeln der Gleichung in z' berechnen und damit auch z. Alsdann sind die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$x_1 = z_1 + z_2 - z_3,$$
$$x_2 = z_1 - z_2 + z_3,$$
$$x_3 = -z_1 + z_2 + z_3.$$

Man übersieht leicht, dass diese Methode mit der der variirten Gleichung der Wurzelsummen identisch ist.

§ 170. Methode der Substitution quadratischer Functionen unter Anwendung des Eliminationsverfahrens von Euler, Lacroix und Poisson*).

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man substituire jetzt die quadratische Function

$$x^2 + vx + u = 0.$$

Um die Finalgleichung zu erhalten, setze man nach einander

*) Lacroix, Elém. d'algèbre II. § 10. Paris 1799.
Poisson, Mém. sur l'élimination dans les questions algébriques; cah. II du Journ. polyt. Paris 1802.
Katter, Die Resultante zweier algebraischen Gleichungen. I. Putbus 1876. Man vergl. oben § 120.

die beiden Wurzeln x_1 und x_2 der Substituirten in die Hauptgleichung ein und multiplicire die beiden Polynome. Die Coefficienten des Products sind symmetrische Functionen der Unbekannten und lassen sich vermittels der Coefficienten ihrer Gleichung bestimmen. Es sei

$$x_1 + x_2 = S_1, \quad x_1^2 + x_2^2 = S_2, \quad x_1^3 + x_2^3 = S_3;$$

dann ist wegen $x_1 x_2 = u$:

$$f(x_1) f(x_2) = u^3 + a(S_1 + a) u^2 + b(S_2 + aS_1 + b) u \\ + c(S_3 + aS_2 + bS_1 + c) = 0.$$

Nun ist

$$S_1 = -v, \quad S_2 = v^2 - 2u, \quad S_3 = -v^3 + 3vu,$$

folglich

$$u^3 - [av - (a^2 - 2b)] u^2 + [bv^2 - (ab - 3c) v + (b^2 - 2ac)] u \\ - c(v^3 - av^2 + bv - c) = 0.$$

Setzt man $v = -2z$ und führt die Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ ein, so erhält man die Resolvente IX.:

$$(a^2 - 3b) z^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c) z + \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2 b + 6ac + b^2) = 0.$$

Man findet so v und u und mittels dieser Werthe x aus der substituirten Function. Dieselbe liefert also im Ganzen sechs Werthe für x, unter denen aber nur drei wahre Wurzeln, die andern drei fremde Lösungen sind, indem von den beiden Ausdrücken

$$x = -\frac{1}{2} v \pm \frac{1}{2} \sqrt{v^2 - 4u}$$

immer nur der eine Gültigkeit hat, der andere aber einer verwandten Gleichung angehört.

Statt die Wurzeln x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung in die kubische $f(x) = 0$ einzusetzen, kann man auch die Wurzeln x_1, x_2, x_3 der Gleichung $f(x) = 0$ in die quadratische $x^2 + vx + u = 0$ introduciren, also setzen

$$x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = -a,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_2 = a^2 - 2b, \text{ u. s. w.}$$

Man entwickele darauf das Product

$$(x_1^2 + vx_1 + u)(x_2^2 + vx_2 + u)(x_3^2 + vx_3 + u) = 0$$

und bilde die kubische Gleichung in u und v, welche mit der oben angegebenen übereinstimmen wird.

§ 171. Eine andere Eliminationsmethode mittels symmetrischer Functionen der Wurzeln.

Aus der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ und der Substituirten $x^2 + vx + u = 0$ lässt sich die Wurzelgrösse x noch auf eine andere Art eliminiren. Betrachtet man v als constant und u als variabel, so ist

$$u = -(vx + x^2), \quad \Sigma(u) = -v\Sigma(x) - \Sigma(x^2),$$
$$u^2 = v^2x^2 + 2vx^3 + x^4, \quad \Sigma(u^2) = v^2\Sigma(x^2) + 2v\Sigma(x^3) + \Sigma(x^4),$$
$$u^3 = -(v^3x^3 + 3v^2x^4 + 3vx^5 + x^6),$$
$$\Sigma(u^3) = -v^3\Sigma(x^3) - 3v^2\Sigma(x^4) - 3v\Sigma(x^5) - \Sigma(x^6).$$

Hieraus folgt

$$\Sigma(u) = av - (a^2 - 2b),$$
$$\Sigma(u^2) = (a^2-2b)v^2 - 2(a^3-3ab+3c)v + (a^4-4a^2b+4ac+2b^2),$$
$$\Sigma(u^3) = (a^3 - 3ab + 3c)v^3 - 3(a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2)v^2$$
$$+ 3(a^5 - 5a^3b + 5ab^2 + 5a^2c - 5bc)v$$
$$- [(a^3 - 3ab + 3c)^2 - 2(b^3 - 3abc + 3c^2)].$$

Daraus leite man die Gleichung

$$u^3 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$$

ab, und zwar die Coefficienten α, β, γ mittels der Newton'schen Formeln

$$-\alpha = \Sigma(u), \quad \alpha^2 - 2\beta = \Sigma(u^2), \quad -(\alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma) = \Sigma(u^3).$$

Man erhält auf diesem Wege dieselbe Gleichung in u und v, wie in der vorhergehenden Methode. Die Substitution einer quadratischen Function ist eine Erfindung von Tschirnhausen, das Eliminationsverfahren kann jedoch ein sehr verschiedenes sein, wie aus dem vorangehenden und dem nachfolgenden Paragraphen ersichtlich ist.

§ 172. Reduction der vollständigen kubischen Gleichung auf eine rein kubische nach Tschirnhausen mittels der Eliminationsmethode von Euler und Bézout, verbessert von Sylvester und Hesse*).

Um die Unbekannte x aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

*) Hesse, Crelle's Journ. Bd. 27. 1844.
Sylvester, Phil. Mag. XVI. 1840.
Tortolini, Ann. di Mat. Roma 1858.
Katter, Progr. von Putbus 1876.
Man vergl. auch oben § 42 und § 44. Zeitschr. für Math. u. Phys. IV. S. 82. 1859, und Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung. II. Bd. § 95 b. Nr. 31. VII.

und

$$F(x) = x^2 + vx + u = 0$$

zu eliminiren gab Euler im Jahre 1764 folgendes Verfahren an. Es sei x_1 eine gemeinschaftliche Wurzel der beiden Polynome und

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x^2 + Ax + B),$$
$$x^2 + vx + u = (x - x_1)(x + V).$$

Hieraus folgt

$$(x^2 + vx + u)(x^2 + Ax + B) = (x + V)(x^3 + ax^2 + bx + c).$$

Durch Ausführung der Multiplication und Gleichsetzung der homologen Coefficienten der Unbekannten erhält man eine Reihe linearer Gleichungen, deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist:

$$\begin{aligned} -v - A \qquad\quad + a + V &= 0, \\ -u - vA - B + b + aV &= 0, \\ -uA - vB + c + bV &= 0, \\ -uB \qquad + cV &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich die drei Grössen A, B und V eliminiren, so dass man erhält

$$[v, u, a, b, c] = 0.$$

Diese linearen Bestimmungsgleichungen sind nun von Sylvester und Hesse zur Bildung einer Determinante benutzt. Fügt man noch zur ersten und vierten Verticalreihe die Grössen C und D als Factoren (gleich der Einheit) hinzu und zur Vervollständigung der Gruppe noch die fünfte Reihe

$$-C - 0A - 0B + D + 0V = 0,$$

so erhält man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v & 1 & 0 & 1 & a \\ u & v & 1 & a & b \\ 0 & u & v & b & c \\ 0 & 0 & u & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & b & c \\ 1 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v & u \\ 0 & 1 & v & u & 0 \\ 1 & v & u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Um diese Determinantenform der Resultante zu erhalten, multiplicirt Hesse die beiden Gleichungen

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$
$$F(x) = x^2 + vx + u = 0,$$

der Reihe nach, und zwar $f(x)$ mit x, x^2, $F(x)$ mit x, x^2, x^3 und schreibt sie so unter einander, dass die homologen Glieder untereinander zu stehen kommen, wie folgt

$$
\begin{array}{rl}
x^4 + ax^3 + bx^2 + cx &= 0, \\
x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 \quad &= 0, \\
x^3 + vx^2 + ux &= 0, \\
x^4 + vx^3 + ux^2 \quad &= 0, \\
x^5 + vx^4 + ux^3 \quad &= 0.
\end{array}
$$

In diesen Gleichungen betrachtet Hesse die verschiedenen Potenzen von x als lineare Unbekannte und erhält durch Auflösung der so entstandenen linearen Gleichungen die obige Determinante. Da mehrere Glieder gleich Null sind, so kann man die Determinante abkürzen, d. h. die Anzahl der Gleichungen und der linearen Unbekannten durch Elimination verringern*). Setzt man

$$x = \xi_1, \; x^2 = \xi_2, \; x^3 = \xi_3, \; x^4 = \xi_4, \; x^5 = \xi_5,$$

so erhält man durch Elimination von ξ_1 und ξ_5 statt 16 nur 9 Elemente

$$
\begin{array}{rl}
\xi_4 + v\xi_3 + u\xi_2 &= 0, \\
v\xi_4 + (u - b + av)\,\xi_3 + (au - c)\,\xi_2 &= 0, \\
u\xi_4 + (au - c)\,\xi_3 + (bu - cv)\,\xi_2 &= 0.
\end{array}
$$

Die Determinante ist

$$
\begin{vmatrix}
1, & v, & u \\
v, & u - b + av, & au - c \\
u, & au - c, & bu - cv
\end{vmatrix} = 0,
$$

oder auch

$$
\begin{vmatrix}
1, & v, & u \\
a - v, & b - u, & c \\
u, & au - c, & bu - cv
\end{vmatrix} = 0,
$$

und die Finalgleichung nach Potenzen von u geordnet,

$$
\begin{aligned}
u^3 - [a(v - a) + 2b]\,u^2 + [b(v^2 - av + b) + c(3v - 2a)]\,u \\
- c(v^3 - av^2 + bv - c) = 0.
\end{aligned}
$$

Ordnet man nach v, so erhält man

$$
\begin{aligned}
cv^3 - (bu - ac)\,v^2 + [a(u^2 - bu) + c(3u + b)]\,v \\
- [u^3 - (a^2 - 2b)\,u^2 + (b^2 - 2ac)\,u - c^2] = 0.
\end{aligned}
$$

In dieser Gleichung hat das Absolutglied die Form der Gleichung der Wurzelquadrate von $f(u) = 0$.

---

*) Methode von Bézout § 45 oben.

Man kann nun noch eine zweite willkürliche Grösse in die Gleichung einführen, indem man $w - y$ an die Stelle von u setzt, also substituirt

$$F(x) = x^2 + vx + w - y = 0.$$

Ordnet man die neue Transformirte nach Potenzen von y, so erhält man

$$y^3 - [3w - a(v-a) - 2b]y^2 + [3w^2 - (2av - 2a^2 + 4b)w + b(v^2 - av + b) + c(3v - 2a)]y - [w^3 - (av - a^2 + 2b)w^2 + [b(v^2 - av + b) + c(3v - 2a)]w - c(v^3 - av^2 + bv - c)] = 0.$$

Führt man nun die Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ in die u-Gleichung ein, so erhält man die Resolvente

$$(a^2 - 3b)v^2 - (2a^3 - 7ab + 9c)v + (a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0,$$

die in die Resolvente IX. übergeht, wenn man $-2z$ an die Stelle von v setzt. Die Gleichung in u lässt sich dann auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reduciren. Führt man die Reducente (6) in die v-Gleichung ein, so erhält man die Resolvente

$$(b^2 - 3ac)u^2 + (ab - 9c)cu + (a^2 - 3b)c^2 = 0,$$

welche in die Resolvente II. übergeht, wenn z an die Stelle von $c : u$ gesetzt wird.

Die Gleichung in y aber verwandelt sich in eine rein kubische, wenn man die Coefficienten der beiden mittleren Glieder gleich Null setzt; also

$$3w - av + a^2 - 2b = 0,$$
$$3w^2 - 2avw + bv^2 + 2(a^2 - 2b)w - (ab - 3c)v + (b^2 - 2ac) = 0.$$

Eliminirt man w, so erhält man dieselbe Resolvente in v, wie vorhin; eliminirt man v, so erhält man

$$(a^2 - 3b)w^2 - (a^2b + 3ac - 4b^2)w + \frac{1}{3}(a^3c - a^2b^2 - 6abc + 4b^3) = 0.$$

Das Absolutglied dieser Resolvente ist die Reducente (16).

Bei quadratischen Substitutionen ist zu beachten, dass jedesmal nur **eine** der beiden Wurzeln von $F(x) = 0$ Gültigkeit hat, weil sonst ja mittels der quadratischen Resolvente in v die Unbekannte x direct bestimmt werden könnte. Denn es müsste sein

$$v_1 = -(x_1 + x_2), \quad v_2 = -(x_1 + x_3) \quad \text{oder} \quad -(x_2 + x_3);$$

mithin die Gleichung in v vom dritten Grade und

$$v_1 + v_2 = -x_1 + a = \frac{2a^3 - 7ab + 9c}{a^2 - 3b},$$

oder

$$v_1 v_2 = x_1^2 + b = \frac{a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2}{a^2 - 3b}.$$

An der v-Gleichung lässt sich nun noch ein in § 163 aufgestelltes Theorem beweisen. Das dritte Theorem lautet:

Wenn die kubische Variante $2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma$ einer durch eine quadratische Substitution $x^2 + vx + c : z = 0$ variirten kubischen Gleichung verschwindet, so wird auch die kubische Covariante $C_{3,3}(z)$ gleich Null.

Wenn man nämlich in die v-Gleichung die Reducente (9)

$$2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma = 0$$

introducirt und $c : z$ an die Stelle von u setzt, so erhält man

$$C_{3,3}(z) = (2a^3 - 9ab + 27c)z^3 + 3(a^2b + 9ac - 6b^2)z^2$$
$$- 3(ab^2 + 9bc - 6a^2c)z - (2b^3 - 9abc + 27c^2) = 0.$$

§ 173. Methode der Substitution zweier linearer Functionen der Unbekannten.

Die Substitution der quadratischen Function

$$x^2 + vx + u = 0$$

lässt sich offenbar auf diejenige zweier linearer zurückführen. Es seien die beiden Wurzeln der quadratischen Function $z + y$ und $z - y$, also

$$x^2 + vx + u = (x - z - y)(x - z + y) = 0,$$

so gibt dies die Substituirte

$$x^2 - 2zx + (z^2 - y^2) = 0.$$

Die Tschirnhausen-Euler'sche Transformation ergab die Gleichung

$$u^3 - [a(v - a) + 2b]\,u^2 + [b(v^2 - av + b) + c(3v - 2a)]\,u$$
$$- c(v^3 - av^2 + bv - c) = 0.$$

Setzt man $-2z$ an die Stelle von v, $z^2 - y^2$ an die von u, so erhält man die Transformirte für die beiden linearen Functionen

$$x - (z \pm y) = 0.$$

Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von y, so erhält man

$$y^6 - [3z^2 + 2az + (a^2 - 2b)]y^4 + [3z^4 + 4az^3 + 2a^2z^2 + 2(ab - 3c)z$$
$$+ (b^2 - 2ac)]y^2 - [z^3 + az^2 + bz + c]^2 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in die Differenz zweier Quadrate

$$[y^3-(3z^2+2az+b)y]^2-[(3z+a)y^2+(z^3+az^2+bz+c)]^2=0$$

oder in das Product

$$[y^3+(3z+a)y^2+(3z^2+2az+b)y+(z^3+az^2+bz+c)]\times$$
$$[y^3-(3z+a)y^2+(3z^2+2az+b)y-(z^3+az^2+bz+c)]=0$$

verwandeln. Setzt man jedes der Polynome gleich Null, so liefert mit Anwendung der Reducente (8) $\beta^2-3\alpha\gamma=0$ das eine Polynom die negativen Wurzelwerthe des andern und man hat

$$x_1=z+y\,,\quad x_2=z-y\,.$$

Da z zwei Werthe und y deren drei hat, so würde man im Ganzen zwölf verschiedene Wurzeln erhalten. Sie genügen nicht alle der gegebenen Gleichung, sondern ein Wurzelwerth der quadratischen Function in x. Dagegen sind beide Werthe von z und sämmtliche Wurzeln einer der Gleichungen in y gültig, nämlich der ersten für die Substitution $x=z+y$ und der zweiten für die Substitution $x=z-y$. Unter diesen sechs Wurzeln sind dann je zwei einander gleich.

§ 174. Methode der Substitution einer rein quadratischen Function.

In die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ setze man ein

$$x^2-(u+z)=0\,.$$

Man eliminire x aus beiden Gleichungen, was am einfachsten dadurch geschieht, dass man die Gleichung der Wurzelquadrate der vorgelegten Gleichung bildet und dann $x^2=u+z$ substituirt. Die Resultante ist

$$u^3+[3z-(a^2-2b)]\,u^2+[3z^2-2(a^2-2b)z+(b^2-2ac)]\,u$$
$$+[z^3-(a^2-2b)\,z^2+(b^2-2ac)z-c^2]=0\,.$$

Führt man die Reducente (8) $\beta^2-3\alpha\gamma=0$ ein, so erhält man die Resolvente

$$(a^4-4a^2b+6ac-b^2)z^2-(a^2b^2-2a^3c+4abc-2b^3-9c^2)z$$
$$+(a^2c^2-4ab^2c+6bc^2+b^4)=0\,.$$

Die Coefficienten des ersten und letzten Gliedes sind die Reducenten (13) und (15). Die Methode liefert sechs Wurzeln, von denen drei fremde Auflösungen sind.

§ 175. Methode der Auflösung durch Substitution einer rein kubischen Function.

Wir gehen aus von der unvollständigen Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

und substituiren

$$x^3 - (x' + z) = 0.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander, so erhält man

$$px + (q + x' + z) = 0$$

oder

$$x = -\frac{q + x' + z}{p}.$$

Setzt man diesen Werth von x in die vorgelegte Gleichung ein, und ordnet nach Potenzen der Unbekannten, so resultirt

$$x'^3 + 3(z+q)x'^2 + 3\left[(z+q)^2 + \frac{1}{3}p^3\right]x' + [(z+q)^3 + p^3 z] = 0$$

oder kurz

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0.$$

Mittels Einführung der Reducente (8) $\beta^2 - 3\alpha\gamma = 0$ erhält man die Resolvente

$$z^2 - qz - \frac{1}{3}(p^3 + 6q^2) = 0,$$

also

$$z_1 \text{ und } z_2 = \frac{1}{2} q \left[1 \pm 3\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right].$$

Nach der Methode von Cockle ist nun

$$x' = \frac{u}{\sqrt[3]{1} \, . \, v - 1}$$

unter folgenden Voraussetzungen:

$$\frac{3u}{1 - v^3} = 3(z + q), \quad \frac{3u^2}{1 - v^3} = 3\left[(z+q)^2 + \frac{1}{3}p^3\right].$$

Daraus folgt

$$u = (z + q) + \frac{1}{3}\frac{p^3}{z + q}$$

$$1 - v^3 = \frac{u}{z + q} = 1 + \frac{p^3}{3(z+q)^2},$$

und

$$v = -\frac{p}{z+q}\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\frac{1}{3}(z+q)}.$$

Hieraus findet man weiter

$$x' = -\frac{(z+q)^2 + \frac{1}{3}p^3}{(z+q) + p\sqrt[3]{\frac{1}{3}(z+q)}},$$

$$z + q = \frac{3}{2}q\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right),$$

und

$$x = \sqrt[3]{x' + z}.$$

Setzt man im Divisor von x' den Factor $\sqrt[3]{z+q}$ heraus, so wird

$$x' = -\frac{1}{\sqrt[3]{z+q}} \cdot \frac{(z+q)^2 + \frac{1}{3}p^3}{\sqrt[3]{(z+q)^2} + \sqrt[3]{\frac{1}{3}p^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(z+q)^4} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}p^3(z+q)^2} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}p^6}}{\sqrt[3]{z+q}}.$$

Folglich ist

$$x' + z = x^3$$

$$= -q + p\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}\right]$$

und

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}},$$

welches die Cardani'sche Formel ist.

§ 176. Methode der Substitution einer zweiten vollständigen kubischen Function der Unbekannten.

Es sei

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

und

$$F(x) = x^3 + vx^2 + ux - c = 0.$$

Addirt man die beiden Gleichungen, so erhält man

$$x^2 + \frac{1}{2}(a+v)x + \frac{1}{2}(b+u) = 0.$$

Subtrahirt man dieselben von einander, so ergibt sich daraus

$$x^2 + \frac{b-u}{a-v}\,x + \frac{2c}{a-v} = 0.$$

Durch Elimination von x aus diesen beiden quadratischen Gleichungen gelangt man zur Finalgleichung in u:

$$u^3 - (av - a^2 + b)u^2 + [b(v^2 - 2av + a^2) + 2c(3v - a) + b^2]u$$
$$- [cv^3 - (b^2 - ac)v^2 + (ab^2 - a^2c - 4bc)v - (a^3c - 6abc + b^3 + 8c^2)] = 0.$$

Bei Einführung der Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ erhält man, nachdem man $v + a = -4z$ gesetzt hat, die Resolvente IX:

$$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c)z + \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0.$$

Aus den beiden quadratischen Gleichungen in x folgt weiter

$$x^2 - 2zx + \frac{1}{2}(b + u) = 0$$

und

$$x^2 + \frac{b-u}{2(2z+a)}\,x + \frac{c}{2z+a} = 0,$$

sowie hieraus

$$x = \frac{2(b+u)z + a(b+u) + 2c}{8z^2 + 4az + (b-u)}.$$

Da die Reducirte in u auf den Kubus einer dreitheiligen Grösse gebracht werden kann, so können aus zwei Werthen von u und z die Wurzeln x_1, x_2, x_3 berechnet werden.

§ 177. Eine andere Methode der Substitution einer kubischen Function.

Gegeben sei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Man substituire

$$\left(\frac{x + \frac{1}{3}a + z_1}{x + \frac{1}{3}a + z_2}\right)^3 - \frac{z_1}{z_2} = 0.$$

Entwickelt man die Substituirte nach Potenzen von x, also

$$x^3 + ax^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 - 3z_1z_2\right)x + \left(\frac{1}{27}a^3 - az_1z_2 - z_1z_2[z_1 + z_2]\right) = 0,$$

so ergeben sich aus der Vergleichung homologer Coefficienten dieser und der vorgelegten Gleichung folgende zwei Bestimmungsgleichungen für z_1 und z_2:

$$z_1 + z_2 = -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{3(a^2 - 3b)},$$

$$z_1 z_2 = \frac{1}{9}(a^2 - 3b).$$

Demgemäss sind z_1 und z_2 die beiden Wurzeln der Resolvente X

$$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{3}(2a^3 - 9ab + 27c)z + \frac{1}{9}(a^2 - 3b)^2 = 0,$$

und die gesuchten Wurzelwerthe

$$x_1 = -\frac{1}{3}a - \frac{z_2\sqrt[3]{z_1} - z_1\sqrt[3]{z_2}}{\sqrt[3]{z_1} - \sqrt[3]{z_2}} = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{z_1 z_2}\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right),$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}a - \frac{z_2\sqrt[3]{z_1} - J_1 z_1\sqrt[3]{z_2}}{\sqrt[3]{z_1} - J_1\sqrt[3]{z_2}} = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{z_1 z_2}\left(J_1\sqrt[3]{z_1} + J_2\sqrt[3]{z_2}\right)$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}a - \frac{z_2\sqrt[3]{z_1} - J_2 z_1\sqrt[3]{z_2}}{\sqrt[3]{z_1} - J_2\sqrt[3]{z_2}} = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{z_1 z_2}\left(J_2\sqrt[3]{z_1} + J_1\sqrt[3]{z_2}\right)$$

§ 178. Methode von Faure*).

Dieselbe besteht in der Substitution einer der Functionen von Bretschneider (§ 152), nämlich

$$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3 - \frac{a + 3z_1}{a + 3z_2} = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von x und vergleicht die homologen Coefficienten dieser und der aufzulösenden Gleichung $f(x) = 0$, so kommt man auf die Resolvente II:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Aus der Substituirten folgt dann leicht die bekannte Wurzelform

$$x = \frac{z_2\sqrt[3]{a + 3z_1} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{a + 3z_2}}{\sqrt[3]{a + 3z_1} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{a + 3z_2}},$$

wo an die Stelle von $\sqrt[3]{1}$ nach der Reihe zu setzen ist 1, J_1 und J_2.

In Berücksichtigung des Umstandes, dass

$$(a + 3z_1)(a + 3z_2) = a^2 - 3b$$

ist, wird

$$x = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2 - 3b}\left(\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{a + 3z_1} + \sqrt[3]{1}^{-2}\sqrt[3]{a + 3z_2}\right).$$

*) Nouv. ann. math. II. Sér. III. T. p. 116. 1864.

Da nun

$$\frac{x_1 - z_1}{x_1 - z_2} = \sqrt[3]{\frac{a + 3z_1}{a + 3z_2}}, \quad \frac{x_2 - z_1}{x_2 - z_2} = J_1 \sqrt[3]{\frac{a + 3z_1}{a + 3z_2}},$$

$$\frac{x_3 - z_1}{x_3 - z_2} = J_2 \sqrt[3]{\frac{a + 3z_1}{a + 3z_2}}$$

ist, so ergeben sich hieraus noch folgende Relationen für die drei gesuchten Wurzeln, oder wenn man will für die Fehler der Substitutionen,

$$\frac{x_1 - z_1}{x_1 - z_2} = J_2 \frac{x_2 - z_1}{x_2 - z_2} = J_1 \frac{x_3 - z_1}{x_3 - z_2}.$$

§ 179. Methode der Substitution verschiedener anderer kubischen Functionen.

Die Resultate der Discussion in § 162 führen uns zu verschiedenen kubischen Substitutionen, wodurch die Wurzelwerthe auf symmetrische Formen gebracht werden.

a) Man substituire

$$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3 - \frac{z_1^3 + c}{z_2^3 + c} = 0,$$

und entwickele nach Potenzen von x, wie folgt:

$$x^3 - 3\frac{z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2) - c(z_1 - z_2)}{z_1^3 - z_2^3} x^2 + 3\frac{z_1^2 z_2^2 (z_1 - z_2) - c(z_1^2 - z_2^2)}{z_1^3 - z_2^3} x + c = 0.$$

Ist die vorgelegte Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so ist die Bedingung der Identität

$$a(z_1^3 - z_2^3) + 3z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2) - 3c(z_1 - z_2) = 0.$$

Weil nun im Allgemeinen z_1 nicht gleich z_2 ist, so dividire man diese Gleichung durch $z_1 - z_2$, woraus resultirt

$$\text{I.} \quad a(z_1 + z_2)^2 + z_1 z_2 [3(z_1 + z_2) - a] - 3c = 0.$$

Ferner folgt aus der Gleichung in x

$$b(z_1^3 - z_2^3) - 3z_1^2 z_2^2 (z_1 - z_2) + 3c(z_1^2 - z_2^2) = 0,$$

und nachdem man durch $z_1 - z_2$ dividirt hat

$$\text{II.} \quad b(z_1 + z_1)^2 - z_1 z_2 (3z_1 z_2 + b) + 3c(z_1 + z_2) = 0.$$

Eliminirt man c aus I. und II., so erhält man

$$\text{III.} \quad 3z_1 z_2 + a(z_1 + z_2) + b = 0.$$

Multiplicirt man III. mit $z_1 + z_2$ und subtrahirt I., so erhält man

$$\text{IV.}\quad a z_1 z_2 + b(z_1 + z_2) + 3c = 0.$$

Aus III. und IV. folgen dann die Beziehungen

$$z_1 + z_2 = -\frac{ab - 9c}{a^2 - 3b}, \quad z_1 z_2 = \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b}.$$

Demnach sind z_1 und z_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Resolvente II.:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Die Wurzelform ist also

$$x = \frac{z_2 \sqrt[3]{z_1^3 + c} - z_1 \sqrt[3]{1} \sqrt[3]{z_2^3 + c}}{\sqrt[3]{z_1^3 + c} - \sqrt[3]{1} \sqrt[3]{z_2^3 + c}}.$$

b) Schneller kommt man zum Ziele, wenn man substituirt

$$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3 - \frac{a z_1^2 + b z_1}{a z_2^2 + b z_2} = 0.$$

Entwickelt man diese Substituirte in die Gleichung

$$x^3 - 3a \frac{z_1 z_2}{a(z_1 + z_2) + b} x^2 - 3b \frac{z_1 z_2}{a(z_1 + z_2) + b} x + \frac{a z_1^2 z_2^2 + b z_1 z_2 (z_1 + z_2)}{a(z_1 + z_2) + b} = 0,$$

so erhält man ohne Weiteres

$$\text{I.}\quad 3 z_1 z_2 + a(z_1 + z_2) + b = 0,$$

und

$$\text{II.}\quad a z_1 z_2 + b(z_1 + z_2) + 3c = 0.$$

c) Bezeichnen wir die gegebene Gleichung mit $f(x) = 0$ und substituiren

$$\left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3 - \frac{f(z_1)}{f(z_2)} = 0,$$

so wird

$$x^3 - 3 \frac{z_2 f(z_1) - z_1 f(z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} x^2 + 3 \frac{z_2^2 f(z_1) - z_1^2 f(z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} x - \frac{z_2^3 f(z_1) - z_1^3 f(z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} = 0.$$

Daraus folgt zunächst das System

$$\begin{aligned}
(3z_2 + a) f(z_1) - (3z_1 + a) f(z_2) &= 0, \\
(3z_2^2 - b) f(z_1) - (3z_1^2 - b) f(z_2) &= 0, \\
(z_2^3 + c) f(z_1) - (z_1^3 + c) f(z_2) &= 0,
\end{aligned}$$

und hieraus die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 3z_2 + a, & 3z_1 + a \\ 3z_2^2 - b, & 3z_1^2 - b \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3z_2 + a, & 3z_1 + a \\ z_2^3 + c, & z_1^3 + c \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man dieselben, so resultirt wiederum die Resolvente II. und

$$x = \frac{z_2 \sqrt[3]{z_1^3 + az_1^2 + bz_1 + c} - z_1 \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + az_2^2 + bz_2 + c}}{\sqrt[3]{z_1^3 + az_1^2 + bz_1 + c} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + az_2^2 + bz_2 + c}},$$

oder kurz

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{f(z_1)} - z_1 \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}.$$

§ 180. Methode der Factorenzerlegung eines binären kubischen Polynoms von Heilermann*).

Um die kubische Function

$$\text{I.} \quad f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

in lineare Factoren zu zerlegen, also die kubische Gleichung Cayley'scher Form

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3b\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3c\left(\frac{x}{y}\right) + d = 0$$

aufzulösen, substituirt Heilermann

$$\text{II.} \quad x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta.$$

Dies gibt die Transformirte

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & [a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3]\xi^3 \\ & + 3[(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)\beta + (b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2)\delta]\xi^2\eta \\ & + 3[(a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2)\alpha + (b\beta^2 + 2c\beta\delta + d\delta^2)\gamma]\xi\eta^2 \\ & + [a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3]\eta^3 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man die beiden mittleren Glieder gleich Null, so entstehen daraus für die unbestimmten Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\text{III.} \quad \begin{cases} (a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)\beta + (b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2)\delta = 0, \\ (a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2)\alpha + (b\beta^2 + 2c\beta\delta + d\delta^2)\gamma = 0. \end{cases}$$

Aus diesen folgen durch Elimination der ersten und letzten Glieder die Gleichungen

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} a\alpha\beta(\alpha\delta - \beta\gamma) + b(\alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma) + c\gamma\delta(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \\ b\alpha\beta(\alpha\delta - \beta\gamma) + c(\alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma) + d\gamma\delta(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0; \end{cases}$$

*) Heilermann, Zerlegung der homogenen quadratischen, kubischen und biquadratischen Functionen zweier Veränderlichen. §. 2. Trier 1855.

Man sieht sogleich, dass die Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, welche den beiden letzten Gleichungen genügt, nicht die Bedingungen enthält, welche die Gleichungen III. ausdrücken; folglich erhält man durch Division mit $\alpha\delta - \beta\gamma$ aus IV. die Gleichungen

$$\text{V.} \begin{cases} a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = 0, \\ b\alpha\beta + c(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\gamma\delta = 0. \end{cases}$$

Aus diesen ergibt sich weiter

$$\text{VI.} \begin{cases} (b^2 - ac)\alpha^2 + (bc - ad)\alpha\gamma + (c^2 - bd)\gamma^2 = 0, \\ (b^2 - ac)\beta^2 + (bc - ad)\beta\delta + (c^2 - bd)\delta^2 = 0. \end{cases}$$

Hiernach sind nun $\alpha : \gamma$ und $\beta : \delta$ Wurzeln der quadratischen Resolvente

$$\text{VII.} \quad Az^2 + 2Bz + C = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$(b^2 - ac) = A, \quad (bc - ad) = 2B, \quad (c^2 - bd) = C$$

gesetzt wird. Es müssen aber für $\alpha : \gamma$ und $\beta : \delta$ die verschiedenen Wurzelwerthe z_1 und z_2 der Gleichung VII. genommen werden, weil nur dadurch den Gleichungen V. genügt wird. Nach § 121 ist also

$$\text{VIII.} \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\gamma} = -\dfrac{C + B - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}}{A + B + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}} \quad \text{und} \quad \dfrac{\beta}{\delta} = -\dfrac{C + B + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}}{A + B - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}}, \\ \text{oder} \\ \dfrac{\alpha}{\gamma} = -\dfrac{C + B + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}}{A + B - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}} \quad \text{und} \quad \dfrac{\beta}{\delta} = -\dfrac{C + B - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}}{A + B + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_3}}, \end{cases}$$

wo $\overline{D}_3$ nach unserer Bezeichnung die Discriminante der kubischen Function $f(x, y)$ bedeutet.

Hierdurch sind die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zwar nicht vollständig bestimmt, aber gerade die Verbindungen derselben, welche in der kubischen Function vorkommen. Denn setzt man die durch Umkehrung der Gleichungen II. erhaltenen Werthe

$$\xi = \frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \eta = \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

in die Function ein, so erhält man

$$\text{IX.}\quad f(x,y) = (a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3)\left(\frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right)^3$$
$$+ (a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3)\left(\frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right)^3.$$

In dieser Darstellung enthält Dividend und Divisor eines jeden Gliedes drei Dimensionen von α und γ, sowie von β und δ, so dass alle darin vorkommenden Coefficienten α, β, γ, δ auf die Quotienten $\alpha:\gamma$ und $\beta:\delta$ zurückgeführt werden können. Aus demselben Grunde ist nun auch gestattet, die Gleichungen VIII. zu ersetzen durch

$$\text{X.}\quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\overline{D}_3} \mp 2B \mp 2C, & \beta = \sqrt{\overline{D}_3} \pm 2B \pm 2C, \\ \gamma = \sqrt{\overline{D}_3} \pm 2B \pm 2A, & \delta = \sqrt{\overline{D}_3} \mp 2B \mp 2A. \end{cases}$$

Bezeichnet man noch mit $f(\alpha, \gamma)$ und $f(\beta, \delta)$ die Werthe, welche die Function $f(x, y)$ annnimmt, wenn α und γ im ersten, β und δ im andern Falle statt x und y gesetzt werden, so ist durch

$$f(x,y) = f(\alpha,\gamma)\left(\frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right)^3 + f(\beta,\delta)\left(\frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right)^3$$

die Function $f(x, y)$ dargestellt als Summe zweier Kuben und lässt sich also unmittelbar in drei Factoren zerlegen. Es ist nämlich

$$\text{XI.}\quad \begin{aligned} f(x,y) = {} & \left[\frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}\sqrt[3]{f(\alpha,\gamma)} + \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma}\sqrt[3]{f(\beta,\delta)}\right] \\ & \times\left[\frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma} J_1 \sqrt[3]{f(\alpha,\gamma)} + \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma} J_2 \sqrt[3]{f(\beta,\delta)}\right] \\ & \times\left[\frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma} J_2 \sqrt[3]{f(\alpha,\gamma)} + \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma} J_1 \sqrt[3]{f(\beta,\delta)}\right]. \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen X. nehmen die oft vorkommenden Verbindungen der Grössen α, β, γ, δ folgende Werthe an:

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} \alpha\beta = -4C(A + 2B + C), & \gamma\delta = -4A(A + 2B + C), \\ \alpha\delta = 2\left(2B \pm \sqrt{\overline{D}_3}\right)(A + 2B + C), & \beta\gamma = 2\left(2B \mp \sqrt{\overline{D}_3}\right)(A + 2B + C), \\ \alpha\delta + \beta\gamma = 8B(A + 2B + C), & \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 4\sqrt{\overline{D}_3}(A + 2B + C). \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken ist

$$A + 2B + C = (b + c)^2 - (a + b)(c + d),$$
$$\overline{D}_3 = (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd).$$

Nachdem nun durch die Gleichungen X. und XI. die Function

$$f(x,y) = (a, b, c, d \,\widehat{)}\, (x, y)^3$$

in ihre linearen Factoren zerlegt ist, müssen noch die Fälle, in welchen die allgemeine Entwickelung eine wesentliche Abänderung erleidet, besonders untersucht werden.

Wenn

$$A + 2B + C = (b + c)^2 - (a + b)(c + d) = 0$$

wird, so nehmen die Wurzeln der Gleichung VII. nicht die unter VIII. angegebene Form an, sondern es ist gemäss § 121 (9)

$$Az^2 + 2Bz + C = (Az - C)(z - 1);$$

folglich

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{C}{A} \text{ und } \frac{\beta}{\delta} = 1; \qquad \text{oder } \frac{\alpha}{\gamma} = 1 \text{ und } \frac{\beta}{\delta} = \frac{C}{A}.$$

Statt der Werthe X. ist also in diesem Falle in die Zerlegung XI. zu setzen

$$\text{XIII.} \quad \begin{cases} \phantom{\text{oder }} \alpha = C, & \beta = 1, & \gamma = A, & \delta = 1, \\ \text{oder } \alpha = 1, & \beta = C, & \gamma = 1, & \delta = A. \end{cases}$$

Noch wichtiger ist der Fall, in welchem die Discriminante der Gleichung VII. oder der Function $f(x, y)$ verschwindet, also

$$\text{XIV.} \quad \overline{D_3} = a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 6abcd = 0$$

wird, wenn also die Gleichung VII., durch welche $\alpha : \gamma$ und $\beta : \delta$ bestimmt werden, zwei gleiche Wurzeln hat. Die Werthe der beiden Quotienten gehen dadurch über in

$$\text{XV.} \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} = \pm \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{B}{A} = -\frac{C}{B},$$

und die Bestimmungsgleichungen III. werden einander gleich, indem sie beide die Form

$$\text{XVI.} \quad f(\alpha, \gamma) = a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3 = 0$$

annehmen. Diese Gleichung enthält nun auch die Wurzel XV. zweimal; folglich ist

$$f(\alpha, \gamma) = \left(\frac{a}{A}\alpha + \frac{d}{C}\gamma\right)(A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2),$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \text{XVII.} \quad f(x, y) &= \left(\frac{a}{A}x + \frac{d}{C}y\right)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \\ &= \left(\frac{a}{A}x + \frac{d}{C}y\right)(\sqrt{A}\,x \pm \sqrt{C}\,y)^2. \end{aligned}$$

Aus der Zerlegung der Function $f(x, y)$ ergibt sich nun auch ohne Weiteres die Auflösung der kubischen Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0\,.$$

Nach XI. ist nämlich

$$\text{XVIII.}\quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha\sqrt[3]{f(\beta,\delta)} - \beta\sqrt[3]{f(\alpha,\gamma)}}{\gamma\sqrt[3]{f(\beta,\delta)} - \delta\sqrt[3]{f(\alpha,\gamma)}},$$

und zwar werden hierdurch alle drei Wurzeln dargestellt, wenn die Grössen $\sqrt[3]{f(\alpha,\gamma)}$ und $\sqrt[3]{f(\beta,\delta)}$ dreideutig genommen werden.

Man kann dieser Formel zur Auflösung der kubischen Gleichungen noch einige andere bemerkenswerthe Formen geben. Es ist nämlich zunächst

$$f(\alpha,\gamma) = (a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)\alpha + (b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2)\gamma,$$

und wegen der ersten Gleichung in III. ist weiter

$$\begin{aligned} f(\alpha,\gamma) &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta}(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) \\ &= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta}(b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2) \\ &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta}[(a\alpha + b\gamma)\alpha + (b\alpha + c\gamma)\gamma] \\ &= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta}[(b\alpha + c\gamma)\alpha + (c\alpha + d\gamma)\gamma]\,. \end{aligned}$$

Nimmt man nun noch die Gleichungen V., nämlich

$$(a\alpha + b\gamma)\beta + (b\alpha + c\gamma)\delta = 0,$$

und

$$(b\alpha + c\gamma)\beta + (c\alpha + d\gamma)\,\delta = 0,$$

zu Hülfe, so erhält man für $f(\alpha,\gamma)$ und in ähnlicher Weise für $f(\beta,\delta)$ folgende Ausdrücke:

$$\begin{cases} f(\alpha,\gamma) = \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta}\right)^2(a\alpha + b\gamma) = -\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\beta\delta}(b\alpha + c\gamma) = \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta}\right)^2(c\alpha + d\gamma), \\ f(\beta,\delta) = \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma}\right)^2(a\beta + b\delta) = -\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\alpha\gamma}(b\beta + c\delta) = \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha}\right)^2(c\beta + d\delta). \end{cases}$$

Durch Einführung dieser Werthe verwandelt sich die Formel XVIII. in

$$\text{XX.}\quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt[3]{\alpha(c\beta + d\delta)} - \sqrt[3]{\beta(c\alpha + d\gamma)}}{\sqrt[3]{\gamma(a\beta + b\delta)} - \sqrt[3]{\delta(a\alpha + b\gamma)}}\,.$$

Nun ist aber weiter nach den Formeln XII.:

$$\begin{aligned}
\alpha(c\beta+d\delta) &= -2(A+2B+C)\left(2cC-2dB\mp d\sqrt{D_3}\right)\\
&= -2(A+2B+C)\left(2c^3-3bcd+ad^2\mp d\sqrt{D_3}\right);\\
\beta(c\alpha+d\gamma) &= -2(A+2B+C)\left(2cC-2dB\pm d\sqrt{D_3}\right)\\
&= -2(A+2B+C)\left(2c^3-3bcd+ad^2\pm d\sqrt{D_3}\right);\\
\gamma(a\beta+b\delta) &= -2(A+2B+C)\left(2bA-2aB\pm a\sqrt{D_3}\right)\\
&= -2(A+2B+C)\left(2b^3-3abc+a^2d\pm a\sqrt{D_3}\right);\\
\delta(a\alpha+b\gamma) &= -2(A+2B+C)\left(2bA-2aB\mp a\sqrt{D_3}\right)\\
&= -2(A+2B+C)\left(2b^3-3abc+a^2d\mp a\sqrt{D_3}\right).
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken treten die Variante V_3 und die Retrovariante $V'_{3,\,3}$ auf, und in Folge dieser Gleichungen ist

$$\text{XXI.}\quad \frac{x}{y} = -\frac{\left(V'_{3,\,3}+d\sqrt{D_3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(V'_{3,\,3}-d\sqrt{D_3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(V_3+a\sqrt{D_3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(V_3-a\sqrt{D_3}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Wenn man in XVIII. die ersten Ausdrücke für $f(\alpha,\gamma)$ und $f(\beta,\delta)$ einsetzt, so erhält man:

$$\text{XXII.}\quad \frac{x}{y} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{\beta}{\delta}\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{1}{3}}-\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{1}{3}}},$$

oder

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a}+\frac{1}{a}\cdot\frac{\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{1}{3}}-\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{1}{3}}-\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Nun ist

$$\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right) = b^2-ac = A,$$

folglich

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a} + \frac{A^{\frac{1}{3}}}{a} \cdot \frac{\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{2}{3}} - \left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{1}{3}} - \left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{1}{a}\left[b + A^{\frac{1}{3}}\left(a\frac{\alpha}{\gamma}+b\right)^{\frac{1}{3}} + A^{\frac{1}{3}}\left(a\frac{\beta}{\delta}+b\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Setzt man hierin die Werthe von $\alpha:\gamma$ und $\beta:\delta$ ein, so resultirt

$$\text{XXIII.}\quad \frac{x}{y} = -\frac{1}{a}\left[b + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V_3 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{D_3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V_3 - \tfrac{1}{2}a\sqrt{D_3}}\right].$$

Diese Formel, aus welcher die Cardani'sche hervorgeht, wenn $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}p$, $d = q$ gesetzt wird, steht gegen die unter XVIII., XIX. und XXI. angegebenen dadurch zurück, dass sie die Coefficienten a und d, b und c nicht symmetrisch enthält. Ihr entspricht eine andere, welche in derselben Weise aus XXIII. abgeleitet werden kann, nämlich

$$\text{XXIV.}\quad \frac{y}{x} = -\frac{1}{d}\left[c + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V'_{3,3} + \tfrac{1}{2}d\sqrt{D_3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V'_{3,3} - \tfrac{1}{2}d\sqrt{D_3}}\right].$$

§ 181. Ueber den Zusammenhang der vorangehenden Methode mit der von Bretschneider erfundenen*).

Die Methode von Heilermann hängt im Princip mit der zuerst von Bretschneider angegebenen Methode zusammen. Das Princip der Substitution rührt ursprünglich von Bézout her, welches darin besteht, dass man setzt

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} \quad \text{oder} \quad x = \frac{z_1 w - z_2 v}{w - v},$$

und hierauf lässt sich auch die Substitution der beiden Functionen

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

reduciren. Um den Zusammenhang dieser Methoden ins Klare zu stellen, transformiren wir die Deductionen des vorangehenden Paragraphen in den wesentlichsten Puncten auf die einfachere Form

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

*) Man vergl. § 103, § 152, § 161 und § 162.

Die beiden Substitutionen lassen sich vereinigen zu

$$x = \frac{\alpha\beta + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} = \frac{\frac{\alpha\,\xi}{\delta\,\eta} + \frac{\beta}{\delta}}{\frac{\gamma\,\xi}{\delta\,\eta} + 1}.$$

Setzt man weiter

$$\frac{\gamma\,\xi}{\delta\,\eta} = -u, \quad \frac{\beta}{\delta} = z_1, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = z_2,$$

so resultirt

$$x = \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} \quad \text{und} \quad \frac{x - z_1}{x - z_2} = u.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in $f(x)$, so erhält man die nach Potenzen von u geordnete Gleichung

$$f(x)(u-1)^3 = f(z_2)u^3 - [(3z_2{}^2 + 2az_2 + b)z_1 + (az_2{}^2 + 2bz_2 + 3c)]u^2 \\ + [(3z_1{}^2 + 2az_1 + b)z_2 + (az_1{}^2 + 2bz_1 + 3c)]u - f(z_1).$$

Setzt man die Coefficienten der beiden mittleren Glieder gleich Null, so erhält man für z_1 und z_2 die Bestimmungsgleichungen

$$(3z_2{}^2 + 2az_2 + b)z_1 + (az_2{}^2 + 2bz_2 + 3c) = 0,$$
$$(3z_1{}^2 + 2az_1 + b)z_2 + (az_1{}^2 + 2bz_1 + 3c) = 0.$$

Eliminirt man die ersten und letzten Glieder, so ergibt sich

$$az_1z_2(z_1 - z_2) + b(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + 3c(z_1 - z_2) = 0,$$

und

$$3z_1z_2(z_1 - z_2) + a(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + b(z_1 - z_2) = 0.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch $z_1 - z_2$, so reduciren sie sich auf die Resolventen von Bretschneider, nämlich

$$az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + 3c = 0,$$
$$3z_1z_2 + a(z_1 + z_2) + b = 0,$$

so dass z_1 und z_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0$$

sein müssen. Indem Heilermann diese kurz mit

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

bezeichnet, bildet er daraus die bekannte Wurzelform, die wir in § 104 discutirt haben, nämlich

$$z_1 \text{ und } z_2 = -\frac{2C + B \pm \sqrt{3D_3}}{2A + B \mp \sqrt{3D_3}}$$

worin

$$D_3 = \frac{1}{3}(ab - 9c)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac),$$

also die Discriminante von $f(x)$ bedeutet.

Die reducirte kubische Function ist nun

$$f(x)(u - 1)^3 = f(z_2)u^3 - f(z_1).$$

Da ferner

$$u^3 = \left(\frac{x - z_1}{x - z_2}\right)^3, \quad (u - 1)^3 = \left(\frac{z_2 - z_1}{x - z_2}\right)^3$$

ist, so geht die Function $f(x)$ über in

$$f(x) = f(z_2)\left(\frac{x - z_1}{z_2 - z_1}\right)^3 - f(z_1)\left(\frac{x - z_2}{z_2 - z_1}\right)^3.$$

Dieselbe ist dargestellt als die Differenz zweier Kuben und lässt sich deshalb in drei lineare Factoren zerlegen, nämlich

$$\begin{aligned} f(x) = &\left[\frac{x - z_1}{z_2 - z_1}\sqrt[3]{f(z_2)} - \frac{x - z_2}{z_2 - z_1}\sqrt[3]{f(z_1)}\right] \\ &\times\left[\frac{x - z_1}{z_2 - z_1}J_1\sqrt[3]{f(z_2)} - \frac{x - z_2}{z_2 - z_1}J_2\sqrt[3]{f(z_1)}\right] \\ &\times\left[\frac{x - z_1}{z_2 - z_1}J_2\sqrt[3]{f(z_2)} - \frac{x - z_2}{z_2 - z_1}J_1\sqrt[3]{f(z_1)}\right]. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nun ohne Weiteres die Auflösung der kubischen Gleichung

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Es ist

$$x = \frac{z_2\sqrt[3]{f(z_1)} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}.$$

Dieses ist die zuerst von **Heilermann** angegebene Wurzelform; wir haben sie bereits in § 161 durch die Methode der falschen Substitution hergeleitet.

Im Folgenden leitet **Heilermann** noch eine andere neue Wurzelform der kubischen Gleichungen ab. Es ist

$$f(z_2) = \frac{1}{3}(3z_2^2 + 2az_2 + b)z_2 + \frac{1}{3}(az_2^2 + 2bz_2 + 3c),$$

und wegen der ersten Bestimmungsgleichung für z_1 und z_2

$$\frac{1}{3}(3z_2^2 + 2az_2 + b)z_1 + \frac{1}{3}(az_2^2 + 2bz_2 + 3c) = 0,$$

folglich

$$f(z_2) = \frac{1}{3}(z_2 - z_1)(3z_2^2 + 2az_2 + b) = -\frac{z_2 - z_1}{3z_1}(az_2^2 + 2bz_2 + 3c),$$

oder

$$f(z_2) = \frac{1}{3}(z_2 - z_1)\,[(3z_2 + a)z_1 + (az_2 + b)]$$

$$= -\frac{z_2 - z_1}{3z_1}\,[(az_2 + b)z_2 + (bz_3 + 3c)]\,.$$

Zieht man noch die früheren Bestimmungsgleichungen

$$az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + 3c = 0\,,$$
$$3z_1z_2 + a(z_1 + z_2) + b \;\;= 0$$

zu Hülfe, indem man ihnen die Form

$$(az_2 + b)z_1 + (bz_2 + 3c) = 0\,,$$
$$(3z_2 + a)z_1 + (az_2 + b) \;\;= 0$$

gibt, so erhält man für $f(z_2)$ und entsprechend auch für $f(z_1)$ die folgenden Ausdrücke

$$f(z_2) = (z_2 - z_1)^2\left(z_2 + \frac{1}{3}a\right) = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1}\left(\frac{1}{3}az_2 + \frac{1}{3}b\right)$$
$$= \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1}\right)^2\left(\frac{1}{3}bz_2 + c\right),$$

$$f(z_1) = (z_2 - z_1)^2\left(z_1 + \frac{1}{3}a\right) = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_2}\left(\frac{1}{3}az_1 + \frac{1}{3}b\right)$$
$$= \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2}\right)^2\left(\frac{1}{3}bz_1 + c\right).$$

Durch Einführung dieser Werthe gelangt man zu der neuen Wurzelform

$$x = \frac{\sqrt[3]{z_1(bz_2 + 3c)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2(bz_1 + 3c)}}{\sqrt[3]{3z_2 + a} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_1 + a}}\,.$$

Durch Einsetzung der Werthe von z_1 und z_2 leitet Heilermann hieraus weiter ab die exacte Wurzelform

$$\frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27c^2) - \frac{3c}{2}\sqrt{3D_3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27c^2) + \frac{3c}{2}\sqrt{\;}}}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{3}{2}\sqrt{\;}}}$$

und dies ist die verallgemeinerte Cardani'sche Formel in symmetrischem Gewande.

Setzt man nun in die allgemeine Wurzelform

$$x = \frac{z_2\sqrt[3]{f(z_1)} - z_1\sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{f(z_2)}}$$

die ersten Werthe von $f(z_1)$ und $f(z_2)$ ein, so erhält man die erste Wurzelform von Bretschneider, nämlich

$$x = \frac{z_1 \sqrt[3]{3 z_2 + a} - z_2 \sqrt[3]{3 z_1 + a}}{\sqrt[3]{3 z_2 + a} - \sqrt[3]{3 z_1 + a}}.$$

Daraus ergibt sich durch eine einfache Transformation

$$x = -\frac{1}{3} a + \frac{(3 z_1 + a) \sqrt[3]{3 z_2 + a} - (3 z_2 + a) \left(\sqrt[3]{3 z_1 + a}\right)}{\sqrt[3]{3 z_2 + a} - \sqrt[3]{3 z_1 + a}},$$

und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass

$$(3 z_1 + a)(3 z_2 + a) = a^2 - 3 b$$

ist, findet man

$$x = -\frac{1}{3} a - \frac{1}{3} \sqrt[3]{a^2 - 3 b} \frac{\sqrt[3]{(3 z_1 + a)^2} - \sqrt[3]{(3 z_2 + a)^2}}{\sqrt[3]{(3 z_1 + a)} - \sqrt[3]{(3 z_2 + a)}}$$

$$= -\frac{1}{3} \left[a + \sqrt[3]{a^2 - 3 b} \left(\sqrt[3]{3 z_1 + a} + \sqrt[3]{3 z_2 + a}\right)\right].$$

Setzt man noch die Werthe von z_1 und z_2 ein, so erhält man die verallgemeinerte Cardani'sche Formel

$$x = -\frac{1}{3} \left[a - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2 a^3 - 9 a b + 27 c) - \frac{3}{2} \sqrt{3 D_3}} \right.$$
$$\left. + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2 a^3 - 9 a b + 27 c) + \frac{3}{2} \sqrt{3 D_3}}\right]$$

oder auch

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3 c} \left[b - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2 b^3 - 9 a b c + 27 c^2) - \frac{3 c}{2} \sqrt{3 D_3}} \right.$$
$$\left. + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(2 b^3 - 9 a b c + 27 c^2) + \frac{3 c}{2} \sqrt{3 D_3}}\right].$$

Es ist nicht zu läugnen, dass durch die Arbeit von Heilermann mehrere neue Gesichtspuncte für die Auflösung der kubischen Formen gewonnen sind, welche uns eine Aussicht auf andere Wurzelformen eröffnen.

Nach unsern Deductionen in § 162 finden wir nunmehr folgende Ausdrücke für die Functionen $f(z_1)$ und $f(z_2)$:

$$f(z_1) = (z_2 - z_1)^2\left(z_1 + \frac{1}{3}a\right) = \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1 + z_2}\left(z_1^2 - \frac{1}{3}b\right)$$
$$= \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}(z_1^3 + c) = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1 z_2}\left(\frac{1}{3}az_1^2 + \frac{1}{3}bz_1\right)$$
$$= \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2}\left(\frac{1}{3}bz_1^3 + cz_1^2\right) = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1 z_2 (z_1 + z_2)}\left(\frac{1}{3}az_1^3 - cz_1\right),$$

$$f(z_2) = (z_2 - z_1)^2\left(z_2 + \frac{1}{3}a\right) = \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1 + z_2}\left(z_2^2 - \frac{1}{3}b\right)$$
$$= \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}(z_2^3 + c) = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1 z_2}\left(\frac{1}{3}az_2^2 + \frac{1}{3}bz_2\right)$$
$$= \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2}\left(\frac{1}{3}bz_2^3 + cz_2^2\right) = -\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1 z_2 (z_1 + z_2)}\left(\frac{1}{3}az_2^3 - cz_2\right).$$

Aus diesen sieben Formen lassen sich offenbar so viele verschiedene Wurzelformen der kubischen Gleichung $f(x) = 0$ herleiten, als die Anzahl der Variationen von sieben Elementen mit Wiederholungen beträgt, nämlich 49.

Variationen mit Wiederholungen derselben Form sind

$$x = \frac{z_2\sqrt[3]{z_1^3 + az_1^2 + bz_1 + c} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + az_2^2 + bz_2 + c}}{\sqrt[3]{z_1^3 + az_1^2 + bz_1 + c} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + az_2^2 + bz_2 + c}} \text{ *)}$$
$$= \frac{z_2\sqrt[3]{3z_1 + a} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}}{\sqrt[3]{3z_1 + a} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}}$$
$$= \frac{z_2\sqrt[3]{3z_1^2 - b} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2^2 - b}}{\sqrt[3]{3z_1^2 - b} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2^2 - b}}$$
$$= \frac{z_2\sqrt[3]{z_1^3 + c} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + c}}{\sqrt[3]{z_1^3 + c} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + c}} \text{ **)}$$
$$= \frac{z_2\sqrt[3]{z_1(az_1 + b)} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2(az_2 + b)}}{\sqrt[3]{z_1(az_1 + b)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2(az_2 + b)}}$$
$$= \frac{z_2\sqrt[3]{z_1^2(bz_1 + 3c)} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^2(bz_2 + 3c)}}{\sqrt[3]{z_1^2(bz_1 + 3c)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^2(bz_2 + 3c)}}$$
$$= \frac{z_2\sqrt[3]{z_1(az_1^2 - 3c)} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2(az_2^2 - 3c)}}{\sqrt[3]{z_1(az_1^2 - 3c)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2(az_2^2 - 3c)}}.$$

*) Man vergl. Spitz, Zur Aufl. der kubischen Gleichungen. Grun. Arch XXXII. S. 435. 1859; ferner Zeitschr. f. Math. u. Phys. XV. S. 45. 1870; und Schlüssel zu Heis' Aufgabensamml. Bd. II. § 95b. Nr. 31. II. 1878.

**) Die algebraischen Methoden etc. S. 25. Leipzig 1866.

Setzt man zwei verschiedene Ausdrücke für $f(z_1)$ und $f(z_2)$ in die allgemeine Wurzelform

$$x = \frac{z_2 \sqrt[3]{f(z_1)} - z_1 \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}$$

in Dividenden und Divisor ein, so erhält man die Variationen ohne Wiederholungen, wobei die Anzahl der Formen sich noch dadurch vermehren lässt, dass man die Ausdrücke einer der beiden Functionen $f(z_1)$ oder $f(z_2)$ in Dividenden und Divisor mit einander vertauscht.

Wir setzen einige dieser gemischten symmetrischen Wurzelformen her:

$$x = \sqrt[3]{z_1 + z_2} \cdot \frac{z_2 \sqrt[3]{3z_1 + a} - z_1 \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}}{\sqrt[3]{3z_1^2 - b} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2^2 - b}}$$

$$= \sqrt[3]{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2} \cdot \frac{z_2 \sqrt[3]{3z_1 + a} - z_1 \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}}{\sqrt[3]{z_1^3 + c} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_2^3 + c}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{z_2^2(az_1 + b)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_1^2(az_2 + b)}}{\sqrt[3]{3z_1 + a} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{z_2(bz_1 + 3c)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_1(bz_2 + 3c)}}{\sqrt[3]{3z_1 + a} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}} \;{}^{*)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{z_1 + z_2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{z_2^2(az_1^2 - 3c)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_1^2(az_2^2 - 3c)}}{\sqrt[3]{3z_1 + a} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2 + a}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{z_2^2(az_1^2 - 3c)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{z_1^2(az_2^2 - 3c)}}{\sqrt[3]{3z_1^2 - b} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2^2 - b}}$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}} \cdot \frac{z_2 \sqrt[3]{az_1^2 - 3c} + z_1 \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{3z_2^3 - bz_2}}{\sqrt[3]{az_2^2 - 3c} + \sqrt[3]{3z_1^3 - bz_1}}$$

u. s. w. u. s. w

Man ersieht aus diesen wenigen Beispielen, dass sich kaum eine grössere Mannigfaltigkeit der Wurzelformen denken lässt, als wie sie uns bei der Auflösung der kubischen Gleichungen dargeboten werden.

---

*) Diese Wurzelform ist eine von Heilermann angegebene.

§ 182. Analytisch-geometrische Discussion des Bézout'schen Princips von Spitz.*)

Es seien

$$F(\xi, \eta) = 0, \quad f(\xi, \eta) = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so reducirt sich die Auffindung ihrer vier Durchschnittspuncte auf die Auflösung einer kubischen Gleichung. Da es aber gestattet sein wird, zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar

$$F + xf = 0$$

zu wählen, welche jene vier Durchschnittspuncte gemeinschaftlich haben, so liegt die Frage nahe, ob sich dieselben nicht so bestimmen lassen, dass jene kubische Gleichung in x eine rein kubische werde.

Die den zwei Kegelschnitten $F = 0$ und $f = 0$ entsprechende Gleichung in x sei

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

wo a, b, c bestimmbare Functionen der Constanten jener beiden Kegelschnitte sind.

Es seien nun

$$F + z_1 f = 0 \text{ und } F + z_2 f = 0$$

die Gleichungen zweier anderer Kegelschnitte der Schaar und die Werthe von x, welche eben diesen Kegelschnitten zukommen, durch u bezeichnet, so ist zunächst u so zu bestimmen, dass

$$(F + z_1 f) + u(F + z_2 f) = 0$$

das System zweier Geraden darstellt. Diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$F + \frac{z_1 + z_2 u}{1 + u} f = 0,$$

und da

$$F + x_1 f = 0$$

das System zweier Geraden ist, so muss offenbar

$$x = \frac{z_1 + z_2 u}{1 + u}$$

sein. Demnach wird die Gleichung in u erhalten, wenn man in

*) Grun. Arch. XXXII. 435. 1859.

die Gleichung $[x^3] = 0$ den vorstehenden Werth von x einführt, die Brüche fortschafft und nach u ordnet. Dies gibt die Resolvente II:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0\,,$$

wenn die Gleichung in u sich reduciren soll auf

$$u^3 = \frac{z_1^{\,3} + az_1^{\,2} + bz_1 + c}{z_2^{\,3} + az_2^{\,2} + bz_2 + c}\,.$$

Spitz fügt folgendes Zahlenbeispiel hinzu. Aufzulösen die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0\,.$$

Man findet daraus die Resolvente

$$z^2 - 6z + 4 = 0\,; \quad z_1 \text{ und } z_2 = 3 \pm \sqrt{5}\,.$$

Ferner ist

$$u = \sqrt[3]{\frac{40 + 20\sqrt{5}}{-40 + 20\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}\,,$$

woraus sich der Wurzelwerth $x_1 = 2$ ergibt.

§ 183. Methode der Introduction der Invarianten in die Wurzelform der kubischen Gleichung von Blerzy*).

Gegeben sei die Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0\,.$$

Die Gleichung wird zunächst in eine andere verwandelt, in welcher das zweite Glied fehlt. Nach der Formel in § 17 ist

$$\begin{aligned} a^{n-1}f(x) = (ax + b)^n &+ \binom{n}{2}(ac - b^2)(ax + b)^{n-2} \\ &+ \binom{n}{3}(a^2d - 3abc + 2b^3)(ax + b)^{n-3} \\ &+ \binom{n}{4}(a^3e - 4a^2bd + 6ab^2c - 3b^4)(ax + b)^{n-4} \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Gemäss den für die Varianten und Invarianten eingeführten Bezeichnungen ist (§ 53)

$$ac - b^2 = -V_2 = J_{2,2}\,,$$

$$a^2d - 3abc + 2b^3 = V_3 = \sqrt{a^2D_3 - 4J_{2,2}^3} = \sqrt{a^2J_{3,4} - 4J_{2,2}^3}\,,$$

$$a^3e - 4a^2bd + 6ab^2c - 3b^4 = -V_4 = a^2J_{4,2} - 3J_{2,2}^2\,.$$

*) Blerzy, Invariants. Nouv. Ann. de Mathém. XVIII. p. 429. 1859.

Es ist demnach

$$a^2(ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d)$$
$$= (ax + b)^3 + 3J_{2,2}(ax + b) \pm \sqrt{a^2 J_{3,4} - 4J_{2,2}^3}\,.$$

Das doppelte Vorzeichen des Radicals ist ohne Bedeutung, da es in der Wurzelform zum Quadrat erhoben wird.

Es ist nun nach der Auflösungsmethode von Vieta

$$y^3 + py + q = 0\,,$$

$$y = z - \frac{p}{3z}\,, \quad z^6 + qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0\,,$$

und

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}}\,, \quad R = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\,.$$

In dem vorgelegten Falle ist deshalb die Resolvente

$$z^6 \pm \sqrt{a^4 J_{3,4} - 4J_{2,2}^3}\,.\,z^3 - J_{2,2}^3 = 0\,,$$
$$R = \frac{1}{4}a^2 J_{3,4}\,;$$

folglich ist

$$ax + b = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{a^2 J_{3,4} - 4J_{2,2}^3} + a\sqrt{J_{3,4}}}{2}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{a^2 J_{3,4} - 4J_{2,2}^3} - a\sqrt{J_{3,4}}}{2}}\,.$$

Geht man aus von der Methode von Lagrange, die Cardani'sche Formel zu verallgemeinern (§ 144), und ersetzt die Gleichung

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$$

durch das System

$$y = \frac{1}{3}(-P + z_1 + z_2)\,,$$

$$z^6 + (2P^3 - 9PQ + 27R)z^3 + (P^2 - 3Q)^3 = 0\,,$$

so erhält man analog für die vorgelegte Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

die Resolvente

$$a^6 z^6 \pm 27\sqrt{a^2 J_{3,4} - 4J_{2,2}^3}\,.\,a^3 z^3 - 27^2 J_{2,2}^3 = 0\,,$$

und

$$\frac{a^3 z^3}{27} = \frac{-\sqrt{a^2 J_{3,4} - 4 J_{2,2}^3} \pm a\sqrt{J_{3,4}}}{2}.$$

Man gelangt auf diesem Wege also zu derselben Wurzelform.

§ 184. Methode von Tortolini*).

Die vorgelegte Gleichung sei

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

Man substituire

$$wx^2 + vx + u - y = 0.$$

Man kann nun mit Anwendung der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers aus diesen beiden Gleichungen eine neue kubische Gleichung in y bilden, welche durch eine passende Bestimmung der drei unbestimmten Coefficienten w, v und u auflösbar wird. Dadurch wird auch x aus der quadratischen Gleichung (oder aus dem grössten gemeinschaftlichen Theiler) bestimmbar.

Sind irgend zwei Gleichungen von der Form

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0,$$

gegeben, so ist die Resultante

$$U^3 + MU^2 - (HN + 2KL)U + (K^2H - MNH + L^2N) = 0,$$

worin

$$U = A'D - AD', \quad H = A'B - AB', \quad K = B'D - BD',$$
$$L = A'C - AC', \quad M = B'C - BC', \quad N = C'D - CD'.$$

Für die beiden gegebenen Gleichungen ist $A = a$, $A' = 0$ und $U = -aD' = a(y - u)$; folglich

$$a^2(y-u)^3 + 3[abv - (3b^2 - 2ac)w](y-u)^2$$
$$+ 3[acv^2 - (3bc - ad)vw + (3c^2 - 2bd)w^2](y-u)$$
$$+ d[av^3 - 3bv^2w + 3cvw^2 - dw^3] = 0,$$

und wenn man nach Potenzen von y ordnet,

$$y^3 + 3Py^2 + 3Qy + R = 0,$$

wo P, Q und R beziehungsweise Functionen ersten, zweiten und dritten Grades von w, v und u sind.

Nimmt man an $P = Q = 0$, so hat man zwei Gleichungen

*) Ann. di matem. I. p. 310. Roma 1858. Man vergl. auch § 172 oben.

Addirt man dieselben, so entsteht

$$V_2 A + 2\,U_1 + V'_{2,3} \cdot \frac{1}{H} = 0 .$$

Subtrahirt man und setzt $AH = G^2_{,}$, so resultirt wieder die zweite Gleichung.

Es sind nun z_1 und z_2 die Wurzeln der Resolvente

$$(ac - b^2)\,z^2 + (ad - bc)\,z + (bd - c^2) = 0 ,$$

oder kurz

$$V_2 z^2 + 2\,U_1 z + V'_{2,3} = 0 .$$

Dieselbe lässt sich auch in Determinantenform so schreiben:

$$+\begin{vmatrix} az + b, & bz + c \\ bz + c, & cz + d \end{vmatrix}_+ = 0 .$$

Die Wurzelwerthe von z lassen sich nun darstellen in folgender Symmetrie:

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{V'_{2,3}}{V_2}} \times \frac{\sqrt{U_1 - \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}} \mp \sqrt{U_1 + \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}}}{\sqrt{U_1 - \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}} \pm \sqrt{U_1 + \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}}} .$$

Da nun auch die Wurzelform

$$x = \frac{z_2 w - z_1 v}{w - v} = \frac{z_2 \sqrt[3]{f(z_1)} - z_1 \sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{f(z_2)}}$$

symmetrisch ist, so wird durch die Substitution der Werthe von z_1 und z_2 die Symmetrie auch nicht gestört.

Wir haben hier diese Symmetrien ausführlicher entwickelt, da einige Auflösungsmethoden der biquadratischen Gleichungen ebenfalls interessante Homologien darbieten.

§ 186. Methode der Introduction der kubischen Covariante. — Die allgemeine Wurzelform.

Wir haben in § 155 eine Methode entwickelt, welche dadurch merkwürdig ist, dass die beiden Covarianten der kubischen Function $f(z)$ als Coefficienten der transformirten Gleichung auftreten. Wir wollen dieselbe hier auch noch auf die Cayley'sche Form des Polynoms $f(x)$ übertragen.

Gegeben sei also

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 .$$

Man substituire

$$ax = \frac{(az + b)\,u - C'_{3,2}(z)}{u + \frac{1}{3} f'(z)}$$

oder

$$ax = \frac{1}{6} \cdot \frac{f''(z) \cdot u - 6\, C'_{3,2}(z)}{u + \frac{1}{3} f'(z)},$$

wo $f'(z)$ und $f''(z)$ die beiden Derivirten von $f(z)$, $C'_{3,2}(z)$ die erste Derivirte der quadratischen Covariante von $f(z)$ bezeichnet, z aber eine ganz willkürliche Grösse ist.

Entwickelt man die transformirte Gleichung nach Potenzen von u, so erhält man

$$u^3 + 3\, C_{3,2}(z)\, u - C_{3,3}(z) = 0,$$

wo

$$C_{3,2}(z) = (ac - b^2)z^2 + (ad - bc)z + (bd - c^2),$$
$$C_{3,3}(z) = (2b^3 - 3abc + a^2 d)z^3 + 3(b^2 c + abd - 2ac^2)z^2 - 3(bc^2 + acd - 2b^2 d)z - (2c^3 - 3bcd + ad^2)$$

zu setzen ist. Die Gleichung in u kann nach der Cardani'schen Formel aufgelöst werden; sie gibt

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) + \frac{1}{2}\sqrt{C^2_{3,3}(z) + 4 C^3_{3,2}(z)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) - \frac{1}{2}\sqrt{C^2_{3,3}(z) + 4 C^3_{3,2}(z)}}.$$

Nun ist

$$C^2_{3,3}(z) + 4\, C^3_{3,2}(z) = D_3 f^2(z),$$

folglich

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) + \frac{1}{2} f(z)\sqrt{D_3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) - \frac{1}{2} f(z)\sqrt{D_3}}.$$

Setzt man diesen Werth in die Substituirte ein, so erhält man die allgemeine Wurzelform, in welcher z willkürlich bleibt.

Nimmt man in einem speciellen Falle an

$$C_{3,2}(z) = 0, \quad \text{(Resolvente II } \gamma)$$

so wird

$$C'_{3,2}(z) = \sqrt{D_3}, \quad u = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{C_{3,3}(z)} = \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}},$$

folglich

$$ax = \frac{(az+b)\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} - \sqrt{D_3}}{\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} + \frac{1}{3} f'(z)}$$

$$= \sqrt{D_3}\,\frac{(az+b)\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} - \sqrt{D_3}}{\sqrt{D_3}\,\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} + J_{2,2}\, f(z)},$$

Addirt man dieselben, so entsteht

$$V_2 A + 2\,U_1 + V'_{2,3} \cdot \frac{1}{H} = 0\,.$$

Subtrahirt man und setzt $AH = G_{,}^2$, so resultirt wieder die zweite Gleichung.

Es sind nun z_1 und z_2 die Wurzeln der Resolvente

$$(ac - b^2)\,z^2 + (ad - bc)\,z + (bd - c^2) = 0\,,$$

oder kurz

$$V_2 z^2 + 2\,U_1 z + V'_{2,3} = 0\,.$$

Dieselbe lässt sich auch in Determinantenform so schreiben:

$$+\begin{vmatrix} az + b, & bz + c \\ bz + c, & cz + d \end{vmatrix}_{+} = 0\,.$$

Die Wurzelwerthe von z lassen sich nun darstellen in folgender Symmetrie:

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{V'_{2,3}}{V_2}} \times \frac{\sqrt{U_1 - \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}} \mp \sqrt{U_1 + \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}}}{\sqrt{U_1 - \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}} \pm \sqrt{U_1 + \sqrt{V_2 \cdot V'_{2,3}}}}\,.$$

Da nun auch die Wurzelform

$$x = \frac{z_2 w - z_1 v}{w - v} = \frac{z_2 \sqrt[3]{f(z_1)} - z_1 \sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{f(z_2)}}$$

symmetrisch ist, so wird durch die Substitution der Werthe von z_1 und z_2 die Symmetrie auch nicht gestört.

Wir haben hier diese Symmetrien ausführlicher entwickelt, da einige Auflösungsmethoden der biquadratischen Gleichungen ebenfalls interessante Homologien darbieten.

§ 186. Methode der Introduction der kubischen Covariante. — Die allgemeine Wurzelform.

Wir haben in § 155 eine Methode entwickelt, welche dadurch merkwürdig ist, dass die beiden Covarianten der kubischen Function $f(z)$ als Coefficienten der transformirten Gleichung auftreten. Wir wollen dieselbe hier auch noch auf die Cayley'sche Form des Polynoms $f(x)$ übertragen.

Gegeben sei also

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0\,.$$

Man substituire

$$ax = \frac{(az + b)\,u - C'_{3,2}(z)}{u + \frac{1}{3} f'(z)}$$

oder

$$ax = \frac{1}{6} \cdot \frac{f''(z) \cdot u - 6\, C'_{3,2}(z)}{u + \frac{1}{3} f'(z)},$$

wo $f'(z)$ und $f''(z)$ die beiden Derivirten von $f(z)$, $C'_{3,2}(z)$ die erste Derivirte der quadratischen Covariante von $f(z)$ bezeichnet, z aber eine ganz willkürliche Grösse ist.

Entwickelt man die transformirte Gleichung nach Potenzen von u, so erhält man

$$u^3 + 3\, C_{3,2}(z)\, u - C_{3,3}(z) = 0,$$

wo

$$C_{3,2}(z) = (ac - b^2) z^2 + (ad - bc) z + (bd - c^2),$$
$$C_{3,3}(z) = (2b^3 - 3abc + a^2 d) z^3 + 3(b^2 c + abd - 2ac^2) z^2 - 3(bc^2 + acd - 2b^2 d) z - (2c^3 - 3bcd + ad^2)$$

zu setzen ist. Die Gleichung in u kann nach der Cardani'schen Formel aufgelöst werden; sie gibt

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) + \frac{1}{2}\sqrt{C^2_{3,3}(z) + 4 C^3_{3,2}(z)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) - \frac{1}{2}\sqrt{C^2_{3,3}(z) + 4 C^3_{3,2}(z)}}.$$

Nun ist

$$C^2_{3,3}(z) + 4\, C^3_{3,2}(z) = D_3 f^2(z),$$

folglich

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) + \frac{1}{2} f(z) \sqrt{D_3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} C_{3,3}(z) - \frac{1}{2} f(z) \sqrt{D_3}}.$$

Setzt man diesen Werth in die Substituirte ein, so erhält man die allgemeine Wurzelform, in welcher z willkürlich bleibt.

Nimmt man in einem speciellen Falle an

$$C_{3,2}(z) = 0, \quad \text{(Resolvente II } \gamma)$$

so wird

$$C'_{3,2}(z) = \sqrt{D_3}, \quad u = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{C_{3,3}(z)} = \sqrt[3]{1}\, \sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}},$$

folglich

$$ax = \frac{(az + b)\sqrt[3]{1}\, \sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} - \sqrt{D_3}}{\sqrt[3]{1}\, \sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} + \frac{1}{3} f'(z)}$$

$$= \sqrt{D_3}\, \frac{(az + b)\sqrt[3]{1}\, \sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} - \sqrt{D_3}}{\sqrt{D_3}\, \sqrt[3]{1}\, \sqrt[3]{f(z)\sqrt{D_3}} + J_{2,2}\, f(z)},$$

wo an die Stelle von z einer der beiden Wurzelwerthe der Resolvente einzusetzen ist.

§ 187. Methode mittels Integration der Differenzialgleichung der Function $f(x)$.

Charakteristisch für diese Methode ist der Umstand, dass in ihr keine Resolvente zur Anwendung kommt. In § 142, IV. haben wir zwischen der Function

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$

und ihrer Derivirten

$$f'(x) = 3(ax^2 + 2bx + c)$$

folgende Relation aufgestellt:

$$27\left(a^2 f^2(x) - 2V_3 f(x) + \overline{D}_3\right) = af'^3(x) - 9V_2 f'^2(x).$$

Ist $f(x) = 0$, so wird

$$af'^3(x) - 9V_2 f'^2(x) = 27\overline{D}_3,$$

oder wenn man der vorgelegten Gleichung die Form

$$d = -(ax^3 + 3bx^2 + 3cx)$$

gibt, so erhält man

$$\frac{\partial d}{\partial x} = -3(ax^2 + 2bx + c) = -f'(x),$$

und

$$[a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)]\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)^2 = 9\overline{D}_3.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man durch Transposition

$$\frac{dx}{\sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}} = -\frac{\partial d}{3\sqrt{\overline{D}_3}}.$$

Von dieser Gleichung ist dann das Integral zu suchen.

Setzt man für die Discriminante ihren Werth ein, also

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a(ax^2+2bx+c)-3(b^2-ac)}} = -\int \frac{\partial x}{3\sqrt{a^2d^2+2(2b^3-3abc)d+c^2(4ac-3b^2)}}$$

so erhält man

$$\frac{1}{a}\log\text{nat}\left[2a^2x + 2ab + 2a\sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}\right]$$
$$= -\frac{1}{3a}\log\text{nat}\left[2(a^2d - 3abc + 2b^3) + 2a\sqrt{\overline{D}_3}\right] + C.$$

Die Constante C wird bestimmt durch die Erwägung, dass x und d zugleich verschwinden müssen. Deshalb ist auch

$$\frac{1}{a} \log \text{nat} \left[2ab + 2a\sqrt{4ac - 3b^2}\right]$$
$$= -\frac{1}{3a} \log \text{nat} \left[4b^3 - 6abc + 2ac\sqrt{4ac - 3b^2}\right] + C,$$

folglich nach Weglassung der Logarithmensymbole

$$\frac{ax + b + \sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}}{b + \sqrt{4ac - 3b^2}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 3abc + ac\sqrt{4ac - 3b^2}}{2b^3 - 3abc + a^2 d + \sqrt{a^2 D_3}}},$$

oder

$$ax + b + \sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{-16(b^2 - ac)^3}{(2b^3 - 3abc + a^2 d) + \sqrt{a^2 D_3}}}.$$

Multiplicirt man unter der Kubikwurzel Dividend und Divisor mit

$$(2b^3 - 3abc + a^2 d) - \sqrt{a^2 D_3},$$

so erhält man

$$ax + b + \sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}$$
$$= \sqrt[3]{-4(2b^3 - 3abc + a^2 d) + 4\sqrt{a^2 D_3}}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite der Kürze wegen mit $u\sqrt[3]{1}$ und transponirt, so ergibt sich

$$ax + b = u\sqrt[3]{1} - \sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}.$$

Man erhebe jetzt beiderseits zum Quadrat; dies gibt nach Aufhebung gleicher Glieder

$$4(b^2 - ac) = u^2 \sqrt[3]{1}^2 - 2u\sqrt[3]{1}\sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)}$$

und wegen der Relation

$$\sqrt{a(ax^2 + 2bx + c) - 3(b^2 - ac)} = u\sqrt[3]{1} - (ax + b),$$
$$4(b^2 - ac) = 2u\sqrt[3]{1}(ax + b) - u^2 \sqrt[3]{1}^2,$$

oder

$$ax + b = \frac{1}{2}u\sqrt[3]{1} + 2\sqrt[3]{1}^{-2}\frac{b^2 - ac}{u}.$$

Setzt man für u wieder seinen früheren Werth ein, so erhält man

$$x = \frac{-b + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}V_3 + \frac{1}{2}a\sqrt{D_3}} + \sqrt[3]{1}^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}V_3 - \frac{1}{2}a\sqrt{D_3}}}{a}.$$

§ 188. Methode von Cayley und Clebsch*).

Die hier folgende Auflösung der Gleichungen dritten Grades ist zuerst in den wesentlichsten Punkten von Cayley gegeben worden. Es wird sich aber empfehlen, zunächst der Darstellung von Clebsch zu folgen und in seine Formeln die von uns angenommenen Bezeichnungen einzuführen. Clebsch geht aus von der Form

$$\Delta^3 = -2\left(Q^2 + \frac{1}{2}Rf^2\right).$$

Nach der von uns in § 143, 7. eingeführten Bezeichnungsweise ist

$$4C_{3,2}^3 = \overline{D_3}f^2 - C_{3,3}^2;$$

wo $C_{3,2}$ die quadratische Covariante von $f(x)$ oder f, $C_{3,3}$ die kubische und $\overline{D_3}$ die Discriminante bedeutet. Die rechte Seite kann in zwei Factoren zerlegt werden, also ist

$$C_{3,2}^3 = -\frac{1}{4}\left[f\sqrt{\overline{D_3}} + C_{3,3}\right]\left[-f\sqrt{\overline{D_3}} + C_{3,3}\right].$$

Auf der linken Seite steht der Kubus einer Form zweiten Grades, rechts das Product zweier kubischer Formen. Im Allgemeinen haben die beiden letzten keinen Factor gemein; daher muss jeder der kubischen Ausdrücke rechts an und für sich ein vollständiger Kubus sein, d. h. man muss zwei lineare Factore ξ, η so bestimmen können, dass

$$\xi^3 = \frac{1}{2}\left(f\sqrt{\overline{D_3}} + C_{3,3}\right)$$
$$\eta^3 = \frac{1}{2}\left(-f\sqrt{\overline{D_3}} + C_{3,3}\right)$$

wird. Die Functionen ξ und η sind hierdurch bis auf die Kubikwurzeln der Einheit völlig bestimmt. Wenn eine kubische Form gegeben ist, von der bekannt ist, dass sie der Kubus einer linearen Function ist, also

---

*) Cayley, Fifth memoir upon Quantics. Phil. Trans. vol. 148. 1858.
Clebsch, Auflösung der kubischen Gleichungen. In seiner: Theorie der binären algebraischen Formen. § 38. Leipzig, 1872.

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3 = (a_1 x + a_2 y)^3,$$

so findet man die Coefficienten der linearen Function, indem man beiderseits die Coefficienten einander gleich setzt:

$$\begin{aligned} a_1^{\,3} &= \alpha, \\ a_1^{\,2} a_2 &= \beta, \\ a_1 a_2^{\,2} &= \gamma, \\ a_2^{\,3} &= \delta. \end{aligned}$$

Man erhält a_1 durch die Kubikwurzel aus α, dann a_2 rational durch diese und β ausgedrückt; die übrigen Gleichungen müssen dann von selbst erfüllt sein.

Hat man die beiden linearen Functionen ξ, η aus ihren Gleichungen bestimmt, so folgt, indem man Alles durch diese ausdrückt,

$$\begin{aligned} f\sqrt{D_3} &= \xi^3 - \eta^3, \\ C_{3,3} &= \xi^3 + \eta^3, \\ C_{3,2} &= -\xi\eta. \end{aligned}$$

Bei der Darstellung von $C_{3,2}$ ist eine Kubikwurzel zu ziehen und daher könnte eine dritte Wurzel der Einheit rechts als Factor hinzugefügt werden; indessen kann man sie ersparen, indem man die bei der Bestimmung von η auftretende Kubikwurzel gehörig bestimmt denkt. Die bei ξ auftretende ist dann noch immer beliebig, aber sonst ohne Einfluss.

Die voranstehenden drei Gleichungen in ξ und η geben nun sofort die Auflösung der kubischen Gleichung

$$f = (a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3 = 0,$$

vorausgesetzt, dass die Discriminante von Null verschieden ist. Denn diese Gleichung kann dann ersetzt werden durch die Gleichung

$$0 = f\sqrt{D_3} = (\xi^3 - \eta^3) = (\xi - \eta)(\xi - J_1\eta)(\xi - J_2\eta).$$

Die drei Wurzelwerthe von $f = 0$ findet man aus den drei linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi - \eta &= 0, \\ \xi - J_1\eta &= 0, \\ \xi - J_2\eta &= 0, \end{aligned}$$

und f ist durch die folgende Identität in seine drei linearen Factoren zerlegt:

$$f = \frac{1}{\sqrt{\overline{D}_3}} \left\{ \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} + f\sqrt{\overline{D}_3}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} - f\sqrt{\overline{D}_3}}{2}} \right\}$$
$$\times \left\{ \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} + f\sqrt{\overline{D}_3}}{2}} - J_1 \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} - f\sqrt{\overline{D}_3}}{2}} \right\}$$
$$\times \left\{ \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} + f\sqrt{\overline{D}_3}}{2}} - J_2 \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} - f\sqrt{\overline{D}_3}}{2}} \right\}.$$

Man sieht, dass die Auflösung der kubischen Gleichung sich wesentlich auf die Aufsuchung der linearen Factoren ξ und η der quadratischen Form $C_{3,2}$ stützt, oder auf die Zerlegung von $C_{3,2}^3$ in seine kubischen Factoren, d. h. auf die Auflösung der Gleichung

$$\overline{D}_3 f^2 - C_{3,3}^2 = 0.$$

Sind die Coefficienten von f reell und $\overline{D}_3$ positiv, so sind ξ und η reell, also von den drei linearen Factoren von f einer reell, die andern wegen J_1 und J_2 conjugirt complex. Wenn dagegen $\overline{D}_3$ negativ ist, so werden ξ und η selbst conjugirt complex, etwa

$$\xi = p + q\sqrt{-1}, \quad \eta = p - q\sqrt{-1},$$

und die linearen Factoren von $f\sqrt{\overline{D}_3}$ werden also die Factoren von

$$(p + q\sqrt{-1})^3 - (p - q\sqrt{-1})^3 = 2\sqrt{-1}\,(3p^2q - q^3),$$

d. h. abgesehen von dem Factor $\sqrt{-1}$ gleich q, $q + p\sqrt{3}$, $-q + p\sqrt{3}$, folglich reell. Bei reellen Coefficienten hat deshalb, wie wiederholt bemerkt worden ist, die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln bei negativer Discriminante, nur eine bei positiver.

§ 189. Anwendung der typischen Darstellungen auf die Auflösung kubischer Gleichungen*).

Wenn man ausgeht von den Substitutionen

$$\xi = \frac{1}{n}\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1 z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1 z_2}\right],$$
$$\eta = z_1 y - z_2 x,$$

so haben diese die Eigenschaft, die Function von ihrem zweiten Term zu befreien.

*) Clebsch, Theorie der bin. algebr. Formen § 87. Man vergl. auch § 123 und § 186 oben.

Gegeben sei

$$f(x, y) \doteq (\widehat{a, b, c, d})(x, y)^3,$$

so ist

$$n = 3,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1\, z_2} = 3(a z_1{}^2 + 2 b z_1 z_2 + c z_2{}^2),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1\, z_2} = 3(b z_1{}^2 + 2 c z_1 z_2 + d z_2{}^2).$$

Es ist dann

$$f(x, y) \cdot f^2(z_1, z_2) = \xi^3 + 3 C_{3,2}(z_1, z_2)\, \xi \eta^2 + C_{3,3}(z_1, z_2)\, \eta^3.$$

In § 186 sind wir bereits demselben Ausdruck begegnet.

Diese Gleichung wird für $f(x, y) = 0$:

$$\xi^3 + 3 C_{3,2}(z_1, z_2)\, \xi \eta^2 + C_{3,3}(z_1, z_2) \eta^2 = 0,$$

und kann durch die Cardani'sche Formel gelöst werden.

Man erhält dann

$$\frac{\xi}{\eta} = \sqrt[3]{1} \cdot A + \sqrt[3]{1}^2 \cdot B,$$

und durch Einsetzen in die Gleichung

$$A^3 + B^3 = - C_{3,3}(z_1, z_2),$$
$$AB = - C_{3,2}(z_1, z_2).$$

Daher sind A^3 und B^3 die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2 + C_{3,3}(z_1, z_2)\, \eta - C_{3,2}^3 (z_1, z_2) = 0,$$

und es wird sein

$$A^3 = - \frac{1}{2} C_{3,3} + \frac{1}{2} \sqrt{C_{3,3}^2 + 4 C_{3,2}^3},$$

$$B^3 = - \frac{1}{2} C_{3,3} - \frac{1}{2} \sqrt{C_{3,3}^2 + 4 C_{3,2}^3}.$$

Es ist nun aber

$$C_{3,3}^2 + 4 C_{3,2}^3 = \overline{D}_3 f^2(z_1, z_2),$$

folglich die beiden Relationen

$$A^3 = \frac{1}{2}\left(- C_{3,3} + f(z_1, z_2) \sqrt{\overline{D}_3}\right),$$

$$B^3 = \frac{1}{2}\left(- C_{3,3} - f(z_1, z_2) \sqrt{\overline{D}_3}\right),$$

nebst der Bedingung

$$AB = - C_{3,2},$$

welche die Wahl der Kubikwurzel von B^3 an die von A^3 knüpft, gegeben; sodann aber findet man

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{1}{3} \frac{x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1, z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1, z_2}}{z_1 y - z_2 x} = \sqrt[3]{1}\, A + \sqrt[3]{1}^2\, B,$$

woraus endlich der Wurzelwerth $\frac{x}{y}$ gefunden wird.

Diese Lösung gibt eine unendliche Anzahl gleichberechtigter Auflösungen, welche nur durch die Wahl des willkürlichen Parameters $\frac{z_1}{z_2}$ von einander verschieden sind.

Eine specielle Darstellung der Auflösung erhält man, indem man für die z eines der Werthepaare z_1 und ζ_1 setzt, für welche $C_{3,2}(z_1, z_2)$ verschwindet. Die Gleichung in ξ und η verwandelt sich dann in eine rein kubische und man hat daher

$$\frac{\xi}{\eta} = -\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}}.$$

Die Lösung der kubischen Gleichung nimmt dann die beiden Formen an:

$$\frac{1}{3} \frac{x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1, z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1, z_2}}{z_1 y - z_2 x} = -\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}(z_1, z_2)},$$

$$\frac{1}{3} \frac{x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\zeta_1, \zeta_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\zeta_1, \zeta_2}}{\zeta_1 y - \zeta_2 x} = -\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}(\zeta_1, \zeta_2)}.$$

Diese allgemeine Wurzelform, wie die in § 186 abgeleiteten, bilden ein merkwürdiges Analogon zu der allgemeinen Wurzelform der quadratischen Gleichungen, welche in § 104 und § 123 gegeben worden ist, und welche ebenfalls zwei willkürliche Grössen einschliesst. Löst man die erste der beiden specialisirten Gleichungen nach $x : y$ auf, so resultirt

$$\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1, z_2} - z_1 \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}(z_1, z_2)}}{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1, z_2} + z_2 \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}(z_1, z_2)}},$$

wo z_1 und z_2 bestimmt werden durch

$$C_{3,2}(z_1, z_2) = (ac - b^2)z_1^2 + (ad - bc)z_1 z_2 + (bd - c^2)z_2^2 = 0.$$

§ 190. Die Auflösung der kubischen Gleichungen und die Ausdrücke, welche dabei auftreten, von Eisenstein*).

Für die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade muss man zwei neue Functionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ einführen, welche respective durch $\varphi^2 = 0$ und $\psi^3 = 0$ bestimmt werden. Die Function $\varphi(\lambda)$ hat für jedes λ zwei Werthe $\pm \varphi(\lambda)$, während die andere $\psi(\lambda)$ drei Werthe annimmt, die sich durch einen derselben auf folgende Weise ausdrücken lassen:

$$\psi(\lambda), \quad J\psi(\lambda), \quad J^2\psi(\lambda),$$

wo J an die Stelle von $\frac{1}{2}[-1 + \varphi(-3)]$ gesetzt ist.

Bezeichnet man der Kürze halber

$$V_2 = b^2 - ac,$$
$$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d,$$
$$\overline{D}_3 = a^2 d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd,$$

so sind die Wurzelwerthe der allgemeinen kubischen Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0:$$

$$x = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{a}[-b + \psi(\alpha) + \psi(\beta)] \\ \frac{1}{a}[-b + J\psi(\alpha) + J^2\psi(\beta)] \\ \frac{1}{a}[-b + J^2\psi(\alpha) + J\psi(\beta)] \end{array} \right.$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{2}[-V_3 + a\varphi(\overline{D}_3)], \quad \beta = \frac{1}{2}[-V_3 - a\varphi(\overline{D}_3)]$$

ist und die zusammengehörigen Werthe der beiden Functionen $\psi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ vollkommen bestimmt werden durch die Gleichung

$$\psi(\alpha)\,\psi(\beta) = V_2 = b^2 - ac.$$

Die Aufgabe nun, eine allgemeine kubische Gleichung aufzulösen, ist identisch mit derjenigen, die homogene Function

$$\Phi = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

in ihre drei linearen Factoren zu zerlegen. Diese Spaltung kann man auf zweifache Weise ausführen, je nachdem man nämlich in in der Gleichung

$$\Phi = 0$$

*) Crelle's Journ. Bd. XXVII. S. 81 u. 319. 1844.

entweder x oder y als die Hauptunbekannte ansieht. Im ersten Falle findet man, dass $a^2\Phi$ in das Product dreier Factoren zerfällt, von denen jeder die Form

$$ax + \left[b + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V_3 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{\overline{D}_3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V_3 - \tfrac{1}{2}a\sqrt{\overline{D}_3}}\right] y$$

hat, und wo die Werthe der Kubikwurzeln so zu nehmen sind, dass ihr Product gleich

$$V_2 = b^2 - ac$$

wird. Im zweiten Falle erhält man die Zerlegung von $d^2 . \Phi$ in das Product dreier linearer Factoren von der Form

$$dy + \left[c + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V'_{3,3} + \tfrac{1}{2}d\sqrt{\overline{D}_3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}V'_{3,3} - \tfrac{1}{2}d\sqrt{\overline{D}_3}}\right] x,$$

wo das Product der Kubikwurzeln gleich

$$V'_{2,3} = c^2 - bd$$

sein muss.

Die Ausdrücke, welche stets bei den Discussionen der kubischen Formen auftreten, sind gewisse Functionen der Coefficienten a, b, c, d und zwar folgende

$$\begin{aligned}
A &= V_2 = b^2 - ac,\\
B &= W_2 = bc - ad,\\
C &= V'_{2,3} = c^2 - bd,\\
a_1 &= V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d,\\
b_1 &= W_3 = b^2 c + abd - 2ac^2,\\
c_1 &= W'_3 = bc^2 + acd - 2b^2 d,\\
d_1 &= V'_{3,3} = 2c^3 - 3bcd + ad^2,\\
D &= \overline{D}_3 = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2).
\end{aligned}$$

Die drei Formen

$$\begin{aligned}
\Phi &= ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,\\
\Phi_1 &= -a_1x^3 - 3b_1x^2y + 3c_1xy^2 + d_1y^3 = -C_{3,3},\\
F &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 = -C_{3,2},
\end{aligned}$$

hängen auf das Innigste mit einander zusammen. Wenn man nämlich auf alle drei die linearen Substitutionen

$$x = \lambda x' + \mu y',$$
$$y = \nu x' + \varrho y',$$

also

$$x' = \frac{\varrho x - \mu y}{\lambda\varrho - \mu\nu}, \qquad y' = \frac{\lambda y - \nu x}{\lambda\varrho - \mu\nu}$$

anwendet und den Nenner (Modul) $\lambda\varrho - \mu\nu$ gleich der Einheit annimmt, so nimmt man das merkwürdige Verhalten wahr, dass zwischen den Coefficienten der drei neuen Formen Φ', Φ_1' und F' in x', y' genau dieselben Relationen stattfinden, wie zwischen denen von Φ, Φ_1 und F *).

Der Ausdruck $\overline{D}_3$, welchen man Determinante (Discriminante) von Φ nennen kann, ist zugleich Determinante von F. Die Determinante von Φ_1 ist dann $\overline{D}_3{}^3$ **). Bemerkenswerth sind die folgenden identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
4\,V_2^{\,3} &= V_3^{\,2} - a^2\overline{D}_3, \quad 4\,V'^{\,3}_{2,3} = V'^{\,2}_{3,3} - d^2\overline{D}_3,\\
V_2^{\,2} &= b^2\,V_2 - ab\,W_2 + a^2\,V'_{2,3},\\
V_2\,V'_{2,3} &= c^2\,V_2 - cb\,W_2 + b^2\,V'_{2,3},\\
V'^{\,2}_{2,3} &= d^2\,V_2 - cd\,W_2 + c^2\,V'_{2,3},\\
c\,V_2 - b\,W_2 + a\,V'_{2,3} &= d\,V_2 - c\,W_2 + b\,V'_{2,3} = 0,\\
V_3 &= 2b\,V_2 - a\,W_2,\\
W_3 &= c\,V_2 - a\,V'_{2,3} = 2c\,V_2 - b\,W_2 = b\,W_2 - 2a\,V'_{2,3},\\
W'_3 &= -d\,V_2 + b\,V'_{2,3} = -2d\,V_2 + c\,W_2 = -c\,W_2 + 2b\,V'_{2,3},\\
V'_{3,3} &= -d\,W_2 + 2c\,V'_{2,3}.
\end{aligned}$$

§ 191. Ueber eine merkwürdige Analogie zwischen den Wurzelformen der quadratischen und kubischen Gleichungen.

Ausser den bekannten Wurzelformen

$$\frac{x}{y} = \frac{z_2\sqrt{f(z_1)} - z_1\sqrt{-1}\sqrt{f(z_2)}}{\sqrt{f(z_1)} - \sqrt{-1}\sqrt{f(z_2)}}$$

und

$$\frac{x}{y} = \frac{z_2\sqrt[3]{f(z_1)} - z_1\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}{\sqrt[3]{f(z_1)} - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{f(z_2)}}$$

existiren noch zwei andere der quadratischen und kubischen Gleichung, welche eine auffallende Homologie offenbaren.

Wenn man in § 150 ausgeht von der Function

$$(a, b, c, d)\widehat{\ }(x, y)^3 = 0,$$

so erhält man

---

*) Man vergl. Ueber die Covarianten. § 55 oben.

**) Man vergl. § 53 oben.

$$\frac{x}{y} = -\frac{bz + c + z\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-J_{2,2}(az+b)}}{az + b - \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{-J_{2,2}(az+b)}}$$

unter der Bedingung

$$(ac - b^2)z^2 + (ad - bc)z + (bd - c^2) = 0.$$

In § 104 gingen wir aus von der Form

$$(a, b, c)\widehat{\ }(x, 1)^2 = 0$$

und erhielten

$$\frac{x}{y} = -\frac{bz + c + z\sqrt{1}\sqrt{-J_{2,2}}}{az + b - \sqrt{1}\sqrt{-J_{2,2}}},$$

wo z eine willkürliche Grösse bezeichnet.

Die Wurzelform der kubischen Gleichung lässt sich auch ausdrücken durch

$$\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{z_1 z_2} + z_1\sqrt[3]{-\frac{1}{6}J_{2,2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} : z_2}}{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{z_1 z_2} - z_2\sqrt[3]{-\frac{1}{6}J_{2,2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} : z_2}}$$

unter der Bedingung

$$(ac - b^2)z_1^2 + (ad - bc)z_1 z_2 + (bd - c^2)z_2^2 = 0.$$

Bildet man die Productengleichung und schafft die Kubikwurzel nach einer Seite, so erhält man

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{1}{6}\,\frac{x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{z_1 z_2}}{z_1 y - z_2 x} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}J_{2,2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} : z_2}$$

Demnach haben die Substitutionen

$$\xi = \frac{1}{6}\left[x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{z_1 z_2}\right],$$

$$\eta = z_1 y - z_2 x$$

die Eigenschaft, die Function von den beiden mittleren Gliedern zu befreien, für den Fall, dass

$$C_{3,2}(z) = 0$$

ist. Es ist nämlich, wenn

$$\frac{\xi}{\eta} = u, \quad \frac{x}{y} = U, \quad \frac{z_1}{z_2} = z$$

gesetzt wird,

$$f(z)u^3 + 3C_{3,2}(z)u^2 + 3(az+b)C_{3,2}(z)u$$
$$+ [a(2b^3 - 3abc + a^2d)z^3 + 3(b^4 - ab^2c - a^2c^2 + a^2bd)z^2$$
$$+ 3b(b^2c + abd - 2ac^2)z + (b^3d - ac^3)] = 0;$$

und für $C_{3,2}(z) = 0$,

$$f(z)\xi^3 + F(z)\eta^3 = 0.$$

$F(z) = 0$ ist, wie § 163, Theor. 6 gezeigt worden, die kubische Resolvente, welche der Reducente (11) $\alpha\gamma^3 - \beta^3\delta = 0$ entspricht. Löst man die Gleichung $[\xi, \eta]^3 = 0$ auf, so erhält man

$$\frac{\xi}{\eta} = -\sqrt[3]{\frac{F(z)}{f(z)}} = \sqrt[3]{J_{2,2}(az+b)},$$

folglich ist unter derselben Voraussetzung

$$F(z) = -J_{2,2}(az+b)f(z) = -J_{2,2}\left\{C_{3,2} + \left[\frac{1}{3}f'(z)\right]^2\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Deductionen in § 189 lässt sich also die Wurzel der kubischen Gleichung

$$f = (a, b, c, \widehat{d)\,(}x, y)^3 = 0$$

auf folgende drei Arten schreiben:

$$\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1 z_2} - z_1\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}(z_1, z_2)}}{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1 z_2} + z_2\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{C_{3,3}(z_1, z_2)}},$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{z_1 z_2} + z_1\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{F(z_1, z_2) : f(z_1, z_2)}}{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} - z_2\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{F(z_1, z_2) : f(z_1, z_2)}},$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{d^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{z_1 z_2} + z_1\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{-\frac{1}{6}J_{2,2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} : z_2}}{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} - z_2\sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{-\frac{1}{6}J_{2,2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{z_1 z_2} : z_2}}.$$

§ 192. Methode von Cayley*).

Bei der Analyse der „Cubics" kommen folgende Ausdrücke in Betracht:

---

*) Cayley, A fifth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. vol. 148. p. 441 London 1858.

$$f(x, y) = (a, b, c, d \overset{\frown}{)} (x, y)^3,$$

$$C_{3,2} = \left(ac - b^2, \quad \frac{1}{2}(ad - bc), \quad bd - c^2 \overset{\frown}{\right)} \left(x, y\right)^2,$$

$$C_{3,3} = \left\{\begin{array}{c} a^2d - 3abc + 2b^3 \\ -(abd - 2ac^2 + b^2c) \\ -(acd - 2b^2d + bc^2) \\ -(ad^2 - 3bcd + 2c^3) \end{array}\right\} \overset{\frown}{\ } (x, y)^3,$$

$$D_3 = a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2.$$

Die erste Function ist die Cubic, die zweite die quadratische Covariante oder die Hesse'sche Function, die dritte die kubische Covariante, die vierte die Discriminante. Es findet zwischen diesen Functionen die Beziehung

$$C_{3,3}^2 = -4C_{3,2}^3 + D_2 f^2$$

statt. Die Hesse'sche Function lässt sich unter der Form

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2$$

darstellen; ausserdem aber auch als Determinante, nämlich

$$C_{3,2} = \begin{vmatrix} y^2 & -yx & x^2 \\ a & b & c \\ b & c & d \end{vmatrix}.$$

Die kubische Covariante lässt sich schreiben unter der Form

$$C_{3,3} = -[2(ac - b^2)x + (ad - bc)y](bx^2 + 2cxy + dy^2) \\ + [(ad - bc)x + 2(bd - c^2)y](ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

d. i. als die Jacobi'sche Function von der Cubic und der Hesse'schen; ferner unter der Form

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial D_2}{\partial d}\right), \quad -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial D_2}{\partial c}\right), \quad \frac{1}{3}\left(\frac{\partial D_2}{\partial b}\right), \quad -\left(\frac{\partial D_2}{\partial a}\right)\overset{\frown}{\right]}\left(x, y\right)^3,$$

d. i. als Evectante der Discriminante.

Die Discriminante negativ genommen, lässt sich darstellen

$$4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2,$$

d. i. als Discriminante der quadratischen Covariante. Ferner erhält man

$$(a, b, c, d \overset{\frown}{)} (bx^2 + 2cxy + dy^2, -ax^2 - 2bxy - cy^2)^3 = -f \cdot C_{3,3}.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass eine Transmutante der Cubic gleich dem Producte aus der Cubic und der kubischen Covariante ist.

Die Gleichung

$$\left\{\left[\left(\frac{\partial D}{\partial d}\right), -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial D}{\partial c}\right), -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial D}{\partial b}\right), -\left(\frac{\partial D}{\partial a}\right)\right]\widehat{}\left(x, y\right)^3\right\}\cdot\overline{D}_3 = 2f^2$$

drückt aus, dass die zweite Evectante der Discriminante gleich dem Quadrate der Cubic ist. Endlich die Gleichung

$$\frac{1}{16}\cdot\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a^2}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a\,\partial b}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a\,\partial c}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial a\,\partial d}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b\,\partial a}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b^2}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b\,\partial c}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial b\,\partial d}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c\,\partial a}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c\,\partial b}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c^2}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial c\,\partial d}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d\,\partial a}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d\,\partial b}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d\,\partial c}\right), & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial d^2}\right) \end{vmatrix}_{+}^{+} = 27\,\overline{D}_3^{\,2}$$

drückt aus, dass die Determinante gebildet aus den zweiten partiellen Differenzialquotienten der Discriminante, das Quadrat der Discriminante ergibt.

Von Interesse sind noch die Covarianten der zusammengesetzten Form $\alpha f - \beta C_{3,3}$. Es sind die folgenden Ausdrücke:

quadratische Covariante:

$$\overline{C}_{3,2}(\alpha f - \beta C_{3,3}) = (1, 0, -\overline{D}_3)\widehat{}(\alpha, \beta)^2\, C_{3,2} = (\alpha^2 - \beta^2\overline{D}_3)\, C_{3,2};$$

kubische Covariante:

$$\begin{aligned}\overline{C}_{3,3}(\alpha f - \beta C_{3,3}) &= \left(0, \tfrac{1}{3}\overline{D}_3, 0, -\overline{D}_3^{\,2}\right)\widehat{}\left(\alpha, \beta\right)^3 f - \left(1, 0, -\tfrac{1}{3}\overline{D}_3, 0\right)\widehat{}\left(\alpha, \beta\right)^3 C_{3,3} \\ &= (\alpha^2 - \beta^2\overline{D}_3)\,(-\alpha C_{3,3} + \beta\overline{D}_3 f);\end{aligned}$$

Discriminante:

$$\overline{D}_3(\alpha f - \beta C_{3,3}) = \left(1, 0, -\tfrac{1}{3}\overline{D}_3, 0, \overline{D}_3^{\,2}\right)\widehat{}\left(\alpha, \beta\right)^4 \overline{D}_3 = (\alpha^2 - \beta^2\overline{D}_3)^2\,\overline{D}_3.$$

In den speciellen Fällen, wo $\alpha = 0$, $\beta = 1$ ist, gehen die Formen über in

$$\begin{aligned}\overline{C}_{3,2}(C_{3,3}) &= -\overline{D}_3 \cdot C_{3,2}, \\ \overline{C}_{3,3}(C_{3,3}) &= -\overline{D}_3^{\,2}\cdot f, \\ \overline{D}_3(C_{3,3}) &= \overline{D}_3^{\,3}.\end{aligned}$$

Wir gehen jetzt an die Auflösung der Cubic in ihre linearen

Factoren. Dies kann am einfachsten bewerkstelligt werden mittels der Gleichung

$$C_{3,3}^2 - D_3 f^2 = -4 C_{3,2}^3 .$$

Dieselbe zeigt, dass jeder der Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\left(C_{3,3} + f\sqrt{D_3}\right), \quad \frac{1}{2}\left(C_{3,3} - f\sqrt{D_3}\right)$$

ein vollständiger Kubus sein muss, und dass folglich die Kubikwurzel aus einem jeden dieser Ausdrücke eine lineare Function von x und y sein wird. Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(C_{3,3} + f\sqrt{D_3}\right)} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(C_{3,3} - f\sqrt{D_3}\right)}$$

ist demnach eine lineare Function von x und y und er verschwindet für $f = 0$; er ist also ein linearer Factor der Cubic.

Stellt man die Cubic nun durch ihre Wurzeln dar, also

$$f(x, y) = a(x - x_1 y)(x - x_2 y)(x - x_3 y),$$

so kann man schreiben

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(C_{3,3} - f\sqrt{D_3}\right)} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(C_{3,3} - f\sqrt{D_3}\right)}$$
$$= -\frac{1}{3} a(J_1 - J_2)(x_2 - x_3)(x - x_1 y).$$

Diese Behauptung lässt sich beweisen mittels der Ausdrücke, welche die Covarianten annehmen, wenn man die Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3 einführt.

Man kann der Cubic eine sogenannte kanonische Form geben, d. h. eine symmetrische Form, in der sie auf die geringste Anzahl von Gliedern reducirt erscheint.

Da die Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\left(C_{3,3} + f\sqrt{D_3}\right) \text{ und } \frac{1}{2}\left(C_{3,3} - f\sqrt{D_3}\right)$$

vollständige Kuben sind, so kann man setzen

$$\frac{1}{2}\left(C_{3,3} + f\sqrt{D_3}\right) = \sqrt{D_3} \cdot x^3,$$
$$\frac{1}{2}\left(C_{3,3} - f\sqrt{D_3}\right) = -\sqrt{D_3} \cdot y^3,$$

folglich

$$f = x^3 + y^3,$$

$$C_{3,3} = \sqrt{\overline{D}_3}\,(x^3 - y^3)\,,$$
$$C_{3,2} = -\sqrt[3]{\overline{D}_3}\,.\,xy\,.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$u = (x_1 - x_2)(x - x_3\,y)\,,$$
$$v = (x_3 - x_1)(x - x_2\,y)\,,$$
$$w = (x_2 - x_3)(x - x_1\,y)\,,$$

so ist

$$u + v + w = 0\,,$$

und

$$C_{3,2} = -\frac{a^2}{18}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{a^2}{9}(vw + wu + uv)\,,$$

$$C_{3,3} = -\frac{a^3}{27}(v - w)(w - u)(u - v)\,,$$

$$\overline{D}_3 = -\frac{a^4}{27}(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2\,.$$

Auf diese Weise sind die Covarianten auf die einfachsten Ausdrücke reducirt. Indessen kann dies auch auf folgende Art geschehen:

$$C_{3,2} = -\frac{a^2}{18}\,\Sigma(x_2 - x_3)^2(x - x_1\,y)^2$$

$$= -\frac{a^2}{9}\left\{\begin{matrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3 \\ \frac{1}{2}[6x_1x_2x_3-x_2x_3^2-x_3x_1^2-x_1x_2^2-x_2^2x_3-x_3^2x_1-x_1^2x_2]\,, \\ x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2-x_1^2x_2x_3-x_1x_2^2x_3-x_1x_2x_3^2 \end{matrix}\right\}\widehat{\ }(x,y)^2$$

$$= -\frac{a^2}{9}\,[(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)x + (x_2\,x_3 + J_1\,x_3\,x_1 + J_2\,x_1\,x_2)y]$$
$$\times[(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)x + (x_2x_3 + J_2x_3x_1 + J_1x_1x_2)y]\,;$$

$$C_{3,3} = -\frac{a^3}{27}\,\Sigma(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)^2(x - x_2y)^2(x - x_3y)$$
$$= -a^3[(2x_1 - x_2 - x_3)x + (2x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2)y]$$
$$\times[(2x_2 - x_3 - x_1)x + (2x_3x_1 - x_1x_2 - x_2x_3)y]$$
$$\times[(2x_3 - x_1 - x_2)x + (2x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)y]\,.$$

Es ist zu bemerken, dass

$$\overline{D}_3 f^2 = -\frac{a^6}{27}u^2v^2w^2\,,$$

welche Gleichung in Verbindung mit den vorhergehenden Ausdrücken von $C_{3,2}$ und $C_{3,3}$ in denselben Grössen und der Gleichung $u + v + w = 0$ die Gleichung verificirt, welche die drei Covarianten

$f, C_{3,2}, C_{3,3}$ mit einander verbindet. In der That gilt die identische Gleichung

$$(v-w)^2(w-u)^2(u-v)^2 = -4(u+v+w)^3 uvw$$
$$+(u+v+w)^2(vw+wu+uv)^2 + 18(u+v+w)\times$$
$$(vw+wu+uv)uvw - 4(vw+wu+uv)^3 - 27u^2v^2w^2 .$$

Es ist nun

$$27a^{-3}C_{3,3} = -(v-w)(w-u)(u-v) ,$$
$$27a^{-3}f\sqrt{D_3} = 3(J_1-J_2)uvw ;$$

daraus folgt

$$-27a^{-3}.\frac{1}{2}\left(C_{3,3}-f\sqrt{D_3}\right) = [(x_1+J_2x_2+J_1x_3)x$$
$$+(x_2x_3+J_2x_3x_1+J_1x_1x_2)y]^3 ,$$
$$-27a^{-3}.\frac{1}{2}\left(C_{3,3}+f\sqrt{D_3}\right) = [(x_1+J_1x_2+J_2x_3)x$$
$$+(x_2x_3+J_1x_3x_1+J_2x_1x_2)y]^3 .$$

Somit ist bewiesen, dass man einen linearen Factor ausdrücken kann durch die Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(C_{3,3}+f\sqrt{D_3}\right)} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(C_{3,3}-f\sqrt{D_3}\right)}$$
$$= -\frac{1}{3}a(J_1-J_2)(x_2-x_3)(x-x_1y) .$$

Die vorangehenden Formeln zeigen, dass jeder Factor der kubischen Covariante den drei Factoren der kubischen Function f harmonisch zugeordnet ist; und ferner, dass die Factoren der Cubic und der kubischen Covariante zusammen eine Involution bilden, welche als Zugeordnete die Factoren der quadratischen Covariante besitzen*). In der That, die Harmonikale von $x-x_1y$ in Bezug auf $(x-x_2y)(x-x_3y)$ ist

$$(2x-x_2-x_3)x+(2x_2x_3-x_3x_1-x_1x_2)y ,$$

welches ein Factor der kubischen Covariante ist.

Das Product des Paares harmonischer Factoren ist

$$(2x_1-x_2-x_3)x^2+2(x_2x_3-x_1^2)xy-x_1(2x_2x_3-x_3x_1-x_1x_2)y^2.$$

Multiplicirt man dasselbe mit x_2-x_3 und nimmt die Summe der analogen Ausdrücke, so verschwindet entweder diese Summe, oder auch es bilden die drei Paare eine Involution. Dass die quadratische Covariante die Zugeordneten der Involution liefere, lässt sich

*) Man vergl. die in § 143, 8 aufgestellten Theoreme und Beweise.

leicht folgendermassen erweisen. Die letzte quadratische Function kann man auch schreiben

$$[-(x_1+x_2+x_3)+3x_1]x^2+2[x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1(x_1+x_2+x_3)]xy$$
$$+[-3x_1x_2x_3+x_1(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]y^2,$$

welcher Ausdruck sich verwandeln lässt in

$$\left(\frac{3b}{a}+3x_1\right)x^2+2\left(\frac{3c}{a}-\frac{3b}{a}x_1\right)xy+\left(\frac{3d}{a}+\frac{3c}{a}x_1\right)y^2,$$

oder mit Vernachlässigung des Factors $3a^{-1}$,

$$(b+ax_1\,,\quad c-bx_1\,,\quad d+cx_1)\widehat{}(x,y)^2,$$

welcher Ausdruck in harmonischer Beziehung zu der quadratischen Covariante

$$(ac-b^2\,,\quad \frac{1}{2}(ad-bc)\,,\quad bd-c^2)\widehat{}(x,y)^2$$

steht. Dasselbe gilt von den beiden übrigen Factoren; sie sind Harmonikalen mit der Hesse'schen Function $C_{3,2}$.

Wenn zwei Wurzeln einander gleich sind, so ist

$$f=a(x-x_1y)^2(x-x_3y)\,,$$
$$C_{3,2}=-\frac{a^2}{9}(x_1-x_3)^2(x-x_1y)^2\,,$$
$$C_{3,3}=\frac{2a^3}{27}(x_1-x_3)^3(x-x_1y)^3\,,$$
$$\overline{D}_3=0\,.$$

Wenn alle drei Wurzeln einander gleich sind, so wird

$$f=a(x-x_1y)^3\,,$$
$$C_{3,2}=0\,,\quad C_{3,3}=0\,,\quad \overline{D}_3=0\,.$$

Zur Erläuterung der Methode von Cayley fügen wir noch ein numerisches Beispiel hinzu.

Zahlenbeispiel. Es sei der lineare Factor von

$$f=4x^3+9x^2y+18xy^2+17y^3\ {}^{*)}$$

zu bestimmen. Man hat $\overline{D}_3=1600$ und

$$C_{3,3}=110x^3-90x^2y-630xy^2-670y^3\,.$$

Daraus folgt

---

*) Salmon, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformation. Deutsch von Fiedler. § 166 u. 196.

—— Leçons d'algèbre supérieure. Traduits par Bazin. § 156. Paris 1868.

$$\frac{1}{2}\left(C_{3,3}+f\sqrt{D_3}\right)=5(3x+y)^3\,,$$
$$\frac{1}{2}\left(C_{3,3}-f\sqrt{D_3}\right)=-\,25(x+3y)^3\,;$$

demgemäss ist

$$\sqrt[3]{5}\,(3x+y)+\sqrt[3]{25}\,(x+3y)$$

ein linearer Factor.

Um f auf die kanonische Form

$$f=X^3+Y^3$$

zu reduciren, hat man mit Berücksichtigung der obigen Ausdrücke

$$5(3x+y)^3=40X^3\,,$$
$$25(x+3y)^3=40\,Y^3\,,$$

folglich

$$f=\frac{1}{8}(3x+y)^3+\frac{5}{8}(x+3y)^3\,.$$

Hieraus ergeben sich ebenfalls die Wurzeln von $f=0$ in Form der linearen Gleichung

$$(3x+y)+\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{5}\,(x+3y)=0\,.$$

§ 193. Andere Methoden, eine binäre kubische Function auf die kanonische Form zu reduciren.

Die Reduction der Form $(a,b,c,d\widehat{)\,(}x,y)^3$ auf die kanonische Form

$$f=X^3+Y^3$$

unterliegt keinen besonderen Schwierigkeiten; denn die letztere ist äquivalent mit

$$(\alpha x+\beta y)^3+(\alpha_1 x+\beta_1 y)^3$$

und enthält implicite vier Constanten, ist also eben so allgemein wie die erstere. Entwickelt man die Form X^3+Y^3 nach Potenzen von x, y, und setzt die Coefficienten homologer Glieder einander gleich, so erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\alpha^3+\alpha_1{}^3=a\,,\quad \alpha^2\beta+\alpha_1{}^2\beta_1=b\,,$$
$$\alpha\beta^2+\alpha_1\beta_1{}^2=c\,,\quad \beta^3+\beta_1{}^3=d\,.$$

Es sei nun

$$(\alpha x+\beta y)(\alpha_1 x+\beta_1 y)=(A_0,\ \tfrac{1}{2}A_1,\ A_2\widehat{)\,(}x,y)^2\,,$$

also

$$A_0 = \alpha\alpha_1\,, \quad A_1 = \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta\,, \quad A_2 = \beta\beta_1\,;$$

alsdann gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} ac - b^2 &= A_0(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\,,\\ ad - bc &= A_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\,,\\ bd - c^2 &= A_2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{ad - bc}{ac - b^2} = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\alpha} = z_2 + z_1\,,$$

$$\frac{bd - c^2}{ac - b^2} = \frac{A_2}{A_0} = \frac{\beta_1\beta}{\alpha_1\alpha} = z_2 z_1\,.$$

Es sind also $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(ac - b^2)z^2 - (ad - bc)z + (bd - c^2) = 0\,,$$

und $\beta = \alpha z_1$, $\beta_1 = \alpha_1 z_2$. Substituiren wir diese Werthe in die linearen Substitutionen $\alpha x + \beta y$ und $\alpha_1 x + \beta_1 y$, so wird

$$X = \alpha(x + z_1 y)\,, \quad Y = \alpha_1(x + z_2 y)\,,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \alpha_1{}^3 &= a\,,\\ \alpha^3 z_1{}^3 + \alpha_1{}^3 z_2{}^3 &= d\,; \end{aligned}$$

folglich

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{a z_1{}^3 - d}{z_1{}^3 - z_2{}^3}}\,, \quad \beta_1 = \alpha_1 z_2 = z_2\sqrt[3]{\frac{a z_1{}^3 - d}{z_1{}^3 - z_2{}^3}}\,,$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{a z_2{}^3 - d}{z_2{}^3 - z_1{}^3}}\,, \quad \beta = \alpha z_1 = z_1\sqrt[3]{\frac{a z_2{}^3 - d}{z_2{}^3 - z_1{}^3}}\,.$$

Hierdurch sind die Functionen X und Y bestimmt. Wenden wir diese Deductionen auf dasselbe Zahlenbeispiel an; also

$$4x^3 + 9x^2 + 18x + 17 = 0\,,$$

so ist $y = 1$ und die Hülfsgleichung (Resolvente)

$$z^2 - 3\tfrac{1}{3}\,z + 1 = 0\,; \quad z_1 = 3\,, \quad z_2 = \frac{1}{3}\,.$$

Demgemäss ist

$$\alpha_1 = 1\frac{1}{2}\,, \quad \beta_1 = \frac{}{2}\,; \quad \alpha = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\,, \quad \beta = \frac{3\sqrt[3]{5}}{2}\,;$$

und die kanonische Form

$$f = \frac{1}{8}(3x + 1)^3 + \frac{5}{8}(x + 3)^3\,.$$

Man kann nun auch die Wurzel der vorgelegten Gleichung in Ausdrücken von z_1 und z_2 wiedergeben; es ist

$$x_1 = -\frac{z_1 \sqrt[3]{a z_2^3 - d} + \sqrt[3]{1} \,.\, z_2 \sqrt[3]{a z_1^3 - d}}{\sqrt[3]{a z_2^3 - d} + \sqrt[3]{1} \sqrt[3]{a z_1^3 - d}}.$$

Man erhält aus dieser allgemeinen Wurzelform die Werthe der einzelnen Wurzeln x_1, x_2, x_3, wenn man nacheinander 1, J_1, J_2 an die Stelle von $\sqrt[3]{1}$ treten lässt.

Salmon beweist das Theorem, dass eine binäre kubische Form immer auf die Summe von zwei kubischen Ausdrücken

$$X^3 + Y^3 \text{ oder } AX^3 + DY^3$$

reducirbar sei auf folgende Art (l. c. § 166).

Durch die linearen Transformationen

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y, \quad y = \alpha_2 X + \beta_2 Y$$

wird

$$\begin{aligned} &ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \\ &= AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3. \end{aligned}$$

Nach der Definition einer Covariante und für die Hesse'sche speciell ist

$$\begin{aligned} &(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 \\ &= (AC - B^2)X^2 + (AD - BC)XY + (BD - C^2)Y^2. \end{aligned}$$

Wenn nun B und C in der Transformirten verschwinden, so nimmt diese Covariante die einfachste Form

$$ADXY$$

an und man erkennt leicht, dass für X und Y die beiden linearen Factoren zu wählen sein werden, in welche die Covariante sich zerlegen lässt. Nach dem Früheren ist nämlich

$$\begin{aligned} C_{3,2} = -\frac{1}{9}a^2[(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)x + (x_2x_3 + J_1x_3x_1 + J_2x_1x_2)y] \\ \times [(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)x + (x_2x_3 + J_2x_3x_1 + J_1x_1x_2)y]. \end{aligned}$$

Diese Factoren werden also durch Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden. Vergleicht man dann die vorgelegte kubische Form mit

$$AX^3 + DY^3,$$

so erhält man A und D durch Vergleichung homologer Coefficienten. Ist nämlich

$$X = \gamma_1 x + \delta_1 y, \quad Y = \gamma_2 x + \delta_2 y,$$

so ist

$$\begin{gathered} A(\gamma_1 x + \delta_1 y)^3 + D(\gamma_2 x + \delta_2 y)^3 \\ = a x^3 + 3 b x^2 y + 3 c x y^2 + d y^3. \end{gathered}$$

Die Bestimmungsgleichungen sind alsdann

$$\begin{gathered} \gamma_1{}^3 A + \gamma_2{}^3 D = a, \quad \delta_1{}^3 A + \delta_2{}^3 D = d, \\ (\gamma_1{}^3 \delta_2{}^3 - \gamma_2{}^3 \delta_1{}^3) D = \gamma_1{}^3 d - \delta_1{}^3 a, \\ (\gamma_1{}^3 \delta_2{}^3 - \gamma_2{}^3 \delta_1{}^3) A = \delta_2{}^3 a - \gamma_2{}^3 d; \end{gathered}$$

woraus folgt

$$\frac{D}{A} = -\frac{\gamma_1{}^3 d - \delta_1{}^3 a}{\gamma_2{}^3 d - \delta_2{}^3 a}.$$

Zahlenbeispiel. Es soll die Form $4x^3 + 9x^2 + 18x + 17$ oder $(4, 3, 6, 17 \widehat{)\,(} x, 1)^3$ auf die kanonische Form

$$A X^3 + D Y^3$$

gebracht werden.

Die quadratische Covariante ist

$$15x^2 + 50x + 15 = 5(x+3)(3x+1).$$

Die Bestimmungsgleichungen für A und D sind demnach

$$\begin{gathered} A + 27 D = 4, \quad 27 A + D = 17; \\ D : A = 1 : 5. \end{gathered}$$

Die kanonische Form ist demgemäss

$$5(x+3)^3 + (3x+1)^3,$$

und die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$4x^3 + 9x^2 + 18x + 17 = 0$$

bestimmt durch die lineare Gleichung

$$(3x+1) + \sqrt[3]{1} \,.\, \sqrt[3]{5}\,(x+3) = 0,$$

wo an die Stelle von $\sqrt[3]{1}$ nacheinander

$$1, \quad J_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad J_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

zu setzen ist.

Salmon macht weiter die Bemerkung, dass nicht jede kubische Form durch reelle Transformation in die kanonische Form übergeführt werden könne, welche einen reellen Factor und zwei complexe Factoren habe und also nicht mit einer kubischen Form von drei reellen Factoren identisch sein könne.

Die Discriminante der quadratischen Covariante, nämlich

$$(ac - b^2)(bd - c^2) - \frac{1}{4}(ad - bc)^2 = -\frac{1}{4}\overline{D}_3,$$

ist nur durch das Vorzeichen und einen constanten Factor von der der kubischen Form selbst verschieden. Ist die letztere positiv, so hat die Covariante zwei reelle Factoren und die kubische Form nur einen reellen und zwei complexe Factoren; ist sie negativ, so hat die Covariante complexe und die kubische Form lauter reelle Factoren. Wenn die Discriminante verschwindet, so haben beide zwei gleiche Factoren und es lässt sich leicht nachweisen, dass die Hesse'sche Form von $X^2 Y$ gleich X^2 ist. Es ergibt sich übrigens aus der Bildung der quadratischen Covariante für $x^2\varphi$ leicht, dass ein quadratischer Factor einer binären Form auch ein quadratischer Factor ihrer Hesse'schen Covariante ist.

Endlich ist zu beachten, dass eine kubische binäre Form mit einem quadratischen Factor nicht auf die obige kanonische Form reducirbar ist. Man muss für den Fall eine andere wählen, z. B. die Form $X^2 Y$.

§ 194. Methode der Auflösung einer kubischen Gleichung mittels einer Transformation zweiter Ordnung*).

Die folgende Methode gründet sich auf die Bemerkung, dass die Summe der beiden linearen Factoren der quadratischen Covariante der Gleichung

$$(a, b, c, d)\widehat{\ }(x, 1)^3 = 0$$

einen linearen Factor der kubischen Covariante gibt. Nach Cayley ist nämlich

$$-C_{3,2} = \varphi.\psi = \frac{a}{3}[(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)\xi + (x_2 x_3 + J_1 x_3 x_1 + J_2 x_1 x_2)\eta]$$

$$\times \frac{a}{3}[(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3)\xi + (x_2 x_3 + J_2 x_3 x_1 + J_1 x_1 x_2)\eta]$$

und

$$-\frac{1}{27}C_{3,3} = \frac{a}{3}[(2x_1 - x_2 - x_3)\xi + (2x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2)\eta]$$

$$\times \frac{a}{3}[(2x_2 - x_3 - x_1)\xi + (2x_3 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_3)\eta]$$

$$\times \frac{a}{3}[(2x_3 - x_1 - x_2)\xi + (2x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1)\eta].$$

*) Man vergl. Cayley, Note sur la transformation de Tschirnhausen. Crelle's Journ. LVIII. S. 259. 1861; sowie § 189.

Bezeichnet man die beiden Factoren von $C_{3,2}$ mit φ und ψ, die drei Factoren von $\frac{1}{27} C_{3,3}$ mit Φ, Ψ, Ξ, so findet man

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \Phi , \\ J_2 \varphi + J_1 \psi &= \Psi , \\ J_1 \varphi + J_2 \psi &= \Xi . \end{aligned}$$

Ist nun einer der Factoren φ und ψ gleich Null, d. h. die Covariante $C_{3,2} = 0$ (Resolvente), so erhält man für den Fall, dass ψ verschwindet,

$$\varphi^3 = \Phi . \Psi . \Xi = -\frac{1}{27} C_{3,3}$$

und

$$\varphi = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{1} \sqrt[3]{C_{3,3}} .$$

Man gelangt nun auf folgende Art zu einer Transformation zweiter Ordnung. Setzt man x_1 allgemein gleich x, so ist

$$\begin{aligned} y = \varphi + \psi &= (ax + b)\xi - \left(c + \frac{d}{x}\right) \eta \\ &= (ax + b)\xi + (ax^2 + 3bx + 2c)\,\eta . \end{aligned}$$

Um x aus dieser Substitution und der vorgelegten Gleichung zu eliminiren, setze man der Reihe nach

$$\begin{aligned} y &= (ax + b)\xi + (ax^2 + 3bx + 2c)\eta , \\ yx &= (ax^2 + bx)\xi - (cx + d)\eta , \\ yx^2 &= -(2bx^2 + 3cx + d)\xi - (cx^2 + dx)\eta . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich folgendes System von Gleichungen, geordnet nach Potenzen von x:

$$\begin{aligned} 0 &= (b\xi + 2c\eta - y) + x(a\xi + 3b\eta) + x^2(a\eta) , \\ 0 &= -d\eta + x(b\xi - c\eta - y) + x^2(a\xi) , \\ 0 &= -d\xi + x(-3c\xi - d\eta) + x^2(-2b\xi - c\eta - y) . \end{aligned}$$

Die Transformirte in y ist demnach

$$\begin{vmatrix} y - b\xi - 2c\eta , & -a\xi - 3b\eta , & -a\eta \\ d\eta , & y - b\xi + c\eta , & -a\xi \\ d\xi , & 3c\xi + d\eta , & y + 2b\xi + c\eta \end{vmatrix} = 0,$$

und nach Potenzen von y geordnet:

$$y^3 + 3y\left(ac - b^2 ,\ \frac{1}{2}(ad - bc) ,\ bd - c^2\right)(\xi, \eta)^2$$

$$+ \left\{\begin{matrix} ad^2 - 3abc + 2b^3 , \\ abd - 2ac^2 + b^2c , \\ -acd + 2b^2d - bc^2 , \\ -ad^2 + 3bcd - 2c^3 , \end{matrix}\right\} \widehat{\ } (\xi, \eta)^3 = 0 .$$

Verschwindet nun die Covariante $C_{3,2}$, so ist $\frac{\xi}{\eta}$ eine Wurzel derselben, und man hat

$$y = -\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{C_{3,3}(\xi,\eta)}.$$

Andererseits ist

$$-y = -(ax+b)\xi + \left(c + \frac{d}{x}\right)\eta$$
$$= \frac{(ax+b)\xi^2 + 2(bx+c)\xi\eta + (cx+d)\eta^2}{\eta x - \xi},$$

folglich

$$\frac{(ax+b)\xi^2 + 2(bx+c)\xi\eta + (cx+d)\eta^2}{\eta x - \xi} = \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{C_{3,3}(\xi,\eta)},$$

wodurch die vollständige Auflösung der kubischen Gleichung gegeben ist.

§ 195. Ueber die Gleichung der quadrirten Differenzen der Wurzeln einer kubischen Gleichung von Cayley*).

Die Methode der Herstellung der Gleichung der quadrirten Differenzen der Wurzeln einer kubischen Gleichung bietet eine Eigenthümlichkeit dar, welche nicht bei den Gleichungen höherer Ordnung auftritt, die nämlich, dass wir zuerst die Gleichung der Differenzen der in cyclischer Folge geordneten Wurzeln bilden und daraus die Gleichung der quadrirten Differenzen ableiten können.

Gegeben sei die Gleichung

$$(a,b,c,\overset{\frown}{d)\,(x},1)^3 = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Die Function

$$F[\eta - (x_2 - x_3)]$$

gleich Null gesetzt, liefert für die Wurzel η der Gleichung der Wurzeldifferenzen in cyclischer Reihenfolge die Werthe

$$x_2 - x_3, \quad x_3 - x_1, \quad x_1 - x_2,$$

und hat nur zwei Werthe für irgend eine Verwechselung der Wurzeln, nämlich

$$F[\eta - (x_2 - x_3)] \quad \text{und} \quad F[\eta - (x_3 - x_2)].$$

Der zweite Werth wird gefunden aus dem ersten durch einen Zeichenwechsel des ganzen Ausdruckes oder auch durch einen

*) Quarterly Journal of Mathematics. Vol. III. p. 307. London 1860.

Zeichenwechsel der Glieder der geraden Potenzen von η. Wir können demnach schreiben

$$F[\eta-(x_2-x_3)]=P-Q\zeta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3),$$

wo P und Q symmetrische Functionen der Wurzeln sind und

$$\zeta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$$

eine Function, deren Quadrat eine symmetrische Function der Wurzeln ist, sich also durch die Coefficienten a, b, c, d ausdrücken lässt.

Wir finden nun

$$P=\eta^3+\eta\,[\Sigma(x_2x_3)-\Sigma(x_1^2)]=\frac{1}{a^2}[a^2\eta^3+9(ac-b^2)\eta],$$

$$Q=1, \quad \zeta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{a^2}\sqrt{-27\overline{D}_3},.$$

Folglich ist

$$F[\eta-(x_2-x_3)]=\frac{1}{a^2}\left[a^2\eta^3+9(ac-b^2)\eta-\sqrt{-27\overline{D}_3}\right]$$

und entsprechend

$$F[\eta+(x_2-x_2)]=\frac{1}{a^2}\left[a^2\eta^3+9(ac-b^2)\eta+\sqrt{-27\overline{D}_3}\right].$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man

$$F[\eta^2-(x_2-x_3)^2]=\frac{1}{a^2}\left[\left(a^2\eta^2+9(ac-b^2)\right)^2\eta^2+27\overline{D}_3\right].$$

Die Gleichung der quadrirten Differenzen ist demnach

$$\left(a^2\eta^2+9(ac-b^2)\right)^2\eta^2+27\overline{D}_3=0,$$

oder nach Potenzen von η entwickelt,

$$a^4\eta^6+18a^2J_{2,2}\eta^4+81J_{2,2}^2\eta^2+27\overline{D}_3=0.$$

Da J_1 und J_2 die zwei complexen Kubikwurzeln der Einheit bezeichnen, so ist $(J_1-J_2)^2=-3$, und schreiben wir in

$$F[\eta-(x_2-x_3)]$$

nun $\frac{3\eta}{a(J_1-J_2)}$ statt η, so nimmt die Gleichung die folgende einfachere Form an:

$$F\left[\eta-\frac{1}{3}a(J_1-J_2)(x_2-x_3)\right]=\eta^3-3J_{2,2}\eta-a\sqrt{\overline{D}_3}.$$

Ist die gegebene Function U binär, also

$$U=(a, b, c, d\widehat{)\,(}x,y)^3,$$

und $C_{3,2}$ die Hesse'sche Covariante, so ist jene Gleichung ein specieller Fall (nämlich für $x = 1$, $y = 0$) von der Gleichung

$$F\left[\eta - \frac{1}{3}a(J_1 - J_2)(x - x_1 y)\right] = \eta^3 - 3\,C_{3,2}\eta - U\sqrt{D_3}\,.$$

Diese Gleichung erhält man auch aus der Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}C_{3,3} + \frac{1}{2}U\sqrt{D_3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}C_{3,3} - \frac{1}{2}U\sqrt{D_3}}$$
$$= -\frac{1}{3}a(J_1 - J_2)(x_2 - x_3)(x - \alpha y)\,,$$

wo $C_{3,3}$ die kubische Covariante ist*).

Schreibt man nämlich einstweilen

$$\eta = \sqrt[3]{X} - \sqrt[3]{Y},$$

so findet man

$$\eta^3 = X - Y - 3\sqrt[3]{XY\eta^3}\,,$$

oder

$$\eta^3 + 3\eta\sqrt[3]{XY} - (X - Y) = 0\,,$$

wo

$$\sqrt[3]{XY} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left[C_{3,3} - U^2 D_3\right]}\,,$$

ist, und wegen der am angeführten Orte von Cayley gegebenen Relation

$$U^2 D_3 - C_{3,3}^2 = 4C_{3,2}^3$$

übergeht in

$$\sqrt[3]{XY} = -C_{3,2}\,.$$

Ausserdem ist

$$X - Y = U\sqrt{D_3}\,,$$

so dass man erhält

$$\eta^3 - 3C_{3,2}\eta - U\sqrt{D_3} = 0\,,$$

eine Gleichung, welcher Genüge geschieht durch

$$\eta = \frac{1}{3}a(J_1 - J_2)(x_2 - x_3)(x - x_1 y)\,.$$

Da die andern beiden Wurzeln von derselben Form sind, so ist die kubische Function in η gleich

*) Cayley, Fifth Memoir on Quantics, Phil. Trans. T. 148, p. 443. 1858.

$$F\left[\eta - \frac{1}{3}a(J_1 - J_2)(x_2 - x_3)(x - x_1 y)\right],$$

wodurch das Theorem bewiesen ist.

Wir fügen noch einige Bemerkungen über die Differenzengleichung hinzu. Aus der Gleichung der quadrirten Differenzen

$$\left(a^3\eta^3 + 9J_{2,2}a\eta - 3a\sqrt{-3\overline{D}_3}\right)\left(a^3\eta^3 + 9J_{2,2}a\eta + 3a\sqrt{-3\overline{D}_3}\right) = 0$$

geht hervor, dass die Wurzeln derselben nur dann sämmtlich reell sind, wenn die Discriminante $\overline{D}_3$ negativ ist.

Nach der Cardani'schen Formel ist

$$\eta = \sqrt[3]{\pm\frac{3a}{2}\sqrt{-3\overline{D}_3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-a^2\overline{D}_3 + 4J_{2,2}^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\pm\frac{3a}{2}\sqrt{-3\overline{D}_3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-a^2\overline{D}_3 + 4J_{2,2}^3}}$$

und wegen

$$a^2\overline{D}_3 - 4J_{2,2}^3 = V_3^2,$$

$$\eta = \sqrt[3]{\pm\frac{3a}{2}\sqrt{-3\overline{D}_3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}V_3\sqrt{-1}}$$
$$+ \sqrt[3]{\pm\frac{3a}{2}\sqrt{-3\overline{D}_3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}V_3\sqrt{-1}}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind also sämmtlich reell, wenn $\sqrt{-3\overline{D}_3}$ reell, d. h. $\overline{D}_3$ negativ ist. Ist aber $\overline{D}_3$ positiv, so kann mau den Factor $\sqrt{-1}$ heraussetzen und die allgemeine Wurzelform wird

$$\eta = \sqrt{-3}\left[\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{\pm\frac{1}{2}a\sqrt{\overline{D}_3} + \frac{1}{2}V_3}\right.$$
$$\left. + \sqrt[3]{1^2}\sqrt[3]{\pm\frac{1}{2}a\sqrt{\overline{D}_3} - \frac{1}{2}V_3}\right],$$

welche eine rein imaginäre und zwei complexe Wurzeln hat.

§ 196. Ueber eine merkwürdige kubische Gleichung, deren Wurzeln sämmtlich reell sind*).

Theorem. Die kubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & h, & g \\ h, & b-\lambda, & f \\ g, & f, & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

hat lauter reelle Wurzeln.

Um dies zu beweisen, zeige man, dass die vorgelegte Gleichung

$$(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)-(a-\lambda)f^2-(b-\lambda)g^2$$
$$-(c-\lambda)h^2+2fgh=0$$

zu begrenzenden Gleichungen der Wurzeln**) die drei quadratischen Gleichungen hat, welche entstehen, wenn zwei der Grössen f, g, h verschwinden.

Seien α und β die Wurzeln der Gleichung

$$(\lambda-a)(\lambda-b)-h^2=0\,,$$

welche entsteht, wenn $f=g=0$ gesetzt wird. Die Wurzeln sind

$$\alpha \text{ und } \beta = \tfrac{1}{2}(a+b) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2+4h^2}\,.$$

α ist grösser als a und b, β kleiner. Wenn man nun für λ in der vorgelegten Gleichung die Werthe $+\infty$, α, β, $-\infty$ einsetzt, so ergeben sich nacheinander die Resultate

$$+,\ -[f\sqrt{\alpha-a}\pm g\sqrt{a-b}]^2,\quad +[f\sqrt{a-\beta}\pm g\sqrt{b-\beta}]^2,\ -$$

Es liegen also gemäss § 7 drei reelle Wurzeln der vorgelegten Gleichung zwischen diesen Grenzwerthen der Function; die eine ist $>\alpha$, die zweite liegt zwischen α und β, die dritte ist $<\beta$.

§ 197. Formeln von Young, zwei Wurzeln einer kubischen Gleichung auszudrücken, wenn die dritte gegeben ist***).

Young gibt die folgenden Formeln für zwei Wurzeln x_2 und x_3 der kubischen Gleichung

$$x^3+px+q=0\,,$$

*) Hymers, Theorie of algebraical equations. p. 66. Cambridge 1840.
Mansion, Eléments de la théorie des déterminants. Bruxelles et Mons 1875.
Gerono, N. ann. math. XXXI. p. 305. 1872.
G. Bauer, Journ. f. die reine und angewandte Mathem. 71. Bd. S. 40.
S. Günther, Lehrbuch der Determinanten. S. 152. Erlangen 1877.

**) Hymers, A treatise on the theory of algebraical equations. § 52.

***) Young, The analysis and solution of cubic and biquadratic equations. London 1842. Man vergleiche auch Lobatto, Note sur les racines d'une équation du troisième degré. Journ. Math. IX. p. 177. Paris 1844.

wenn die dritte x_1 bekannt ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2}x_1 \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{27q^2+4p^3}}{(2px_1+3q)}\sqrt{-1}\,.$$

Diese Formeln lassen sich folgendermassen herleiten:

Nach der Cardani'schen Formel ist

$$x_1 = y + z\,,$$

wenn gesetzt wird

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}\,,$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}\,.$$

Die beiden andern Wurzeln sind

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2}\left[x_1 \pm (y-z)\sqrt{-3}\right].$$

Um $y - z$ zu erhalten als Function von x_1, p und q, bilde man die Gleichungen

$$y^3 - z^3 = \sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\,,\quad y^3 - z^3 = -q\,,\quad yz = -\frac{1}{3}p\,.$$

Weiter ist

$$\frac{y^3-z^3}{y-z} = \frac{y^3+z^3}{y+z} + 2yz\,;$$

folglich auch

$$\frac{\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{y-z} = -\frac{2px_1+3q}{3x_1}\,,$$

und

$$y - z = -\frac{3x_1\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2px_1+3q}\,.$$

Demnach ist der gesuchte Werth von

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2}x_1 \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{27q^2+4p^3}}{(2px_1+3q)}\sqrt{-1}\,.$$

Diese Formel lässt sich nun verallgemeinern für die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Es sei $x + \frac{1}{3}a = x'$, folglich

$$x'^3 - \frac{1}{3}(a^2 - 3b)x' + \frac{1}{27}(2a^3 - 9ab + 27c) = 0\,.$$

Setzt man die Coefficienten dieser transformirten Gleichung an die Stelle von p und q, so erhält man

$$x_2' \text{ und } x_3' = -\frac{1}{2}x_1' \pm \frac{\sqrt{-D_3}}{2(2px_1' + 3q)}\,.$$

und wenn man an die Stelle von x' wieder x_1 einführt,

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{1}{3}a \pm \frac{3\sqrt{-D_3}}{2(a^2 - 3b)x_1 + (ab - 9c)}\right].$$

§ 198. Die Gleichung der quadrirten Differenzen und die Bedingungen der Realität der Wurzeln nach Lagrange*).

Geht man aus von der Form

$$(a, b, c, d)\widehat{\;}(x, 1)^3 = 0\,,$$

so ist die Gleichung der quadrirten Differenzen:

$$a^4 z^6 + 18a^2 J_{2,2} z^4 + 81 J_{2,2}^2 z^2 + 27\overline{D}_3 = 0\,.$$

Wenn alle drei Wurzeln reell sein sollen, so muss die Gleichung lauter Zeichenwechsel haben, also sein:

$$(1) \quad J_{2,2} = ac - b^2 < 0\,,$$

und

$$\overline{D}_3 = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0\,,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(2) \;\; a^2\overline{D}_3 = (2b^3 - 3abc + a^2 d)^2 + 4(ac - b^2)^3 < 0\,.$$

Wenn eine dieser Bedingungen fehlt, so hat die Gleichung zwei complexe Wurzeln. Man sieht übrigens leicht aus der Form der zweiten Gleichung, dass die Bedingung (2) nicht erfüllt werden kann, wenn die erste nicht besteht. Es genügt demnach allein die zweite.

V. Von der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§ 199. Methode von Ludovico Ferrari**).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0\,.$$

Das Princip der Methode von Ferrari beruht in der Umformung

*) Lagrange, Traité de la résolution des équations numériques. Art. III. Paris 1808.

**) Cardani, Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus. Papiae 1545. Cap. XXXIX. Regula II.

Bombelli, L'algebra parte maggiore dell' aritmetica. Bologna 1572.

dieses Polynoms in zwei Quadrate. Zu dem Ende transformire man die Gleichung in

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2,$$

oder

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r.$$

Um auch die rechte Seite in das Quadrat eines Binoms zu verwandeln, fügt Ferrari zu der Seite des Quadrates auf der linken Seite eine neue Unbekannte y hinzu, wodurch die Gleichung übergeht in

$$(x^2 + p + y)^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2).$$

Nun wird y so bestimmt, dass die rechte Seite ein Quadrat bildet. Dies ist aber der Fall, wenn

$$4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = q^2$$

gemacht wird. Die Bestimmung von y ist so abhängig gemacht von der Auflösung einer kubischen Resolvente.

Setzt man zur Vereinfachung $y + p = z$, so erhält man

$$4(2z - p)(z^2 - r) = q^2,$$

oder entwickelt die Resolvente XII:

$$z^3 - \frac{1}{2} pz^2 - rz + \frac{1}{8}(4pr - q^2) = 0.$$

Ist hieraus eine Wurzel z_1 berechnet (die Gleichung hat mindestens eine reelle Wurzel), so findet man die Wurzel der vorgelegten Gleichung aus der quadratischen

$$x^2 + z = x\sqrt{2z - r} - \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{2z - r}}.$$

Die Vorschrift, welche Cardano zur Auflösung der von Giovanno Colla vorgelegten Aufgabe: „Die Zahl 10 in drei Theile zu theilen, welche eine geometrische Progression bilden und von welchen das Product aus dem ersten in den zweiten 6 ausmache“ gibt, lautet im 39. Kap. seiner Algebra folgendermassen:

Quaestio V.

Exemplum: — — — — — — — — — —

Poneo igitur mediam I. propositionem, prima erit $\frac{6}{1\,.\,\text{pos}}$ et tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, quare haec aequantur 10*). Ducendo omnia

---

*) Das mittlere Glied der Progression sei x, dann ist

$$\frac{6}{x} : x = x : \frac{1}{6} x^3$$

in 6. positiones, habebimus 60. positiones aequales 1. quad. quadrato p̃. 6. quadratis p̃. 36. adde ex quinta regula, 6. quadrata utrique parti, habebis 1. quad. quadratum p̃. 12. quadratis p̃. 36. aequalia 6. quadratis p̃ 60. positionibus, nam si aequalibus aequalia addantur, tota fient aequalia, habent autem 1. quad. quadratum p̃ 12. quadratis p̃. 36 radicem et

1. qd. quad. p̃. 6. quad. p̃. 36. aequalia 60. pos.
6. quad. 6. quad.
1. quad. quad. p̃. 12. quad. p̃. 36. aequalia 6. quad. p̃. 60. pos.
2. pos. 1. quad. p̃. 12. pos.

est, 1. quadratum p̃. 6. quam si haberent 6. quadrata p̃. 60. positionibus jam haberemus negocium, sed non habent, addendi igitur sunt tot quadrati et numerus idem ex utraque parte, ut in priore relinquatur trinomium habens radicem, in altero autem fiat,

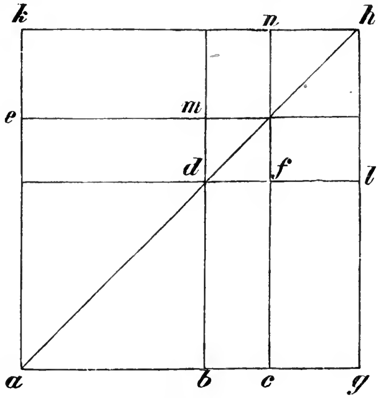


Fig. 26.

sit igitur numerus quadratorum 1. positio, et quia ut vides in figura tertiae regulae *cl* & *mk* (Fig. 26), fiunt ex duplo *gc* in *ab*, et *gc* est 1. positio, ponam numerum quadratorum addendorum semper 2. positiones, id est duplum *gc*, et quia numerus adden-

---

und
$$\frac{6}{x} + x + \frac{1}{6}x^3 = 10,$$
$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$
Addirt man beiderseits $6x$, so wird
$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x.$$
Damit auch die andere Seite ein Quadrat werde, addire man beiderseits
$$2y(x^2 + 6) + y^2 = 2yx^2 + (y^2 + 12y),$$
woraus sich ergibt
$$(x^2 + 6 + y)^2 = (2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y).$$

dus ad 36. est *lnm*, et ideo quadratum *gc* cum eo quod fit ex *gc* duplicato in *bc*, seu ex *gc* in duplum *cb*, et est 12. numerus quadratorum priorum, ducam igitur 1. positionem, dimidium numeri quadratorum additorum, semper in numerum quadratorum priorum, et in se, et fient 1. quadratum p̃. 12. positionibus addenda ex alia parte, et etiam 2. positiones pro numero quadratorum habemus igitur iterum ex communi animi sententia, quantitates infra scriptas, invicem aequales, et utraque habent radicem, prima ex regula tertia, sed secunda quantitas ex supposito, igitur ducta prima

1. quad. qd. p̃. 2. pos. p̃. 12. qd. R. p̃. quad. p̃. 12. pos. additi numeri p̃. 36. aequalia. 2. pos. p̃. 6. quadrato, p̃. 60. pos. p̃. 1. quad. p̃. 12. pos. numeri additi*).

parte trinomii in tertiam, fit quadratum dimidiae partis secundae trinomii**), quia igitur ex dimidio secundae in se, fiunt 900. quadrata, et ex prima in tertiam, fiunt 2. cubi p̃. 30. quadratis p̃. 72. positionibus quadratorum, similiter erit deprimendo per quadrata, quia aequalia per aequalia divisa, producunt aequalia, ut 2. cu. p̃. 30. quadratis p̃. 72. positionibus aequantur 900. quare 1. cubus p̃. 15. quadratis p̃. 36. positionibus aequantur 450.

Historische Bemerkungen. Die algebraische Auflösung der biquadratischen Gleichungen folgte bald der Entdeckung Ferro's und Tartaglia's. Die geometrische Construction ihrer Wurzeln war ohne Zweifel schon vorher den arabischen Geometern in einigen speciellen Fällen gelungen. Dies geht hervor aus einer Angabe im *Al-fihrist* (beendigt von Abulfarag 988), in welchem unter den Werken Abul Wafa's († 998) mitgetheilt wird ein Buch „Methode die Seite des Kubus und des Biquadrats, sowie des aus diesen Potenzen zusammengesetzten Ausdrucks zu finden"***). Diese Schrift, welche leider ver-

---

*) qu. R. bedeutet quadratum radicis, nämlich x^2; positio numeri additi ist hier y und der vorstehende Ausdruck ist

$$x^4 + (2y + 12)x^2 + y^2 + 12y + 36 = (2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y).$$

**) Die rechte Seite wird ein Quadrat, wenn

$$(2y + 6)(y^2 + 12y) = 30^2$$

ist, wenn also der Gleichung

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

durch einen bestimmten Werth von y Genüge geschieht; derselbe ist nahezu gleich 4.

***) Woepcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux. p. 37. Paris 1855.

loren gegangen ist, hatte offenbar die geometrische Construction der Gleichungen $x^3 = p$, $x^4 = q$ und $x^4 + px^3 = q$ zum Gegenstande. Woepcke zeigt, dass die letzte der drei Aufgaben sich mittels der Durchschnitte der Hyperbel $y^2 + axy + b = 0$ und der Parabel $x^2 - y = 0$ lösen lasse. In seiner Algebra von Omar Alkhayyami*) theilt Woepcke ferner sub Add. D. die geometrische Construction der Wurzeln der Gleichung $x^4 - 20x^3 + 2000x - 1900 = 0$ (allgemein: $x^4 - 2ax^3 + 2a^3x - (a^4 - b^4) = 0$) mit, welche in einem anonymen arabischen Manuscripte enthalten ist. Hierin wird die Aufgabe gelöst durch die Hyperbel $y(a - x) = b^2$ und den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$. Auffallend ist, dass der eminente Geometer Omar sich nicht auch dieser Probleme bemächtigte. Der Grund scheint indess in dem Umstande zu liegen, dass die Alten den Gliedern der höhern Gleichungen eine rein geometrische Bedeutung zu unterlegen gewohnt waren, indem sie dieselben auch immer geometrisch zu construiren oder die Auflösungsmethoden geometrisch zu reduciren bemüht waren. Omar selbst spricht sich in seiner Einleitung S. 7 und 8 hierüber ziemlich bestimmt aus. Seinen rein geometrischen Anschauungen von den algebraischen Grössen gegenüber war das Biquadrat ein Unding. Bei Cardano bildet die Potenz der Binome und Trinome die Basis seiner Analytik, und da dieselben immer erst geometrisch demonstrirt werden, so ist der Gang seiner Entwickelungen überall äusserst schwerfällig. Diese Schwierigkeiten, welche noch durch den Mangel einer bequemen synkopirten Bezeichnung der verschiedenen Grössen und ihrer Verbindungen gesteigert werden, sind aber von Cardano durch seinen bewundernswürdigen Scharfsinn und durch seine Fertigkeit im Rechnen überwunden. Obgleich er sich schon wiederholt mit der Auflösung specieller biquadratischer Gleichungen beschäftigt hatte, indem er sie auf die Form zweier Quadrate zu bringen suchte, so gelang es ihm doch nicht, eine allgemeine Auflösung dafür zu erfinden. Auch war sein Verfahren nicht neu, sondern bereits den Indern bekannt. Einen neuen Anstoss, durch welchen die Algebra der Gleichungen zu neuen Fortschritten geführt wurde, gab Giovanno Colla, auch „Zuanne de Tonini da Coi“ genannt, der, wiewol Mathematiker von Fach, doch nur dadurch zu glänzen suchte, dass er seinen Fachgenossen schwierige Probleme vorlegte, die er selbst nicht zu lösen vermochte. So legte er i. J. 1540 den Gelehrten folgende Aufgabe vor: „die Zahl 10 in drei Theile zu theilen, welche in geometrischer Progression stehen und deren erster Theil mit dem zweiten multiplicirt, 6 ergibt“. Cardano schreibt: *Exemplum, Fac ex 10. tres partes in continua proportione, ex quarum ductu primae in secundam, producentur 6. Hanc proponebat Joannes Colla, et dicebat solvi non posse, ego verò dicebam, eam posse solvi, modum tamen ignorabam, donec Ferrarius eum invenit.* Und in Regula II. Cap. XXXIX: *„Alia est regula nobilior praecedente, et est Ludovici de Ferrariis, qui*

*) L'algèbre d'Omar Alkhayyami, publ., trad. et accomp. d'extraits de manuscrits inédits. Paris. 1851.

eam me rogante invenit.“ Dieser talentvolle Schüler Cardan's (geb. 1522, gest. 1565) war später Prof. der Mathematik in Mailand und an der Universität in Bologna. Er betheiligte sich auch an den Streitigkeiten, welche zwischen Cardano und Tartaglia ausgebrochen waren*). Es gelang ihm, die Methode Cardano's mit einem neuen Gedanken zu verbinden. Er bildete aus der biquadratischen Gleichung zunächst zwei Seiten, in welchem die eine das Quadrat eines Binoms bildete; sodann fügte er zu beiden Seiten eine Hülfsgrösse hinzu dergestalt, dass die erste noch ein Quadrat blieb, und zugleich die andere zu einem solchen ergänzt wurde. Diese Methode ist später (1745) durch Simpson zum Zwecke der Auflösung vollständiger biquadratischer Gleichungen verallgemeinert worden. Cartesius in Leyden erfand 1637 die Methode, eine biquadratische Gleichung, in welcher das zweite Glied fehlt, in zwei quadratische Factoren zu zerlegen. Er veröffentlichte seine Methode in seiner Geometrie, jedoch ohne Beweis. Van Schooten, Hudde und Beaune haben sie dann in ihren Commentaren bewiesen. Einen neuen Aufschwung nahm dann die algebraische Analysis im 18. Jahrhundert durch die Arbeiten von Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde, Mallet und Hulbe. Die beiden letztgenannten Algebristen eröffneten in der Behandlung der Gleichungen einen neuen Gesichtspunct durch ihr Verfahren, die Unbekannte zu variiren und die Coefficienten der variirten Gleichung gewissen Bedingungen zu unterwerfen, wodurch diese auf einfacher lösbare Gleichungen reducirt werden. Unter diesen Methoden verdient als die vorzüglichste hervorgehoben zu werden, eine biquadratische Gleichung in eine andere desselben Grades zu transformiren, deren Wurzeln eine geometrische Proportion bilden, oder welche sich in eine reciproke Gleichung verwandeln lässt. Diese Methode, welche Mallet, Prof. der Mathematik in Upsala, 1780 veröffentlichte, ist zu oft wiederholten Malen nacherfunden worden, und zwar von Hulbe 1794, von Björling 1852, von Schlömilch 1861, von Unferdinger 1864, von Pokorny 1865, von Alexandre 1866. Mit einer zweiten Erfindung Mallet's, die vollständige kubische Gleichung in den Kubus einer zweitheiligen Grösse zu transformiren, ist es ähnlich zugegangen. Sie ist nacherfunden von Hulbe 1794, von Cockle 1841, von Bretschneider 1844, von Arndt 1865, von Alexandre 1866. Bei einem Theile der Analysis, welcher von jeher das allseitige Interesse der Mathematiker in dem Grade fesselte, wie die Algebra der Gleichungen es vermocht hat, dürfte diese Erscheinung nicht allzusehr unsere Verwunderung erregen. Es ist verzeihlich, wenn der Geschichtsschreiber Hankel sich in seiner Entrüstung über Cardano so ereifert und in seinem Mitgefühl für den unglücklichen Tartaglia sagt: „Der Mann, dem wir den grössten Fortschritt in diesem Jahrhundert verdanken, wurde vergessen, seine Methode als die von Hudde bezeichnet und nach dem treulosen Cardano die dem Tartaglia entwendete Formel benannt. — — — Cardano hatte die

*) Man sehe Libri, Hist. math. III. 180; Grun. Arch. LII. S. 143.

Freude, Ferrari's Entdeckung in seiner *Ars magna* 1545 veröffentlichen zu können. Aber die Nachwelt, ein ungerechter Richter, benannte diese Auflösung nach Bombelli*), der an sie genau ebensowenig Anrecht besitzt, als Cardano an die sogenannte Cardani'sche Formel. — — — Dies ist das Verfahren, durch welches Vieta bei seinen Zeitgenossen sich den höchsten Ruhm erwarb, welches von ausgezeichneten Analytikern, Harriot, Oughtred u. A. ausführlich behandelt wurde, heute aber — als wenn die Nachwelt immer Unrecht üben wollte — das Newton'sche Approximationsverfahren genannt wird." Freilich ist es die Aufgabe des Historikers, das schuldig oder unschuldig begangene Unrecht vor den Richterstuhl der Geschichte zu rufen und nach bestem Wissen und Willen ein gerechtes Urtheil zu fällen. Aber auch dieser Richter kann irren, er begeht hier selbst ein Unrecht, denn die Approximationsmethode von Newton ist nicht Eigenthum des Vieta, sondern des Chinesen Tsin Kiu Tschau († um 1300). Auch nach dem räthselhaften Lande der Mitte haben wir unser Augenmerk in der Geschichte der arithmetischen Wissenschaften zu richten; und leider auch diesem lässt der geniale Historiker nicht immer Gerechtigkeit wiederfahren. Er sagt S. 407 seiner Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter (Leipzig 1874): — — „Wenn es eines Beweises bedürfte, dass zwischen indischer und chinesischer Mathematik der engste Zusammenhang besteht, so ist es die Regel *Tá-jàn*, die schon im 3. Jahrh. im *Suán-Kīng* des Sun-tsè vorkommt. — — Diese Regel *Tá-jàn* ist aber nichts anderes, als die indische *Kuttuka*, — —". Hankel hat dasselbe Unglück, wie der ungerechte Richter „Nachwelt". Offenbar hat Hankel die *Tá-jàn* Regel gar nicht gekannt, sonst wäre das Kapitel über Mathematik der Chinesen wol weniger dürftig ausgefallen**).

Seit den letzten 25 Jahren ist die höhere Algebra in eine neue Phase eingetreten durch die Neugestaltung, welche sie unter den Händen von Cayley, Sylvester, Salmon, Brioschi, Hermite, Aronhold, Hesse, Clebsch und Gordan erfahren hat. Ohne die Kenntniss der bei der Untersuchung der binären algebraischen Formen in Betracht kommenden Formensysteme, der Invarianten und der Covarianten, ist kein tieferes Eindringen in die Theorie der Gleichungen bis zu dem gegenwärtigen Standpuncte dieser Disciplin mehr möglich.

---

*) Dies ist, soviel bekannt, nur von Euler geschehen.

**) Die Regel *Tá-jàn* hat, wie ich nachgewiesen habe, durchaus nichts gemein mit der Kettenbruchmethode *(Kuttuka)* des Aryabatthiya, sondern ist identisch mit der Congruenzmethode von Gauss. Vergl. Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet, herausgegeben von Dedekind. § 25, und Gauss, Diquisitiones arithmeticae. §. 32—36; ferner:

Matthiessen, Zur Algebra der Chinesen, Ztschft. f. Math. und Phys. XIX. S. 270. 1874.

—— Vergleichung der indischen Cuttuca- und der chinesischen Tayen-Regel, unbestimmte Gleichungen und Congruenzen ersten Grades aufzulösen. Sitzungsberichte der math.-naturwiss. Section in den Verhandlungen der Philol.-Vers. in Rostock 1875.

§ 200. **Methode von Vieta***). (*Capitulum de climactica parapIerosi*).

Vieta gibt unter andern biquadratischen Formen die Auflösung der Gleichung

$$x^4 + 2gx^2 + bx = c.$$

Vieta sagt: Problema III. Aequalitatem quadrato-quadrati adfecti tam sub latere quam quadrato: per medium cubicae radicem habentis planam, ad quadraticam deprimere.

Proponatur A quad. quadratum $+$ G plano in A quad. 2 $+$ B solido in A, aequari Z plano-plano. Oportet facere quod imperatum est.

Sane si quadratum effingatur abs A quad. $+$ G plano $+$ E quad. $\frac{1}{2}$: erit illud A quad. quad. $+$ G plano-plano $+$ G plano in A quad. 2. $+$ E quad. quad. $\frac{1}{4}$ $+$ E quad. in A quad. $+$ G plan. in E quadratum**).

Quoniam igitur ex iis quae proposita sunt, adhibita mathesi, A quad. quad. $+$ G plano in A quad. 2, aequatur Z plano plano $-$ B solido in A***).

Utrique igitur aequationis parti addatur id quod deficit ab effecto a statuta radice plana quadrato, ergo hac aequalium aequalibus additione, rursus pars parti aequalis erit†).

---

*) Vieta, De emendatione aequationum. Cap. VI. probl. III.

**) Der Sinn ist folgender: Es sei $E^2 = y$ eine Hülfsgrösse; dann hat man

$$\left(x^2 + g + \frac{1}{2}\,y\right)^2 = x^4 + g^2 + 2gx^2 + \frac{1}{4}\,y^2 + yx^2 + gy\,.$$

***) Nun ist nach der Voraussetzung

$$x^4 + 2gx^2 = c - bx.$$

†) Man addire beiderseits $g^2 + \frac{1}{4}\,y^2 + yx^2 + gy$, so resultirt

$$\left(x^2 + g + \frac{1}{2}\,y\right)^2 = c + g^2 + \frac{1}{4}\,y^2 + gy - bx + yx^2\,.$$

Damit die rechte Seite ein Quadrat werde, bilde man ein gleiches Quadrat, so dass in der Gleichsetzung beider die Glieder, welche x enthalten, verschwinden; also

$$\left(\frac{b}{2\sqrt{y}} - x\sqrt{y}\right)^2 = c + g^2 + \frac{1}{4}\,y^2 + gy - bx + yx^2\,.$$

Iam utraque pars dividitor subquadratice, illic revoçata ad analysin genesi, orietur manifesto A quad. $+ G$ plano $+ E$ quad. $\frac{1}{2}$.

Quod si altera quoque aequalitatis pars posset dividi subquadratice, quod orirtur, foret radicibus illis planis ex prima parte ortivis aequale.

Effingendum est igitur quadratum a radice plana, et illud alteri aequalitatis parti, id est Z plano-plano una cum suis adfectionibus comparandum et adaequandum, ut radices quoque comparentur et adaequentur inter se; et statuatur idcirco radix illa plana effingendi quadrati $\frac{B \text{ solidum}}{E\,2} - E$ in A*), sic enim in comparatione evanescent adfectiones sub A et gradibus et incidetur in aequalitatem de E, quo tendendum est. Effictum igitur quadratum erit $\frac{+ B \text{ solido-solidum}}{E \text{ quad. } 4} + E$ quad. in A. quad. $- B$ solido in A, aequale Z plano-plano $- B$ solido in $A + G$ plano-plano $+ E$ quad. quad. $\frac{1}{4} + E$ quad. in A. quad. $+ G$ plano in E quad.**).

Et deletis utrinque adfectionibus sub A et A quad. $\frac{B \text{ solido-solidum}}{E \text{ quad. } 4}$ aequabitur Z plano-plano $+ G$ plano-plano $+ E$ quad. quad. $\frac{1}{4} + G$ plano in E quad.***).

Et omnibus in E quad. 4. ductis et rite ordinatis, E quadraticubus $+ G$ plano 4 in E quad. quad. $\overline{+ Z \text{ plano-plano } 4. + G \text{ plano-plano } 4.}$ in E quad., aequabitur B solido-solido†). Innotescat autem E esse D: A quad. $+ D$ in A, aequabitur $\frac{B \text{ solido}}{D.\,2.} - G$ plano $- D$ quad. $\frac{1}{2}$.

*) Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{b^2}{4\,y} + yx^2 - bx = c - bx + g^2 + \frac{1}{4}\,y^2 + yx^2 + gy\,.$$

**) Hebt man beiderseits gleiche Glieder, so ergibt sich

$$\frac{b^2}{4\,y} = c + g^2 + \frac{1}{4}\,y^2 + gy\,.$$

***) Multiplicirt man Alles mit $4y$ und ordnet, so erhält man

$$y^3 + 4gy^2 + (4c + 4g^2)y = b^2\,.$$

†) Ist y_1 eine Wurzel dieser kubischen Resolvente, so ist

$$x^2 + y_1 x = \frac{b}{2\,y_1} - g - \frac{1}{2}\,y_1{}^2\,.$$

§ 201. Methode von Descartes*).

Descartes gibt in seiner Geometrie und zwar ohne Beweis eine Auflösung der biquadratischen Gleichungen, welche im Allgemeinen mit der von Vieta gegebenen übereinstimmt. Der Fortschritt, welcher in seiner Methode erkennbar ist, besteht darin, dass er die gegebene Gleichung in zwei quadratische Factoren zerlegt, welche die vier Wurzelwerthe derselben liefern. Gegeben sei die Gleichung **)

$$+ x^{4*} . pxx . qx . r \infty 0 .$$

Man bilde die Gleichung

$$+ y^6 . 2py^4 . \substack{+pp \\ 4r} yy - qq \infty 0 .$$

Für die Zeichen $+$ oder $-$, welche weggelassen sind, wenn $+p$ in der gegebenen Gleichung steht, setze man in der zweiten $+2p$; wenn $-p$, so ist zu setzen $-2p$. Wenn ferner in der gegebenen Gleichung $+r$ steht, ist in der zweiten zu setzen $-4r$; wenn $-r$, dann $+4r$.

Beispiel. Gegeben sei

$$x^{4*} - 4xx - 8x + 35 \infty 0 .$$

Man löse statt deren auf

$$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0 .$$

Durch diese Hülfsgleichung ist es möglich die gegebene Gleichung

$$+ x^{4*} . pxx . qx . r \infty 0$$

in zwei Gleichungen vom zweiten Grade zu zerlegen, nämlich

$$+ xx - yx + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0 ,$$

und

$$+ xx + yx + \frac{1}{2} yy \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0 .$$

Ist der Coefficient des zweiten Gliedes $+p$, so ist in den quadratischen Gleichungen $+\frac{1}{2}p$ zu setzen; wenn $-p$, dann $-\frac{1}{2}p$. Ist der Coefficient des dritten Gliedes $+q$, so ist in der ersten

---

*) Descartes, La géometrie liv. III. Paris 1664. Zuerst herausgegeben Leyden 1637; später lateinisch Amsterdam 1644 mit Noten von Beaune und Commentar von Schooten. Lugd. Bat. 1649; Frankf. a. M. 1695.

**) Die Form der Gleichung ist die bei Descartes und seinen Schülern übliche.

quadratischen Gleichung $+\frac{q}{2y}$, in der zweiten $-\frac{q}{2y}$ zu setzen und umgekehrt.

Zahlenbeispiel. Gegeben sei

$$x^4 - 17xx - 20x - 6 \propto 0.$$

Man löse die Gleichung

$$y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto 0$$

auf, wobei man findet $yy = 16$. Die beiden Partialgleichungen sind

$$xx - 4x - 3 \propto 0,$$
$$xx + 4x + 2 \propto 0.$$

Die Wurzeln sind $\sqrt{7} + 2$, $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$ und $2 - \sqrt{2}$.

Beweis von Beaune. Die biquadratische Gleichung sei

$$x^{4*} + px^2 + qx + r \propto 0$$

und nach Descartes' Vorschrift

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0.$$

Dann ist

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p \propto \frac{q}{2y} - yx,$$

und wenn man beiderseits quadrirt,

$$x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}y^2 \propto \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyx^2$$

oder

$$x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}p^2 + qx - \frac{q^2}{4y^2} \propto 0.$$

Subtrahirt man hiervon die vorgelegte Gleichung

$$x^{4*} + px^2 + qx + r \propto 0,$$

so bleibt

$$\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}p^2 - r - \frac{q^2}{4y^2} \propto 0,$$

und wenn man mit $4y^2$ multiplicirt,

$$y^6 + 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\-4r\end{matrix} yy - qq \propto 0, \quad \text{qu. e. d.}$$

§ 202. Methode von Fr. van Schooten*).

Die analytische Methode van Schooten's wird fälschlich Descartes zugeschrieben. Um die Gleichung

$$x^{4}* + pxx + qx + r \propto 0$$

zu reduciren, nehme man an, dieselbe bestehe aus den Factoren

$$xx + yx + z \propto 0, \text{ und } xx - yx + v \propto 0.$$

Führt man die Multiplication aus, so resultirt

$$\begin{array}{llll} x^{4}* & + zxx & - zyx + vz & \propto 0. \\ & - yy & + vy & \\ & + v & & \end{array}$$

Aus der Vergleichung der homologen Coefficienten dieser und der vorgelegten Gleichung ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} z - yy + v &\propto p, \\ -zy + vy &\propto q, \\ vz &\propto r. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$z \propto \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y},$$

$$v \propto \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y},$$

und

$$\left(\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right)\left(\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right) \propto r.$$

Entwickelt man das Product, so erhält man die bikubische Resolvente

$$y^6 + 2py^4 \begin{smallmatrix} +pp \\ -4r \end{smallmatrix} yy - qq \propto 0.$$

Die beiden quadratischen Gleichungen sind alsdann

$$xx + yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0,$$

und

$$xx - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \propto 0.$$

---

*) Fr. v. Schooten, Commentar. in libr. III. geometriae Cartesii.

§ 203. Die Euler'schen Formeln*).

Die vorgelegte Gleichung sei

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Sind dann y_1, y_2, y_3 die Wurzeln der Resolvente

$$y^3 + \frac{1}{2} py^2 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)\, y - \frac{1}{64} q^2 = 0,$$

so ist für

$$q \text{ negativ: } \begin{cases} x_1 \text{ und } x_2 = +\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}), \\ x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}); \end{cases}$$

$$q \text{ positiv: } \begin{cases} x_1 \text{ und } x_2 = -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}), \\ x_3 \text{ und } x_4 = +\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}). \end{cases}$$

Diese Formeln sind von Euler vermuthlich durch ein Combinationsverfahren entdeckt worden. Aus den Formeln von Vieta und Descartes ($4y$ anstatt y^2 gesetzt):

$$x^2 \pm 2\sqrt{y}\, x + 2y + \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{4\sqrt{y}} = 0$$

folgt nämlich:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2\sqrt{y_1}, & x_3 + x_4 &= -2\sqrt{y_1}, \\ x_1 + x_3 &= 2\sqrt{y_2}, & x_2 + x_4 &= -2\sqrt{y_2}, \\ x_1 + x_4 &= 2\sqrt{y_3}, & x_2 + x_3 &= -2\sqrt{y_3}, \end{aligned}$$

und hieraus

$$x_1 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}.$$

Euler substituirt nun allgemein

$$x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3},$$

wo y_1, y_2, y_3 die Wurzeln der kubischen Resolvente

$$y^3 - fy^2 + gy - h = 0$$

bezeichnen, so dass man zur Bestimmung der Coefficienten f, g, h hat:

$$\begin{aligned} f &= y_1 + y_2 + y_3, \\ g &= y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3, \\ h &= y_1 y_2 y_3. \end{aligned}$$

---

*) Euler, De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. Acad. Petrop. vet. Tom. VI. 1739.

—— Vollst. Anl. zur Algebra II. Cap. XV. § 192. Petersburg 1770.

Erhebt man die substituirte Function ins Quadrat, so erhält man nach Transposition der rationalen Glieder

$$x^2 - f = 2\left(\sqrt{y_1 y_2} + \sqrt{y_1 y_3} + \sqrt{y_2 y_3}\right).$$

Quadrirt man abermals und transponirt, so ergibt sich

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{y_1 y_2 y_3}\left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right),$$

oder, wenn man x an die Stelle des eingeklammerten Terms setzt,

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}\,.\,x + (f^2 - 4g) = 0.$$

Aus der Vergleichung der homologen Glieder dieser und der vorgelegten Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für f, g, h:

$$2f = -p, \quad f = -\frac{1}{2}p,$$

$$8\sqrt{h} = -q, \quad h = \frac{1}{64}q^2,$$

$$f^2 - 4g = r, \qquad g = \frac{1}{16}(p^2 - 4r).$$

Die Euler'sche Resolvente lautet demnach

$$y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)y - \frac{1}{64}q^2 = 0.$$

Weil nun die Quadratwurzel aus y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe hat, so gibt es acht verschiedene Combinationen von $\pm\sqrt{y_1}$, $\pm\sqrt{y_2}$, $\pm\sqrt{y_3}$, aus denen je eine Wurzel der vorgelegten Gleichung gebildet werden kann. Von diesen haben aber nur vier zur Zeit Gültigkeit. Da nämlich

$$\sqrt{y_1 y_2 y_3} = \sqrt{h} = -\frac{1}{8}q$$

sein muss, so ist für

$$q \text{ negativ:} \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}, \\ x_2 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}, \\ x_3 = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}, \\ x_4 = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}; \end{cases}$$

$$q \text{ positiv:} \quad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}, \\ x_2 = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}, \\ x_3 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}, \\ x_4 = +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}. \end{cases}$$

Diese Wurzelformen lassen sich auch direct aus der Formel von Descartes ableiten. Diese ist

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0.$$

Setzt man $4y$ an die Stelle von y^2, so geht die Resolvente von Descartes in die von Euler über; und die quadratische Gleichung wird

$$x^2 \pm 2\sqrt{y} \, . \, x + \frac{1}{2}\left(4y + p \mp \frac{q}{2\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Da der Coefficient des zweiten Gliedes, negativ genommen, gleich der Summe zweier Wurzeln ist, so hat man zur Bestimmung derselben folgende lineare Gleichungen aufzulösen, worin y_1, y_2, y_3 die drei Wurzelwerthe der kubischen Resolvente sind:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \mp 2\sqrt{y_1}, \quad & x_3 + x_4 &= -(x_1 + x_2) = \pm 2\sqrt{y_1}, \\
x_1 + x_3 &= \mp 2\sqrt{y_2}, \quad & x_2 + x_4 &= -(x_1 + x_3) = \pm 2\sqrt{y_2}, \\
x_1 + x_4 &= \mp 2\sqrt{y_3}, \quad & x_2 + x_3 &= -(x_1 + x_4) = \pm 2\sqrt{y_3}.
\end{aligned}$$

Wählt man das obere Vorzeichen, so erhält man

$$\begin{aligned}
x_1 \text{ und } x_2 &= -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}), \\
x_3 \text{ und } x_4 &= +\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).
\end{aligned}$$

Wählt man dagegen überall das untere Vorzeichen, so erhält man

$$\begin{aligned}
x_1 \text{ und } x_2 &= -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}), \\
x_3 \text{ und } x_4 &= -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).
\end{aligned}$$

Die Resolvente hat wegen des negativen Vorzeichens ihres Absolutgliedes stets eine positive reelle Wurzel. Um zu ermitteln, wann das obere und wann das untere Vorzeichen gültig sei, gehen wir aus von den symmetrischen Functionen der Coefficienten der vorgelegten Gleichung. Dieselben sind

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) &= 0, \\
x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 &= p, \\
x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 &= -q, \\
x_1x_2x_3x_4 &= r.
\end{aligned}$$

Verbindet man die erste Gleichung mit der zweiten und dritten, so erhält man

$$\begin{aligned}
x_1x_2 + x_3x_4 &= p + (x_1 + x_2)^2, \\
x_1x_2 - x_3x_4 &= q : (x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, es sei $(x_1 + x_2)$ der negative Theil der Summe der vier Wurzeln, dann geht die Gleichung über in

$$q = (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_3 x_4) = (-2\sqrt{y_1})(-4\sqrt{y_2 y_3}) = +8\sqrt{y_1 y_2 y_3}.$$

Wenn vorausgesetzt wird, dass $(x_1 + x_2) = 2\sqrt{y_1}$, d. i. gleich dem positiven Theile der Wurzelsumme ist, so wird

$$q = (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_3 x_4) = 2\sqrt{y_1}(-4\sqrt{y_2 y_3}) = -8\sqrt{y_1 y_2 y_3}.$$

Ist demnach q positiv, so sind die oberen Vorzeichen zu nehmen, ist q negativ, die unteren.

Was die Realität der vier Wurzeln anbetrifft, so kann man sich folgender entscheidender Merkmale bedienen*). Die positive reelle Wurzel der Resolvente sei y_1; die beiden andern Wurzeln y_2 und y_3 sind entweder beide positiv oder beide negativ, weil $y_1 y_2 y_3$ positiv, oder sie sind beide complex.

Sind y_2 und y_3 positiv reell, so hat die biquadratische Gleichung vier reelle Wurzeln. Sind dagegen y_2 und y_3 negativ reell, so hat sie zwei Paare von complexen Wurzeln, ausgenommen wenn $y_2 = y_3$ ist, in welchem Falle zwei Wurzeln reell und gleich, das andere Paar complex wird. Es sei

$$y_2 = -u^2, \quad y_3 = -v^2,$$

so hat $\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$ die Werthe

$$iu + iv, \quad iu - iv, \quad -iu + iv, \quad -iu - iv,$$

wo i für $\sqrt{-1}$ gesetzt ist. $\sqrt{y_2 y_3}$ ist in dem ersten und vierten Falle negativ, in den beiden übrigen Fällen positiv.

Sind endlich y_2 und y_3 ein Paar conjugirter complexer Wurzeln, so hat die biquadratische Gleichung ein Paar reeller und ein Paar complexer Wurzeln.

Es sei

$$y_2 = 2u + 2v\sqrt{-1}, \quad y_3 = 2u - 2v\sqrt{-1},$$

so hat man, wenn $u^2 + v^2 = r^2$, und die Quadratwurzeln absolut genommen werden,

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{r+u} + i\sqrt{r-u}, \quad \sqrt{y_3} = \sqrt{r+u} - i\sqrt{r-u}.$$

Demgemäss erhält man folgendes System:

$\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$	$2\sqrt{r+u}$	$2i\sqrt{r-u}$	$-2i\sqrt{r-u}$	$-2\sqrt{r+u}$
$\sqrt{y_2 y_3}$	$2r$	$-2r$	$-2r$	$2r$

*) Man sehe: Elemente der Mathematik von Baltzer. III. § 7.

Die vorstehenden Bestimmungen können nun auch noch vermittelst der Discriminante der biquadratischen Gleichung ausgedrückt werden. Die Discriminante der vollständigen biquadratischen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ist nach § 79 c. (30)

$$D_4 = \frac{4}{27}(b^2 - 3ac + 12d)^3 - \frac{1}{27}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3)^2$$

$$= -\frac{1}{3}[b(ac - 4d) - 9(a^2d - 4bd + c^2)]^2$$

$$+ \frac{4}{3}(b^2 - 3ac + 12d)[(ac - 4d)^2 - 3b(a^2d - 4bd + c^2)].$$

In dem letzteren Ausdruck hat sie die Form der Discriminante D_3 der kubischen Gleichung und eignet sich deshalb am besten zu einem Kriterium. Wird $a = 0$, $b = p$, $c = q$, $d = r$ gesetzt, so reducirt sich die Discriminante auf

$$D_4^* = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3$$

$$= -\frac{1}{3}(32pr - 9q^2)^2 + \frac{4}{3}(p^2 + 12r)(12p^2r - 3pq^2 + 16r^2).$$

Ist die Discriminante D_4^* positiv, also

$$(32pr - 9q^2)^2 < 4(p^2 + 12r)(12p^2r - 3pq^2 + 16r^2),$$

so sind alle vier Wurzeln entweder reell oder complex.

Ist die Discriminante D_4^* negativ, also

$$(32pr - 9q^2)^2 > 4(p^2 + 12r)(12p^2r - 3pq^2 + 16r^2),$$

so ist ein Wurzelpaar reell, das andere complex.

Ist die Discriminante D_4^* gleich Null, also

$$(32pr - 9q^2)^2 = 4(p^2 + 12r)(12p^2r - 3pq^2 + 16r^2),$$

so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

1. Beispiel. Aufzulösen $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$. (Euler's Alg. § 195.)

Die Resolvente ist

$$y^3 - \frac{25}{2}y^2 + \frac{769}{16}y - \frac{225}{4} = 0.$$

Um die Brüche fortzuschaffen, setzen wir $y = \frac{1}{4}z$; dadurch wird

$$z^3 - 50z^2 + 769z - 3600 = 0.$$

Zur Wegschaffung des zweiten Gliedes setze man $z = \eta + 16\frac{2}{3}$, woraus resultirt

$$\eta^3 - 64\frac{1}{3}\,\eta - 42\frac{16}{27} = 0\,,$$

oder kurz

$$\eta^3 - \alpha\eta - \beta = 0\,.$$

Die Wurzel dieser Gleichung tritt in irreductibler Form auf und wird durch die Methode der Dreitheilung der Winkel gelöst auf folgende Weise.

Man setze

$$\frac{3\beta}{\alpha} : \sqrt{\frac{4}{3}\,\alpha} = \sin 3\varphi\,.$$

Man findet dann

$$\log\sin 3\varphi = \bar{1},3313318\,, \quad \varphi = 4^0\,7'\,40'',1\,.$$
$$\log\sin\varphi = \bar{2},8572208\,;$$
$$\eta_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{772}\,.\,\sin\varphi = -\frac{2}{3}\,.$$

Folglich ist

$$z = \eta_1 + 16\frac{2}{3} = 16\,, \quad y_1 = 4\,.$$

Um die beiden andern Wurzeln y_2 und y_3 zu erhalten, dividire man die Resolvente durch den binomischen Factor $y - 4$, wodurch man erhält

$$y^2 - 8\frac{1}{2}\,y + \frac{225}{16} = 0\,,$$

und die übrigen Wurzeln y_2 und $y_3 = \frac{1}{4}(17 \pm 8)$. Demnach ist

$$y_1 = 4\,, \qquad y_2 = \frac{25}{4}\,, \qquad y_3 = \frac{9}{4}\,,$$

$$\sqrt{y_1} = \pm 2\,; \quad \sqrt{y_2} = \pm 2\frac{1}{2}\,; \quad \sqrt{y_3} = \pm 1\frac{1}{2}\,.$$

Zur Entscheidung über das richtige Vorzeichen beachte man, dass $-q = 8\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3}$ negativ ist. Demgemäss sind einmal alle drei Vorzeichen negativ, die übrigen Male je eine Wurzel negativ zu nehmen. Die gesuchten Wurzeln sind also

$$x_1 = -2 - 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = -6\,,$$
$$x_2 = -2 + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 2\,,$$
$$x_3 = +2 - 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 1\,,$$
$$x_4 = +2 + 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3\,.$$

2. Beispiel. Aufzulösen $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$. Zur Wegschaffung des zweiten Gliedes substituire man

$$x = \frac{1}{4}(\xi + 7),$$

wodurch die Gleichung sich reducirt auf die Form

$$\xi^4 - 22\xi^2 - 24\xi + 45 = 0.$$

Die Resolvente ist

$$y^3 - 11y^2 + 19y - 9 = 0.$$

Man transformire dieselbe in den Kubus einer zweitheiligen Grösse. Durch Anwendung der Methode der Wurzelquadrate der Variirten erhält man die Resolvente IX. dieser kubischen Gleichung, nämlich

$$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c)z + \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0,$$

wo $a = 11$, $b = 19$, $c = -9$ zu setzen ist. Man findet

$$z^2 - 10z + 25 = 0,$$

also

$$z_1 = z_2 = 5.$$

Nun ist, $(y - z)^2 = \eta$ gesetzt,

$$\eta^3 - 48\eta^2 + 768\eta - 4096 = 0,$$

und wegen $\alpha_1{}^2 - 3\beta_1 = 0$,

$$\eta_1 = 16, \; y = \pm 4 + 5, \; y_1 = 9, \; y_2 = 1.$$

Da die Gleichung in z zwei gleiche Wurzelwerthe hat, so sind auch zwei Werthe von y einander gleich. Es ist nämlich

$$y_1 = 9, \; y_2 = y_3 = 1,$$

und folglich

$$\sqrt{y_1} = \pm 3, \quad \sqrt{y_2} = \pm 1, \quad \sqrt{y_3} = \pm 1.$$

Diese Werthe setzen wir in die Euler'schen Formeln ein, indem wir jedesmal drei Werthe dergestalt combiniren, dass sie ein positives Product geben, indem $q = -24$, also negativ ist. Es ist demnach

$$\xi_1 \text{ und } \xi_2 = 3 \pm (1 + 1) = 5 \text{ und } 1,$$
$$\xi_3 \text{ und } \xi_4 = -3 \pm (1 - 1) = -3.$$

Mit Hülfe der Substitution $x = \frac{1}{4}(\xi + 7)$ erhält man endlich die gesuchten Wurzeln

$$x_1 = 3, \; x_2 = 2, \; x_3 = 1, \; x_4 = 1.$$

§ 204. Ableitung der Euler'schen Formeln nach Lagrange*).

Die Methode von Lagrange gleicht im Princip der Methode von Hudde die Cardani'sche Formel abzuleiten. Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Man substituire die lineare Function

$$x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}.$$

Quadrirt man diese Gleichung zweimal nacheinander ohne Transposition, so erhält man

$$x^2 = (y_1 + y_2 + y_3) + 2\left(\sqrt{y_1 y_2} + \sqrt{y_1 y_3} + \sqrt{y_2 y_3}\right),$$

$$x^4 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 + 4(y_1 + y_2 + y_3)\left(\sqrt{y_1 y_2} + \sqrt{y_1 y_3} + \sqrt{y_2 y_3}\right)$$
$$+ 4(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + 8\sqrt{y_1 y_2 y_3}\left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right).$$

Substituirt man die Werthe von x, x^2 und x^4 in die vorgelegte biquadratische Gleichung und setzt wieder x an die Stelle von $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$, so resultirt

$$(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 4(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + p(y_1 + y_2 + y_3) + r$$
$$+ [4(y_1 + y_2 + y_3) + 2p]\left(\sqrt{y_1 y_2} + \sqrt{y_2 y_3} + \sqrt{y_2 y_3}\right)$$
$$+ \left(8\sqrt{y_1 y_2 y_3} + q\right) x = 0.$$

Da die Substituirte zwei Willkürliche enthält, so gestattet diese Resultante noch eine Zerlegung in zwei Partialgleichungen, nämlich

$$4(y_1 + y_2 + y_3) + 2p = 0,$$
$$8\sqrt{y_1 y_2 y_3} + q = 0.$$

Hiedurch geht die transformirte Gleichung über in

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = \frac{1}{16}(p^2 - 4r);$$

ausserdem ist

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{64} q^2.$$

Demnach ist die Resolvente in y

$$y^3 + \frac{1}{2} p y^2 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r) y - \frac{1}{64} q^2 = 0.$$

---

*) Lagrange, Leçons d'arithmétique et d'algèbre. III. 306. [Séances des écoles normales (1794—95)].

Lacroix, Complém. des élémens d'algèbre. § 69.

Ist $q=0$, das zweite Glied dagegen nicht gleich Null, also die vorgelegte Gleichung

$$x^4+mx^3+px^2+r=0,$$

so setze man $x=\sqrt{r}:x'$. Die Gleichung geht dadurch über in

$$x'^4+px'^2+m\sqrt{r}x'+r=0.$$

Substituirt man jetzt auch $x'=\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}$, so wird die Resolvente

$$y^3+\frac{1}{2}py^2+\frac{1}{16}(p^2-4r)y-\frac{1}{64}m^2r=0,$$

welche sich von der Euler'schen nur durch das Absolutglied unterscheidet. Es ist alsdann

$$x=\sqrt{r}:(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}).$$

§ 205. Methode von Euler und Waring*).

Das Princip, worauf Euler später eine allgemeine Auflösungsmethode der Gleichungen aller Grade zu gründen versuchte, ist bereits früher (§ 37) angedeutet worden.

Wir haben gesehen, dass die Wurzel einer biquadratischen Gleichung, in welcher das zweite Glied fehlt, sich darstellen lässt in der Form: $x=\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}$; wo y_1, y_2, y_3 die drei Wurzeln der kubischen Resolvente

$$y^3+\frac{1}{2}py^2+\frac{1}{16}(p^2-4r)y-\frac{1}{64}q^2=0$$

bezeichnen. Setzt man nun $y^2=z$ oder $y=\sqrt{z}$, so geht die kubische Gleichung über in

$$z^3-\frac{1}{8}(p^2+4r)z^2+\frac{1}{256}(p^4-8p^2r-4pq^2+16r^2)z-\frac{1}{4096}q^4=0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit z_1, z_2, z_3, so wird

$$x=\sqrt[4]{z_1}+\sqrt[4]{z_2}+\sqrt[4]{z_3}.$$

Analog ist für die kubische Gleichung $x^3+px+q=0$:

$$x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2},$$

*) Euler, De resolutione aequationum cujusvis gradus. Nov. Comm. Petrop. IX. 1762.

Waring, Miscellanea analytica, p. 44. 1762.

Blomstrand, De methodis praecipuis etc. p. 37. Lundae 1847.

wo z_1 und z_2 die Wurzeln der quadratischen Resolvente

$$z^2 + qz - \frac{1}{27}p^3 = 0$$

bezeichnen. Und endlich ist für die quadratische Gleichung

$$x^2 + q = 0$$

in ähnlicher Form

$$x = \sqrt[2]{z},$$

wo z die Wurzel der Resolvente

$$z + q = 0$$

ist.

Durch diese Analogien wurde Euler verleitet anzunehmen, dass wenn das zweite Glied einer Gleichung fehle, die Substitution

$$x = \sqrt[n]{y_1} + \sqrt[n]{y_2} + \sqrt[n]{y_3} + \cdots + \sqrt[n]{y_{n-1}}$$

zur Auflösung derselben führen müsse oder die gesuchte Wurzelform sei. Er modificirte indess mit Waring dieselbe insoweit, dass er substituirte

$$x_1 = v_1 \sqrt[n]{z} + v_2 \sqrt[n]{z^2} + v_3 \sqrt[n]{z^3} + \cdots + v_{n-1} \sqrt[n]{z^{n-1}},$$

worin an die Stelle von $\sqrt[n]{z}$ der Reihe nach die Werthe

$$\sqrt[n]{z},\ \alpha\sqrt[n]{z},\ \alpha^2\sqrt[n]{z},\ \ldots\ \alpha^{n-1}\sqrt[n]{z}$$

zu setzen sind, um alle übrigen Wurzeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ zu erhalten.

Setzt man der Kürze wegen $\sqrt[n]{z} = y$, also $y^n - z = 0$, so wird die allgemeine Wurzelform:

$$x = v_1 y + v_2 y^2 + v_3 y^3 + \cdots + v_{n-1} y^{n-1}.$$

Die Methode von Euler besteht also im Folgenden:

Aus der substituirten Function, welche n unbestimmte Grössen enthält, müssen zunächst die Wurzelzeichen entfernt werden, entweder durch Erhebung zur n^{ten} Potenz oder auf eine andere Art. Man erhält dadurch eine Gleichung in x vom n^{ten} Grade, welche mit der vorgelegten verglichen $n-1$ Bestimmungsgleichungen liefert, aus denen, durch willkürliche Annahme der einen unter ihnen, die übrigen Unbestimmten gefunden werden. Die Finalgleichung wird dann eine Gleichung in z sein, welche als die Resolvente der biquadratischen Gleichung anzusehen ist.

Um also die Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

aufzulösen, substituire man die lineare Function

$$x - (v_1 y + v_2 y^2 + v_3 y^3) = 0, \quad y^4 - z = 0.$$

Zunächst ist

$$x - v_2 y^2 = v_1 y + v_3 y^3,$$

und wenn man auf beiden Seiten zum Quadrat erhebt,

$$x^2 - 2 v_2 y^2 x + v_2^2 z = v_1^2 y^2 + 2 v_1 v_3 z + v_3^2 z y^2,$$

oder

$$x^2 + (v_2^2 - 2 v_1 v_3) z = (v_1^2 + 2 v_2 x + v_3^2 z)\, y^2.$$

Quadrirt man abermals, so erhält man

$$x^4 - 2(v_2^2 + 2 v_1 v_3) z x^2 - 4(v_1^2 + v_3^2 z) v_2 z x + (v_2^2 - 2 v_1 v_3)^2 z^2 \\ - (v_1^2 + v_3^2 z)^2 z = 0.$$

Vergleicht man nun die homologen Coefficienten dieser und der gegebenen Gleichung, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für v_1, v_2, v_3 und z:

$$\begin{aligned} 2(v_2^2 + 2 v_1 v_3) z &= -p, \\ 4(v_1^2 + v_3^2 z) v_2 z &= -q, \\ (v_2^2 - 2 v_1 v_3)^2 z^2 - (v_1^2 + v_3^2 z)^2 z &= \quad r. \end{aligned}$$

Aus der ersten und zweiten folgt

$$(v_2^2 + 2 v_1 v_3) z = -\frac{1}{2} p,$$

$$v_1^2 + v_3^2 z = -\frac{q}{4 v_2 z}.$$

Setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung ein, so resultirt

$$\frac{1}{4} p^2 - \frac{q}{16 v_2^2 z} - 8 v_1 v_2^2 v_3 z^2 = r.$$

Da diese Gleichung eine Willkürliche enthält, so kann man $v_2 = 1$ setzen und der ersten Bestimmungsgleichung gemäss

$$4 v_1 v_3 z = -p - 2z.$$

Die Resultante verwandelt sich hierdurch in die bekannte Resolvente

$$z^3 + \frac{1}{2} p z^2 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r) z - \frac{1}{64} q^2 = 0.$$

Hat man einen Werth von z berechnet, so findet man x aus den beiden Gleichungen

$$v_1^2 + v_3^2 z = -\frac{q}{4z},$$

und

$$2 v_1 v_3 \sqrt{z} = - \frac{p + 2z}{2\sqrt{z}},$$

indem man dieselben zu einander addirt und die Summe radicirt, woraus sich ergibt

$$v_1 + v_3 \sqrt{z} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \sqrt{-q - 2p\sqrt{z} - 4z\sqrt{z}}.$$

Es ist alsdann

$$x_1 = v_1 y + v_2 y^2 + v_3 y^3 = y^2 + (v_1 + v_3 y^2) y$$

$$= \sqrt{z} + (v_1 + v_3 \sqrt{z}) \sqrt[4]{z} = \sqrt{z} + \frac{1}{2} \sqrt{-4z - 2p - \frac{q}{\sqrt{z}}},$$

worin man sofort die Wurzelform von Descartes erkennen wird. Die drei andern Wurzeln erhält man durch Vertauschung der Vorzeichen der Radicale, nämlich

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{z} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4z - 2p - \frac{q}{\sqrt{z}}},$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{z} \mp \frac{1}{2} \sqrt{-4z - 2p + \frac{q}{\sqrt{z}}}.$$

§ 206. Methode von Bézout*).

Die im Folgenden beschriebene Methode unterscheidet sich von der Euler'schen dadurch, dass, während Euler $y^n - z = 0$ setzt und bei der Substitution

$$x = v_1 y + v_2 y^2 + v_3 y^3$$

aus den Grössen v und y eine Finalgleichung in z sucht, Bézout sofort $z = 1$ setzt und eine Finalgleichung (Resolvente) in v sucht. Ausserdem wendet er ein neues allgemeines Eliminationsverfahren an, welches neuerdings von Sylvester und Hesse (§ 44) weiter ausgebildet worden ist.

Um die Gleichung $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ aufzulösen, substituire man

$$x - (z_1 y + z_2 y^2 + z_3 y^3) = 0, \quad y^4 - 1 = 0.$$

Multiplicirt man die lineare Function von x nacheinander mit y, y^2, y^3, so erhält man folgende vier Gleichungen:

*) Bézout, Mém. sur la résolution générale des équations de tous les degrés. Mémoires de l'acad. roy. Année 1765. Paris 1768.

Blomstrand, De methodis praecipuis etc. p. 41.

$$\begin{aligned}
x - z_1 y - z_2 y^2 - z_3 y^3 &= 0\,,\\
xy - z_1 y^2 - z_2 y^3 - z_3 &= 0\,,\\
xy^2 - z_1 y^3 - z_2 - z_3 y &= 0\,,\\
xy^3 - z_1 - z_2 y - z_3 y^2 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Aus denselben folgt unmittelbar

$$+\begin{vmatrix} -x & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_3 & -x & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 & -x & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man diese Determinante, so erhält man

$$x^4 - 2(z_2^2 + 2z_1 z_3)x^2 - 4z_2(z_1^2 + z_3^2)x - z_1^4 + z_2^4 - z_3^4 - 4z_1 z_2^2 z_3 \\ + 2z_1^2 z_3^2 = 0\,.$$

Vergleicht man die homologen Coefficienten dieser und der gegebenen Gleichung, so erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
2z_2^2 + 4z_1 z_3 &= -p\,,\\
4z_2(z_1^2 + z_3^2) &= -q\,,\\
z_1^4 - z_2^4 + z_3^4 + 4z_1 z_2^2 z_3 - 2z_1^2 z_3^2 &= -r\,.
\end{aligned}$$

Setzt man z an die Stelle von z_2, so ergibt sich aus der zweiten

$$z_1^2 + z_3^2 = -\frac{q}{4z}\,,$$

und wenn man beiderseits zum Quadrat erhebt,

$$z_1^4 + z_3^4 = \frac{q}{16z^2} - 2z_1^2 z_3^2\,.$$

Die erste Gleichung ergibt ausserdem

$$2z_1 z_3 = -\frac{1}{2}(p + 2z^2)\,.$$

Setzt man diese Werthe in die dritte Bestimmungsgleichung ein, so erhält man wieder die Resolvente von Euler, nämlich

$$z^6 + \frac{1}{2}pz^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0\,.$$

Die Werthe von z_1 und z_3 lassen sich aus einem bekannten Wurzelwerthe z_2 dieser Resolvente berechnen mittels der beiden Relationen

$$\begin{aligned}
z_1^2 + z_3^2 &= -\frac{q}{4z_2}\,,\\
2z_1 z_3 &= -\frac{1}{2}(p + 2z_2^2)\,.
\end{aligned}$$

Man erhält demnach mit Berücksichtigung der Gleichung

$$y^4 - 1 = 0\,,$$

also
$$y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = \sqrt{-1},\ y_4 = -\sqrt{-1}$$
die vier Wurzelwerthe
$$\begin{aligned}
x_1 &= \quad z_1 + z_2 + z_3,\\
x_2 &= -z_1 + z_2 - z_3,\\
x_3 &= \quad iz_1 - z_2 - iz_3,\\
x_4 &= -iz_1 - z_2 + iz_3.
\end{aligned}$$
Bézout bemerkt hierbei, dass die Finalgleichung in z_1 oder z_3 vom 24^{ten} Grade geworden wäre und dass der Grund, warum z_2 leichter erhalten werde, in dem Umstande zu suchen sei, dass die Bestimmungsgleichungen bezüglich z_1 und z_3 symmetrisch seien. Ferner zeigt er, dass, wenn $z_1 z_3$ zuerst gesucht werde, dies eine kubische Gleichung ergäbe und dass die Gleichung in z_1, welche bikubisch sei, sich in drei quadratische Factoren zerlegen lasse.

§ 207. Methode von Mossbrugger*).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung
$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$
und y_1, y_2, y_3, y_4 die vier Wurzeln der Gleichung $y^4 - 1 = 0$.

Die Bedingung
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
wird erfüllt durch folgende Substitutionen
$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1 y_1 + z_2 y_1 + z_3 y_1,\\
x_2 &= z_1 y_4 + z_2 y_3 + z_3 y_2,\\
x_3 &= z_1 y_3 + z_2 y_2 + z_3 y_4,\\
x_4 &= z_1 y_2 + z_2 y_4 + z_3 y_3.
\end{aligned}$$
Addirt man nämlich dieses System von Gleichungen, so wird
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)(z_1 + z_2 + z_3) = 0.$$
Zur Bestimmung von z erhält man leicht folgende Gleichungen:
$$\begin{aligned}
p &= -2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3),\\
q &= 2(-1 + \sqrt{-1})(z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1) + 2(-1 - \sqrt{-1}) \times\\
&\quad (z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2) + 4 z_1 z_2 z_3,\\
r &= -z_1^4 - z_2^4 - z_3^4 - 2\sqrt{-1}(z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1)\\
&\quad + 2\sqrt{-1}(z_1^3 z_3 + z_2^3 z_1 + z_3^3 z_2) + 2(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2)\\
&\quad - 2 z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3).
\end{aligned}$$

*) Grunert's Arch. XXVIII. S. 205. 1857.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $(z_1 + z_2 + z_3)^2$, die zweite mit $(z_1 + z_2 + z_3)$ und addirt zur Summe aller drei Gleichungen beiderseits $(z_1 + z_2 + z_3)^4$, so wird unter Berücksichtigung der Relationen

$$x = z_1 y_1 + z_2 y_1 + z_3 y_1 = y_1(z_1 + z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3:$$

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + r = {} & [z_1+z_2+z_3]^4 - 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)[z_1+z_2+z_3]^2 \\ & + 2\left\{(-1+\sqrt{-1})(z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1) + (-1-\sqrt{-1}) \times \right. \\ & \left.(z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2) + 2 z_1 z_2 z_3\right\}[z_1+z_2+z_3] - \left\{z_1^4 + z_2^4 + z_3^4\right. \\ & + 2\sqrt{-1}(z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1) - 2\sqrt{-1}(z_1^3 z_3 + z_2^3 z_1 + z_3^3 z_2) \\ & \left. - 2(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2) + 2 z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3)\right\} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man die Summe der reellen und der imaginären Glieder einzeln der Null gleich, so reducirt sich die Gleichung auf

$$\begin{aligned} [z_1+z_2+z_3]^4 - 2(z_1^2+z_2^2+z_3^2)[z_1+z_2+z_3]^2 - 8 z_1 z_2 z_3 [z_1+z_2+z_3] \\ - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 + 2(z_1^4 + z_2^4 + z_3^4) = 0. \end{aligned}$$

Identificirt man diese Gleichung mit der vorgelegten, so sind

$$\pm z_1, \ \pm z_2, \ \pm z_3$$

die Wurzeln der Euler'schen Resolvente:

$$z^6 + \frac{1}{2} p z^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r) z^2 - \frac{1}{64} q^2 = 0.$$

Nun ist $y_1 = 1$, $y_2 = \sqrt{-1}$, $y_3 = -1$, $y_4 = -\sqrt{-1}$; folglich

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 + z_3, \\ x_2 &= -iz_1 - z_2 + iz_3, \\ x_3 &= -z_1 + iz_2 - iz_3, \\ x_4 &= iz_1 - iz_2 - z_3. \end{aligned}$$

§ 208. Ueber einen Zusammenhang der Seiten eines Kreisvierecks mit den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung*).

Bezeichnen die vier Grössen x, z_1, z_2, z_3 die vier Seiten eines Kreisvierecks, so ist nach Gerhard der Halbmesser des umschriebenen Kreises

$$R = \sqrt{\frac{(xz_1 + z_2 z_3)(xz_2 + z_3 z_1)(xz_3 + z_1 z_2)}{(-x+z_1+z_2+z_3)(x-z_1+z_2+z_3)(x+z_1-z_2+z_3)(x+z_1+z_2-z_3)}}.$$

Der Inhalt des Vierecks wird offenbar gleich Null, wenn R einen unendlich grossen Werth annimmt, also

*) Zeitschrift für Math. u. Phys. IX. S. 453. 1864.

$$16v^2 = (-x + z_1 + z_2 + z_3)(x - z_1 + z_2 + z_3) \times$$
$$(x + z_1 - z_2 + z_3)(x + z_1 + z_2 - z_3) = 0.$$

Die vier Seiten können als die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung betrachtet werden, in der das zweite Glied fehlt, also von

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

indem man eine Seite z. B. x als Hauptgrösse annimmt und das obige Product nach Potenzen derselben entwickelt. Man erhält daraus

$$x^4 - 2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)x^2 - 8z_1z_2z_3x$$
$$- [4(z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2) - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2] = 0.$$

Aus der Gleichsetzung der homologen Coefficienten folgen die Relationen

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -\frac{1}{2}p,$$

$$z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2 = \frac{1}{16}(p^2 - 4r),$$

$$z_1^2z_2^2z_3^2 = \frac{1}{64}q^2.$$

Deshalb sind also z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der Gleichung

$$z^6 + \frac{1}{2}pz^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0.$$

Da nun irgend einer der vier Factoren z. B. $-x + z_1 + z_2 + z_3$ gleich Null sein muss, so erhält man

$$x = z_1 + z_2 + z_3.$$

Da aber die Seite x in dem Systeme

$$\frac{x}{z_1 \quad z_2 \quad z_3}$$

viermal ihre Stellung permutiren kann, nämlich

$$\frac{x_1}{z_1 \quad z_2 \quad z_3}, \quad \frac{z_1}{x_2 \quad z_2 \quad z_3}, \quad \frac{z_2}{z_1 \quad x_3 \quad z_3}, \quad \frac{z_3}{z_1 \quad z_2 \quad x_3},$$

so erhält man sämmtliche Wurzeln der Gleichung, wenn man nacheinander die Factoren gleich Null setzt, also

$$x_1 \text{ und } x_2 = \quad z_1 \pm (z_2 + z_3),$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -z_1 \pm (z_2 - z_3).$$

§ 209. Methode von Hulbe*).

Gegeben sei wiederum die unvollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Nun substituirt Hulbe die lineare Function von x:

$$z^3 - xz^2 + uz - \frac{1}{8} q = 0$$

und bildet hiervon die Gleichung ihrer Wurzelquadrate, nämlich

$$z^6 + (2u - x^2)z^4 + \left(u^2 - \frac{1}{4} qx\right) z^2 - \frac{1}{64} q^2 = 0.$$

Setzt man weiter

$$2u - x^2 = \frac{1}{2} p,$$

$$u^2 - \frac{1}{4} qx = \frac{1}{16} (p^2 - 4r),$$

so geht aus der Gleichung in z die Euler'sche Resolvente hervor. Wenn man jetzt u aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die zweite substituirt, so gelangt man in der That zur vorgelegten Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Berechnet man die Wurzelwerthe $\pm z_1$, $\pm z_2$, $\pm z_3$ und beachtet, dass x in der substituirten Gleichung der Coefficient des zweiten Gliedes ist, so erhält man allgemein

$$x = \mp z_1 \mp z_2 \mp z_3,$$

wobei über die Vorzeichen nach den gewöhnlichen Regeln zu entscheiden ist. Hulbe gelangt also durch dies eigenthümliche Verfahren, welches er auch bei der Auflösung der kubischen Gleichungen angewandt hat (§ 135), zu den Euler'schen Formeln.

Man kann nun offenbar auch ausgehen von der etwas allgemeineren Substitution

$$z^3 - xz^2 + uz + v = 0.$$

Die Gleichung ihrer Wurzelquadrate sei

$$z^6 - fz^4 + gz^2 - h = 0.$$

Dann ist

*) Hulbe, Analytische Entdeckungen u. s. w. S. 135. Stralsund 1794.

$$u = \frac{1}{2}(x^2 - f),$$
$$u^2 + 2vx = g,$$
$$v^2 = h.$$

Setzt man den Werth u aus der ersten Bestimmungsgleichung in die zweite ein, und v aus der dritten in die zweite, so ergibt sich daraus

$$x^4 - 2fx^2 + 8\sqrt{h}\,.\,x + (f^2 - 4g) = 0.$$

Aus der Vergleichung der homologen Glieder dieser und der gegebenen Gleichung erhält man die Werthe der unbestimmten Coefficienten u, v, f, g, h, nämlich

$$u = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}p\right), \quad v = -\frac{1}{8}q, \quad f = -\frac{1}{2}p,$$
$$g = \frac{1}{16}(p^2 - 4r), \quad h = -\frac{1}{64}q^2.$$

Dies gibt die Euler'sche Resolvente. Eine Verallgemeinerung dieser Methode von Hulbe für die Auflösung der vollständigen Gleichungen wird später gegeben werden.

§ 210. Methode von Lebesgue*).

Dieselbe ist als eine Modification der Methode von Ferrari und Vieta anzusehen. Der Unterschied besteht darin, dass Ferrari zunächst aus den beiden ersten Gliedern des Polynoms ein Quadrat bildet, welches noch eine unbestimmte Grösse mehr enthält, und darauf aus dem übrigen Theile des Polynoms, welches von der Form $Ax^2 + Bx + C$ ist, auch ein Quadrat bildet durch die Erfüllung der Bedingung $B^2 - 4AC = 0$.

Lebesgue formt diese Quadrate direct dergestalt, dass sie sämmtliche mit x behafteten Glieder in sich aufnehmen. Der Rest wird dann gleich Null gesetzt, wie folgt:

$$x^4 + px^2 + qx + r$$
$$= \left[x^2 + \frac{1}{2}(p + z^2)\right]^2 - \left[zx - \frac{q}{2z}\right]^2 + \left[r - \frac{1}{4}(p + z^2)^2 + \frac{q^2}{4z^2}\right] = 0.$$

Setzt man den letzten Theil gleich Null und ordnet denselben nach Potenzen von z, so erhält man die Resolvente von Descartes, nämlich

$$z^6 + 2pz^4 + (p^2 - 4r)z^2 - q^2 = 0,$$

*) Nouv. ann. math. par Terquem. XVII. p. 387. 1858.

und das Polynom geht über in die Differenz zweier Quadrate, welche sofort in das Product zweier Trinome zerlegt werden kann, nämlich in

$$\left[x^2+zx+\tfrac{1}{2}(p+z^2)-\tfrac{q}{2z}\right]\left[x^2-zx+\tfrac{1}{2}(p+z^2)+\tfrac{q}{2z}\right]=0\,.$$

Setzt man jeden dieser Factoren gleich Null, so erhält man die Cartesischen Formeln:

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\quad\tfrac{1}{2}\left\{z\pm\sqrt{-z^2-2\left(p+\tfrac{q}{z}\right)}\right\},$$
$$\left.\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right\}=-\tfrac{1}{2}\left\{z\mp\sqrt{-z^2-2\left(p-\tfrac{q}{z}\right)}\right\}.$$

§ 211. Methode der Substitution einer quadratischen Function von Bézout*).

Zur Auflösung der Gleichungen, deren höchster Ordnungsexponent eine zusammengesetzte Zahl ist, empfiehlt Bézout y zu eliminiren aus den Gleichungen

$$y^r-1=0,$$

und

$$x^\varrho-(w+vy+uy^2+\cdots ty^{r-1})x^{\varrho-1}+(w_1+v_1y+\cdots)x^{\varrho-2}-\cdots=0,$$

wenn gegeben ist

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+t=0,$$

und $n=r\varrho$. Betrachtet man $y, y^2, \ldots$ als lineare Grössen, so kann die Elimination von y mittels Determinanten ausgeführt werden und es resultirt eine Gleichung in x, welche mit der gegebenen verglichen werden muss, woraus ebensoviele Bestimmungsgleichungen für die unbestimmten Coefficienten gezogen werden, als zur Bestimmung derselben erforderlich sind. Ist die zweite Gleichung unvollständig bezüglich des zweiten Gliedes, so wird $w=0$.

Gegeben sei die biquadratische Gleichung

$$x^4+px^2+qx+r=0.$$

Hier ist

$$n=4=r\varrho,\ \text{also}\ r=2,\ \varrho=2.$$

Man substituire demgemäss

$$y^2-1=0,$$

*) Mém. de l'Acad. Roy., Année 1765. Paris 1768.
Blomstrand, De methodis praecipuis etc. p. 43. Man vergl. § 37.

und

$$x^2 - vyx + (w_1 + v_1 y) = 0,$$

also eine quadratische Function von x.

Um y zu eliminiren, multiplicire man die nach y geordnete Function noch einmal mit y, woraus folgt mit Berücksichtigung der ersten Substitution:

$$(x^2 + w_1) - (vx - v_1)y = 0,$$
$$(vx - v_1) - (x^2 + w_1)y = 0.$$

Folglich ist

$$\begin{vmatrix} x^2 + w_1, & vx - v_1 \\ vx - v_1, & x^2 + w_1 \end{vmatrix} = 0,$$

und

$$(x^2 + w_1)^2 - (vx - v_1)^2 = 0.$$

Entwickelt man, so resultirt

$$x^4 + (2w_1 - v^2)x^2 + 2vv_1 x + (w_1{}^2 - v_1{}^2) = 0.$$

Die Bestimmungsgleichungen sind

$$2w_1 - v^2 = p, \quad 2vv_1 = q, \quad w_1{}^2 - v_1{}^2 = r.$$

Aus der zweiten folgt $v_1 = q : 2v$, aus der zweiten $w_1 = \frac{1}{2}(p + v^2)$. Substituirt man diese Werthe in die dritte, so erhält man die Resolvente von **Descartes**, nämlich

$$v^6 + 2pv^4 + (p^2 - 4r)v^2 - q^2 = 0.$$

Aus der Determinante folgt nun weiter

$$x^2 + w_1 \mp (vx - v_1) = 0,$$

woraus sämmtliche Wurzeln gefunden werden. Man kann auch dafür setzen, indem man berücksichtigt, dass $y^2 - 1 = 0$ ist,

$$x^2 - vyx + \frac{1}{2}(p + v^2) + \frac{qy}{2v} = 0.$$

Die Resolvente in w_1 ist ebenfalls kubisch und zwar übereinstimmend mit der Ferrari'schen

$$w_1{}^3 - \frac{1}{2}pw_1{}^2 - rw_1 + \frac{1}{8}(4pr - q^2) = 0.$$

§ 212. Aeltere Methode von Bézout*).

Um die unvollständige Gleichung $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ in einer ähnlichen Form mit unbestimmten Coefficienten zu erhalten, wählt Bézout die Substitutionen

$$y^2 + v = 0$$

und

$$\frac{x^2 + u}{x + z} = y.$$

Eliminirt man y, so resultirt

$$x^4 + (2u + v)x^2 + 2zvx + (u^2 + z^2v) = 0.$$

Hieraus folgen die drei Bestimmungsgleichungen

$$2u + v = p, \quad 2zv = q, \quad u^2 + z^2v = r.$$

Drückt man Alles in z, p, q und r aus, so erhält man die Resolvente

$$8qz^3 + 4(p^2 - 4r)z^2 - 4pqz + q^2 = 0.$$

Dieselbe lässt sich aus den Resolventen XIX., XX. und XXII. (§ 81) deduciren, wenn man $a = 0$ setzt.

Aus der substituirten Function folgt nun weiter

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}\left(p - \frac{q}{2z}\right) - zy = 0,$$

wo y bestimmt wird durch die Gleichung

$$y^2 + \frac{q}{2z} = 0.$$

§ 213. Methode von Tschirnhausen, Lagrange und Bring**).

Gegeben sei die biquadratische Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Man substituire die quadratische Function

$$x^2 + vx + u = x^2 + vx + (w - y) = 0.$$

Eliminirt man x aus dieser und der vorgelegten Gleichung

---

*) Mém. de l'acad. roy. des sciences. Année 1762. Paris 1764. Blomstrand, De meth. praec. p. 41.

**) Tschirnhausen, Act. Erudit. Lips. p. 204. 1683.

Lagrange, Réflexions etc. Nouv. mem. Année 1770 et 1771. Berlin 1772 et 1773.

Bring, Meletemata quaedam mathematica etc.. Lundae 1786. Man vergl. auch Blomstrand, p. 23, und oben § 37 und § 50.

mittels der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers, so ist der letzte Divisor

$$x = \frac{-uv^2 + u^2 - pu + r}{v^3 + (p - 2u)v - q}.$$

Die Finalgleichung in u erhält man, wenn man diesen Werth in die quadratische Gleichung von x einsetzt. Ordnet man dieselbe nach Potenzen von u, so ergibt sich

$$u^4 - 2pu^3 + (pv^2 + 3qv + p^2 + 2q)u^2 - (qv^3 + 4rv^2 + pqv - q^2 + 2pr)u$$
$$+ r(v^4 + pv^2 - qv + r) = 0,$$

oder kurz

$$u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D = 0.$$

Setzt man $w - y$ an die Stelle von u und ordnet nach Potenzen von y, so resultirt

$$y^4 - (4w + A)y^3 + (6w^2 + 3Aw + B)y^2 - (4w^3 + 3Aw^2 + 2Bw + C)y$$
$$+ (w^4 + Aw^3 + Bw^2 + Cw + D) = 0.$$

Von dieser Gleichung kann man nun das zweite und vierte Glied zum Verschwinden bringen dadurch, dass man annimmt

$$4w + A = 0, \quad 4w^3 + 3Aw^2 + 2Bw + C = 0.$$

Dies gibt die Bestimmungsgleichungen

$$w = \frac{1}{2}p, \quad p^3 - pB + C = 0,$$

oder

$$qv^3 - (p^2 - 4r)v^2 - 2pqv - q^2 = 0,$$

welche mit der in § 212 deducirten Resolvente im Wesentlichen übereinstimmt.

Die reducirte Gleichung in y, nämlich

$$y^4 + \left(pv^2 + 3qv - \frac{1}{2}p^2 + 2r\right)y^2$$
$$+ \frac{1}{16}\left[5p^4 - 4p^2\left(pv^2 + 3qv - \frac{1}{2}p^2 + 2r\right) + 16r(v^4 + pv^2 - qv + r)\right] = 0,$$

lässt sich wie eine quadratische auflösen und hat vier Wurzelwerthe, welche in die lineare Gleichung

$$x = \frac{y^2 - v^2\left(y + \frac{1}{2}p\right) - \frac{1}{4}(p^2 - 4r)}{2vy + v^3 - q}$$

einzusetzen sind.

Lagrange hat diese Methode auch auf die vollständige biquadratische Gleichung angewandt und über den Grad der Resolvente in v Betrachtungen angestellt.

Wenn man nämlich v durch die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 ausdrückt, um zu sehen, warum die Resolvente in v kubisch sein muss, so ist zu bemerken, dass die Gleichung in y gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen hat. Man darf daher annehmen, die vier Wurzein seien $y_1, y_2, -y_1, -y_2$. Die vier Gleichungen, welche die vier einzelnen Werthe von x bestimmen, sind demnach

$$\begin{aligned} x_1^2 + vx_1 + w - y_1 &= 0, \\ x_2^2 + vx_2 + w + y_1 &= 0, \\ x_3^2 + vx_3 + w - y_2 &= 0, \\ x_4^2 + vx_4 + w + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Addirt man je zwei derselben, so erhält man

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2) + v(x_1 + x_2) + 2w &= 0, \\ (x_3^2 + x_4^2) + v(x_3 + x_4) + 2w &= 0. \end{aligned}$$

Subtrahirt man diese von einander, so resultirt

$$v = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4},$$

Addirt man dagegen alle vier Gleichungen, so erhält man

$$w = -\frac{1}{4}(S_2 + vS_1)$$

und wegen $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$ muss sein $w = \frac{1}{2}p$.

Die Resolvente in v ist offenbar aus dem Grunde kubisch, weil v durch die möglichen Permutationen der vier Wurzeln drei verschiedene Werthe annehmen kann, nämlich

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}, \\ v_2 &= -\frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}, \\ v_3 &= -\frac{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2}{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}. \end{aligned}$$

Lagrange hat ferner gezeigt, wie die Resolvente in v mit den Resolventen anderer Methoden im Zusammenhange steht, z. B. mit der Cartesischen. Die Methode von Descartes besteht in der Substitution zweier trinomischer quadratischer Factoren, nämlich

$$x^2 \pm zx + \frac{1}{2}\left(z^2 + p \mp \frac{q}{z}\right) = 0.$$

Die Resolvente in z muss vom sechsten Grade sein, weil z

eine Function der Wurzeln ist, welche eine sechsmalige Permutation zulässt. Es ist nämlich

$$z_1 = -(x_1 + x_2), \quad z_1 = (x_3 + x_4).$$

Durch Addition dieser und der sonst möglichen Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4),$$

$$\left.\begin{matrix} z_3 \\ z_4 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4),$$

$$\left.\begin{matrix} z_5 \\ z_6 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4).$$

Da je zwei und zwei Werthe gleich sind von entgegengesetzten Vorzeichen, so ist die Resolvente in z eine bikubische, in welcher die ungeraden Potenzen fehlen. Nun ist weiter

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= \tfrac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2 + (x_1 - x_2)^2 - (x_3 - x_4)^2] \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = -8q,$$

also

$$v = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = -\frac{4q}{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2} = -\frac{q}{z^2}.$$

Die Formen, welche die Resolventen in v und z annehmen, wenn die biquadratische Gleichung vollständig ist, werden wir später kennen lernen.

§ 214. Methode der Theilung des variirten Polynoms von Francoeur*).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Man bilde die Variirte, indem man substituirt $x = x' + z$; dies gibt

$$x'^4 + 4zx'^3 + (6z^2 + p)x'^2 + (4z^3 + 2pz + q)x' + (z^4 + pz^2 + qx + r) = 0.$$

*) Cours compl. de mathém. II. § 581. Paris 1809. — 1837.

Man theile dies Polynom in die beiden anderen

$$x_1^4 + (6z^2 + p)x'^2 + (z^4 + pz^2 + qz + r) = 0$$

und

$$4zx'^3 + (4z^3 + 2pz + q)x' = 0,$$

und suche daraus die Bestimmungsgleichung für z.

Aus dem zweiten Theile folgt

$$x'^2 = -\left(z^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{4z}\right),$$

und wenn man diesen Werth für x'^2 in den ersten Theil des Polynoms einsetzt, so ergibt die Entwickelung die Euler'sche Resolvente

$$z^6 + \frac{1}{2}pz^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0.$$

Endlich ist

$$x = z + x' = z \pm \sqrt{-z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{4z}}.$$

Ist z_1^2 die positive reelle Wurzel der Resolvente, so ist $z = \pm z_1$, woraus sich die Cartesischen Formeln ergeben.

Beispiel. Aufzulösen:

$$2x^4 - 19x^2 + 24x - 2\frac{7}{8} = 0.$$

Man dividire die Gleichung durch 2, woraus folgt

$$x^4 - 9\frac{1}{2}x^2 + 12x - 1\frac{7}{16} = 0.$$

Die Resolvente ist

$$z^6 - 4\frac{3}{4}z^4 + 6z^2 - 2\frac{1}{4} = 0,$$

und ein Wurzelpaar $z_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Demgemäss ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3}),$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm (1 + \sqrt{3}),$$

oder

$$x_1 \text{ und } x_2 = 1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

§ 215. Substitution einer biquadratischen Function nach Jourdain*).

Um die unvollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

aufzulösen, substituirt Jourdain

$$\left(\frac{x^2 + y_1 x + v_1}{x^2 + y_2 x + v_2}\right)^2 - \frac{y_1}{y_2} = 0\,,$$

und sucht daraus eine Resolvente in v abzuleiten. Entwickelt man die Function nach Potenzen von x, so erhält man

$$x^4 + \frac{y_1 y_2 (y_2 - y_1) + 2(y_1 v_2 - y_2 v_1)}{y_1 - y_2} x^2 + \frac{2 y_1 y_2 (v_2 - v_1)}{y_1 - y_2} x$$
$$+ \frac{y_1 v_2{}^2 - y_2 v_1{}^2}{y_1 - y_2} = 0\,.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0\,,$$

so gehen daraus folgende Bedingungsgleichungen hervor:

v_2 willkürlich, z. B. Null,

$$\begin{aligned} y_1 y_2 (y_2 - y_1) - 2 v_1 y_2 &= p(y_1 - y_2)\,, \\ 2 y_1 y_2 v_1 &= -\, q(y_1 - y_2)\,, \\ y_2 v_1{}^2 &= -\, r(y_1 - y_2)\,. \end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus y_1 und y_2, und setzt allgemein v an die Stelle von v_1, so resultirt

$$(4pr - q^2)v^3 - 8r^2v^2 - 4pr^2v + 8r^3 = 0\,;$$

ausserdem

$$y_1 = \frac{qv}{2r}\,, \quad y_2 = \frac{qv}{2(r - v^2)}\,.$$

Setzt man $v = r : z$, so erhält man aus der Gleichung in v die Resolvente von Ferrari:

$$z^3 - \frac{1}{2} pz^2 - rz + \frac{1}{8}(4pr - q^2) = 0\,.$$

§ 216. Methode von Pratt**).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0\,.$$

---

*) Journ. de mathém. par Liouville XXIV. p. 205. Paris 1859.

**) Pratt, General solution of the biquadratic equation. Cap. VII in his work: New and easy method of solution of the cubic and biquadratic equations. London 1866.

Man nehme an, es sei

$$f(x) = \left(x^2 + \sqrt{\frac{y-2p}{3}}\cdot x + z\right)\left(x^3 - \sqrt{\frac{y-2p}{3}}\cdot x + v\right) = 0\,.$$

Man führe die Multiplication aus und vergleiche die homologen Coefficienten. Daraus resultiren die drei Bestimmungsgleichungen:

$$v + z = p + \frac{1}{3}(y-2p)\,,$$

$$v - z = q : \sqrt{\frac{1}{3}(y-2p)}\,,$$

$$vz = r\,.$$

Eliminirt man v und z, so erhält man die Resolvente von Descartes:

$$\left(\frac{y-2p}{3}\right)^3 + 2p\left(\frac{y-2p}{3}\right)^2 + (p^2-4r)\left(\frac{y-2p}{3}\right) - q^2 = 0\,,$$

oder entwickelt:

$$y^3 - 3(p^2+12r)y - (2p^3 - 72pr + 27q^2) = 0\,.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien y_1, y_2, y_3; alsdann ist wegen des ersten quadratischen Factors von $f(x)$:

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}(y_1-2p)}\,,\quad x_3 + x_4 = \sqrt{\frac{1}{3}(y_1-2p)}\,,$$

$$x_1 + x_3 = -\sqrt{\frac{1}{3}(y_2-2p)}\,,\quad x_2 + x_4 = \sqrt{\frac{1}{3}(y_2-2p)}\,,$$

$$x_1 + x_4 = -\sqrt{\frac{1}{3}(y_3-2p)}\,,\quad x_2 + x_3 = \sqrt{\frac{1}{3}(y_3-2p)}\,;$$

hieraus folgt

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{1}{3}(y_1-2p)} \mp \sqrt{\frac{1}{3}(y_2-2p)} \mp \sqrt{\frac{1}{3}(y_3-2p)}\right],$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = \frac{1}{2}\left[+\sqrt{\frac{1}{3}(y_1-2p)} \mp \sqrt{\frac{1}{3}(y_2-2p)} \pm \sqrt{\frac{1}{3}(y_3-2p)}\right].$$

Pratt discutirt nun noch den Fall, wo die Discriminante verschwindet, also

$$D_4^* = \frac{4}{27}(p^2+12r)^3 - \frac{1}{27}(2p^3 - 72pr + 27q^2)^2 = 0$$

wird. Da die Discriminante der Resolvente in y

$$D_3^* = 27(2p^3 - 72pr + 27q^2)^2 - 27\,.\,4(p^2+12r)^3\,,$$

also

$$D_3^* = -27^2 D_4^*$$

ist, so verschwindet zugleich D_3^* mit D_4^* und die Resolvente nimmt folgende Form an:

$$y^3 - 3(p^2 + 12r)y\,(\pm)\,2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} = 0\,.$$

Bildet man hiervon die Gleichung der Wurzeldifferenzen, so resultirt

$$Z = z^3 - 9(p^2 + 12r)z = 0\,.$$

Daraus folgt $z_1 = 0$, d. h. y hat zwei gleiche Wurzeln. Es ist nämlich

$$y_1 = y_2 = (\pm)\sqrt{p^2 + 12r}\,, \quad y_3 = (\mp)\,2\sqrt{p^2 + 12r}\,,$$

und demgemäss

$$x_2 \text{ und } x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p(\mp)\frac{2}{3}\sqrt{p^2 + 12r}}\,,$$

$$x_1 \text{ und } x_4 = \frac{1}{2}\left[\mp 2\sqrt{-\frac{2}{3}p(\pm)\frac{1}{3}\sqrt{p^2 + 12r}} - \sqrt{-\frac{2}{3}p(\mp)\frac{2}{3}\sqrt{p^2 + 12r}}\right].$$

§ 217. Die algebraischen Formen der vollständigen biquadratischen Gleichungen.

Nachdem in den vorhergehenden Paragraphen die bekanntesten Methoden der Auflösung derjenigen biquadratischen Gleichungen entwickelt worden sind, in welchen das zweite Glied fehlt, gehen wir nunmehr an das Geschäft der Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichung der Form

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,$$

und der Cayley'schen Form

$$f(x) = (a, b, c, d, e \widehat{\big)\,(} x, 1)^4 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0\,.$$

Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst die algebraischen Formen zusammen, welche für die Discussion der Methoden und überhaupt für ein tieferes Eindringen in die Lehren der neuern Algebra von hervorragender Bedeutung sind.

1. Die variirten Gleichungen erster und zweiter Ordnung.

Substituirt man $x = x' + z$, wo z die Variation der Unbekannten ist, so erhält man (§ 14) die Variirte der ersten Ordnung:

$$x'^4 + (4z+a)x'^3 + (6z^2+3az+b)x'^2 + (4z^3+3az^2+2bz+c)x' + (z^4+az^3+bz^2+cz+d)$$
$$= x'^4 + \frac{1}{2\,.\,3}f'''(z)x'^3 + \frac{1}{1\,.\,2}f''(z)x'^2 + f'(z)x' + f(z)$$
$$= x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \delta = 0\,.$$

Setzt man $(x-z)^2 = x'$, bildet also die Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Gleichung, so erhält (§ 49) man die Variirte der zweiten Ordnung:

$$x'^4 - (\alpha^2 - 2\beta)x'^3 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta)x'^2 - (\gamma^2 - 2\beta\delta)x' + \delta^2$$
$$= x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' + \delta_1 = 0\,,$$

worin

$$-\alpha_1 = \alpha^2 - 2\beta = 4z^2 + 2az + a^2 - 2b\,,$$
$$\beta_1 = \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta = 6z^4 + 6az^3 + (3a^2 - 2b)z^2 + 2(ab - 3c)z + (b^2 - 2ac + 2d)\,,$$
$$-\gamma_1 = \gamma^2 - 2\beta\delta = 4z^6 + 6az^5 + (3a^2 + 2b)z^4 + 4(ab - c)z^3 + 2(b^2 - 6d)z^2 + 2(bc - 3ad)z + (c^2 - 2bd)\,,$$
$$\delta_1 = \delta^2 = (z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d)^2$$

zu setzen ist.

2. Die Resolventen und die substituirten Functionen.

Die Resolventen der biquadratischen Gleichungen sind Hülfsgleichungen vom dritten oder vom sechsten Grade, durch welche eine Reduction der Gleichungen auf den zweiten Grad sich erzielen lässt. Diese Klasse von Formen ist bereits in § 81c. aufgezählt, und zwar der Zahl nach zwanzig. Die substituirten Functionen sind einfache Verbindungen der Hauptunbekannten mit einer oder mehreren unbestimmten Hülfsgrössen, durch welche man zu jenen Resolventen gelangt. Dieselben sind in § 80 zusammengestellt. Es wird überflüssig sein, dieselben hier noch einmal zu wiederholen. Sie lassen sich sämmtlich auf die Normalform XXX zurückführen.

3. Die Reducenten.

Diese Formen stellen diejenigen Bedingungen dar, unter welchen die Lösung der biquadratischen Gleichungen vereinfacht, also zumeist auf die einer quadratischen Gleichung ohne eine kubische Resolvente zurückgeführt wird. Die Reducenten sind ebenfalls schon früher (§ 79c.) tabellarisch und zugleich in symmetrischen Functionen der Wurzeln zusammengestellt. Wir wollen zunächst die reducirten Formen der Gleichung aufstellen, welche die variirte

Function annimmt, wenn die Reducenten verschwinden, und dann genauer in die Discussion sämmtlicher Reducenten eingehen.

Variirt man die vorgelegte Function $f(x)$, indem man $x = x' + z$ setzt, so lassen sich die durch die betreffenden Reducenten reducirten Gleichungen auf folgende Weise in quadratische Factoren zerlegen:

$$(21)\text{I.}\quad -(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = 0\,;$$
$$(x'^4 + ux'^2 + p)(x'^4 + ux'^2 + q) = 0\,,$$
$$(21)\text{II.}\quad \gamma^3 - 4\beta\gamma\delta + 8\alpha\delta^2 = 0\,;$$
$$\left(\frac{1}{x'^2} + u\cdot\frac{1}{x'} + p\right)\left(\frac{1}{x'^2} + u\cdot\frac{1}{x'} + q\right) = 0\,,$$
$$(22)\quad \alpha^2\delta - \gamma^2 = 0\,;\quad (x'^2 + ux' + p)(x'^2 + vx' + p) = 0\,,$$
$$(23)\quad \alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0\,;$$
$$(x'^2 + ux' + p)(x'^2 + vx' - p) = 0\,,$$
$$(24)\quad -(\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2) = 0\,;\ (x'^2 + ux' + p)(x'^2 + q) = 0\,,$$
$$(26)\quad \alpha_1{}^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1 = 0\,;$$
$$(x'^2 + ux' + p)(x'^2 + ux' + q) = 0\,,$$
$$(30)\quad D_4 = 0\,;\quad (x'^2 + 2ux' + u^2)(x'^2 + vx' + p) = 0\,,$$
$$(31)\quad 72\beta_1\delta_1 + 9\alpha_1\beta_1\gamma_1 - 27\gamma_1{}^2 - 27\alpha_1{}^2\delta_1 - 2\beta_1{}^3 = 0\,;$$
$$(x'^2 + 2ux' + [uv + p])(x'^2 + 2vx' + [uv - p]) = 0.$$

Um die Reducenten (21)I., (26), (30) und (31) zum Verschwinden zu bringen, ist eine Variation der zweiten Ordnung erforderlich. Bei der Factorenzerlegung in (21)I. bezeichnet x' die Wurzel der variirten Hauptgleichung; bei (26), (30) und (31) die Wurzel der Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Hauptgleichung. In den übrigen Fällen, wo eine lineare Transformation zum Ziele führt, bezeichnet x' einfach die Wurzel der variirten Hauptgleichung.

Die oben angeführten Factorenzerlegungen der Variirten beruhen auf folgenden möglichen Reductionen der biquadratischen Gleichungen auf quadratische:

$$(21)\text{I.}\quad (x'^4 + zx'^2 + y)^2 = r^2\,,$$
$$(21)\text{II.}\quad \left(\frac{1}{x'^2} + z\cdot\frac{1}{x'} + y\right)^2 = r^2\,,$$
$$(22)\quad (x'^2 + zx' + y)^2 = r^2x'^2\,,$$
$$(23)\quad (x'^2 + zx')^2 = (yx' + r)^2\,,$$

$$(24)\quad (x'^2 + zx' + y)^2 = (zx' + r)^2\,,$$
$$(26)\quad (x'^2 + zx' + y)^2 = r^2\,,$$
$$(30)\quad \left(x'^2 + [y+z]x' + \frac{1}{2}[r + z^2]\right)^2 = \left([y-z]x' + \frac{1}{2}[r - z^2]\right)^2,$$
$$(31)\quad (x'^2 + 2zx' + [z^2 - y^2])^2 = (2yx' + r)^2\,.$$

Diese Reducirten lassen sich in Producte zweier trinomischer Factoren zerlegen auf folgende Art:

$$(21)\,\text{I.}\quad (x'^4 + zx'^2 + y - r)(x'^4 + zx'^2 + y + r) = 0\,,$$
$$(21)\,\text{II.}\quad \left(\frac{1}{x'^2} + z\,.\,\frac{1}{x'} + y - r\right)\left(\frac{1}{x'^2} + z\,.\,\frac{1}{x'} + y + r\right) = 0\,,$$
$$(22)\quad (x'^2 + [z+r]x' + y)(x'^2 + [z-r]x' + y) = 0\,,$$
$$(23)\quad (x'^2 + [z+y]x' + r)(x'^2 + [z-y]x' - r) = 0\,,$$
$$(24)\quad (x'^2 + 2zx' + y + r)(x'^2 + y - r) = 0\,,$$
$$(26)\quad (x'^2 + zx' + y - r)(x'^2 + zx' + y + r) = 0\,,$$
$$(30)\quad (x'^2 + 2zx' + z^2)(x'^2 + yx' + r) = 0\,,$$
$$(31)\quad (x'^2 + 2[z+y]x' + z^2 - y^2 + r)(x'^2 + 2[z-y]x' + z^2 - y^2 - r) = 0\,.$$

Diese acht Formen der biquadratischen Gleichungen sind lauter solche specielle Fälle, in denen die vier Wurzeln in gewissen einfachen arithmetischen Verhältnissen zu einander stehen; und zwar ist in

$$(21)\,\text{I.}\quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4\,,$$
$$(21)\,\text{II.}\quad \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2x_3x_4}{x_3 + x_4}\,,$$
$$(22)\quad x_1x_2 = x_3x_4\,,$$
$$(23)\quad x_1x_2 = -x_3x_4\,,$$
$$(24)\quad x_1 = -x_2\,,$$
$$(26)\quad x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\,,$$
$$(30)\quad x_1 = x_2\,,$$
$$(31)\quad \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}\,.$$

Die Gleichung (31) ist also besonders dadurch ausgezeichnet, dass für beliebige Werthe von y, z und r ihre vier Wurzeln vier harmonische Puncte repräsentiren. Die trinomischen Factoren lassen sich aus den reducirten Formen der Function auf folgende Weise darstellen.

a) Bildet man die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten und führt die Reducente

$$-(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1) = 0$$

ein, so erhält man die Resolvente XX, und die reducirte Gleichung ist

$$x'^8 + \alpha_1 x'^6 + \beta_1 x'^4 - \frac{1}{8}(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1)x'^2 + \delta_1 = 0 .$$

Die Factoren derselben sind

$$x'^4 + \frac{1}{2}\alpha_1 x'^2 + \frac{\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2\delta}}{\alpha_1} = 0 ,$$

oder auch

$$x'^4 + \frac{1}{2}\alpha_1 x'^2 - \frac{1}{8}(\alpha_1^2 - 4\beta_1) \pm \frac{1}{8}\sqrt{(\alpha_1^2 - 4\beta_1)^2 - 64\delta_1} = 0 .$$

Diese Gleichungen lassen sich auflösen wie quadratische. Sie geben im Ganzen acht verschiedene Lösungen, unter denen vier fremd sind.

b) Bildet man die Variirte und führt die Reducente

$$\gamma^3 - 4\beta\gamma\delta + 8\alpha\delta^2 = 0$$

ein, so erhält man die Resolvente XXXI, also die bikubische Covariante. Die Reducirte ist

$$x'^4 - \frac{\gamma^3 - 4\beta\gamma\delta}{8\delta^2} x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \delta = 0 ,$$

oder, wenn man durch $\delta x'^4$ dividirt,

$$\frac{1}{x'^4} + \frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{1}{x'^3} + \frac{\beta}{\delta}\cdot\frac{1}{x'^2} - \frac{\gamma^3 - 4\beta\gamma\delta}{8\delta^3}\cdot\frac{1}{x'} + \frac{1}{\delta} = 0 .$$

Die Factoren derselben sind

$$\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{1}{x'} + \frac{\alpha\sqrt{\delta} \pm \sqrt{\alpha^2\delta - \gamma^2}}{\gamma\sqrt{\delta}} = 0 .$$

Demnach lässt sich auch eine biquadratische Gleichung, in welcher die kubische Retrovariante gleich Null ist, auf das Product zweier quadratischer reduciren.

c) Bildet man die Variirte und führt die Reducente

$$\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$$

ein, so erhält man die Resolvente XXII und die Reducirte ist

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0 .$$

Die Factoren derselben sind

$$x'^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{\alpha}}\right)x' + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 .$$

d) Wenn man in die linear Transformirte die Reducente

$$\alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0$$

einführt, so erhält man die Resolvente XXV und die reducirte Form der Gleichung

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' - \frac{\gamma^2}{\alpha^2 - 4\beta} = 0 .$$

Die Factoren sind

$$x'^2 + \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})\,x' \mp \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} = 0 ,$$

oder auch

$$x'^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2\delta + \gamma^2}{\alpha\sqrt{\delta} \mp \gamma\sqrt{-1}}\,x' \mp \sqrt{-\delta} = 0 .$$

e) Bildet man die Variirte und führt die Reducente

$$-(\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2) = 0$$

ein, so erhält man die Resolvente XXIV und die reducirte Form

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{\alpha\beta\gamma - \gamma^2}{\alpha^2} = 0 .$$

Die Factoren derselben sind

$$x'^2 + \alpha x' + \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} = 0 ,$$

$$x'^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 ;$$

oder auch

$$x'^2 + \alpha x' + \frac{\alpha\delta}{\gamma} = 0 ,$$

$$x'^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 .$$

Die Differenz der beiden Absolutglieder ist $\frac{\alpha^2\delta - \gamma^2}{\alpha\gamma}$.

f) Die Reducente (26), nämlich

$$-(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1) = \alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 8\alpha^2(\alpha\gamma + \beta^2 - \delta) \\ - 16\alpha\beta\gamma + 8\gamma^2 = 0$$

bringt die Variirte auf dieselbe Form wie (21) I.

g) Bildet man die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten und lässt die Discriminante derselben verschwinden, setzt also

$$\frac{4}{27}(\beta^2 - 3\alpha\gamma + 12\delta)^3 - \frac{1}{27}(72\beta\delta + 9\alpha\beta\gamma - 27\gamma^2 - 27\alpha^2\delta - 2\beta^3)^2 = 0,$$

so erhält man die Resolvente XXIV. Die beiden gleichen Wurzeln sind nun

$$x_1' \text{ und } x_2' = +Q,$$

wo $x' - Q$ den gemeinschaftlichen Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ bezeichnet. Die beiden andern Wurzeln liefert die Gleichung

$$x'^2 + (\alpha + 2Q)x' + \frac{\delta}{Q^2} = 0.$$

h) Bildet man die Gleichung der Wurzelquadrate der variirten Gleichung und führt die Reducente (31), also

$$72\beta_1\delta_1 + 9\alpha_1\beta_1\gamma_1 - 27\gamma_1^2 - 27\alpha_1^2\delta_1 - 2\beta_1^3 = 0$$

ein, so gelangt man zur Resolvente XXXII:

$$C_{3,3}(\xi) = 54\mathfrak{J}\xi^3 - 18\mathcal{J}^2\xi^2 + \mathcal{J}\mathfrak{J}\xi + 2\mathcal{J}^3 - 108\mathfrak{J}^2 = 0,$$

worin

$$4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = 2\xi$$

gesetzt ist und $C_{3,3}(\xi)$ die kubische Covariante der Function

$$2\Delta = 2\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b + \xi\right) \\ \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b - \frac{1}{2}\xi\right), & \frac{1}{4}c \\ \left(\frac{1}{6}b + \xi\right), & \frac{1}{4}c, & d \end{vmatrix} = \xi^3 - \mathcal{J}\xi + 2\mathfrak{J}$$

bezeichnet. Die Reducirte ist alsdann

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' - \frac{2\beta_1^3 - 9\alpha_1\beta_1\gamma_1 + 27\gamma_1^2}{9(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)} = 0.$$

Wegen der identischen Gleichung

$$-\frac{2\beta_1^3 - 9\alpha_1\beta_1\gamma_1 + 27\gamma_1^2}{9(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)} = \frac{1}{36}\left(\beta_1^2 - \frac{3(\alpha_1\beta_1 - 6\gamma_1)^2}{3\alpha_1^2 - 8\beta_1}\right)$$

lässt sich leicht folgende Zerlegung des Polynoms in zwei Quadrate bewerkstelligen:

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \left(\frac{1}{4}\alpha_1^2 + \frac{1}{3}\beta_1\right)x'^2 + \frac{1}{6}\alpha_1\beta_1 x' + \frac{1}{36}\beta_1^2$$
$$-\frac{1}{12}(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)x'^2 - \frac{1}{6}(\alpha_1\beta_1 - 6\gamma_1)x' - \frac{1(\alpha_1\beta_1 - 6\gamma_1)^2}{12(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)} = 0,$$

oder

$$\left(x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \frac{1}{6}\beta_1\right)^2 - \frac{1}{12}(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)\left(x' + \frac{\alpha_1\beta_1 - 6\gamma_1}{3\alpha_1^2 - 8\beta_1}\right)^2 = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha_1 = 4z, \quad \sqrt{\frac{1}{48}(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)} = y,$$

so wird

$$z^2 - y^2 = \frac{1}{6}\beta_1, \quad r = \frac{\alpha_1\beta_1 - 6\gamma_1}{\sqrt{12(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)}}.$$

Auf diese Weise wird die Gleichung auf die bereits früher angeführte Form zweier Quadrate gebracht, nämlich

$$(x'^2 + 2zx' + z^2 - y^2)^2 = (2yx' + r)^2,$$

oder in das Product

$$[x'^2 + 2(z+y)x' + z^2 - y^2 + r][x'^2 + 2(z-y)x' + z^2 - y^2 - r] = 0$$

verwandelt. Da die Reducente (31) verschwinden soll, so ist noch

$$\frac{(\alpha_1\beta_1 - 6\gamma_1)^2}{3\alpha_1^2 - 8\beta_1} = \frac{1}{3}(\beta_1^2 - 36\delta_1),$$

und deswegen nach Art der Methode von Ferrari:

$$\left(x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \frac{1}{6}\beta_1\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{12}(3\alpha_1^2 - 8\beta_1)}.x' + \frac{1}{6}\sqrt{\beta_1^2 - 36\delta_1}\right)^2 = 0.$$

Es ist bemerkenswerth, dass sämmtliche hier eingeführte Reducenten vom dritten, sechsten, neunten oder zwölften Grade sind, wie die Anzahl der möglichen Permutationen der Elemente der Wurzeltypen es mit sich bringt. Die Resolventen XXIV, XXV und XXXI sind zwar vom sechsten Grade, lassen sich aber in quadratische Factoren zerlegen. Die genannten Reducenten können demnach zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen mit Vortheil angewandt werden.

4. Geometrische Discussion der Reducenten.

Es sei allgemein

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y.$$

Betrachtet man x als Abscisse, y als Ordinate einer ebenen Curve, so werden offenbar alle Werthe der Abscisse x, für welche die Ordinate y gleich Null wird, Wurzeln der Gleichung sein. Durch die lineare Transformation (Variation) $x = x' + z$ kann nun die Ordinatenaxe parallel mit sich verschoben werden, so dass eine der Reducenten verschwindet. Im Allgemeinen ist dies für die Reducenten (22), (23) und (24) immer möglich, nicht aber für (21), (26), (29), (30) und (31). Man kann jedoch eine Variation zweiter Ordnung anwenden, indem man die Gleichung der Wurzelquadrate oder der Quadratwurzeln der Variirten bildet. Die Variation ist in diesen Fällen bestimmt durch die Gleichungen

$$(x - z)^2 - x' = x^2 - 2zx + z^2 - x' = 0$$

und

$$\sqrt{x - z} = x' .$$

Die erstere ist die gewöhnliche und tritt z. B. ein, wenn man nach der Methode von Tschirnhausen eine quadratische Function der Unbekannten substituirt. Ferner können die Variationen zur dritten und vierten Ordnung aufsteigen. Das letztere ist z. B. der Fall, wenn man eine Gleichung in eine andere transformirt, welche drei gleiche Wurzeln hat. Die Substitutionsformel ist in diesem Falle

$$[(x - z)^2 - y]^2 - x'' = 0 .$$

Die quadratische Variation würde nun, im analytisch-geometrischen Sinne erfasst, offenbar bedeuten, dass man die Ordinaten nicht mehr äquidistant annimmt, sondern nach Verschiebung des Coordinatenanfangspunctes um z die Abstände der Ordinaten nach einer quadratischen Function wachsen lässt. Die Curvenelemente werden in der Richtung der Abscissenaxe verschoben, die ersten Differenzialquotienten sind nach der Transformation mit einer Function der zugehörigen Abscissen multiplicirt, die Gerade wird Hyperbel u. s. w., und auf diese Weise treten fremde Lösungen in das vorgestellte Problem ein. Wir wollen nun von diesem Gesichtspuncte aus die einzelnen Reducenten einer genaueren Betrachtung unterziehen.

(21) I. Wenn die kubische Variante

$$V_3 = \frac{1}{32}(a^3 - 4ab + 8c)$$

verschwinden soll, so genügt hierzu nicht eine lineare Transformation, wol aber eine quadratische. Denn setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet z aus der Function V_3 gänzlich. Setzt man dagegen $(x - z)^2$ an die Stelle von x, so wird die Variante V_3 der Variirten gleich Null, wenn man setzt

$$(x_1 - z)^2 + (x_2 - z)^2 - (x_3 - z)^2 - (x_4 - z)^2$$
$$= (x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 - x_4{}^2) - 2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)z = 0 .$$

Die Resolvente in z wird mit der Resolvente XX (§ 81) identisch, wenn man $-z$ an die Stelle von $2z$ setzt. Da die Function drei solche Factoren besitzt, so muss die Resolvente kubisch sein. Man erhält dieselbe in Coefficienten der vorgelegten biquadratischen Gleichung ausgedrückt, wenn man die Reducente (21) I in die Coefficienten der quadratisch Variirten

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' + \delta_1 = 0$$

einführt, also die Function

$$-(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1) = 0$$

entwickelt. Es ist dabei zu setzen

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 &= \alpha^2 - 2\beta = 4z^2 + 2az + (a^2 - 2b), \\
\beta_1 &= \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta = 6z^4 + 6az^3 + (3a^2 - 2b)z^2 + 2(ab - 3c)z \\
&\quad + (b^2 - 2ac + 2d), \\
-\gamma_1 &= \gamma^2 - 2\beta\delta = 4z^6 + 6az^5 + (3a^2 + 2b)z^4 + 4(ab - c)z^3 \\
&\quad + 2(b^2 - 6d)z^2 + 2(bc - 3ad)z + (c^2 - 2bd), \\
\delta_1 &= \delta^2 = (z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d)^2 .
\end{aligned}$$

Durch die Reducente (21) I wird das Coordinatensystem derartig verändert, dass die Differenz zweier Wurzelsummen gleich Null wird, oder was dasselbe ist, dass die Wurzeln der Variirten eine arithmetische Proportion bilden.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^4 - 12x'^3 + 25x'^2 + 66x' - 80 = 0 .$$

Die Wurzeln derselben sind

$$x_1' = 1 , \quad x_2' = 5 , \quad x_3' = -2 , \quad x_4' = 8 .$$

In diesem Falle ist

$$\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1 = -12^3 + 4 . 12 . 25 + 8 . 66 = 0$$

und

$$(x_1' + x_2') - (x_3' + x_4') = 0$$

oder

$$x_1' - x_3' = x_4' - x_2' .$$

(21) II. Wenn die kubische Retrovariante

$$V'_{3,4} = \frac{1}{32}(c^3 - 4bcd + 8ad^2)$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt hierzu eine lineare Transformation und die Resolvente wird bikubisch. Setzt man nämlich $x - z$ an die Stelle von x, so verschwindet die Function $V'_{3,4}$ der Variirten, wenn man annimmt

$$\begin{aligned} & x_2' x_3' x_4' + x_1' x_3' x_4' - x_1' x_2' x_4' - x_1' x_2' x_3' \\ = & (x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4 - x_1 x_2 x_3) + 2(x_1 x_2 - x_3 x_4) z \\ & - (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) z^2 = 0 \,. \end{aligned}$$

Da die Function drei solche Factoren hat, so ist die Resolvente in z vom sechsten Grade und identisch mit XXXI, also

$$C_{4,6}(z) = 0 \,.$$

Man erhält dieselbe dadurch, dass man die Reducente (21) II in die Coefficienten der variirten Gleichung einführt. Sie ist scheinbar vom neunten Grade, reducirt sich aber auf eine vom sechsten Grade, da die drei ersten Glieder gleich Null werden. Durch die Reducente (21) II wird das Coordinatensystem dergestalt verschoben, dass das harmonische Mittel zweier Wurzeln der variirten Gleichung dem harmonischen Mittel der beiden andern gleich wird, dass also wird

$$\frac{2 x_1' x_2'}{x_1' + x_2'} = \frac{2 x_3' x_4'}{x_3' + x_4'} \,.$$

Beispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \,;$$

die Wurzeln sind

$$x_1 = -1 \,, \quad x_2 = 1 \,, \quad x_3 = 2 \,, \quad x_4 = 3 \,.$$

Die Resolvente in z ist nun

$$(5z^2 - 14z + 5)(3z^2 - 10z + 11)(z^2 - 10z + 13) = 0 \,.$$

Aus dem letzten quadratischen Factor

$$z^2 - 10z + 13 = 0$$

folgt

$$z_1 \text{ und } z_2 = 5 \pm 2\sqrt{3} \,;$$

aus dem vorletzten

$$3z^2 - 10z + 11 = 0 \,,$$

$$z_3 \text{ und } z_4 = \frac{5}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{-2} \,;$$

aus dem ersten Factor

$$5z^2 - 14z + 5 = 0 \,,$$

$$z_5 \text{ und } z_6 = \frac{7}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{6} \,.$$

Es gibt also im Ganzen vier reelle und zwei laterale Verschiebungen des Coordinatenanfangspunctes, bei welchen die harmonischen Mittel von je zwei Wurzeln gleich werden.

(22) Wenn die Function

$$\Pi = a^2 d - c^2$$

gleich Null werden soll, so genügt dazu eine lineare Transformation, und die Resolvente ist die kubische XXII. Setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so wird die Function $\alpha^2\delta - \gamma^2$ gleich Null, wenn man annimmt

$$\begin{aligned} x_1' x_2' - x_3' x_4' &= (x_1 - z)(x_2 - z) - (x_3 - z)(x_4 - z) \\ &= (x_1 x_2 - x_3 x_4) - (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) z = 0 \,. \end{aligned}$$

Da die Function drei solcher Factoren besitzt, so ist die Resolvente vom dritten Grade. Man erhält dieselbe in Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt, indem man entweder die Reducente in die Coefficienten der Variirten einführt, also die Gleichung $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$ nach Potenzen von z entwickelt, oder indem man mit Hülfe der Sätze der symmetrischen Function das Product

$$\begin{aligned} &[(x_1 x_2 - x_3 x_4) - (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) z] \,.\, [(x_1 x_3 - x_2 x_4) \\ &- (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) z]\, [(x_1 x_4 - x_2 x_3) - (x_1 - x_2 - x_3 + x_4) z] = 0 \end{aligned}$$

in exacter Form darstellt.

Durch die Reducente (22) wird das Coordinatensystem der Curve $y = f(x)$ so verschoben, dass die vier variirten Wurzeln je zwei und zwei gleiche oder lauter gleiche Vorzeichen haben und dabei eine geometrische Proportion bilden.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^4 - 12 x'^3 + 47 x'^2 - 72 x' + 36 = 0 \,.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1' = 1 \,, \quad x_2' = 6 \,, \quad x_3' = 3 \,, \quad x_4' = 2 \,.$$

Hier ist

$$\alpha^2\delta - \gamma^2 = 12^2 \cdot 36 - 72^2 = 0$$

und

$$x_1' x_2' - x_3' x_4' = 0 \,,$$

oder

$$x_1' : x_3' = x_4' : x_2' \,.$$

(23) Wenn die Function

$$\overline{V}_3 = a^2 d - 4 b d + c^2$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt dazu ebenfalls eine lineare Transformation und die Resolvente ist die bikubische XXV (§ 81). Dieselbe lässt sich leicht in drei quadratische Factoren zerlegen und zwar mit Hülfe der kubischen Resolvente XIII.

Setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so wird die Function $\overline{V}_3$ zum Verschwinden gebracht durch die Annahme

$$\begin{aligned} x_1' x_2' + x_3' x_4' &= (x_1 - z)(x_2 - z) + (x_3 - z)(x_4 - z) \\ &= (x_1 x_2 + x_3 x_4) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) z + 2z^2 = 0 . \end{aligned}$$

Die Resolvente in z besteht also aus den drei Factoren

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + \frac{1}{2}(x_1 x_2 + x_3 x_4) = 0 ,$$

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + \frac{1}{2}(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0 ,$$

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + \frac{1}{2}(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0 .$$

Man erhält die exacte Form der Resolvente XXV durch Entwicklung des Productes der drei quadratischen Factoren oder auch dadurch, dass man die Reducente (23) in die Coefficienten der Variirten einführt, also entwickelt

$$\alpha^2 \delta - 4 \beta \delta + \gamma^2 = 0 .$$

Durch die Reducente (23) wird das Coordinatensystem derartig verschoben, dass die Wurzeln der Variirten je ein und drei gleiche Vorzeichen haben und dass ihre Quadrate eine geometrische Proportion bilden.

Beispiel.

$$x'^4 + 6x'^3 - 112x'^2 + 330x' - 225 = 0 .$$

Die Wurzeln dieser Variirten sind

$$x_1' = 1 , \quad x_2' = -15 , \quad x_3' = 3 , \quad x_4' = 5 .$$

Es ist nun

$$\alpha^2 \delta - 4 \beta \delta + \gamma^2 = -6^2 . 225 + 4 . 112 . 330 + 330^2 = 0$$

und

$$x_1' x_2' + x_3' x_4' = 0$$

oder

$$x_1'^2 : x_3'^2 = x_4'^2 : x_2'^2 .$$

(24) Wenn die Geminante

$$G_4 = - \Sigma = - (a^2 d - abc + c^2)$$

durch Transformation der gegebenen Gleichung zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt dazu eine Variation ersten Grades, und die Resolvente wird die bikubische XXIV (§ 81). Dieselbe lässt sich indess leicht in drei quadratische Factoren zerlegen und auf die kubische XVI (§ 81) reduciren.

Setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so wird Σ gleich Null, wenn man annimmt

$$x_1' + x_2' = (x_1 + x_2) - 2z = 0,$$

also

$$z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Da die Function Σ sechs Factoren besitzt, so liegt hierin der Grund, warum die Resolvente vom sechsten Grade wird. Um sie in exacter Form zu erhalten, muss man sie entweder nach den gewöhnlichen Regeln (§ 19) bilden, indem sie die Gleichung der halben Wurzelsumme ist, oder man kann die Reducente auf die Coefficienten der Variirten anwenden und entwickeln

$$\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0.$$

Durch diese Reducente wird das Coordinatensystem der Curve $y = f(x)$ derartig verschoben, dass die variirte biquadratische Gleichung zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen erhält.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^4 - 5x'^3 + 5x'^2 + 5x' - 6 = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1' = 1, \quad x_2' = -1, \quad x_3' = 2, \quad x_4' = 3.$$

Es ist nun

$$\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2 = -5^2.6 + 5.5.5 + 5^2 = 0$$

oder

$$x_1' + x_2' = 0.$$

(26) Um die Function

$$W = -(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1)$$
$$= \alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 8\alpha^3\gamma + 8\alpha^2(\beta^2 - \delta) - 16\alpha\beta\gamma + 8\gamma^2$$

zum Verschwinden zu bringen, ist eine Variation zweiten Grades erforderlich und die Resolvente wird XX (§ 81), also eine kubische.

Setzt man in der Gleichung der Wurzelquadrate der gegebenen Gleichung $x - z$ an die Stelle von x, so wird

$$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) - 2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\, z = 0,$$

und die Function W verschwindet.

Die Resolvente lässt sich leicht herleiten aus der Resolvente XVII, deren Wurzeln sind:

$$z_1 = \pm (x_1 + x_2 - x_3 - x_4),$$
$$z_2 = \pm (x_1 - x_2 + x_3 - x_4),$$
$$z_3 = \pm (x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

Es ist nämlich

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = \frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2 - (x_3+x_4)^2 + (x_1-x_2)^2 - (x_3-x_4)^2]$$
$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$
$$+ \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$
$$= -\frac{1}{2}a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

Ferner ist gemäss (21) I:

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$
$$= -a^3 + 4ab - 8c,$$

folglich

$$2z = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = -\frac{1}{2}a - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}a - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{2y^2},$$

wo y die Wurzel von XVII bezeichnet. Setzt man $2z = -\zeta$, so erhält man die Resolvente XX.

Ebenso gelangt man zu dieser Resolvente, wenn man die Reducente (26) in die Coefficienten der Variirten einführt und sie nach Potenzen der Variation z entwickelt.

Durch die Reducente $W = 0$ wird das Coordinatensystem der Curve $y = f(x)$ derartig verändert, dass die Differenzen der Summe der Quadrate je zweier Wurzeln der Variirten jedesmal gleich Null werden, oder was dasselbe ist, dass die Wurzelquadrate eine arithmetische Proportion bilden. Im Princip stimmt diese Veränderung mit der von (21) im Wesentlichen überein.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^4 - 2x'^3 - 123x'^2 + 320x' + 1100 = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1' = -2, \quad x_2' = -11, \quad x_3' = 10, \quad x_4' = 5,$$

also

$$x_1'^2 = 4, \quad x_2'^2 = 121, \quad x_3'^2 = 100, \quad x_4'^2 = 25.$$

Es ist nun

$$W = \alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 8\alpha^2(\alpha\gamma + \beta^2 - \delta) - 16\alpha\beta\gamma + 8\gamma^2 = 0,$$

oder

$$(x_1'^2 + x_2'^2) - (x_3'^2 + x_4'^2) = 0.$$

(28) Um die Function

$$\Phi = a^4 - 4a^2b + 8ac - 16d = 0$$

zum Verschwinden zu bringen, genügt zwar eine lineare Transformation, die Hülfsgleichung aber wird ebenfalls vom vierten Grade. Denn setzt man $x - z$ an die Stelle von x, so wird

$$(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + 2z = 0,$$

und weil die Function vier Factoren besitzt, so ist damit der Satz bewiesen. Die Hülfsgleichung erhält man leicht entweder mit Hülfe der Sätze von den symmetrischen Functionen oder durch Einführung der Reducente (28) in die Coefficienten der Variirten.

Wenn die Hauptgleichung vier reelle Wurzeln hat, so ist dasselbe bei der Hülfsgleichung der Fall; hat die Hauptgleichung zwei reelle und zwei complexe oder auch lauter complexe Wurzeln, so hat die Hülfsgleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Beispiel. Die Variirte sei

$$x'^4 - 12x'^3 + 47x'^2 - 72x' + 36 = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1' = 1, \quad x_2' = 2, \quad x_3' = 3, \quad x_4' = 6.$$

Es ist nun

$$\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 8\alpha\gamma - 16\delta = 12(12^3 - 4.12.47 + 8.72) - 16.36 = 0,$$

oder

$$(x_1' + x_2' + x_3') - x_4' = 0.$$

(29) Wenn die quadratische Invariante

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12}(b^2 - 3ac + 12d)$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt nicht eine lineare Transformation, wol aber eine quadratische. Variirt man nämlich die Function

$$24\mathfrak{J} = (x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2$$

durch die Grösse z, so verschwindet z gänzlich aus derselben und es bleibt die Function selbst übrig. Lässt man dagegen $(x-z)^2$ an die Stelle von x treten, so wird die quadratische Invariante $\mathfrak{J}$ der Variirten gleich Null, wenn man annimmt

$$\begin{aligned} &(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2(x_1+x_2-2z)^2(x_3+x_4-2z)^2 \\ +&(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_1+x_3-2z)^2(x_2+x_4-2z)^2 \\ +&(x_2-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2+x_3-2z)^2(x_1+x_4-2z)^2=0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade und wird in exacter Form erhalten, wenn man die Function

$$\beta_1{}^2-3\alpha_1\gamma_1+12\delta_1=0$$

nach Potenzen von z entwickelt. Hermite*) hat gezeigt, dass die biquadratische Resolvente sich auf eine quadratische reduciren lässt.

Statt nun die Entwickelung der Function $\beta_1{}^2-3\alpha_1\gamma_1+12\delta_1$ nach Potenzen von z vorzunehmen, was ziemlich umständlich ist, da dieselbe auf eine Gleichung vom achten Grade führt, aus welcher die vier ersten Glieder identisch verschwinden, kann man zwei andere Wege einschlagen, deren einer von Hermite und Enneper**) betreten worden ist und von denen der andere in der Anwendung der Sätze von den symmetrischen Functionen der Wurzeln fortschreitet. Wir entwickeln zunächst das erste Verfahren in einer etwas abgekürzten Form.

Die Substitutionsformel ist nach dem Vorhergehenden

$$x^2-2zx+(z^2-x')=0.$$

Setzt man vorläufig $-2z=v$, so erhält man durch Elimination von x aus dieser und $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} (z^2-x')^4&-[av-a^2+2b](z^2-x')^3 \\ &+[b(v^2-av+b)+3cv-2ac+2d](z^2-x')^2 \\ &-[c(v^3-av^2+bv-c)+d(4v^2-3av)+2bd](z^2-x') \\ &+d[v^4-av^3+bv^2-cv+d]=0. \end{aligned}$$

Nimmt man nun weiter an

$$v^2-av+b=r+\frac{1}{3}b,$$

so lässt sich Alles durch r und die erste Potenz von v ausdrücken, und es resultirt die Gleichung

*) Hermite, Sur la théorie des équations modulaires, p. 20. Paris 1859.

**) Enneper, Notiz über die biquadratische Gleichung. Zeitschrift für Math. und Physik. XVIII. S. 93. 1873.

$$\begin{aligned}(z^2-x')^4 &- [av-a^2+2b](z^2-x')^3 \\ &+ \left[b\left(r+\tfrac{1}{3}b\right)+3cv-2ac+2d\right](z^2-x')^2 \\ &- \left[cv\left(r+\tfrac{1}{3}b\right)+4d\left(r+\tfrac{1}{3}b\right)+adv-c^2-2bd\right](z^2-x') \\ &+ d\left[\left(r+\tfrac{1}{3}b\right)^2+(av-b)\left(r+\tfrac{1}{3}b\right)-cv+d\right]=0.\end{aligned}$$

Denkt man sich die Gleichung weiter nach Potenzen von x' entwickelt, also

$$x'^4+\alpha_1 x'^3+\beta_1 x'^2+\gamma_1 x'+\delta_1=0$$

und setzt die quadratische Invariante dieser Gleichung gleich Null, also

$$\mathfrak{J}_u=\frac{1}{12}(\beta_1{}^2-3\alpha_1\gamma_1+12\delta_1)=0,$$

so erhält man die gesuchte biquadratische Resolvente, welche nach Potenzen von z entwickelt folgende Form annimmt:

$$16\mathfrak{J}z^4+16a\mathfrak{J}z^3+\frac{4}{3}[(3a^2+4b)\mathfrak{J}-36\mathfrak{F}]z^2$$
$$+\frac{8}{3}(ab\mathfrak{J}-9a\mathfrak{F})z+\frac{4}{9}(b^2\mathfrak{J}-18b\mathfrak{F}+3\mathfrak{J}^2)=0.$$

Das Absolutglied ist die quadratische Invariante $\mathfrak{J}_2$ der Gleichung der Wurzelquadrate der vorgelegten Gleichung $f(x)=0$, denn man hat, wie auch aus der Variationsgleichung von $\mathfrak{J}$ sich ergibt*)

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_2&=\frac{4}{9}(b^2\mathfrak{J}-18b\mathfrak{F}+3\mathfrak{J}^2)\\ &=\frac{1}{12}[(b^2-2ac+2d)^2-3(a^2-2b)(c^2-2bd)+12d^2].\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun das wichtige Theorem, dass jede biquadratische Gleichung sich so transformiren lässt, dass die quadratische Invariante $\mathfrak{J}_u$ der Transformirten verschwindet. Die Resolvente XXX derselben wird dadurch auf die rein kubische

$$\zeta^3+2\mathfrak{J}_u=0$$

reducirt. Merkwürdig ist die Form der Resolvente in r. Setzt man $2r=\eta$, so wird dieselbe

$$3\mathfrak{J}\eta^2-18\mathfrak{F}\eta+\mathfrak{J}^2=0,$$

nimmt also die Form der quadratischen Covariante an von der Determinante

---

*) Lebesgue, Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré. Journ. de Mathém. par Liouville. XXIII. p. 391. 1858.

$$2\varDelta = 2. \begin{vmatrix} +\ 1, & \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b+\eta\right) \\ \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\eta\right), & \frac{1}{4}c \\ \left(\frac{1}{6}b+\eta\right), & \frac{1}{4}c, & d \ + \end{vmatrix} = \eta^3 - \mathfrak{J}\eta + 2\mathfrak{F}.$$

Auf einem etwas kürzeren Wege gelangt man zu der quadratischen Gleichung in r, wenn man auf die Variation der Function $\mathfrak{J}$ die Sätze von den symmetrischen Functionen der Wurzeln anwendet. Das erste Glied der Variation ist

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 [(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2az + 4z^2]^2.$$

Setzt man

$$4z^2 + 2az = y = r - \frac{1}{3}b,$$

so ist die quadratische Resolvente gleich

$$\Sigma[(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 y^2 + 2(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_1{}^2 - x_2{}^2)(x_3{}^2 - x_4{}^2)y + (x_1{}^2 - x_2{}^2)^2 (x_3{}^2 - x_4{}^2)^2] = 24\mathfrak{J}y^2 + 32(b\mathfrak{J} - 6\mathfrak{F})y + 24\mathfrak{J}_2 = 0,$$

und

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{4}{9}(b^2\mathfrak{J} - 18b\mathfrak{F} + 3\mathfrak{J}^2).$$

Dividirt man durch 24, so resultirt

$$\mathfrak{J}y^2 + \frac{4}{3}(b\mathfrak{J} - 6\mathfrak{F})y + \mathfrak{J}_2 = 0.$$

Substituirt man $y + \frac{2}{3}b = r + \frac{1}{3}b$ wieder als Hauptgrösse, so erhält man wie oben

$$\mathfrak{J}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^2 - 12\mathfrak{F}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right) + \frac{4}{3}\mathfrak{J}^2 = 0$$

oder

$$\mathfrak{J}(6z^2 + 3az + b)^2 - 18\mathfrak{F}(6z^2 + 3az + b) + 3\mathfrak{J}^2 = 0.$$

Die Discriminante dieser quadratischen Gleichung ist

$$\varDelta_2 = -\frac{1}{48}D_4.$$

Zahlenbeispiel. Die variirte Gleichung sei

$$x'^4 - 8x'^3 + 24x'^2 - 40x' + 32 = 0.$$

Die Wurzelwerthe derselben sind

$$x_1' = 2,\ x_2' = 4,\ x_3' \text{ und } x_4' = 1 \pm \sqrt{-3}.$$

Für diese Gleichung ist nun

$$\beta_1^2 - 3\alpha_1\gamma_1 + 12\delta_1 = 24^2 - 3 . 8 . 40 + 12 . 32 = 0 .$$

Durch die Reducente (29) wird nun das Coordinatensystem derartig verändert, dass die vier Wurzeln der variirten Gleichung einander äquianharmonisch zugeordnet sind, d. h. dass das Doppelverhältniss

$$\frac{x_1 - x_2'}{x_3' - x_2'} : \frac{x_1' - x_4'}{x_3' - x_4'} = -J_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \text{oder } -J_1,$$

und

$$\frac{x_1' - x_3'}{x_2' - x_3'} : \frac{x_1' - x_4'}{x_2' - x_4'} = -J_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \text{oder } -J_2$$

wird. Für den vorliegenden concreten Fall gelten die ersten Werthe.

Um dies Theorem zu erreichen, gehen wir aus von der symmetrischen Function

$$24\mathfrak{J} = (x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2 .$$

Dieselbe möge der oben ausgesprochenen Bedingung gemäss gleich Null sein. Dividiren wir die so entstehende Gleichung durch das letzte Glied, so erhalten wir

$$\frac{(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2}{(x_3 - x_2)^2(x_1 - x_4)^2} + \frac{(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2}{(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2} + 1 = 0 .$$

Es gilt nun jederzeit die Identität

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_4) = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$

woraus folgt

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} - 1 .$$

Setzt man diesen Werth für das zweite Glied in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man, nachdem man dieselbe durch 2 dividirt hat,

$$\frac{(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2}{(x_3 - x_2)^2(x_1 - x_4)^2} - \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} + 1 = 0,$$

oder kurz

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 .$$

Daraus ergibt sich sofort die Auflösung

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} = -J_2 \quad \text{oder} \quad -J_1 .$$

Wegen der Identität

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_4) = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$$

ist zweitens

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = -J_1 \quad \text{oder} \quad -J_2 .$$

Die übrigen Permutationen der Wurzeln geben aber keine neuen Werthe und es werden in diesem Falle zweimal drei Doppelverhältnisse gleich; die vier Elemente x_1, x_2, x_3, x_4 sind einander äquianharmonisch zugeordnet*).

Es ist weiter in § 143, 8 gezeigt worden, dass wenn drei der Elemente z. B. x_1, x_2, x_3 die Wurzeln einer kubischen Gleichung sind, in diesem Falle das vierte Element x_4 eine Wurzel der quadratischen Covariante $C_{3,2}(z) = 0$ sei. Es gibt demnach immer zwei Elemente, welche mit drei gegebenen ein äquianharmonisches Doppelverhältniss bilden. Wenn die Wurzel der quadratischen Covariante mit den drei Wurzeln ihrer kubischen Stammgleichung eine biquadratische bildet, so geht die quadratische Covariante $C_{3,2}(x_4)$ über in die quadratische Invariante $12\mathfrak{J}$ und verschwindet zugleich.

Wir haben weiter zu untersuchen, unter welchen Bedingungen bei biquadratischen Gleichungen mit reellen Coefficienten die quadratische Invariante verschwindet oder die vier Wurzeln in einem äquianharmonischen Verhältnisse stehen. Es gelten dafür folgende zwei Sätze:

1) Die quadratische Invariante kann nicht verschwinden, wenn die vier Wurzeln der Stammgleichung reell oder complex und von einander verschieden sind. Sie verschwindet aber, wenn drei der Wurzeln einander gleich sind.

2) Die Invariante kann verschwinden, wenn zwei Wurzeln reell und zwei conjugirt complex sind.

Nehmen wir zum Beweise dieser Sätze zunächst an, die vier Wurzeln seien sämmtlich reell oder sämmtlich complex, so wird der Ausdruck

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2$$

nicht gleich Null werden können, wenn nicht mindestens drei Wurzeln gleich sind; denn in den übrigen Fällen bleibt der Ausdruck offenbar stets positiv.

Nimmt man dagegen an, es sei

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 \text{ und } x_4 = \gamma \pm \delta \sqrt{-1},$$

*) Man vergl. Clebsch, Theorie der binären algebraischeu Formen, § 21, sowie oben § 143, 7.

dann geht die Function über in

$$[\delta^2 + (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)]^2 - 3\delta^2(\alpha - \beta)^2,$$

und die quadratische Invariante verschwindet, wenn

$$\delta^2 + \sqrt{3}\,(\alpha - \beta)\,\delta + (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = 0$$

ist. Dass die angenommenen vier Wurzelformen, wenn sie dieser Gleichung genügen, äquianharmonisch zugeordnet sind, findet man leicht, indem man jene Werthe in die beiden Doppelverhältnisse einsetzt.

Erstlich ist

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4} = \frac{2(\alpha - \beta)\,\delta\sqrt{-1}}{(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) + (\alpha - \beta)\,\delta\sqrt{-1} - \delta^2},$$

und wenn man

$$(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) - \delta^2 = \sqrt{3}\,(\alpha - \beta)\,\delta$$

setzt, so erhält man den Werth $-J_2$. Das andere Doppelverhältniss wird gleich dem conjugirten Werthe $-J_1$; denn setzt man die angenommenen Wurzelwerthe ein, so resultirt

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{(\alpha - \gamma - \delta\sqrt{-1})(\beta - \gamma + \delta\sqrt{-1})}{(\beta - \gamma - \delta\sqrt{-1})(\alpha - \gamma + \delta\sqrt{-1})}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{-1}}{\sqrt{3} + \sqrt{-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -J_1.$$

Zu je zwei Wurzeln α, β und dem reellen Gliede γ der beiden übrigen Wurzeln gehören immer zwei Werthe von δ, nämlich

$$\delta = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) \pm \sqrt{\frac{3}{4}(\alpha - \beta)^2 - \alpha\beta + (\alpha + \beta)\,\gamma - \gamma^2}.$$

Nur der Fall

$$\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta - \frac{3}{4}(\alpha - \beta)^2 = 0$$

macht eine Ausnahme; alsdann ist

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm (\alpha - \beta),$$

also

$$\gamma_1 = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta$$

und

$$\delta = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta).$$

Wählt man den Werth $\gamma_1 = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, so sind die Elemente

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 \text{ und } x_4 = \frac{1}{2}(3\alpha - \beta) \mp (\alpha - \beta)\sqrt{-3};$$

im andern Falle

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 \text{ und } x_4 = \frac{1}{2}(-\alpha + 3\beta) \mp \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sqrt{-3}.$$

Wenn wie in dem angezogenen Zahlenbeispiele $\alpha = 2$, $\beta = 4$ ist, so sind äquianharmonisch zugeordnete Wurzeln die conjugirt complexen Paare

$$x_3 \text{ und } x_4 = 1 \pm \sqrt{-3},$$

und

$$x_3 \text{ und } x_4 = 5 \pm \sqrt{-3}.$$

Wählt man die dritte Wurzel verschieden von einem dieser Werthe, so sind die Coefficienten der Gleichungen nicht mehr reell, z. B.:

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 3, \ x_4 = 2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-3}.$$

Wenn das imaginäre δ gleich Null werden soll, so muss wegen

$$\delta^2 + \sqrt{3}\,(\alpha - \gamma)\,\delta + (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = 0$$

γ entweder gleich α oder gleich β sein; d. h. bei lauter reellen Wurzeln müssen drei Wurzeln gleich sein. Ist γ gleich Null, so sind zwei Wurzeln imaginär. Ein Zahlenbeispiel ist

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 \text{ und } x_4 = \pm\sqrt{-3}.$$

Ist endlich $\beta = \alpha$, so müssen $\delta = 0$ und $\gamma = \beta$, also wieder drei Wurzeln gleich sein. Da in diesem Falle die Invariante $\mathfrak{J}$ oder die Covariante $C_{3,2}(x_4)$ identisch verschwindet, so kann x_4 willkürlich angenommen werden.

Wenn man sich der Hülfsgleichung in z zur Transformation der Gleichungen bedient, wird man in den seltensten Fällen eine Transformirte erhalten, welche drei gleiche Wurzeln hat und zwar auch nur dann, wenn schon drei Wurzeln der Stammgleichung gleich sind. Man kann aber ohne Schwierigkeit eine jede Gleichung mit lauter verschiedenen Wurzeln in eine andere transformiren, welche drei gleiche Wurzeln hat; und zwar mittels der Gleichung ihrer halben Wurzelsummen und einer zweimaligen quadratischen Variation.

Denn seien die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5, \quad x = 7.$$

Nimmt man an die Variation sei $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = 3$, und quadrirt die variirten Wurzeln, so resultirt

$$x_1' = 4, \quad x_2' = 1, \quad x_3' = 4, \quad x_4' = 16.$$

Man bestimme nun die Gleichung der halben Wurzelsummen von

$$(x - 4)(x - 1)(x - 16) = 0$$

und setze $\zeta = \frac{1}{2}(x_3' + x_4') = 10$. Bildet man wiederum die Gleichung der Wurzelquadrate der mit ζ variirten biquadratischen Gleichung, so erhält man

$$x_1'' = 36, \quad x_2'' = 81, \quad x_3'' = 36, \quad x_4'' = 36.$$

Man kann diese Operation so beliebig weit fortsetzen.

(30) Wenn die Discriminante

$$D_4 = \frac{1}{27}[4(b^2 - 3ac + 12d)^3 - (72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3)^2]$$
$$= 256(\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{F}^2)$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, genügt dazu eine lineare Transformation nicht, aber eine quadratische. Denn wenn man den Factor $x_1 - x_2$ derselben durch z variirt, verschwindet z ganz aus der Function D_4. Lässt man dagegen $(x - z)^2$ an die Stelle von x treten, so verschwindet D_4, wenn man annimmt

$$(x_1' - x_2') = (x_1 - z)^2 - (x_2 - z)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2z) = 0.$$

Hieraus folgt

$$z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Da die Function D_4 im Ganzen aus sechs verschiedenen Factoren besteht, so wird die Resolvente in z bikubisch und ist identisch mit der Gleichung der halben Wurzelsummen XXIV. (§ 81.)

Um die Resolvente in z in exacter Form zu erhalten, müsste man die Reducente (30) in die Coefficienten der quadratisch variirten Stammgleichung einführen und die Discriminante nach Potenzen von z entwickeln. Man kommt offenbar leichter zum Ziele, wenn man die Gleichung der halben Wurzelsummen bildet. Im Uebrigen stimmt das Verfahren der Transformation vollkommen überein mit dem vorhin angegebenen, eine Gleichung derartig umzubilden, dass sie zwei gleiche Wurzeln erhält.

Aus der Relation

$$D_4 = 256(\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{F}^2)$$

folgt noch, dass, wenn die Gleichung drei gleiche Wurzeln hat, auch noch die kubische Invariante $\mathfrak{J}$ verschwinden muss. Wir untersuchen nun noch die Fälle, in denen die letztere für sich gleich Null wird.

(31). Wenn die Function

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{432}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3)$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, so genügt auch hier nicht eine lineare Variation, sondern nur die quadratische:

$$x^2 - 2zx + z^2 - x' = 0\,.$$

Die Resolvente wird vom sechsten Grade sein. Wenn man nämlich einen beliebigen Factor von $\mathfrak{J}$, z. B.

$$(x_2 - x_3)(x_4 - x_1) - (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$$

durch z variirt, so verschwindet z aus demselben gänzlich. Wird dagegen $(x - z)^2$ an die Stelle von x gesetzt, so verschwindet $\mathfrak{J}$ durch die Annahme

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 2z)(x_2 + x_4 - 2z)\\ &+ (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 2z)(x_1 + x_4 - 2z) = 0\,.\end{aligned}$$

Dieser Factor ist quadratisch und da die Function $\mathfrak{J}$ drei solche besitzt, so ist die Resolvente bikubisch. Dieselbe erhält man in Ausdrücken der Coefficienten a, b, c, d, indem man die Function

$$\mathfrak{J}' = 72\beta_1\delta_1 + 9\alpha_1\beta_1\gamma_1 - 27\gamma_1^2 - 27\alpha_1^2\delta_1 - 2\beta_1^3 = 0$$

nach Potenzen von z entwickelt.

Die Werthe von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ sind bereits unter (21) I. angeführt. Setzt man diese Werthe ein, so ist die Resolvente anscheinend vom zwölften Grade. Es werden jedoch die sechs ersten Glieder Null, so dass sie sich auf eine bikubische reducirt. Leichter kommt man freilich zum Ziele, wenn man die Sätze der symmetrischen Functionen auf das Product der drei quadratischen Factoren anwendet. Um dies zu bewerkstelligen, entwickle man die variirte Function nach Potenzen von z. Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
-(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) &= m_1 = -6\zeta_1\,,\\
-(x_3 - x_2)(x_1 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) &= m_2 = -6\zeta_2\,,\\
-(x_2 - x_1)(x_3 - x_4) - (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) &= m_3 = -6\zeta_3\,,\\
-(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_4^2) - (x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_4^2) &= n_1 = -6\zeta'_1\,,\\
-(x_3^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_4^2) - (x_1^2 - x_2^2)(x_3^2 - x_4^2) &= n_2 = -6\zeta'_2\,,\\
-(x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_4^2) - (x_3^3 - x_1^2)(x_2^2 - x_4^2) &= n_3 = -6\zeta'_3\,,
\end{aligned}$$

so sind dies die Wurzeln der Gleichungen

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0,$$
$$\zeta'^3 - \mathfrak{J}_2\zeta' + 2\mathfrak{F}_2 = 0.$$

Die bikubische Resolvente ist

$$m_1 m_2 m_3 (4z^2 + 2az)^3 + (m_1 m_2 n_3 + m_1 n_2 m_3 + n_1 m_2 m_3)(4z^2 + 2az)^2$$
$$+ (m_1 n_2 n_3 + n_1 m_2 n_3 + n_1 n_2 m_3)(4z_2 + 2az) + n_1 n_2 n_3 = 0,$$

durch welche die Invariante $\mathfrak{F}_u$ der Variirten zum Verschwinden gebracht wird. Die vier Coefficienten derselben sind symmetrische Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, nämlich

$$P = m_1 m_2 m_3 = 432\mathfrak{F},$$
$$Q = m_1 m_2 n_3 + m_1 n_2 m_3 + n_1 m_2 m_3 = 2(432 b\mathfrak{F} - 144\mathfrak{J}^2),$$
$$R = m_1 n_2 n_3 + n_1 m_2 n_3 + n_1 n_2 m_3 = \frac{1}{3}(4b^2.432\mathfrak{F} - 8b.144\mathfrak{J}^2 + 12\mathfrak{J}.432\mathfrak{F}),$$
$$S = n_1 n_2 n_3 = 432\mathfrak{F}_2$$
$$= \frac{1}{27}(8b^3.432\mathfrak{F} - 24b^2.144\mathfrak{J}^2 + 6b.12\mathfrak{J}.432\mathfrak{F} + 2.1728\mathfrak{J}^3 - 432^2\mathfrak{F}^2).$$

Der letzte Ausdruck ist die kubische Invariante der Gleichung der Wurzelquadrate von $f(x) = 0$.

Setzt man $4z^2 + 2az = y$, so wird die Resolvente kubisch und es folgt daraus das wichtige Theorem, dass sich jede biquadratische Gleichung so transformiren lässt, dass die kubische Invariante $\mathfrak{F}_u$ der transformirten Gleichung verschwindet und dass sich dies immer durch Auflösung einer kubischen Gleichung bewerkstelligen lässt. Die Resolvente XXX. der transformirten Gleichung wird dadurch auf die einfachere Form

$$\zeta(\zeta^2 - \mathfrak{J}_u) = 0$$

reducirt.

Man kann die kubische Gleichung in y auf die Form

$$P\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^3 + (Q - 2bP)\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^2$$
$$+ \left(R - \frac{4}{3}bQ + \frac{4}{3}b^2P\right)\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)$$
$$+ \left(S - \frac{2}{3}bR - \frac{8}{27}b^3P\right) = 0$$

bringen. Es wird daraus

$$432\mathfrak{F}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^3 - 2.144\mathfrak{J}^2\left(4z^2 + 2az + \frac{1}{2}b\right)^2$$
$$+ 4.432\mathfrak{J}\mathfrak{F}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right) + 128\mathfrak{J}^3 - 8.864\mathfrak{F}^2 = 0.$$

Setzt man $4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = 2\eta$, so wird sie

$$8\,C_{3,3}(\eta) = 432\,\mathfrak{F}\,\eta^3 - 144\,\mathfrak{J}^2\eta^2 + 432\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{J}\,\eta + 16\,\mathfrak{J}^3 - 864\,\mathfrak{F}^2 = 0,$$

nimmt also die Form der kubischen Covariante an von der Determinante

$$2\varDelta = \eta^3 - \mathfrak{J}\eta + 2\mathfrak{F}.$$

Das Absolutglied der nach Potenzen von z entwickelten Gleichung ist die kubische Invariante der Gleichung der Wurzelquadrate von $f(x) = 0$, nämlich

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{8}{27}(b^2\mathfrak{F} - b^2\mathfrak{J}^2 + 9b\mathfrak{J}\mathfrak{F} + \mathfrak{J}^3 - 54\mathfrak{F}^2$$

$$= \frac{1}{432}[-(b^2 - 2ac + 2d)^3 - 27(a^2 - 2b)^2d^2 - 27(c^2 - 2bd)^2$$
$$+ (9a^2 - 2b)(b^2 - 2ac + 2d)(c^2 - 2bd) + 72(b^2 - 2ac + 2d)d^2].$$

Die Discriminante der kubischen Gleichung in η ist

$$\varDelta_3 = -\frac{4\,D_4{}^3}{48^6\,\mathfrak{F}^4}.$$

Die Gleichung lässt sich umformen in

$$(9\mathfrak{F}\eta - \mathfrak{J}^2)^3 - 3\mathfrak{J}\frac{D_4}{256}(9\mathfrak{F}\eta - \mathfrak{J}^2) - 2\frac{D_4{}^2}{256^2} = 0.$$

Beispiel. Es sei

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \sqrt{5} + 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = \sqrt{7} + 1.$$

Die eine quadratische Gleichung in z hat eine Wurzel 1, woraus folgt

$$x_1' = 1, \quad x_2' = 5, \quad x_3' = 4, \quad x_4' = 7.$$

Schreibt man diese Werthe in ihrer natürlichen Reihenfolge

$$1, \quad 4, \quad 5, \quad 7,$$

so sind dies offenbar vier harmonische Puncte auf der Abscissenaxe, und es ist

$$\frac{x_2' - x_3'}{x_1' - x_3'} : \frac{x_2' - x_4'}{x_1' - x_4'} = -1.$$

Durch die Reducente (31) wird nun überhaupt das Coordinatensystem derartig verändert, dass die vier Wurzeln der variirten Gleichung einander **harmonisch zugeordnet** sind, d. h. dass eines der Doppelverhältnisse, z. B.

$$\frac{x_1' - x_3'}{x_2' - x_3'} : \frac{x_1' - x_4'}{x_2' - x_4'} = -1$$

wird. Die beiden andern nehmen dann die Werthe 2 und $\frac{1}{2}$ an. Es folgt dies aus der Beschaffenheit der drei Factoren der Function:

$$- (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - (x_2 - x_3)(x_1 - x_4),$$
$$- (x_3 - x_2)(x_1 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$
$$- (x_2 - x_1)(x^3 - x_4) - (x_3 - x_1)(x_2 - x_4).$$

Angenommen, der erste sei gleich Null, wenn die kubische Invariante $\mathfrak{J}$ verschwindet. Dann ist zunächst

$$\text{I.} \quad \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = -1.$$

Zufolge der identischen Gleichung

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = - \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} + 1$$

ist

$$\text{II.} \quad \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} = 2,$$

und wenn man I. durch II. dividirt,

$$\text{III.} \quad \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_4)} = \frac{1}{2}.$$

Die übrigen Permutationen der Wurzeln geben keine neuen Werthe und es ist dieser Fall von dem vorigen charakteristisch dadurch unterschieden, dass dort zweimal drei, hier dreimal zwei Doppelverhältnisse gleich werden.

Es ist in § 143, 7 gezeigt worden, dass wenn drei der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, z. B. die drei ersten, die Wurzeln einer kubischen Gleichung sind, in diesem Falle das vierte Element x_4 eine Wurzel der kubischen Covariante

$$C_{3,3}(z) = 0$$

sei. Es gibt demnach immer drei Elemente, welche mit drei gegebenen ein harmonisches Doppelverhältniss bilden. Wenn die Wurzel der kubischen Covariante mit den drei Wurzeln ihrer kubischen Stammgleichung eine biquadratische bildet, so geht die kubische Covariante $C_{3,3}(x_4)$ über in die kubische Invariante $432\mathfrak{J}$ und verschwindet zugleich. In allen andern Fällen ist aber

$$\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{J}^2 = \frac{1}{256} D_4.$$

Es ist nämlich gemäss § 143, 6

$$4C_{3,2}^3(z) - C_{3,3}^2(z) = -27 D_3 f^2(z),$$

worin

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$
$$= z^3 - (x_1 + x_2 + x_3)z^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)z - x_1 x_2 x_3$$

bedeutet. Wird $z = x_4$ gesetzt, so gehen die beiden Covarianten der Gleichungen dritten Grades in die Invarianten der Gleichung vierten Grades über, d. h. es wird

$$C_{3,2}(x_4) = 12\mathfrak{J}, \quad C_{3,3}(x_4) = 432\mathfrak{J},$$

also

$$\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{J}^2 = -\frac{1}{256} D_3 f^2(x_4).$$

Nun ist

$$D_3 = -(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$$

und

$$f^2(x_4) = [x_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x_4^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) x_4 - x_1 x_2 x_3]^2$$
$$= (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2,$$

folglich

$$\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{J}^2 = \frac{1}{256} D_4 .$$

Es hat durchaus keine Schwierigkeit, alle die hier betrachteten Verhältnisse auf die Gleichung der Cayley'schen Form

$$(a, b, c, d, e\widehat{)\,(}x, y)^4 = 0$$

zu übertragen, indem man nur zu setzen braucht

$$x = \frac{x}{y}, \quad a = \frac{4b}{a}, \quad b = \frac{6c}{a}, \quad c = \frac{4d}{a}, \quad d = \frac{e}{a}.$$

5. Die Varianten und Retrovarianten.

Diese Constanten sind bereits in § 17 allgemein entwickelt. Wir berücksichtigen hier nur diejenigen, welche der Cayley'schen Form

$$f(x) = (a, b, c, d, e\widehat{)\,(}x, 1)^4 = 0$$

angehören. Zur Fortschaffung des zweiten Gliedes der Function bedarf es der linearen Variation $z = -\frac{b}{a}$, wodurch $x = x' - \frac{b}{a}$, also $ax' = ax + b$ wird. Für die biquadratische Gleichung ist die Transformirte

$$a^3 f(x) = (ax + b)^4 - \binom{4}{2} V_2(ax + b)^2 + \binom{4}{3} V_3(ax + b) - V_4 = 0.$$

Die Varianten sind für alle Ordnungsexponenten dieselben und zwar

$V_2 = b^2 - ac$, (quadratische Variante),
$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d$, (kubische Variante),
$V_4 = 3b^4 - 6ab^2 c + 4a^2 bd - a^3 e$, (biquadratische Variante).

Zur Fortschaffung des vorletzten Gliedes dividire man die Gleichung durch x^4, ordne die Glieder entgegengesetzt und substituire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} - \frac{d}{e}, \quad \frac{e}{x'} = \frac{e}{x} + d.$$

Die Transformirte ist alsdann

$$e^3 f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{e}{x} + d\right)^4 - \binom{4}{2} V'_{2,4}\left(\frac{e}{x} + d\right)^2 + \binom{4}{3} V'_{3,4}\left(\frac{e}{x} + d\right) - V'_{4,4} = 0$$

und

$V'_{2,4} = d^2 - ce$, (quadratische Retrovariante),
$V'_{3,4} = 2d^3 - 3cde + e^2 b$, (kubische Retrovariante),
$V'_{4,4} = 3d^4 - 6ed^2 c + 4e^2 db - e^3 a$, (biquadratische Retrovariante).

Geht man von der gewöhnlichen Form der Gleichung aus, so wird

$$V_2 = \frac{1}{48}(3a^2 - 8b),$$
$$V_3 = \frac{1}{32}(a^3 - 4ab + 8c),$$
$$V_4 = \frac{1}{256}(3a^4 - 16a^2 b + 64ac - 256d),$$
$$V'_{2,4} = \frac{1}{48}(3c^2 - 8d),$$
$$V'_{3,4} = \frac{1}{32}(c^3 - 4bcd + 8ad^2),$$
$$V'_{4,4} = \frac{1}{256}(3c^4 - 16bc^2 d + 64acd^2 - 256d^3).$$

6. Die Invarianten und die Discriminante. (§§ 52 bis 54.)

Die biquadratische Gleichung hat drei Invarianten, $J_{4,2}$, $J_{4,3}$ und $J_{4,6}$, von welchen die letzte zugleich die Discriminante $\overline{D_4}$ ist. Es ist

$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2$, (quadratische Invariante),

$$J_{4,3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$
(kubische Invariante),

$J_{4,6} = J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2 = \overline{D_4}$, (Discriminante).

Zwischen den Varianten und Invarianten finden folgende Relationen statt:

$$
\begin{aligned}
-a^2(V_2 J_{4,2} + a J_{4,3}) &= V_3{}^2 - 4 V_2{}^3, \\
-e^2(V'_{2,4} J_{4,2} + e J_{4,3}) &= V'^2_{3,4} - 4 V'^3_{2,4}, \\
a^2 J_{4,2} &= - V_4 + 3 V_2{}^2, \\
a^3 J_{4,3} &= V_2{}^3 - V_3{}^2 + V_2 V_4, \\
e^2 J_{4,2} &= - V'_{4,4} + 3 V'_{2,4}, \\
e^3 J_{4,3} &= V'^3_{2,4} - V'^2_{3,4} + V'_{2,4} V'_{4,4}.
\end{aligned}
$$

Zwischen den Invarianten der biquadratischen Gleichungen und denen niedriger Grade gelten die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
J_{4,2} &= (J_{3,4} + a J_{4,3}) : J_{2,2}, \\
J_{4,3} &= (J_{2,2} \,.\, J_{4,2} - J_{3,4}) : a\,.
\end{aligned}
$$

Wie sich der Werth der Invariante $J_{4,6}$ aus den beiden Covarianten der kubischen Gleichung ableiten lässt, ist oben gezeigt worden; wir wiederholen dasselbe hier mit Rücksicht auf die Cayley'sche Form

$$U = (a, b, c, d, e \,\widehat{)\,(} x, 1)^4.$$

Nach Clebsch's Bezeichnung ist nämlich

$$\varDelta^3 = -2\left(Q^2 + \frac{1}{2} R f^2\right),$$

und nach der von uns angenommenen Bezeichnungsweise

$$-4\, C^3_{3,2}(z) = C^2_{3,3}(z) - \overline{D}_3 f^2(z),$$

wo

$$f(z) = \alpha z^3 + 3\beta z^2 + 3\gamma z + \delta$$

ist, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ symmetrische Functionen der drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 von $f(z) = 0$. Durch das Hinzutreten der Wurzel $z = x_4$ möge die Function f übergehen in

$$U = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

alsdann wird

$$-4 C^3_{3,2}(x_4) = \frac{256}{27} J^3_{4,2}, \quad C^2_{3,3}(x_4) = 256 J^2_{4,3}.$$

Ferner ist

$$\overline{D}_3 = -\frac{a^4}{3^3}(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2,$$

folglich

$$J^3_{4,2} - 27 J^2_{4,3} = \frac{1}{4^4} a^6 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \left(x_4{}^3 + 3\frac{\beta}{a} x_4{}^2 + 3\frac{\gamma}{a} x_4 + \frac{\delta}{a}\right)^2$$

und wegen

$$\left(x_4^3 + 3\,\frac{\beta}{\alpha}\,x_4^2 + 3\,\frac{\gamma}{\alpha}\,x_4 + \frac{\delta}{\alpha}\right)^2 = (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2,$$

schliesslich

$$J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2 = \overline{D_4} \quad (\S\ 21).$$

Geht man von der gewöhnlichen Form der Gleichung aus, so ist

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12}(b^2 - 3ac + 12d),$$

$$\mathfrak{J}' = \frac{1}{432}(72bd + 9abc - 27a^2d - 27c^2 - 2b^3),$$

$$D_4 \doteq 256\,(\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{J}'^2).$$

Cayley hat gezeigt, dass die Discriminante $\overline{D_4}$ sich zurückführen lässt auf die sogenannte $\varDelta$-Determinante von Aronhold

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & b, & c + 2\lambda, \\ b, & c - \lambda & d \\ c + 2\lambda, & d, & e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\varDelta = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0,$$

welche als die Cardinalresolvente der biquadratischen Gleichung betrachtet werden kann, da sich alle übrigen auf sie zurückführen lassen. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln derselben, so findet man leicht

$$16(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 = J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2 = \overline{D_4}.$$

Die Discriminante ist von Wichtigkeit für die Prüfung der Wurzeln auf ihre Reellität und Gleichheit. Ist nämlich

a) $\overline{D_4} > 0$, so sind die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung entweder alle reell oder alle complex;

b) $\overline{D_4} < 0$, so sind zwei Wurzeln reell und die übrigen conjugirt complex;

c) $\overline{D_4} = 0$, so ist wenigstens ein Paar Wurzeln gleich, das andere Paar entweder reell oder complex.

Unter steter Voraussetzung reeller Coefficienten der vorgelegten Gleichung seien die Wurzeln

$$1)\quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \alpha_2, \quad x_3 = \alpha_3, \quad x_4 = \alpha_4;$$

dann ist (§ 21)

$$\frac{4^4}{a^6}\cdot\overline{D}_4=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2,$$

d. h. positiv;

2) x_1 und $x_2=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, x_3 und $x_4=\gamma\pm\delta\sqrt{-1}$;
dann ist

$$\frac{4^4}{a^6}\cdot\overline{D}_4=\beta^2\delta^2[(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2]^2\times[(\alpha-\gamma)^2+(\beta+\delta)^2]^2,$$

d. h. ebenfalls positiv;

3) $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, x_3 und $x_4=\gamma\pm\delta\sqrt{-1}$;
dann ist

$$\frac{4^4}{a^6}\cdot\overline{D}_4=-(\alpha_1-\alpha_2)^2\delta^2[(\alpha_1-\gamma)^2+\delta^2]^2\times[(\alpha_2-\gamma)^2+\delta^2]^2,$$

d. h. negativ;

4) $x_1=x_2=\alpha_1$, x_3 und $x_4=\gamma\pm\delta\sqrt{-1}$;
dann ist $\overline{D}_4=0$.

7. Die Covarianten der biquadratischen Form.

Gehen wir aus von der Cayley'schen Form

$$f=(a,b,c,d,e\widehat{)\,(}x,y)^4,$$

so hat diese nach den in § 57 gemachten Entwickelungen zwei Covarianten, und zwar eine biquadratische $C_{4,4}$ und eine bikubische $C_{4,6}$. Dieselben sind

$$\begin{aligned}C_{4,4}&=(ac-b^2)x^4+2(ad-bc)x^3y+(ae+2bd-3c^2)x^2y^2\\&\quad+2(be-cd)xy^3+(ce-d^2)y^4,\\C_{4,6}&=(2b^3-3abc+a^2d)x^6+(6b^2c+2abd-9ac^2+a^2e)x^5y\\&\quad+5(2b^2d-3acd+abe)x^4y^2\begin{array}{l}+10(b^2e-ad^2)x^3y^3\\-10(ad^2-b^2c)x^3y^3\end{array}\\&\quad-5(2bd^2-3bce+ade)x^2y^4-(6cd^2+2bde-9ec^2+e^2a)xy^5\\&\quad-(2d^3-3cde+be^2)y^6.\end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Covarianten und der Function f findet folgende bemerkenswerthe von Cayley entdeckte Relation statt:

$$C_{4,6}^2=-4C_{4,4}^3+J_{4,2}\,.\,C_{4,4}\,.\,f^2-J_{4,3}\,.\,f^3.$$

Dieselbe erinnert durch ihre Gestalt sehr an die Relation zwischen den Covarianten der kubischen Form:

$$C_{3,3}^2=-4C_{3,2}^3+\overline{D}_3f^2.$$ [p. 522]

Die Covarianten lassen sich in Varianten ausdrücken, wenn man substituirt

$$a\frac{x}{y} = \xi - b.$$

Dadurch wird

$$-\frac{a^4}{y^4} C_{4,4} = V_2\xi^4 - 2V_3\xi^3 + (V_4 + 3V_2^2)\xi^2 - 2V_2V_3\xi + (V_3^2 - V_2V_4),$$

$$\frac{a^6}{y^6} C_{4,6} = V_3\xi^6 - (V_4 + 9V_2^2)\xi^5 + 15V_2V_3\xi^4 - 10V_3^2\xi^3 + V_3V_4\xi^2$$
$$- [V_4(V_4 + 9V_2^2) - 6V_3^2 V_2]\xi - (2V_3^3 - 3V_2V_3V_4).$$

Nach Hesse*) ist die Gleichung $C_{4,6}(z) = 0$ eine bikubische Resolvente, deren Wurzeln die Eigenschaft besitzen, dass je vier und vier in einer harmonischen Beziehung zu einander stehen, so dass man hat für die drei Punctepaare

$$z_1\zeta_1, \quad z_2\zeta_2, \quad z_3\zeta_3:$$

$$\frac{z_3 - z_2}{\zeta_3 - z_2} : \frac{z_3 - \zeta_2}{\zeta_3 - \zeta_2} = -1,$$

$$\frac{z_1 - z_3}{\zeta_1 - z_3} : \frac{z_1 - \zeta_3}{\zeta_1 - \zeta_3} = -1,$$

$$\frac{z_2 - z_1}{\zeta_2 - z_1} : \frac{z_2 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = -1.$$

Geht man aus von der gewöhnlichen Form

$$f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so nehmen die beiden Covarianten folgende Gestalt an:

$$3C_{4,4}(z) = (3a^2 - 8b)z^4 + 4(ab - 6c)z^3 + 2(2b^2 - 3ac - 24d)z^2$$
$$+ 4(bc - 6ad)z + (3c^2 - 8bd),$$

$$C_{4,6}(z) = (a^3 - 4ab + 8c)z^6 + 2(a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)z^5$$
$$+ 5(a^2c + 8ad - 4bc)z^4 + 20(a^2d - c^2)z^3$$
$$- 5(ac^2 - 4abd + 8cd)z^2 - 2(bc^2 + 2acd - 4b^2d + 16d^2)z$$
$$- (c^3 - 4bcd + 8ad^2),$$

und ausserdem ist

$$C_{4,6}^2 = C_{4,4}^3 - 64J \,.\, C_{4,4} \,.\, f^2 - 1024 J f^3.$$

Die Covariante $C_{4,6}$ lässt sich immer in drei quadratische Factoren zerlegen. Geht man nämlich aus von der Gleichung

$$C_{4,6}^2 = -4C_{4,4}^3 + J_{4,2} \,.\, C_{4,4} \,.\, f^2 - J_{4,3} f^3,$$

so ist ersichtlich, dass sich die rechte Seite in drei biquadratische

*) Crelle's Journ. Bd. 41. p. 259.

Factoren zerlegen lässt. Um diese zu erhalten, löse man die kubische Gleichung

$$C_{4,4}^3 - \frac{1}{4} J_{4,2} f^2 . C_{4,4} + \frac{1}{4} J_{4,3} f^3 = 0$$

nach der in § 188 entwickelten Methode oder auch mit Hülfe der Cardanischen Formel auf. Man findet

$$C_{4,4} = \frac{1}{2} f \cdot \left[\sqrt[3]{1} \sqrt[3]{-J_{4,3} + \frac{1}{9}\sqrt{-3 D_4}} + \sqrt[3]{1}^2 \sqrt[3]{-J_{4,3} - \frac{1}{9}\sqrt{-3 D_4}} \right]$$
$$= \frac{1}{2} f \cdot \left(\sqrt[3]{1} . A + \sqrt[3]{1}^2 . B \right) = \lambda f,$$

wo λ einen Wurzelwerth der $\varDelta$-Determinante von Aronhold bezeichnet. Die drei Wurzeln der kubischen Gleichung sind demzufolge

$$\lambda_1 f = \frac{1}{2} f(A + B),$$

$$\lambda_2 f = \frac{1}{2} f(J_1 A + J_2 B),$$

$$\lambda_3 f = \frac{1}{2} f(J_2 A + J_1 B).$$

Daraus geht denn hervor, dass

$$C_{4,6}^2 = -4 (C_{4,4} - \lambda_1 f)(C_{4,4} - \lambda_2 f)(C_{4,4} - \lambda_3 f)$$

ist, und diese Gleichung lehrt, dass das Product das vollständige Quadrat eines Ausdrucks von der sechsten Ordnung ist. Aber keiner der drei biquadratischen Factoren hat im Allgemeinen mit den beiden übrigen einen linearen Factor gemein, da sonst auch f und $C_{4,4}$ denselben gemein haben müssten. Daher muss jeder der biquadratischen Factoren an und für sich das vollständige Quadrat eines Ausdrucks von der zweiten Ordnung sein und man kann also drei quadratische Formen φ, ψ, χ finden*), so dass

$$C_{4,4} - \lambda_1 f = -\varphi^2,$$
$$C_{4,4} - \lambda_2 f = -\psi^2,$$
$$C_{4,4} - \lambda_3 f = -\chi^2,$$

und

$$C_{4,6} = 2 \varphi \psi \chi$$

ist, wobei die Factoren φ, ψ, χ ein doppeltes Vorzeichen haben.

---

*) Hesse, Transformation einer homogenen Function vierten Grades. Crelle's Journ. XLI. S. 253. 1851.

Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen § 44. 1872.

Um die Coefficienten der Function φ zu bestimmen, beachte man, dass, wenn K eine Form vierter Ordnung ist, von welcher man weiss, dass sie das Quadrat einer quadratischen Form φ ist, man die Coefficienten zu berechnen haben wird aus den Gleichungen

$$K = az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e\,,$$
$$\varphi = \alpha z^2 + 2\beta z + \gamma\,.$$

Daraus ergibt sich durch Gleichsetzung homologer Coefficienten

$$a = \alpha^2\,,\quad b = \alpha\beta\,,\quad c = \frac{1}{3}(\alpha\gamma + 2\beta^2)\,,$$
$$d = \beta\gamma\,,\quad e = \gamma^2\,.$$

Man kann dann aus der ersten Relation α durch Wurzelausziehung berechnen und darauf aus der zweiten β, aus der dritten γ rational durch α und die Coefficienten von K ausdrücken.

Man bilde nun von der $\varDelta$-Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & b, & c+2\lambda \\ b, & c-\lambda, & d \\ c+2\lambda, & d, & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d, & e, & c+2\lambda \\ b, & c+2\lambda, & a \\ c-\lambda, & d, & b \end{vmatrix}$$
$$= -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0$$

die partiellen Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right) = \begin{vmatrix} c-\lambda, & d \\ d, & e \end{vmatrix} = d^2 - ce + e\lambda\,,$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right) = 2\begin{vmatrix} d, & e \\ b, & c+2\lambda \end{vmatrix} = -2(cd - be + 2d\lambda)\,,$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\right) = -(ae + 2bd - 3c^2 - 6c\lambda)\,,$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right) = 2\begin{vmatrix} c+2\lambda, & d \\ a, & b \end{vmatrix} = -2(bc - ad + 2b\lambda)\,,$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right) = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix} = b^2 - ac + a\lambda\,.$$

Bedeuten ferner $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die drei Wurzeln der Determinante $\varDelta = 0$, so ist

$$\varphi^2 = \lambda_1 f(z) - C_{4,4}(z) = (b^2 - ac + a\lambda_1)z^4 + 2(bc - ad + 2b\lambda_1)z^3$$
$$+ (3c^2 - 2bd - ae + 6c\lambda_1)z^2 + 2(cd - be + 2d\lambda_1)z$$
$$+ (d^2 - ce + e\lambda_1) = (\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma)^2\,;$$

folglich

$$\varphi = \sqrt{\lambda_1 f(z) - C_{4,4}(z)} = \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}\,.\,z^2 + \frac{bc - ad + 2b\lambda_1}{\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}}\,z$$
$$+ \frac{(cd - be + 2d\lambda_1)\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}}{bc - ad + 2b\lambda_1}$$

oder

$$\varphi\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} = (b^2 - ac + a\lambda_1)z^2 + (bc - ad + 2b\lambda_1)z$$
$$+ \frac{(cd - be + 2d\lambda_1)(b^2 - ac + a\lambda_1)}{bc - ad + 2b\lambda_1}\,.$$

Analog werden nun auch die Ausdrücke für ψ und χ gebildet, indem man nacheinander λ_2 und λ_3 an die Stelle von λ_1 treten lässt. Multiplicirt man die drei entstehenden Gleichungen mit einander, so wird das Product sein

$$\frac{1}{2} V_3 \varphi\psi\chi = \frac{1}{4} V_3 C_{4,6} = \frac{1}{4} V_3^2 [z^6]\,.$$

Bei der geometrischen Discussion der kubischen Retrovariante als Reducente (21) II. ist bereits gezeigt worden, in welcher Beziehung die Grösse z zu gewissen symmetrischen Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der Gleichung $f(x) = 0$ steht. Für die Cayley'sche Form lässt sich darnach der Ausdruck $\frac{32}{a^3} C_{4,6}(z)$ in folgende quadratische Factoren zerlegen:

$$-(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)z^2 + 2(x_1x_2 - x_3x_4)z$$
$$- [x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)]\,,$$
$$-(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)z^2 + 2(x_1x_3 - x_2x_4)z$$
$$- [x_1x_3(x_2 + x_4) - x_2x_4(x_1 + x_3)]\,,$$
$$-(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)z^2 + 2(x_1x_4 - x_2x_3)z$$
$$- [x_1x_4(x_2 + x_3) - x_2x_3(x_1 + x_4)]\,.$$

Addirt man die Viertel dieser drei Ausdrücke und bezeichnet x_1 allgemein mit x, so erhält man

$$-\left(x + \frac{b}{a}\right)z^2 - \left(x^2 + \frac{4b}{a}x + \frac{3c}{a}\right)z + \left(\frac{d}{a} + \frac{e}{ax}\right)$$
$$= -\left(x + \frac{b}{a}\right)z^2 + \left(\frac{3c}{a} + \frac{4d}{ax} + \frac{e}{ax^2}\right)z + \left(\frac{d}{a} + \frac{e}{ax}\right).$$

Da nun die quadratischen Factoren der Reihe nach

$$\mp\frac{4\varphi}{a}, \quad \mp\frac{4\psi}{a}, \quad \mp\frac{4\chi}{a}$$

sind, so ist offenbar

$$\mp\varphi\mp\psi\mp\chi = -(ax+b)z^2-(ax^2+4bx+3c)z+\left(d+\frac{e}{x}\right)$$
$$=\frac{(ax+b)z^3+3(bx+c)z^2+3(cx+d)z+(dx+e)}{x-z}.$$

Für die binäre biquadratische Form

$$(a,b,c,d,e)\widehat{}(x,y)^4$$

würde man erhalten

$$\mp\varphi\mp\psi\mp\chi=\frac{1}{4}\,\frac{x\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{z,1}+y\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{z,1}}{x-zy}.$$

Hesse hat bewiesen, dass die sechs Wurzeln der Gleichung

$$C_{4,6}(z)=0$$

die Eigenschaft besitzen, dass je vier und vier von ihnen einander harmonisch zugeordnet sind (§ 217, 7). Solcher Combinationen gibt es offenbar drei, nämlich

$$(\varphi,\psi)\,,\quad(\varphi,\chi)\,,\quad(\psi,\chi)\,.$$

Um zu zeigen, dass z. B. die vier Wurzeln der ersten beiden quadratischen Factoren

$$z^2-2\frac{x_1x_2-x_3x_4}{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)}z-\frac{x_3x_4(x_1+x_2)-x_1x_2(x_3+x_4)}{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)}=0\,,$$
$$z^2-2\frac{x_1x_3-x_2x_4}{(x_1+x_3)-(x_2+x_4)}z-\frac{x_2x_4(x_1+x_3)-x_1x_3(x_2+x_4)}{(x_1+x_3)-(x_2+x_4)}=0\,,$$

einander harmonisch zugeordnet sind, berücksichtige man, dass nach § 217, 3 die Gleichung von vier harmonischen Puncten z_1, z_2, z_3, z_4 von der Form

$$(z^2+2uz+uv+p)(z^2+2vz+uv-p)=0$$

ist. Sind die vier Werthe z_1, z_2, z_3, z_4 Wurzeln der Gleichung

$$(z^2+mz+q)(z^2+nz+r)=0\,,$$

so muss die Bedingung

$$mn=2(q+r)$$

erfüllt sein. Wegen der Identität

$$\begin{aligned}(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)\\ =2[x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)][(x_1+x_3)-(x_2+x_4)]\\ +2[x_1x_3(x_2+x_4)-x_2x_4(x_1+x_3)][(x_1+x_2)-(x_3+x_4)]\end{aligned}$$

findet aber in der That die obige Beziehung statt.

Nimmt man an, die drei möglichen biquadratischen Factoren der Gleichung $C_{4,6}(z) = 0$ seien

$$\alpha_1 z^4 + 4\beta_1 z^3 + 6\gamma_1 z^2 + 4\delta_1 z + \varepsilon_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1 \widehat{)\,(} z, 1)^4,$$
$$\alpha_2 z^4 + 4\beta_2 z^3 + 6\gamma_2 z^2 + 4\delta_2 z + \varepsilon_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2 \widehat{)\,(} z, 1)^4,$$
$$\alpha_3 z^4 + 4\beta_3 z^3 + 6\gamma_3 z^2 + 4\delta_3 z + \varepsilon_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \varepsilon_3 \widehat{)\,(} z, 1)^4,$$

so muss für jede von ihnen die kubische Invariante verschwinden, d. h.

$$J_{4,3}(z) = {}^{+}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{vmatrix}_{+} = 0$$

sein und nach § 217, 4 somit auch die kubische Retrovariante

$$V'_{3,4} = 2\delta^3 - 3\gamma\delta\varepsilon + \varepsilon^2\beta$$

verschwinden.

In anderer Weise lässt sich noch leicht zeigen, dass

$$(eb^2 - d^2a)\, C_{4,6}(z)$$

gleich ist dem Producte aus folgenden drei quadratischen Factoren:

$$(bc - ad + 2b\lambda_1)z^2 + \frac{(bc - ad + 2b\lambda_1)^2}{b^2 - ac + a\lambda_1} z + (cd - be + 2d\lambda_1),$$
$$(bc - ad + 2b\lambda_2)z^2 + \frac{(bc - ad + 2b\lambda_2)^2}{b^2 - ac + a\lambda_2} z + (cd - be + 2d\lambda_2),$$
$$(bc - ad + 2b\lambda_3)z^2 + \frac{(bc - ad + 2b\lambda_3)^2}{b^2 - ac + a\lambda_3} z + (cd - be + 2d\lambda_3).$$

Wegen der Relation

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right) = 0$$

kann man übrigens jenen quadratischen Factoren vielerlei verschiedene Formen geben, wie später gezeigt werden soll. Bei der Multiplication derselben mit einander ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned}
&(bc - ad + 2b\lambda_1)(bc - ad + 2b\lambda_2)(bc - ad + 2b\lambda_3) \\
&\qquad = (eb^2 - d^2a)\, V_3, \\
&4(b^2 - ac + a\lambda_1)(b^2 - ac + a\lambda_2)(b^2 - ac + a\lambda_3) = V_3^2, \\
&(cd - be + 2d\lambda_1)(cd - be + 2d\lambda_2)(cd - be + 2d\lambda_3) \\
&\qquad = (ad^2 - b^2e)\, V'_{3,4}, \\
&4(d^2 - ec + e\lambda_1)(d^2 - ec + e\lambda_2)(d^2 - ec + e\lambda_3) = V'^2_{3,4}.
\end{aligned}$$

Es gibt einen speciellen Fall, in welchem die bikubische Covariante $C_{4,6}$ sich auf eine biquadratische reducirt, wenn nämlich

$$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d = 0$$

wird, d. h. wenn die Wurzeln eine arithmetische Proportion bilden. In diesem Falle verschwindet einer der drei quadratischen Factoren identisch. Um die Form der Covariante für diesen Fall zu erhalten, setzen wir in

$$\Pi \frac{C_{4,6}}{y^6} = \Pi \left[V_3 \frac{x^6}{y^6} + (6b^2c + 2abd - 9ac^2 + a^2e) \frac{x^5}{y^5} + \cdots \right]$$

z an die Stelle von $\frac{x}{y}$; das gibt

$$\Pi \frac{C_{4,6}}{y^6} = -\frac{1}{8} \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_{\lambda_1} \cdot \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_{\lambda^2} \cdot \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_{\lambda_3} + \cdots$$

Ferner setzen wir hier ξ an die Stelle von $az + b$, woraus, wie bereits oben gezeigt worden ist, resultirt

$$\frac{a^6}{y^6} C_{4,6} = V_3 \xi^6 - (V_4 + 9V_2^2)\xi^5 + 15 V_2 V_3 \xi^4 - 10 V_3^2 \xi^3 + V_3 V_4 \xi^2$$
$$- [V_4(V_4 + 9V_2^2) - 6V_3^2 V_2]\xi - (2V_3^3 - 3V_2 V_3 V_4).$$

Ist nun $V_3 = 0$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\frac{a^6}{y^6} C_{4,6} = -(V_4 + 9V_2^2)\xi(\xi^4 + V_4).$$

Für den Fall, dass $C_{4,6} = 0$ wird, reducirt sich die Resolvente auf die binomische Gleichung

$$\xi^4 + V_4 = 0,$$

oder

$$(az + b)^4 + V_4 = 0.\text{*)}$$

Ist nun λ_3 derjenige Wurzelwerth von $\varDelta = 0$, bei welchem der eine quadratische Factor von $C_{4,6}$ verschwindet, so sind die beiden andern

$$z^2 + \frac{bc - ad + 2b\lambda_1}{b^2 - ac + a\lambda_1} z + \frac{cd - be + 2d\lambda_1}{bc - ad + 2b\lambda_1}$$

und

$$z^2 + \frac{bc - ad + 2b\lambda_2}{b^2 - ac + a\lambda_2} z + \frac{cd - be + 2d\lambda_2}{bc - ad + 2b\lambda_2}$$

diejenigen, in welche jene binomische Gleichung in z zerfällt. Die biquadratische Covariante geht in diesem Falle über in

$$C_{4,4} = -\frac{y^4}{a^4}[V_2\xi^4 + (V_4 + 3V_2^2)\xi^2 - V_2 V_4].$$

---

*) Man vergleiche diese Verhältnisse bei den Covarianten der kubischen Gleichung § 143, 6.

Setzen wir $y = 1$, gehen also aus von der Form

$$f = (a, b, c, d, e \widehat{)} (x, 1)^4,$$

so sind die Covarianten derselben, die Function selbst mit eingeschlossen:

$$\text{I.}\quad a^3 f(x) = (ax+b)^4 - \binom{4}{2} V_2 (ax+b)^2 + \binom{4}{3} V_3 (ax+b) - V_4,$$

$$\begin{aligned} \text{II.}\quad - a^4 C_{4,4} = {} & V_2 (ax+b)^4 - 2 V_3 (ax+b)^3 \\ & + (V_4 + 3 V_2^2)(ax+b)^2 - 2 V_2 V_3 (ax+b) + (V_3^2 - V_2 V_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III.}\quad a^6 C_{4,6} = {} & V_3 (ax+b)^6 - (V_4 + 9 V_2^2)(ax+b)^5 \\ & + 15 V_2 V_3 (ax+b)^4 - 10 V_3^2 (ax+b)^3 + V_3 V_4 (ax+b)^2 \\ & - [V_4 (V_4 + 9 V_2^2) - 6 V_3^2 V_2](ax+b) - (2 V_3^2 - 3 V_2 V_3 V_4). \end{aligned}$$

Wendet man auf diese drei Gleichungen die Relation

$$C_{4,6}^2 + 4 C_{4,4}^3 = J_{4,2} C_{4,4} f^2 - J_{4,3} f^3$$

an, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} V_3^2 - 4 V_2^3 &= - a^2 J_{4,2} V_2 - a^3 J_{4,3}, \\ - V_4 + 3 V_2^2 &= a^2 J_{4,2}, \\ V_2 V_4 - V_3^2 + V_2^3 &= a^3 J_{4,3}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} V_4 &= - a^2 J_{4,2} + 3 V_2^2 = - a^2 J_{4,2} + 3 J_{2,2}^2, \\ V_3 &= \sqrt{4 V_2^3 - a^2 V_2 J_{4,2} - a^3 J_{4,3}} = \sqrt{-4 J_{2,2}^3 + a^2 J_{2,2} J_{4,2} - a^3 J_{4,3}}, \\ V_2 &= - J_{2,2}. \end{aligned}$$

Demnach lassen sich die drei Varianten ganz allein durch Invarianten ausdrücken.

Wenn die Covariante $C_{4,6}(z)$ verschwindet, so werden die drei quadratischen Factoren einzeln gleich Null und es gibt also drei Wurzelpaare von z. Man kann alsdann die bikubische Gleichung leicht durch kubische ersetzen, deren Wurzeln die arithmetischen, geometrischen oder harmonischen Mittel von je einem Wurzelpaar z_1 und z_2 sind. Angenommen es sei

$$A = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2} \sigma,$$

$$G = \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{\pi},$$

$$H = \frac{2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} = 2 \frac{\pi}{\sigma};$$

alsdann ist wegen der Relation

$$z^2 + \frac{bc - ad + 2b\lambda_1}{b^2 - ac + a\lambda_1} z + \frac{cd - be + 2d\lambda_1}{bc - ad + 2b\lambda_1} = 0,$$

$$\sigma_1 = -\frac{bc - ad + 2b\lambda_1}{b^2 - ac + a\lambda_1} = 2A_1,$$

$$\pi_1 = \frac{cd - be + 2d\lambda_1}{bc - ad + 2b\lambda_1} = G_1^{\,2}.$$

Die Werthe $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind demnach die Wurzelwerthe der Gleichung

$$(2b^3 - 3abc + a^2d)\sigma^3 + (6b^2c + 2abd - 9ac^2 + a^2e)\sigma^2 \\ + 4(2b^2d - 3acd + abe)\sigma + 4(b^2e - ad^2) = 0,$$

und die Werthe π_1, π_2, π_3 sind die Wurzelwerthe von

$$(2b^3 - 3abc + a^2d)\pi^3 - (2b^2d - 3acd + abe)\pi^2 \\ - (2bd^2 - 3bce + ade)\pi + (2d^3 - 3cde + be^2) = 0;$$

endlich sind wegen der Relation

$$\frac{\pi_1}{\sigma_1} = -\frac{(b^2 - ac + a\lambda_1)(cd - be + 2d\lambda_1)}{(bc - ad + 2b\lambda_1)^2},$$

die Werthe $\frac{\pi_1}{\sigma_1}, \frac{\pi_2}{\sigma_2}, \frac{\pi_3}{\sigma_3}$ die Wurzelwerthe der Gleichung

$$4(d^2a - eb^2)\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^3 + 4(2bd^2 - 3bce + ade)\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2 \\ + (6cd^2 + 2bde - 9ec^2 + e^2a)\frac{\pi}{\sigma} + (2d^3 - 3cde + be^2) = 0.$$

Die Gleichung in π lässt sich in Form einer Determinante schreiben folgenderweise:

$$\begin{vmatrix} a(d - b\pi), & b(d - b\pi), & be - ad\pi \\ b(d - b\pi), & \begin{matrix} \frac{3}{2}c(d - b\pi) \\ -\frac{1}{2}c(be - ad\pi), \end{matrix} & d(d - b\pi) \\ (bc - ad\pi), & d(d - b\pi), & e(d - b\pi) \end{vmatrix} = 0.$$

Zwischen den Grössen π und σ finden ausserdem folgende Relationen statt:

$$\sigma = -\frac{a\pi^2 - c}{b\pi - d},$$

$$\pi = -\frac{b\sigma^2 + 3c\sigma + 2d}{a\sigma + 2b},$$

so dass also stets zwei Werthe des einen Elements mit einem des andern verbunden sind.

§ 218. Methode der Transformation der vollständigen biquadratischen Gleichung in eine reciproke nach Mallet*).

Unter allen Methoden der Auflösung der biquadratischen Gleichungen sind besonders diejenigen bemerkenswerth, welche durch die Einführung der Reducenten vom dritten oder sechsten Grade in die Variirte erzielt werden. Hieher gehören also die Reducenten (21) I und II, (22), (23), (24), (26), (27), (30) und (31). Sie führen auf eine kubische Resolvente, so dass also die Bestimmung der Wurzeln von der Auflösung einer Gleichung vom niedrigeren Grade als dem vierten abhängig gemacht wird.

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Man bilde die Variirte, führe in deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Bedingung (22)

$$\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$$

ein und entwickele sie nach Potenzen von z, wie folgt:

$$(4z + a)^2(z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d) - (4z^3 + 3az^2 + 2bz + c)^2 = 0.$$

Hieraus resultirt die Resolvente XXII:

$$(a^3 - 4ab + 8c)z^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)z^2$$
$$+ (a^2c - 4bc + 8ad)z + (a^2d - c^2) = 0\,.$$

---

*) Diese Methode ist, wie schon unter den „historischen Bemerkungen“ angeführt, erfunden von Mallet in Upsala (1780) und zu wiederholten Malen nacherfunden.

Mallet, Nova analysis aequationum secundi, tertii et quarti gradus. Nov. Act. Upsal. III. 1780.

—— De aequatione biquadratica. Stockholm 1784.

Hulbe, Analytische Entdeckungen etc. Berlin und Stralsund 1794.

Björling, Ueber eine Auflösung biquadratischer Gleichungen. Grun. Arch. XIX. 1852.

Schlömilch, Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VI. 49. 1861; VIII. 223. 1863; Journ. math. XXVIII, 99. 1863.

Unferdinger, Die Wurzelform der allgemeinen Gleichung des vierten Grades. Sitzungsber. der k. k. Akad. der Wissensch. L. Wien 1864.

Pokorny, Ueber die biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. X. 320. 1865.

Alexandre, Sur le moyen de ramener une équation quelconque du quatrième degré à une équation réciproque du même degré. Nouv. ann. math. XXV. 477. 1866.

L. Matthiessen, Die algebraischen Methoden etc. S. 45. Leipzig 1866; Zeitschr. f. Math. u. Phys. VIII. 138. 1863.

Die Variirte hat nun die reducirte Form

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0 .$$

Um sie aufzulösen, dividire man sie durch x_1^2 und ordne wie folgt:

$$\left(x' + \frac{\gamma^2}{\alpha^2 x'^2}\right) + \alpha\left(x' + \frac{\gamma}{\alpha x'}\right) + \beta = 0 .$$

Substituirt man

$$x' + \frac{\gamma}{\alpha^2 x'} = y ,$$

so wird

$$y^2 + \alpha y + \beta - 2\frac{\gamma}{\alpha} = 0 ,$$

und

$$x'^2 - yx' + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 .$$

Daraus folgt

$$x'^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{\alpha}}\right) x' + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 .$$

Schlömilch substituirt $x = qx' + z$ und sucht dadurch die transformirte Gleichung sofort auf die Form

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \alpha x' + 1 = 0$$

zu bringen. Ordnet man die Variirte nach Potenzen von x', so erhält man

$$x'^4 + \frac{4z + a}{q} x'^3 + \frac{6z^2 + 3az + b}{q^2} x'^2 + \frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{q^3} x'$$
$$+ \frac{z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d}{q^4} = 0 .$$

Man setze das zweite gleich dem vierten Gliede und das letzte gleich der Einheit, so erhält man neben derselben Resolvente XXII. die obige einfache Form. Die Resolvente liefert immer wenigstens eine reelle Wurzel z und es ist

$$q = \sqrt[4]{z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d} = \sqrt{\frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{4z + a}} .$$

Die Gleichung in x' lässt sich durch die Substitution

$$x' + \frac{1}{x'} = y$$

in eine quadratische verwandeln, deren Wurzeln sind:

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{(4z+a)\sqrt{4z+a} \mp \sqrt{a^3-4ab+8c}}{2\sqrt{4z^3+3az^2+2bz+c}}.$$

Schlömilch weist nach, dass diese Methode im nahen Zusammenhange mit der Cartesischen und Euler'schen steht. Die vorgelegte Gleichung sei

$$x^4+bx^2+cx+d=0$$

und $x = qy + z$; dann ist die Resolvente

$$8cz^3 - 4(b^2-4d)z^2 - 4bcz - c^2 = 0,$$

welche in die Cartesische übergeht, wenn man $z = c : 2\zeta$ setzt, nämlich in

$$\zeta^3 + 2b\zeta^2 + (b^2-4d)\zeta - c^2 = 0.$$

Es ist nun

$$q^2 = \frac{4z^3 + 2bz + c}{4z},$$

und die reciproke Gleichung in y

$$y^4 + \frac{4z}{q}y^3 + \frac{6z^2+b}{q^2}y^2 + \frac{4z}{q^3}y + 1 = 0.$$

Dieselbe zerfällt in die quadratischen Gleichungen

$$y + \frac{1}{y} = \eta, \qquad \eta^2 + \frac{4z}{q}\eta + \frac{6z^2+b}{q^2} - 2 = 0.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\eta = \frac{-2z \pm \sqrt{2\cdot(q^2-z^2)-b}}{q},$$

und wenn man im Dividenden den Werth

$$q = \sqrt{\frac{4z^3+2bz+c}{4z}}$$

einsetzt,

$$q\eta = -2z \pm \sqrt{\frac{c}{2z}}.$$

Weiter ist nun

$$y = \frac{1}{2}\eta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2-4},$$

mithin

$$x = qy + z = z + \frac{1}{2}q\eta \pm \frac{1}{2}\sqrt{(q\eta)^2 - 4q^2}.$$

Substituirt man den vorher angegebenen Werth von $q\eta$, so resultirt

$$x = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{c}{2z}}(\pm)\sqrt{-2b-\frac{c}{2z}\pm 2\sqrt{2cz}}\right],$$

wo das eingeklammerte Doppelzeichen von den andern beiden unabhängig ist, so dass x im Ganzen vier Werthe hat. Bringt man die Resolvente auf die Cartesische Form durch die Substitution $z = c : 2\zeta$, so wird

$$x = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\zeta}(\pm)\sqrt{-\zeta-2\left(b\pm\frac{c}{\sqrt{\zeta}}\right)}\right],$$

welches die Cartesische oder Ampère'sche Formel ist.

Beispiel. Aufzulösen: $x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 46x + 20 = 0$.

Die Resolvente in z ist

$$12z^3 - 46z^2 + 32z + 29 = 0.$$

Man findet hieraus

$$z_1 = -\frac{1}{2}, \quad z_2 \text{ und } z_3 = \frac{1}{6}\left(13 \pm \sqrt{-5}\right).$$

Wählt man die Variation $z_1 = -\frac{1}{2}$, so wird $q = \frac{1}{2}\sqrt{29}$, und die Transformirte

$$y^4 - \frac{24}{29}\sqrt{29}\,y^3 + 6\frac{24}{29}\,y^2 - \frac{24}{29}\sqrt{29}\,y + 1 = 0.$$

Man setze $y + \frac{1}{y} = \eta$, dann wird

$$\eta^2 - \frac{24}{29}\sqrt{29}\,\eta \pm 4\frac{24}{29} = 0,$$

und

$$\left.\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\} = \frac{12 \pm 2}{\sqrt{29}}.$$

Hieraus berechnet sich

$$\left.\begin{matrix}y_1\\ y_2\end{matrix}\right\} = \frac{7 \pm 2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}, \quad \left.\begin{matrix}y_3\\ y_4\end{matrix}\right\} = \frac{5 \pm 2\sqrt{-1}}{\sqrt{29}}.$$

Die Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung sind demzufolge

$$x_1 \text{ und } x_2 = 3 \pm \sqrt{5}, \quad x_3 \text{ und } x_4 = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

Setzt man $q = 1$ und variirt die vorgelegte Gleichung einfach durch $z = -\frac{1}{2}$, so erhält man

$$x'^4 - 12x'^3 + 49\frac{1}{2}\,x'^2 - 87x' + \left(\frac{29}{4}\right)^2 = 0.$$

Daraus ergeben sich die beiden quadratischen Gleichungen

$$x'^2 - (6 \pm 1)x' + \frac{29}{4} = 0$$

und

$$x_1' \text{ und } x_2' = \frac{7}{2} \pm \sqrt{5}, \quad x_3' \text{ und } x_4' = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-1}.$$

Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind demnach

$$x_1 \text{ und } x_2 = 3 \pm \sqrt{5}, \quad x_3 \text{ und } x_4 = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

§ 219. Reduction der vollständigen Gleichung mittels Reducente (22) auf eine solche, in welcher das zweite und vierte Glied fehlen.

Die Methode von Mallet zeigt, wie mittels der Reducente

$$\alpha^2 \delta - \gamma^2 = 0$$

die Variirte auf eine reciproke gebracht wird. Wir wollen jetzt zeigen, wie die Reducirte sich weiter in eine Gleichung von der Form

$$u^4 + Au^2 + B = 0$$

transformiren lässt.

Die Variirte sei nach der Einführung der Reducente (22) verwandelt in

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0.$$

Man substituire weiter

$$x' = x - z = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{u-1}{u+1}.$$

Die Transformirte ist alsdann

$$u^4 - 2\,\frac{\alpha\beta - 6\gamma}{\alpha\beta + 2\gamma + 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}\,u^2 + \frac{\alpha\beta + 2\gamma - 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha\beta + 2\gamma + 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}} = 0.$$

Die Wurzeln derselben mögen bezeichnet werden mit u_1, u_2, u_3, u_4, dann ist

$$x_1 = z + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1}, \quad x_2 = z + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1},$$

$$x_3 = z + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{u_3 - 1}{u_3 + 1}, \quad x_4 = z + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{u_4 - 1}{u_4 + 1}.$$

Für z genügt es, den reellen Wurzelwerth der Resolvente XXII. einzusetzen.

Es möge noch bemerkt werden, dass wenn man die Gleichung

$$u^4 + Au^2 + B = 0$$

variirt, indem man $u = \eta + \zeta$ setzt, in der Variirten

$$\eta^4 + 4\zeta\eta^3 + (6\zeta^2 + A)\eta^2 + (4\zeta^3 + 2A\zeta)\eta + (\zeta^4 + A\zeta^2) = 0$$

stets die Reducente (21) I. verschwindet. Daraus erklärt sich, warum die Formen

$$a^2d - c^2 \text{ und } a^3 - 4ab + 8c$$

immer zugleich auftreten.

Beispiel. Aufzulösen: $x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 46x + 20 = 0$. Die Resolvente von Mallet ist

$$12z^3 - 46z^2 + 32z + 29 = 0,$$

und die reelle Wurzel $z_1 = -\frac{1}{2}$. Die durch $z_1 = -\frac{1}{2}$ variirte Hauptgleichung ist

$$x'^4 - 12x'^3 + 49\tfrac{1}{2}x'^2 - 87x' + \left(\frac{29}{4}\right)^2 = 0.$$

Die Gleichung in u liefert die Wurzeln

$$u^2 = \frac{7+\sqrt{29}}{7-\sqrt{29}}, \quad u_1 \text{ und } u_2 = \frac{\sqrt{29}+(7\pm 2\sqrt{5})}{\sqrt{29}-(7\pm 2\sqrt{5})},$$

$$u^2 = \frac{5+\sqrt{29}}{5-\sqrt{29}}, \quad u_3 \text{ und } u_4 = \frac{\sqrt{29}+(5\pm 2\sqrt{-1})}{\sqrt{29}-(5\pm 2\sqrt{-1})}.$$

Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind demnach

$$x_1 \text{ und } x_2 = 3 \pm \sqrt{5}, \quad x_3 \text{ und } x_4 = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

§ 220. Reduction einer biquadratischen Gleichung mittels Reducente (22) auf die Differenz zweier Quadrate oder das Product trinomischer Factoren.

Setzt man

$$(x'^2 + mx' + n)^2 - p^2x'^2 = 0,$$

oder, indem man nach Potenzen von x' ordnet,

$$x'^4 + 2mx'^3 + (m^2 + 2n - p^2)x'^2 + 2mnx' + n^2 = 0,$$

so wird wegen der Relation

$$(2m)^2n^2 = (2mn)^2$$

offenbar die Bedingung $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$ erfüllt. Die variirte Gleichung lässt sich nun in das Product

$$[x'^2 + (m+p)x' + n]\,[x'^2 + (m-p)x' + n] = 0$$

zerlegen. Die Grössen m, n und p lassen sich mittels z bestimmen aus den Gleichungen

$$2m = 4z + a, \quad n = \frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{4z + a},$$

$$p = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3 - 4ab + 8c}{4z + a}}.$$

Demzufolge ist

$$x'^2 + \frac{1}{2}\left[(4z + a) \pm \sqrt{\frac{a^3 - 4ab + 8c}{4z + a}}\right]x' + \frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{4z + a} = 0.$$

Da die Absolutglieder der beiden trinomischen Factoren einander gleich sind, so sind die Wurzeln der Transformirten die vier Glieder einer geometrischen Proportion. Drückt man das obige Product kürzer aus durch

$$(x'^2 + ux' + n)(x'^2 + vx' + n) = 0,$$

so ist die entwickelte Gleichung

$$x'^4 + (u + v)x'^3 + (uv + 2n)x'^2 + (u + v)nx' + n^2 = 0.$$

Wegen der Relationen

$$u + v = \alpha, \quad uv = \frac{\alpha\beta - 2\gamma}{\alpha},$$

sind u und v die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2 - \alpha\eta + \frac{\alpha\beta - 2\gamma}{\alpha} = 0.$$

Demnach ist

$$x'^2 + \eta_1 x' + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

$$x'^2 + \eta_2 x' + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

und $x = x' + z$.

§ 221. Reduction einer biquadratischen Gleichung durch Variation auf die Form

$$\left(\frac{x'^2 + mx' + n}{x'^2 + px' + n}\right)^2 - q^2 = 0.$$

Diese Transformation lässt sich durch Einführung der Reducente (22) $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$ in die Variirte bewerkstelligen. Entwickelt man nämlich nach Potenzen von x', so resultirt die Gleichung

$$x'^4 + \frac{2(m - pq^2)}{1 - q^2}x'^3 + \left[\frac{m^2 - p^2q^2}{1 - q^2} + 2n\right]x'^2 + \frac{2n(m - pq^2)}{1 - q^2}x' + n^2 = 0,$$

welche die Reducente zum Verschwinden bringt. Die Variirte sei nun wiederum in kürzerer Form

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \delta = 0\,.$$

Durch Vergleichung der homologen Coefficienten erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$q^2 = \frac{\alpha - 2m}{\alpha - 2p} = \frac{\beta - m^2 - 2n}{\beta - p^2 - 2n} = \frac{\gamma - 2mn}{\gamma - 2pn}, \quad \text{und } n^2 = \delta\,.$$

Aus denselben folgt

$$n = \gamma : \alpha, \quad \alpha(m+p) - 2pm - 2\beta + 4\gamma : \alpha = 0\,.$$

Es bleibt also eine der Grössen m oder p willkürlich, oder auch q.

Angenommen es sei $p = -m$, so wird

$$m^2 = \frac{\alpha\beta - 2\gamma}{\alpha}, \quad q^2 = \frac{\alpha - 2m}{\alpha + 2m}, \quad n = \sqrt{\delta},$$

wobei die Resolvente XXII. die Werthe α, β, γ, δ liefert. Die transformirte Gleichung reducirt sich dann auf die quadratische

$$x'^2 + mx' + n = \pm\, q(x'^2 - mx' + n),$$

also

$$x'^2 + m\,\frac{1+q}{1-q}\,x' + n = 0, \quad \text{und } x'^2 + m\,\frac{1-q}{1+q}\,x' + n = 0\,.$$

Hieraus ergeben sich mit Berücksichtigung der Gleichung $x = x' + z$ die vier gesuchten Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4.

Es werde noch angenommen, dass $q^2 = p : m$ sei; dann sind p und m die beiden Wurzeln der Gleichung

$$y^2 - \frac{1}{2}\,\alpha y + \frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{4\alpha} = 0\,.$$

Die transformirte Gleichung reducirt sich dann auf die quadratische

$$\sqrt{m}\,(x'^2 + mx' + n) = \pm\sqrt{p}\,(x'^2 + px' + n),$$

also

$$x'^2 + (m + \sqrt{mp} + p)x' + n = 0,$$
$$x'^2 + (m - \sqrt{mp} + p)x' + n = 0,$$

oder, gemäss der Gleichung in y,

$$x'^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\frac{\alpha^3 - 4\alpha\gamma + 8\gamma}{\alpha}}\right) x' + \sqrt{\delta} = 0\,.$$

§ 222. Methode der Auflösung mittels einer harmonischen Proportion.

Man suche zwei Grössen u und v zu bestimmen, zu welchen die gesuchte Wurzel x die mittlere harmonische Proportionale bildet.

Es sei also

$$u : v = (u - x) : (x - v),$$

oder

$$x = \frac{2uv}{u+v}.$$

Substituirt man diesen Werth für x in die allgemeine biquadratische Gleichung, so resultirt nach Multiplication mit $(u+v)^4$ die nach Potenzen von u geordnete Gleichung

$$(16v^4 + 8av^3 + 4bv^2 + 2cv + d)u^4 + (8av^4 + 8bv^3 + 6cv^2 + 4dv)u^3 \\ + (4bv^4 + 6cv^3 + 6dv^2)u^2 + (2cv^4 + 4dv^3)u + dv^4 = 0.$$

Diese Gleichung wird in eine reciproke verwandelt, wenn man die Reducente (22)

$$\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$$

in die Coefficienten einführt; also

$$d(4av^3 + 4bv^2 + 3cv + 2d)^2 - (cv + 2d)^2(16v^4 + 8av^3 + 4bv^2 + 2cv + d) = 0.$$

Nach Potenzen von v geordnet und $2v$ gleich z gesetzt, liefert diese Gleichung die Resolvente XXIII., welche der Resolvente XXII. homolog gebildet ist, nämlich

$$(c^2 - a^2d)z^3 + (ac^2 - 4abd + 8cd)z^2 + (bc^2 + 2acd - 4b^2d + 16d^2)z \\ + (c^3 - 4bcd + 8ad^2) = 0.$$

Berechnet man hieraus die eine reelle Wurzel z und aus der Reducirten die vier Wurzeln u_1, u_2, u_3, u_4, so findet man

$$x_1 = \frac{2u_1 z}{2u_1 + z}, \quad x_2 = \frac{2u_2 z}{2u_2 + z}, \quad x_3 = \frac{2u_3 z}{2u_3 + z}, \quad x_4 = \frac{2u_4 z}{2u_4 + z}.$$

Die beiden Resolventen XXII. und XXIII. lassen eine eigenthümliche Aehnlichkeit mit den symmetrischen Hälften der bikubischen Covariante $C_{4,6}(z)$ erkennen. Wenn man in XXII. $a = 0$ und $\frac{c}{z} = 2y^2$ setzt, so erhält man die bekannte Cartesische Resolvente XIV. Setzt man in XXIII. $c = 0$ und $az = 2y^2$, so erhält man die Form

$$y^6 + 2by^4 + (b^2 - 4d)y^2 - a^2d = 0,$$

welche sich von XIV. nur im letzten Gliede unterscheidet.

§ 223. Eine andere Methode mittels harmonischer Proportion.

Man suche zwei Grössen u und z, so dass eine derselben z. B. u das harmonische Mittel zwischen der gesuchten Wurzel und der andern Grösse werde. Es sei also

$$x : z = (x - u) : (u - z),$$

oder

$$u = \frac{2xz}{x + z}.$$

Setzt man den Werth x in die gegebene Gleichung ein, so ist die nach u geordnete Gleichung

$$(z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d)u^4 + 2(az^4 - 2bz^3 + 3cz^2 - 4dz)u^3 \\ + 4(bz^4 - 3cz^3 + 6dz^2)u^2 + 8(cz^4 - 4dz^3)u + 16dz^4 = 0.$$

Durch Einführung der Reducente (22) $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$ erhält man die Resolvente XXIII. Die gesuchten Wurzeln sind

$$x_1 = \frac{zu_1}{2z - u_1}, \quad x_2 = \frac{zu_2}{2z - u_2}, \quad x_3 = \frac{zu_3}{2z - u_3}, \quad x_4 = \frac{zu_4}{2z - u_4}.$$

§ 224. Methode der Auflösung mittels einer disharmonischen Proportion.

Man suche zwei Grössen u und v, so dass

$$u : v = v : (2x - v),$$

oder

$$x = \frac{(u + v)v}{2u}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in die biquadratische Gleichung und ordnet die Transformirte nach Potenzen von u, so resultirt

$$(v^4 + 2av^3 + 4bv^2 + 8cv + 16d)u^4 + (4v^5 + 6av^4 + 8bv^3 + 8cv^2)u^3 \\ + (6v^6 + 6av^5 + 4bv^4)u^2 + (4v^7 + 2av^6)u + v^8 = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen $v = 2z$, $u = 2y$, so geht die Gleichung über in

$$(z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d)y^4 + (4z^5 + 3az^4 + 2bz^3 + cz^2)y^3 \\ + (6z^6 + 3az^5 + bz^4)y^2 + (4z^7 + az^6)y + z^8 = 0.$$

Führt man die Reducente (22) ein, so erhält man die Resolvente XXII. Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind alsdann

$$x_1 = \frac{(y_1 + z)z}{y_1}, \quad x_2 = \frac{(y_2 + z)z}{y_2}, \quad x_3 = \frac{(y_3 + z)z}{y_3}, \quad x_4 = \frac{(y_4 + z)z}{y_4}.$$

§ 225. Methode von Sommer*).

Die Auflösung geschieht nach demselben Princip, wie die der kubischen (§ 160), indem substituirt wird

$$x = x' + z = z + y\frac{u+1}{u-1} = z - y\frac{1+u}{1-u}.$$

Ordnet man die Transformirte nach Potenzen von u, so erhält man

$$u^4 + \frac{4y^4 + 2\alpha y^3 - 2\gamma y - 4\delta}{y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta}u^3 + \frac{6y^4 - 2\beta y^2 + 6\delta}{y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta}u^2$$
$$+ \frac{4y^4 - 2\alpha y^3 + 2\gamma y - 4\delta}{y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta}u + \frac{y^4 - \alpha y^3 + \beta y^2 - \gamma y + \delta}{y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta} = 0.$$

Die Gleichung wird quadratisch, wenn das zweite und vierte Glied verschwinden, wenn also gesetzt wird

$$4y^4 + 2\alpha y^3 - 2\gamma y - 4\delta = 0,$$
$$4y^4 - 2\alpha y^3 + 2\gamma y - 4\delta = 0.$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\delta = y^4, \qquad \gamma = \alpha y^2,$$

oder

$$\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0.$$

Man gelangt also zur Reducente (22) und somit auch zur Resolvente XXII. Dadurch wird die Gleichung in x' reciprok und von der Form

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0.$$

Hat man einen Wurzelwerth z gefunden, so findet man mittels y den Werth von u aus

$$u^4 + 2\frac{6\gamma - \alpha\beta}{2\gamma + \alpha\beta + 2\alpha^2 y}u^2 + \frac{2\gamma + \alpha\beta - 2\alpha^2 y}{2\gamma + \alpha\beta + 2\alpha^2 y} = 0,$$

und zwar ist

$$u^2 = -\frac{1}{2\gamma + \alpha\beta + 2\alpha^2 y}\left[6\gamma - \alpha\beta \pm \sqrt{4\gamma(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma)}\right].$$

An die Stelle von $\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma$ kann man bei linearen Transformationen stets den gleichwerthigen Ausdruck $a^3 - 4ab + 8c$ setzen. Da nun

$$u = \frac{(x-z)+y}{(x-z)-y}$$

*) Grun. Arch. XXVII. S. 354. 1856.

ist, so findet man aus z, y und den vier Wurzeln u_1, u_2, u_3, u_4 die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung, nämlich

$$x_1 = z + y\,\frac{u_1 + 1}{u_1 - 1}, \quad x_2 = z + y\,\frac{u_2 + 1}{u_2 - 1},$$

$$x_3 = z + y\,\frac{u_3 + 1}{u_3 - 1}, \quad x_4 = z + y\,\frac{u_4 + 1}{u_4 - 1}.$$

§ 226. Methode der Auflösung einer reciproken Gleichung vom vierten Grade.

Es ist in § 220 gezeigt worden, dass durch die Reducente (22) jede linear transformirte biquadratische Gleichung auf das Product zweier trinomischen Factoren reducirt werden kann. Sei also

$$f(x') = (x'^2 + (m + p)\,x' + n)\,(x'^2 + (m - p)\,x' + n) = 0.$$

Es ist nun offenbar

$$x_1' x_2' = n, \quad x_3' x_4' = n,$$

folglich

$$x_1' x_2' = x_3' x_4',$$

oder

$$x_1' : x_3' = x_4' : x_2'.$$

Man kann jetzt wegen der Variationsgleichung $x' = x - z$ setzen

$$x_1' x_2' = (x_1 - z_1)\,(x_2 - z_1),$$

oder

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2)\,z_1 = n_1 - z_1^2,$$

und ebenso

$$x_3 x_4 - (x_3 + x_4)\,z_1 = n_1 - z_1^2.$$

Folglich ist

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 + a z_1 = 2(n_1 - z_1^2),$$

und wegen

$$x_3 x_4 = d : x_1 x_2$$

$$(x_1 x_2)^2 - 2\left[n_1 - z_1^2 - \frac{1}{2}\,a z_1\right] x_1 x_2 + d = 0.$$

Setzt man für n seinen Werth ein, nämlich

$$n = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{4z + a}$$

$$= z^2 + \frac{1}{2}\,az - \frac{1}{8}\,(a^2 - 4b) + \frac{1}{8}\,\frac{a^3 - 4ab + 8c}{4z + a},$$

so resultirt

$$(x_1 x_2)^2 - \frac{1}{4}\left[a^2 - 4b - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{4z_1 + a}\right] x_1 x_2 + d = 0,$$

und analog

$$(x_1 x_3)^2 - \frac{1}{4}\left[a^2 - 4b - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{4z_2 + a}\right] x_1 x_3 + d = 0,$$

$$(x_1 x_4)^2 - \frac{1}{4}\left[a^2 - 4b - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{4z_3 + a}\right] x_1 x_4 + d = 0.$$

Hiervon liefert die erste Gleichung die Producte $x_1 x_2$ und $x_3 x_4$, die zweite $x_1 x_3$ und $x_2 x_4$, die dritte $x_1 x_4$ und $x_2 x_3$.

Zur Darstellung der separirten Wurzeln gelangt man weiter auf folgende Art. Es sei der Kürze wegen gesetzt

$$x_1 x_2 \text{ und } x_3 x_4 = M_1 \pm \sqrt{M_1^2 - d} = y_1 \text{ und } \eta_1,$$
$$x_1 x_3 \text{ und } x_2 x_4 = M_2 \pm \sqrt{M_2^2 - d} = y_2 \text{ und } \eta_2,$$
$$x_1 x_4 \text{ und } x_2 x_3 = M_3 \pm \sqrt{M_3^2 - d} = y_3 \text{ und } \eta_3.$$

Mit Berücksichtigung der Relation $y\eta = d$, findet man

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{d^2}{\eta_1 \eta_2 \eta_3}},\quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_2 \eta_3}{\eta_1}},\quad x_3 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2}},\quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3}},$$

oder

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{d^2}{y_1 y_2 y_3}},\quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{y_2 y_3}{y_1}},\quad x_3 = \pm\sqrt{\frac{y_1 y_3}{y_1}},\quad x_4 = +\sqrt{\frac{y_1 y_2}{y_3}},$$

je nachdem

$$(d + \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3) : \sqrt{\eta_1 \eta_2 \eta_3} = \mp a,$$

oder

$$(d + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) : \sqrt{y_1 y_2 y_3} = \mp a$$

ist; in anderer Darstellung dieser Bedingungsgleichungen je nachdem

$$(\sqrt{\eta_1} + \sqrt{y_1})(\sqrt{\eta_2} + \sqrt{y_2})(\sqrt{\eta_3} + \sqrt{y_3})$$
$$- (\sqrt{\eta_1} - \sqrt{y_1})(\sqrt{\eta_2} - \sqrt{y_2})(\sqrt{\eta_3} - \sqrt{y_3}) = \mp 2a\sqrt{d},$$

oder

$$(\sqrt{\eta_1} + \sqrt{y_1})(\sqrt{\eta_2} + \sqrt{y_2})(\sqrt{\eta_3} + \sqrt{y_3})$$
$$+ (\sqrt{\eta_1} - \sqrt{y_1})(\sqrt{\eta_2} - \sqrt{y_2})(\sqrt{\eta_3} - \sqrt{y_3}) = \mp 2a\sqrt{d}$$

ist.

§ 227. Ueber den innern Zusammenhang der fünf Resolventen XXI, XXII, XXIII, XXX und XXXI.

Aus den in § 217 über die Factorenzerlegung der Covariante $C_{4,6}$ der Cayley'schen Form aufgestellten Sätzen, lassen sich verschiedene wichtige Relationen zwischen den genannten fünf Resolventen ableiten. Sie lassen sich sämmtlich in die Form XXX:

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0$$

durch geeignete Substitutionen überführen.

1) Gehen wir aus von der Resolvente

$$\begin{aligned} C_{4,6}(z) = {} & (a^3 - 4ab + 8c)z^6 + 2(a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)\,z^5 \\ & + 5(a^2c + 8ad - 4bc)\,z^4 + 20(a^2d - c^2)\,z^3 \\ & - 5(ac^2 - 4abd + 8cd)z^2 - 2(bc^2 + 2acd - 4b^2d + 16d^2)z \\ & - (c^3 - 4bcd + 8ad^2) = 0\,. \end{aligned}$$

Ein Factor derselben ist

$$z^2 + \frac{2ab - 12c + 12a\zeta}{3a^2 - 8b + 24\zeta}\,z + \frac{2bc - 12ad + 12c\zeta}{2ab - 12c + 12a\zeta} = 0,$$

wo ζ eine Wurzel von XXX:

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0$$

ist. Wenn man demnach umgekehrt jene trinomische Function in $C_{4,6}(z) = 0$ substituirt, so wird diese bikubische Resolvente auf XXX. reducirt.

2) Gehen wir aus von der Resolvente XXII., so ist ein Factor derselben

$$(3a^2 - 8b + 24\zeta)z + (ab - 6c + 6a\zeta) = 0\,.$$

Wenn man demnach umgekehrt den Werth von z in die Resolvente XXII. einsetzt, so wird dieselbe auf XXX. reducirt.

3) Von der Resolvente XXI. ist ein Factor

$$(ab - 6c + 6a\zeta)z - (bc - 6ad + 6c\zeta) = 0\,.$$

Substituiren wir also den daraus sich ergebenden Werth von z in XXI., so nimmt diese Resolvente ebenfalls die Form XXX. an.

4) Geht man aus von der Resolvente XXIII., so ist ein Factor derselben

$$(bc - 6ad - 6c\zeta)z + (3c^2 - 8bd + 24d\zeta) = 0\,.$$

Durch die Substitution des entsprechenden Werthes von z geht auch die Resolvente XXIII. in XXX. über.

Aus diesen vier Formeln lassen sich weiter leicht die Relationen herleiten, welche zwischen den Wurzeln je zweier der Resolventen stattfinden. Um z. B. die Beziehung zwischen der Wurzel z_0 von XXII. und der Wurzel z_1 von XXI. zu erhalten, eliminire man ζ aus den beiden Gleichungen

$$(3a^2 - 8b + 24\zeta)z_0 + (ab - 6c + 6a\zeta) = 0,$$
$$(ab - 6c + 6a\zeta)z_1 - (bc - 6ad + 6c\zeta) = 0.$$

Bemerkenswerth ist ausserdem, dass die beiden Resolventen XXI. und XXII. gemeinschaftliche Resultanten der beiden Gleichungen

$$z = -2\frac{y^2 - d}{ay - c}, \quad y = -2\frac{az^2 + bz + \frac{1}{2}c}{4z + a}$$

sind und zwar so, dass wenn man z aus der ersten in die zweite einsetzt, man die Gleichung XXI. erhält; dass dagegen, wenn man y aus der zweiten in die erste substituirt, die Gleichung XXII. resultirt.

5) Bezeichnet man wieder wie früher die Wurzel der Gleichung XXI. mit π, die der XXII. mit $\frac{1}{2}\sigma$, so gilt, wie man leicht findet, folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\pi \quad &+ \quad \tfrac{1}{4}a\sigma \quad + \left(\tfrac{1}{6}b + \zeta\right) &= 0, \\
\tfrac{1}{4}a\pi \quad &+ \left(\tfrac{1}{6}b - \tfrac{1}{2}\zeta\right)\sigma + \quad \tfrac{1}{4}c &= 0, \\
\left(\tfrac{1}{6}b + \zeta\right)\pi &+ \quad \tfrac{1}{4}c\sigma \quad + \quad d &= 0.
\end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen von Heilermann und ihre Determinante ist die Δ-Determinante von Aronhold, nämlich

$$2\Delta = 2\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b + \zeta\right) \\ \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b - \frac{1}{2}\zeta\right), & \frac{1}{4}c \\ \left(\frac{1}{6}b + \zeta\right), & \frac{1}{4}c, & d \end{vmatrix}^{+}_{+} = \zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0.$$

Sondert man ζ aus den drei Gleichungen ab, multiplicirt die erste Gleichung mit π, die zweite mit σ und addirt alle drei Gleichungen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\pi\left(\ \pi \quad + \tfrac{1}{4}a\sigma + \tfrac{1}{6}b\right) \\
&+ \sigma\left(\tfrac{1}{4}a\pi + \tfrac{1}{6}b\sigma + \tfrac{1}{4}c\right) \\
&+ \quad \left(\tfrac{1}{6}b\pi + \tfrac{1}{4}c\sigma + d\right)
\end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\zeta(\sigma^2 - 4\pi).$$

§ 228. Theorem von Ball*).

Es ist von Ball gezeigt worden, dass sämmtliche Methoden der Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichung zuletzt auf die Resolvente XXX:

$$2\Delta = 2\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b + \zeta\right) \\ \frac{1}{4}a, & \left(\frac{1}{6}b - \frac{1}{2}\zeta\right), & \frac{1}{4}c \\ \left(\frac{1}{6}b + \zeta\right), & \frac{1}{4}c, & d \end{vmatrix}^{+}_{+} = \zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{T} = 0$$

führen. Das Charakteristische einer Methode der Auflösung würde darnach wesentlich bestehen in der Art und Weise, wie man zur Gleichung $2\Delta = 0$ gelangt, sowie in der Form der Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Die Resolvente XXX. ist zuerst angegeben von Strehlke**) in der Form

$$\zeta^3 - \frac{1}{48}(b^2 - 3ac + 12d)\zeta$$
$$+ \frac{1}{1728}\left\{72bd + 9abc - 27a^2d - 27c^2 - 2b^3\right\} = 0;$$

später von Heilermann***) in der Form eines Systems von drei linearen Gleichungen für die binäre Form

$$f(x, y) = (a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, y)^4,$$

nämlich

$$\begin{aligned} a(\alpha\beta) + \qquad\qquad & b(\alpha\delta + \beta\gamma) + (c + m)(\gamma\delta) = 0, \\ b(\alpha\beta) + \left(c - \frac{1}{2}m\right) & (\alpha\delta + \beta\gamma) + \qquad d(\gamma\delta) = 0, \\ (c + m)(\alpha\beta) + \qquad\qquad & d(\alpha\delta + \beta\gamma) + \qquad e(\gamma\delta) = 0, \end{aligned}$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmt sind durch die Substitutionen

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta;$$

endlich in der Form der Determinante dieses Systems von Aronhold†).

---

*) Quarterly Journal of Mathematics VII. p. 6 and 358. 1865.
Enneper, Notiz über die biquadratische Gleichung. Zeitschr. für Math. und Physik. XVIII. S. 93. 1873.

**) Strehlke, Crelle's Journ. XII. S. 358. 1834.

***) Heilermann, Programm der Realschule zu Trier 1855, und Zeitschr. für Math. und Physik. XXI. 364. 1876.

†) Aronhold, Crelle's Journ. LII. 1856.

Hermite*) hat weiter gezeigt, dass die biquadratische Gleichung sich vorher so transformiren lässt, dass in der Resolvente XXX. die entsprechende quadratische Invariante verschwindet, wodurch sie rein kubisch wird, nämlich

$$\zeta_u^3 + 2\mathfrak{J}_u = 0 .$$

Sie lässt sich übrigens, wie weiter unten gezeigt werden soll, durch Auflösung derselben dazu erforderlichen Hülfsgleichung

$$\mathfrak{J} r^2 - 12 \mathfrak{F} r + \frac{4}{3} \mathfrak{J}^2 = 0$$

auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reduciren. Das Theorem von Ball möge zunächst an der Mallet'schen Methode nachgewiesen werden.

Man geht jedesmal aus von der reducirten Form

$$(\S\,217,\,5.)\qquad a^3 f(x) = (ax+b)^4 - \binom{4}{2} V_2 (ax+b)^2 + \binom{4}{3} V_3 (ax+b) - V_4 = 0 .$$

Für die gewöhnliche Form der Gleichung ist

$$a = 1,\quad b = \frac{1}{4} a,$$

$$V_2 = B = \frac{1}{48}(3a^2 - 8b),$$

$$V_3 = G = \frac{1}{32}(a^3 - 4ab + 8c),$$

$$(\S\,217,\,6.)\qquad V_4 = 3V_2^2 - a^2 J_{4,2} = 3B - \mathfrak{J},$$

und wegen

$$4V_2^3 - V_3^2 = a^2(V_2 J_{4,2} + a J_{4,3}):$$

$$4B^3 - G^2 = B\mathfrak{J} + \mathfrak{F}.$$

Substituirt man in der abgekürzten Form der vorgelegten Gleichung

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - (3B^2 - \mathfrak{J}) = 0$$

$y = s + \frac{1}{z}$ und ordnet nach Potenzen von s, so wird die Gleichung eine reciproke, wenn man die Reducente (22) $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$ einführt. Wenn man nun die Reducente nach Potenzen von z ordnet, so erhält man eine Resolvente vom dritten Grade, nämlich

$$G^2 z^3 - 6BGz^2 + (12B^2 - \mathfrak{J})z - 2G = 0 .$$

*) Hermite, Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859. Man vergl. oben § 217 (29).

Multiplicirt man diese Gleichung mit G und berücksichtigt, dass

$$4B^3 - G^2 = B\mathfrak{J} + \mathfrak{J}$$

ist, so erhält man

$$G^3 z^3 - 6BG^2z^2 + G(12B^2 - \mathfrak{J})z - 8B^3 + 2B\mathfrak{J} + 2\mathfrak{J} = 0.$$

Substituirt man endlich $Gz - 2B = \zeta$, so resultirt

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich leicht auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse reduciren, wenn man die Reducente (6) $\alpha^2 - 3\beta = 0$ in ihre Variirte einführt. Man setze $\zeta = \sqrt{\eta} - \frac{1}{4}r$, ordne nach Potenzen von $\sqrt{\eta}$ und bilde die Gleichung ihrer Wurzelquadrate, wie folgt:

$$\eta^3 - \left(\frac{3}{16}r^2 + 2\mathfrak{J}\right)\eta^2 + \left(\frac{3}{256}r^4 + 3\mathfrak{J}r + \mathfrak{J}^2\right)\eta$$
$$- \left(\frac{1}{64}r^3 - \frac{1}{4}\mathfrak{J}r + 2\mathfrak{J}\right)^2 = 0.$$

Nimmt man an $\alpha^2 - 3\beta = 0$, so ist die Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{J}r^2 - 12\mathfrak{J}r + \frac{4}{3}\mathfrak{J}^2 = 0,$$

und die Gleichung in η

$$\left[\eta - \frac{1}{12}(9\mathfrak{J}r + 7\mathfrak{J})\right]^3 = -\left[\frac{1}{8}\mathfrak{J}r^3 + \mathfrak{J}\mathfrak{J}r - 4\mathfrak{J}^2 + \frac{8}{27}\mathfrak{J}^3\right].$$

Die Wurzel der quadratischen Resolvente in r ist

$$r = \frac{2}{\mathfrak{J}}\left[3\mathfrak{J} \pm \frac{1}{48}\sqrt{-3D_4}\right].$$

Die Resolvente XXX. lässt sich, wie bereits bemerkt, noch auf die binomische

$$\zeta^3 + 2\mathfrak{J}_u = 0$$

reduciren, wenn man die gegebene Gleichung derartig transformirt, dass die quadratische Invariante $\mathfrak{J}_u$ gleich Null wird. Statt einer reducirten Gleichung von der Form

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - (3B^2 - \mathfrak{J}) = 0$$

erhält man dann die einfachere

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - 3B^2 = 0,$$

oder, wenn man $y = \eta\sqrt{B}$ setzt,

$$\eta^4 - 6\eta^2 + 4\frac{G}{B^{\frac{3}{2}}}\eta - 3 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich dann vermittels der Wurzel einer rein kubischen Resolvente in eine quadratische verwandeln. Denn setzt man

$$2(G^2 - 4B^3) = \zeta^3,$$

so wird

$$\left(\eta^2 + \frac{\zeta}{B} - 1\right)^2 = 2\left[\eta\left(\frac{\zeta}{B} + 2\right) - \frac{G}{B^{\frac{3}{2}}}\right]^2 : \left(\frac{\zeta}{B} + 2\right).$$

Da nun, für $\mathfrak{J} = 0$, $G^2 - 4B^3$ in $-\mathfrak{J}$ übergeht, so hat man in diesem speciellen Falle $\zeta^3 + 2\mathfrak{J} = 0$.

Um den Process der Transformation genauer zu verfolgen, sei die vorgelegte Gleiehung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Man substituire

$$x^2 + vx + u = x^2 + vx + (w - y) = 0.$$

Bezeichnet man die Coefficienten der Gleichung in u mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, setzt ihre quadratische Invariante

$$\mathfrak{J}_u = \frac{1}{12}(\beta^2 - 3\alpha\gamma + 12\delta) = 0$$

und weiter

$$v^2 - av + b = r + \frac{1}{3}b,$$

so wird nach den Discussionen in § 217 (29)

$$\mathfrak{J}r^2 - 12\mathfrak{F}r + \frac{4}{3}\mathfrak{J}^2 = 0.$$

Setzt man $u = w - y$ und setzt in der nach y geordneten Gleichung

$$4w - a(v - a) - 2b = 0,$$

so verschwindet das zweite Glied derselben und es resultirt

$$y^4 - 6\left\{w^2 - \frac{1}{6}\left[b\left(r + \frac{1}{3}b\right) + 3cv - 2ac + 2d\right]\right\}y^2 + 4G_u y$$
$$- 3\left\{w^2 - \frac{1}{6}\left[b\left(r + \frac{1}{3}b\right) + 3cv - 2ac + 2d\right]\right\}^2 = 0.$$

Nimmt man nun an, es sei

$$y = \eta\left\{w^2 - \frac{1}{6}\left[b\left(r + \frac{1}{3}b\right) + 3cv - 2ac + 2d\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

so wird

$$\eta^4 - 6\eta^2 + 4\frac{G_u}{B_u^{\frac{3}{2}}}\eta - 3 = 0.$$

Hier ist der Kürze wegen gesetzt

$$\frac{1}{32}(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = G_u,$$

$$\frac{1}{48}(3\alpha^2 - 8\beta) = B_u.$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich aus den beiden quadratischen Gleichungen in v und r berechnen und die Verwandlung der Gleichung in η nach der vorhergehenden Auseinandersetzung in quadratische bewerkstelligen und zwar durch Auflösung der binomischen Gleichung von Hermite

$$\zeta^3 + 2\mathfrak{J}_u = 0.$$

§ 229. Reduction der biquadratischen Gleichung durch die Reducente (21) II. auf eine quadratische.

Bildet man die Variirte und setzt

$$\left(\frac{1}{x'^2} + u \cdot \frac{1}{x'} + y\right)^2 = r^2,$$

oder, indem man diese Gleichung entwickelt und nach Potenzen von x' ordnet,

$$x'^4 + \frac{2yu}{y^2-r^2}x'^3 + \frac{u^2+2y}{y^2-r^2}x'^2 + \frac{2u}{y^2-r^2}x' + \frac{1}{y^2-r^2} = 0,$$

so wird hierdurch die Bedingung (21) II:

$$\beta^3 - 4\beta\gamma\delta + 8\alpha\delta^2 = 0$$

erfüllt. Entwickelt man diese Function nach Potenzen von z, so erhält man die Resolvente XXXI:

$$C_{4,6}(z) = 0.$$

Nach der Auseinandersetzung in § 227, 1 lässt sich diese bikubische Resolvente in quadratische Factoren zerlegen von der Form

$$z^2 + \frac{2ab - 6c + 6a\zeta}{3a^2 - 8b + 24\zeta}z + \frac{bc - 6ad + 6c\zeta}{ab - 6c + 6a\zeta} = 0,$$

wo ζ eine der Wurzeln von

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0$$

bedeutet.

Um die Wurzel $x = x' + z$ zu erhalten, hat man noch u, y und r zu bestimmen. Aus den Relationen

$$\frac{2yu}{y^2 - r^2} = \alpha, \quad \frac{2u}{y^2 - r^2} = \gamma,$$
$$\frac{u^2 + 2y}{y^2 - r^2} = \beta, \quad \frac{1}{y^2 - r^2} = \delta,$$

folgt

$$y = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad u = \frac{\gamma}{2\delta}, \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2\delta - \gamma^2}{\gamma^2\delta}}.$$

§ 230. Methode der Transformation durch Einführung der Reducente (23) in die Variirte.

Eine biquadratische Gleichung kann auch auf eine quadratische reducirt werden, indem man die Reducente (23)

$$\alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0$$

setzt. Zwischen den Reducenten (23) und (22) findet eine einfache Beziehung statt, welche sich in folgenden Sätzen ausdrücken lässt:

Wenn zwischen den Coefficienten einer biquadratischen Gleichung die Beziehungen

$$a^2d - 4bd + c^2 = 0$$

oder

$$a^2d - c^2 = 0$$

stattfinden, so gilt für die entsprechenden Coefficienten der Gleichung ihrer Wurzelquadrate die Beziehung

$$A^2D - C^2 = 0;$$

und umgekehrt:

Wenn zwischen den Coefficienten die Beziehung

$$a^2d - c^2 = 0$$

stattfindet, so ist in der Gleichung ihrer Quadratwurzeln entweder

$$A^2D - 4BD + C^2 = 0,$$

oder auch

$$A^2D - C^2 = 0.$$

Um dies zu erweisen, schreibe man die Reducente (23) in der Form

$$(\alpha^2 - 2\beta)\delta = \gamma^2 - 2\beta\delta.$$

Bildet man aus der variirten Gleichung die Gleichung ihrer Wurzelquadrate

$$(x'^2)^4 - (\alpha^2 - 2\beta)(x'^2)^3 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta)(x'^2)^2$$
$$- (\gamma^2 - 2\beta\delta)(x'^2) + \delta^2 = 0,$$

so wird diese unter derselben Bedingung reciprok. Denn quadrirt man die vorhergehende Gleichung, so muss auch

$$(\alpha^2 - 2\beta)^2\delta^2 - (\gamma^2 - 2\beta\delta)^2 = 0$$

sein, worin die Form der Reducente (22) erkennbar wird. Uebrigens wird man auch finden, dass, wenn man die Gleichung der Wurzelquadrate von

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' - \frac{\gamma^2}{\alpha^2 - 4\beta} = 0$$

bildet, das Absolutglied gleich dem Quadrate des Quotienten aus dem zweiten und vierten Coefficienten wird.

Um nun die Reducente (23) zur Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zu benutzen, bilde man die Variirte, führe in deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Bedingung

$$\alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0$$

ein und entwickele sie nach Potenzen von z, wie folgt:

$$(4z+a)^2(z^4+az^3+bz^2+cz+d)-4(6z^2+3az+b)(z^4+az^3+bz^2+cz+d)$$
$$+(4z^3+3az^2+2bz+c)^2 = 0.$$

Hieraus resultirt die bikubische Resolvente XXV:

$$z^6 + \frac{3}{2}az^5 + \frac{1}{4}(3a^2+2b)z^4 + \frac{1}{8}(a^3+4ab)z^3 + \frac{1}{8}(a^2b+2ac-8d)z^2$$
$$+ \frac{1}{8}(a^2c - 4ad)z + \frac{1}{8}(a^2d - 4bd + c^2) = 0.$$

Dieselbe lässt sich in drei quadratische Factoren zerlegen von der Form

$$4z^2 + 2az + 2y_1 = 0,$$
$$4z^2 + 2az + 2y_2 = 0,$$
$$4z^2 + 2az + 2y_3 = 0,$$

wobei y_1, y_2, y_3 die Wurzeln der Resolvente XIII bedeuten. Dividirt man nämlich die drei Partialgleichungen durch 4 und multiplicirt sie miteinander, so resultirt

$$z^6 + \frac{3}{2}az^5 + \frac{1}{2}\left(y_1+y_2+y_3+\frac{3}{2}a^2\right)z^4 + \frac{1}{2}a\left(y_1+y_2+y_3+\frac{1}{4}a^2\right)z^3$$
$$+\frac{1}{4}\left[y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1+\frac{1}{2}a^2(y_1+y_2+y_3)\right]z^2$$
$$+\frac{1}{8}a(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)z + \frac{1}{8}y_1y_2y_3 = 0.$$

Setzt man nun in den beiden bikubischen Gleichungen die homologen Coefficienten einander gleich, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= b\,, \\ y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 &= ac - 4d\,, \\ y_1 y_2 y_3 &= a^2 d - 4bd + c^2\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung in y ist demnach die Resolvente von Simpson:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0\,.$$

Wir wollen noch diese Gleichung von ihrem zweiten Gliede befreien und setzen deshalb an ihre Stelle

$$\left(y - \frac{1}{3}b\right)^3 - \frac{1}{3}(b^2 - 3ac + 12d)\left(y - \frac{1}{3}b\right)$$
$$+ \frac{1}{27}(72bd + 9abc - 27a^2 d - 27c^2 - 2b^3) = 0\,.$$

Wenn man nun

$$y - \frac{1}{3} = 2\zeta$$

substituirt, so geht die kubische Resolvente über in

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0\,.$$

Man erhält auf diese Weise

$$4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = -4\zeta\,;$$

oder

$$\frac{2}{3}(6z^2 + 3az + b) = -\frac{8}{3}\zeta\,,$$

einen Ausdruck, der wiederholt bei bikubischen Resolventen schon vorgekommen ist. Wir können ihn auch hier benutzen, um die Resolvente XXV durch die beiden Invarianten auszudrücken. Da nämlich

$$(4\zeta)^3 - 16\mathfrak{J}(4\zeta) + 128\mathfrak{F} = 0$$

ist, so geben wir der Resolvente XXV nunmehr die Form

$$\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^3 - 16\mathfrak{J}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right) - 128\mathfrak{F} = 0\,,$$

oder

$$(6z^2 + 3az + b)^3 - 36\mathfrak{J}(6z^2 + 3az + b) - 432\mathfrak{F} = 0\,.$$

Um die Bedeutung der Grösse y klarer hervorzuheben, so folgt aus der Gleichung von Simpson

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4\,,$$
$$y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4\,,$$
$$y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3\,;$$

und hieraus die drei folgenden

$$u_1 = y_2 + y_3 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)\,,$$
$$u_2 = y_1 + y_3 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)\,,$$
$$u_3 = y_1 + y_2 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)\,.$$

u_1, u_2, u_3 sind also die Wurzeln der Gleichung der Wurzelsummen der Gleichung in y, also von der Resolvente XVI:

$$u^3 - 2bu^2 + (b^2 + ac - 4d)u + (a^2 d - abc + c^2) = 0\,.$$

Ferner folgt aus der Bedeutung von u, wenn $x_1 + x_2 = \sigma$ gesetzt wird,

$$\sigma^2 + a\sigma + u_1 = 0\,,$$
$$\sigma^2 + a\sigma + u_2 = 0\,,$$
$$\sigma^2 + a\sigma + u_3 = 0\,.$$

Diese drei quadratischen Gleichungen geben die Wurzeln σ_1, σ_2, $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$, und zwar ist

$$\sigma_1 = x_1 + x_2\,, \quad \sigma_6 = x_3 + x_4\,,$$
$$\sigma_2 = x_1 + x_3\,, \quad \sigma_5 = x_2 + x_4\,,$$
$$\sigma_3 = x_1 + x_4\,, \quad \sigma_4 = x_2 + x_3\,.$$

Demgemäss lassen sich die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der vorgelegten Gleichung ausdrücken durch alle sechs Werthe von σ, nämlich

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + a)\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_5 + \sigma_4 + a)\,,$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(\sigma_6 + \sigma_2 + \sigma_4 + a)\,,$$
$$x_4 = \frac{1}{2}(\sigma_6 + \sigma_5 + \sigma_3 + a)\,.$$

Da ferner

$$\sigma = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 4u}\right)$$

ist, so sind die Wurzelformen auch noch

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\left[a + \sqrt{a^2 - 4u_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 4u_2} + \sqrt{a^2 - 4u_3}\right)\right],$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{2}\left[a - \sqrt{a^2 - 4u_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 4u_2} - \sqrt{a^2 - 4u_3}\right)\right].$$

Es lassen sich übrigens die vier Wurzeln auch ohne die Gleichung in u berechnen aus dem Typus

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1 .$$

Man setze

$$x_1 x_2 = p_1 , \quad x_3 x_4 = \pi_1 = d : p_1 ,$$
$$x_1 x_3 = p_2 , \quad x_2 x_4 = \pi_2 = d : p_2 ,$$
$$x_1 x_4 = p_3 , \quad x_2 x_3 = \pi_3 = d : p_3 .$$

Daraus folgt

$$p^2 - yp + d = 0 ,$$

und somit

$$p_1 \text{ und } \pi_1 = \frac{1}{2}\left(y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4d}\right) ,$$

$$p_2 \text{ und } \pi_2 = \frac{1}{2}\left(y_2 \pm \sqrt{y_2^2 - 4d}\right) ,$$

$$p_3 \text{ und } \pi_3 = \frac{1}{2}\left(y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - 4d}\right) .$$

Demgemäss sind die Wurzelformen

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{d}} , \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{p_1 \pi_2 \pi_3}{d}} ,$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{\pi_1 p_2 \pi_3}{d}} , \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{\pi_1 \pi_2 p_3}{d}} ,$$

wenn

$$[p_1 p_2 p_3 + (p_1 + p_2 + p_3)d] : \sqrt{p_1 p_2 p_3 d} = \mp a$$

ist, oder

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{d}} , \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\pi_1 p_2 p_3}{d}} ,$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{p_1 \pi_2 p_3}{d}} , \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{p_1 p_2 \pi_3}{d}} ,$$

wenn die Bedingung

$$[p_1 p_2 p_3 + (p_1 + p_2 + p_3)d] : \sqrt{p_1 p_2 p_3 d} = \mp (c : \sqrt{d}) ,$$

oder, was dasselbe ist, die Bedingung

$$[\pi_1 \pi_2 \pi_3 + (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)d] : \sqrt{\pi_1 \pi_2 \pi_3 d} = \mp a$$

erfüllt wird.

Für die angeführten arithmetischen Wurzelausdrücke kann man auch folgende logarithmische setzen:

$$\begin{aligned}
\log(x_1^2) &= \log p_1 + \log p_2 + \log p_3 - \log d\,,\\
\log(x_2^2) &= \log p_1 + \log \pi_2 + \log \pi_3 - \log d\,,\\
\log(x_3^2) &= \log \pi_1 + \log p_2 + \log \pi_3 - \log d\,,\\
\log(x_4^2) &= \log \pi_1 + \log \pi_2 + \log p_3 - \log d\,.
\end{aligned}$$

Die vier Wurzeln lassen sich auch mittels eines einzigen Werthes von p finden, z. B.

$$p = \frac{1}{2}\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4d}\right).$$

Wegen der identischen Gleichung

$$x_1 + x_2 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_1 x_2 - [x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)]}{x_1 x_2 - x_3 x_4}$$

ist

$$x_1 + x_2 = \frac{(c - ap)p}{p^2 - d}\,,$$

und

$$x_3 + x_4 = -a - \frac{(c - ap)p}{p^2 - d} = \frac{ad - cp}{p^2 - d}\,.$$

Daraus folgt

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - \frac{(c - ap)p}{p^2 - d}\,x + p = 0\,,$$

und

$$x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3 x_4 = x^2 - \frac{ad - cp}{p^2 - d}\,x + \frac{d}{p} = 0\,.$$

Demgemäss sind die vier Wurzelwerthe der vorgelegten biquadratischen Gleichung

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{(c - ap)p \pm \sqrt{(c - ap)^2 p^2 - 4p(p^2 - d)^2}}{2(p^2 - d)}\,,$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{(ad - cp) \pm \sqrt{(ad - cp)^2 - 4d(p^2 - d)^2 : p}}{2(p^2 - d)}\,.$$

Beispiel. Aufzulösen

$$x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 12\frac{5}{12}\,x^2 + 3\,\frac{11}{12}\,x + 1 = 0\,.$$

Die kubische Resolvente in y ist

$$y^3 + 12\,\frac{5}{12}\,y^2 - 1\,\frac{7}{18}\,y - 65\,\frac{65}{144} = 0\,,$$

und eine Wurzel derselben $y_1 = -2\frac{1}{2}$; daraus folgt $p = -2$

und $\pi = -\frac{1}{2}$. Die vier Wurzeln der Hauptgleichung sind demgemäss

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -\frac{1}{6}.$$

Die Variation z ergibt sich aus der Gleichung

$$4z^2 + \frac{4}{3}z - 5 = 0,$$

und der Werth von ζ aus der Relation

$$\zeta = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}b = \frac{59}{72}.$$

§ 231. Reduction einer biquadratischen Gleichung mittels Reducente (23) auf die Differenz zweier Quadrate.

Setzt man

$$(x'^2 + mx')^2 - (nx' + p)^2 = 0,$$

oder, indem man nach Potenzen der variirten Unbekannten $x' = x - z$ ordnet,

$$x'^4 + 2mx'^3 + (m^2 - n^2)x'^2 - 2npx' - p^2 = 0,$$

so wird wegen der Relation

$$-(2m)^2p^2 + 4(m^2 - n^2)p^2 + (2np)^2 = 0$$

offenbar die Bedingung $\alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0$ erfüllt. Die variirte Gleichung lässt sich dann in das Product zweier trinomischer Factoren zerlegen, nämlich in

$$(x'^2 + [m + n]x' + p)(x'^2 + [m - n]x' - p) = 0,$$

oder kurz

$$(x'^2 + ux' + p)(x'^2 + vx' - p) = 0.$$

Entwickelt man dies Product nach Potenzen von x', so resultirt

$$x'^4 + (u + v)x'^3 + uvx'^2 + (u - v)px' - p^2 = 0.$$

Wegen der Relationen

$$u + v = \alpha, \quad uv = \beta, \quad p = \sqrt{-\delta}$$

sind u und v die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2 - \alpha\eta + \beta = 0.$$

Die vier Wurzeln der variirten Gleichung sind also enthalten in

$$x'^2 + \eta_1 x' - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha_1 - 4\beta}} = 0,$$

$$x'^2 + \eta_2 x' + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} = 0\,.$$

Endlich ist $x = x' + z$, wo z eine Wurzel der Resolvente XXV bezeichnet.

§ 232. Reduction der biquadratischen Gleichung durch Variation auf die Form

$$\left(\frac{x'^2 + mx' + n}{x'^2 + p}\right)^2 - q^2 = 0\,.$$

Diese Transformation lässt sich durch Einführung der Reducente (23) $\alpha^2\delta - 4\beta\delta + \gamma^2 = 0$ in die Variirte bewerkstelligen. Entwickelt man nämlich die substituirte Function nach Potenzen von x', so erhält man

$$x'^4 + \frac{2m}{1-q^2}x'^3 + \frac{m^2 + 2n - 2pq^2}{1-q^2}x'^2 + \frac{2mn}{1-q^2}x' + \frac{n^2 - p^2q^2}{1-q^2} = 0\,.$$

Die Variirte sei wiederum

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \delta = 0\,;$$

dann erhält man durch Vergleichung der homologen Coefficienten die Bestimmungsgleichungen

$$q^2 = \frac{\alpha - 2m}{\alpha} = \frac{\beta - m^2 - 2n}{\beta - 2p} = \frac{\gamma - 2mn}{\gamma} = \frac{\delta - n^2}{\delta - p^2}\,.$$

Da jedoch drei Bestimmungsgleichungen genügen, so bleibt das Verhältniss zweier Grössen willkürlich, z. B. $q^2 = n : p$. In diesem Falle ist

$$n = \gamma : \alpha\,,\quad p = -\alpha\delta : \gamma\,,\quad m = 2\beta : \alpha\,,\quad q = -\gamma^2 : \alpha^2\delta\,,$$

und es wird zugleich die Reducente (23) zum Verschwinden gebracht. Die transformirte Gleichung wird durch Wurzelausziehung

$$\sqrt{p}\,(x'^2 + mx' + n) = \pm\sqrt{n}\,(x'^2 + p)\,,$$

oder geordnet

$$x'^2 + \frac{m}{\sqrt{p} \mp \sqrt{n}}x' \mp \sqrt{np} = 0\,.$$

Die Grössen p und n sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2 + \frac{\alpha^2\delta - \gamma^2}{\alpha\gamma}\eta - \delta = 0;$$

also

$$x'^2 + \frac{2\beta}{\alpha(\sqrt{\eta_1} \mp \sqrt{\eta_2})}x' \mp \sqrt{-\delta} = 0\,.$$

Von der Gleichung in η lässt sich auch die Gleichung ihrer Quadratwurzeln bilden, nämlich

$$\eta + \frac{\gamma + \alpha\sqrt{-\delta}}{\sqrt{\alpha\gamma}}\sqrt{\eta} + \sqrt{-\delta} = 0 .$$

Die Resolvente ist hier wie früher die bikubische XXV. Sie ist immer lösbar, entweder dadurch, dass man sie in drei quadratische Factoren zerlegt, wie oben gezeigt worden ist, oder auch dadurch, dass man das zweite Glied zum Verschwinden bringt. Setzt man nämlich $z = \frac{1}{4}z' - \frac{1}{4}a$, so verschwinden alle ungeraden Potenzen der Resolvente und man erhält XVIII:

$$\begin{aligned} &z'^6 - (3a^2 - 8b)z'^4 + (3a^4 - 16a^2b + 64ac - 256d)z'^2 \\ &\quad - (a^6 - 8a^4b + 64a^3c - 768a^2d + 2048bd - 512c^2) = 0 . \end{aligned}$$

§ 233. Anwendung des Theorems von Ball auf die vorangehenden Methoden.

Substituirt man in der reducirten Gleichung

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - (3B^2 - \mathfrak{J}) = 0$$

$y = s + \sqrt{z}$, ordnet nach Potenzen von s und führt die Reducente (23) ein, so wird die Gleichung in s direct lösbar. Entwickelt man die Reducente nach Potenzen von z, so resultirt

$$z^3 - 3Bz^2 + (3B^2 - \mathfrak{J})z - (B^3 - B\mathfrak{J} + 2\mathfrak{F}) = 0 .$$

Substituirt man endlich noch $z - B = \zeta$, so gelangt man wieder zur Resolvente XXX, nämlich

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0 .$$

§ 234. Methode der Transformation durch Einführung der Reducente (24) in die Variirte. — Methode von Schlesicke.

Eine biquadratische Gleichung wird auf eine quadratische reducirt, wenn die Summe zweier Wurzeln gleich Null ist, in welchem Falle die Reducente (24) verschwindet. Es lässt sich nun durch eine lineare Transformation eine neue Gleichung

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \delta = 0$$

bilden, in welcher

$$\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0$$

wird. Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von z, so resultirt die Resolvente XXIV:

$$z^6 + \frac{3}{2} a z^5 + \frac{1}{4}(3a^2 + 2b)z^4 + \frac{1}{8}(a^3 + 4ab)z^3$$
$$+ \frac{1}{16}(2a^2b + ac + b^2 - 4d)z^2 + \frac{1}{32}(a^2c + ab^2 - 4ad)z$$
$$- \frac{1}{64}(a^2d - abc + c^2) = 0 .$$

Dieselbe findet sich bei Lacroix (1804), Blomstrand (1847), Schlesicke (1851), Job (1864) und ist identisch mit der Gleichung der halben Wurzelsummen oder der arithmetischen Mittel je zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Die Bildung dieser Gleichungen ist in § 19 gelehrt worden und es möge hier dieselbe noch speciell für die biquadratische Gleichung vorgenommen werden. Es sei zu diesem Zwecke angenommen

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = z , \quad \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = x' .$$

Dann ist allgemein $x = x' + z$. Man erhält nun die Gleichung der arithmetischen Mittel der Wurzeln, wenn man x' eliminirt aus den beiden Gleichungen

$$\text{I.} \quad (x' + z)^4 + a(x' + z)^3 + b(x' + z)^2 + c(x' + z) + d = 0 ,$$
$$\text{II.} \quad (x' - z)^4 - a(x' - z)^3 + b(x' - z)^2 - c(x' - z) + d = 0.$$

Die übrig bleibende Function ist dann

$$(x_1 + x_2 - 2z)(x_1 + x_3 - 2z)(x_1 + x_4 - 2z) \times$$
$$(x_2 + x_3 - 2z)(x_2 + x_4 - 2z)(x_3 + x_4 - 2z) = 0 .$$

Entwickelt man die Gleichungen I. und II., so ist die halbe Summe derselben

$$\text{III.} \quad x'^4 + (6z^2 + 3az + b)x'^2 + (z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$$

die halbe Differenz

$$\text{IV.} \quad (4z + a)x'^3 + (4z^3 + 3az^2 + 2bz + c)x' = 0 .$$

Dividirt man die letzte Gleichung durch x' und setzt den Werth x'^2 in die vorhergehende ein, so erhält man die Reducente

$$\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \delta^2 = 0 .$$

Die Formen der beiden Gleichungen III. und IV. legen es uns nahe, eine derartige Theilung des Polynoms vorzunehmen, wie es auch von Francoeur*) und Schlesicke**) direct ausgeführt

---

*) Cours compl. de mathém. II. § 581. Paris 1837. Man vergl. auch oben § 214.

**) Grun. Arch. XVI. 58. 1850.

worden ist. Schlesicke und Job*) haben gezeigt, wie man die bikubische Resolvente XXIV in drei quadratische Factoren zerlegen kann. Man setze zu diesem Zwecke

$$4z^2 + 2az + u_1 = 0\,,$$
$$4z^2 + 2az + u_2 = 0\,,$$
$$4z^2 + 2az + u_3 = 0\,,$$

worin die Absolutglieder u_1, u_2, u_3 noch unbestimmt, aber, wie gleich gezeigt werden wird, die Wurzeln der kubischen Resolvente XVI sind. Dividirt man nämlich diese drei Partialgleichungen durch 4 und multiplicirt sie mit einander, so erhält man

$$\begin{aligned} z^6 &+ \frac{3}{2}az^5 + \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + 3a^2)z^4 + \frac{1}{4}a\left(u_1 + u_2 + u_3 + \frac{1}{2}a^2\right)z^3 \\ &+ \frac{1}{16}[u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 + a^2(u_1 + u_2 + u_3)]z^2 \\ &+ \frac{1}{16}a(u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1)z + \frac{1}{64}u_1u_2u_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Setzt man in den beiden kubischen Gleichungen in z die homologen Coefficienten einander gleich, so erhält man folgende drei Bestimmungsgleichungen für u_1, u_2, u_3:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 2b\,, \\ u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 &= b^2 + ac - 4d\,, \\ u_1u_2u_3 &= -(a^2d - abc + c^2)\,. \end{aligned}$$

Demnach sind u_1, u_2, u_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$u^3 - 2bu^2 + (b^2 + ac - 4d)u + (a^2d - abc + c^2) = 0\,.$$

Diese vollständige kubische Gleichung kann man auch noch von dem zweiten Gliede befreien und an ihre Stelle setzen

$$\begin{aligned} &\left(u - \frac{2}{3}b\right)^3 - \frac{1}{3}(b^2 - 3ac + 12d)\left(u - \frac{2}{3}b\right) \\ &\qquad - \frac{1}{27}(72bd + 9abc - 27a^2d - 27c^2 - 2b^3) = 0\,. \end{aligned}$$

Wenn man nun weiter

$$u - \frac{2}{3}b = -2\zeta$$

substituirt, so geht die kubische Resolvente über in

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0\,.$$

Man erhält auf diese Weise

---

*) Job, Beitr. zur Aufl. der Gleichungen. Progr. Dresden 1864.

$$4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = 2\zeta,$$

und weil

$$(2\zeta)^3 - 4\mathfrak{J}(2\zeta) + 16\mathfrak{F} = 0$$

ist, so nimmt die Resolvente XXIV nunmehr die Form an

$$\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^3 - 4\mathfrak{J}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right) + 16\mathfrak{F} = 0,$$

oder auch

$$(6z^2 + 3az + b)^3 - 9\mathfrak{J}(6z^2 + 3az + b) + 54\mathfrak{F} = 0.$$

Aus der Gleichung

$$4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = 2\zeta$$

folgt weiter

$$\left(2z + \frac{1}{2}a\right)^2 = 2\zeta + \frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{3}b = \frac{1}{4}y^2,$$

und somit

$$z = -\frac{1}{4}a \pm \frac{1}{4}y.$$

Führen wir aus der vorhergehenden Gleichung für ζ seinen Werth in die Gleichung

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0$$

ein, so erhalten wir die Resolvente XVII:

$$y^6 - (3a^2 - 8b)y^4 + (3a^4 - 16a^2b + 16ac + 16b^2 - 64d)y^2$$
$$- (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0,$$

welche sich zuerst bei Lagrange findet. Es ist dies übrigens dieselbe Gleichung, welche wir erhalten haben würden, wenn die Variation durch die Substitution

$$x + \frac{1}{4}a = x' + \frac{1}{4}z$$

ausgeführt worden wäre.

Wie nun aus den abgeleiteten Formeln die vier Wurzeln gefunden werden können, ist leicht zu übersehen. Mit Hülfe von

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0$$

findet man aus der Gleichung

$$4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = 2\zeta$$

sechs Werthe von z, nämlich

$$z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad z_6 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4),$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3), \quad z_5 = \frac{1}{2}(x_2 + x_4),$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_4), \quad z_4 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3).$$

Daraus folgt durch Addition je dreier Gleichungen

$$x_1 = z_1 + z_2 + z_3 + \frac{1}{2}a,$$

$$x_2 = z_1 + z_5 + z_4 + \frac{1}{2}a,$$

$$x_3 = z_6 + z_2 + z_4 + \frac{1}{2}a,$$

$$x_4 = z_6 + z_5 + z_3 + \frac{1}{2}a.$$

Uebrigens lassen sich die vier Wurzeln auch mittels eines einzigen Werthes von z berechnen. Aus III. und IV. folgen die Gleichungen

$$x'^4 + \beta x'^2 + \delta = 0,$$

$$x'^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0.$$

Dividiren wir die letzte Gleichung in die Variirte

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{\alpha\beta\gamma - \gamma^2}{\alpha^2} = 0,$$

so ergibt sich daraus noch die zweite quadratische Gleichung

$$x'^2 + \alpha x' + \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} = 0.$$

Man findet demnach x_1, x_2, x_3, x_4 aus den Gleichungen

$$x'^2 + \frac{\gamma}{a} = 0,$$

$$x'^2 + \alpha x' + \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} = 0,$$

und

$$x' + z = x.$$

§ 235. Reduction einer biquadratischen Gleichung mittels Reducente (24) auf die Differenz zweier Quadrate.

Setzt man

$$(x'^2 + mx' + n)^2 - (mx' + p)^2 = 0,$$

oder, indem man nach Potenzen der variirten Unbekannten $x' = x - z$ ordnet,

$$x'^4 + 2mx'^3 + 2nx'^2 + 2m(n-p)x' + n^2 - p^2 = 0,$$

so wird durch die Relation

$$(2m)^2(n^2-p^2) - (2m)^2 2n(n-p) + (2m)^2(n-p)^2 = 0$$

die Reducente $\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2$ zum Verschwinden gebracht.

Die Variirte lässt sich in das Product

$$(x'^2 + n - p)(x'^2 + 2mx' + n + p) = 0$$

verwandeln, oder kurz in

$$(x'^2 + q)(x'^2 + ux' + v) = 0.$$

Entwickelt man dies Product in das Polynom

$$x'^4 + ux'^3 + (q+v)x'^2 + qux' + qv = 0,$$

so gelten die Bestimmungsgleichungen

$$u = \alpha, \quad q = \gamma : \alpha, \quad v = \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha}.$$

Die Grössen q und v sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2 - \beta\eta + \delta = 0,$$

und die vier Wurzeln der variirten Gleichung gegeben durch

$$x'^2 + \eta_1 = 0,$$
$$x'^2 + \alpha x' + \eta_2 = 0.$$

Endlich ist $x = x' + z$, wo z eine Wurzel der Resolvente XXV bezeichnet.

§ 236. Reduction der biquadratischen Gleichung durch Variation auf die Form

$$\left(\frac{x^2 + mx' + n}{px' + q}\right)^2 - \left(\frac{m}{p}\right)^2 = 0.$$

Diese Transformation lässt sich durch Einführung der Reducente (24) in die Variirte bewerkstelligen. Denn entwickelt man die Substituirte nach Potenzen von x', so resultirt die Gleichung

$$x'^4 + 2mx'^3 + 2nx'^2 + 2m\frac{pn - qm}{p}x' + \frac{p^2n^2 - q^2m^2}{p^2} = 0,$$

welche der Bedingung $\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0$ Genüge leistet.

Setzt man der Kürze wegen also

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \delta = 0$$

und setzt die homologen Coefficienten einander gleich, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

$$m = \frac{1}{2}\alpha\,, \quad n = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2\delta + \gamma^2}{\alpha\gamma}\,, \quad q:p = \frac{\alpha^2\delta - \gamma^2}{\alpha^2\gamma}\,.$$

Es bleibt also eine der Grössen p und q willkürlich.

Setzt man $q:p = p:m$, so fällt die Methode mit der im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen zusammen; es wird

$$p = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2\delta - \gamma^2}{\alpha\gamma}\,.$$

Daraus ergeben sich wieder die Gleichungen

$$x'^2 + \alpha x' + \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} = 0\,, \quad x'^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0\,.$$

§ 237. Anwendung des Theorems von Ball auf diese Methoden.

Wenn man in der reducirten Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{4}a\right)^4 - 6B\left(x + \frac{1}{4}a\right)^2 + 4G\left(x + \frac{1}{4}a\right) - (3B^2 - \mathfrak{J}) = 0\,,$$

oder in kürzerer Form

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - (3B^2 - \mathfrak{J}) = 0\,,$$

$y = s + \sqrt{-\frac{1}{2}z}$ setzt und nach Potenzen von s ordnet, sowie die Reducente (24) in die neuen Coefficienten einführt, so wird die Gleichung in s direct lösbar. Ordnet man die Reducente nach Potenzen von z, so resultirt

$$z^3 - 6Bz^2 + (12B^2 - \mathfrak{J})z - (8B^3 - 2B\mathfrak{J} + 2\mathfrak{F}) = 0\,.$$

Substituirt man endlich $z - 2B = -\zeta$, so gelangt man wieder zur Resolvente XXX, nämlich

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0\,.$$

§ 238. Methode der Transformation durch Einführung der Reducente (24) I und (26) in die quadratisch variirte Stammgleichung.

Eine biquadratische Gleichung lässt sich immer auf eine quadratische Form bringen, wenn die Wurzeln eine arithmetische Proportion bilden, in welchem Falle die kubische Variante G oder V_3 verschwindet. Bei der allgemeinen Gleichung muss man suchen, die kubische Variante der Variirten zum Verschwinden zu bringen. Dieses kann durch eine quadratische Transformation bewerkstelligt werden, indem man setzt $(x - z)^2 = x'$. Dieselbe führt auf die Gleichung

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' + \delta_1 = 0,$$

und die Entwickelung der Reducente (26), nämlich

$$-(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1) = \alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 8\alpha^2(\alpha\gamma + \beta^2 - \delta) - 16\alpha\beta\gamma + 8\gamma^2 = 0$$

nach Potenzen der Variation z führt auf die Resolvente XX unter der speciellen Form

$$(a^3 - 4ab + 8c)z^3 + \frac{1}{2}(3a^4 - 14a^2b + 20ac + 8b^2 - 32d)z^2$$
$$+ \frac{1}{4}(3a^5 - 16a^3b + 20a^2c + 16ab^2 - 32ad - 16bc)z$$
$$+ \frac{1}{8}(a^6 - 6a^4b + 8a^3c + 8a^2b^2 - 8a^2d - 16abc + 8c^2) = 0.$$

Dieselbe findet sich zuerst in den Schriften von Lagrange (Réflexions etc. pag. 193). Setzt man

$$z = -\frac{1}{4}a - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{4\left[8\zeta + \frac{1}{3}(3a^2 - 8b)\right]},$$

so resultirt die Resolvente XXX.

Die vorgelegte biquadratische Gleichung wird durch diese Transformation nun auf die Form

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 - \frac{1}{2}(\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1)x' + \delta_1 = 0$$

gebracht, welche sich in zwei quadratische Factoren

$$x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \frac{\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2\delta}}{\alpha_1} = 0$$

und

$$x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2\delta_1}}{\alpha_1} = 0$$

zerlegen lässt. Hieraus findet man schliesslich $x = \sqrt{x'} + z$. Die Berechnung der Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ ist aus dem Früheren (§ 217) bekannt; es sind nämlich die Coefficienten der Gleichung der Wurzelquadrate der linear transformirten Gleichung.

§ 239. Reduction der biquadratischen Gleichung mittels der Reducente (21) I auf die Differenz zweier Quadrate oder das Product zweier trinomischer Factoren.

Eine biquadratische Gleichung, in welcher die Reducente (21) I gleich Null ist, lässt sich stets auf die Form

$$(x'^2 + mx' + n)^2 - p^2 = 0$$

bringen oder auch in das Product

$$(x'^2 + mx' + [n + p])(x'^2 + mx' + [n - p]) = 0$$

verwandeln. Entwickelt man dasselbe nach Potenzen von x', so resultirt

$$x'^4 + 2mx'^3 + (m^2 + 2n)x'^2 + 2mnx' + (n^2 - p^2) = 0\,.$$

Vergleicht man die homologen Glieder der beiden variirten Gleichungen, so ergeben sich daraus folgende Bestimmungsgleichungen für m, n und p:

$$m = \frac{1}{2}\alpha_1\,,\quad n = \gamma_1 : \alpha_1\,,\quad p = \sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2\delta_1} : \alpha_1\,.$$

Hieraus ergeben sich leicht die im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Formeln. Man kann denselben eine etwas modificirte Form geben, nämlich

$$x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' - \frac{1}{8}(\alpha_1^2 - 4\beta_1) \pm \frac{1}{8}\sqrt{(\alpha_1^2 - 4\beta_1)^2 - 64\delta_1} = 0.$$

Die Function $(\alpha_1^2 - 4\beta_1)^2 - 64\delta_1$, welche hierbei auftritt, hat noch eine bemerkenswerthe Bedeutung. Wenn nämlich dieselbe in einer biquadratischen Gleichung gleich Null wird, so verschwindet zugleich die kubische Variante der Gleichung ihrer Quadratwurzeln. Hat die primäre Gleichung also die specielle Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{(a^2 - 4b)^2}{64} = 0\,,$$

so hat die andere Gleichung die Form

$$x^8 + Ax^6 + Bx^4 - \frac{1}{8}(A^3 - 4AB)x^2 + D = 0\,.$$

§ 240. Reduction einer biquadratischen Gleichung durch Variation auf die Form

$$\left(\frac{x'^2 + mx' + n}{x'^2 + mx' + p}\right)^2 - u^2 = 0\,.$$

Wenn man die Reducente (21) I in die Coefficienten der quadratisch Variirten einführt, so lässt sich die transformirte Gleichung

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' + \delta_1 = 0$$

stets auf eine der voranstehenden analoge Form bringen. Man kann zunächst n^2 willkürlich annehmen, z. B. gleich -1. Entwickelt man die Substituirte, so resultirt bei den Annahmen

$$m = \frac{1}{2}\alpha_1\,,\quad n = y_1\,,\quad p = y_2\,,$$

die Gleichung

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \left(\frac{1}{4}\alpha_1^2 + y_1 + y_2\right)x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(y_1 + y_2)x' + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) = 0\,.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung erfüllen die Bedingung $\alpha_1^3 - 4\alpha_1\beta_1 + 8\gamma_1 = 0$ und diese gibt nach Potenzen der Variation z entwickelt, die Resolvente XX. Die reducirte Gleichung ist

$$x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2) \pm (y_1 - y_2)\sqrt{-1}\right] = 0\,.$$

Die Grössen y_1 und y_2 berechne man aus den Relationen

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2\gamma_1 : \alpha_1\,, \\ y_1^2 + y_2^2 &= 2\delta_1\,, \\ y_1 - y_2 &= \pm 2\sqrt{\frac{\alpha_1^2\delta_1 - \gamma_1^2}{\alpha_1^2}}\,. \end{aligned}$$

Man kann auch $y_1 = 0$ und $u^2 = y_1 : y_2$ setzen. Die reducirte Gleichung wird alsdann

$$x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \frac{y_2\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_1} \mp \sqrt{y_2}} = 0\,.$$

Die Entwicklung der substituirten Function ergibt

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \left[\frac{1}{4}\alpha_1^2 + \frac{2y_1y_2}{y_1 - y_2}\right]x'^2 + \frac{\alpha_1 y_1 y_2}{y_1 - y_2}x' + \frac{y_1y_2^2}{y_1 - y_2} = 0,$$

und die Hülfsgrössen y_1 und y_2 bestimmt man für diesen Fall aus

$$y_2 = \frac{\alpha_1\delta_1}{\gamma_1}, \quad y_1 = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_1}{\alpha_1^2\delta_1 - \gamma_1^2}\,.$$

Endlich kann man auch noch annehmen, es sei $n = y_1$, $p = y_2$ und $u^2 = y_2 : y_1$. Die Reducirte lautet in dem Falle

$$x'^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 x' + \left(y_1 + \sqrt{y_1y_2} + y_2\right) = 0\,.$$

Entwickelt man wieder die substituirte Function nach Potenzen der variirten Wurzelgrösse x', so resultirt die Gleichung

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \left[\frac{1}{4}\alpha_1^2 + 2(y_1 + y_2)\right]x'^2 + \alpha_1(y_1 + y_2)x' + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) = 0\,.$$

Die Bestimmungsgleichungen für y_1 und y_2 sind alsdann folgende:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \gamma_1 : \alpha_1\,, \\ y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 &= \delta_1\,. \end{aligned}$$

Hieraus findet man mit leichter Mühe

$$y_1 + \sqrt{y_1y_2} + y_2 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \pm \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - \alpha_1^2\delta_1}{\alpha_1^2}}\,.$$

§ 241. Anwendung des Theorems von Ball auf diese Methoden.

Um die Stammgleichung $f(x) = 0$ auf die Form

$$s^3 + \alpha_1 s^2 + \beta_1 s - \frac{1}{8}(\alpha_1{}^3 - 4\alpha_1\beta_1)s + \delta_1 = 0$$

zu bringen, setze man in der Gleichung

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - (3B^2 - \mathfrak{J}) = 0$$

$y = \sqrt{s} - \frac{1}{z}$ und bilde die Gleichung der Wurzelquadrate. Ordnet man dieselbe nach Potenzen von s und führt die Reducente (21) I. ein, so wird die nach z geordnete Resolvente:

$$G^2 z^3 + 6BGz^2 + (12B^2 - \mathfrak{J})z + 2G = 0.$$

Multiplicirt man dieselbe mit G und substituirt $Gz - 2B = -\zeta$, so resultirt abermals die Resolvente XXX, nämlich

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0.$$

§ 242. Methode der Auflösung einer biquadratischen Gleichung durch die Bildung der Gleichung ihrer Quadratwurzeln.

Diese Methode ist der in § 167 für die Auflösung der kubischen Gleichungen entwickelten ganz entsprechend. Bildet man von der Gleichung

$$y^4 + Ay^3 + By^2 - \frac{1}{8}(A^3 - 4AB)y + D = 0,$$

welche sich in die quadratischen Factoren

$$y^2 + \frac{1}{2}Ay - \frac{1}{8}(A^2 - 4B) \pm \frac{1}{8}\sqrt{(A^2 - 4B)^2 - 64D} = 0.$$

zerlegen lässt, die Gleichung ihrer Wurzelquadrate:

$$y^8 - (A^2 - 2B)y^6 + \frac{1}{4}(A^4 - 4A^2B + 4B^2 + 8D)y^4$$
$$- \frac{1}{64}[A^2(A^2 - 4B)^2 - 128BD]y^2 + D^2 = 0,$$

oder kurz

$$y^8 + \alpha y^6 + \beta y^4 + \gamma y^2 + \delta = 0,$$

so findet für diese Gleichung die Beziehung

$$(\alpha^2 - 4\beta)^2 - 64\delta = 0$$

statt. Bildet man demnach von der Stammgleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

die Variirte und setzt die vorstehende Gleichung in die Coefficienten ein, so wird

$$x'^4 + \alpha x'^3 + \beta x'^2 + \gamma x' + \frac{(\alpha^2 - 4\beta)}{64} = 0,$$

und die Resolvente ist die lineare

$$(a^3 - 4ab + 8c)z - \frac{1}{8}(a^4 - 8a^2b + 16b^2 - 64d) = 0.$$

Um die vorhergehende Gleichung in x' aufzulösen, bilde man die Gleichung ihrer Quadratwurzeln, welche die Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 - \frac{1}{8}(A^3 - 4AB)y + D = 0$$

hat. Die Coefficienten berechne man aus den Bestimmungsgleichungen

$$A^2 - 2B = \alpha,$$
$$A^2(A^2 - 4B)^2 + 16(\alpha^2 - 4\beta)B + 64\gamma = 0,$$
$$D = -\frac{1}{8}(\alpha^2 - 4\beta).$$

Eliminirt man aus der zweiten dieser drei Gleichungen B mit Anwendung der ersten, so resultirt die nach Potenzen von A geordnete kubische Resolvente

$$A^6 + 4\alpha A^4 + 4(3\alpha^2 - 8\beta)A^2 + 8(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = 0.$$

Die Gleichung in B ist ebenfalls vom dritten Grade, nämlich

$$B^3 + \frac{1}{2}\alpha B^2 + \frac{1}{4}(7\alpha^2 - 32\beta)B - \frac{1}{8}(\alpha^3 - 64\gamma) = 0.$$

B lässt sich natürlich berechnen mittels der ersten Bestimmungsgleichung, wenn ein Werth von A bekannt ist. Aus y berechnet man x' und mittels z auch x, wobei zu bedenken bleibt, dass auch hier wie bei den Variationen höherer Ordnung fremde Lösungen auftreten. Es wird deshalb weiter noch eine Prüfung anzustellen sein, ob man einen wahren Wurzelwerth gefunden hat oder nicht.

Die kubischen Resolventen können ebenfalls auf die bekannte Form $2\varDelta = 0$ gebracht werden. Bildet man nämlich von der ersten Resolvente die Gleichung ihrer Wurzelproducte

$$z^6 + 4(3\alpha^2 - 8\beta)z^4 + 32\alpha(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma)z^2 + 64(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma)^2 = 0$$

und substituirt

$$z^2 = 32\zeta - \frac{4}{3}(3\alpha^2 - 8\beta),$$

so erhält man die der Resolvente XXX. entsprechende Form

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}_u\zeta + 2\mathfrak{J}_u = 0.$$

§ 243. Methode der Transformation durch Einführung der Reducente (30) in die quadratisch variirte Stammgleichung.

Bildet man von einer vorgelegten allgemeinen biquadratischen Gleichung die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten und setzt ihre Discriminante gleich Null, so erhält man durch Entwickelung derselben nach Potenzen der Variation z die Gleichung der arithmetischen Mittel XXIV. Diese ist zwar vom sechsten Grade, lässt sich jedoch nach § 234 auf die einfache Form

$$(6z^2 + 3az + b)^3 - 9\mathfrak{J}(6z^2 + 3az + b) + 54\mathfrak{F} = 0$$

reduciren. Daraus berechnet man zunächst z. Um x zu finden, bedarf es nur noch der Bestimmung von x' aus den beiden Gleichungen

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' + \delta_1 = 0$$

und

$$4x'^3 + 3\alpha_1 x'^2 + 2\beta_1 x' + \gamma_1 = 0.$$

§ 244. Methode der Transformation durch Einführung der Reducente (31) in die Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten.

Wenn man die vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ quadratisch variirt, indem gesetzt wird $(x - z)^2 = x'$, so erhält man

$$x'^4 + \alpha_1 x'^3 + \beta_1 x'^2 + \gamma_1 x' + \delta_1 = 0.$$

Setzt man die kubische Invariante $\mathfrak{F}_u$ dieser Gleichung gleich Null und ordnet sie nach Potenzen von z, so resultirt die Resolvente XXXII., nämlich

$$432\mathfrak{F}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^3 - 288\mathfrak{J}^2\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right)^2$$
$$+ 4 \,.\, 432\mathfrak{J}\mathfrak{F}\left(4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b\right) + 128\mathfrak{J}^3 - 8 \,.\, 864\mathfrak{F}^2 = 0.$$

Substituirt man $4z^2 + 2az + \frac{2}{3}b = 2\eta$, so lässt sich die Gleichung umformen in

$$(9\mathfrak{F}\eta - \mathfrak{J}^2)^3 - 3\mathfrak{J}\frac{D_4}{256}(9\mathfrak{F}\eta - \mathfrak{J}^2) - 2\frac{D_4^2}{256^2} = 0.$$

Hieraus berechnet man η und z. Um x' zu finden, gehe man aus von dem Producte

$$(x'^2 + 2ux' + uv + p)(x'^2 + 2vx' + uv - p) = 0.$$

Entwickelt man nach Potenzen von x', so erhält man

$$x'^4 + 2(u+v)x'^3 + 6uvx'^2 + [2uv(u+v) + 2p(v-u)]x' + (u^2v^2 - p^2) = 0.$$

Durch Vergleichung der homologen Coefficienten erhält man

$$u + v = \frac{1}{2}\alpha_1, \quad uv = \frac{1}{6}\beta_1, \quad p = \frac{1}{6}\sqrt{\beta_1^2 - 36\delta_1}.$$

u und v sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 u + \frac{1}{6}\beta_1 = 0,$$

und x' wird berechnet aus

$$x'^2 + 2u_1 x' + \frac{1}{6}\beta_1 \pm \frac{1}{6}\sqrt{\beta_1^2 - 36\delta_1} = 0.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung repräsentiren vier harmonische Puncte:

$$\begin{array}{ll} -u - \sqrt{u^2 - uv - p}, & -v - \sqrt{v^2 - uv + p}, \\ -u + \sqrt{u^2 - uv - p}, & -v + \sqrt{v^2 - uv + p}, \end{array}$$

denn es ist

$$\frac{u-v+\sqrt{u^2-uv+p}-\sqrt{v^2-uv+p}}{-(u-v)+\sqrt{u^2-uv-p}+\sqrt{v^2-uv+p}} = \frac{u-v+\sqrt{v^2-uv+p}+\sqrt{u^2-uv-p}}{u-v+\sqrt{v^2-uv+p}-\sqrt{u^2-uv-p}}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich auf folgende Art herleiten. Es sei

$$(x^2 + 2ux + y)(x^2 + 2vx + z) = 0,$$

also die Wurzeln

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ und } x_3 = -u \mp \sqrt{u^2 - y}, \\ x_2 \text{ und } x_4 = -v \mp \sqrt{v^2 - z}. \end{array}$$

Diese Wurzeln haben folgende drei Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4} &= -1, \\ \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} &= 2, \\ \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} : \frac{x_3 - x_4}{x_2 - x_4} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man die Werthe für x_1, x_2, x_3, x_4 in diese Ausdrücke ein, so erhält man jedesmal die Bestimmungsgleichung

$$y + z = 2uv,$$

folglich ist

$$y = uv + p, \quad z = uv - p.$$

§ 245. Verallgemeinerung der Euler'schen Methode nach Lagrange.

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Man setze

$$x + \frac{1}{4}a = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},$$

wo z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der kubischen Resolvente

$$z^3 + fz^2 + gz + h = 0$$

bedeuten. Die substituirte Function werde beiderseits zum Quadrat erhoben, also

$$x^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{16} a^2 = z_1 + z_2 + z_3 + 2\left(\sqrt{z_1 z_2} + \sqrt{z_2 z_3} + \sqrt{z_3 z_1}\right),$$

oder

$$x^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{16} a^2 + f = 2\left(\sqrt{z_1 z_2} + \sqrt{z_2 z_3} + \sqrt{z_3 z_1}\right).$$

Erhebt man auch diese Gleichung zum Quadrat, so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -f, \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 &= \quad g, \\ z_1 z_2 z_3 &= -h: \end{aligned}$$

$$x^4 + ax^3 + \frac{1}{8}(3a^2 + 16f)x^2 + \frac{1}{16}(a^3 + 16af - 128\sqrt{-h})\,x$$
$$+ \frac{1}{256}(a^4 + 32a^2 f + 256 f^2 - 1024 g - 512 a\sqrt{-h}) = 0.$$

Vergleicht man die homologen Coefficienten dieser und der vorgelegten Gleichung, so resultiren die Bestimmungsgleichungen:

$$f = -\frac{1}{16}(3a^2 - 8b), \quad g = \frac{1}{16^2}(3a^4 - 16a^2 b + 16ac + 16b^2 - 64d),$$
$$h = -\frac{1}{16^3}(a^3 - 4ab + 8c)^2.$$

Dies führt uns also auf die Resolvente XVII, welche durch die Substitution

$$z = 8\zeta + \frac{1}{3}(3a^2 - 8b)$$

auf die Normalform XXX. gebracht wird.

Die gesuchten Wurzelwerthe sind nun

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{4} a + \sqrt{z_1} \pm \left(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right),$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{4} a - \sqrt{z_1} \pm \left(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\right),$$

wenn

$$\sqrt{-h} = \sqrt{z_1 z_2 z_3} = -\frac{1}{64}(a^3 - 4ab + 8c) \text{ positiv ist;}$$

dagegen

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{4} a - \sqrt{z_1} \mp \left(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right),$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{4} a + \sqrt{z_1} \mp \left(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\right),$$

wenn

$$\sqrt{z_1 z_2 z_3} = -\frac{1}{64}(a^3 - 4ab + 8c) \text{ negativ ist.}$$

§ 246. **Methode von Grunert*).**

Zwischen den vier Grössen t, u, v, w findet folgende identische Gleichung statt, wobei der Kürze wegen $t + u + v + w = s$ gesetzt ist:

$$\begin{aligned} &s^4 - 4ts^3 + 2(3t^2 - u^2 - v^2 - w^2)s^2 - 4[2uvw + t(t^2 - u^2 - v^2 - w^2)]s \\ &\quad + [t^4 - 2t^2(u^2 + v^2 + w^2) + 8uvwt - 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) \\ &\quad + (u^2 + v^2 + w^2)^2] = 0. \end{aligned}$$

Gegeben sei nun die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Man nehme an, es sei

$$x = s = t + u + v + w$$

und

$$4t + a = 0,$$

so ist offenbar

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{16}(3a^2 - 8b),$$

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = \frac{1}{16^2}(3a^4 - 16a^2b + 16ac + 16b^2 - 64d),$$

$$u^2v^2w^2 = \frac{1}{16^3}(a^3 - 4ab + 8c)^2.$$

Aus der Beziehung

$$4[2uvw + t(t^2 - u^2 - v^2 - w^2)] = -c$$

folgt noch

$$uvw = -\frac{1}{4^3}(a^3 - 4ab + 8c).$$

Nun ist klar, dass u, v, w die drei Wurzeln der Resolvente XV:

$$\begin{aligned} &z^6 - \frac{1}{16}(3a^3 - 8b)z^4 + \frac{1}{16^2}(3a^4 - 16a^2b + 16ac + 16b^2 - 64d)z^2 \\ &\quad - \frac{1}{16^3}(a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0 \end{aligned}$$

sind und dass im Uebrigen diese Auflösungsmethode so ziemlich genau mit der vorigen übereinstimmt.

---

*) Grunert's Arch. XL. 394. 1863.

§ 247. Methode der Auflösung durch die Bildung der Gleichung der Wurzelquadrate der substituirten Function*).

In § 209 ist eine sinnreiche Methode mitgetheilt worden, welche Hulbe anwandte, um die unvollständige biquadratische Gleichung aufzulösen. Dieselbe lässt sich in folgender Weise verallgemeinern. Man substituire

$$z^3 + \left(x + \frac{1}{4}a\right)z^2 + pz + q = 0,$$

und bilde hiervon die Gleichung der Wurzelquadrate. Man erhält nach den bekannten Regeln

$$z^6 - \left[\left(x + \frac{1}{4}a\right)^2 - 2p\right]z^4 + \left[p^2 - 2\left(x + \frac{1}{4}a\right)q\right]z^2 - q^2 = 0,$$

oder kurz

$$z^6 + fz^4 + gz^2 + h = 0.$$

Hieraus folgen die Bestimmungsgleichungen

$$p = \frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{1}{4}a\right)^2 + f\right],$$

$$p^2 - 2q\left(x + \frac{1}{4}a\right) = g, \quad q^2 = -h.$$

Eliminirt man p und q aus diesen Gleichungen und ordnet die Resultante nach Potenzen von x, so findet man

$$x^4 + ax^3 + \frac{1}{8}(3a^2 + 16f)x^2 + \frac{1}{16}(a^3 + 16af - 128\sqrt{-h})x$$
$$+ \frac{1}{256}(a^4 + 32a^2f + 256f^2 - 1024g - 512a\sqrt{-h}) = 0.$$

Vergleicht man die homologen Coefficienten dieser und der vorgelegten Gleichung, so resultiren daraus die drei Bestimmungsgleichungen von f, g, h und damit wieder die Resolvente XVII. von Lagrange.

§ 248. Methode von Cayley, Hesse, Hermite, Aronhold und Lebesgue**).

Man gehe aus von der reducirten Form der Gleichung

$$y^4 - 6By^2 + 4Gy - (3B^2 - J) = 0,$$

*) Grunert's Archiv XLV. 415. 1866.

**) Crelle's Journal LII. 1856. Nouv. ann. de math. par Terquem XVII. 389. 1858.

und substituire

$$y = \sqrt{Az_1 + C} + \sqrt{Az_2 + C} + \sqrt{Az_3 + C} = u + v + w.$$

Es seien z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der Resolvente

$$z^3 + Qz - R = 0.$$

Zur Bestimmung der Grössen A und C hat man nun

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ y &= u + v + w, \\ y^2 - 3C &= 2(uv + uw + vw). \end{aligned}$$

Quadrirt man abermals, so resultirt

$$y^4 - 6Cy^2 + 9C^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvwy,$$

oder, indem man die Werthe von u^2, v^2, w^2 einsetzt,

$$y^4 - 6Cy^2 - 8uvwy - (3C^2 + 4A^2Q) = 0.$$

Vergleicht man diese mit der angenommenen Form, so erkennt man, dass $C = B$ und $4A^2Q = -\mathfrak{J}$ ist.

Es ist nun weiter

$$uvw = \sqrt{A^3R + A^2BQ + B^3} = -\frac{1}{2}G,$$

folglich

$$A^3R - \frac{1}{4}B\mathfrak{J} + B^3 = \frac{1}{4}G^2,$$

oder

$$4B^3 - G^2 - B\mathfrak{J} = \mathfrak{F} = -4A^3R.$$

Daraus folgt

$$z^3 - \frac{\mathfrak{J}}{4A^2}z + \frac{\mathfrak{F}}{4A^3} = 0.$$

Setzt man $2Az = \zeta$, so erhält man wieder die Resolvente XXX, und beachtet man, dass $C = V_2$, $G = V_3$ ist, so gelangt man zu den exacten Wurzelformen der vollständigen biquadratischen Gleichung, nämlich:

$$x_1 \text{ und } x_2 =$$

$$-\frac{1}{4}a + \sqrt{V_2 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\mathfrak{F} + \frac{1}{144}\sqrt{-3D_4}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\mathfrak{F} - \frac{1}{144}\sqrt{-3D_4}}}$$

$$\pm \sqrt{V_2 + \frac{1}{2}J_1\sqrt[3]{-\mathfrak{F} + \frac{1}{144}\sqrt{-3D_4}} + \frac{1}{2}J_2\sqrt[3]{-\mathfrak{F} - \frac{1}{144}\sqrt{-3D_4}}}$$

$$\pm \sqrt{V_2 + \frac{1}{2}J_2\sqrt[3]{-\mathfrak{F} + \frac{1}{144}\sqrt{-3D_4}} + \frac{1}{2}J_1\sqrt[3]{-\mathfrak{F} - \frac{1}{144}\sqrt{-3D_4}}}$$

$$x_3 \text{ und } x_4 =$$

$$-\tfrac{1}{4}a - \sqrt{V_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\mathfrak{F} + \tfrac{1}{144}\sqrt{-3D_4}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\mathfrak{F} - \tfrac{1}{144}\sqrt{-3D_4}}}$$

$$\pm \sqrt{V_2 + \tfrac{1}{2}J_1\sqrt[3]{-\mathfrak{F} + \tfrac{1}{144}\sqrt{-3D_4}} + \tfrac{1}{2}J_2\sqrt[3]{-\mathfrak{F} - \tfrac{1}{144}\sqrt{-3D_4}}}$$

$$\mp \sqrt{V_2 + \tfrac{1}{2}J_2\sqrt[3]{-\mathfrak{F} + \tfrac{1}{144}\sqrt{-3D_4}} + \tfrac{1}{2}J_1\sqrt[3]{-\mathfrak{F} - \tfrac{1}{144}\sqrt{-3D_4}}}.$$

Die Vorzeichen der vorderen Radicale gelten nur, wenn die kubische Variante $V_3 = \frac{1}{32}(a^3 - 4ab + 8c)$ negativ ist, wodurch die Bedingung

$$\sqrt{V_2 + \tfrac{1}{2}\zeta_1} \cdot \sqrt{V_2 + \tfrac{1}{2}\zeta_2} \cdot \sqrt{V_2 + \tfrac{1}{2}\zeta_3} = -\tfrac{1}{2}V_3$$

erfüllt wird. Ist dagegen V_3 positiv, so sind von sämmtlichen Vorzeichen der vorderen Radicale die entgegengesetzten zu nehmen.

§ 249. Die Methode der falschen Substitutionen*).

Es sei gegeben die vollständige Gleichung

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Sind z_1 und z_2 zwei Substitutionen für die Unbekannte, welche den beiden Gleichungen

$$4z_1z_2(z_1 + z_2) + a[(z_1 + z_2)^2 + 2z_1z_2] + 2b(z_1 + z_2) + 2c = 0,$$
$$2az_1^2z_2^2 + 2bz_1z_2(z_1 + z_2) + c[(z_1 + z_2)^2 + 2z_1z_2] + 4d(z_1 + z_2) = 0$$

genügen und

$$f(z_1) = z_1^4 + az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = \varphi_1,$$
$$f(z_2) = z_2^4 + az_2^3 + bz_2^2 + cz_2 + d = \varphi_2$$

die Fehler der Gleichung; ausserdem Φ_1 und Φ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$f(z_2)u^4 + 3\zeta(z_1 - z_2)^2u^2 + f(z_1) = 0,$$

so ist

$$x = \frac{z_2\Phi_1 - z_1\Phi_2}{\Phi_1 - \Phi_2}.$$

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es sei

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u, \quad x = \frac{z_1 - z_2u}{1 - u}.$$

*) Man vergl. § 161.

Wird der Werth für x in die vorgelegte Gleichung eingesetzt und das Polynom nach Potenzen von u geordnet, so resultirt

$$\begin{aligned}&(z_2^4+az_2^3+bz_2^2+cz_2+d)u^4-[(4z_2^3+3az_2^2+2bz_2+c)z_1\\&+(az_2^3+2bz_2^2+3cz_2+4d)]u^3+[(6z_2^2+3az_2+b)z_1^2\\&+(3az_2^2+4bz_2+3c)z_1+(bz_2^2+3cz_2+6d)]u^2-[(4z_1^3+3az_1^2+2bz_1+c)z_2\\&+(az_1^3+2bz_1^2+3cz_1+4d)]u+(z_1^4+az_1^3+bz_1^2+cz_1+d)=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich auf eine quadratische reduciren, indem man das zweite und vierte Glied gleich Null setzt, also

$$\begin{aligned}(4z_2^3+3az_2^2+2bz_2+c)z_1+(az_2^3+2bz_2^2+3cz_2+4d)&=0,\\(4z_1^3+3az_1^2+2bz_1+c)z_2+(az_1^3+2bz_1^2+3cz_1+4d)&=0.\end{aligned}$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander und dividirt durch z_2-z_1, so erhält man

$$\text{I.}\quad 4z_1z_2(z_1+z_2)+a[(z_1+z_2)^2+2z_1z_2]+2b(z_1+z_2)+2c=0.$$

Multiplicirt man die erste mit z_1^2, die zweite mit z_2^2 und subtrahirt beide von einander, so lässt sich die Differenz ebenfalls durch z_2-z_1 dividiren und man erhält

$$\text{II.}\quad 2az_1^2z_2^2+2bz_1z_2(z_1+z_2)+c[(z_1+z_2)^2+2z_1z_2]+4d(z_1+z_2)=0.$$

Aus I. folgt weiter

$$\text{III.}\quad z_1z_2=-\frac{1}{2}\,\frac{a(z_1+z_2)^2+2b(z_1+z_2)+2c}{2(z_1+z_2)+a}.$$

Multiplicirt man I. mit z_1z_2 und subtrahirt II., so resultirt

$$\text{IV.}\quad z_1+z_2=-4\,\frac{z_1^2z_2^2-d}{az_1z_2-c}.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, bezeichnet z_1z_2 kurz mit π und entwickelt nach Potenzen von π, so erhält man die Resolvente XXI.:

$$\begin{aligned}&(a^3-4ab+8c)\pi^3-(a^2c+8ad-4bc)\pi^2-(ac^2-4abd+8cd)\pi\\&\qquad+(c^3-4bcd+8ad^2)=0.\end{aligned}$$

Hieraus kann z_1z_2 und mittels der Relation

$$z_1+z_2=-4\,\frac{z_1^2z_2^2-d}{az_1z_2-c}$$

jedes zusammengehörige Paar von Werthen berechnet werden. Es lassen sich aber noch zwei andere kubische Resolventen bilden und zwar in z_1+z_2 und in z allein. Die erstere erhält man, wenn man z_1z_2 aus III. in IV. substituirt und entwickelt. Man erhält auf diese Weise die Resolvente XXII:

$$(a^3 - 4ab + 8c)\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$$
$$+ (a^2c - 4bc + 8ad)\left(\frac{\sigma}{2}\right) + (a^2d - c^2) = 0.$$

Um die Gleichung in z allein zu erhalten, gehe man aus von der quadratischen

$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0.$$

Setzt man den Werth von $z_1 + z_2$ ein, so erhält man

$$z^2 + 4\frac{\pi^2 - d}{a\pi - c}z + \pi = 0,$$

und nach Potenzen von π geordnet

$$(4z + a)\pi^2 + (az^2 - c)\pi - (cz + 4d)z = 0.$$

Wenn man aus dieser und der Resolvente XXI. die Grösse π eliminirt, so erhält man die Resolvente XXXI.:

$$C_{4,6}(z) = 0,$$

welches bekanntlich die Form der bikubischen Covariante ist.

Es bleibt noch übrig, die Gleichung in u zu formiren. Das mittelste Glied ist nach § 227, 5 gleich

$$\left.\begin{aligned} &6\pi\left(\pi + \frac{1}{4}a\sigma + \frac{1}{6}b\right) \\ &+ 6\sigma\left(\frac{1}{4}a\pi + \frac{1}{6}b\sigma + \frac{1}{4}c\right) \\ &+ 6\left(\frac{1}{6}b + \frac{1}{4}c\sigma + d\right) \end{aligned}\right\} = 3\zeta(z_1 - z_2)^2.$$

Die reducirte Gleichung nimmt demnach die Form an:

$$f(z_2)u^4 + 3\zeta(z_1 - z_2)^2u^2 + f(z_1) = 0.$$

Diese Methode steht im innern Zusammenhange mit der Methode von Mallet (§ 218). Die vollständige Gleichung in u lässt sich durch die Reducente $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$ nicht auf die reciproke Form bringen, weil dies auf die Relation $z_1 = z_2$ führen würde. Sobald aber das zweite und vierte Glied gleich Null gesetzt sind, die Gleichung also auf die kanonische Form

$$u^4 + Au^2 + B = 0$$

gebracht ist, so wird diese reciprok, wenn man annimmt

$$u = \frac{m + y}{m - y}.$$

Dies gibt nämlich

$$y^4 + 4m\frac{1-B}{1+A+B}y^3 + 6m^2\frac{1-\frac{1}{3}A+B}{1+A+B}y^2 + 4m^3\frac{1-B}{1+A+B}y + m^4 = 0.$$

Sind z_1 und z_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$v^2 - (z_1 + z_2)v + z_1 z_2 = 0$$

und z die Wurzel der Resolvente von Mallet, so ist $z_1 + z_2 = 2z$, und nach dem Vorhergehenden

$$v^2 - 2zv - \frac{1}{4}az \pm \frac{1}{4}\sqrt{a^2z^2 + 8cz + 16d} = 0,$$

oder

$$v^2 - 2zv + z^2 - \frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{4z + a} = 0;$$

folglich

$$v = z \pm \sqrt[4]{z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d} = z \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Dadurch wird

$$x - \frac{z_1 - z_2 u}{1 - u} = x - z + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{1 + u}{1 - u} = 0.$$

Bildet man also die Variirte von $f(x) = 0$, und setzt

$$x' = x - z = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{u + 1}{u - 1},$$

ordnet nach Potenzen von u, so wird die Gleichung von der Form

$$u^4 + Au^2 + B = 0,$$

und zwar, wie in § 219 und § 225 gezeigt ist,

$$u^4 - 2\frac{\alpha\beta - 6\gamma}{\alpha\beta + 2\gamma + 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}u^2 + \frac{\alpha\beta + 2\gamma - 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha\beta + 2\gamma + 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}} = 0.$$

§ 250. Methode der Substitution quadratischer Functionen der Unbekannten mit Anwendung der Eliminationsmethode von Euler, Lacroix und Poisson.

Das folgende Verfahren ist bereits in § 170 auf die Auflösung kubischer Gleichungen angewendet worden. Gegeben sei

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Man substituire

$$x^2 + vx + u = 0,$$

und suche die Finalgleichung in u. Zu dem Zwecke setze man nach einander die beiden Wurzeln x_1 und x_2 der Substituirten in

$f(x)$ ein und multiplicire die Polynome $f(x_1)$ und $f(x_2)$. Daraus resultirt wegen $x_1 x_2 = u$:

$$u^4 + a(S_1 + a)u^3 + b(S_2 + aS_1 + b)u^2 + c(S_3 + aS_2 + bS_1 + c)u \\ + d(S_4 + aS_3 + bS_2 + cS_1 + d) = 0.$$

Nun ist

$$S_1 = -v, \quad S_2 = v^2 - 2u, \quad S_3 = -v^3 + 3vu, \\ S_4 = v^4 - 4uv^2 + 2u^2.$$

Demnach ist die transformirte Gleichung

$$u^4 - [av - (a^2 - 2b)]u^3 + [bv^2 - (ab - 3c)v + (b^2 - 2ac + 2d)]u^2 \\ - [cv^3 - (ac - 4d)v^2 + (bc - 3ad)v - (c^2 - 2bd)]u \\ + d(v^4 - av^3 + bv^2 - cv + d) = 0.$$

Führt man die Reducente (21) I. in die Coefficienten ein, so erhält man die Resolvente XX. Die Gleichung in u lässt sich dann transformiren in die Form

$$y^4 + Ay^2 + B = 0,$$

wenn man annimmt $u = y + \frac{1}{4}(av - a^2 + 2b)$.

§ 251. Dieselbe Auflösung mit Anwendung einer andern Eliminationsmethode mittels symmetrischer Functionen.

Es werde wie vorhin die quadratische Function

$$x^2 + vx + u = 0$$

eingeführt. Betrachtet man v als constant und u als abhängig variabel, so gelten folgende Gleichungen:

$$\Sigma(u) = -vS_1 - S_2 = av - a^2 + 2b,$$

$$\Sigma(u^2) = v^2S_2 + 2vS_3 + S_4 = (a^2 - 2b)v^2 - 2(a^3 - 3ab + 3c)v \\ + (a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2 - 4d),$$

$$\Sigma(u^3) = -v^3S_3 - 3v^2S_4 - 3vS_5 - S_6 = (a^3 - 3ab + 3c)v^3 \\ - 3(a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2 - 4d)v^2 \\ + 3(a^5 - 5a^3b + 5ab^2 + 5a^2c - 5ad - 5bc)v - \cdots$$

$$\Sigma(u^4) = (a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2 - 4d)v^4 \\ - 4(a^5 - 5a^3b + 5ab^2 + 5a^2c - 5ad - 5bc)v^3 + \cdots$$

Mittels dieser Gleichungen lässt sich die Transformirte

$$u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$$

in exacter Form darstellen. Um dies zu bewerkstelligen, beachte man die Newton'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Sigma(u) &= -\alpha, \\
\Sigma(u^2) &= \alpha^2 - 2\beta, \\
\Sigma(u^3) &= -\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma, \\
\Sigma(u^4) &= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen führen nacheinander auf die unbestimmten Coefficienten α, β, γ, δ und schliesslich auf die Gleichung in u, welche wir bereits im vorhergehenden Paragraphen kennen gelernt haben. Ordnen wir dieselbe nach Potenzen von v, also

$$\begin{aligned}
& dv^4 - (cu + ad)v^3 + [bu^2 + (ac - 4d)u + bd]v^2 \\
& \quad - [au^3 + (ab - 3c)u^2 + (bc - 3ad)u + cd]v \\
& \quad + [u^4 + (a^2 - 2b)u^3 + (b^2 - 2ac + 2d)u^2 + (c^2 - 2bd)u + d^2] = 0,
\end{aligned}$$

multipliciren dieselbe mit d^3 und führen die Reducente (21) I. in die Coefficienten ein, so gelangt man zur Resolvente XXI. in folgender Form:

$$\begin{aligned}
& (a^3 - 4ab + 8c)\left(\frac{d}{u}\right)^3 - (a^2c - 4bc + 8ad)\left(\frac{d}{u}\right)^2 \\
& \quad - (ac^2 - 4abd + 8cd)\left(\frac{d}{u}\right) + (c^3 - 4bcd + 8ad^2) = 0.
\end{aligned}$$

§ 252. Reduction der biquadratischen Gleichung mittels der Eliminationsmethode von Sylvester und Hesse.

Die Substituirte sei wiederum $x^2 + vx + u = 0$, oder etwas allgemeiner

$$x^2 + vx + w - y = 0.$$

Es werde die Gleichung in y formirt nach dem in §§ 42, 44, 172 beschriebenen Verfahren, indem man folgendes System von linearen Gleichungen bildet:

$$\begin{aligned}
x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx &= 0, \\
x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 &= 0, \\
x^3 + vx^2 + ux &= 0, \\
x^4 + vx^3 + ux^2 &= 0, \\
x^5 + vx^4 + ux^3 &= 0, \\
x^6 + vx^5 + ux^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Es muss nun die Determinante dieses Systems verschwinden. Man kann dasselbe aber noch reduciren. Setzt man $x = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$, $x^4 = x_4$, $x^5 = x_5$, $x^6 = x_6$, eliminirt x_6, x_5 und x_1, so erhält man folgendes System:

$$\begin{aligned}(v^2 - av + 2u + b)x_4 - \quad (au - c)x_3 - \quad (u^2 - d)x_2 &= 0,\\ x_4 + \quad vx_3 + \quad ux_2 &= 0,\\ (vu - au)x_4 + (u^2 - bu + d)x_3 - (cu - dv)x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Bildet man hiervon die Determinante, so erhält man als Finalgleichung die frühere Gleichung in u:

$$\begin{aligned}&u^4 - [a(v-a) + 2b]u^3 + [b(v^2 - av + b) + 3cv - 2ac + 2d]u^2\\ &\quad - [c(v^3 - av^2 + bv - c) + d(4v^2 - 3av) + 2bd]u\\ &\quad + d(v^4 - av^3 + bv^2 - cv + d) = 0.\end{aligned}$$

Dieselbe lässt sich in der oben vorgeschlagenen Weise verallgemeinern, indem man $u = w - y$ substituirt und nach Potenzen von y entwickelt, wie folgt:

$$\begin{aligned}&y^4 - [4w - a(v-a) - 2b]y^3\\ &\quad + [6w^2 - 3(av - a^2 + 2b)w + b(v^2 - av + b) + 3cv - 2ac + 2d]y^2\\ &\quad - [4w^3 - 3(av - a^2 + 2b)w^2 + 2\{b(v^2 - av + b) + 3cv - 2ac + 2d\}w\\ &\quad - \{cv^3 - av^2 + bv - c) + d(4v^2 - 3av + 2b)\}]y\\ &\quad + [w^4 - (av - a^2 + 2b)w^3 + \{b(v^2 - av + b) + 3cv - 2ac + 2d\}w^2\\ &\quad - \{c(v^3 - av^2 + bv - c) + d(4v^2 - 3av + 2b)\}w\\ &\quad + d(v^4 - av^3 + bv^2 - cv + d)] = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung nimmt die kanonische Form

$$y^4 + Ay^2 + B = 0$$

an, wenn man den zweiten und den vierten Coefficienten gleich Null setzt. Eliminirt man aus diesen beiden Bestimmungsgleichungen für v und w die letztere Grösse, so erhält man die Resolvente XX.

Ist $a = 0$ und wird $v = -\frac{1}{8}\frac{c}{z}$ gesetzt, so geht dieselbe über in die Resolvente von Cartesius und Euler.

§ 253. Transformation der Gleichung in eine andere, in welcher drei Zwischenglieder fehlen, nach Tschirnhausen, Lagrange, Jerrard und Hermite.

In § 51 ist das Theorem bewiesen worden, dass man durch Substitution einer algebraischen Function im Stande ist, das zweite, dritte und vierte Glied einer biquadratischen Gleichung zum Verschwinden zu bringen und dass es hierzu nur der Auflösung einer kubischen Resolvente bedarf. Substituiren wir nämlich

$$tx^3 + vx^2 + ux + (w - y) = 0,$$

so wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a & b & c & d \\ 0 & 1 & a & b & c & d & 0 \\ 1 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & v & u & (w-y) \\ 0 & 0 & t & v & u & (w-y) & 0 \\ 0 & t & v & u & (w-y) & 0 & 0 \\ t & v & u & (w-y) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe lässt sich abkürzen in eine andere von 25 Elementen. Setzt man der kürzern Bezeichnung wegen vorläufig $w - y = s$, so kann man schreiben:

$$\begin{vmatrix} 0 & s & (as-dt) & (bs-dv) & (cs-du) \\ 1 & a & b & c & d \\ (at-v) & (bt-u) & (ct-s) & dt & 0 \\ 0 & t & v & u & s \\ t & v & u & s & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Resultante der substituirten Function und $f(x) = 0$ ist nun eine homogene Function der Grössen t, v, u, s vom vierten Grade. Setzt man wieder $s = w - y$ und ordnet die Resultante nach Potenzen von y, so entsteht die Gleichung

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$$

worin α eine homogene Function der drei Unbestimmten u, v, w vom ersten Grade, β eine solche vom zweiten, γ vom dritten Grade ist; also etwa

$$\alpha = Aw + Bv + Cu + Dt,$$
$$\beta = Ew^2 + Fv^2 + Gu^2 + Ht^2 + Iwv + Kwu + Lwt + Mvu + Nvt + Out.$$

Die binäre Form β lässt sich nach der Eigenschaft homogener quadratischer Functionen in die Summe der Quadrate von vier linearen Functionen zerlegen, also in

$$\beta = (A_1 w + B_1 v + C_1 u + D_1 t)^2 + (A_2 w + B_2 v + C_2 u)^2 + (A_3 w + B_3 v)^2 + (A_4 w)^2.$$

Lässt man nun die drei mittleren Glieder α, β, γ verschwinden, so kann man die Gleichung für β zerlegen in die beiden andern

$$A_1 w + B_1 v + C_1 u + D_1 t = (A_2 w + B_2 v + C_2 u)\sqrt{-1},$$
$$A_3 w + B_3 v = A_4 w \sqrt{-1}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen und der ersten Gleichung

$\alpha = 0$ drei der Grössen w, v, u, t, so behält man noch eine Gleichung mit zweien, welche sich, weil linear, in $\gamma = 0$ substituiren lassen, ohne die Gleichung über ihren dritten Grad zu erhöhen. Die Resolvente ist demnach eine kubische und die Reducirte

$$y^4 + \delta = 0.$$

Hieraus bestimmt man y und mittels der Reducente t, u, v, w. Die gesuchte Wurzel hat alsdann den Werth

$$x = -\frac{P + Qy + Ry^2}{S + Ty + y^2},$$

welcher durch die Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Divisors der beiden Polynome

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$tx^3 + vx^2 + ux + (w - y) = 0$$

gewonnen wird.

§ 254. Die italienische Methode verallgemeinert von Simpson*).

Die Methode von Ferrari, auch die italienische Methode genannt, setzt die Wegschaffung des zweiten Gliedes voraus. Simpson, Lagrange und Euler haben sie für die vollständige Gleichung verallgemeinert.

Das Princip derselben besteht in der Substitution einer biquadratischen Function der Unbekannten, welche sich in die Differenz zweier Quadrate oder in das Product zweier trinomischen Factoren verwandeln lässt. Ist die vorgelegte Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

so nehme man an, das Polynom lasse sich durch eine geeignete Bestimmung anderer Hülfsgrössen z, q und r auf die Form

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + z\right)^2 - (qx + r)^2 = 0$$

reduciren. Entwickelt man diesen Ausdruck in

$$x^4 + ax^3 + \left(\frac{1}{4}a^2 + 2z - q^2\right)x^2 + (az - 2qr)x + (z^2 - r^2) = 0,$$

und vergleicht die homologen Coefficienten dieses und des vorge-

*) Simpson, Treatise of algebra. London 1745.
Euler, Vollständ. Anleitung zur Algebra II. Cap. XIV. 1770.
Lagrange, Nouv. mém. de l'acad. roy. des sciences, année 1770. p. 173 seqq. Berlin 1772.

legten Polynoms, so ergeben sich daraus die drei Bestimmungsgleichungen

$$q^2 = 2z + \frac{1}{4}(a^2 - 4b),$$
$$2qr = az - c,$$
$$r^2 = z^2 - d.$$

Multiplicirt man die erste mit dem Vierfachen der dritten und subtrahirt das Product von dem Quadrate der zweiten Gleichung, so resultirt die Resolvente XIII. in der Form

$$z^3 - \frac{1}{2}bz^2 + \frac{1}{4}(ac - 4d)z - \frac{1}{8}(a^2d - 4bd + c^2) = 0.$$

Diese Gleichung hat wenigstens eine reelle Wurzel, und die vier Wurzeln werden berechnet aus den beiden quadratischen Gleichungen, worin sich die Transformirte zerlegen lässt, nämlich

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a \pm q\right)x + (z \pm r) = 0.$$

Nach dem Vorhergehenden ist nun noch

$$d = z^2 - r^2 = (z + r)(z - r),$$

und wegen der Relationen

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a + q\right)x + (z + r) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a - q\right)x + (z - r) = x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4 = 0,$$

finden noch folgende bemerkenswerthe Gleichungen statt:

$$x_1x_2 = z + r = y,$$
$$x_3x_4 = z - r = d : y.$$

Hieraus folgt

$$2z = y + \frac{d}{y}.$$

Setzt man diesen Werth in die Resolvente XIII. ein, so resultirt die reciproke kubische Resolvente XVI., welches die Gleichung der Wurzelproducte von $f(x) = 0$ ist, und wie später in dem Kapitel über die Combinationsmethoden gezeigt werden wird, die elegantesten Wurzelformen liefert.

Führt man die Werthe von q und r durch z ausgedrückt in die quadratischen Factoren der Transformirten ein, so zerfällt das Polynom $f(x)$ offenbar in das Product

$$\left\{x^2+\left[\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2z}\right]x+\left[z+\sqrt{z^2-d}\right]\right\}\times$$
$$\left\{x^2+\left[\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+2z}\right]x+\left[z-\sqrt{z^2-d}\right]\right\}=0.$$

§ 255. Eine andere Methode der Substitution einer biquadratischen Function.

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0;$$

man substituire

$$\left(\frac{x^2+\frac{1}{2}ax-z}{x+y}\right)^2-u^2=0.$$

Entwickelt man diese Function nach Potenzen von x, so erhält man

$$x^4+ax^3+\frac{1}{4}[a^2-4u^2+8z]x^2+[az-2u^2y]x+[z^2-u^2y]=0.$$

Aus der Vergleichung der homologen Coefficienten dieser und der vorgelegten Gleichung ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für z, y und u:

$$u^2=\frac{1}{4}(a^2-4b)+2z=\frac{az-c}{2y}=\frac{z^2-d}{y^2}.$$

Daraus folgt

$$(az-c)^2=(a^2-4b+8z)(z^2-d),$$

oder die Resolvente XIII. in der Form

$$z^3-\frac{1}{2}bz^2+\frac{1}{4}(ac-4d)z-\frac{1}{8}(a^2d-4bd+c^2)=0.$$

Aus der Substituirten folgt die Reducirte:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b+8z}\right)x+z\pm\sqrt{z^2-d}=0,$$

d. i. dieselbe Wurzelform wie in der vorhergehenden Methode.

§ 256. Eine dritte Methode der Substitution einer biquadratischen Function.

Geht man aus von der hypothetischen Gleichung

$$\left(\frac{x^2+y_1x+z_1}{x^2+y_2x+z_2}\right)^2-u^2=0,$$

so erhält man durch Entwickelung dieser Function nach Potenzen der Unbekannten x und Vergleichung der homologen Coefficienten der Hauptgleichung:

$$u^2 = \frac{a - 2y_1}{a - 2y_2} = \frac{b - y_1{}^2 - 2z_1}{b - y_2{}^2 - 2z_2} = \frac{c - 2y_1 z_1}{c - 2y_2 z_2} = \frac{d - z_1{}^2}{d - z_2{}^2}.$$

Hieraus leitet man zunächst die Bestimmungsgleichungen für y und z ab. Es ist für $u = \sqrt{-1}$:

I. $y_1 + y_2 = a,$

II. $z_1 + z_2 = b - \frac{1}{2}(y_1{}^2 + y_2{}^2),$

III. $y_1 z_1 + y_2 z_2 = c,$

IV. $z_1{}^2 + z_2{}^2 = 2d.$

Aus II. und IV. folgt

$$2z_1 z_2 = \left[b - \frac{1}{2}(y_1{}^2 + y_2{}^2)\right]^2 - 2d.$$

Aus I. folgt

$$2y_1 y_2 = a^2 - (y_1{}^2 + y_2{}^2);$$

und endlich aus II. und III. die beiden andern

$$z_1 = \frac{c - y_2\left[b - \frac{1}{2}(y_1{}^2 + y_2{}^2)\right]}{y_1 - y_2},$$

$$z_2 = \frac{-c + y_1\left[b - \frac{1}{2}(y_1{}^2 + y_2{}^2)\right]}{y_1 - y_2}.$$

Substituirt man noch

$$y_1{}^2 + y_2{}^2 = 2\eta,$$

so erhält man die Resolvente XVI:

$$\eta^3 - 2b\eta^2 + (b^2 + ac - 4d)\,\eta + (a^2 d - abc + c^2) = 0.$$

Die vier Hülfsgrössen y_1, y_2, z_1, z_2 ergeben sich aus den Ausdrücken

$$y_1 \text{ und } y_2 = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{4\eta - a^2}\right),$$

$$z_1 \text{ und } z_2 = \frac{1}{2}\left[(b - \eta) \pm \sqrt{4d - (b - \eta)^2}\right].$$

Da sich die Gleichung

$$\left(\frac{x^2 + y_1 x + z_1}{x^2 + y_2 x + z_2}\right)^2 + 1 = 0$$

auch in folgender Gestalt schreiben lässt:

$$\left(\frac{x^2 + (r_2 + t_1)x + r_2 t_1}{x^2 + (r_1 + t_2)x + r_1' t_2}\right)^2 + 1 = 0,$$

so ist klar, dass man der hypothetischen Gleichung auch die allgemeine Form

$$\left(\frac{x + r_1}{x + r_2}\right)^2 + \left(\frac{x + t_1}{x + t_2}\right)^2 = 0$$

geben kann.

§ 257. Vierte Methode der Substitution einer biquadratischen Function.

Man gehe aus von der hypothetischen Gleichung

$$\left(\frac{x^2 + yx + z_1}{x^2 - yx + z_2}\right)^2 - \frac{a - 2y}{a + 2y} = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von x und setzt die homologen Coefficienten der beiden biquadratischen Gleichungen einander gleich, so erhält man, wenn man vorläufig

$$\frac{a - 2y}{a + 2y} = u^2$$

setzt, folgende Bestimmungsgleichungen für y und z:

$$u^2 = \frac{a - 2y}{a + 2y} = \frac{b - y^2 - 2z_1}{b - y^2 - 2z_2} = \frac{c - 2yz_1}{c + 2yz_2} = \frac{d - z_1^2}{d - z_2^2}.$$

Durch Eliminiation von z_1 und z_2 kommt man schliesslich auf die Resolvente XVI. in der Form:

$$y^6 - 2by^4 + (b^2 + ac - 4d)y^2 + (a^2 d - abc + c^2) = 0.$$

Ausserdem findet man leicht

$$z_1 = \frac{-y^3 + by + c}{2y + a},$$

$$z_2 = \frac{-y^3 + by - c}{2y - a}.$$

Aus der substituirten Function folgen nunmehr die beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 + \frac{1 \mp u}{1 \pm u} yx + \frac{z_1 \pm u z_2}{1 \pm u} = 0.$$

Ist in einem speciellen Falle $a = 0$ und setzt man $y = \pm \eta \sqrt{-1}$, so erhält man die Cartesischen oder sogenannten Ampère'schen Formeln*):

*) Ampère, Sur une résolution de l'équation du quatrième degré. Corr. math. et phys. par Quetelet IX. 147. 1836. Grunert's Archiv I. 16. 1841.
Heis, Aufgabensammlung. § 97. Köln. 1878. 50. Aufl.

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\left[\eta \pm \sqrt{-\eta^2 - 2\left(b + \frac{c}{\eta}\right)}\right],$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{2}\left[\eta \mp \sqrt{-\eta^2 - 2\left(b - \frac{c}{\eta}\right)}\right].$$

§ 258. Methode der Substitution zweier linearer Functionen der Unbekannten nach Franke und Job*).

Man gehe von der Bemerkung aus, dass das complexe Binom $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ die allgemeinste Form der Wurzel sei. Es ist bekannt, dass auch zugleich der Ausdruck $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ eine zweite Wurzel ist. Man substituire demgemäss

$$x - (\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = x - \alpha\left(1 \pm \sqrt{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\right) = 0,$$

wofür man auch der Kürze wegen setzen kann

$$x = z(1 \pm \sqrt{-n}).$$

Setzt man dies in das Polynom $f(x)$ ein, so zerfällt dasselbe in einen reellen und einen imaginären Theil, welche einzeln gleich Null gesetzt, zwei Bestimmungsgleichungen für z und n abgeben. Man findet auf diese Weise

$$(z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d) - nz^2(6z^2 + 3az + b) + n^2z^4 = 0,$$
$$(4z^3 + 3az^2 + 2bz + c) - nz^2(4z + a) = 0.$$

Das Princip dieser Methode stimmt demnach mit demjenigen überein, wonach die Trennung der reellen und complexen Wurzeln vorgenommen wird (cf. Eytelwein, Grundlehren I. § 133. 1824).

Setzt man den Werth von nz^2 aus der zweiten in die erste Gleichung ein, so erhält man die Resolvente XXIV., welche, wie schon früher gezeigt worden, die Gleichung der halben Wurzelsummen ist. Da nämlich

$$x_1 = z_1(1 + \sqrt{-n_1}),$$
$$x_2 = z_1(1 - \sqrt{-n_1})$$

ist, so erhält man durch Addition dieser beiden Gleichungen sofort

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = z_1.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so ergibt sich

*) Franke, die Elemente der Zahlenlehre. § 140. Leipzig 1850.
Job, Beiträge zur Auflösung der Gleichungen. Dresden 1864.

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = z_1 \sqrt{-n_1},$$

also

$$\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 = -n_1 z_1^2.$$

Aus der letzteren der beiden Bestimmungsgleichungen folgt demnach

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = \pm \sqrt{\frac{-(4z_1^3 + 3az_1^2 + 2bz_1 + c)}{4z_1 + a}},$$

und wenn man die Gleichung $z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ dazu addirt:

$$x_1 \text{ und } x_2 = z_1 \pm \sqrt{\frac{-(4z_1^3 + 3az_1^2 + 2bz_1 + c)}{4z_1 + a}}.$$

Was die Berechnung der beiden andern Werthe betrifft, so ist in § 234 gezeigt worden, dass die bikubische Gleichung drei Wurzelpaare besitzt, deren jedes gleich dem halben Coefficienten a ist. Es ist nämlich

$$z^2 + \frac{1}{2}az + \frac{1}{4}u_1 = 0,$$

$$z^2 + \frac{1}{2}az + \frac{1}{4}u_2 = 0,$$

$$z^2 + \frac{1}{2}az + \frac{1}{4}u_3 = 0.$$

Wenn man jetzt $z + \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}\eta$ setzt, so erhält man eine bikubische Resolvente, in welcher die ungeraden Potenzen von η fehlen, und man erhält das zweite Wurzelpaar x_3 und x_4, wenn man η mit $-\eta$ vertauscht. Der vorige Ausdruck in z geht nach jener Substitution über in

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{4}\eta_1 - \frac{1}{4}a \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{-\eta_1^3 - (3a^2 - 8b)\eta_1 + 2(a^3 - 4ab + 8c)}{\eta_1}},$$

und die andern beiden Wurzeln sind

$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{4}\eta_1 - \frac{1}{4}a \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{-\eta_1^3 - (3a^2 - 8b)\eta_1 - 2(a^3 - 4ab + 8c)}{\eta_1}}.$$

Diese Wurzelformen können als die Verallgemeinerungen der Ampère'schen betrachtet werden.

Da die Resolvente XXIV. in XVII. übergeht, wenn man $z = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}a$ setzt, so ist η eine Wurzel von XVII. Da das Absolutglied der Gleichung XVII. wesentlich negativ ist, so hat sie immer eine reelle positive Wurzel und man wird deshalb stets zwei gleiche reelle Werthe η_1 und $-\eta_1$ von entgegengesetzten Vorzeichen finden können, welche die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung mit Hülfe der beiden abgeleiteten Formeln liefern. Was das Verhältniss der übrigen Wurzeln η_2 und $-\eta_2$, η_3 und $-\eta_3$ zu den Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 anbetrifft, so findet dasselbe seinen Ausdruck in folgenden Formeln:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \text{ und } x_3 \\ x_2 \text{ und } x_4 \end{matrix}\right\} = \underline{+}\frac{1}{4}\eta_2 - \frac{1}{4}a(\underline{+})\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-\eta_2{}^3-(3a^2-8b)\eta_2 \pm 2(a^3-4ab+8c)}{\eta_2}},$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \text{ und } x_4 \\ x_2 \text{ und } x_3 \end{matrix}\right\} = \underline{+}\frac{1}{4}\eta_3 - \frac{1}{4}a(\underline{+})\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-\eta_3{}^3-(3a^2-8b)\eta_3 \pm 2(a^3-4ab+8c)}{\eta_3}}.$$

§ 259. Methode der Zerlegung einer biquadratischen Gleichung in zwei quadratische nach Lacroix*).

Die in § 202 entwickelte Methode der Zerlegung des Polynoms nach van Schooten lässt eine Anwendung auf die vollständige Gleichung zu. Dieselbe lässt sich auf sechs verschiedene Arten in das Product

$$(x^2 + zx + p)(x^2 + yx + q) = 0$$

zerlegen. Indem man durch Vergleichung des Products der beiden Factoren mit der vorgelegten Gleichung die Coefficienten z, p, y, q zu bestimmen sucht, findet man nach Elimination dreier von ihnen, dass die Finalgleichung, von welcher der vierte abhängt, vom sechsten Grade ist.

In der That liefert das Product

$$x^4 + (z + y)x^3 + (p + zy + q)x^2 + (yp + zq)x + pq$$

Glied für Glied verglichen mit

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} z + y &= a, \\ p + zy + q &= b, \\ yp + zq &= c, \\ pq &= d. \end{aligned}$$

Aus der zweiten und dritten folgt

*) Lacroix, Compl. d'Algèbre § 49, 1804; Ley, Progr. Köln 1850; Grunert's Archiv XXXIX. 198. 1862; Blomstrand, p. 20. 1847.

$$p = \frac{z(b - zy) - c}{z - y},$$
$$q = \frac{c - y(b - zy)}{z - y}.$$

Die erste gibt

$$y = a - z,$$

und wenn man dies in die beiden Gleichungen einsetzt, resultirt

$$p = \frac{z^3 - a z^2 + b z - c}{2z - a},$$
$$q = \frac{z^3 - 2az^2 + (a^2 + b)z - (ab - c)}{2z - a}.$$

Setzt man diese Werthe in die vierte Bestimmungsgleichung ein und ordnet nach Potenzen von z, so erhält man die Gleichung der Wurzelsummen.

Demnach sind die beiden quadratischen Gleichungen, welche die gesuchten Wurzeln liefern:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} \; x^2 + z_1 x + \frac{z_1{}^3 - a z_1{}^2 + b z_1 - c}{2 z_1 - a} = 0,$$
$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} \; x^2 + (a - z_1)x + \frac{z_1{}^3 - 2a z_1{}^2 + (a^2 + b)z_1 - (ab - c)}{2 z_1 - a} = 0.$$

Hier sind z_1 und $a - z_1$ zwei zusammengehörige Werthe von z, und wenn man die beiden andern Wurzelpaare der Resolvente mit z_2 und $a - z_2$, z_3 und $a - z_3$ bezeichnet, so ist auch noch

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \end{matrix}\right\} \; x^2 + z_2 x + \frac{z_2{}^3 - a z_2{}^2 + b z_2 - c}{2 z_2 - a} = 0,$$
$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \end{matrix}\right\} \; x^2 + (a - z_2)x + \frac{z_2{}^3 - 2a z_2{}^2 + (a^2 + b)z_2 - (ab - c)}{2 z_2 - a} = 0;$$

sowie

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \end{matrix}\right\} \; x^2 + z_3 x + \frac{z_3{}^3 - a z_3{}^2 + b z_3 - c}{2 z_3 - a} = 0,$$
$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} \; x^2 + (a - z_3)x + \frac{z_3{}^3 - 2a z_3{}^2 + (a^2 + b)z_3 - (ab - c)}{2 z_3 - a} = 0.$$

Diese quadratischen Factoren werden von verschiedenen Algebristen noch modificirt. Blomstrand substituirt $z = \eta + \frac{1}{2} a$ und erhält Ausdrücke, welche denen in § 258 gegebenen ähnlich sind. Ley substituirt in den vier Bestimmungsgleichungen

$$z + y = a, \qquad yp + zq = c,$$
$$p + zy + q = b, \qquad pq = d,$$

das Product $zy = \eta$ und erhält dadurch

$$z \text{ und } y = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4\eta}\right),$$
$$p \text{ und } q = \frac{1}{2}\left(b - \eta \pm \sqrt{(b - \eta)^2 - 4d}\right).$$

Die Grösse η ist dann eine Wurzel der Resolvente XVI. Zu diesen letzteren Ausdrücken gelangte auch Spitz*).

Es genügt nun zwar zur Berechnung aller vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 die Kenntniss einer einzigen Wurzel der Resolvente. Man kann indess durch Anwendung eines Combinationsverfahrens auch alle drei Wurzeln der kubischen Resolvente zur Berechnung verwenden.

Substituirt man nämlich $p + q = \zeta$, so erhält man

$$z + y = a$$
$$zy = b - \zeta,$$

und hieraus weiter die Gleichungen

$$z = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b + 4\zeta},$$
$$y = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b + 4\zeta}.$$

Setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung

$$yp + zq = c,$$

oder

$$yp + z\frac{d}{p} = c,$$

ein, macht die Gleichung rational und setzt $p + \frac{d}{p}$ wieder gleich $p + q = \zeta$, so erhält man die Resolvente XIII. Da nun

$$p^2 - \zeta p + d = 0$$

ist, so findet man weiter

$$x_1 x_2 \text{ und } x_3 x_4 = p_1 \text{ und } \pi_1 = \frac{1}{2}\left(\zeta_1 \pm \sqrt{\zeta_1^2 - 4d}\right),$$
$$x_1 x_3 \text{ und } x_2 x_4 = p_2 \text{ und } \pi_2 = \frac{1}{2}\left(\zeta_2 \pm \sqrt{\zeta_2^2 - 4d}\right),$$
$$x_1 x_4 \text{ und } x_2 x_3 = p_3 \text{ und } \pi_3 = \frac{1}{2}\left(\zeta_3 \pm \sqrt{\zeta_3^2 - 4d}\right),$$

*) Spitz, Grunert's Archiv XXXIII. S. 442. 1859.

und hieraus

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4d})(\zeta_2 + \sqrt{\zeta_2^2 - 4d})}{(\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3^2 - 4d})}},$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2^2 - 4d})(\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3^2 - 4d})}{(\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 4d})}},$$

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 4d})(\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3^2 - 4d})}{(\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2^2 - 4d})}},$$

$$x_4 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 4d})(\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2^2 - 4d})}{(\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3^2 - 4d})}}.$$

Diese Wurzelformen sind gültig für den Fall

$$[p_1 p_2 p_3 + (p_1 + p_2 + p_3) d] : \sqrt{p_1 p_2 p_3 d} = \mp a.$$

Wenn dieser Ausdruck aber den Werth $\mp (c : \sqrt{d})$ annimmt, so sind sämmtliche Vorzeichen vor den inneren Wurzelzeichen umzukehren.

§ 260. Eine andere Methode der Factorenzerlegung.

Wir setzen voraus, es sei

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} a + u\right) x + y = 0$$

ein trinomisch quadratischer Factor der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

und suchen nun den andern durch Division zu bestimmen wie folgt:

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) : \left(x^2 + \left[\frac{1}{2} a + u\right] x + y\right)$$
$$= x^2 + \left(\frac{1}{2} a - u\right) x + \left(u^2 - y - \frac{1}{4} a^2 + b\right) + \frac{Rx + S}{x^2 + \left(\frac{1}{2} a + u\right) x + y}.$$

Dass der Rest $Rx + S$ gleich Null werde, fordert die Erfüllung der Gleichungen

$$-u^3 - \frac{1}{2} au^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 4b + 4y) u + \frac{1}{8}(a^3 - 4ab + 8c) = 0,$$

$$-yu^2 + y^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 4b) y + d = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt aber

$$u^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = y + \frac{d}{y} = z,$$

also

$$\text{I.} \qquad u^2 = z + \frac{1}{4}(a^2 - 4b).$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\text{II.} \quad 2u\left[y - \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{1}{4}a^2 + b\right)\right] = \frac{1}{2}a\left(y + \frac{d}{y}\right) - c = \frac{1}{2}az - c.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich auch noch

$$y^2 - \left(u^2 - \frac{1}{4}a^2 + b\right)y = -d,$$

und wenn man sie zu einem Quadrat ergänzt:

$$\text{III.} \quad \left[y - \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{1}{4}a^2 + b\right)\right]^2 = \frac{1}{16}\left[u^2 - \frac{1}{4}a^2 + b\right]^2 - d$$
$$= \frac{1}{4}z^2 - d.$$

Quadrirt man II. und multiplicirt I. mit dem Vierfachen von III., so resultirt

$$\left(\frac{1}{2}az - c\right)^2 = 4\left(\frac{1}{4}z^2 - d\right)\left(z + \frac{1}{4}a^2 - b\right),$$

und nach Potenzen von z geordnet die Resolvente XIII. Die weitere Berechnung der Wurzeln ist einfach.

§ 261. Methode der Factorenzerlegung von Bardey*).

Diese Methode bietet im Vergleich zu den vorhergehenden Methoden nichts wesentlich Neues dar, denn es wird zu der Factorenzerlegung des Polynoms $f(x)$ in

$$(x^2 + zx + p)(x^2 + yx + q) = 0$$

in der zweiten Bestimmungsgleichung (§ 259)

$$p + q = 2\zeta + \frac{1}{3}b$$

angenommen, wodurch man direct auf die allgemeine Resolvente XXX

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{J} = 0$$

geführt wird. Nimmt man an, das Product sei

$$\left[x^2 + \left(\frac{1}{2}a + u\right)x + \frac{1}{6}b + \zeta + v\right] \times$$
$$\left[x^2 + \left(\frac{1}{2}a - u\right)x + \frac{1}{6}b + \zeta - v\right] = 0,$$

*) Aufgabensammlung Kap. 39.

so resultiren aus der Entwicklung und Vergleichung homologer Coefficienten die Bestimmungsgleichungen für u und v:

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(3a^2 - 8b) + 8\zeta},$$

$$v = \frac{1}{6}\sqrt{(b + 6\zeta)^2 - 36d},$$

$$uv = \frac{1}{12}[a(b + 6\zeta) - 3c].$$

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen mit einander und führt die dritte ein, so erhält man die Resolvente XXX. Da ζ drei verschiedene Werthe hat, so ist dies auch für u der Fall. Aus den beiden quadratischen Factoren ergeben sich sofort folgende sechs Combinationen der Wurzeln:

$$x_1 + x_2 = -\left(\frac{1}{2}a - u_1\right), \quad x_3 + x_4 = -\left(\frac{1}{2}a + u_1\right),$$

$$x_1 + x_3 = -\left(\frac{1}{2}a - u_2\right), \quad x_2 + x_4 = -\left(\frac{1}{2}a + u_2\right),$$

$$x_1 + x_4 = -\left(\frac{1}{2}a - u_3\right), \quad x_2 + x_3 = -\left(\frac{1}{2}a + u_3\right),$$

wo $2u$ die Wurzel der Resolvente XVII bezeichnet. Da u eine Quadratwurzel ist, so kann das Vorzeichen dieser Grösse $+$ oder $-$ sein. Um zu entscheiden, welches Vorzeichen genommen werden muss, beachte man den Werth der Reducente (21) I:

$$\begin{gathered} -(a^3 - 4ab + 8c) \\ = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ = 8u_1 u_2 u_3. \end{gathered}$$

Wenn demnach der Ausdruck $a^3 - 4b + 8c$ negativ ist, so gelten die in jenen sechs Combinationen angenommenen Vorzeichen; ist dagegen $a^3 - 4ab + 8c$ positiv, so muss man von allen Vorzeichen das entgegengesetzte nehmen. Für den ersten Fall findet man also

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + u_1 + u_2 + u_3\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + u_1 - u_2 - u_3\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a - u_1 + u_2 - u_3\right),$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a - u_1 - u_2 + u_3\right).$$

Das Product $u_1 u_2 u_3$ bleibt übrigens noch positiv, wenn man das Vorzeichen von zweien der Factoren ändert, wenn man also schreibt:

$$x_1 + x_2 = -\left(\frac{1}{2}a - u_1\right), \quad x_3 + x_4 = -\left(\frac{1}{2}a + u_1\right),$$

$$x_1 + x_3 = -\left(\frac{1}{2}a + u_2\right), \quad x_2 + x_4 = -\left(\frac{1}{2}a - u_2\right),$$

$$x_1 + x_4 = -\left(\frac{1}{2}a + u_3\right), \quad x_2 + x_3 = -\left(\frac{1}{2}a - u_3\right).$$

Durch diese Annahme wird indess nur die Reihenfolge der Wurzelwerthe geändert, wie sich aus folgendem System erkennen lässt:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + u_1 - u_2 - u_3\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + u_1 + u_2 + u_3\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a - u_1 - u_2 + u_3\right),$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a - u_1 + u_2 - u_3\right).$$

Bardey stellt noch weitere Betrachtungen über die Realität der Wurzeln der Resolvente an. Die biquadratische Gleichung kann nämlich haben

1) vier reelle Wurzeln, oder
2) zwei reelle und zwei complexe, oder
3) vier complexe Wurzeln.

In jedem dieser drei Fälle ist auf mindestens eine Art die Zerlegung in zwei quadratische Factoren mit reellen Coefficienten denkbar; denn die Wurzelformen sind:

$$\begin{array}{lllll}
1) & x_1 = \alpha_1, & x_2 = \alpha_2, & x_3 = \alpha_3, & x_4 = \alpha_4, \\
2) & = \alpha_1, & = \alpha_2, & = \alpha_3 + \beta_3 i, & = \alpha_3 - \beta_3 i, \\
3) & = \alpha_1 + \beta_1 i, & = \alpha_1 - \beta_1 i, & = \alpha_2 + \beta_2 i, & = \alpha_2 - \beta_2 i.
\end{array}$$

Im ersten Falle ist die Bildung quadratischer Factoren mit reellen Coefficienten offenbar auf dreifache Weise möglich. Es muss also in dem Factor

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a \pm u\right)x + \frac{1}{6}b + \zeta \pm v = 0$$

drei verschiedene reelle u, aber auch drei verschiedene reelle ζ und damit drei verschiedene reelle v geben. Denn ζ ist eine Function von u und v eine andere von ζ. In diesem Falle muss demnach die Resolvente drei reelle Wurzeln haben.

Wenn wie im zweiten und dritten Falle die vorgelegte Gleichung entweder zwei reelle und zwei complexe oder vier complexe Wurzeln hat, so ist offenbar nur eine einzige Art der Zerlegung des Polynoms möglich, und zwar verlangt die Bedingung der Realität der Coefficienten des trinomischen Factors im ersten Falle die Combination von x_3 mit x_4; im andern Falle die Combinationen $(x_1 x_2)$ und $(x_3 x_4)$. Dies setzt voraus, dass gemäss der Form des quadratischen Factors

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} a \pm u\right) x + \frac{1}{6} b + \zeta \pm v = 0$$

nur ein $\pm u$ und ein entsprechendes $2\zeta \pm v$ reell sei. Ist aber u reell, so ist es auch ζ und v.

Es ist nun für jedes reelle ζ nicht jedes zugehörige u reell; es kann je nach dem Vorzeichen des Radicanden entweder reell oder imaginär werden. Wenn demnach in dem erwähnten Falle alle drei ζ reell sind, so ist auch immer eins unter diesen, welches ein u und somit auch ein v reell macht. Ist nur ein ζ reell, so muss dieses selbst u und v in reeller Form darstellen.

Hat daher die kubische Resolvente XXX drei reelle Wurzeln, so muss unter diesen immer eine vorhanden sein, welche ein reelles u, also auch ein reelles v liefert. Hat die Resolvente nur eine reelle Wurzel, so muss dieser ein reelles u entsprechen. Man hat demnach folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Die kubische Resolvente XXX hat drei reelle Wurzeln.

Wenn diese drei reelle Werthe von u, also auch von v liefern, so hat die Gleichung vier reelle Wurzeln. Wenn dieselben ein reelles u und zwei imaginäre ungleiche Werthe von u liefern, so sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sämmtlich conjugirt complex. Sind dagegen ein u reell und zwei imaginär und gleich, so dass die Resolvente unter drei reellen Wurzeln zwei gleiche haben muss, so hat die biquadratische Gleichung, wie leicht aus den Wurzelformen zu ersehen ist, zwei gleiche reelle und zwei complexe Wurzeln.

2. Die kubische Resolvente XXX hat eine reelle und zwei complexe Wurzeln.

Der reellen Wurzel ζ_1 entspricht ein reeller Werth von u_1 und v_1; die beiden complexen Wurzeln $\zeta_2 + \eta i$ und $\zeta_2 - \eta i$ geben

$$u_2 = \gamma + \delta i, \quad u_3 = \gamma - \delta i.$$

Demgemäss ist

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + u_1 + 2\gamma\right), \text{ (reell)},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a + u_1 - 2\gamma\right), \text{ (reell)},$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a - u_1 + 2\delta i\right), \text{ (complex)},$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a - u_1 - 2\delta i\right), \text{ (complex)}.$$

Führt man die Wurzelformen von ζ, nämlich ζ_1, $\zeta_2 + \eta i$ und $\zeta_2 - \eta i$ in den Ausdruck für u ein, so erhält man für u die Formen u_1 und

$$u_2 = \sqrt{m + n\sqrt{-1}}, \quad u_3 = \sqrt{m - n\sqrt{-1}}.$$

Daraus folgt

$$u_2 + u_3 = \sqrt{2\left(m + \sqrt{m^2 + n^2}\right)},$$

$$u_2 - u_3 = \sqrt{2\left(m - \sqrt{m^2 + n^2}\right)}.$$

Substituirt man

$$\frac{m}{n} = \tan\vartheta,$$

so erhält man zu einer bequemern Berechnung die Formeln:

$$u_2 + u_3 = 2\cos\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{m : \cos\vartheta},$$

$$u_2 - u_3 = 2\sin\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{-m : \cos\vartheta}.$$

Wenn m positiv ist, so wird $u_2 + u_3$ reell und $u_2 - u_3$ imaginär; sonst umgekehrt. Um ϑ zu berechnen, genügt es, den positiven oder absoluten Werth von m zu nehmen.

§ 262. Transformation der binären biquadratischen Formen durch lineare Substitution in die sogenannte kanonische Form nach Hesse*).

Hesse geht in seiner berühmten Abhandlung aus von der Form

$$(1)\quad f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

und bemerkt zunächst, dass die binäre biquadratische Function die einzige sei, deren Determinante ihrer zweiten partiellen Differenzialquotienten von demselben Grade sei, wie die Function selbst. Diese sogenannte Hesse'sche Form (Hessiane) ist also

$$(2)\qquad v = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Hesse beweist zunächst das wichtige Theorem, dass die zusammengesetzte Function

$$(3)\qquad U = \varkappa f + \tau v$$

eine Determinante V besitzt, welche dieselbe Form wie U hat; also

$$(4)\qquad V = Kf + Tv\,.$$

Indem wir bezüglich des Beweises dieses Theorems auf die Abhandlung selbst verweisen, bilden wir zuerst die Determinante v der Function f. Man findet leicht

$$(5)\quad \frac{v}{12^2} = C_{4,4} = (ac-b^2)x^4 + 2(ad-bc)x^3y + (ae+2bd-3c^2)x^2y^2 \\ + 2(be-cd)xy^3 + (ce-d^2)y^4\,.$$

Bildet man weiter die Determinante V und setzt die Coefficienten x^4 und y^4 auf beiden Seiten der Gleichung (4) einander gleich, so erhält man die neuen Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} 12^2[(\varkappa a + \tau A)(\varkappa c + \tau C) - (\varkappa b + \tau B)^2] = Ka + TA, \\ 12^2[(\varkappa c + \tau E)(\varkappa c + \tau C) - (\varkappa d + \tau D)^2] = Ka + TE, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen gesetzt worden ist

$$(7)\quad \begin{cases} 12^2(ac - b^2) = A, \\ \frac{1}{2}\cdot 12^2(ad - bc) = B, \\ \frac{1}{6}\cdot 12^2(ae + 2bd - 3c^2) = C, \\ \frac{1}{2}\cdot 12^2(be - cd) = D, \\ 12^2(ce - d^2) = E. \end{cases}$$

---

*) Crelle's Journ. XLI. S. 243. 1851.

Aus den beiden Bestimmungsgleichungen ergeben sich die Werthe:

$$(8)\quad \begin{cases} K = 2\,.\,12^3\,.\,J_{4,2}\varkappa\tau + 3\,.\,12^5\,.\,J_{4,3}\tau^2\,, \\ T = \varkappa^2 - 12^3 J_{4,2}\tau^2\,. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$(9)\quad \Phi = \varkappa T - \tau K = \varkappa^3 - 3\,.\,12^3 J_{4,2}\,\tau^2\varkappa - 3\,.\,12^5\,.\,J_{4,3}\tau^3\,,$$

und wenn der Kürze wegen $\varkappa = -12^2\tau\,.\,\lambda$ gesetzt wird:

$$(10)\quad \varDelta = \frac{\varkappa T - \tau K}{3\,.\,12^5\tau^3} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3}\,.$$

Die Grössen K und T lassen sich durch die partiellen Differenzialquotienten von Φ oder $\varkappa T - \tau K$ wie folgt ausdrücken:

$$K = -\frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\,,\qquad T = +\frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\varkappa}\,.$$

Die Transformation der vorgelegten Function f durch die Substitutionen

$$(11)\quad \begin{cases} x = \alpha\xi + \beta\eta\,, \\ y = \gamma\xi + \delta\eta\,, \end{cases}$$

in die sogenannte kanonische Form

$$(12)\quad f(x,y) = A'\xi^4 + 6C'\xi^2\eta^2 + E'\eta^4$$

erfordert die Bestimmung von sieben Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A', C', E'$. Substituirt man die Werthe von x und y aus (11) in $f(x,y) = (a, b, c, d, e\overset{\frown}{)}(x,y)^4$, und setzt beiderseits die Coefficienten gleicher Potenzen und Producte der neuen Variabeln einander gleich, so erhält man nur fünf Gleichungen, woraus hervorgeht, dass zwei der zu bestimmenden Unbekannten willkürlich bleiben, z. B. $\gamma = \delta = 1$. Von diesen fünf Gleichungen sind nur von Belang die folgenden drei:

$$(13)\quad \begin{cases} A' = f(\alpha,\gamma)\,,\quad E' = f(\beta,\delta)\,, \\ 12C' = \alpha\alpha\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta + 2\alpha\gamma\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_\beta + \gamma\gamma\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\beta \\ \qquad + \beta\beta\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha + 2\beta\delta\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_\alpha + \delta\delta\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\alpha\,. \end{cases}$$

Die Indices α und β deuten diejenigen Ausdrücke an, in welche die zweiten partiellen Differenzialquotienten übergehen, wenn man in ihnen statt x, y entweder α, γ oder β, δ setzt. Die beiden übrigen Gleichungen, welche die Verhältnisse $\alpha : \gamma$ und $\beta : \delta$ bestimmen, werden später durch äquivalente Gleichungen ersetzt.

Betrachtet man f als eine Function der Variablen ξ und η, setzt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)^2 = v'$$

und den Modul der Transformation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = r\,,$$

so ist die Determinante

(14) $$v = \frac{1}{r^2}\, v'\,,$$

wie von Hesse (Crelle's Journ. 28. Bd. S. 89) bewiesen worden ist.

Es ist nun

(15) $$v' = 12^2 C' \left(A'\,\xi^4 + \frac{A'E' - 3\,C'^2}{C'}\,\xi^2\eta^2 + E'\eta^4\right).$$

Setzt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, so wird

$$v = \frac{12^2 C'}{r^2}\left[A'\,\xi^4 + \frac{A'E' - 3\,C'^2}{C'}\,\xi^2\eta^2 + E'\eta^4\right].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\tau = \frac{r^2\varrho}{12^2(A'E' - 9\,C'^2)}\,,$$

die Gleichung (12) mit

$$\varkappa = -\frac{C'\varrho}{(A'E' - 9\,C'^2)}$$

und addirt beide Gleichungen, so erhält man

(16) $$U = \varkappa f + \tau v = \varrho\,\xi^2\eta^2\,.$$

Hieraus folgt, dass sich jede homogene binäre biquadratische Function und ihre Determinante mit solchen Constanten multipliciren lässt, dass die Summe ein vollständiges Quadrat wird.

Um das Verhältniss $\varkappa : \tau$ zu bestimmen, bemerke man, dass, da U ein vollständiges Quadrat ist, dieselben Werthe der Variablen x, y, welche U verschwinden machen, auch die partiellen Differenzialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ dieser Function werden verschwinden lassen. Es ist nun

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 3\frac{\partial f}{\partial x}\,,$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3\frac{\partial f}{\partial y}\,,$$

und wenn man diese Gleichungen nach den linearen expliciten

Grössen x und y auflöst, so erhält man unter Berücksichtigung der Bedeutung von v:

$$xv = 3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right),$$
$$yv = 3\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right).$$

Hieraus ist nun zu ersehen, dass für die Werthe von x und y, für welche die ersten partiellen Differenzialquotienten verschwinden, auch die Determinante v verschwinden würde. Mithin verschwindet für die Werthe der Variabeln, für welche die zusammengesetzte Function U gleich Null wird, auch die Determinante $V = Kf + Tv$ dieser Function. Nun ist aber gemäss (11) $\xi = 1$, $\eta = 0$ für $x = \alpha$, $y = \gamma$, und $\xi = 0$, $\eta = 1$ für $x = \beta$, $y = \delta$. Es verschwindet also nach (16) die zusammengesetzte Function $U = \varkappa f + \tau v$ für diese beiden Werthepaare und ebenso die Determinante

$$V = Kf + Tv$$

dieser Function. Diese Werthepaare genügen demnach den Gleichungen

$$(17) \qquad \begin{aligned} \varkappa f + \tau v &= 0\,, \\ Kf + Tv &= 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Determinante

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varkappa & \tau \\ K & T \end{vmatrix} = \varkappa T - K\tau = 0\,,$$

welche wir bereits in den Gleichungen (9) und (10) kennen gelernt haben. Zur Bestimmung des Verhältnisses $\varkappa : \tau$ dient demnach diese kubische Resolvente, welche Aronhold später in Form einer zweiten Determinante $\varDelta$ dargestellt hat. Es ist nämlich

$$\Phi = 3\,.\,12^5\,.\,\tau^3\varDelta = 3\,.\,12^5\,.\,\tau^3(-4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3}) = 0\,.$$

Hieran knüpft sich der Satz: dass jedes binäre Biquadrat und seine Determinante sich auf drei verschiedene Arten mit solchen Constanten multipliciren lässt, dass ihre Summe ein vollständiges Quadrat wird.

Wenn man nun ein Wurzelpaar $\varkappa$ und τ gefunden hat und dasselbe in (17) einsetzt, z. B. in $\varkappa f + \tau v = 0$, so werden die beiden Werthepaare von x und y, welche dieser Gleichung genügen, die gesuchten Werthe von $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ sein. Da man aber nur das Verhältniss $x : y$ findet, so ist z. B. y willkürlich, und ebenso können γ und δ gleich 1 gesetzt werden. Die beiden andern Grössen α und β werden sich als die ungleichen Wurzeln der nach x biquadratischen Gleichung darstellen, welche zwei Paare gleicher Wurzeln hat. Hat man aber durch Auflösung dieser Gleichung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gefunden, so gibt das System (13) die Werthe der Coefficienten A', C', E' der kanonischen Form (12).

Die Verhältnisse $\alpha:\gamma$ und $\beta:\delta$ sind als die ungleichen Wurzeln einer der biquadratischen Gleichungen (17) bezeichnet. Man kann aber statt dieser eine quadratische Gleichung bilden, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln von (17) sind. Zu diesem Zwecke differenzire man die durch die linearen Substitutionen (11) identische Gleichung (16)

$$\varkappa f + \tau v = \varrho \xi^2 \eta^2$$

zweimal partiell nach x, also

$$\varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2\varrho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \eta^2 + 4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \eta \xi + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \xi^2 \right],$$

oder, weil wir den Transformationsmodul $\alpha\delta - \beta\eta = r$ gesetzt haben,

$$\varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\varrho}{r^2} [\delta^2 \eta^2 - 4\gamma\delta\eta\xi + \gamma^2 \xi^2].$$

Man nehme nun an, es sei in dieser identischen Gleichung sowol rechts als links $\alpha\gamma$ oder $\beta\delta$ statt xy gesetzt. Bei dieser Annahme verschwindet das Product $\eta\xi$ und es bleibt die Gleichung richtig, wenn man das mittlere Glied $-4\gamma\delta\eta\xi$ in $+2\gamma\delta\eta\xi$ verwandelt. Durch diese Aenderung geht die Gleichung über in die einfachere

$$\varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\varrho}{r^2} (\delta\eta + \gamma\xi)^2,$$

oder, wenn man für $\delta\eta + \gamma\xi$ seinen ursprünglichen Werth y einsetzt, in

$$\varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2\varrho}{r^2} y^2 = 0.$$

Dieses ist die gesuchte quadratische Gleichung. Wenn man nun diese Rechnung in der Weise wiederholt, dass man die Gleichung (16) erst einmal nach x und einmal nach y, dann noch zweimal nach y differenzirt, so gelangt man zu folgenden drei Gleichungen:

$$(18) \quad \begin{cases} \varkappa \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{2\varrho}{r^2} y^2 = 0, \\[2ex] \varkappa \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \tau \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \dfrac{2\varrho}{r^2} xy = 0, \\[2ex] \varkappa \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \tau \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{2\varrho}{r^2} x^2 = 0. \end{cases}$$

Einfacher gelangt man zu den beiden letzten Gleichungen, indem man erst die dritte bildet durch Vertauschung von x mit y und darauf die zweite durch Combination der beiden übrigen mit (17) sucht.

Um diese Gleichungen in eine einzige von allgemeinster Form zusammenzufassen, wählt Hesse zwei beliebige Grössen p und q, multiplicirt die drei Gleichungen der Reihe nach mit p^2, pq und q^2 und addirt die Producte. Dies gibt

$$(19)\begin{cases} \varkappa\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}p^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}pq+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}q^2\right) \\ +\tau\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}p^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}pq+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}q^2\right)-\frac{2\varrho}{r^2}(xq-yp)^2=0. \end{cases}$$

Es bleibt noch übrig, den Werth des Quotienten $\frac{2\varrho}{r^2}$ zu bestimmen. Man erwäge, dass die angegebenen quadratischen Gleichungen dieselben Wurzeln haben, welche die biquadratischen Gleichungen (17) doppelt enthalten. Aus diesem Umstande dürfen wir schliessen, dass das Quadrat der quadratischen Gleichungen z. B. der ersten in (18) in die biquadratische Gleichung, von einem constanten Factor σ abgesehen, übergehen, oder dass

$$\left[\varkappa\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\tau\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{2\varrho}{r^2}y^2\right]^2=\sigma(\varkappa f+\tau v)$$

sein muss. Setzt man die Coefficienten von x^4 beiderseits einander gleich, so resultirt

$$\sigma=12^2(\varkappa a+\tau A)\,.$$

Durch Gleichsetzung der beiderseitigen Coefficienten von xy^3 erhält man eine Relation, aus welcher sich, mittels Substitution des Werthes von σ, der gesuchte Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}$ ergibt, nämlich

$$-\frac{2\varrho}{r^2}=\frac{\frac{12^2}{2}\left[(\varkappa a+\tau A)(\varkappa d+\tau D)-(\varkappa b+\tau B)(\varkappa c+\tau C)\right]}{6(\varkappa b+\tau B)}\,.$$

Um den Dividenden zu transformiren, nehme man die zweite Gleichung des Systems (7), nämlich

$$B=\frac{12^2}{2}(ad-bc)\,.$$

Lässt man hierin die Grössen a, b, c, d in die entsprechenden $\varkappa a+\tau A$ übergehen, so geht f in $kf+\tau v$ und v in $Kf+Tv$ über. Daraus folgt

$$Kb + TB = \frac{12^2}{2}[\varkappa a + \tau A)(\varkappa d + \tau D) - (\varkappa b + \tau B)(\varkappa c + \tau C)]$$

und somit

$$-\frac{2r}{\varrho^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{Kb + TB}{\varkappa b + \tau B}.$$

Da aber nach (17) $\varkappa T = K\tau$ ist, so reducirt sich die Gleichung auf die einfachere

$$(20) \qquad -\frac{2\varrho}{r^2} = \frac{1}{6}\frac{T}{c}.$$

Es lassen sich noch einige nützliche Formeln mehr herleiten. In der identischen Gleichung (16) war

$$\varkappa = -\frac{C'\varrho}{A'E' - 9C^2}, \quad \tau = \frac{r^2\varrho}{12^2(A'E' - 9C^2)}.$$

Dividirt man die erste durch die zweite, so erhält man

$$\frac{\varkappa}{\tau} = -12^2\frac{C'}{r^2},$$

und wenn man wieder $r = \alpha\delta - \beta\gamma$ einsetzt,

$$(21) \qquad C' = -\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{12^2} \cdot \frac{\varkappa}{\tau}.$$

Ferner erhält man aus der zweiten Gleichung, wenn man aus (20) den Werth von ϱ einsetzt,

$$(22) \qquad A'E' - 9C^{2\prime} = -\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^4}{12^3} \cdot \frac{T}{\tau^2}.$$

Um Alles zusammenzufassen, suche man aus der Gleichung $\Phi = 0$ ein Werthepaar $\varkappa$ und τ, setze dies und den Werth $-2\varrho : r^2$ aus (20) in eine der quadratischen Gleichungen (18) ein und suche zwei Werthepaare α, γ und β, δ, den Wurzeln der quadratischen Gleichung entsprechend, welche der Gleichung genügen. Diese sind dann die Coefficienten der linearen Substitutionen, durch welche die Function $f(x, y)$ transformirt wird in die Form

$$f(x, y) = f(\alpha, \gamma)\xi^4 - (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \cdot \frac{\varkappa}{2\,.\,12\,.\,\tau}\xi^2\eta^2 + f(\beta, \delta)\eta^4.$$

Wir können hieraus nun die Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$f(x, y) = (a, b, c, d, e \widehat{)\,(} x, y)^4 = 0$$

leicht herleiten. Setzen wir der Einfachheit wegen $y = 1$ und $\eta = 1$, so ist die Substitutionsformel

$$x = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}$$

und die Transformirte

$$A' \xi^4 + 6 C' \xi^2 + E' = 0 .$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind nun

$$\xi_1 , \quad \xi_2 = - \xi_1 , \quad \xi_3 , \quad \xi_4 = - \xi_3 .$$

Setzt man diese Werthe in die Substitutionsformel ein, so sind die vier Wurzeln der Gleichung $f = 0$:

$$(23) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha \xi_1 + \beta}{\gamma \xi_1 + \delta}, & x_2 = \dfrac{\alpha \xi_1 - \beta}{\gamma \xi_1 - \delta}, \\ x_3 = \dfrac{\alpha \xi_3 + \beta}{\gamma \xi_3 + \delta}, & x_4 = \dfrac{\alpha \xi_3 - \beta}{\gamma \xi_3 - \delta}. \end{cases}$$

Wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\alpha}{\gamma} = z , \quad \frac{\beta}{\delta} = \zeta$$

setzt, so erhält man durch Elimination von ξ_1 und ξ_3 aus dem System (23) folgende Relationen zwischen den Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 und den Wurzeln $\frac{x}{y} = z$, $\frac{x}{y} = \zeta$ der quadratischen Gleichung (18):

$$(24) \quad \begin{cases} x_1 x_2 - \dfrac{1}{2} (x_1 + x_2)(z + \zeta) + z \zeta = 0 , \\ x_3 x_4 - \dfrac{1}{2} (x_3 + x_4)(z + \zeta) + z \zeta = 0 . \end{cases}$$

Es lässt sich nun jeder Wurzel einer algebraisch auflösbaren Gleichung eine Form geben, welche rationale Functionen der Wurzeln enthält. Diese erhält man, wenn man alle drei Wurzeln der Resolvente $\Phi = 0$ in die Rechnung einführt. Dieselben seien nun $\frac{\varkappa_1}{\tau_1}, \frac{\varkappa_2}{\tau_2}, \frac{\varkappa_3}{\tau_3}$ und die diesen entsprechenden Wurzeln der quadratischen Gleichung (18) $z_1 \zeta_1$, $z_2 \zeta_2$, $z_3 \zeta_3$. Die Gleichungen (24) werden auf diese Weise

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 x_2 - \dfrac{1}{2} (x_1 + x_2) (z_1 + \zeta_1) + z_1 \zeta_1 = 0, \\ x_3 x_4 - \dfrac{1}{2} (x_3 + x_4) (z_1 + \zeta_1) + z_1 \zeta_1 = 0; \end{cases}$$

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 x_3 - \dfrac{1}{2} (x_1 + x_3) (z_2 + \zeta_2) + z_2 \zeta_2 = 0, \\ x_2 x_4 - \dfrac{1}{2} (x_2 + x_4) (z_2 + \zeta_2) + z_2 \zeta_2 = 0; \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} x_1x_4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_4)(z_3 + \zeta_3) + z_3\zeta_3 = 0, \\ x_2x_3 - \frac{1}{3}(x_2 + x_3)(z_3 + \zeta_3) + z_3\zeta_3 = 0. \end{cases}$$

Je zwei dieser Systeme geben eines der drei folgenden:

$$(28)\quad \begin{cases} z_2\zeta_2 - \frac{1}{2}(z_2 + \zeta_2)(z_3 + \zeta_3) + z_3\zeta_3 = 0, \\ z_3\zeta_3 - \frac{1}{2}(z_3 + \zeta_3)(z_1 + \zeta_1) + z_1\zeta_1 = 0, \\ z_1\zeta_1 - \frac{1}{2}(z_1 + \zeta_1)(z_2 + \zeta_2) + z_2\zeta_2 = 0. \end{cases}$$

Wenn man die drei Gleichungen, welche aus der quadratischen (18) gezogen werden, indem man successive die drei Werthe von $\frac{\varkappa}{\tau}$ einsetzt, mit einander multiplicirt, so erhält man eine Gleichung sechsten Grades, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln von $\Phi = 0$ enthalten, also auch rationale Functionen von a, b, c, d, e. Diese Gleichung, zwischen deren Wurzeln z, ζ die Relationen (28) stattfinden, lässt sich nun umgekehrt mit Hülfe der kubischen Resolvente in drei quadratische Gleichungen zerlegen und ist also algebraisch auflösbar in Rücksicht auf die Coefficienten a, b, c, d, e, wie weiter unten gezeigt wird.

Addirt man die beiden Gleichungen (25) und setzt für

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

seinen Werth $-\frac{4b}{a}$, so resultirt

$$x_1x_2 + x_3x_4 + 2\frac{b(z_1 + \zeta_1) + a \cdot z_1\zeta_1}{a}.$$

Es haben aber $z_1 + \zeta_1$ und $z_1\zeta_1$ folgende aus der ersten Gleichung des Systems (18) entnommene Werthe:

$$z_1 + \zeta_1 = -2\frac{\frac{\varkappa_1}{\tau_1}b + B}{\frac{\varkappa_1}{\tau_1}a + A},$$

$$z_1\zeta_1 = \frac{\frac{\varkappa_1}{\tau_1}c + C - \frac{1}{12}\cdot\frac{2\varrho}{r^2}}{\frac{\varkappa_1}{\tau_1}a + A}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so kann man derselben mit Hülfe der Gleichungen (20), (8) und (7) folgende Gestalt geben:

$$4(x_1 x_2 + x_3 x_4) = -\frac{1}{9a}\left(\frac{\varkappa_1}{\tau_1} - 6 \,.\, 12 \,.\, c\right),$$

oder mit Berücksichtigung von (10)

$$(29) \qquad x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{2}{a}(2\lambda_1 + c).$$

Hieraus ersieht man, dass sich die Wurzeln der Resolvente $\Phi = 0$ und $\varDelta = 0$ rational durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung ausdrücken lassen. Man erhält auch noch leicht

$$(30) \qquad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{4}{a}(c - \lambda_1).$$

Addirt man zu der vorhergehenden Gleichung die beiden anderen Gleichungen

$$\Sigma[x_1^2] = \frac{4c}{a} - \frac{1}{9}\frac{A}{a^2},$$

$$-2\Sigma[x_1 x_2] = -12 \,.\, \frac{c}{a},$$

so erhält man, nachdem man die Quadratwurzel ausgezogen hat,

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \frac{1}{3a}\sqrt{-\left(\frac{\varkappa_1}{\tau_1}a + A\right)},$$

oder mit Berücksichtigung von (10), indem $\varkappa : \tau = -12^2\lambda$ gesetzt wird,

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \frac{4}{a}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}.$$

Man hat demnach folgende vier Gleichungen zur Bestimmung der Wurzeln:

$$(31) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{4b}{a}, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \dfrac{4}{a}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \dfrac{4}{a}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \dfrac{4}{a}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}. \end{cases}$$

Von den Vorzeichen der Wurzeln bestimmen immer zwei das dritte. Denn multiplicirt man die drei letzten Gleichungen, so ist die linke Seite gleich $-\frac{32}{a^3}(2b^3 - 3abc + a^2 d)$, und es müssen also die Vorzeichen so gewählt werden, dass das Product das entgegengesetzte Vorzeichen der Variante V_3 erhält.

Hesse fügt noch eine geometrische Interpretation der vorstehenden Entwickelungen hinzu. Betrachtet man die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 als die Durchschnittspuncte der Curve $f(x) = Y$ mit der Abscissenaxe, so stellen die Wurzeln der Gleichung (18), wenn man den Grössen $\varkappa$ und τ das eine Paar von Werthen $\varkappa_1$ und τ_1 gibt, ebenfalls zwei Puncte z_1 und ζ_1 auf derselben Geraden vor. Die erste Gleichung des Systems (25) ist die Bedingung, welche die Punctepaare x_1, x_2, z_1, ζ_1 zu erfüllen haben, wenn sie harmonisch zugeordnet sein sollen. Denn es folgt aus derselben

$$\frac{z_1 - x_1}{\zeta_1 - x_1} : \frac{z_1 - x_2}{\zeta_1 - x_2} = -1,$$

und aus der zweiten

$$\frac{z_1 - x_3}{\zeta_1 - x_3} : \frac{z_1 - x_4}{\zeta_1 - x_4} = -1.$$

Demnach werden die Gleichungen (25) dasjenige Punctepaar z_1, ζ_1 bestimmen, welches sowol dem Punctepaare x_1, x_2 harmonisch zugeordnet ist, als dem Punctepaare x_3, x_4. Auf gleiche Weise bestimmen die Gleichungen (26) dasjenige Punctepaar z_2, ζ_2, welches den Punctepaaren x_1, x_3 und x_2, x_4 harmonisch zugeordnet ist, und endlich die Gleichungen (27) das den Punctepaaren x_1, x_4 und x_2, x_3 zugeordnete harmonische Punctepaar z_3, ζ_3.

Die so bestimmten Punctepaare $(z_1, \zeta_1), (z_2, \zeta_2), (z_3, \zeta_3)$ sind ausserdem einander harmonisch zugeordnet, wie aus dem System (28) hervorgeht. Wir gewinnen somit folgendes Theorem:

Wenn vier Puncte auf einer Geraden gegeben sind, so gibt es drei neue Punctepaare, deren jedes harmonisch ist zu einem Paare, wie zu dem andern. Diese drei neuen Punctepaare sind untereinander selbst harmonisch zugeordnet.

Diese drei Punktepaare werden durch eine bikubische Resolvente bestimmt, welche algebraisch lösbar ist, wie jetzt bewiesen werden soll. Es werde demnach vorausgesetzt, dass zwischen den sechs Wurzeln $z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, z_3, \zeta_3$ die Gleichungen (28) gelten. Setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} z_1 + \zeta_1 &= -p_1, & z_2 + \zeta_2 &= -p_2, & z_3 + \zeta_3 &= -p_3, \\ z_1\zeta_1 &= q_1, & z_2\zeta_2 &= q_2, & z_3\zeta_3 &= q_3, \end{aligned}$$

so geht das System (28) über in

$$(32)\quad \begin{cases} q_2 - \frac{1}{2} p_2 p_3 + q_3 = 0, \\ q_3 - \frac{1}{2} p_3 p_1 + q_1 = 0, \\ q_1 - \frac{1}{2} p_1 p_2 + q_2 = 0. \end{cases}$$

Die bikubische Gleichung zerfällt in die drei folgenden Factoren

$$(33)\quad \begin{cases} z^2 + p_1 z + q_1 = 0, \\ z^2 + p_2 z + q_2 = 0, \\ z^2 + p_3 z + q_3 = 0. \end{cases}$$

Dieselbe ist von der Form

$$z^6 + f z^5 + g z^4 + h z^3 + i z^2 + k z + l = 0.$$

Entwickelt man das Product und setzt die Coefficienten gleicher Potenzen von z einander gleich, so wird

$$\begin{aligned} f &= p_1 + p_2 + p_3, \\ g &= p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2 + q_1 + q_2 + q_3, \\ h &= p_1 p_2 p_3 + p_1(q_2 + q_3) + p_2(q_3 + q_1) + p_3(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (32)

$$\begin{aligned} f &= p_1 + p_2 + p_3, \\ g &= \frac{5}{4}(p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2), \\ h &= \frac{5}{2} p_1 p_2 p_3. \end{aligned}$$

Die Coefficienten der zweiten Glieder in (33) sind demnach die Wurzeln der kubischen Resolvente

$$(34)\qquad v^3 - f v^2 + \frac{4}{5} g v - \frac{2}{5} h = 0.$$

Hat man hieraus p_1, p_2, p_3 berechnet, so findet man q_1, q_2, q_3 aus den Gleichungen (32).

So weit Hesse. Zur Herstellung der exacten Formel (34) fügen wir hinzu, dass, wenn man sich der partiellen Differenzialquotienten der Gleichung (10) bedient, die Gleichungen (33) folgende Formen annehmen:

$$z^2 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)} z + \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)} = 0,$$

so dass man hat

$$F = -2f = \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1} + \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2} + \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3},$$

$$G = \frac{16}{5} g = \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2} + \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3} + \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1},$$

$$H = -\frac{16}{5} h = \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3}.$$

Die Resolvente (34) wird dadurch

$$v^3 + \frac{1}{2} F v^2 + \frac{1}{4} G v + \frac{1}{8} H = 0.$$

Bezüglich der in der Abhandlung vorkommenden Grössen $\frac{2\varrho}{r^2}$ und T (20) ist ferner zu bemerken, dass wegen

$$z\xi = \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)}$$

die Relation

$$\frac{T}{\tau} = -12 \frac{\varrho}{r^2} = -12^3 (J_{4,2} - 12\lambda^2)$$

stattfindet.

Entwickelt man noch die übrigen drei Coefficienten i, k, l der bikubischen Gleichung in z, so findet man

$$i = 5(q_2 q_3 + q_3 q_1 + q_1 q_2),$$

$$k = 10 \frac{\left(\frac{i}{5}\right)^2 + l(q_1 + q_2 + q_3)}{h},$$

$$l = q_1 q_2 q_3,$$

weswegen sich sämmtliche Coefficienten in Functionen der partiellen Differenzialquotienten von Δ ausdrücken lassen.

§ 263. Methode der Factorenzerlegung einer binären biquadratischen Function nach Heilermann*).

In den folgenden Paragraphen soll immer die allgemeinere Form des Biquadrats

$$\text{I.}\quad f(x, y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$
$$= (a, b, c, d, e \overset{\frown}{)} (x, y)^4,$$

oder wenn $y = 1$ wird, die Form

$$f(x) = (a, b, c, d, e \overset{\frown}{)} (x, 1)^4$$

den Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Um das Biquadrat $f(x, y)$ in vier lineare Factoren zu zerlegen, setzt Heilermann in ähnlicher Weise wie bei den kubischen Functionen

$$\text{II.}\qquad x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta.$$

Durch Entwickelung des Polynoms $f(\xi, \eta)$ erhält man ähnliche Ausdrücke wie in der Methode der falschen Substitutionen (§ 249), nämlich

$$\begin{aligned}
f(\xi, \eta) &= [a\alpha^4 + 4b\alpha^3\gamma + 6c\alpha^2\gamma^2 + 4d\alpha\gamma^3 + c\gamma^4]\xi^4 \\
&+ 4[(a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3)\beta + (b\alpha^3 + 3c\alpha^2\gamma + 3d\alpha\gamma^2 + e\gamma^3)\delta]\xi^3\eta \\
&+ 6[(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)\beta^2 + 2(b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2)\beta\delta \\
&+ (c\alpha^2 + 2d\alpha\gamma + e\gamma^2)\delta^2]\xi^2\eta^2 \\
&+ 4[(a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3)\alpha + (b\beta^3 + 3c\beta^2\delta + 3d\beta\delta^2 + e\delta^3)\gamma]\xi\eta^3 \\
&+ [a\beta^4 + 4b\beta^3\delta + 6c\beta^2\delta^2 + 4d\beta\delta^3 + e\delta^4]\eta^4.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können nun so bestimmt werden, dass das zweite und vierte Glied verschwinden, also die Function $f(\xi, \eta)$ die kanonische Form

$$A\xi^4 + B\xi^2\eta^2 + C\eta^4$$

annimmt. Man setze also

$$\text{III.}\quad \begin{cases} (a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3)\beta + (b\alpha^3 + 3c\alpha^2\gamma + 3d\alpha\gamma^2 + e\gamma^3)\delta = 0, \\ (a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3)\alpha + (b\beta^3 + 3c\beta^2\delta + 3d\beta\delta^2 + e\delta^3)\beta = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination der ersten und letzten Glieder dieser beiden Gleichungen erhält man zunächst die beiden anderen

$$[a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta](\alpha\delta + \beta\gamma) + 2[b\alpha\beta + c(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\gamma\delta]\gamma\delta = 0,$$
$$[c\alpha\beta + d(\alpha\delta + \beta\gamma) + e\gamma\delta](\alpha\delta + \beta\gamma) + 2[b\alpha\beta + c(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma d]\alpha\beta = 0.$$

---

*) Zerlegung der homogenen, quadratischen, kubischen und biquadratischen Functionen zweier Veränderlichen in Factoren. Trier 1855. Man vergleiche auch Zeitschrift für Math. u. Phys. XXI. 364. 1876.

Diese lassen sich in folgende Doppelgleichung zusammenfassen:

$$\text{IV.}\quad \frac{a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma\delta}{\gamma\delta}=\frac{b\alpha\beta+c(\alpha\delta+\beta\gamma)+d\gamma\delta}{-\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma)}=\frac{c\alpha\beta+d(\alpha\delta+\beta\gamma)+e\gamma\delta}{\alpha\beta}.$$

Wird der gemeinsame Werth dieser drei Quotienten mit -2λ bezeichnet, so entsteht folgendes System von linearen Gleichungen:

$$\text{V.}\quad \begin{aligned} a\alpha\beta + b(\alpha\delta+\beta\gamma)+(c+2\lambda)\gamma\delta&=0,\\ b\alpha\beta+(c-\lambda)(\alpha\delta+\beta\gamma)+d\gamma\delta&=0,\\ (c+2\lambda)\alpha\beta+d(\alpha\delta+\beta\gamma)+e\gamma\delta&=0.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nun zur Bestimmung der Grösse λ die Gleichung

$$\text{VI.}\qquad -4\lambda^3+J_{4,2}-J_{4,3}=0,$$

welche wir bereits früher kennen gelernt haben.

Die drei Wurzeln derselben sind

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} \lambda_1=\frac{1}{2}\left(-J_{4,3}+\sqrt{J_{4,3}^2-\frac{1}{27}J_{4,2}^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\left(-J_{4,3}-\sqrt{J_{4,3}^2-\frac{1}{27}J_{4,2}^3}\right)^{\frac{1}{3}}\\ \quad=\frac{1}{2}\left(-J_{4,3}+\frac{1}{9}\sqrt{-3D_4}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\left(-J_{4,3}-\frac{1}{9}\sqrt{-3D_4}\right)^{\frac{1}{3}},\\ \lambda_2=\frac{1}{2}J_1\left(-J_{4,3}+\frac{1}{9}\sqrt{-3D_4}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}J_2\left(-J_{4,3}-\frac{1}{9}\sqrt{-3D_4}\right)^{\frac{1}{3}},\\ \lambda_3=\frac{1}{2}J_2\left(-J_{4,3}+\frac{1}{9}\sqrt{-3D_4}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}J_1\left(-J_{4,3}-\frac{1}{9}\sqrt{-3D_4}\right)^{\frac{1}{3}}.\end{cases}$$

Nach Einsetzung eines dieser Werthe können die Gleichungen V. zur Bestimmung der Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ dienen. Es entsteht durch paarweise Verbindung derselben

$$\text{VIII.}\quad \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}=-\frac{bc-ad+2b\lambda}{b^2-ac+a\lambda}=-\frac{cd-be+2d\lambda}{c^2-bd+\lambda(c-2\lambda)}=-\frac{(c+2\lambda)^2-ae}{b(c+2\lambda)-ad},$$

$$\text{IX.}\quad \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{c^2-bd+\lambda(c-2\lambda)}{b^2-ac+a\lambda}=\frac{d^2-ce+e\lambda}{c^2-bd+\lambda(c-2\lambda)}=\frac{d(c+2\lambda)-be}{b(c+2\lambda)-ad}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} b(c+2\lambda)-ad&=A_1,\\ (c+2\lambda)^2-ae&=2B_1,\\ d(c+2\lambda)-be&=C_1,\\ B_1^2-A_1C_1&=-D_1,\end{aligned}$$

so ist nach § 121

$$\text{X.}\qquad \begin{aligned}\frac{\alpha}{\gamma} &= -\frac{B_1 + C_1 \pm \sqrt{-D_1}}{A_1 + B_1 \mp \sqrt{-D_1}},\\ \frac{\beta}{\delta} &= -\frac{B_1 + C_1 \mp \sqrt{-D_1}}{A_1 + B_1 \pm \sqrt{-D_1}}.\end{aligned}$$

Hierdurch sind die Coefficienten α, β, γ, δ hinreichend bestimmt, da alle Glieder von $f(\xi, \eta)$ nur die Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ enthalten.

Durch Anwendung der Gleichungen V. kann man dem Coefficienten von $\xi^2\eta^2$ eine sehr einfache Gestalt geben. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}&6[(a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2)\beta^2+2(b\alpha^2+2c\alpha\gamma+d\gamma^2)\beta\delta+(c\alpha^2+2d\alpha\gamma+e\gamma^2)\delta^2]\\ &=6[(a\alpha\beta+b[\alpha\delta+\beta\gamma]+c\gamma\delta)\alpha\beta+(b\alpha\beta+c[\alpha\delta+\beta\gamma]+d\gamma\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)\\ &+(c\alpha\beta+d[\alpha\delta+\beta\gamma]+e\gamma\delta)\gamma\delta]=6\lambda(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.\end{aligned}$$

Die vorgelegte Function $f(x, y)$ ist also dargestellt als Function zweiten Grades von den Variabeln ξ^2 und η^2 in der einfachen Form

$$\text{XI.}\quad f(x, y) = f(\alpha, \gamma)\cdot \xi^4 + 6\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\xi^2\eta^2 + f(\beta, \delta)\eta^4.$$

Dieselbe kann also nach § 121 in Factoren zerlegt werden. Um aus dieser Darstellung eine Formel für die Auflösung der biquadratischen Gleichung herzuleiten, gebe man den Functionen $f(\alpha, \gamma)$ und $f(\beta, \delta)$ eine andere Form. Es ist zunächst

$$f(\alpha,\gamma)=(a\alpha^3+3b\alpha^2\gamma+3c\alpha\gamma^2+d\gamma^3)\alpha+(b\alpha^3+3c\alpha^2\gamma+3d\alpha\gamma^2+e\gamma^3)\gamma,$$

und es ergibt sich hieraus durch Anwendung der ersten Gleichung in III:

$$\begin{aligned}f(\alpha, \gamma) &= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta}(a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3)\\ &= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta}[(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)\alpha + (b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2)\gamma].\end{aligned}$$

Dazu erhält man, wenn man die erste Gleichung in dem System V. mit α, die zweite mit γ multiplicirt und dann beide zu einander addirt,

$$(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + \gamma^2)\beta + (b\alpha^2 + 2c\alpha\gamma + d\gamma^2)\delta = -\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)\gamma.$$

Demgemäss ist

$$\begin{aligned}f(\alpha, \gamma) &= \left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta}\right)^2(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 - \lambda\gamma^2)\\ &= \left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta}\right)^2([a\alpha + b\gamma]\alpha + [b\alpha + c\gamma]\gamma - \lambda\gamma^2).\end{aligned}$$

Mit Benutzung der ersten Gleichung in dem Systeme V. geht die Gleichung über in

$$f(\alpha, \gamma) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\delta^3}([a\alpha + b\gamma][\alpha\delta - \beta\gamma] - 3\lambda\gamma^2\delta).$$

In ähnlicher Weise kann man für $f(\alpha, \gamma)$ und entsprechend auch für $f(\beta, \delta)$ folgende Systeme von Gleichungen bilden:

XII a.
$$\begin{aligned} & -f(\alpha, \gamma) \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\delta^3}[3\lambda\gamma^2\delta - (a\alpha + b\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)] \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\beta\delta^2}[3\lambda\beta\gamma^2 + (b\alpha + c\gamma + 2\lambda\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)] \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\beta^2\delta}[3\lambda\alpha^2\delta - (d\gamma + c\alpha + 2\lambda\alpha)(\alpha\delta - \beta\gamma)] \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\beta^3}[3\lambda\alpha^2\beta - (e\gamma + d\alpha)(\alpha\delta - \beta\gamma)]; \end{aligned}$$

XII b.
$$\begin{aligned} & -f(\beta, \delta) \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\gamma^3}[3\lambda\gamma\delta^2 + (a\beta + b\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)] \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\alpha\gamma^2}[3\lambda\alpha\delta^2 - (b\beta + c\delta + 2\lambda\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)] \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\alpha^2\gamma}[3\lambda\beta^2\gamma - (d\delta + c\beta + 2\lambda\beta)(\alpha\delta - \beta\gamma)] \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{\alpha^3}[3\lambda\alpha\beta^2 - (e\delta + d\beta)(\alpha\delta - \beta\gamma)]. \end{aligned}$$

Die Darstellung XI. der Function vierten Grades geht durch Substitution der ersten Werthe von $f(\alpha, \gamma)$ und $f(\beta, \delta)$ über in

$$\begin{aligned} f(x,y) = & -(z_1 - z_2)^2[3\lambda - (az_1 + b)(z_1 - z_2)](\gamma\xi)^4 + 6\lambda(z_1 - z_2)^2(\gamma\xi . \delta\eta)^2 \\ & - (z_1 - z_2)^2[3\lambda - (az_2 + b)(z_1 - z_2)](\delta\eta)^4, \end{aligned}$$

wo z_1 für $\frac{\alpha}{\gamma}$, z_2 für $\frac{\beta}{\delta}$ gesetzt ist. In dieser Darstellung ist die Summe der Coefficienten

XIII.
$$\begin{aligned} & -(z_1 - z_2)^2[3\lambda - (az_1 + b)(z_1 - z_2) - 6\lambda + 3\lambda + (az_2 + b)(z_1 - z_2)] \\ & = a(z_1 - z_2)^4, \end{aligned}$$

und die Discriminante der quadratischen Function ist gleich

XIV.
$$(b^2 - ac + a\lambda)(z_1 - z_2)^6.$$

Durch Anwendung dieser Reductionen ergibt sich zunächst nach § 121, (7):

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{(z_1 - z_2)^2}{a}[(az_1 + b)\gamma^2\xi^2 - (az_2 + b)\delta^2\eta^2]^2 \\ & - \frac{(z_1 - z_2)^2}{a}(b^2 - ac + a\lambda)(\gamma^2\xi^2 - \delta^2\eta^2)^2, \end{aligned}$$

und hieraus folgt weiter die Factorenzerlegung:

XV. $$f(x,y)$$

$$=\frac{(z_1-z_2)^2}{a}\left[(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})\gamma^2\xi^2-(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})\delta^2\eta^2\right]$$
$$\times\left[(az_1+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})\gamma^2\xi^2-(az_2+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})\delta^2\eta^2\right]$$
$$=\frac{(z_1-z_2)^2}{a}\left[(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\gamma\xi+(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\delta\eta\right]$$
$$\times\left[(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\gamma\xi-(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\delta\eta\right]$$
$$\times\left[(az_1+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\gamma\xi+(az_2+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\delta\eta\right]$$
$$\times\left[(az_1+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\gamma\xi-(az_2+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\delta\eta\right].$$

Setzt man nun in Berücksichtigung von II.

$$\gamma\xi=\frac{x-z_2y}{z_1-z_2},\qquad \delta\eta=\frac{-x+z_1y}{z_1-z_2},$$

so geht der erste Factor über in

$$\frac{(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}-(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}}{z_1-z_2}\,x$$
$$-\frac{z_2(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}-z_1(az_2+b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}}{z_1-z_2}\,y$$
$$=\frac{ax+\left[(b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})+(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}\right]y}{(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}+(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})^{\frac{1}{2}}}.$$

Durch einige Umformungen erhält man noch für den speciellen Wurzelwerth $\lambda=\lambda_1$

$$(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1})(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1})$$
$$=2(b^2-ac)-a\lambda_1+\frac{2b^3-3abc+a^2d}{\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}}$$
$$=(b^2-ac+a\lambda_2)+(b^2-ac+a\lambda_3)+2\sqrt{(b^2-ac+a\lambda_2)(b^2-ac+a\lambda_3)}$$
$$=\left[\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3}\right]^2.$$

Der erste Factor von XV. ist demnach

XVI. $$\frac{ax+(b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3})y}{(az_1+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1})^{\frac{1}{2}}+(az_2+b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1})^{\frac{1}{2}}},$$

worin die drei Wurzelgrössen der Gleichung

XVII. $$\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}\,.\,\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}\,.\,\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3}$$
$$=-\frac{1}{2}(2b^3-3abc+a^2d).$$

Für die drei andern Factoren, welche in XV. vorkommen, erhält man Quotienten, deren Dividenden aus dem Ausdrucke XVI. hervorgehen, wenn man in Uebereinstimmung mit der Bedingung XVII. die Vorzeichen der Wurzelgrössen abändert, d. h. jedesmal zwei in die entgegengesetzten umkehrt. Der Divisor in XVI. und die drei anderen, welche ähnlich gebildet sind, setzen ein Product zusammen, welches gleich $a^2(z_1 - z_2)^2$ ist. Dadurch geht die Factorenzerlegung XV. über in

XVIII. $f(x\,y) =$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^3}\left[ax+\left(b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3}\right)y\right]\\
&\times\left[ax+\left(b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}-\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}-\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3}\right)y\right]\\
&\times\left[ax+\left(b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}-\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3}\right)y\right]\\
&\times\left[ax+\left(b-\sqrt{b^2-ac+a\lambda_1}-\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2}+\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3}\right)y\right].
\end{aligned}$$

Werden nicht die ersten Werthe von $f(\alpha, \gamma)$ und $f(\beta, \delta)$ aus XII. in die Darstellung XI. eingesetzt, sondern die letzten, so erhält man

XIX. $f(x, y) =$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e^3}\left[ey+\left(d+\sqrt{d^2-ce+e\lambda_1}+\sqrt{d^2-ce+e\lambda_2}+\sqrt{d^2-ce+e\lambda_3}\right)x\right]\\
&\times\left[ey+\left(d+\sqrt{d^2-ce+e\lambda_1}-\sqrt{d^2-ce+e\lambda_2}-\sqrt{d^2-ce+e\lambda_3}\right)x\right]\\
&\times\left[ey+\left(d-\sqrt{d^2-ce+e\lambda_1}+\sqrt{d^2-ce+e\lambda_2}-\sqrt{d^2-ce+e\lambda_3}\right)x\right]\\
&\times\left[ey+\left(d-\sqrt{d^2-ce+e\lambda_1}-\sqrt{d^2-ce+e\lambda_2}+\sqrt{d^2-ce+e\lambda_3}\right)x\right].
\end{aligned}$$

Die drei Wurzelgrössen genügen hier der Gleichung

$$\sqrt{d^2-ce+e\lambda_1}\cdot\sqrt{d^2-ce+e\lambda_2}\cdot\sqrt{d^2-ce+e\lambda_3}=\frac{1}{2}(2d^3-3cde+be^2).$$

Auch die übrigen Darstellungen der Grössen $f(\alpha, \gamma)$ und $f(\beta, \delta)$, welche unter XII. angegeben sind, können zur Herleitung einer Auflösungsformel der Gleichung $f(x, y) = 0$ angewendet werden; insbesondere gelangt man durch Einsetzung derjenigen Ausdrücke, welche die Differenz $c - \lambda$ enthalten, zu einem Resultate, in welchem die Coefficienten a und e, b und d symmetrisch vorkommen.

Durch Umformungen, welche den oben ausgeführten ähnlich und deshalb dem Leser überlassen bleiben, entsteht:

XX. $\frac{x}{y} =$

$$\frac{\left[-(c-\lambda)\alpha\beta-\left(d-\sqrt{d^2-ce+e\lambda}\right)\beta\gamma\right]^{\frac{1}{2}}\pm\left[-(c-\lambda)\alpha\beta-\left(d-\sqrt{d^2-ce+e\lambda}\right)\alpha\delta\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(c-\lambda)\gamma\delta+\left(b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda}\right)\alpha\delta\right]^{\frac{1}{2}}\pm\left[(c-\lambda)\gamma\delta+\left(b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda}\right)\beta\gamma\right]^{\frac{1}{2}}},$$

eine Formel, welche schon zwei Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$

darstellt, und auch die beiden andern liefert, wenn gleichzeitig die Vorzeichen von $\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}$ und $\sqrt{d^2 - ce + c\lambda_1}$ in die entgegengesetzten verwandelt werden. Setzt man unn noch die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die sich aus X. in derselben Weise, wie bei den kubischen Functionen ergeben, in die letzte Formel, so erhält man

$$\text{XXI.} \qquad \frac{x}{y} = \frac{\left[(c-\lambda)C_1 - (d-\sqrt{d^2-ce+e\lambda})(B_1+\sqrt{-D_1})\right]^{\frac{1}{2}} \pm \left[(c-\lambda)C_1 - (d-\sqrt{d^2-ce+e\lambda})(B_1-\sqrt{-D_1})\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[-(c-\lambda)A_1 + (b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})(B_1-\sqrt{-D_1})\right]^{\frac{1}{2}} \pm \left[-(c-\lambda)A_1 + (b+\sqrt{b^2-ac+a\lambda})(B_1+\sqrt{-D_1})\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Die vorangehenden Entwicklungen setzen voraus, dass im Allgemeinen $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden ist, weil man sonst zu dem Resultate $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ gelangen würde. Es ist aber, wie aus VIII. und IX. hervorgeht, $\frac{\alpha}{\gamma}$ die Wurzel einer bikubischen Gleichung, deren Coefficienten Functionen von a, b, c, d, e sind. Man würde also die Unbekannte x bestimmen können durch Aufsuchung des gemeinschaftlichen linearen Factors dieser beiden Polynome. Ist in einem speciellen Falle $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, so gelten demnach die Formeln XVIII., XIX. und XXI.; jedoch nimmt letztere den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ an.

Die Differenz $\alpha\delta - \beta\gamma$ wird aber nur gleich Null, wenn sich in den Systemen VIII. und IX. für die Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ gleiche Werthe ergeben; alsdann ist zugleich

$$\text{XXII.} \quad \begin{aligned} &(bc-ad+2b\lambda)^2 - 4(b^2-ac+a\lambda)[c^2-bd+\lambda(c-2\lambda)] = 0, \\ &(cd-be+2d\lambda)^2 - 4(d^2-ce+e\lambda)[c^2-bd+\lambda(c-2\lambda)] = 0, \\ &[(c+2\lambda)^2 - ae]^2 - 4(bc-ad+2b\lambda)(cd-be+2d\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Wird aus zweien dieser Gleichungen oder aus einer derselben und der Gleichung VI. die Grösse λ eliminirt, so wird die Discriminante $\overline{D}_4 = 0$, wodurch die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ in den Coefficienten der Function $f(x, y)$ ausgedrückt ist.

Bestimmen nun aber die Gleichungen VIII. und IX. gleiche zusammengehörige Werthe von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$, so genügen dieselben Werthe auch den Bedingungen III. und diese gehen dadurch beide über in die Gleichung

$$f(\alpha, \gamma) = 0,$$

welche wegen ihrer Entstehung zwei gleiche Wurzeln hat.

Aus diesem Grunde sind dann auch zwei lineare Factoren von $f(x, y)$ einander gleich, und zwar ist das Product dieser Factoren dargestellt durch die quadratische Function

$$A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2,$$

welche, gleich Null gesetzt, die gleichen Werthe von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ als Wurzeln ergibt. Es wird dann sein

$$f(x, y) = (A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2)(Lx^2 + 2 Mxy + Ny^2).$$

Für die Coefficienten L, $2M$, N findet man leicht

$$L = \frac{a}{A_1}, \quad M = \frac{c + 2\lambda}{B_1}, \quad N = \frac{e}{C_1};$$

so dass also die Factorenzerlegung

XXIII. $$f(x, y)$$
$$= (A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2)\left(\frac{a}{A_1} x^2 + 2 \frac{c + 2\lambda}{B_1} xy + \frac{e}{C_1} y^2\right)$$

entsteht.

Es ist bemerkenswerth, dass die Gleichung $f(\alpha, \gamma) = 0$ gleichzeitig die Bedingung dafür angibt, dass die Gleichungen VIII. und IX., die Gleichung $f(x, y) = 0$ und die Gleichung VI. zwei gleiche Wurzeln enthalten. Ist $\overline{D_4} = 0$, so sind die Wurzelwerthe von VI:

$$\lambda_1 = -\sqrt[3]{J_{4,3}}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{J_{4,3}},$$

durch deren Zuziehung die Systeme XVIII. und XIX. vereinfacht werden.

Aus der Doppelgleichung IV. combinirt mit VI. lassen sich die Coefficienten α, β, γ, δ einerseits herleiten. Man kann aber auch die Summe $\alpha\delta + \beta\gamma$ eliminiren und das Product $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\delta}$ berechnen aus der Resolvente XXI γ.:

$$(2b^3 - 3abc + a^2 d)\alpha^3\beta^3 - (2b^2 d - 3acd + abe)\alpha^2\beta^2\gamma\delta$$
$$- (2bd^2 - 3bce + ade)\alpha\beta\gamma^2\delta^2 + (2d^3 - 3cde + be^2)\gamma^3\delta^3 = 0.$$

Weiter ergibt sich dann aus IV. die Beziehung zwischen Summe und Product

$$\alpha\delta + \beta\gamma = \frac{a\alpha^2\beta^2 - e\gamma^2\delta^2}{b\alpha\beta - d\gamma\delta},$$

welche zur Berechnung von $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}$ oder $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta}$ dient, so dass daraus die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in die Form XI. eingesetzt werden können.

Es scheint Heilermann entgangen zu sein, dass man die Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ nicht bloss mittels der Resolventen XXI γ. und XXII γ., d. i. der Gleichungen ihrer Summe und Producte, berechnen kann, sondern dass sich auch aus den Systemen VIII. und IX. die bikubische Resolvente XXXI γ. d. i. die bikubische Covariante der Function $f(\alpha, \gamma)$ herleiten lässt, welche die Werthe einzeln, aber auch in drei zusammengehörigen Paaren liefert, da man diese Resolvente in drei quadratische Factoren zerlegen kann, wie in § 217, 7 gelehrt worden ist. Dass die Covariante $C_{4,6}$ in der neuern Algebra eine hervorragende Rolle spielt, werden wir weiter in dem folgenden Paragraphen erkennen.

§ 264. Die Formeln von Aronhold*).

Im Jahre 1856 gab Aronhold folgende elegante Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$

Berechnet man die Determinanten

$$\varDelta = {}_{+}\begin{vmatrix} a, & b, & c+2\lambda \\ b, & c-\lambda, & d \\ c+2\lambda, & d, & e \end{vmatrix}^{+},$$

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial e} = {}_{+}\begin{vmatrix} a, & b, \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix}^{+} = b^2 - ac + a\lambda,$$

so ist $\varDelta = 0$ eine kubische Gleichung von der Form

$$\varDelta = -4\lambda^3 + R\lambda + Q = 0,$$

welche, wegen des fehlenden zweiten Gliedes, direct durch die Cardanische Regel aufgelöst werden kann. Sind nun $\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1$, $\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2$, $\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3$ die Werthe der zweiten Determinante, welche den drei Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, so ist

$$x = \frac{1}{a}\left\{-b \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}\right\},$$

*) Aronhold, Bemerkung über die Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Crelle's Journal. LII. S. 95. 1856. Man vergleiche auch Clebsch, Theorie der binären Formen. § 87.

wo die zusammengehörigen Zeichen so zu nehmen sind, dass ihr Product das entgegengesetzte Vorzeichen von der kubischen Variante

$$V_3 = 2b^3 - 3abc + a^2 d$$

erhält*).

Noch allgemeiner hat man für beliebige Werthe von ξ und η:

$$\frac{(ax+b)\xi^3 + 3(bx+c)\xi^2\eta + 3(cx+d)\xi\eta^2 + (dx+e)\eta^3}{\xi - x\eta}$$

$$= \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \xi^4 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \xi^3\eta + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_1 \xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1 \xi\eta^3 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1 \eta^4\right]}$$

$$\pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \xi^4 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2 \xi^3\eta + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_2 \xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_2 \xi\eta^3 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2 \eta^4\right]}$$

$$\pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 \xi^4 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3 \xi^3\eta + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_3 \xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_3 \xi\eta^3 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3 \eta^4\right]},$$

woraus der obige Werth von x folgt, wenn $\xi = 1$, $\eta = 0$ gesetzt wird. Für $\xi = 0$, $\eta = 1$ erhält man den Werth

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e}\left\{- d \mp \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1} \mp \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2} \mp \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3}\right\},$$

wo die Vorzeichen so zu wählen sind, dass das Product der Wurzelgrössen das entgegengesetzte Vorzeichen der kubischen Retrovariante

$$V'_{3,4} = 2d^3 - 3cde + be^2$$

erhält.

Aronhold veröffentlichte diese Formeln ohne Beweis, weshalb wir einen solchen hinzusetzen wollen. Wir bemerken vorab, dass Clebsch (l. c.) die Formel kürzer in folgender Form typisch darstellt, wobei wir die von uns eingeführte Bezeichnung (§ 189) befolgen:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1, z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1, z_2}}{z_1 y - z_2 x} = \pm \varphi(z_1, z_2) \pm \psi(z_1, z_2) \pm \chi(z_1, z_2).$$

Hierin sind z_1 und z_2 willkürliche Grössen und es ist gemäss § 217, 7

$$(\pm \varphi) \cdot (\pm \psi) \cdot (\pm \chi) = -\frac{1}{2} C_{4,6}.$$

Setzen wir der Kürze wegen $\frac{\xi}{\eta} = z$, und bilden die Covariante

---

*) Diese schärfere Bestimmung gibt Aronhold nicht, sondern er sagt nur, das Product müsse positiv werden, was bekanntlich nicht immer der Fall ist.

$C_{4,6}(z)$ der Function $f(z)$, so lässt sich $\frac{32}{a^3}\,C_{4,6}(z)$ in folgende quadratische Factoren zerlegen:

$$-(x_1+x_2-x_3-x_4)z^2+2(x_1x_2-x_3x_4)z+[x_3x_4(x_1+x_2)-x_1x_2(x_3+x_4)],$$
$$-(x_1-x_2+x_3-x_4)z^2+2(x_1x_3-x_2x_4)z+[x_2x_4(x_1+x_3)-x_1x_3(x_2+x_4)],$$
$$-(x_1-x_2-x_3+x_4)z^2+2(x_1x_4-x_2x_3)z+[x_2x_3(x_1+x_4)-x_1x_4(x_2+x_3)].$$

Diese Factoren sind also der Reihe nach $\mp 4\frac{\varphi(z)}{a}$, $\mp 4\frac{\psi(z)}{a}$, $\mp 4\frac{\chi(z)}{a}$. Dividirt man die Ausdrücke durch 4 und bezeichnet x_1 allgemein mit x, so erhält man durch Addition derselben und durch Multiplication mit a:

$$-(ax+b)z^2-(ax^2+4bx+3c)z+\left(d+\frac{e}{x}\right)=\mp\varphi(z)\mp\psi(z)\mp\chi(z),$$

oder, was dasselbe ist,

$$-(ax+b)z^2+\left(3c+\frac{4d}{x}+\frac{e}{x^2}\right)z+\left(d+\frac{e}{x}\right)=\mp\varphi(z)\mp\psi(z)\mp\chi(z).$$

Diese Ausdrücke verwandeln sich aber sofort in

$$\frac{(ax+b)z^3+3(bx+c)z^2+3(cx+d)z+(dx+e)}{z-x}=\pm\varphi(z)\pm\psi(z)\pm\chi(z).$$

Es handelt sich nur noch darum, die Ausdrücke φ, ψ, χ umzuformen. Nach dem Früheren ist

$$\varphi(z)=\sqrt{\lambda_1 f(z)-C_{4,4}(z)},$$
$$\psi(z)=\sqrt{\lambda_2 f(z)-C_{4,4}(z)},$$
$$\chi(z)=\sqrt{\lambda_3 f(z)-C_{4,4}(z)},$$

und

$$\begin{aligned}\lambda f(z)-C_{4,4}(z)&=a\lambda z^4+4b\lambda z^3+6c\lambda z^2+4d\lambda z+e\lambda\\&\quad-(ac-b^2)z^4-2(ad-bc)z^3-(ae+2bd-3c^2)z^2\\&\quad-2(be-cd)z-(ce-d^2).\end{aligned}$$

Vereinigt man nun die Coefficienten gleicher Potenzen von z, so resultirt

$$\begin{aligned}&\lambda f(z)-C_{4,4}(z)\\&=(b^2-ac+a\lambda)z^4+2(bc-ad+2b\lambda)z^3-(ae+2bd-3c^2-6c\lambda)z^2\\&\quad+2(cd-be+2d\lambda)z+(d^2-ce+e\lambda)\\&=\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)z^4-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)z^3+\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)z^2-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)z+\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right).\end{aligned}$$

Setzt man jetzt wieder $\frac{\xi}{\eta}$ an die Stelle von z, so erhält man die Formeln von Aronhold.

§ 265. Die Formeln von Eisenstein*).

Die allgemeine biquadratische Gleichung

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

hat die Wurzelwerthe

$$x_1 = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

$$x_2 = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x_3 = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x_4 = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)].$$

In diesen Ausdrücken gelten die Relationen

$$\gamma = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\quad \psi(\zeta) + \quad \psi(\eta)],$$

$$\delta = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[J_1\psi(\zeta) + J_2\psi(\eta)],$$

$$\varepsilon = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[J_2\psi(\zeta) + J_1\psi(\eta)];$$

und hiervon

$$\zeta = -J_{4,3} + \frac{1}{9}\varphi\left(-3\overline{D_4}\right),$$

$$\eta = -J_{4,3} - \frac{1}{9}\varphi\left(-3\overline{D_4}\right).$$

Zur Bestimmung der zusammengehörigen Werthe dienen die beiden Gleichungen

$$\psi(\zeta)\,.\,\psi(\eta) = \quad \frac{1}{3}J_{4,2},$$

$$\varphi(\gamma)\,.\,\varphi(\delta)\,.\,\varphi(\varepsilon) = -\frac{1}{2}V_3.$$

§ 266. Methode der Factorenzerlegung biquadratischer Gleichungen nach Cayley und Clebsch**).

Wir folgen hier der Darstellung, welche der Letztere von dieser Methode gegeben hat.

---

*) Eisenstein, Allgemeine Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden. Crelle's Journal. XXVI. S. 81. 1844. Man vergleiche auch oben § 190.

**) Cayley, Fifth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. vol. 148. London 1858.

Brioschi, Sur une formule de Cayley. Crelle's Journal. LIII. 377. 1856. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. § 46.

Unter der Voraussetzung, dass die Discriminante $\overline{D_4}$ von Null verschieden ist, führen die bekannten Gleichungen

$$\varphi = \sqrt{\lambda_1 f - C_{4,4}},$$
$$\psi = \sqrt{\lambda_2 f - C_{4,4}},$$
$$\chi = \sqrt{\lambda_3 f - C_{4,4}},$$

zur Auflösung der Gleichung vierter Ordnung

$$f(z, \eta) = kf - lC_{4,4} = 0.$$

In Folge dieser Gleichung hat man

$$f : C_{4,4} = l : k,$$

und daher, wenn ϱ einen unbestimmten Factor bezeichnet,

$$\varphi = \varrho \sqrt{l\lambda_1 - k},$$
$$\psi = \varrho \sqrt{l\lambda_2 - k},$$
$$\chi = \varrho \sqrt{\lambda l_3 - k}.$$

Es seien nun z und η die Hauptgrössen in der Function $kf - lC_{4,4}$ und $z_1 : \eta_1$ ein Wurzelwerth derselben, so ist jeder der Ausdrücke φ, ψ, χ eine quadratische Function von z_1 und η_1, also allgemein

$$\alpha_1 z_1^2 + 2\beta_1 z_1 \eta_1 + \gamma_1 \eta_1^2 = \varrho \sqrt{l\lambda_1 - k},$$
$$\alpha_2 z_1^2 + 2\beta_2 z_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_1^2 = \varrho \sqrt{l\lambda_2 - k},$$
$$\alpha_3 z_1^2 + 2\beta_3 z_1 \eta_1 + \gamma_3 \eta_1^2 = \varrho \sqrt{l\lambda_3 - k}.$$

Setzen wir die hieraus berechneten Werthe von z_1^2, $z_1\eta_1$, η_1^2 in die linke Seite der Identität

$$\eta^2 z_1^2 - 2z\eta z_1\eta_1 + z^2\eta_1^2 = (\eta z_1 - z\eta_1)^2$$

ein, so erhalten wir rechts das Quadrat eines linearen Factors von $kf - lC_{4,4}$. Indem wir aber aus den vier vorangehenden Gleichungen z_1^2, $z_1\eta_1$ und η_1^2 eliminiren, erhalten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \varrho\sqrt{l\lambda_1 - k} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \varrho\sqrt{l\lambda_2 - k} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \varrho\sqrt{l\lambda_3 - k} \\ \eta^2 & -z\eta & z^2 & (\eta z_1 - z\eta_1)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\frac{(\eta z_1 - z\eta_1)^2}{\varrho} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \sqrt{l\lambda_1 - k} \cdot \begin{vmatrix} \eta^2 & -\eta z & z^2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \sqrt{l\lambda_2 - k} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \eta^2 & -z\eta & z^2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \sqrt{l\lambda_3 - k} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \eta^2 & -z\eta & z^2 \end{vmatrix}.$$

Die drei Determinanten rechts entstehen aus der Determinante links, indem man immer eine Reihe von Coefficienten durch $\eta^2, -z\eta, z^2$ ersetzt. Die vordere Determinante lässt sich in symmetrischen Functionen der Wurzeln von $f = 0$ oder auch in den Coefficienten a, b, c, d, e der Function

$$f = (a, b, c, d, e \widehat{)(} x, y)^4$$

ausdrücken. Es ist nämlich

$$\varphi^2 = \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1 z^4 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1 z\eta^3 + \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial c}\right)_1 z^2\eta^2 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_1 z\eta^3 + \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_1 \eta^4,$$

$$\psi^2 = \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2 z^4 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2 z\eta^3 + \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial c}\right)_2 z^2\eta^2 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_2 z\eta^3 + \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_2 \eta^4,$$

$$\chi^2 = \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3 z^4 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3 z\eta^3 + \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial c}\right)_3 z^2\eta^2 - \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_3 z\eta^3 + \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_3 \eta^4.$$

Jeder der biquadratischen Ausdrücke rechts ist ein vollständiges Quadrat, so dass die Coefficienten der drei Glieder der Quadratwurzel

$$\alpha z^2 + 2\beta z\eta + \gamma\eta^2$$

leicht bestimmt werden können. Erhebt man diese zum Quadrat und setzt beiderseits die Coefficienten einander gleich, so resultiren daraus die Relationen:

$$\alpha^2 = \frac{\partial \varDelta}{\partial e},$$

$$4\alpha\beta = -\frac{\partial \varDelta}{\partial d},$$

$$4\beta^2 + 2\alpha\gamma = \frac{\partial \varDelta}{\partial c},$$

$$4\beta\gamma = -\frac{\partial \varDelta}{\partial b},$$

$$\gamma^2 = \frac{\partial \varDelta}{\partial a}.$$

Man erhält α durch die Quadratwurzel aus $\frac{\partial \varDelta}{\partial e}$, dann β durch α

und $\frac{\partial \Delta}{\partial d}$, endlich γ durch die Quadratwurzel aus $\frac{\partial \Delta}{\partial a}$; die übrigen Gleichungen müssen dann von selbst erfüllt sein. Demnach ist (§ 79. d)

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1} z^2 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1}} z\eta + \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1} \eta^2.$$

Die Werthe von ψ und χ erhält man, indem man die Indices verändert. Die Determinante wird auf diese Weise:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1}, & -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1}}, & \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1} \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2}, & -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_2}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2}}, & \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2} \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3}, & -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_3}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3}}, & \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{D}_4}$$

$$= 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) = \sqrt{J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2},$$

d. h. gleich der halben Wurzel aus der Discriminante der Function f. Die drei andern Determinanten findet man mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 = -\frac{1}{2} V_3$$

der Reihe nach gleich

$$(\lambda_3 - \lambda_2)\varphi, \quad (\lambda_1 - \lambda_3)\psi, \quad (\lambda_2 - \lambda_1)\chi.$$

Demgemäss ist

$$\frac{(\eta z_1 - z\eta_1)^2 \sqrt{\overline{D}_4}}{2\varrho} = (\lambda_3 - \lambda_2)\varphi \sqrt{l\lambda_1 - k} + (\lambda_1 - \lambda_3)\psi \sqrt{l\lambda_2 - k} + (\lambda_2 - \lambda_1)\chi \sqrt{l\lambda_3 - k}.$$

Man sieht also, dass die Bestimmung des linearen Factors $(\eta z_1 - z\eta_1)$ oder (ηz) immer möglich ist, wenn nur $\overline{D}_4$ von Null verschieden ist, und dass man auf der rechten Seite einen Ausdruck erhält, welcher nothwendig das Quadrat einer linearen Function ist.

Für die Auflösung der Gleichung

$$f(z, \eta) = kf - lC_{4,4} = 0$$

ist nöthig das Quadrat des linearen Factors der Gleichung zu kennen, indem die Verhältnisse von z_1^2, $z_1\eta_1$, η_1^2 und also auch $z_1 : \eta_1$ dann bekannt sein werden. Man braucht also nur, indem man die linke Seite der gefundenen Gleichung (von einem gleichgültigen Factor abstrahirend) durch

$$\alpha_{\prime\prime} z^2 + 3\beta_{\prime\prime} z\eta + \gamma_{\prime\prime}\eta^2$$

bezeichnet, aus jener die Gleichungen

$$z_\prime^2 = \alpha_{\prime\prime}, \quad z_\prime \eta_\prime = -\beta_{\prime\prime}, \quad \eta_\prime^2 = \gamma_{\prime\prime}$$

abzuleiten; der Quotient

$$\frac{z_\prime}{\eta_\prime} = -\frac{\alpha_{\prime\prime}}{\beta_{\prime\prime}} = -\frac{\beta_{\prime\prime}}{\gamma_{\prime\prime}}$$

ist dann eine Wurzel der vorgelegten Gleichung.

Man kann nun die Factorenzerlegung der biquadratischen Function auf eine Identität reduciren, welche vier lineare Factoren enthält, nämlich

$$\begin{aligned} &M(kf - lC_{4,4}) \\ &= [(\lambda_3 - \lambda_2)\varphi\sqrt{l\lambda_1 - k} + (\lambda_1 - \lambda_3)\psi\sqrt{l\lambda_2 - k} + (\lambda_2 - \lambda_1)\chi\sqrt{l\lambda_3 - k}]^{\frac{1}{2}} \\ &\times [(\lambda_3 - \lambda_2)\varphi\sqrt{l\lambda_1 - k} - (\lambda_1 - \lambda_3)\psi\sqrt{l\lambda_2 - k} + (\lambda_2 - \lambda_1)\chi\sqrt{l\lambda_3 - k}]^{\frac{1}{2}} \\ &\times [(\lambda_3 - \lambda_2)\varphi\sqrt{l\lambda_1 - k} + (\lambda_1 - \lambda_3)\psi\sqrt{l\lambda_2 - k} - (\lambda_2 - \lambda_1)\chi\sqrt{l\lambda_3 - k}]^{\frac{1}{2}} \\ &\times [(\lambda_3 - \lambda_2)\varphi\sqrt{l\lambda_1 - k} - (\lambda_1 - \lambda_3)\psi\sqrt{l\lambda_2 - k} - (\lambda_2 - \lambda_1)\chi\sqrt{l\lambda_3 - k}]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei noch für φ, ψ, χ die Werthe einzusetzen sind. Es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Constante M. Dazu genügt es, in die obige allgemeine Gleichung ein Werthsystem z, η einzuführen, für welches eine der drei Formen φ, ψ, χ verschwindet z. B. φ. Dadurch reducirt sich die allgemeine Gleichung auf

$$M(kf - lC_{4,4}) = (\lambda_1 - \lambda_3)^2\psi^2(l\lambda_2 - k) - (\lambda_2 - \lambda_1)^2\chi^2(l\lambda_3 - k).$$

Zugleich wird

$$C_{4,4} = \lambda_1 f, \quad \psi = \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)f}, \quad \chi = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)f},$$

und daher, wenn man dies in die vorhergehende Gleichung einsetzt,

$$\begin{aligned} M(k - l\lambda_1) &= (\lambda_1 - \lambda_3)^2\psi^2(l\lambda_2 - k) - (\lambda_2 - \lambda_1)^2\chi^2(l\lambda_3 - k) \\ &= -4(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) = -\sqrt{D_4}. \end{aligned}$$

Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass sobald $\overline{D_4}$ nicht verschwindet, die vier Lösungen der biquadratischen Gleichung

$$kf - lC_{4,4} = 0$$

aus den vier Gleichungen

$$0 = (\lambda_2 - \lambda_3)\varphi\sqrt{k - l\lambda_1} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\psi\sqrt{k - l\lambda_2} \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\chi\sqrt{k - l\lambda_3}$$

gefunden werden, deren Glieder Quadrate linearer Ausdrücke von z sind.

Die vier Wurzeln sind immer verschieden, ausgenommen, wenn $\lambda = l\lambda$ oder zwei λ gleich werden. Denn sollten zwei gleich werden, etwa die dem ersten und vierten Factor entsprechenden, so müssten die Gleichungen

$$\varphi = 0,$$
$$(\lambda_3 - \lambda_1)\psi\sqrt{k - l\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)\chi\sqrt{k - l\lambda_3} = 0$$

bestehen. Es genügt nachzuweisen, dass eine z. B. die zweite nicht bestehen kann. Es ist nämlich, wie oben gezeigt worden ist, für $\varphi = 0$:

$$\psi = \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)f}, \quad \chi = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)f},$$

folglich der zweite Ausdruck

$$T = \sqrt{f}\,[(\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\sqrt{k - l\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}\sqrt{k - l\lambda_3}]$$
$$= -\sqrt{f}\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}\,[\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}\sqrt{k - l\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}\sqrt{k - l\lambda_3}] = 0.$$

Demnach müsste, da f nicht gleich Null ist, weil sonst ebenfalls ψ und χ verschwinden müssten, einer der übrigen Factoren Null sein, d. h. es müssten entweder zwei λ einander gleich oder

$$\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}\sqrt{k - l\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}\sqrt{k - l\lambda_3} = 0$$

sein. Hieraus würde folgen

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(k - l\lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)(k - l\lambda_3) = (\lambda_2 - \lambda_3)(k - l\lambda_1) = 0,$$

und dies könnte nur geschehen, wenn gegen die Annahme entweder $\lambda_2 = \lambda_3$ oder $k = l\lambda_1$ wäre.

§ 267. Methode der Zerlegung einer biquadratischen Function in zwei quadratische Factoren nach Clebsch*).

Auf die Resolvente XXX γ

$$\begin{matrix} \\ \Delta = \\ + \end{matrix}\begin{vmatrix} a, & b, & (c + 2\lambda) \\ b, & (c - \lambda), & d \\ (c + 2\lambda), & d, & e \end{vmatrix}\begin{matrix} + \\ = - 4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} \\ \end{matrix}$$

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. § 47.

der biquadratischen Gleichung

$$f = (a, b, c, d, e\overset{\frown}{)}(x, y)^4 = 0$$

wird man noch auf eine andere Art geführt, indem man direct die Aufgabe zu lösen sucht, die Form f in zwei quadratische Factoren zu zerlegen, wie es in elementarer Weise zuerst von Schooten (§ 202) ausgeführt worden ist.

Setzt man

$$f = (\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2)(\alpha_2 x^2 + 2\beta_2 xy + \gamma_2 y^2),$$

so erhält man nach Entwickelung dieses Products durch Vergleichung der beiderseitigen homologen Coefficienten

$$(1)\qquad \begin{aligned} a &= \alpha_1\alpha_2, \\ 2b &= \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2, \\ 6c &= \alpha_1\gamma_2 + 4\beta_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_1, \\ 2d &= \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2, \\ e &= \gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Führt man nun eine Hülfsgrösse λ ein, so dass die mittelste dieser Bestimmungsgleichungen in die beiden

$$\begin{aligned} \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 &= 2c + 4\lambda, \\ 4\beta_1\beta_2 &= 4c - 4\lambda, \end{aligned}$$

zerlegt wird, so findet man λ aus der Bemerkung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2, & \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 \\ \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_2, & \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 \\ \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2, & \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet. Setzt man hier für die Elemente derselben ihre Werthe aus (1) und dividirt überall durch 2, so erhält man die Gleichung für λ:

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & (c + 2\lambda) \\ b & (c - \lambda) & d \\ (c + 2\lambda) & d & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3}.$$

Die Zerlegung von f finden wir ohne Weiteres aus den bekannten Gleichungen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
C_{4,4} - \lambda_1 f &= -\varphi^2,\\
C_{4,4} - \lambda_2 f &= -\psi^2,\\
C_{4,4} - \lambda_3 f &= -\chi^2.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich daraus

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
f &= \frac{\chi^2 - \psi^2}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{(\chi - \psi)(\chi + \psi)}{\lambda_3 - \lambda_2},\\
&= \frac{\varphi^2 - \chi^2}{\lambda_1 - \lambda_3} = \frac{(\varphi - \chi)(\varphi + \chi)}{\lambda_1 - \lambda_3},\\
&= \frac{\psi^2 - \varphi^2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\psi - \varphi)(\psi + \varphi)}{\lambda_2 - \lambda_1}.
\end{aligned}
$$

Die Auflösung der Gleichung $f = 0$ ist also darauf reducirt, dass ihre vier linearen Factoren die gemeinsamen linearen Factoren der folgenden vier Tripel von Gleichungen sind:

$$
(4)\qquad
\begin{array}{llll}
1) & \psi - \varphi = 0, & \varphi - \chi = 0, & \chi - \psi = 0,\\
2) & \psi - \varphi = 0, & \varphi + \chi = 0, & \chi + \psi = 0,\\
3) & \psi + \varphi = 0, & \varphi - \chi = 0, & \chi + \psi = 0,\\
4) & \psi + \varphi = 0, & \varphi + \chi = 0, & \chi - \psi = 0.
\end{array}
$$

Diese Gleichungen lassen sich bequem zur Discussion der Realität der Wurzeln bei einer Gleichung mit reellen Coefficienten benutzen.

Hat die kubische Resolvente $\Delta = 0$ eine reelle Wurzel λ_1 und zwei conjugirt complexe λ_2 und λ_3, was für negative Werthe von $\overline{D}_4$ eintritt, so sind ψ und χ ihrer Entstehung nach conjugirt complex, also wegen

$$C_{4,6} = 2\varphi\psi\chi$$

φ reell. Demnach kann man

$$\psi = u + v\sqrt{-1}, \quad \chi = u - v\sqrt{-1}$$

setzen, wodurch sich das System (4) verwandelt in

$$
\begin{array}{lrl}
1) & u - \varphi = 0, & v = 0,\\
2) & v\sqrt{-1} - \varphi = 0, & u = 0,\\
3) & v\sqrt{-1} + \varphi = 0, & u = 0,\\
4) & u + \varphi = 0, & v = 0.
\end{array}
$$

Da ψ und χ keinen Factor gemein haben, so können u und v nicht zugleich verschwinden. Daher ist die gemeinsame Lösung der Systeme 2) oder 3) nothwendig complex; die von 1) oder 4) sind reell.

Bei $\overline{D}_4 < 0$ hat die biquadratische Gleichung also zwei reelle und zwei complexe Wurzeln.

Ist dagegen $\overline{D}_4 > 0$, so hat die Resolvente $\varDelta = 0$ drei reelle Wurzeln λ_1, λ_2 und λ_3. Daher sind φ^2, ψ^2 und χ^2 reell und es werden nun zwei Fälle möglich sein. Entweder sind φ, ψ, χ selbst reell und in diesem Falle also auch alle gemeinsamen Lösungen der Systeme (4) und damit die Wurzeln von $f = 0$. Oder aber zwei der Ausdrücke φ, ψ, χ erhalten den Factor $\sqrt{-1}$, so dass etwa

$$\psi = \psi' \sqrt{-1}, \quad \chi = \chi' \sqrt{-1}.$$

In diesem Falle verwandeln die Systeme (4) sich in folgende:

$$\begin{array}{llll}
1) & \psi'\sqrt{-1} - \varphi = 0, & \varphi - \chi'\sqrt{-1} = 0, & \chi' - \psi' = 0, \\
2) & \psi'\sqrt{-1} - \varphi = 0, & \varphi + \chi'\sqrt{-1} = 0, & \chi' + \psi' = 0, \\
3) & \psi'\sqrt{-1} + \varphi = 0, & \varphi - \chi'\sqrt{-1} = 0, & \chi' + \psi' = 0, \\
4) & \psi'\sqrt{-1} + \varphi = 0, & \varphi + \chi'\sqrt{-1} = 0, & \chi' - \psi' = 0.
\end{array}$$

Daher sind in diesem Falle sämmtliche gemeinsame Lösungen der Systeme (4) complex und also auch die Wurzeln von $f = 0$.

Bei $\overline{D}_4 > 0$ hat die biquadratische Gleichung also entweder vier reelle, oder vier complexe Wurzeln.

Die Unterscheidung der beiden letzten Fälle ergibt sich einfacher, wenn man die Gleichung der Grössen φ^2, ψ^2, χ^2 bildet. Dieselbe ist offenbar

$$z^3 + 3C_{4,4}z^2 + \left(3C_{4,4}^2 - \frac{1}{4}J_{4,2}f^2\right)z - \frac{1}{4}C_{4,6}^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat stets reelle Wurzeln, wenn $\overline{D}_4 > 0$ ist; und zwar drei positive, wenn $f = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, zwei negative und eine positive, wenn $f = 0$ lauter complexe Wurzeln hat. Im ersten Falle muss natürlich $C_{4,4}$ negativ, $3C_{4,4}^2 - \frac{1}{4}J_{4,2}f^2$ positiv sein, im zweiten Falle darf an dieser Stelle kein Zeichenwechsel stattfinden, da das Absolutglied negativ ist. Hieraus ergibt sich der bemerkenswerthe Satz:

Wenn $\overline{D}_4 > 0$ ist, so haben die Werthe der Formen $C_{4,4}$ und $C_{4,4}^2 - \frac{1}{12}J_{4,2}f^2$ bei beliebigen reellen Werthen der x entweder stets verschiedene Vorzeichen und dann hat $f = 0$ lauter reelle Wurzeln, oder dieselben haben stets gleiche Vorzeichen, und dann hat die Gleichung $f=0$ lauter complexe Wurzeln.

§ 268. Die kanonische Darstellung der Biquadrate nach Clebsch (l. c. § 49).

Im § 262 ist gezeigt worden, dass die Function

$$f(x, y) = (a, b, c, d, e \widehat{)} (x, y)^4$$

sich auf die Form

$$f(\alpha, \gamma)\xi^4 + 6\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\xi^2\eta^2 + f(\beta, \delta)\eta^4,$$

und zwar bei linearer Transformation auf das Minimum der nicht numerischen Coefficienten reduciren lässt. Man nennt diese Form der Function ihre kanonische Darstellung. Aendert man die beiden Hauptgrössen um passende Factoren, so kann man die Function noch auf die symmetrische Form

$$f = p(\xi^4 + \eta^4) + 6q\xi^2\eta^2$$

bringen. Zur Auflösung dieser Gleichung sind dann nur noch Quadratwurzeln erforderlich. Es ist nämlich

$$(\xi^2 + \eta^2)\sqrt{p} = \xi\eta\sqrt{-6q+2p},$$
$$(\xi^2 - \eta^2)\sqrt{p} = \xi\eta\sqrt{-6q-2p};$$

oder auch, indem man diese Gleichungen addirt oder von einander subtrahirt, darauf durch ξ oder η dividirt:

$$2\xi\sqrt{p} = \eta\left(\sqrt{-6q+2p} + \sqrt{-6q-2p}\right),$$
$$2\eta\sqrt{p} = \xi\left(\sqrt{-6q+2p} - \sqrt{-6q-2p}\right).$$

Es ist nun leicht, hiervon die Invarianten und Covarianten zu bilden. Dieselben mögen bezeichnet werden mit

$$C'_{4,4}, \quad C'_{4,6}, \quad J'_{4,2}, \quad J'_{4,3}.$$

Zunächst hat man

$$C'_{4,4} = pq(\xi^4 + \eta^4) + (p^2 - 3q^2)\xi^2\eta^2,$$
$$C'_{4,6} = \xi\eta(p^3 - 9pq^2)(\xi^4 - \eta^4),$$
$$J'_{4,2} = p^2 + 3q^2, \quad J'_{4,3} = p^2q - q^3.$$

Bezeichnet man den Modulus der Transformationen in die ursprünglichen Bildungen

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y$$

kurz mit

$$(\xi\eta) = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

so unterscheiden sich die Covarianten und Invarianten der ursprünglichen und neuen Formen nach § 53 und § 55 nur durch entsprechende ganze Potenzen des Modulus.

Zunächst hat man

$$C_{4,4} = (\xi\eta)^2 C'_{4,4} = (\xi\eta)^2[pq(\xi^4 + \eta^4) + (p^2 - 3q^2)\xi^2\eta^2],$$

und

$$C_{4,6} = (\xi\eta)^3 C'_{4,6} = (\xi\eta)^3[(p^3 - 9pq^2)(\xi^4 - \eta^4)\xi\eta];$$

ferner

$$J_{4,2} = (\xi\eta)^4 J'_{4,2} = (\xi\eta)^4(p^2 + 3q^2),$$
$$J_{4,3} = (\xi\eta)^6 J'_{4,3} = (\xi\eta)^6(p^2 q - q^3).$$

Nun ist von den Grössen p und q eine zwar willkürlich, das Verhältniss $p:q$ aber ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen. Aus diesen zieht man

$$(\xi\eta)^2 = \frac{p^2 + 3q^2}{q(p^2 - q^2)} \cdot \frac{J_{4,3}}{J_{4,2}}$$

und

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2} = \frac{(p^2 + 3q^2)^3}{(p^2 - q^2)^2 q^2}.$$

Die eine Gleichung liefert den Modul der Transformation, die andere eine Gleichung vom dritten Grade in $\frac{p^2}{q^2}$. Sie lässt sich durch eine einfache Substitution in die Δ-Determinante von Aronhold überführen. Setzt man nämlich

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{J_{4,2}\,\lambda + 12\, J_{4,3}}{J_{4,2}\,\lambda - 4\, J_{4,3}},$$

so geht die kubische Gleichung über in die Gleichung $\Delta = 0$. Mittels dieser letzten Relation folgert man aus der vorhergehenden Gleichung für den Modul

$$(\xi\eta)^2 q = \lambda$$

eine Beziehung, welche sich aus der kanonischen Form von Heilermann unmittelbar ergibt, wenn man an die Stelle des Modul $\alpha\delta - \beta\gamma$ den der entgegengesetzten Transformation einsetzt.

§ 269. Die absolute Invariante und die anharmonischen Doppelverhältnisse nach Clebsch (l. c. § 50).

Die in dem vorangehenden Paragraphen auftretende Grösse

$$J_{4,2}^3 : J_{4,3}^2$$

hat die Eigenschaft, sich bei linearen Transformationen absolut nicht zu ändern, indem selbst der Modul aus derselben verschwindet. Man nennt sie deshalb die absolute Invariante. Sie steht in einer merkwürdigen Beziehung zu den anharmonischen Doppelverhältnissen von den vier Puncten, welche durch die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung repräsentirt werden. Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\sqrt{-6q+2p}}{2\sqrt{p}} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{-6q-2p}}{2\sqrt{p}} = \beta,$$

so sind die vier linearen Factoren der Gleichung

$$f = p(\xi^4 + \eta^4) + 6q\xi^2\eta^2 = 0$$

dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi - (\alpha+\beta)\eta &= 0, \\ \xi + (\alpha+\beta)\eta &= 0, \\ \xi - (\alpha-\beta)\eta &= 0, \\ \xi + (\alpha-\beta)\eta &= 0. \end{aligned}$$

Die Punctreihe sei A, B, C, D, so ist eines der drei anharmonischen Doppelverhältnisse von Pappus und Brianchon

$$\frac{CB}{DB} : \frac{CA}{DA},$$

und wenn wir die vier Wurzelwerthe von f einführen, so ergibt sich daraus die Relation

$$\frac{\dfrac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}}{\dfrac{-(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{-(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \sigma = \frac{3q-p}{3q+p}.$$

Das Verhältniss $\frac{q}{p}$ steht also mit dem Doppelverhältnisse σ in einem linearen Zusammenhange. Löst man die Gleichung nach $\frac{q}{p}$ auf, so erhält man

$$\frac{q}{p} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}.$$

Führt man diesen Werth in die im vorigen Paragraphen abgeleitete Gleichung

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2} = \frac{(p^2+3q^2)^3}{(p^2-q^2)^2q^2}$$

ein, so erhält man eine bikubische Gleichung in σ, welche die Beziehung der absoluten Invariante zu dem anharmonischen Doppelverhältnisse ausdrückt, nämlich

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2} = 108\,\frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{(1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2}.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke, so erhält man

$$4\overline{D}_4\sigma^6 - 12\overline{D}_4\sigma^5 - 3(J_{4,2}^3+216J_{4,3}^2)\sigma^4 + (26J_{4,2}^3+756J_{4,3}^2)\sigma^3$$
$$-3(J_{4,2}^3+216J_{4,3}^2)\sigma^2 - 12\overline{D}_4\sigma + 4\overline{D}_4 = 0.$$

Dies ist eine reciproke Gleichung. Substituirt man

$$\sigma + \frac{1}{\sigma} = y,$$

und dividirt durch 4, so geht sie über in

$$\overline{D}_4y^3 - 3\overline{D}_4y^2 + \left(3D_4 - \frac{27}{4}J_{4,2}^3\right)y - \left(\overline{D}_4 - \frac{54}{4}J_{4,2}^3\right) = 0,$$

oder

$$\overline{D}_4(y-1)^3 - \frac{27}{4}J_{4,2}^3\,(y-1) + \frac{27}{4}J_{4,2}^3 = 0.\ ^{*)}$$

Die Gleichung in σ ändert sich nun nicht, wenn man an die Stelle von σ folgende fünf Werthe setzt:

$$\frac{1}{\sigma},\quad 1-\sigma,\quad \frac{1}{1-\sigma},\quad \frac{\sigma-1}{\sigma},\quad \frac{\sigma}{\sigma-1}.$$

Ist also σ eine Wurzel der bikubischen Gleichung, so sind dies die übrigen fünf Wurzeln und sie drücken sämmtliche Doppelverhältnisse aus, welche aus vier Elementen gebildet werden können.

Die Auflösung jener Gleichung kann man auf verschiedene Art erzielen, z. B. indem man sie auf die Gleichung $\varDelta = 0$ bringt. Verbindet man die Gleichungen

$$\frac{q}{p} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)},\quad \frac{p^2}{q^2} = \frac{J_{4,2}\lambda + 12\,J_{4,3}}{J_{4,2}\lambda - \ \ 4\,J_{4,3}}$$

mit einander, so resultirt durch Elimination von p und q:

$$\lambda = \frac{3J_{4,3}(1-\sigma+\sigma^2)}{J_{4,2}(2-\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{3J_{4,3}\,.\,(y-1)}{J_{4,2}(2y-5)}.$$

---

*) Cayley, Fifth memoir upon quantics. § 127.

Der rechten Seite genügen die Werthe σ und $\frac{1}{\sigma}$. Man hat also statt der bikubischen Gleichung drei quadratische Gleichungen in σ, welche reciproke sind. Wenn man in der letzten Gleichung σ durch $1-\sigma$ oder $\frac{\sigma-1}{\sigma}$ ersetzt, so findet man die drei Wurzeln von $\varDelta = 0$ durch ein Doppelverhältniss σ ausgedrückt, nämlich

$$\lambda_1 = \frac{3J_{4,3}(1-\sigma+\sigma^2)}{J_{4,2}(2-\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{3J_{4,3}\cdot(y-1)}{J_{4,2}(2y-5)},$$

$$\lambda_2 = -\frac{3J_{4,3}(1-\sigma+\sigma^2)}{J_{4,2}(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{3J_{4,3}\cdot(y-1)}{J_{4,2}\left[(2y+1)-\frac{3}{\sigma}\right]},$$

$$\lambda_3 = \frac{3J_{4,3}(1-\sigma+\sigma^2)}{J_{4,2}(1+\sigma)(2-\sigma)} = \frac{3J_{4,3}\cdot(y-1)}{J_{4,2}\left(\frac{3}{\sigma}-y+1\right)}.$$

Man kann mit Hülfe der bikubischen Gleichung in σ darüber entscheiden, unter welchen Verhältnissen die Wurzeln der Gleichung harmonisch oder äquianharmonisch-zugeordnete Puncte repräsentiren. Der Werth $\sigma = 1$ macht offenbar $\lambda_2 = \lambda_3$ und damit zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung $f = 0$ einander gleich. Denn es folgt auch noch aus der Gleichung in y, dass für $y = 2$ die Discriminante $\overline{D}_4$ verschwinden muss. Sollen die vier Puncte harmonisch zugeordnet sein, so tritt dies ein, wenn $\sigma = -1$, 2 oder $\frac{1}{2}$ ist. In diesen drei Fällen verschwindet in λ der Divisor, und da λ nicht ∞ werden kann, so muss

$$J_{4,3} = 0$$

werden. Dasselbe Resultat ergibt sich aus der Gleichung in y.

Soll endlich das Doppelverhältniss äquianharmonisch werden, so muss $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$; $\sigma_1 = -J_1$ und $\sigma_2 = -J_2$ werden. Der Dividend muss in λ verschwinden; d. h. es muss entweder $\lambda = 0$ oder

$$J_{4,2} = 0$$

sein. Dasselbe ergibt sich aus der Gleichung in y, wenn man

$$y = \sigma + \frac{1}{\sigma} = 1$$

substituirt.

§ 270. Anwendung der typischen Darstellung auf die Auflösung der Biquadrate nach Clebsch (l. c. § 87, 3).

Es ist bereits bei der Betrachtung der kubischen Form § 189 und § 191 bemerkt worden, dass die Substitutionen

$$\xi = \frac{1}{n}\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1, z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1, z_2}\right],$$
$$\eta = z_1 y - z_2 x,$$

die Eigenschaft besitzen, die vollständige Function $f(x, y)$ von ihrem zweiten Gliede zu befreien. Bei biquadratischen Gleichungen ist die Transformirte

$$f(x, y) \cdot f(z_1, z_2)^3 = \xi^4 + 6C_{4,4}(z_1, z_2)\xi^2\eta^2 + 4C_{4,6}(z_1, z_2)\xi\eta^3 + [J_{4,2}f(z_1, z_2) - 3C_{4,4}^2(z_1, z_2)]\eta^4 = 0.$$

Diese Gleichung kann mit Hülfe der Euler'schen Formel gelöst werden. Setzt man

$$\frac{\xi}{\eta} = A + B + C,$$

so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

$$ABC = -\frac{1}{2}C_{4,6},$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = -3C_{4,4},$$
$$A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2 = 3C_{4,4}^2 - \frac{1}{4}J_{4,2}f^2.$$

Demgemäss sind A^2, B^2, C^2 die Wurzeln der kubischen Resolvente

$$z^3 + 3C_{4,4}z^2 + \left(3C_{4,4}^2 - \frac{1}{4}J_{4,2}f^2\right) - \frac{1}{4}C_{4,6}^2 = 0.$$

Für die Vorzeichen von A, B, C, welche Quadratwurzeln sind, gilt die Bedingung

$$ABC = -\frac{1}{2}C_{4,6}.$$

Setzt man nun in der Resolvente (z)

$$z = \lambda_1 f - C_{4,4} = \varphi^2$$

und führt so die neue Unbekannte λ ein, so verwandelt sich mit Berücksichtigung der Gleichung von Cayley

$$C_{4,6}^2 = -4C_{4,4}^3 + J_{4,2}f^2C_{4,4} - J_{4,3}f^3$$

die Resolvente in die Δ-Determinante von Aronhold:

$$\Delta = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0.$$

Man hat also

$$A = \sqrt{z_1} = \varphi = \sqrt{\lambda_1 f - C_{4,4}}\,,$$
$$B = \sqrt{z_2} = \psi = \sqrt{\lambda_2 f - C_{4,4}}\,,$$
$$C = \sqrt{z_3} = \chi = \sqrt{\lambda_3 f - C_{4,4}}\,,$$

worin noch die Vorzeichen der Wurzeln festzustellen sind.

Man kann demnach der Auflösung folgende Form geben:

$$\frac{1}{4}\,\frac{x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_1,z_2} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_1,z_2}}{z_1 y - z_2 x} = \pm\,\varphi(z_1,z_2) \pm \psi(z_1,z_2) \pm \chi(z_1,z_2)$$

mit der Erfüllung der Bedingung

$$(\pm\,\varphi)\cdot(\pm\,\psi)\cdot(\pm\,\chi) = -\,\frac{1}{2}\,C_{4,6}\,.$$

Dies ist nur eine andere Methode der Ableitung der Formeln von Aronhold (§ 264).

Stellen wir nun die durch diese Methode gewonnenen Formeln der Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade zusammen, so ist

$$\text{I.}\qquad \frac{ax+b}{z-x} = 0\,,$$

$$\text{II.}\qquad \frac{(ax+b)z+(bx+c)}{z-x} = -\sqrt{-J_{2,2}}\,,$$

$$\text{III.}\qquad \frac{(ax+b)z^2+2(bx+c)z+(cx+d)}{z-x} = -\sqrt[3]{C_{3,3}}\,,$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{(ax+b)z^3+3(bx+c)z^2+3(cx+d)+(dx+e)}{z-x} = \pm\,\varphi \pm \psi \pm \chi\,.$$

In diesen Gleichungen, welche bezüglich x linear sind, ist z eine willkürliche Grösse und sie werden deshalb die allgemeinen Auflösungen genannt.

§ 271. Die Symmetrien der Resolventen und der Wurzelformen bei der Einführung der kanonischen Form der Function f und der partiellen Differenziale der Δ-Determinante*).

Geht man aus von der Form

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = (a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, 1)^4$$

und setzt

$$x = \frac{z_2 w - z_1 v}{w - v}\,,$$

*) Man vergl. § 185.

so lässt sich die Function f nach Potenzen von v ordnen. Damit das zweite und vierte Glied der Transformirten verschwinden, sind folgende zwei Bedingungen zu erfüllen:

$$[az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + c](z_1 + z_2)^2 + 2[bz_1z_2 + c(z_1 + z_2) + d] = 0,$$
$$[cz_1z_2 + d(z_1 + z_2) + e](z_1 + z_2)^2 + 2[bz_1z_2 + c(z_1 + z_2) + d] = 0,$$

oder kurz

$$(a\pi + b\sigma + c)\sigma + 2(b\pi + c\sigma + d) = 0\,,$$
$$(c\pi + d\sigma + e)\sigma + 2(b\pi + c\sigma + d) = 0\,.$$

Man führe nach Heilermann's Methode die Grösse λ ein dergestalt, dass

$$(1) \qquad a\pi + b\sigma + c = -2\lambda\,,$$
$$(2) \qquad b\pi + c\sigma + d = \sigma\lambda\,,$$
$$(3) \qquad c\pi + d\sigma + e = -2\pi\lambda\,,$$

wird. Die Resultante dieser drei Gleichungen ist die Δ-Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & (c+2\lambda) \\ b, & (c-\lambda), & d \\ (c+2\lambda), & d, & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0\,.$$

Das mittlere Glied der Transformirten ist nun

$$6[z_1z_2(az_1z_2 + b[z_1 + z_2] + c) + (z_1 + z_2)(bz_1z_2 + c[z_1 + z_2] + d)$$
$$+ (cz_1z_2 + d[z_1 + z_2] + e)] = 6[\pi(a\pi + b\sigma + c)$$
$$+ \sigma(b\pi + c\sigma + d) + (c\pi + d\sigma + e)] = 6\lambda(z_1 - z_2)^2\,,$$

woraus sich die kanonische Form

$$w^4 f(z_2) + 6\lambda v^2 w^2 (z_1 - z_2)^2 + v^4 f(z_1) = 0$$

ergibt.

Da die Wurzel dieser Gleichung sich symmetrisch darstellen lässt, so ist dasselbe für die Wurzel von $f = 0$ der Fall. Es handelt sich nun darum, symmetrische Formen für die Gleichungen in λ, π, σ und $\frac{\pi}{\sigma}$ oder für

$$\lambda, \quad \pi = G^2, \quad \sigma = 2A\,, \quad \frac{2\pi}{\sigma} = H$$

herzustellen. Es ergibt sich das merkwürdige Resultat, dass die Gleichungen in λ, G und z für sich Symmetrien bilden und die Gleichungen in A und H gegen einander symmetrisch sind, wie wir dasselbe für die kubischen Formen gefunden haben.

Um die Resolvente in λ zu erhalten, bilden wir die partiellen Differenzialquotienten der Δ-Determinante; dieselben sind:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = d^2 - ce + e\lambda\,,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = -2(cd - be + 2d\lambda)\,,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial c} = 3c^2 - 2bd + ac + 6c\lambda\,,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial d} = -2(bc - ad + 2b\lambda)\,,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial e} = b^2 - ac + a\lambda\,,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = ac - 4bd + 3c^2 - 12\lambda^2\,.$$

Eliminirt man σ aus (1) und (3), so erhält man

$$\pi = \frac{cd - be + 2d\lambda}{bc - ad + 2b\lambda} = G^2\,.$$

Eliminirt man π aus (1) und (2), so ergibt sich daraus

$$\frac{1}{2}\sigma = -\frac{bc - ad + 2b\lambda}{2(b^2 - ac + a\lambda)} = A\,.$$

Multiplicirt man (2) mit e, (3) mit d, so folgt aus der Differenz der Resultate

$$\frac{\sigma}{2\pi} = -\frac{cd - be + 2d\lambda}{2(d^2 - ce + e\lambda)} = \frac{1}{H}\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander und radicirt, so erhält man einen zweiten Ausdruck für $\frac{1}{2}\sigma$, nämlich

$$\frac{1}{2}\sigma = -\frac{cd - be + 2d\lambda}{2(b^2 - ac + a\lambda)^{\frac{1}{2}}(d^2 - ce + e\lambda)^{\frac{1}{2}}} = A\,.$$

Setzt man weiter die beiden für $\frac{1}{2}\sigma$ gewonnenen Ausdrücke einander gleich, so resultirt daraus die Gleichung in λ, nämlich

$$(b^2 - ac + a\lambda)(cd - be + 2d\lambda)^2 - (bc - ad + 2b\lambda)^2(d^2 - ce + e\lambda) = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)^2\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right) = 0\,,$$

also eine vollständig symmetrische Resolvente.

Stellen wir endlich die Resultate in symmetrischer Folge zusammen, so ergibt sich

$$\frac{2(b^2 - ac + a\lambda)}{bc - ad + 2b\lambda} = -\frac{1}{A} = -\frac{2}{z_1 + z_2},$$

$$\frac{bc - ad + 2b\lambda}{cd - be + 2d\lambda} = \frac{(b^2 - ac + a\lambda)^{\frac{1}{2}}}{(d^2 - ce + e\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{G^2} = \frac{1}{z_1 z_2},$$

$$\frac{cd - be + 2d\lambda}{2(d^2 - ce + e\lambda)} = -\frac{1}{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right).$$

Die Partialresolventen sind demnach

$$\begin{aligned}
2(b^2 - ac + a\lambda)A + (bc - ad + 2b\lambda) \quad &= 0\,,\\
(bc - ad + 2b\lambda)G^2 - (cd - be + 2d\lambda) &= 0\,,\\
(b^2 - ac + a\lambda)G^4 - (d^2 - ce + e\lambda) \quad &= 0\,,\\
(cd - be + 2d\lambda)H + 2(d^2 - ce + e\lambda) \quad &= 0\,.
\end{aligned}$$

Da die Gleichung in λ kubisch ist, so werden die Gleichungen in A und H auch kubisch und, wie aus ihrer Form hervorgeht, gegeneinander symmetrisch sein. Die Gleichung in G ist dagegen symmetrisch und vom sechsten Grade. Eliminirt man λ, so erhält man das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel von z_1 und z_2 in Coefficienten der Function f. Man findet nun

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2(b^2 - ac)A + (bc - ad)}{aA + b}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(bc - ad)G^2 - (cd - be)}{bG^2 - d}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2(b^2 - ac)G^4 - 2(d^2 - ce)}{aG^4 - e}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(cd - be)H + 2(d^2 - ce)}{dH + e}\,.
\end{aligned}$$

Die Dividenden des ersten und letzten Quotienten sind, wie man leicht erkennt, unsymmetrische Covarianten der Functionen

$$(a, b, c, d)\widehat{\ }(A, 1)^3\,, \quad (b, c, d, e)\widehat{\ }(H, 1)^3\,.$$

Setzt man die vier Werthe der Reihe nach in die Resolvente $\Delta = 0$ ein, so erhält man die folgenden Resolventen:

XXII γ. $$(2b^3 - 3abc + a^2d)A^3 + \frac{1}{2}(6b^2c + 2abd - 9ac^2 + a^2e)A^2 + (2b^2d - 3acd + abe)A + \frac{1}{2}(b^2e - ad^2) = 0,$$

XXI γ. $$(2b^3 - 3abc + a^2d)G^6 - (2b^2d - 3acd + abe)G^4 - (2bd^2 - 3bce + ade)G^2 + (2d^3 - 3cde + be^2) = 0,$$

$$\text{XXIII}\,\gamma.\quad \frac{1}{2}(d^2 a - eb^2)H^3 + (2bd^2 - 3bce + ade)H^2$$
$$+ \frac{1}{2}(6cd^2 + 2bde - 9ec^2 + e^2 a)H$$
$$+ (2d^3 - 3cde + be^2) = 0\,.$$

Die zweite und dritte Gleichung geben beide die Resolvente XXI γ. Diese kann in Form einer Determinante dargestellt werden, nämlich

$$\begin{vmatrix} a(d-b\pi)\,, & b(d-b\pi)\,, & be - ad\pi \\ b(d-b\pi)\,, & \begin{matrix} \frac{3}{2}\,c(d-b\pi) \\ -\frac{1}{2}(be-ad\pi)\,, \end{matrix} & d(d-b\pi) \\ be - ad\pi\,, & d(d-b\pi)\,, & e(d-b\pi) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Man kann endlich noch eine Gleichung in z herleiten. Wir setzen zu diesem Zwecke in die quadratische Gleichung

$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0$$

die folgenden Werthe ein:

$$z_1 + z_2 = \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial d}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial b}\right)}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)^3}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)}}\,,$$

$$z_1 z_2 = \pi = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)}}\,.$$

Die quadratische Gleichung in z wird dadurch

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)}\,z^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial d}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial b}\right)}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)}}\,z + \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)} = 0\,.$$

Da die partiellen Differenzialquotienten lineare Functionen von λ sind, so haben sie drei verschiedene Werthe. Multiplicirt man die so entstehenden trinomischen Ausdrücke mit einander, so erhält man die Covariante XXXI γ:

$$\varphi\psi\chi = \frac{1}{2}\,C_{4,6}(z) = 0\,.$$

Die Coefficienten der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ führen zu einer Darstellung der Discriminante $\overline{D}_4$ in Functionen von λ ausgedrückt. Mit Hülfe der in § 266 gegebenen Entwickelungen findet man leicht

$$\frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_4} = \frac{1}{8}\,\frac{(\lambda_2-\lambda_3)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)}}\cdot\left|\begin{matrix}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1, & 4\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1\\ 4\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1\end{matrix}\right|^{+}_{+}$$

$$= -\frac{1}{8}(\lambda_3-\lambda_2)\cdot\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1\cdot\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1 - 16\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1\cdot\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1\cdot\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1}},$$

und wenn man noch die beiden andern Formen bildet,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\overline{D}_4} = 2(\lambda_3-\lambda_2)\varDelta_\varphi = 2(\lambda_1-\lambda_3)\varDelta_\psi = 2(\lambda_2-\lambda_1)\varDelta_\chi,$$

wo $\varDelta_\varphi$, $\varDelta_\psi$, $\varDelta_\chi$ die Discriminanten von φ, ψ und χ bezeichnen. Verbindet man diese drei Relationen miteinander durch Multiplication, so resultirt

$$\overline{D}_4 = -16\varDelta_\varphi\,.\,\varDelta_\psi\,.\,\varDelta_\chi\,.$$

Wenn demnach eine der drei Discriminanten verschwindet, wird auch $\overline{D}_4 = 0$ und umgekehrt. Die Gleichung $\varphi = 0$ z. B. hat dann zwei gleiche Wurzeln z_1 und z_2, welche nach der Substitutionsformel zugleich eine Wurzel von $f = 0$ sind.

Zahlenbeispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$f = 12x^4 - 108x^3 + 324x^2 - 372x + 144 = 0.$$

Dann ist

$$a = 12, \quad b = -27, \quad c = 54, \quad d = -93, \quad e = 144,$$

und

$$\lambda^3 - 108\lambda - 432 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -6.$$

Zur Bestimmung von z hat man weiter

$$(\lambda_1)\quad\begin{cases}\frac{1}{2}(z_1+z_2) = \frac{11}{5},\\ \qquad z_1z_2 = \frac{17}{5};\quad z_1 = \frac{17}{5},\quad z_2 = 1.\end{cases}$$

$$(\lambda_2,\lambda_3)\quad\begin{cases}\frac{1}{2}(z_1+z_2) = 1,\\ \qquad z_1z_2 = 1;\quad z_1 = z_2 = 1.\end{cases}$$

Setzt man zunächst das erste Paar in die kanonische Form der Gleichung ein, so reducirt sie sich auf die quadratische

$$25w^2 - v^2 = 0, \quad \frac{v}{w} = \pm 5,$$

und die beiden andern Werthe sind Null. Daraus ergibt sich

$$x_1 = 4\,,\quad x_2 = 3\,,\quad x_3 = x_4 = z_2 = 1\,.$$

Für die Discriminanten $\varDelta_\varphi$, $\varDelta_\psi$, $\varDelta_\chi$ findet man noch

$$\varDelta_\varphi + \varDelta_\psi + \varDelta_\chi = \frac{3}{4} J_{4,2}\,,$$

$$\varDelta_\varphi \,.\, \varDelta_\psi \,.+ \varDelta_\psi \,.\, \varDelta_\chi + \varDelta_\chi \,.\, \varDelta_\varphi = 0\,,$$

$$\varDelta_\varphi \,.\, \varDelta_\psi \,.\, \varDelta_\chi = -\frac{1}{16}\overline{D}_4\,.$$

Sie sind demnach die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\varDelta_\varphi^3 - \frac{3}{4} J_{4,2}\,\varDelta_\varphi^2 + \frac{1}{16}\overline{D}_4 = 0\,,$$

und zwar

$$\begin{aligned} \varDelta_\varphi &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\,,\\ \varDelta_\psi &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\,,\\ \varDelta_\chi &= (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\,. \end{aligned}$$

Für die Functionen φ, ψ und χ lassen sich eine Menge verschiedener Gleichungen bilden, wenn man die sechs Differenzialquotienten von der $\varDelta$-Determinante und die Gleichungen in § 266 beachtet. Setzt man der Kürze wegen:

$$2\frac{\partial \varDelta}{\partial a} = \alpha\,,\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta}{\partial b} = \beta\,,\quad \frac{\partial \varDelta}{\partial c} = \gamma\,,\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta}{\partial d} = \delta\,,\quad 2\frac{\partial \varDelta}{\partial e} = \varepsilon\,,\quad -\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} = \zeta\,,$$

so findet man

$$-(z_1 + z_2) = \frac{2\delta}{\varepsilon} = \frac{2\beta^2}{\alpha\delta} = \frac{2\beta}{\sqrt{\alpha\varepsilon}} = \frac{2\gamma + \zeta}{3\delta} = \frac{6\beta}{\gamma - \zeta}\,,$$

$$z_1 z_2 = \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\varepsilon} = \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}} = \frac{3\alpha}{\gamma - \zeta} = \frac{\gamma - \zeta}{3\varepsilon}\,.$$

Die möglichen Gleichungen in z sind demnach:

$$\text{I.}\qquad \delta z^2 + 2\frac{\delta^2}{\varepsilon} z + \beta = 0\,,$$

$$\text{II.}\qquad \delta z^2 + 2\frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha\varepsilon}} z + \beta = 0\,,$$

$$\text{III.}\qquad \delta z^2 + 2\frac{\beta^2}{\alpha} z + \beta = 0\,,$$

$$\text{IV.}\qquad \sqrt{\varepsilon}\,.\,z^2 + 2\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} z + \sqrt{\alpha} = 0\,,$$

$$\text{V.}\qquad \sqrt{\varepsilon}\,.\,z^2 + 2\frac{\beta^2\sqrt{\varepsilon}}{\alpha\delta} z + \sqrt{\alpha} = 0\,,$$

$$\text{VI.}\qquad \sqrt{\varepsilon}\,.\,z^2 + 2\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z + \sqrt{\alpha} = 0\,,$$

VII. $$\beta\varepsilon z^2 + 2\frac{\delta^2\alpha}{\sqrt{\alpha\varepsilon}} z + \alpha\delta = 0,$$

VIII. $$\beta\varepsilon z^2 + 2\beta\delta z + \alpha\delta = 0,$$

IX. $$\beta\varepsilon z^2 + 2\frac{\beta^2\varepsilon}{\sqrt{\alpha\varepsilon}} z + \alpha\delta = 0,$$

X. $$(\gamma - \zeta) z^2 + 6\beta z + 3\alpha = 0,$$

XI. $$3\delta z^2 + (2\gamma + \zeta) z + 3\beta = 0,$$

XII. $$3\varepsilon z^2 + 6\delta z + (\gamma - \zeta) = 0.$$

Diese zwölf Gleichungen welche neue symmetrische Determinanten für λ und $\overline{D_4}$ ergeben, sind sämmtlich proportional der Quadratwurzel aus

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right) z^4 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right) z^3 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right) z^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right) z + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right) = 0.$$

Aus der letzten Gleichung für $z_1 z_2$ ergibt sich noch ein anderer Ausdruck für die Δ-Determinante, nämlich

$$9\alpha\varepsilon - (\gamma - \zeta)^2 = 0.$$

Die Functionen γ und ζ lassen sich noch durch $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$\gamma - \zeta = \frac{3\alpha\delta}{\beta} = \frac{3\beta\varepsilon}{\delta},$$

$$2\gamma + \zeta = \frac{6\beta^2}{\alpha} = \frac{6\delta^2}{\varepsilon}.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so resultirt:

$$\gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{2\beta^2}{\alpha} = \frac{\beta\varepsilon}{\delta} + \frac{2\delta^2}{\varepsilon},$$

oder

$$\gamma = (\alpha\delta^2 + \beta^2\varepsilon)\left(\frac{\alpha\varepsilon + 2\beta\delta}{2\alpha\beta\delta\varepsilon}\right),$$

d. h.

$$\frac{\partial\Delta}{\partial c} = \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{\partial\Delta}{\partial d}}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)} + \frac{\frac{\partial\Delta}{\partial b}}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}\right)\left[8\frac{\partial\Delta}{\partial a}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial e} + \frac{\partial\Delta}{\partial b}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right],$$

oder symmetrisch

$$2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right) = \frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{2\beta^2}{\alpha} + \frac{2\delta^2}{\varepsilon} + \frac{\beta\varepsilon}{\delta}.$$

Subtrahirt man das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten, so resultirt

$$\zeta = \frac{2\beta^2}{\alpha} - \frac{2\alpha\delta}{\beta} = \frac{2\delta^2}{\varepsilon} - \frac{2\beta\varepsilon}{\delta},$$

oder symmetrisch

$$+\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{\alpha\delta}{\beta} - \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\delta^2}{\varepsilon} + \frac{\beta\varepsilon}{\delta}.$$

Da λ drei verschiedene Werthe besitzt, so kommen auch den Differenzialquotienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ ebensoviele zu. Verschiedene einfache Combinationen derselben lassen sich leicht als Functionen der Coefficienten a, b, c, d, e darstellen. Es ist nämlich

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3 = \frac{1}{4} V'^2_{3,4} = \frac{1}{4}(2d^3 - 3cde + e^2 b)^2,$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_2 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_3 = 8\Pi . V'_{3,4} = 8(eb^2 - d^2 a)(2d^3 - 3cde + e^2 b),$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3 = -8\Pi . V_3 = 8(ad^2 - b^2 e)(2b^3 - 3abc + a^2 d),$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2 \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3 = \frac{1}{4} V_3^2 = \frac{1}{4}(2b^3 - 3abc + a^2 d)^2.$$

Ferner gilt wegen

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right) = \frac{1}{36}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c} + \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)^2,$$

oder

$$\begin{vmatrix} c-\lambda, & d \\ d, & e \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b, & c+2\lambda \\ c-\lambda, & d \end{vmatrix}^2,$$

die Gleichung

$$\frac{1}{6^3}\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_1 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_1\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_2\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_3 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_3\right]$$

$$= \frac{1}{4} V_3 . V'_{3,4} = \frac{1}{4}(2b^3 - 3abc + a^2 d)(2d^3 - 3cde + e^2 b).$$

Es bleibt noch übrig, die Grössen $\frac{v}{w}$, z, λ und x in symmetrischer Form auszudrücken. Es ist

$$w^4 f(z_2) + 6\lambda w^2 v^2 (z_1 - z_2)^2 + v^4 f(z_1) = 0,$$

$$\frac{v}{w} = \pm\left[\sqrt{\frac{f(z_2)}{f(z_1)}} \times \frac{\sqrt{3\lambda(z_1-z_2)^2 - \sqrt{f(z_1)f(z_2)}} \mp \sqrt{3\lambda(z_1-z_2)^2 + \sqrt{f(z_1)f(z_2)}}}{\sqrt{3\lambda(z_1-z_2)^2 - \sqrt{f(z_1)f(z_2)}} \pm \sqrt{3\lambda(z_1-z_2)^2 + \sqrt{f(z_1)f(z_2)}}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right) z^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)}} z + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right) = 0,$$

$$z_1 \text{ und } z_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}} \mp \sqrt{2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}}}{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}} \pm \sqrt{2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}}}}$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right) = 0\,,$$

$$\lambda = \left(-J_{4,3} + \frac{1}{27}\sqrt{-J_{4,6}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-J_{4,3} - \frac{1}{27}\sqrt{-J_{4,6}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$f = a\left[x - \frac{z_2 w_1 - z_1 v_1}{w_1 - v_1}\right]\cdot\left[x - \frac{z_2 w_2 - z_1 v_2}{w_2 - v_2}\right]\cdot\left[x - \frac{z_2 w_3 - z_1 v_3}{w_3 - v_3}\right]\cdot\left[x - \frac{z_2 w_4 - z_1 v_4}{w_4 - v_4}\right].$$

§ 272. Methode der Introduction der Invarianten in die Wurzelform der biquadratischen Gleichung nach Blerzy*).

Die vorgelegte Gleichung sei

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0\,.$$

Transformirt man die Gleichung so, dass das zweite Glied verschwindet, so erhält man nach § 17:

$$a^3 f(x) = (ax + b)^4 + 6J_{2,2}(ax + b)^2$$
$$+ 4\sqrt{-4J_{2,2}^3 + a^2 J_{2,2}.J_{4,2} - a^3 J_{4,3}}.(ax + b) + (a^2 J_{4,2} - 3J_{2,2}^2) = 0.$$

Es werde nach dem Euler-Lagrange'schen Verfahren substituirt

$$ax + b = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\,,$$

dann erhält man die Resolvente

$$4y^3 + 12J_{2,2}y^2 + (12J_{2,2}^2 - a^2 J_{4,2})y + (4J_{2,2}^3 - a^2 J_{3,4}) = 0\,.$$

Dieselbe lässt sich verkürzen durch Wegschaffung des zweiten Gliedes in

$$4(y + J_{2,2})^3 - a^2 J_{4,2}(y + J_{2,2}) + a^3 J_{4,3} = 0\,,$$

woraus nach der Cardani'schen Formel die Wurzel

$$y = -J_{2,2} + \frac{1}{2}a\left[\sqrt[3]{-J_{4,3} + \frac{1}{27}\sqrt{-J_{4,6}}} + \sqrt[3]{-J_{4,3} - \frac{1}{27}\sqrt{-J_{4,6}}}\right]$$

gefunden wird.

Uebrigens erkennt man leicht in der verkürzten Resolvente die Form XXX γ. wieder. Um diese aus jener abzuleiten, braucht man nur $y + J_{2,2} = a\lambda$ zu setzen. Ist $J_{4,3} = 0$, d. h. verschwindet die kubische Invariante, so wird

*) Blerzy, Invariants. Nouv. ann. de mathém. t. XVIII. p. 431. 1859.

$$4(y + J_{2,2})^2 - a^2 J_{4,2} = 0\,,$$

und

$$y + J_{2,2} = 0\,,$$

also

$$y_1 = - J_{2,2}\,, \quad y_2 \text{ und } y_3 = - J_{2,2} \pm \frac{1}{2} a \sqrt{J_{4,2}}\,.$$

In diesem Falle verschwindet also die Kubikwurzel aus der Wurzelform.

§ 273. Methode von Roberts*).

Um die Wurzeln der biquadratischen Gleichung mittels Invarianten darzustellen, geht Roberts aus von der Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & \dots & x_1 & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix}:$$

Diese Determinante hat als Factoren die Werthe, welche die Function

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \cdots \omega^{n-1} x_n$$

annimmt, wenn für ω successive die Wurzeln der Gleichung

$$\omega^n - 1 = 0$$

eingesetzt werden.

Man setze nun nach Blerzy's Bezeichnung

$$ac - b^2 = J_{2,2}\,,$$

$$ae - 4bd + 3c^2 = J_{4,2}\,,$$

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = J_{4,3}\,,$$

$$u = \frac{1}{8a^3}\left(- J_{4,3} + \sqrt{27 J_{4,3}^2 - J_{4,2}^3}\right),$$

$$v = \frac{1}{8a^3}\left(- J_{4,3} - \sqrt{27 J_{4,3}^2 - J_{4,2}^3}\right).$$

*) Roberts, Note sur l'équation du quatrième degré. Nouv. ann. de mathém. t. XVIII. p. 87. 1859.

Die $\varDelta$-Determinante von Aronhold lässt sich hiernach in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\varDelta}{a^3}=\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a}, & -u^{\frac{1}{3}}, & -v^{\frac{1}{3}} \\ -u^{\frac{1}{3}}, & -v^{\frac{1}{3}}, & \frac{\lambda}{a} \\ -v^{\frac{1}{3}}, & \frac{\lambda}{a}, & -u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix}=0\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial e}=\frac{1}{a}J_{2,2}+\lambda\,.$$

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Resolvente $\varDelta=0$, so erfolgen mittels des vorangestellten Theorems die Cardani'schen Formeln

$$\lambda_1=a(u^{\frac{1}{3}}+v^{\frac{1}{3}})\,,$$
$$\lambda_2=a(J_1u^{\frac{1}{3}}+J_2v^{\frac{1}{3}})\,,$$
$$\lambda_3=a(J_2u^{\frac{1}{3}}+J_1v^{\frac{1}{3}})\,,$$

so dass man erhält

$$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1=\frac{1}{a^2}\cdot J_{2,2}+u^{\frac{1}{3}}+v^{\frac{1}{3}}\,,$$
$$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_2=\frac{1}{a^2}\cdot J_{2,2}+J_1u^{\frac{1}{3}}+J_2v^{\frac{1}{3}}\,,$$
$$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_3=\frac{1}{a^2}\cdot J_{2,2}+J_2u^{\frac{1}{3}}+J_1v^{\frac{1}{3}}\,.$$

Diese Werthe geben, in die Wurzelformel von Aronhold

$$ax+b=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_2}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_3}$$

eingeführt, die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

§ 274. Die Auflösung der biquadratischen Gleichung von Hermite*).

Die schöne Methode, welche Hermite erfunden hat, ist wesentlich eine Combinationsmethode, und, obwohl wir uns vorgesetzt haben, diese Art der Auflösungsmethoden in einem besonderen Abschnitte zu behandeln, wollen wir dieselbe an dieser Stelle vortragen, weil sie mit den Methoden der modernen Algebra in nahem

---

*) Hermite, Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Crelle's Journ. LII. pg. 4. 1856.

Zusammenhange steht. Das Princip derselben ist bereits früher [§ 217 (31)] in der Discussion der Reducenten niedergelegt worden, es betrifft dies den Fall der Transformation, wobei die kubische Invariante $J_{4,3}$ verschwindet.

Die vorgelegte Gleichung sei

$$(a, b, c, d, e)\widehat{}(x, y)^4 = a(x - x_1 y)(x - x_2 y)(x - x_3 y)(x - x_4 y).$$

Man erhält eine kubische Resolvente, wie bekannt, durch Betrachtung der Function

$$a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = z,$$

wovon das Quadrat zu bilden ist. Es lässt sich nun z^2 unter folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned}3z^2 = a^2[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \\ + (x_3 - x_4)^2] + 4a^2[(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)].\end{aligned}$$

Substituirt man

$$\frac{1}{12} a[(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)] = \lambda,$$

und drückt die Summe der Quadrate der Differenzen der Wurzeln in Functionen der Coefficienten a, b, c, d, e aus, so erhält man

$$z^2 = 16(b^2 - ac + a\lambda).$$

Die Grösse λ hängt offenbar von einer kubischen Gleichung ab, deren Wurzeln die möglichen Variationen von λ enthalten. Diese Gleichung findet man leicht auf folgendem Wege. Es sei

$$\begin{aligned}(a, b, c, d, e)\widehat{}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^4 &= (A, B, C, D, E)\widehat{}(x, y)^4 \\ &= A(x - \xi_1 y)(x - \xi_2 y)(x - \xi_3 y)(x - \xi_4 y).\end{aligned}$$

Man erhält dann folgende Werthe für A und die Wurzeln der Transformirten:

$$A = a(\alpha - x_1 \gamma)(\alpha - x_2 \gamma)(\alpha - x_3 \gamma)(\alpha - x_4 \gamma),$$

$$\xi_1 = -\frac{\beta - x_1 \delta}{\alpha - x_1 \gamma}, \quad \xi_2 = -\frac{\beta - x_2 \delta}{\alpha - x_2 \gamma}, \quad \xi_3 = -\frac{\beta - x_3 \delta}{\alpha - x_3 \gamma},$$

$$\xi_4 = -\frac{\beta - x_4 \delta}{\alpha - x_4 \gamma}.$$

Hieraus leitet man ab:

$$A(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 . a(x_1 - x_4)(x_2 - x_3),$$

$$A(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 . a(x_1 - x_3)(x_2 - x_4),$$

$$A(\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 . a(x_1 - x_2)(x_3 - x_4).$$

Diese Gleichungen erweisen, dass die Grössen λ sich in allen Transformirten multiplicirt mit einer Potenz des Moduls der Transformation reproduciren. Daher sind die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln sie sind, Invarianten der vorgelegten Function $(a, b, c, d, e \overset{\frown}{)} (x, y)^4$, und nach dem Satze von Sylvester werden sie in ganzen Functionen der beiden Invarianten $J_{4,2}$ und $J_{4,3}$ ausgedrückt. Die gesuchte Gleichung ist deshalb von der Form

$$\lambda^3 + \varrho J_{4,2} \lambda + \sigma J_{4,3} = 0 ,$$

wobei ϱ und σ Zahlencoefficienten sind. In der That muss der Coefficient von λ^2 verschwinden, weil es keine Invariante vom ersten Grade gibt, und die beiden andern können nur proportional bezüglich $J_{4,2}$ und $J_{4,3}$ sein, welches die einzigen Invarianten vom zweiten und dritten Grade sind.

Um ϱ und σ zu bestimmen, betrachten wir einen speciellen Fall, z. B. den der Form

$$(1, 0, -1, 0, 0 \overset{\frown}{)} (x, y)^4 .$$

Man hat alsdann

$$J_{4,2} = 3 , \quad J_{4,3} = 1 , \quad \lambda_1 = -1 , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} ,$$

und folglich die Gleichung

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 (\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\varrho\lambda + \sigma .$$

Hieraus folgt endlich $\varrho = -\frac{1}{4}$ und $\sigma = \frac{1}{4}$. Die Gleichung in λ ist demnach

$$4\lambda^3 - J_{4,2}\lambda + J_{4,3} = 0 .$$

Die Discriminante $\overline{D}_4$ lässt sich unmittelbar auf die Discriminante dieser Resolvente zurückführen, denn man findet aus den Relationen

$$\lambda_1 = \frac{1}{12} a[(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)] ,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{12} a[(x_1 - x_2)(x_4 - x_3) + (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)] ,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{12} a[(x_1 - x_4)(x_3 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)] ,$$

die folgenden:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{4} a(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) ,$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 = \frac{1}{4} a(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\,,$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{1}{4} a(x_1 - x_2)(x_4 - x_3)\,.$$

Mithin ist

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2\\ &= \frac{a^6}{4^6}(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2\\ &= \frac{1}{4^2}(J_{4,2}^3 - 27J_{4,3}^2) = \frac{1}{4^2}\overline{D}_4\,.\end{aligned}$$

Hermite knüpft hieran noch einige Betrachtungen über die Bedingungen der Realität der vier Wurzelwerthe. Im Allgemeinen ist das Product der Quadrate der Wurzeldifferenzen irgend einer algebraischen Gleichung positiv oder negativ, jenachdem die Zahl der complexen Wurzeln derselben $\equiv 0$ oder $\equiv 2 \pmod 4$ ist. Die nothwendige und zugleich ausreichende Bedingung für den ersten Fall besteht darin, dass die drei exacten Werthe des Quadrates der Function $a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, also die drei Grössen

$$b^2 - ac + a\lambda_1\,,\quad b^2 - ac + a\lambda_2\,,\quad b^2 - ac + a\lambda_3$$

positiv seien. Nun ist ihre Summe $3(b^2 - ac) = -3J_{2,2}$, die Summe ihrer Producte zu je zweien $-3J_{2,2}^2 - \frac{1}{4}a^2J_{4,2}$, und ihr Product gleich dem Quadrate $\frac{1}{4}V_3^2$. Deshalb genügen ihrer Positivität die Ungleichungen

$$-J_{2,2} > 0\,,\quad 12J_{2,2}^2 - a^2J_{4,2} > 0\,.$$

Dies ist die einfachste Form, die Bedingungen der Realität der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung auszudrücken.

Hermite gibt dann noch einen Beweis für die Cayley'sche Gleichung zwischen den Invarianten $J_{4,2}$, $J_{4,3}$ und den Covarianten f, $C_{4,4}$ und $C_{4,6}$, nämlich für

$$C_{4,6}^2 = -4C_{4,4}^3 + J_{4,2}f^2C_{4,4} - J_{4,3}f^3\,.$$

Derselbe beruht auf der bekannten Eigenschaft, dass das Product der drei exacten Werthe des Quadrats der reducirenden Function $a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, nämlich

$$\begin{aligned}&4(b^2 - ac + a\lambda_1)(b^2 - ac + a\lambda_2)(b^2 - ac + a\lambda_3)\\ &= 4(b^2 - ac)^3 - J_{4,2}a^2(b^2 - ac) - J_{4,3}a^2\end{aligned}$$

ein vollständiges Quadrat ist, und zwar gleich V_3^2. Hermite leitet dies analytisch folgendermassen her. Aus der identischen Gleichung

$$(a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x - by, ay)^4$$
$$= [a, 0, -a(b^2 - ac), aV_3, -aV_4]\widehat{\ }(x, y)^4$$

ergibt sich für die kubische Invariante $J'_{4,3}$ der Werth $a^6 J_{4,3}$, weil der Modulus der Transformation $\alpha\delta - \beta\gamma = a$ ist.

Berechnet man die Invariante direct, so findet man

$$J'_{4,3} = a^3 [4(b^2 - ac)^3 - J_{4,2} a^2(b^2 - ac) - V_3^2] = a^6 J_{4,3},$$

woraus der Hülfssatz folgt. Der Hauptsatz wird daraus auf folgende Art hergeleitet. Setzen wir

$$(a, b, c, d, e)\widehat{\ }(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^4 = (A, B, C, D, E)\widehat{\ }(x, y)^4,$$

unter der Bedingung, dass der Modul $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ werde.

Bezüglich der Transformirten erhalten wir nun

$$4(B^2 - AC)^3 - J_{4,3} A^2(B^2 - AC) - J_{4,3} A^3 = (2B^3 - 3ABC + A^2 D)^2,$$

da nämlich die Invarianten unveränderlich dieselben bleiben, wenn der Modul gleich der Einheit ist.

Nun wird

$$A = f,$$
$$B^2 - AC = -C_{4,4},$$
$$2B^3 - 3ABC + A^2 D = C_{4,6},$$

wenn α und γ an die Stelle von x und y gesetzt werden, so dass wir unmittelbar zu der Gleichung von Cayley gelangen.

In der That sei eine der drei Formen $f, C_{4,4}, C_{4,6}$ der Kürze wegen durch $\varphi(a, b, c, d, e, x, y)$ dargestellt, so ist die charakteristische Eigenschaft der Covarianten

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^k \varphi(a, b, c, d, e; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = \varphi(A, B, C, D, E; x, y)$$

oder, weil der Modul gleich der Einheit angenommen ist, kurz

$$\varphi(a, b, c, d, e; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = \varphi(A, B, C, D, E; x, y).$$

Setzen wir in dieser Identität $x = 1$, $y = 0$, so reducirt sich die zweite Seite auf den Coefficienten der höchsten Potenz von x, d. h. für die drei Functionen der Reihe nach auf

$$A, \ -(B^2 - AC), \ 2B^3 - 3ABC + A^2 D.$$

Unter denselben Verhältnissen repräsentirt die linke Seite dieselben drei Functionen, wenn man die willkürlichen Grössen α und γ an die Stelle der Unbestimmten x und y einsetzt.

§ 275. Methode der Auflösung der biquadratischen Gleichungen nach Darboux*).

Das Princip, von welchem Darboux ausgeht, führt zu denselben Formeln, wie sie Aronhold gegeben hat, also zu dem Ausdrucke der Wurzel durch die Summe dreier Radicale. Er leitet davon auch den Ausdruck der Wurzelfunction einer biquadratischen Gleichung ab, für welche die quadratische Invariante verschwindet.

Es ist bekannt, dass die Bestimmung der gemeinschaftlichen Puncte zweier Curven zweiten Grades von der Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade abhängig ist. Umgekehrt kann man die Auflösung biquadratischer Gleichungen abhängig machen von der Bestimmung der gemeinschaftlichen Puncte zweier Kegelschnitte.

Seien nun

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi = a_0 x^2 + a_2 y^2 + a_4 z^2 + 2 a_3 yz + 2 a_2 xz + 2 a_1 xy, \\ \psi = y^2 - 4xz, \end{cases}$$

zwei quadratische Formen. Man bilde die zusammengesetzte Function

$$\varphi - \lambda \psi$$
$$= a_0 x^2 + 2 a_1 xy + (a_2 - \lambda) y^2 + 2(a_2 + 2\lambda) xz + 2 a_3 y_3 + a_4 z^2,$$

indem man folgende identische Gleichungen bildet:

$$\begin{array}{llll}
0 = -(\varphi - \lambda\psi) & + [a_0 x + a_1 y + (a_2 + 2\lambda) z] x & + [a_1 x + (a_2 - \lambda) y + a_3 z] y & + [(a_2 + 2\lambda) x + a_3 y + \\
0 = -[a_0 x + a_1 y + (a_2 + 2\lambda) z] & + a_0 x & + a_1 y & + (a_2 + 2\lambda) z \\
0 = -[a_1 x + (a_2 - \lambda) y + a_3 z] & + a_1 x & + (a_2 - \lambda) y & + a_3 z \\
0 = -[(a_2 + 2\lambda) x + a_3 y + a_4 z] & + (a_2 + 2\lambda) x & + a_3 y & + a_4 z.
\end{array}$$

Setzen wir

$$\begin{array}{l}
[\quad a_0 x \quad + \quad a_1 y \quad + (a_2 + 2\lambda) z] = X, \\
[\quad a_1 x \quad + (a_2 - \lambda) y + \quad a_3 z \quad] = Y, \\
[(a_2 + 2\lambda) x + \quad a_3 y \quad + \quad a_4 z \quad] = Z,
\end{array}$$

so muss die Determinante jener vier Gleichungen von selber verschwinden, also

$$(2) \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} -(\varphi - \lambda\psi) & X & Y & Z \\ -X & a_0 & a_1 & (a_2 + 2\lambda) \\ -Y & a_1 & (a_2 - \lambda) & a_3 \\ -Z & (a_2 + 2\lambda) & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ = 0 \\ \\ \\ \end{array}$$

sein, oder

---

*) Darboux, Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. Journ. de mathém. par Liouville XXXVIII. p. 220. 1873.

$$(3)\qquad F = (\varphi - \lambda\psi)\,.\begin{array}{r} \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & (a_2+2\lambda) \\ a_1 & (a_2-\lambda) & a_3 \\ (a_2+2\lambda) & a_3 & a_4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & (a_2+2\lambda) \\ Y & a_1 & (a_2-\lambda) & a_3 \\ Z & (a_2+2\lambda) & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante F wird ein Quadrat für alle Werthe von λ, wofür die Determinante

$$(4)\quad \varDelta = \begin{array}{r} \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & (a_2+2\lambda) \\ a_1 & (a_2-\lambda) & a_3 \\ (a_2+2\lambda) & a_3 & a_4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3}$$

verschwindet. Die Entwickelung von F ergibt, wie man sieht

$$(5)\qquad F = -H + K\lambda - L\lambda^2,$$

worin H, K, L drei quadratische Formen sind, nämlich

$$(6)\quad \begin{cases} H = (a_2a_4 - a_3^2)X^2 + (a_0a_4 - a_2^2)Y^2 + (a_0a_2 - a_1^2)Z^2 \\ \qquad + 2(a_0a_3 - a_1a_2)YZ + 2(a_1a_3 - a_2^2)XZ + 2(a_1a_4 - a_2a_3)XY, \\ K = a_4X^2 + 4a_2Y^2 + a_0Z^2 + 4a_1YZ + 2a_2XZ + 4a_4XY, \\ L = 4(XZ - Y^2). \end{cases}$$

Wenn man jetzt den rationalen Bruch $\frac{F}{\varDelta}$ in einfache Brüche zerlegt, so erhält man

$$(7)\quad \frac{F}{\varDelta} = -\sum \frac{1}{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right)_{\lambda_1}(\lambda-\lambda_1)}\begin{vmatrix} 0, & X, & Y, & Z \\ X, & a_0, & a_1, & (a_2+2\lambda_1) \\ Y, & a_1, & (a_2-\lambda_1), & a_3 \\ Z, & (a_2+2\lambda_1), & a_3, & a_4 \end{vmatrix},$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln von $\varDelta = 0$ bedeuten und die Summe Σ auf diese drei Wurzeln auszudehnen ist. Ausserdem ist

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right) = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 - 12\lambda^2 = J_{4,2} - 12\lambda^2,$$

und $\lambda - \lambda_1$ einer der drei linearen Factoren von $\varDelta = 0$. Nach der vorhin gemachten Bemerkung über die zusammengesetzte Form ist jede der drei Determinanten, welche auf der rechten Seite in (7) stehen, ein vollständiges Quadrat, und man hat z. B.

$$(9)\qquad -\begin{vmatrix} 0, & X, & Y, & Z \\ X, & a_0, & a_1, & (a_2+2\lambda_1) \\ Y, & a_1, & (a_2-\lambda_1), & a_3 \\ Z, & (a_2+2\lambda_1), & a_3, & a_4 \end{vmatrix} = P_1^2$$

$$= +\begin{vmatrix} X, & a_0, & a_1 \\ Y, & a_1, & (a_2-\lambda_1) \\ Z, & (a_2+2\lambda_1), & a_3 \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ a_1, & (a_2-\lambda_1) \end{vmatrix},$$

oder

$$P_1^2 = \frac{1}{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0\lambda_1} \cdot \begin{vmatrix} X, & a_0, & a_1 \\ Y, & a_1, & (a_2-\lambda_1) \\ Z, & (a_2+2\lambda_1), & a_3 \end{vmatrix}^2,$$

worin

$$a_1^2 - a_0 a_2 + a_0\lambda_1 = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a_4}\right)_{\lambda_1}.$$

Die Gleichung (7) lässt sich also folgendermassen schreiben:

$$(10)\qquad \frac{F}{\Delta} = + \frac{P_1^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}(\lambda-\lambda_1)} + \frac{P_2^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2}(\lambda-\lambda_2)} + \frac{P_3^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_3}(\lambda-\lambda_3)}.$$

Dieses ist die Fundamentalgleichung, von welcher die Zerlegung der Formen φ und ψ in Summen der Quadrate sich leicht bewerkstelligen lässt. Aus (5) folgt

$$-H + K\lambda - L\lambda^2 = \sum \frac{+\Delta \,.\, P_1^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}(\lambda-\lambda_1)},$$

und durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von λ auf beiden Seiten

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{1}{4} L = + \sum \frac{P_1^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}}, \\ \frac{1}{4} K = - \sum \frac{\lambda_1 P_1^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}}, \\ H = + \sum \frac{(4\lambda_1^2 - 1) P_1^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}}. \end{cases}$$

Offenbar ist auch

$$(12)\qquad \begin{cases} P_1^2 = -H + K\lambda_1 - L\lambda_1^2, \\ P_2^2 = -H + K\lambda_2 - L\lambda_2^2, \\ P_3^2 = -H + K\lambda_3 - L\lambda_3^2. \end{cases}$$

Um nun zu den entsprechenden biquadratischen Formen zu gelangen, setzen wir

$$X = y^2, \quad Y = yx, \quad Z = x^2,$$
$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_2 = c, \quad a_3 = d, \quad a_4 = e,$$

und finden

$$(13)\quad K = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = f(x, y),$$
$$(14)\quad H = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4,$$

endlich

$$(15)\qquad L = 0.$$

Den neuen Werth von H bezeichnen wir mit $C_{4,4}$; es ist die biquadratische Covariante oder die Hesse'sche Form von f. Es ist nämlich (§ 57)

$$C_{4,4} = \frac{1}{12^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right].$$

Die Functionen P_1, P_2, P_3 gehen über in homogene Functionen zweiten Grades in x und y und sind identisch mit den früher betrachteten Werthen φ, χ, ψ.

Man findet

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}} \cdot \begin{vmatrix} y^2, & a, & b \\ yx, & b, & (c - \lambda_1) \\ x^2, & (c + 2\lambda), & d \end{vmatrix} + \; + $$
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1}\, x^2 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1}}\, xy + \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1}\, y^2 = \varphi.$$

In Folge der Gleichungen (11) hat man nun

$$(16)\qquad \frac{\varphi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}} + \frac{\psi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2}} + \frac{\chi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_3}} = 0$$

und

$$(17)\qquad f(x, y) = -\frac{4\lambda_1\varphi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}} - \frac{4\lambda_2\psi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2}} - \frac{4\lambda_3\chi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_3}}.$$

Dafür kann man auch mit Berücksichtigung von (16) schreiben

$$(18)\quad f(x, y) = -\frac{4(\lambda_1 - \lambda)\varphi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}} - \frac{4(\lambda_2 - \lambda)\psi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2}} - \frac{4(\lambda_3 - \lambda)\chi^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_3}},$$

wobei λ einen ganz willkürlichen Werth haben kann. Die Formeln (12) ergeben noch die bekannten Relationen

$$(19)\qquad \varphi^2 = \lambda_1 f - C_{4,4}, \quad \psi^2 = \lambda_2 f - C_{4,4}, \quad \chi^2 = \lambda_3 f - C_{4,4},$$

welche die Grundlage zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen bilden.

Zahlenbeispiel. Es sei

$$f(x, y) = x^4 - 5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3 - 6y^4.$$

Daraus berechnet sich

$$C_{4,4} = -\frac{1}{48}(35x^4 - 220x^3y + 538x^2y^2 - 620xy^3 + 315y^4),$$

$$\varDelta = -4\lambda^3 + \frac{7}{3}\lambda + \frac{10}{27} = 0, \; \lambda_1 = \frac{5}{6}, \; \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \; \lambda_3 = -\frac{4}{6},$$

$$J_{4,2} = \frac{7}{3}, \quad J_{4,3} = -\frac{10}{27},$$

$$\varphi = \frac{1}{4}(5x^2 - 14xy + 5y^2),$$

$$\psi = \frac{1}{4}(3x^2 - 10xy + 11y^2),$$

$$\chi = \frac{1}{4}(x^2 - 10xy + 13y^2),$$

$$\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1} = -6, \; \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2} = 2, \; \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_3} = -3.$$

Diese numerischen Werthe genügen, wie eine einfache Probe beweist, den Gleichungen (12), (16), (17) und (19).

Wenn man in Gleichung (18) für λ einen seiner drei Wurzelwerthe z. B. λ_1 einsetzt, so erhält man

$$(20)\qquad f(x, y) = \frac{\psi^2 - \chi^2}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{(\psi + \chi)(\psi - \chi)}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Einfacher folgt diese Relation aus (19). Die Auflösung der Gleichung $f = 0$ ist demnach auf diejenige zweier quadratischer Gleichungen zurückgeführt, nämlich

$$\psi - \chi = 0 \quad \text{und} \quad \psi + \chi = 0,$$

oder

$$(21)\qquad \sqrt{\lambda_2 f - C_{4,4}} \pm \sqrt{\lambda_3 f - C_{4,4}} = 0.$$

Ebenso erhält man

$$f(x, y) = \frac{\chi^2 - \varphi^2}{\lambda_3 - \lambda_1} = \frac{\varphi^2 - \psi^2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Wenden wir auf die Factoren das Zahlenbeispiel an, so erhalten wir, wenn der Einfachheit wegen $y = 1$ gesetzt wird,

$$\text{I.}\ \begin{cases} \psi - \chi = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 0; & x_1 \text{ und } x_2 = \pm 1; \\ \psi + \chi = x^2 - 5x + 6 = 0; & x_3 \text{ und } x_4 = 2 \text{ und } 3; \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} \chi - \varphi = -x^2 + x + 2 = 0; & x_1 = 2,\ x_2 = -1; \\ \chi + \varphi = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4\frac{1}{2} = 0; & x_3 = 3,\ x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} \varphi - \psi = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0; & x_1 = 3,\ x_2 = -1; \\ \varphi + \psi = 2x^2 - 6x + 4 = 0; & x_3 = 2,\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Diese Methode ist zwar elegant und bequem für die Auflösung numerischer Gleichungen, sie führt aber nicht unmittelbar zu der Wurzelform von Aronhold. Um dahin zu gelangen, wollen wir die Ausdrücke der Functionen φ, ψ und χ in Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der Gleichung suchen, wobei wir der Einfachheit wegen $y = 1$ setzen wollen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen I., II., III. ist nun offenbar

$$\begin{aligned} \psi - \chi &= p_1(x - x_1)(x - x_4), & \psi + \chi &= q_1(x - x_1)(x - x_3), \\ \varphi - \chi &= p_2(x - x_1)(x - x_3), & \varphi + \chi &= q_2(x - x_2)(x - x_4), \\ \varphi - \psi &= p_2(x - x_1)(x - x_2), & \varphi + \psi &= q_3(x - x_3)(x - x_4). \end{aligned}$$

Der Factor $x - x_1$ muss z. B. in $\varphi - \psi$ vorkommen, welches die Differenz zwischen $\varphi - \chi$ und $\psi - \chi$ ist. Die andern Ausdrücke sind aus ähnlichen Gründen so zu nehmen, wie sie zusammengesetzt sind. Aus diesen Formeln leitet man für jede der drei Functionen φ, ψ, χ zwei Ausdrücke ab. Diese beiden Werthe sind für die vier Wurzeln von x gleich, wodurch man leicht die Beziehungen zwischen den unbestimmten Coefficienten p und q findet. Man erhält auf diese Weise

$$(22)\begin{cases} \varphi = p[(x_3 - x_4)(x - x_1)(x - x_2) + (x_2 - x_1)(x - x_3)(x - x_4)] \\ \quad = p[(x_2 - x_4)(x - x_1)(x - x_3) + (x_3 - x_1)(x - x_2)(x - x_4)], \\ \psi = p[(x_4 - x_3)(x - x_1)(x - x_2) + (x_2 - x_1)(x - x_3)(x - x_4)] \\ \quad = p[(x_2 - x_3)(x - x_1)(x - x_4) + (x_4 - x_1)(x - x_2)(x - x_3)], \\ \chi = p[(x_4 - x_2)(x - x_1)(x - x_3) + (x_3 - x_1)(x - x_2)(x - x_4)] \\ \quad = p[(x_3 - x_2)(x - x_1)(x - x_4) + (x_4 - x_1)(x - x_2)(x - x_3)]. \end{cases}$$

Es bleibt also nur übrig, den Factor p zu bestimmen. Nach der Gleichung (9) ist der Coefficient des ersten Gliedes von φ gleich $\pm\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}$; man erhält

$$\pm\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} = \lambda(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4);$$

und analog

$$(23)\quad \begin{aligned} \pm\sqrt{b^2-ac+a\lambda_2} &= \lambda(-x_1+x_2-x_3+x_4),\\ \pm\sqrt{b^2-ac+a\lambda_3} &= \lambda(-x_1-x_2+x_3+x_4). \end{aligned}$$

Erhebt man diese Gleichungen zum Quadrat und addirt sie Glied für Glied, so resultirt

$$3(b^2-ac)=\lambda^2(3\Sigma[x^2]-2\Sigma[x_1x_2])=\frac{48p^3}{a^2}(b^2-ac);$$

folglich ist

$$p=\pm\frac{1}{4}a.$$

Wir wählen $p=-\frac{1}{4}a$, und indem wir diesen Werth in die Gleichungen (23) substituiren, gelangen wir zu folgenden Ausdrücken von λ_1, λ_2, λ_3 in Functionen der Wurzeln*):

$$\lambda_1=\frac{a}{12}[(x_2-x_1)(x_3-x_4)+(x_2-x_4)(x_3-x_1)],$$

$$\lambda_2=\frac{a}{12}[(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(x_2-x_3)(x_4-x_1)],$$

$$\lambda_3=\frac{a}{12}[(x_3-x_1)(x_4-x_2)+(x_3-x_2)(x_4-x_1)].$$

Zur Bestimmung der vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 genügt es zu den Gleichungen (23) hinzuzunehmen die vierte:

$$a(x_1+x_2+x_3+x_4)=-4b.$$

Man erhält so

$$(25)\quad ax_1+b=\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_1}+\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_2}+\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_3}.$$

Dieselben Gleichungen liefern auch die Werthe von x_2, x_3 und x_4, wenn man die Vorzeichen der Radicale dergestalt ändert, dass ihr Product immer denselben Werth behält; mit andern Worten: hat man die Vorzeichen der drei Radicale für einen Wurzelwerth richtig gewählt, so hat man nur nöthig, je zweien von ihnen ihr Vorzeichen umzukehren, um auch die drei übrigen Wurzelwerthe von x zu erhalten. Da die drei Radicale von der Form $\pm\sqrt{b^2-ac+a\lambda}$ mit einander multiplicirt eine rational-symmetrische Function der Wurzeln geben, so muss sich das Product auch durch eine rationale Function der Coefficienten a, b, c, d, e ausdrücken lassen. Das Product ist

*) Man vergleiche oben § 217 (31) und § 274.

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}$$
$$= \left(\frac{a}{4}\right)^3 (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

Man braucht nur nachzuweisen, dass der Ausdruck

$$(26) \qquad (b^2 - ac + a\lambda_1)(b^2 - ac + a\lambda_2)(b^2 - ac + a\lambda_3)$$

ein vollständiges Quadrat ist. Es ist aber

$$\varDelta = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = -4(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

und wenn man

$$\lambda = -\frac{1}{a}(b^2 - ac)$$

setzt, so findet man

$$4(b^2 - ac)^3 - a^2(b^2 - ac)J_{4,2} - a^3 J_{4,3}$$
$$= 4(b^2 - ac + a\lambda_1)(b^2 - ac + a\lambda_2)(b^2 - ac + a\lambda_3).$$

Nun ist die linke Seite bis auf einen constanten Factor das Resultat der Substitution des Werthes von λ, welcher die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c - \lambda \end{vmatrix}$$

verschwinden macht, in die $\varDelta$-Determinante. Man hat demnach mit Hülfe eines bekannten Satzes:

$$-a \,.\, \varDelta = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c - \lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a, & c + 2\lambda \\ c + 2\lambda, & e \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a, & b \\ c + 2\lambda, & d \end{vmatrix}^2$$

oder

$$a \,.\, \varDelta = (ad - bc - 2b\lambda)^2,$$

auch, indem man den Werth von λ einsetzt,

$$4(b^2 - ac)^3 - a^2(b^2 - ac)J_{4,2} - a^3 J_{4,3} = (2b^3 - 3abc + a^2 d)^2$$

oder endlich

$$(27) \qquad 2\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} \,.\, \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} \,.\, \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}$$
$$= -(2b^3 - 3abc + a^2 d).$$

Das Vorzeichen des Ausdruckes auf der rechten Seite ist bestimmt durch die Bemerkung, dass die reducirte Form der Gleichung

$$(ax + b)^4 - 6V_2(ax + b)^2 + 4V_3(ax + b) - V_4 = 0,$$

die aus (25) durch wiederholte Potenzirung gewonnene Form dieser Gleichung

$$(ax+b)^4 - V_2(ax+b)^2 - 8\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1}\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2}\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}(ax+b)$$
$$+ (a^2 J_{4,2} - 3J_{2,2}^2) = 0$$

ist. Daraus folgt also

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3} = -\tfrac{1}{2}V_3 = -\tfrac{1}{2}(2b^3 - 3abc + a^2 d).$$

Den Radicalen sind deswegen die Vorzeichen in der Weise voranzusetzen, dass das Product derselben das entgegengesetzte Vorzeichen der kubischen Variante erhält. Hierdurch sind die vier Wurzeln von $f = 0$ vollkommen bestimmt.

Aus den Gleichungen (19), nämlich

$$C_{4,4} - \lambda_1 f = -\varphi^2, \quad C_{4,4} - \lambda_2 f = -\psi^2, \quad C_{4,4} - \lambda_3 f = -\chi^2$$

lässt sich eine für die Theoreme der biquadratischen Formen wichtige Folgerung ziehen. Man hat offenbar

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial C}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial C}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x}, & 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

oder

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4\psi\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

Da man durch cyklisches Fortschreiten noch zwei andere Gleichungen erhält, schliesst man hieraus

$$(28) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varkappa(\lambda_1 - \lambda_2)\chi,$$

woraus folgt, dass unter den drei Functionen φ, ψ und χ jede bis auf einen constanten Factor die Functional-Determinante der andern ist. Dasselbe ergibt sich auch daraus, dass die Summe der Quadrate der drei Functionen, einzeln durch die Differenzialquotienten $\varDelta'(\lambda_1)$, $\varDelta'(\lambda_2)$, $\varDelta'(\lambda_3)$ dividirt, gleich Null ist. Man erhält demnach

$$\frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 4\varkappa\varphi\psi\chi.$$

Das erste Glied dieser bikubischen Form hat zum Coefficienten $-8V_3$ auf der linken Seite, und

$$4\varkappa\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}\,.\,\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}\,.\,\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}$$

auf der rechten Seite, oder nach (27)

$$-2\varkappa(2b^3 - 3abc + a^2 d) = -2\varkappa V_3.$$

Daraus folgt nun ohne Weiteres $\varkappa = 4$ und

$$(29)\qquad \frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 16\varphi\psi\chi.$$

Erhebt man beiderseits zum Quadrat, so resultirt

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = -16^2(C_{4,4}-\lambda_1 f)(C_{4,4}-\lambda_2 f)(C_{4,4}-\lambda_3 f)$$

und wenn man

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) = C_{4,6}$$

setzt, die bekannte Gleichung von Cayley

$$(30)\qquad C_{4,6}^2 = -4C_{4,4}^3 + J_{4,2}f^2C_{4,4} - J_{4,3}f^3.$$

Dies ist die Relation zwischen den drei Covarianten, welche Cayley zu einer neuen Methode der Auflösung der biquadratischen Gleichungen benutzt hat und welche bereits früher entwickelt worden ist. Dieselbe besteht in Folgendem:

Die Gleichung

$$(\lambda_2-\lambda_3)\varphi + (\lambda_3-\lambda_1)\psi + (\lambda_1-\lambda_2)\chi = 0.$$

welche quadratisch ist, wird offenbar erfüllt durch einen Wurzelwerth x_1 und gibt

$$\varphi = \psi = \chi = 0.$$

Die quadratische Gleichung liefert zwei gleiche Wurzeln, d. h. es genügt x_1 auch der Gleichung

$$(\lambda_2-\lambda_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\lambda_3-\lambda_1)\frac{\partial\psi}{\partial x} + (\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0.$$

Dies folgt aus der Identität (16), nämlich

$$\frac{\varphi^2}{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right)_1} + \frac{\psi^2}{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right)_2} + \frac{\chi^2}{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right)_3} = 0,$$

aus welcher resultirt

$$(\lambda_2-\lambda_3)\varphi^2 + (\lambda_3-\lambda_1)\psi^2 + (\lambda_1-\lambda_2)\chi^2 = 0,$$

oder durch Differenzirung

$$(\lambda_2-\lambda_3)\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\lambda_3-\lambda_1)\psi\frac{\partial\psi}{\partial x} + (\lambda_1-\lambda_2)\chi\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0.$$

Setzt man hierin $\varphi = \psi = \chi$, so erhält man offenbar die Bedingungsgleichung zweier gleichen Wurzeln. Wir gelangen so zu dem Cayley'schen Theorem, dass die Gleichung

$$(\lambda_2-\lambda_3)\sqrt{\lambda_1 f - C_{4,4}} \pm (\lambda_3-\lambda_1)\sqrt{\lambda_2 f - C_{4,4}} \pm (\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{\lambda_3 f - C_{4,4}} = 0$$

eine der vier Wurzeln der Gleichung $f = 0$ doppelt liefert, oder dass die linke Seite ein vollständiges Quadrat ist.

Darboux leitet nun weiter die Formeln von Aronhold in eben so eleganter Weise ab, und zwar aus den Formeln (22). Addirt man dieselbe, so resultirt

$$\varphi + \psi + \chi = \frac{a}{4}[(x_1 - x_3)(x - x_2)(x - x_4) \\ + (x_1 - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x_1 - x_4)(x - x_2)(x - x_3)],$$

oder

$$\varphi + \psi + \chi = \frac{a}{4(x - x_1)}[(x_1 - x_3)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \\ + (x_1 - x_2)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \\ + (x_1 - x_4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)].$$

Der Ausdruck in der Klammer multiplicirt mit a ist der Werth von

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

für $x = x_1$ und $y = 1$. Man findet also

$$\frac{x_1\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{4(x - x_1 y)} = \pm\varphi \pm \psi \pm \chi,$$

oder

$$(31) \quad \frac{(ax_1+b)x^3+3(bx_1+c)x^2y+3(cx_1+d)xy^2+(dx_1+e)y^3}{x-x_1 y} = \pm\varphi \pm \psi \pm \chi,$$

worin die Vorzeichen auf der rechten Seite noch zu bestimmen, x und y zwei Willkürliche sind. Um den allgemeinsten Ausdruck für die Wurzelgrössen zu erhalten, kann man folgende Methode anwenden:

Die drei Functionen φ, ψ, χ wurden abgeleitet von den allgemeineren linearen Functionen P_1, P_2, P_3, indem an die Stelle von X, Y, Z beziehungsweise y^2, yx, x^2 gesetzt wurde. Umgekehrt, da die Functionen φ, ψ, χ nur vom zweiten Grade sind, kann man von ihnen die Functionen P_1, P_2, P_3 ableiten, indem man y^2, yx, x^2 wieder durch X, Y, Z ersetzt. Man erhält auf diese Weise wiederum nach (12)

$$P_1 = \sqrt{-H + K\lambda_1 - L\lambda_1^2} \text{ u. s. w.},$$

wobei die Vorzeichen der Radicale nach derselben Regel bestimmt werden, wie die von φ, ψ und χ. Man findet nun, indem man die Division auf der linken Seite der Gleichung (31) ausführt,

$$\varphi + \psi + \chi = (ax_1 + b)x^2 + (ax_1^2 + 4bx_1 + 3c)xy \\ + (ax_1^3 + 4bx_1^2 + 6cx_1 + 3d)y^2.$$

Dann hat man die allgemeinere Gleichung

$$(32)\quad \begin{aligned} &(ax_1+b)Z+(ax_1^2+4bx_1+3c)Y+(ax_1^3+4bx_1^2+6cx_1+3d)X \\ &= P_1+P_2+P_3 \\ &=\sqrt{-H+K\lambda_1-L\lambda_1^2}+\sqrt{-H+K\lambda_2-L\lambda_2^2} \\ &+\sqrt{-H+K\lambda_3-L\lambda_3^2}. \end{aligned}$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck einer Wurzel, für welchen die Summe der vier Werthe verschwindet. Fügt man beiderseits die Constante

$$aC+3bZ+3cY+dX$$

hinzu, so resultirt

$$(33)\quad \begin{aligned} &(ax_1^3+4bx_1^2+6cx_1+4d)X+(ax_1^2+4bx_1+6c)Y \\ &\quad+(ax_1+4b)Z+aC \\ &\quad=aC+3bZ+3cY+dX\pm\sqrt{-H+K\lambda_1-L\lambda_1^2} \\ &\quad\pm\sqrt{-H+K\lambda_2-L\lambda_2^2}\pm\sqrt{-H+K\lambda_3-L\lambda_3^2}. \end{aligned}$$

Geht man von dem System (12) aus, so findet man leicht, dass das Product der drei Radicale gleich ist der rationalen Function

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial X}, & \frac{\partial L}{\partial Y}, & \frac{\partial L}{\partial Z} \\ \frac{\partial K}{\partial X}, & \frac{\partial K}{\partial Y}, & \frac{\partial K}{\partial Z} \\ \frac{\partial H}{\partial X}, & \frac{\partial H}{\partial Y}, & \frac{\partial H}{\partial Z} \end{vmatrix}.$$

Die Formel (33) unterscheidet sich von der Aronhold'schen dadurch, dass in den Radicalen quadratische Functionen von λ enthalten sind. Man kann sie indess verschwinden lassen, wenn man annimmt $L=4(Y^2-XZ)=0$. Dieser Gleichung wird genügt, wenn man setzt

$$Y=xy,\quad X=y^2,\quad Z=x^2;$$

und man erhält die Formeln von Aronhold. Es lassen sich jedoch ausser ihnen noch andere Resultate herleiten.

Seien $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ die vier Werthe irgend einer Function einer Wurzel x_1. Jedes der Radicale, welche in den Formeln (32) und (33) vorkommen, ist gleich einem Ausdrucke von der Form

$$\psi_1+\psi_2-\psi_3-\psi_4.$$

Wenn man also die Gleichung

$$A\psi^4+B\psi^3+\cdots=0$$

schreibt, deren Wurzeln durch jene vier Werthe dargestellt werden, und wenn man die Wurzeln der neuen Resolvente

$$-4A^3 + J'_{4,2}A - J'_{4,3} = 0$$

mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet, während $J'_{4,2}$ und $J'_{4,3}$ die Invarianten der Gleichung $[A\psi^4] = 0$ bedeuten, so hat man offenbar

$$(35)\qquad \begin{cases} -H + K\lambda_1 - L\lambda_1^2 = A_0 - A_1 A_1, \\ -H + K\lambda_2 - L\lambda_2^2 = A_0 - A_1 A_2, \\ -H + K\lambda_3 - L\lambda_3^2 = A_0 - A_1 A_3. \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen gelangt man zur Grösse A_0, nämlich

$$A_0 = -H - L\Sigma(\lambda_1^2) = -H - \frac{1}{6}J_{4,2}L.$$

Daraus folgt weiter

$$(36)\qquad A_1 A_1 = -\frac{1}{6}J_{4,2}L - K\lambda_1 + L\lambda_1^2.$$

Setzt man $A_1 = 1$, so wird

$$A_1 = -\frac{1}{6}J_{4,2}L - K\lambda_1 + L\lambda_1^2.$$

Die Werthe λ_1, λ_2, λ_3 können nach der Cardanischen Formel dargestellt werden durch

$$(37)\qquad \lambda_1 = -\alpha\sqrt[3]{R} - \alpha^2\sqrt[3]{R'},$$

wo α eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^3 - 1 = 0$$

bedeutet und R wie R' zwei Grössen sind, welche gegeben sind durch die Formeln

$$(38)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{R}.\sqrt[3]{R'} = \frac{1}{12}J_{4,2}, & R = \frac{1}{8}J_{4,3} + \frac{1}{8}\sqrt{J_{4,3}^2 - \frac{1}{27}J_{4,2}^3}, \\ R + R' = \frac{1}{4}J_{4,3}, & R' = \frac{1}{8}J_{4,3} - \frac{1}{8}\sqrt{J_{4,3}^2 - \frac{1}{27}J_{4,2}^3}. \end{cases}$$

Man erhält also, wenn man den Werth λ_1 einsetzt,

$$A_1 = \alpha\sqrt[3]{R}\left(-K - \frac{12LR'}{J_{4,2}}\right) + \alpha^2\sqrt[3]{R'}\left(-K - \frac{12LR}{J_{4,2}}\right),$$

einen Ausdruck von derselben Form wie λ_1. Wendet man nun die Formeln (38) an, so findet man

$$(39)\qquad \begin{cases} J'_{4,2} = J_{4,2}\left(-K - \frac{12LR'}{J_{4,2}}\right)\left(-K - \frac{12LR}{J_{4,2}}\right), \\ \frac{1}{4}J'_{4,3} = -R\left(K + \frac{12LR'}{J_{4,2}}\right)^3 - R'\left(K + \frac{12LR}{J_{4,2}}\right)^3. \end{cases}$$

§ 276. Methode von Cayley*).

Die Ausdrücke, welche bei den binären „Quartics" betrachtet werden, sind:

$$f = (a, b, c, d, e\widehat{)(}x, y)^4,$$

$$J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$C_{4,4} = (ac - b^2, \tfrac{1}{2}(ad - bc), \tfrac{1}{6}(ae + 2bd - 3c^2), \tfrac{1}{2}(bc - cd),$$
$$ce - d^2\widehat{)(}x, y)^4,$$

$$J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3.$$

$$C_{4,6} = \left\{\begin{array}{l} (a^2d - 3abc + 2b^3), \\ \frac{1}{6}(a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c), \\ \frac{1}{3}(abe - 3acd + 2b^2d), \\ \frac{1}{2}(ad^2 - b^2e), \\ -\frac{1}{3}(ade - 3bce + 2bd^2), \\ -\frac{1}{6}(ae^2 + 2bde - 9c^2e + 6cd^2), \\ -(be^2 - 3cde + 2d^3), \end{array}\right\}\widehat{\;}(x, y)^6$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_4 &= J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2 \\ &= a^3e^3 - 12a^2bdc^2 - 27a^2d^4 - 6ab^2d^2e - 27b^4e^2 - 64b^3d^3 \\ &\quad + c(54a^2d^2e + 54ab^2e^2 + 108abd^3 + 108b^3de) \\ &\quad + c^2(-18a^2e^2 - 108abde + 36b^2d^2) \\ &\quad + c^3(-54ad^2 - 54b^2e) \\ &\quad + c^4(81ae). \end{aligned}$$

Wir stellen uns die Aufgabe, einen linearen Factor der Quartic

$$(a, b, c, d, e\widehat{)(}x, y)^4$$

zu bestimmen. Die Covarianten sind untereinander verbunden durch die Gleichung

$$C_{4,6}^2 = -4C_{4,4}^3 + J_{4,2}C_{4,4}f - J_{4,3}f^3.$$

Setzt man der Kürze wegen die absolute Invariante

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2} = 4M,$$

so lässt sich die vorhergehende Gleichung schreiben

---

*) Cayley, Fifth memoir upon quantics. § 127—146.

$$\left(1,\ 0,\ -\tfrac{1}{3}M,\ M\right)\overset{\frown}{}\left(J_{4,2}C_{4,4},\ J_{4,3}f\right)^3 = -\tfrac{1}{4}J_{4,2}^3C_{4,6}^2.$$

Sind ω_1, ω_2, ω_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\left(1,\ 0,\ -\tfrac{1}{3}M,\ M\right)\overset{\frown}{}\left(\omega,\ 1\right)^3 = 0,$$

so sind die drei Ausdrücke

$$J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f,\quad J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f,\quad J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f,$$

lauter Quadrate. Man setze nun

$$\begin{aligned}
(\omega_2 - \omega_3)(J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f) &= X^2,\\
(\omega_3 - \omega_1)(J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f) &= Y^2,\\
(\omega_1 - \omega_2)(J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f) &= Z^2,
\end{aligned}$$

so dass identisch

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

und wegen

$$(X + iY)(X - iY) = -Z^2$$

sämmtliche Factoren auf der linken Seite Quadrate sein müssen. Der Ausdruck

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

wird ein Quadrat sein, wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

ist. Man braucht nur zu schreiben

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + i\beta)(X - iY) + \tfrac{1}{2}(\alpha - i\beta)(X + iY) - \gamma i\sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Setzt man

$$\alpha = \sqrt{\omega_2 - \omega_3},\quad \beta = \sqrt{\omega_3 - \omega_1},\quad \gamma = \sqrt{\omega_1 - \omega_2},$$

so ist weiter

$$\begin{aligned}
(\omega_2 - \omega_3)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f} + (\omega_3 - \omega_1)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f}\\
+ (\omega_1 - \omega_2)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,2}f}
\end{aligned}$$

auch ein Quadrat. Da das Product der verschiedenen Werthe ein Vielfaches von f^2 ist, wohin leicht die Erwägung führt, dass der Ausdruck für $f = 0$ verschwindet, so ist der Ausdruck das Quadrat eines linearen Factors von f.

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
P^3 = \tfrac{1}{2}M\Big[&\left(-1,\ \tfrac{2}{9}M,\ -\tfrac{1}{3}M,\ M + \tfrac{2}{27}M^2\right)\overset{\frown}{}\left(J_{4,2}C_{4,4},\ J_{4,3}f\right)^3\\
&+ \sqrt{1 - \tfrac{4}{27}M}\left(1,\ 0,\ -\tfrac{1}{3}M,\ M\right)\overset{\frown}{}\left(J_{4,2}C_{4,4},\ J_{4,3}f\right)^3\Big],
\end{aligned}$$

$$Q^3 = \frac{1}{2} M \left[\left(-1,\ \frac{2}{9} M,\ -\frac{1}{3} M,\ M + \frac{2}{27} M^2\right) \widehat{\ } \left(J_{4,2} C_{4,4},\ J_{4,3} f\right)^3 \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 - \frac{4}{27} M} \left(1,\ 0,\ -\frac{1}{3} M,\ M\right) \widehat{\ } \left(J_{4,2} C_{4,4},\ J_{4,3} f\right)^3 \right],$$

worin die kubische Covariante und die Discriminante der Gleichung $\omega^3 - M(\omega - 1) = 0$ vorkommen, und bezeichnet die Wurzeln der Gleichung

$$J^2 + J + 1 = 0$$

mit J_1 und J_2, so wird

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_1^2)(\omega_2 - \omega_3)(J_{4,2} C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3} f) = P - Q.$$

Setzt man ferner

$$P_0^3 = \frac{1}{2} M \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{27} M}\right),$$

$$Q_0^3 = \frac{1}{2} M \left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27} M}\right),$$

so wird

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_1^2)(\omega_2 - \omega_3) = P_0 - Q_0.$$

Beachtet man jetzt, dass $(J_1 - J_1^2)^2 = -3$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{3} (\omega_2 - \omega_3)^2 (J_{4,2} C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3} f) = (P - Q)(P_0 - Q_0)$$

und folglich

$$(\omega_2 - \omega_3) \sqrt{J_{4,2} C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3} f} = (J_1 - J_2) \sqrt{-(P - Q)(P_0 - Q_0)}.$$

Auf dieselbe Weise gelangt man zu folgenden Systemen von Gleichungen:

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_2)(\omega_2 - \omega_3)(J_{4,2} C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3} f) = P - Q,$$

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_2)(\omega_3 - \omega_1)(J_{4,2} C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3} f) = J_1 P - J_2 Q,$$

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_2)(\omega_1 - \omega_2)(J_{4,2} C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3} f) = J_2 P - J_1 Q,$$

und

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_2)(\omega_2 - \omega_3) = P_0 - Q_0,$$

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_2)(\omega_3 - \omega_1) = J_1 P_0 - J_2 Q_0,$$

$$\frac{1}{3} (J_1 - J_2)(\omega_1 - \omega_2) = J_2 P_0 - J_1 Q_0,$$

aus denen sich diese drei andern ergeben:

$$(\omega_2 - \omega_3)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f} = (J_1 - J_2)\sqrt{-(P-Q)(P_0 - Q_0)}\,,$$

$$(\omega_3 - \omega_1)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f}$$
$$= (J_1 - J_2)\sqrt{-(J_1 P - J_2 Q)(J_1 P_0 - J_2 Q_0)}\,,$$

$$(\omega_1 - \omega_2)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f}$$
$$= (J_1 - J_2)\sqrt{-(J_2 P - J_1 Q)(J_2 P_0 - J_1 Q_0)}\,.$$

Sieht man ab von dem gemeinschaftlichen Factor $J_1 - J_2$, so ist das Quadrat eines linearen Factors von f gleich

$$\sqrt{-(P-Q)(P_0 - Q_0)} + \sqrt{-(J_1 P - J_2 Q)(J_1 P_0 - J_2 Q_0)}$$
$$+ \sqrt{-(J_2 P - J_1 Q)(J_2 P_0 - J_1 Q_0)}\,.$$

Es möge noch die Bemerkung hinzugefügt werden, dass

$$-\omega_1 = P_0 + Q_0\,,$$
$$-\omega_2 = J_1 P_0 + J_2 Q_0\,,$$
$$-\omega_3 = J_2 P_0 + J_1 Q_0\,,$$

ist, worin J_1 und J_2 einander vertreten können.

Die vorstehende Lösung gibt zugleich die kanonische Form der Quartic. In der That, wenn man schreibt

$$X + iY = 2\sqrt{(\omega_2 - \omega_3)(\omega_3 - \omega_1)}\sqrt{J_{4,3}}\,.\,x^2\,,$$
$$X - iY = 2\sqrt{(\omega_2 - \omega_3)(\omega_3 - \omega_1)}\sqrt{J_{4,3}}\,.\,y^2\,,$$

so findet man nach einer einfachen Reduction

$$J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f = (\omega_3 - \omega_1)J_{4,3}(x^2 + y^2)^2\,,$$
$$J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f = -(\omega_2 - \omega_3)J_{4,3}(x^2 - y^2)^2\,,$$
$$J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f = -\frac{(\omega_2 - \omega_3)(\omega_3 - \omega_1)}{\omega_1 - \omega_2}J_{4,3}\,.\,4x^2y^2\,.$$

Setzt man nun

$$C = -\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{(J_1 - J_2)(J_2 P_0 + J_1 Q_0)}{3(J_2 P_0 - J_1 Q_0)}\,,$$

so resultirt

$$f = x^4 + y^4 + 6Cx^2y^2\,.$$

Die Hesse'sche Function $C_{4,4}$ kann geschrieben werden unter der Form

$$\left(\frac{\partial J_{4,3}}{\partial e}, -\frac{1}{2}\frac{\partial J_{4,3}}{\partial d}, \frac{1}{6}\frac{\partial J_{4,3}}{\partial c}, -\frac{1}{2}\frac{\partial J_{4,3}}{\partial b}, \frac{\partial J_{4,3}}{\partial a}\right)\!\widehat{}\!(x, y)^4.$$

Die cubische Covariante $C_{4,6}$ kann man bilden, wenn man die Quartic in der kubischen Form

$$\left[(ax+by),\ \frac{1}{3}(bx+cy),\ \frac{1}{3}(cx+dy),\ (dx+ey)\right]\widehat{\ }(x,\ y)^3$$

darstellt. Die kubische Covariante dieser Cubic gibt die kubische Covariante $C_{4,6}$ der Quartic.

Die Covariante $C_{4,6}$ sei

$$C_{4,6} = (A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G\widehat{)\ (}x,\ y)^6.$$

Dann ist identisch

$$AG - 9CE + 8D^2 = 0,$$

und wenn man die quadratische Invariante der Sextic bildet, so gelangt man zur Discriminante. Es ist nämlich

$$AG - 6BF + 15CE - 10D^2 = \frac{1}{6}\overline{D}_4.$$

Die beiden Gleichungen geben die einfachere Relation

$$BF - 4CE + 3D^2 = -\frac{1}{36}\overline{D}_4,$$

welche zuerst von Salmon gegeben worden ist. Die linke Seite ist die quadratische Invariante der Quartic

$$(B,\ C,\ D,\ E,\ F\widehat{)\ (}x,\ y)^4.$$

Man findet ausserdem die Identitäten

$$AF - 3BE + 2CD = 0,$$
$$BG - 3CF + 2DE = 0.$$

Bemerkenswerth sind noch die Covarianten der zusammengesetzten Function

$$\alpha f + 6\beta C_{4,4}.$$

Die quadratische Invariante ist:

$$\overline{J}_{4,2}(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = (J_{4,2},\ 9J_{4,3},\ 3J_{4,2}^2\widehat{)\ (}\alpha,\ \beta)^2;$$

die kubische Invariante

$$\overline{J}_{4,3}(\alpha f + 6\beta C_{4,4})$$
$$= (J_{4,3},\ \frac{1}{3}J_{4,2}^2,\ 3J_{4,2}J_{4,3},\ -J_{4,2}^3 + 54J_{4,3}^2\widehat{)\ (}\alpha,\ \beta)^3;$$

die Hesse'sche Function

$$\overline{C}_{4,4}(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = (1,\ 0,\ -3J_{4,2}\widehat{)\ (}\alpha,\ \beta)^2 C_{4,4}$$
$$+ (0,\ \frac{1}{2}J_{4,2},\ 9J_{4,3}\widehat{)\ (}\alpha,\ \beta)^2 f;$$

die kubische Covariante

$$\overline{C}_{4,6}(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = (1, 0, -3J_{4,2}, -54J_{4,3}\widehat{)}(\alpha, \beta)^3 C_{4,6};$$

und die Discriminante

$$\overline{D}_4(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = \Big(1, 0, -\frac{18}{15}J_{4,2}, \frac{108}{20}J_{4,3}, \frac{81}{15}J_{4,2}^2,$$

$$162 J_{4,2}J_{4,3}, -2916 J_{4,3}^2\Big)\widehat{\Big(}\alpha, \beta\Big)^6 \overline{D}_4.$$

Die beiden Invarianten haben wir bereits in § 217 (29) und (31) kennen gelernt. Die Invariante $\overline{J}_{4,2}$ stellt sich in Form der quadratischen Covariante dar von der „Lambdaic"

$$\varDelta = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3},$$

nämlich

$$-\frac{4}{3}\Big(J_{4,2}x^2 - 3J_{4,3}xy + \frac{1}{12}J_{4,2}^2\, y^2\Big),$$

und wenn man $x = \frac{1}{6}\alpha$, $y = -\beta$ setzt,

$$-\frac{1}{27}(J_{4,2}, 9J_{4,3}, 3J_{4,2}^2\widehat{)}(\alpha, \beta)^2.$$

Die Invariante $\overline{J}_{4,3}$ stellt sich in Form der kubischen Covariante von der Lambdaic $\varDelta$ dar. Diese Function hängt mit der Gleichung

$$(1, 0, -\frac{1}{3}M, M\widehat{)}(\omega, 1)^3 = 0$$

einfach so zusammen, dass

$$J_{4,2}\lambda = J_{4,3}\omega.$$

Cayley bezeichnet nun weiter als eine Folgerung der vorangehenden Deductionen die Identität von Aronhold:

$$\frac{(a, b, c, d, e\widehat{)}(\xi, \eta)^3(x, y)}{\xi y - \eta x}$$

$$= \sqrt{\Big[\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\Big)_1, -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\Big)_1, \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\Big)_1, -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\Big)_1, \Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\Big)_1\Big]\widehat{\Big(}\xi, \eta\Big)^4}$$

$$+ \sqrt{\Big[\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\Big)_2, -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\Big)_2, \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\Big)_2, -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\Big)_2, \Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\Big)_2\Big]\widehat{\Big(}\xi, \eta\Big)^4}$$

$$+ \sqrt{\Big[\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\Big)_3, -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\Big)_3, \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\Big)_3, -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\Big)_3, \Big(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\Big)_3\Big]\widehat{\Big(}\xi, \eta\Big)^4}.$$

Die Radicanden lassen sich einfacher in folgender Form darstellen, wie man leicht durch Zerlegung findet:

$$\left[\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right), -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right), \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial c}\right), -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right), \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)\right]\widehat{}(\xi, \eta)^4$$
$$= \frac{J_{4,3}}{J_{4,2}}\,\omega f' - C'_{4,4} = -\frac{1}{J_{4,2}}(J_{4,2}C'_{4,4} - \omega J_{4,3}f').$$

Die Gleichung von Aronhold geht dadurch über in

$$\frac{(a, b, c, d, e)\widehat{}(\xi, \eta)^3 (x, y)}{\xi y - \eta x}\sqrt{-J_{4,2}} = \sqrt{J_{4,2}C'_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f'}$$
$$+ \sqrt{J_{4,2}C'_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f'} + \sqrt{J_{4,2}C'_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f'}\,.$$

Ist nun $x - x_1 y$ ein linearer Factor der Quartic f und ersetzt man in der Gleichung y durch den Werth $x_1 x$, dann verschwindet (x, y) gänzlich.

Die vorstehende Gleichung wird dann

$$\frac{(a, b, c, d, e)\widehat{}(\xi, \eta)^3 (x_1, 1)}{\xi - x_1 \eta}\sqrt{-J_{4,2}} = \sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f}$$
$$+ \sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f} + \sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f}\,,$$

nimmt also einen Ausdruck an, welcher im Zusammenhange steht mit den im Anfange dieses Paragraphen gewonnenen Resultaten.

Betrachtet man die Quartic als ein Product ihrer linearen Factoren in folgender Gestalt:

$$f = a(x - x_1 y)(x - x_2 y)(x - x_3 y)(x - x_4 y),$$

und schreibt man der Kürze wegen

$$u = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$
$$v = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2),$$
$$w = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3),$$

so ist

$$u + v + w = 0$$

$$J_{4,2} = \frac{a^2}{24}(u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{a^2}{12}(uv + vw + wu),$$
$$J_{4,3} = \frac{a^3}{432}(v - u)(u - w)(w - v),$$
$$\overline{D}_4 = \frac{a^6}{256}(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2$$
$$= \frac{a^6}{256}u^2 v^2 w^2.$$

Hieraus lässt sich die Formel $\overline{D}_4 = J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2$ leicht verificiren.

Die Formeln zeigen eine merkwürdige Analogie zwischen den Covarianten einer Cubic und den Invarianten einer Quartic. In der That ist für die Cubic:

$$u = (x_1 - x_2)(x - x_3 y),$$
$$v = (x_3 - x_1)(x - x_2 y),$$
$$w = (x_2 - x_3)(x - x_1 y),$$

für die Quartic:

$$u = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$
$$v = (x_3 - x_1)(x_2 - x_4),$$
$$w = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4).$$

Ferner correspondiren mit einander

für die Cubic:
die quadratische Covariante,
die kubische Covariante,
das Product aus Quadrat der Cubic und ihrer Discriminante,

für die Quartic:
die quadratische Invariante,
die kubische Invariante,
die Discriminante.

Zu diesen Analogien fügen wir noch die in § 143, 8 und § 217, 4 (29) und (31) aufgestellten Theoreme hinzu:

für die Cubic:

a) Wenn die quadratische Covariante verschwindet, so bilden ihre beiden Wurzeln mit denen der Cubic einen Double äquianharmonischer Verhältnisse;

b) Wenn die kubische Covariante verschwindet, so bilden ihre drei Wurzeln mit denen der Cubic einen Tripel harmonischer Verhältnisse;

für die Quartic:

α) Wenn die quadratische Invariante verschwindet, so bilden die vier Wurzeln einen Double äquianharmonischer Verhältnisse;

β) Wenn die kubische Invariante verschwindet, so bilden die vier Wurzeln einen Tripel harmonischer Verhältnisse.

Für die beiden Covarianten $C_{4,4}$ und $C_{4,6}$ hat man

$$C_{4,4} = -\frac{a^2}{48}\Sigma(x_1 - x_2)^2(x - x_3 y)^2(x - x_4 y)^2,$$

und

$$C_{4,6} = 2\varphi\psi\chi,$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\frac{4\varphi}{a} = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4,\ -x_1x_2 + x_3x_4,\ x_1x_2(x_3+x_4) - x_3x_4(x_1+x_2)\widehat{)\ (x,y})^2,$$

$$\frac{4\psi}{a} = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ -x_1x_3 + x_2x_4,\ x_1x_3(x_2+x_4) - x_2x_4(x_1+x_3)\widehat{)\ (x,y})^2,$$

$$\frac{4\chi}{a} = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4,\ -x_1x_4 + x_2x_3,\ x_1x_4(x_2+x_3) - x_2x_3(x_1+x_4)\widehat{)\ (x,y})^2.$$

Gemäss der Bedeutung von M ist weiter

$$\frac{1}{4}\frac{J_{4,2}^{\,3}}{J_{4,3}^{\,2}} = M = \frac{27}{8}\frac{(u^2+v^2+w^2)^3}{(v-w)^2\,(w-u)^2\,(u-v)^2},$$

und wenn man der Kürze wegen mit Berücksichtigung der früheren Annahmen schreibt

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{u^2+v^2+w^2}{(v-w)\,(w-u)\,(u-v)} = \frac{a}{12}\cdot\frac{J_{4,2}}{J_{4,3}} = \frac{a\,\omega}{12\,\lambda},$$

so wird

$$M = \frac{a^2}{96}\,(u^2+v^2+w^2)\,\frac{\omega^2}{\lambda^2}.$$

Hieraus lassen sich folgende Gleichungen herleiten*)

$$\lambda_1 = -\frac{a}{12}\,(v-w) = \frac{3\,J_{4,3}\,(u^2+v^2+w^2)}{2\,J_{4,2}\,(u-v)\,(u-w)},$$

$$\lambda_2 = -\frac{a}{12}\,(w-u) = \frac{3\,J_{4,3}\,(u^2+v^2+w^2)}{2\,J_{4,2}\,(v-u)\,(v-w)},$$

$$\lambda_3 = -\frac{a}{12}\,(u-v) = \frac{3\,J_{4,3}\,(u^2+v^2+w^2)}{2\,J_{4,2}\,(w-u)\,(w-v)}.$$

Aus diesem System folgt ohne Weiteres

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = -\frac{1}{4}\,J_{4,2},$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{4}\,J_{4,3};$$

es sind also λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Lambdaic $\varDelta = 0$.

Der erste Coefficient der entwickelten Function

$$J_{4,2}\,C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3} f$$

ist nun

$$\frac{a^2}{24}\,(u^2+v^2+w^2)\,J_{2,2} + \frac{a^4}{288}\,(u^2+v^2+w^2)\,(v-w),$$

---

*) Man vergl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen § 50. Es ist zu bemerken, dass rücksichtlich der Bedeutung von $m = -2\lambda$ (§ 47 und § 49), die Ausdrücke auf der rechten Seite der Formeln (10) und (14) das entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen. Setzt man nämlich $\sigma = -\frac{v}{w}$ aus (9) in (3) ein, wie es in der That von Clebsch geschieht, so erhält man wegen $w^2+wv+v^2 = -(uw+wv+vu) = \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$,

$$m = -\frac{j}{i}\cdot\frac{u^2+v^2+w^2}{(u-v)\,(u-w)}.$$

Man überzeugt sich übrigens leicht von der Richtigkeit, wenn man aus (14) und (13) die Determinante in § 47 ableitet.

oder

$$\frac{a^4}{1152}(u^2+v^2+w^2)\,[48\,J_{2,2}\,a^{-2}+4(v-w)],$$

und der Werth des Ausdrucks in der eckigen Klammer

$$\begin{aligned}8(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)-3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\\ +4(x_1-x_3)(x_4-x_2)-4(x_1-x_4)(x_2-x_3)\\ =-3(x_1+x_2-x_3-x_4)^2.\end{aligned}$$

Es ist aber die Function $J_{4,2}C_{4,4}-\omega_1 J_{4,3}f$ ein Quadrat und ihre Entwicklung leicht zu ergänzen; es ist nämlich

$$\begin{aligned}J_{4,2}C_{4,4}-\omega_1 J_{4,3}f &= -\frac{a^4}{384}(u^2+v^2+w^2)\,([x_1+x_2-x_3-x_4,\\ &\quad -x_1x_2+x_3x_4,\; x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)]\widehat{\;}(x,y)^2)^2,\\ J_{4,2}C_{4,4}-\omega_2 J_{4,3}f &= -\frac{a^4}{384}(u^2+v^2+w^2)\,([x_1-x_2+x_3-x_4,\\ &\quad -x_1x_3+x_2x_4,\; x_1x_3(x_2+x_4)-x_2x_4(x_1+x_3)]\widehat{\;}(x,y)^2)^2,\\ J_{4,2}C_{4,4}-\omega_3 J_{4,3}f &= -\frac{a^4}{384}(u^2+v^2+w^2)\,([x_1-x_2-x_3+x_4,\\ &\quad -x_1x_4+x_2x_3,\; x_1x_4(x_2+x_3)-x_2x_3(x_1+x_4)]\widehat{\;}(x,y)^2)^2.\end{aligned}$$

Aus den vorhergehenden Gleichungen für λ ergibt sich nun

$$\lambda_2-\lambda_3=\frac{a}{4}u,$$

$$\lambda_3-\lambda_1=\frac{a}{4}v,$$

$$\lambda_1-\lambda_2=\frac{a}{4}w,$$

und es ist demzufolge

$$\omega_2-\omega_3=\frac{aJ_{4,2}}{4J_{4,3}}u,$$

$$\omega_3-\omega_1=\frac{aJ_{4,2}}{4J_{4,3}}v,$$

$$\omega_1-\omega_2=\frac{aJ_{4,2}}{4J_{4,3}}w.$$

Wir haben somit*)

$$\begin{aligned}(\omega_2-\omega_3)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4}-\omega_1 J_{4,3}f} &= \frac{a^2}{8}(J_1-J_2)\frac{u^2+v^2+w^2}{(v-u)(u-w)(w-v)}\\ &\times(x_1-x_2)(x_3-x_4)\times(x_1+x_2-x_3-x_4,\;-x_1x_2+x_3x_4,\\ &\quad x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)\widehat{\;}(x,y)^2.\end{aligned}$$

*) So Cayley. Ich finde statt des Factors J_1-J_2 den abweichenden $9\sqrt{-J_{4,2}}$.

Bilden wir die analogen Ausdrücke, so ist ihre Summe

$$(\omega_2 - \omega_3)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_1 J_{4,3}f} + (\omega_3 - \omega_1)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_2 J_{4,3}f}$$
$$+ (\omega_1 - \omega_2)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4} - \omega_3 J_{4,3}f}$$
$$= -\frac{1}{4}(J_1 - J_2)\frac{u^2+v^2+w^2}{(v-u)(u-w)(w-v)}(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x-x_4y)^2.$$

Wenn die quadratische Invariante $J_{4,2}$ verschwindet, so wird

$$u : v : w = 1 : J_1 : J_2,$$

wo J_1 und J_2 die Wurzeln der Gleichung

$$J^2 + J + 1 = 0$$

bedeuten. Die Wurzeln der Quartic sind einander äquianharmonisch zugeordnet.

Wenn die kubische Invariante $J_{4,3}$ verschwindet, so wird

$$u - v = 0, \text{ oder } v - w = 0, \text{ oder } w - u = 0,$$

und es sind die Wurzeln der Quartic einander harmonisch zugeordnet.

Wenn endlich sowol $J_{4,2} = 0$, als auch $J_{4,3} = 0$ ist, so wird

$$u = v = w = 0,$$

und in diesem Falle sind drei Wurzeln einander gleich.

Wenn irgend zwei lineare Factoren der Quartic mit den beiden übrigen eine Involution bilden, so machen die einander zugeordneten Grössen der Involution einen quadratischen Factor der kubischen Covariante aus. Betrachtet man die drei Paare der zugeordneten Grössen, so sind die linearen Factoren eines quadratischen Factors der kubischen Covariante die zugeordneten Grössen der Involution, welche von den beiden andern Paaren gebildet wird.

Angenommen nämlich die Involution werde gebildet durch die Gleichungen

$$(x - x_1y)(x - x_2y) = 0, \quad (x - x_3y)(x - x_4y) = 0,$$

so werden die zugeordneten Grössen der Involution gefunden mittels der Jacobi'schen Function der Quadric

$$(2, \quad -x_1 - x_2, \quad 2x_1x_2 \widehat{)\,(}x, y)^2,$$
$$(2, \quad -x_3 - x_4, \quad 2x_3x_4 \widehat{)\,(}x, y)^2;$$

dieselbe ist

$$[x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \; -x_1x_2 + x_3x_4, \; x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2) \widehat{]\,(}x, y)^2,$$

also ein quadratischer Factor der kubischen Covariante. Bildet man noch die beiden übrigen Factoren, so sieht man leicht, dass irgend einer von ihnen die Jacobi'sche Function der beiden andern ist.

Wenn ein paar Wurzeln einander gleich sind, so ist

$$f = a(x - x_1 y)^2 (x - x_3 y)(x - x_4 y),$$

$$J_{4,2} = \frac{a^2}{12}(x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2,$$

$$J_{4,3} = -\frac{a^3}{216}(x_1 - x_3)^3 (x_1 - x_4)^3,$$

$$\overline{D}_4 = 0,$$

$$C_{4,4} = -\frac{a^2}{48}[2(x_1 - x_3)^2 (x - x_4 y)^2 + 2(x_1 - x_4)^2 (x - x_3 y)^2 + (x_3 - x_4)^2 (x - x_1 y)^2](x - x_1 y)^2,$$

$$C_{4,6} = -\frac{a^3}{32}(x_3 - x_4)^2 [2x_1 - x_3 - x_4, \ -x_1^2 + x_3 x_4, \ x_1^2 (x_3 + x_4) - 2x_1 x_3 x_4] \overset{\frown}{(x, y)^2} (x - x_1 y)^4.$$

Wenn die Gleichung zwei Paare gleicher Wurzeln hat, so wird

$$f = a(x - x_1 y)^2 (x - x_3 y)^2,$$

$$J_{4,2} = \frac{a^2}{12}(x_1 - x_3)^4,$$

$$J_{4,3} = -\frac{a^3}{216}(x_1 - x_3)^6,$$

$$\overline{D}_4 = 0,$$

$$C_{4,4} = -\frac{a}{12}(x_1 - x_3)^2 (x - x_1 y)^2 (x - x_3 y)^2,$$

$$C_{4,6} = 0.$$

Diese Werthe ergeben noch die Relation

$$2 J_{4,2} C_{4,4} - 3 J_{4,3} f = 0.$$

Wenn drei Wurzeln einander gleich sind, so hat man

$$f = a(x - x_1 y)^3 (x - x_4 y),$$

$$J_{4,2} = 0, \quad J_{4,3} = 0; \quad \overline{D}_4 = 0,$$

$$C_{4,4} = -\frac{a^2}{48}(x_1 - x_4)^2 [2(x - x_4 y)^2 + (x - x_1 y)^2](x - x_1 y)^2,$$

$$C_{4,6} = \frac{a^3}{32}(x_1 - x_4)^3 (x - x_1 y)^6.$$

Sind endlich alle vier Wurzeln einander gleich, so hat man

$$f = a(x - x_1 y)^4,$$

$$J_{4,2} = 0, \quad J_{4,3} = 0, \quad \overline{D}_4 = 0,$$

$$C_{4,4} = 0, \quad C_{4,6} = 0.$$

§ 277. Methode der Auflösung einer biquadratischen Gleichung mittels einer Transformation dritter Ordnung nach Hermite*).

Die folgende Methode beruht theilweise auf der Bemerkung, dass die Summe der quadratischen Factoren der kubischen Covariante eine gewisse kubische Function der Unbekannten x der vorgelegten Gleichung

$$(a, b, c, d, e)\widehat{\ }(x, 1)^4 = 0$$

ergibt. Nach § 217, 7 sind nämlich die drei Factoren von $32a^{-3}C_{4,6}$:

$$4\,\frac{\varphi}{a} = [x_1 + x_2 - x_3 - x_4,\quad - x_1x_2 + x_3x_4,$$
$$x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)]\widehat{\ }(\xi, \eta)^2;$$
$$4\,\frac{\psi}{a} = [x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\quad - x_1x_3 + x_2x_4,$$
$$x_1x_3(x_2 + x_4) - x_2x_4(x_1 + x_3)]\widehat{\ }(\xi, \eta)^2;$$
$$4\,\frac{\chi}{a} = [x_1 - x_2 - x_3 + x_4,\quad - x_1x_4 + x_2x_3,$$
$$x_1x_4(x_2 + x_3) - x_2x_3\,(x_1 + x_4)]\widehat{\ }(\xi, \eta)^2.$$

Bezeichnet man allgemein x_1 mit x, addirt die drei Gleichungen und dividirt beiderseits durch 4, so resultirt

$$\begin{aligned}\varphi+\psi+\chi &= \left[ax+b,\ \frac{1}{2}(ax^2+4bx+3c),\ -\left(d+\frac{e}{x}\right)\right]\widehat{\ }\left(\xi, \eta\right)^2\\ &= (ax+b)\xi^2+(ax^2+4bx+3c)\xi\eta+(ax^3+4bx^2+6cx+3d)\eta^2\\ &= \frac{(ax+b)\xi^3+3(bx+c)\xi^2\eta+3(cx+d)\xi\eta^2+(dx+e)\eta^3}{\xi-x\eta}.\end{aligned}$$

Wenn demnach die kubische Covariante $C_{4,6}(\xi, \eta)$ verschwindet, so ist in diesen Formeln die bekannte Auflösung der biquadratischen Gleichungen enthalten. Man kann sich aber die Aufgabe gestellt denken, dass mittels der Anwendung der Transformation von Tschirnhausen und Substitution der allgemeinen kubischen Function

*) Man vergleiche Hermite, Comptes rendus. XLVI. p. 961. 1858; Cayley, Crelle's Journal. LVIII. S. 259 u. 263. 1861; Phil. Trans. p. 561. 1862 und p. 97. 1866; Salmon, Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von Fiedler. § 249; sowie oben § 275 (32).

drat sein müsse. Dass die lineare Quadratwurzel dieses Quadrats ein Factor von f sein muss, geht schon daraus hervor, dass beide gleichzeitig verschwinden. Man gehe aus von der kanonischen Form, welche sich immer auf die einfachste Gestalt

$$f = x^4 + 6cx^2y^2 + y^4 = 0$$

bringen lässt. Um dies auf eine specielle Art zu zeigen, so sei die Form

$$(a, b, c, d, e \widehat{)\,(} x, y)^4$$

auf die neue Form

$$u^4 + u_1^4 + 6\lambda_1 u^2 u_1^2$$

zu reduciren. Dass diese einfache Form hinreichend allgemein ist, lässt sich durch einfache Zählung der Constanten erkennen. Die letztere Form ist nämlich äquivalent mit

$$(\alpha x + \beta y)^4 + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^4 + 6\lambda_1(\alpha x + \beta y)^2(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2,$$

welche Form gleichfalls fünf Constanten enthält. Um die Constante λ_1 der kanonischen Form zu bestimmen, nehmen wir an, es sei

$$(\alpha x + \beta y)(\alpha_1 x + \beta_1 y) = \left(A_0, \frac{1}{2} A_1, A_2\right)\widehat{\,}\left(x, y\right)^2,$$

also

$$A_0 = \alpha\alpha_1, \quad A_1 = \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta, \quad A_2 = \beta\beta_1.$$

Entwickeln wir die kanonische Form nach Potenzen von x und y und setzen die homologen Coefficienten der Identität

$$(a, b, c, d, e \widehat{)\,(} x, y)^4 = u^4 + u_1^4 + 6\lambda_1 u^2 u_1^2$$

einander gleich, so findet man, dass folgende Gleichungen gelten, in welchen die Glieder von u^4 und u_1^4 identisch verschwinden:

$$\begin{aligned}
A_0 c - A_1 b + A_2 a &= -2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_0,\\
A_0 d - A_1 c + A_2 b &= -\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_1,\\
A_0 e - A_1 d + A_2 c &= -2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_2.
\end{aligned}$$

Substituiren wir der Kürze wegen

$$-2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 = -2\lambda,$$

so geht dies System über in

$$\begin{aligned}
A_0(c + 2\lambda) - A_1 b + A_2 a &= 0,\\
A_0 d - A_1(c - \lambda) + A_2 b &= 0,\\
A_0 e - A_1 d + A_2(c + 2\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Durch Elimination der Grössen A_0, A_1, A_2 erhalten wir zur Bestimmung der Constanten λ die Determinante von **Aronhold**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & (c+2\lambda) \\ b, & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda), & d, & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0.$$

Demgemäss ist die reducirte Form

$$u^4 + u_1^4 + 6(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 \lambda u^2 u_1^2.$$

Die Resolvente $\Delta = 0$ wird nun

$$-4\lambda^3 + (1+3c^2)\lambda - c + c^3 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$\lambda_1 = c, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(c+1), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(c-1),$$

und die drei correspondirenden Werthe von $C_{4,4} - \lambda_1 f$:

$$(1-9c^2)x^2y^2, \quad \frac{1}{2}(3c+1)(x^2+y^2)^2, \quad \frac{1}{2}(3c-1)(x^2-y^2)^2.$$

Damit nun eine Grösse von der Form

$$\alpha xy + \beta(x^2+y^2) + \gamma(x^2-y^2)$$

ein vollständiges Quadrat sei, ist erforderlich, dass man hat

$$\alpha^2 = 4(\beta^2 - \gamma^2),$$

eine Bedingung, welche hier erfüllt ist, da sich findet

$$\alpha^2 = 1 - 9c^2, \quad \beta^2 = \frac{1}{8}(3c-1)^2(3c+1), \quad \gamma^2 = \frac{1}{8}(3c+1)^2(3c-1).$$

Zahlenbeispiel. Wenden wir die Methode auf das vorhergehende Zahlenbeispiel an, so sind die beiden übrigen Werthe von λ:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 + 9\sqrt{-3}), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(-3 - 9\sqrt{-3}),$$

und die Quadrate der linearen Factoren des Biquadrats:

$$-2\sqrt{3}(x^2 - 2xy - 8y^2)$$
$$\pm\frac{1}{2}[1-\sqrt{-3}][(1+\sqrt{-3})x^2 + (10-2\sqrt{-3})xy - (2-10\sqrt{-3})y^2]$$
$$\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})[(1-\sqrt{-3})x^2 + (10+2\sqrt{-3})xy - (2+10\sqrt{-3})y^2].$$

Es ist nun weiter zu untersuchen, in welchem Falle die Reduction auf die kanonische Form durch eine reelle oder eine complexe Substitution erzielt wird. Die Discriminante der kanonischen Form ist

$$ae(ae - 9c^2)^2,$$

drat sein müsse. Dass die lineare Quadratwurzel dieses Quadrats ein Factor von f sein muss, geht schon daraus hervor, dass beide gleichzeitig verschwinden. Man gehe aus von der kanonischen Form, welche sich immer auf die einfachste Gestalt

$$f = x^4 + 6cx^2y^2 + y^4 = 0$$

bringen lässt. Um dies auf eine specielle Art zu zeigen, so sei die Form

$$(a, b, c, d, e\widehat{)(}x, y)^4$$

auf die neue Form

$$u^4 + u_1{}^4 + 6\lambda_1 u^2 u_1{}^2$$

zu reduciren. Dass diese einfache Form hinreichend allgemein ist, lässt sich durch einfache Zählung der Constanten erkennen. Die letztere Form ist nämlich äquivalent mit

$$(\alpha x + \beta y)^4 + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^4 + 6\lambda_1(\alpha x + \beta y)^2(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2,$$

welche Form gleichfalls fünf Constanten enthält. Um die Constante λ_1 der kanonischen Form zu bestimmen, nehmen wir an, es sei

$$(\alpha x + \beta y)(\alpha_1 x + \beta_1 y) = \left(A_0, \tfrac{1}{2} A_1, A_2\right)\widehat{}\left(x, y\right)^2,$$

also

$$A_0 = \alpha\alpha_1, \quad A_1 = \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta, \quad A_2 = \beta\beta_1.$$

Entwickeln wir die kanonische Form nach Potenzen von x und y und setzen die homologen Coefficienten der Identität

$$(a, b, c, d, e\widehat{)(}x, y)^4 = u^4 + u_1{}^4 + 6\lambda_1 u^2 u_1{}^2$$

einander gleich, so findet man, dass folgende Gleichungen gelten, in welchen die Glieder von u^4 und $u_1{}^4$ identisch verschwinden:

$$\begin{aligned}
A_0 c - A_1 b + A_2 a &= -2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_0,\\
A_0 d - A_1 c + A_2 b &= -\ \ \lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_1,\\
A_0 e - A_1 d + A_2 c &= -2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_2.
\end{aligned}$$

Substituiren wir der Kürze wegen

$$-2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 = -2\lambda,$$

so geht dies System über in

$$\begin{aligned}
A_0(c + 2\lambda) - A_1 b + A_2 a &= 0,\\
A_0 d - A_1(c - \ \lambda) + A_2 b &= 0,\\
A_0 e - A_1 d + A_2(c + 2\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Durch Elimination der Grössen A_0, A_1, A_2 erhalten wir zur Bestimmung der Constanten λ die Determinante von Aronhold:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & b, & (c+2\lambda) \\ b, & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda), & d, & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0.$$

Demgemäss ist die reducirte Form

$$u^4 + u_1^4 + 6(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 \lambda u^2 u_1^2.$$

Die Resolvente $\varDelta = 0$ wird nun

$$-4\lambda^3 + (1+3c^2)\lambda - c + c^3 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$\lambda_1 = c, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(c+1), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(c-1),$$

und die drei correspondirenden Werthe von $C_{4,4} - \lambda_1 f$:

$$(1-9c^2)x^2y^2, \quad \frac{1}{2}(3c+1)(x^2+y^2)^2, \quad \frac{1}{2}(3c-1)(x^2-y^2)^2.$$

Damit nun eine Grösse von der Form

$$\alpha xy + \beta(x^2+y^2) + \gamma(x^2-y^2)$$

ein vollständiges Quadrat sei, ist erforderlich, dass man hat

$$\alpha^2 = 4(\beta^2 - \gamma^2),$$

eine Bedingung, welche hier erfüllt ist, da sich findet

$$\alpha^2 = 1 - 9c^2, \quad \beta^2 = \frac{1}{8}(3c-1)^2(3c+1), \quad \gamma^2 = \frac{1}{8}(3c+1)^2(3c-1).$$

Zahlenbeispiel. Wenden wir die Methode auf das vorhergehende Zahlenbeispiel an, so sind die beiden übrigen Werthe von λ:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3+9\sqrt{-3}), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(-3-9\sqrt{-3}),$$

und die Quadrate der linearen Factoren des Biquadrats:

$$-2\sqrt{3}\,(x^2 - 2xy - 8y^2)$$
$$\pm\frac{1}{2}[1-\sqrt{-3}][(1+\sqrt{-3})x^2 + (10-2\sqrt{-3})xy - (2-10\sqrt{-3})y^2]$$
$$\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})[(1-\sqrt{-3})x^2 + (10+2\sqrt{-3})xy - (2+10\sqrt{-3})y^2].$$

Es ist nun weiter zu untersuchen, in welchem Falle die Reduction auf die kanonische Form durch eine reelle oder eine complexe Substitution erzielt wird. Die Discriminante der kanonischen Form ist

$$ae(ae - 9c^2)^2,$$

drat sein müsse. Dass die lineare Quadratwurzel dieses Quadrats ein Factor von f sein muss, geht schon daraus hervor, dass beide gleichzeitig verschwinden. Man gehe aus von der kanonischen Form, welche sich immer auf die einfachste Gestalt

$$f = x^4 + 6cx^2y^2 + y^4 = 0$$

bringen lässt. Um dies auf eine specielle Art zu zeigen, so sei die Form

$$(a, b, c, d, e)\widehat{\;}(x, y)^4$$

auf die neue Form

$$u^4 + u_1{}^4 + 6\lambda_1 u^2 u_1{}^2$$

zu reduciren. Dass diese einfache Form hinreichend allgemein ist, lässt sich durch einfache Zählung der Constanten erkennen. Die letztere Form ist nämlich äquivalent mit

$$(\alpha x + \beta y)^4 + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^4 + 6\lambda_1(\alpha x + \beta y)^2(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2,$$

welche Form gleichfalls fünf Constanten enthält. Um die Constante λ_1 der kanonischen Form zu bestimmen, nehmen wir an, es sei

$$(\alpha x + \beta y)(\alpha_1 x + \beta_1 y) = \left(A_0, \tfrac{1}{2} A_1, A_2\right)\widehat{\;}\left(x, y\right)^2,$$

also

$$A_0 = \alpha\alpha_1, \quad A_1 = \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta, \quad A_2 = \beta\beta_1.$$

Entwickeln wir die kanonische Form nach Potenzen von x und y und setzen die homologen Coefficienten der Identität

$$(a, b, c, d, e)\widehat{\;}(x, y)^4 = u^4 + u_1{}^4 + 6\lambda_1 u^2 u_1{}^2$$

einander gleich, so findet man, dass folgende Gleichungen gelten, in welchen die Glieder von u^4 und $u_1{}^4$ identisch verschwinden:

$$\begin{aligned}
A_0 c - A_1 b + A_2 a &= -2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_0, \\
A_0 d - A_1 c + A_2 b &= -\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_1, \\
A_0 e - A_1 d + A_2 c &= -2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 A_2.
\end{aligned}$$

Substituiren wir der Kürze wegen

$$-2\lambda_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 = -2\lambda,$$

so geht dies System über in

$$\begin{aligned}
A_0(c + 2\lambda) - A_1 b + A_2 a &= 0, \\
A_0 d - A_1(c - \lambda) + A_2 b &= 0, \\
A_0 e - A_1 d + A_2(c + 2\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Durch Elimination der Grössen A_0, A_1, A_2 erhalten wir zur Bestimmung der Constanten λ die Determinante von Aronhold:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & b, & (c+2\lambda) \\ b, & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda), & d, & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0.$$

Demgemäss ist die reducirte Form

$$u^4 + u_1^4 + 6(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2\lambda u^2 u_1^2.$$

Die Resolvente $\varDelta = 0$ wird nun

$$-4\lambda^3 + (1+3c^2)\lambda - c + c^3 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$\lambda_1 = c, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(c+1), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(c-1),$$

und die drei correspondirenden Werthe von $C_{4,4} - \lambda_1 f$:

$$(1-9c^2)x^2y^2, \quad \frac{1}{2}(3c+1)(x^2+y^2)^2, \quad \frac{1}{2}(3c-1)(x^2-y^2)^2.$$

Damit nun eine Grösse von der Form

$$\alpha xy + \beta(x^2+y^2) + \gamma(x^2-y^2)$$

ein vollständiges Quadrat sei, ist erforderlich, dass man hat

$$\alpha^2 = 4(\beta^2 - \gamma^2),$$

eine Bedingung, welche hier erfüllt ist, da sich findet

$$\alpha^2 = 1 - 9c^2, \quad \beta^2 = \frac{1}{8}(3c-1)^2(3c+1), \quad \gamma^2 = \frac{1}{8}(3c+1)^2(3c-1).$$

Zahlenbeispiel. Wenden wir die Methode auf das vorhergehende Zahlenbeispiel an, so sind die beiden übrigen Werthe von λ:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3+9\sqrt{-3}), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(-3-9\sqrt{-3}),$$

und die Quadrate der linearen Factoren des Biquadrats:

$$-2\sqrt{3}\,(x^2 - 2xy - 8y^2)$$
$$\pm\frac{1}{2}[1-\sqrt{-3}][(1+\sqrt{-3})x^2 + (10-2\sqrt{-3})xy - (2-10\sqrt{-3})y^2]$$
$$\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})[(1-\sqrt{-3})x^2 + (10+2\sqrt{-3})xy - (2+10\sqrt{-3})y^2].$$

Es ist nun weiter zu untersuchen, in welchem Falle die Reduction auf die kanonische Form durch eine reelle oder eine complexe Substitution erzielt wird. Die Discriminante der kanonischen Form ist

$$ae(ae - 9c^2)^2,$$

und weil ihr Vorzeichen nicht wechselt bei einer linearen Transformation, so erkennt man, dass, wenn dasselbe positiv ist, auch die Coefficienten a und e der kanonischen Form gleiche Vorzeichen haben müssen, und wenn dasselbe negativ ist, verschiedene Vorzeichen. In dem ersten Falle zerfällt die Form

$$f = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$$

offenbar in zwei Factoren der Form

$$(x^2 + \alpha y^2)(x^2 + \beta y^2),$$

oder

$$(x^2 - \alpha y^2)(x^2 - \beta y^2),$$

d. h. die Wurzeln sind entweder alle complex oder alle reell. Haben a und e entgegengesetzte Vorzeichen, so sind die Factoren von der Form

$$(x^2 + \alpha y^2)(x^2 - \beta y^2)$$

und die biquadratische Gleichung hat zwei reelle und zwei complexe Wurzeln. Also wenn die Discriminante

$$\overline{D}_4 = J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2$$

negativ ist, sind zwei Wurzeln der Gleichung reell und zwei complex; ist sie positiv, so sind die vier Wurzeln sämmtlich entweder reell oder complex. Nun aber ist die Discriminante der Gleichung

$$-4c^3 + J_{4,2}c - J_{4,3} = 0$$

gleich $-\overline{D}_4$ und folglich, wenn $J_{4,2}^3$ kleiner als $27J_{4,3}^2$ ist, hat diese Gleichung eine reelle, zwei complexe Wurzeln. Die Transformation lässt sich in diesem Falle nur auf eine reelle Art bewerkstelligen, d. h. dann, wenn die biquadratische Gleichung zwei reelle und zwei complexe Wurzeln hat. Wenn a und e von gleichem Vorzeichen sind, man also durch die Substitutionen x^2 für $x^2\sqrt{a}$, y^2 für $y^2\sqrt{e}$ die kanonische Form

$$x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$$

herstellen kann, so sieht man leicht, dass man zu dieser durch zwei andere lineare Substitutionen gelangen kann. In der That, setzt man $x + y$ an die Stelle von x, $x - y$ für y, so resultirt

$$(1 + 3m)x^4 + 6(1 - m)x^2y^2 + (1 + 3m)y^4,$$

und setzt man $x + y\sqrt{-1}$ für x, $x - y\sqrt{-1}$ für y, so erhält man

$$(1 + 3m)x^4 + 6(m - 1)x^2y^2 + (1 - 3m)y^4.$$

Wenn also das Biquadrat vier reelle oder vier complexe Wurzeln hat, obgleich man drei reelle Werthe für c findet, so entspricht doch der eine zwei complexen Werthen von x und y und es gibt nur zwei reelle Substitutionen. Die bikubische Covariante $C_{4,6}$ der kanonischen Form $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$ ist

$$(1 - 9m^2)xy(x^4 - y^4).$$

Da $C_{4,4}$ eine Covariante von f ist, so schliesst man daraus, dass, wenn α und β irgend zwei Constanten sind, $\alpha f + 6\beta C_{4,4}$ eine Covariante von f ist, deren Invarianten ebenfalls Invarianten von f sind. Die Werthe derselben sind bereits in § 276 entwickelt. Man hat

$$\begin{aligned}
&\overline{J}_{4,2}(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = J_{4,2}\alpha^2 + 18 J_{4,3}\alpha\beta + 3J_{4,2}^2\beta^2,\\
&\overline{J}_{4,3}(\alpha f + 6\beta C_{4,4})\\
&\quad = J_{4,3}\alpha^3 + J_{4,2}^2\,\alpha^2\beta + 9J_{4,2}J_{4,3}\alpha\beta^2 + (54J_{4,3}^2 - J_{4,2}^3)\beta^3,\\
&\overline{D}_4(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = \overline{D}_4(\alpha^3 - 9J_{4,2}\alpha\beta^2 - 54J_{4,3}\beta^3)^2.
\end{aligned}$$

Die letzte Function ist ein vollständiges Quadrat, weil statt der sechs Fälle, in welchen die zusammengesetzte Function einen quadratischen Factor zulässt, wir jetzt drei Fälle haben, in welchen sie zwei quadratische Factoren zulässt.

Hermite hat die Bemerkung gemacht, dass die Function

$$G = \alpha^3 - 9J_{4,2}\alpha\beta^2 - 54J_{4,3}\beta^3$$

zur quadratischen und kubischen Covariante die Werthe $\overline{J}_{4,2}$ und $\overline{J}_{4,3}$ hat. Die Discriminante von G unterscheidet sich von $\overline{D}_4$ nur durch einen numerischen Factor.

Die Covarianten der zusammengesetzten Function $\alpha f + 6\beta C_{4,4}$ sind auch Covarianten von f. Die biquadratische i

$$\overline{C}_{4,4}(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) = (J_{4,2}\alpha\beta + 9J_{4,3}\beta^2)f + (\alpha^2 - 3J_{4,2}\beta^2)C_{4,4};$$

und die bikubische

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{4,6}(\alpha f + 6\beta C_{4,4}) &= (\alpha^3 - 9J_{4,2}\alpha\beta^2 - 54J_{4,3}\beta^3)C_{4,6}\\
&= G\,.\,C_{4,6}.
\end{aligned}$$

Die quadratische Covariante von $C_{4,6}$ ist

$$J_{4,2}^2f^2 - 36J_{4,3}fC_{4,4} + 12J_{4,2}C_{4,4}^2,$$

also die Resultante von $\alpha f + 6\beta C_{4,4}$ und der quadratischen Covariante von G. Cayley hat sie unter der Form

$$\left(J_{4,2}f - \frac{18 J_{4,3} C_{4,4}}{J_{4,2}}\right)^2 + \frac{12}{J_{4,2}^2} \overline{D}_4 \,.\, C_{4,4}^2$$

dargestellt, welche zeigt, dass sie ein vollständiges Quadrat wird, wenn die Discriminante verschwindet.

§ 279. Methode der Transformation einer Quartic in eine andere, deren Wurzeln einander harmonisch zugeordnet sind*).

Aus den bis jetzt entwickelten Methoden geht hervor, dass sich durch Auflösung einer kubischen Gleichung immer Werthepaare finden lassen, welche einem Wurzelpaar der Quartic

$$f = (a, b, c, d, e)\widehat{}(x, 1)^4 = 0$$

harmonisch zugeordnet sind. Es liegt nun sehr nahe, zu versuchen, ob sich nicht die Wurzel x der vorgelegten Gleichung $f = 0$ durch irgend eine Substitution derartig transformiren lässt, dass die vier Wurzeln der neuen Gleichung einander selbst harmonisch zugeordnet werden. Bezeichnen wir die variirten Wurzeln mit x_1', x_2', x_3', x_4', so muss also folgendes System von Gleichungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned}
-2x_1'x_2' + (x_1' + x_2')(x_3' + x_4') - 2x_3'x_4' &= 0,\\
-2x_1'x_3' + (x_1' + x_3')(x_2' + x_4') - 2x_2'x_4' &= 0,\\
-2x_1'x_4' + (x_1' + x_4')(x_2' + x_3') - 2x_2'x_3' &= 0.
\end{aligned}$$

Es gehe nun für diesen Fall die $\varDelta$-Determinante über in

$$\varDelta' = -4\lambda'^3 + J'_{4,2}\lambda' - J'_{4,3} = 0;$$

alsdann wird

$$\begin{aligned}
-2(x_1'x_2' + x_3'x_4') &= -\frac{4}{a}(c' + 2\lambda_1'),\\
(x_1' + x_2')(x_3' + x_4') &= \frac{4}{a}(c' - \lambda_1'),
\end{aligned}$$

folglich

$$-2x_1'x_2' + (x_1' + x_2')(x_3' + x_4') - 2x_3'x_4' = -\frac{12}{a'}\lambda_1',$$

und analog

$$-2x_1'x_3' + (x_1' + x_3')(x_2' + x_4') - 2x_2'x_4' = -\frac{12}{a'}\lambda_2',$$

$$-2x_1'x_4' + (x_1' + x_4')(x_2' + x_3') - 2x_2'x_3' = -\frac{12}{a'}\lambda_3'.$$

---

*) Man vergleiche oben § 217, 3. g) und 4. (31).

Der Werth des Products dieser drei Gleichungen ist

$$-\frac{1728}{a'^3}\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3' = 432 J'_{4,3}\,.$$

Daraus folgt, dass, wenn die vier Wurzeln der neuen Quartic einander harmonisch zugeordnet sein sollen, die kubische Invariante derselben verschwinden muss. Es soll gezeigt werden, durch welche Transformation sich dies bewerkstelligen lässt.

Wenn man irgend einen Factor von $J_{4,3}$ z. B.

$$\begin{aligned} &-2x_1x_2 + (x_1+x_2)(x_3+x_4) - 2x_3x_4 \\ &= (x_2-x_3)(x_4-x_1) + (x_1-x_3)(x_4-x_2) \end{aligned}$$

durch z variirt, so verschwindet z aus demselben gänzlich. Um also die kubische Invariante der Transformirten zum Verschwinden zu bringen, genügt nicht eine lineare Variation der Wurzeln, wol aber eine quadratische, indem man substituirt

$$x^2 - 2zx + z^2 - x' = 0\,.$$

Wird $(x-z)^2$ an die Stelle von x gesetzt, so verschwindet in der That $J'_{4,3}$ durch die Annahme

$$\begin{aligned} 0 = &(x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_1+x_3-2z)(x_2+x_4-2z) \\ &+ (x_2-x_3)(x_1-x_4)(x_2+x_3-2z)(x_1+x_4-2z)\,. \end{aligned}$$

Dieser Factor ist quadratisch und da die Function $J'_{4,3}$ drei solche besitzt, so ist die Resolvente vom sechsten Grade. Man erhält dieselbe exact in Ausdrücken der Coefficienten $a, b, c, d, e,$ indem man die Gleichung

$$J'_{4,3} = \alpha_1\gamma_1\varepsilon_1 + 2\beta_1\gamma_1\delta_1 - \alpha_1\delta_1^{\,2} - \beta_1^{\,2}\varepsilon_1 - \gamma_1^{\,3} = 0$$

nach Potenzen der Variation z entwickelt. Die Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ sind die Coefficienten der Glieder der Quartic

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1 \widehat{)\,(} x_1', 1)^4 = 0\,,$$

nämlich der Gleichung der Wurzelquadrate der Variirten

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \widehat{)\,(} \sqrt{x'}, 1)^4 = 0\,.$$

Es ist dabei zu setzen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a^2\,, \\ -\beta_1 &= a^2z^2 + 2abz + 4b^2 - 3ac, \\ \gamma_1 &= a^2z^4 + 4abz^3 + 2(4b^2-ac)z^2 + 4(2bc-ad)z \\ &\quad + \tfrac{1}{3}(18c^2 - 16bd + ae)\,, \end{aligned}$$

$$-\delta_1 = a^2 z^6 + 6abz^5 + 3(4b^2 + ac)z^4 + 4(6bc - ad)z^3$$
$$+ 3(6c^2 - ae)z^2 + 6(2cd - be)z + 4d^2 - 3ce,$$
$$\varepsilon_1 = (az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e)^2.$$

Da $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ in Bezug auf z resp. vom 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten} und 8^{ten} Grade sind, so ist die gesuchte Resolvente anscheinend vom zwölften Grade. Es verschwinden jedoch die ersten sechs Glieder, so dass sie sich auf eine bikubische Gleichung reducirt. Leichter kommt man zum Ziele, wenn man auf das Product der drei quadratischen Factoren die Sätze von den symmetrischen Functionen anwendet. Um dies zu bewerkstelligen, entwickele man die variirte Function $J'_{4,3}$ nach Potenzen von z. Setzt man der Kürze wegen

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) = - m_1 = 12\lambda_1,$$
$$(x_3 - x_2)(x_1 - x_4) + (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = - m_2 = 12\lambda_2,$$
$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_4) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) = - m_3 = 12\lambda_3,$$

und

$$(x_1{}^2 - x_3{}^2)(x_2{}^2 - x_4{}^2) + (x_2{}^2 - x_3{}^2)(x_1{}^2 - x_4{}^2) = - n_1 = 12\lambda_1'',$$
$$(x_3{}^2 - x_2{}^2)(x_1{}^2 - x_4{}^2) + (x_1{}^2 - x_2{}^2)(x_3{}^2 - x_4{}^2) = - n_2 = 12\lambda_2'',$$
$$(x_3{}^2 - x_1{}^2)(x_3{}^2 - x_4{}^2) + (x_3{}^2 - x_1{}^2)(x_2{}^2 - x_4{}^2) = - n_3 = 12\lambda_3'',$$

so sind dies die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$-4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0,$$
$$-4\lambda''^3 + J''_{4,2}\lambda'' - J''_{4,3} = 0.$$

Die bikubische Resolvente, durch welche die Invariante $J'_{4,3}$ der transformirten Gleichung zum Verschwinden gebracht werden kann ist demnach

$$4^3 P(az^2 + 2bz)^3 + 4^2 a Q(az^2 + 2bz)^2 + 4a^2 R(az^2 + 2bz) + a^3 S = 0$$

worin

$$P = 432\, J_{4,3},$$
$$Q = \frac{2}{a}\,(6c\,.\,432 J_{4,3} - 144 J_{4,2}^2),$$
$$R = \frac{1}{3a^2}(4\,.\,36\,.\,c^2\,.\,432 J_{4,3} - 48\,.\,c\,.\,144 J_{4,2}^2 + 12 J_{4,2}\,.\,432 J_{4,3})$$
$$S = 432\, J''_{4,3} = \frac{1}{27a^3}(8\,.\,6^3\,.\,c^3\,.\,432\, J_{4,3} - 24\,.\,6^2\,.\,c^2\,.\,144 J_{4,2}^2$$
$$+ 36\,.\,c\,.\,12 J_{4,2}\,.\,432 J_{4,3} + 2\,.\,1728 J_{4,2}^3 - 432^2 J_{4,3}^2).$$

Der Ausdruck $J''_{4,3}$ ist die kubische Invariante der Gleichung der Wurzelquadrate von $f(x) = 0$. Setzt man $az^2 + 2bz = y$, so wird die Resolvente vom dritten Grade, und es folgt daraus das wichtige

Theorem, dass sich jede vollständige biquadratische Gleichung so transformiren lässt, dass die kubische Invariante $J'_{4,3}$ der Transformirten verschwindet. Die Resolvente

$$\Delta' = -4\lambda'^3 + J'_{4,2}\lambda' - J'_{4,3} = 0$$

wird dadurch auf die einfachere Form

$$-\lambda'(4\lambda'^2 - J'_{4,2}) = 0$$

reducirt. Die bikubische Gleichung wird bedeutend einfacher, wenn man sie auf die Form

$$4^3 P(az^2 + 2bz + c)^3 + 4^2(aQ - 12cP)(az^2 + 2bz + c)^2$$
$$+ 4(a^2R - 8acQ + 48c^2P)(az^2 + 2bz + c) + (a^3S - 4a^2cR - 64c^3P) = 0$$

bringt. Setzt man die Werthe aus P, Q, R, S ein, so resultirt

$$4^3 . 432 J_{4,3}(az^2 + 2bz + c)^3 - 2 . 4^2 . 144 J_{4,2}^2 (az^2 + 2bz + c)^2$$
$$+ 4^2 . 432 . J_{4,2} . J_{4,3}(az^2 + 2bz + c) + 128 J_{4,2}^3 - 8 . 864 J_{4,3}^2 = 0,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$az^2 + 2bz + c = \eta$$

setzt, so geht sie über in

$$4^3[432 J_{4,3}\eta^3 - 72 J_{4,2}^2 \eta^2 + 108 J_{4,2} . J_{4,3}\eta + 2 J_{4,2}^3 - 108 J_{4,3}^2] = 0.$$

Sie nimmt damit die Form der kubischen Covariante an von der Form

$$\Delta_\eta = -4\eta^3 + J_{4,2}\eta - J_{4,3},$$

indem der Ausdruck in der Klammer gleich $-27 C_{3,3}(\eta)$ ist. Nach Cayley ist derselbe eingeklammerte Ausdruck auch gleich der kubischen Invariante der zusammengesetzten Form $(\eta f - C_{4,4})$; es ist nämlich

$$432\, \bar{J}_{4,3}(\eta f - C_{4,4})$$

$$= (432 J_{4,3}, \quad -24 J_{4,2}^2, \quad 36 J_{4,2} J_{4,3}, \quad 2 J_{4,2}^3 - 108 J_{4,3}^2 \widehat{)\,(}\eta, 1)^3.$$

Was die zusammengesetzte Form $\eta f - C_{4,4}$ betrifft, so findet man leicht durch ihre Zerlegung, dass

$$\eta f - C_{4,4} = \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial e}\right) x^4 - \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial d}\right) x^3 + \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial c}\right) x^2 - \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial b}\right) x + \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial a}\right).$$

Betrachtet man die vorgelegte Quartic

$$y = f(x) = (a, b, c, d, e \widehat{)\,(} x, 1)^4$$

als die Gleichung einer Curve, welche bei lauter reellen Wurzeln die Abscissenaxe in vier Puncten schneidet, so lässt sich auch eine

$$-\delta_1 = a^2z^6 + 6abz^5 + 3(4b^2+ac)z^4 + 4(6bc-ad)z^3 + 3(6c^2-ae)z^2 + 6(2cd-be)z + 4d^2 - 3ce\,,$$
$$\varepsilon_1 = (az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e)^2\,.$$

Da $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ in Bezug auf z resp. vom 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten} und 8^{ten} Grade sind, so ist die gesuchte Resolvente anscheinend vom zwölften Grade. Es verschwinden jedoch die ersten sechs Glieder, so dass sie sich auf eine bikubische Gleichung reducirt. Leichter kommt man zum Ziele, wenn man auf das Product der drei quadratischen Factoren die Sätze von den symmetrischen Functionen anwendet. Um dies zu bewerkstelligen, entwickele man die variirte Function $J'_{4,3}$ nach Potenzen von z. Setzt man der Kürze wegen

$$(x_1-x_3)(x_2-x_4) + (x_2-x_3)(x_1-x_4) = -m_1 = 12\lambda_1\,,$$
$$(x_3-x_2)(x_1-x_4) + (x_1-x_2)(x_3-x_4) = -m_2 = 12\lambda_2\,,$$
$$(x_2-x_1)(x_3-x_4) + (x_3-x_1)(x_2-x_4) = -m_3 = 12\lambda_3\,,$$

und

$$(x_1^2-x_3^2)(x_2^2-x_4^2) + (x_2^2-x_3^2)(x_1^2-x_4^2) = -n_1 = 12\lambda_1''\,,$$
$$(x_3^2-x_2^2)(x_1^2-x_4^2) + (x_1^2-x_2^2)(x_3^2-x_4^2) = -n_2 = 12\lambda_2''\,,$$
$$(x_3^2-x_1^2)(x_3^2-x_4^2) + (x_3^2-x_1^2)(x_2^2-x_4^2) = -n_3 = 12\lambda_3''\,,$$

so sind dies die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$-4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0\,,$$
$$-4\lambda''^3 + J''_{4,2}\lambda'' - J''_{4,3} = 0\,.$$

Die bikubische Resolvente, durch welche die Invariante $J'_{4,3}$ der transformirten Gleichung zum Verschwinden gebracht werden kann, ist demnach

$$4^3P(az^2+2bz)^3 + 4^2aQ(az^2+2bz)^2 + 4a^2R(az^2+2bz) + a^3S = 0,$$

worin

$$P = 432\,J_{4,3}\,,$$
$$Q = \frac{2}{a}\,(6c\,.\,432J_{4,3} - 144J_{4,2}^2)\,,$$
$$R = \frac{1}{3a^2}(4\,.\,36\,.\,c^2\,.\,432J_{4,3} - 48\,.\,c\,.\,144J_{4,2}^2 + 12J_{4,2}\,.\,432J_{4,3}),$$
$$S = 432\,J''_{4,3} = \frac{1}{27a^3}(8\,.\,6^3\,.\,c^3\,.\,432\,J_{4,3} - 24\,.\,6^2\,.\,c^2\,.\,144J_{4,2}^2 + 36\,.\,c\,.\,12J_{4,2}\,.\,432J_{4,3} + 2\,.\,1728J_{4,2}^3 - 432^2J_{4,3}^2)\,.$$

Der Ausdruck $J''_{4,3}$ ist die kubische Invariante der Gleichung der Wurzelquadrate von $f(x)=0$. Setzt man $az^2+2bz=y$, so wird die Resolvente vom dritten Grade, und es folgt daraus das wichtige

Theorem, dass sich jede vollständige biquadratische Gleichung so transformiren lässt, dass die kubische Invariante $J'_{4,3}$ der Transformirten verschwindet. Die Resolvente

$$\Delta' = -4\lambda'^3 + J'_{4,2}\lambda' - J'_{4,3} = 0$$

wird dadurch auf die einfachere Form

$$-\lambda'(4\lambda'^2 - J'_{4,2}) = 0$$

reducirt. Die bikubische Gleichung wird bedeutend einfacher, wenn man sie auf die Form

$$4^3P(az^2 + 2bz + c)^3 + 4^2(aQ - 12cP)(az^2 + 2bz + c)^2$$
$$+ 4(a^2R - 8acQ + 48c^2P)(az^2 + 2bz + c) + (a^3S - 4a^2cR - 64c^3P) = 0$$

bringt. Setzt man die Werthe aus P, Q, R, S ein, so resultirt

$$4^3 . 432 J_{4,3}(az^2 + 2bz + c)^3 - 2 . 4^2 . 144 J_{4,2}^2(az^2 + 2bz + c)^2$$
$$+ 4^2 . 432 . J_{4,2} . J_{4,3}(az^2 + 2bz + c) + 128 J_{4,2}^3 - 8 . 864 J_{4,3}^2 = 0,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$az^2 + 2bz + c = \eta$$

setzt, so geht sie über in

$$4^3[432 J_{4,3}\eta^3 - 72 J_{4,2}^2\eta^2 + 108 J_{4,2} . J_{4,3}\eta + 2 J_{4,2}^3 - 108 J_{4,3}^2] = 0.$$

Sie nimmt damit die Form der kubischen Covariante an von der Form

$$\Delta_\eta = -4\eta^3 + J_{4,2}\eta - J_{4,3},$$

indem der Ausdruck in der Klammer gleich $-27 C_{3,3}(\eta)$ ist. Nach Cayley ist derselbe eingeklammerte Ausdruck auch gleich der kubischen Invariante der zusammengesetzten Form $(\eta f - C_{4,4})$; es ist nämlich

$$432\, \bar{J}_{4,3}(\eta f - C_{4,4})$$

$$= (432 J_{4,3}, \quad -24 J_{4,2}^2, \quad 36 J_{4,2} J_{4,3}, \quad 2 J_{4,2}^3 - 108 J_{4,3}^2 \widehat{)\, (}\eta, 1)^3.$$

Was die zusammengesetzte Form $\eta f - C_{4,4}$ betrifft, so findet man leicht durch ihre Zerlegung, dass

$$\eta f - C_{4,4} = \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial e}\right) x^4 - \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial d}\right) x^3 + \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial c}\right) x^2 - \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial b}\right) x + \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial a}\right) .$$

Betrachtet man die vorgelegte Quartic

$$y = f(x) = (a, b, c, d, e \widehat{)\, (} x, 1)^4$$

als die Gleichung einer Curve, welche bei lauter reellen Wurzeln die Abscissenaxe in vier Puncten schneidet, so lässt sich auch eine nach § 217, 3b auf eine Quadric reduciren lässt. Die transformirte Form sei

$$\alpha x'^4 + 4\beta x'^3 + 6\gamma x'^2 + 4\delta x' + \varepsilon = 0 .$$

Da x' von Null verschieden ist, so kann man diese Gleichung x'^4 dividiren, also

$$\frac{\varepsilon}{x'^4} + \frac{4\delta}{x'^3} + \frac{6\gamma}{x'^2} + \frac{4\beta}{x'} + \alpha = 0 .$$

Multiplicirt man mit ε, so lässt sie sich bringen auf die Form

$$\varepsilon f\left(\frac{1}{x'}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{x'^2} + \frac{2\delta}{x'} + \gamma\right)^2 + \frac{4}{\varepsilon}(\varepsilon\gamma - \delta^2)\left(\frac{\varepsilon}{x'^2} + \frac{2\delta}{x'} + \gamma\right)$$
$$+ \frac{4}{\varepsilon^2}(\varepsilon\gamma - \delta^2)^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}(\alpha\varepsilon^3 - 9\gamma^2\varepsilon^2 + 12\gamma\delta^2\varepsilon - 4\delta^4)$$
$$+ \frac{4}{\varepsilon}(\varepsilon^2\delta - 3\gamma\delta\varepsilon + 2\delta^3)\frac{1}{x'} = 0 .$$

Diese Form wird quadratisch, wenn man das letzte Glied oder

$$V'_{3,4} = \varepsilon^2\delta - 3\gamma\delta\varepsilon + 2\delta^3 = 0$$

setzt. Die Gleichung reducirt sich durch Wurzelausziehung auf die Quadric

$$\left(\frac{\varepsilon}{x'^2} + \frac{2\delta}{x'} + \gamma\right) + \frac{\beta\varepsilon}{\delta} = \pm\sqrt{\frac{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}{\delta^2}},$$

woraus x' gefunden wird.

§ 281. Theorem über die Irrealität der Wurzeln von Janfroid*).

Gegeben sei die Gleichung

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 .$$

Theorem. Wenn

(1) $$J_{2,2} = ac - b^2 > 0$$

und

(2) $$J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 > 0 ,$$

so sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sämmtlich complex.

Beweis. Da man immer voraussetzen kann, dass a positiv ist, so folgt aus der ersten Bedingungsgleichung

$$c > 0 \text{ d. i. positiv.}$$

---

*) Janfroid, Sur les racines d'une équation du quatrième degré. Nouv. Ann. de mathém. XXIII. p. 399. 1864.

Dies vorausgesetzt, multiplicire man alle Glieder mit a, worauf sich die Gleichung auf die Form

$$(ax^2+2bx+c)^2+4(ac-b^2)x^2+4(ad-bc)x+(ae-c^2)=0$$

bringen lässt.

Mit Berücksichtigung von (1) kann das erste Quadrat nicht verschwinden für irgend einen reellen Werth von x. Was das übrige Trinom zweiten Grades betrifft, so ist nach der Voraussetzung (1) sein erstes Glied positiv, und weiter hat man nach (2)

$$(ad-bc)^2-(ac-b^2)(ae-c^2)<0\,.$$

Dies Trinom bleibt also ebenfalls positiv für jeden reellen Werth von x. Die ganze Function $f(x)$ kann also für keinen reellen Werth von x gleich Null werden und darum ist x jedenfalls complex.

§ 282. Die Gleichung der quadrirten Differenzen und die Bedingungen der Realität der Wurzeln nach Lagrange*).

Geht man aus von der Form

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

und substituirt zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $x=y-\frac{1}{4}a$, so resultirt die Form (§ 17):

$$y^4-\left(\frac{3}{8}a^2-b\right)y^2+\left(\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c\right)y$$
$$-\left(\frac{3}{256}a^4-\frac{1}{16}a^2b+\frac{1}{4}ac-d\right)=0\,,$$

oder kurz

$$y^4+By^2+Cy+D=0\,.$$

Die Differenzengleichung ist vom sechsten Grade, also

$$z^6+\alpha z^5+\beta z^4+\gamma z^3+\delta z^2+\varepsilon z+\zeta=0\,.$$

Lagrange findet nun

$$\alpha=8B\,,$$
$$\beta=22B^2+8D\,,$$
$$\gamma=18B^3-16BD-26C^2\,,$$
$$\delta=17B^4+24B^2D-7\,.\,16D^2+3\,.\,16BC^2\,,$$
$$\varepsilon=4B^5+2\,.\,27B^2C^2+8\,.\,27C^2D-3\,.\,4^3BD^2+2\,.\,4^2B^3D\,,$$
$$\zeta=4^4D-2^3\,.\,4^2B^2D^2+4^2\,.\,3^2C^2BD+4^2B^4D-4B^3C^2-3^3C^4.$$

*) Lagrange, Traité sur la résolution des équations numériques. Art. III. Paris 1808.

Hieraus folgt:

1) wenn die Grösse ζ negativ ist, so hat die vorgelegte Gleichung zwei reelle und zwei complexe Wurzeln; 2) wenn sie positiv ist, dann hat die Gleichung entweder vier reelle oder vier complexe Wurzeln. Nun werden alle vier Wurzeln reell sein, wenn die Coefficienten $\alpha, \gamma, \varepsilon$ negativ, die übrigen β, δ, ζ positiv sind; und es werden alle vier Wurzeln complex sein, wenn ζ positiv, einige der andern Coefficienten nicht lauter Zeichenwechsel haben.

Nehmen wir an, der Coefficient ζ sei positiv, also $\zeta > 0$; alsdann findet man, dass alle übrigen Coefficienten lauter Zeichenwechsel haben, wenn man zugleich hat

$$B < 0 \text{ und } B^2 - 4D > 0,$$

und dass irgendwo eine Zeichenfolge eintritt, sobald

$$B > 0, \text{ oder } B^2 - 4D < 0$$

wird. Daher sind in dem ersten Falle alle vier Wurzeln reell, in dem zweiten complex. Setzt man die Werthe für B und D ein, so sind für den Fall von vier reellen Wurzeln der vollständigen Gleichung die beiden Bedingungen

$$\frac{3}{8} a^2 - b > 0$$

und

$$\frac{3}{16} a^4 - a^2 b + ac + b^2 - 4d > 0$$

zu erfüllen.

Wenn diese Bedingungen auf die Gleichungen der Cayley'schen Form

$$(a, b, c, d, e \widehat{)\,(} x, 1)^4 = 0,$$

übertragen werden, so erhält man

$$(1) \qquad J_{2,2} = ac - b^2 < 0,$$

$$(2) \qquad 9J_{2,2}^2 + V_4 > 0.$$

Fünfter Abschnitt.

Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Combination.

I. Das Princip der Methode und ihre Mittel.

§ 283. Von dem Princip der Combinationsmethode.

Bei den bisher betrachteten Methoden der Auflösung sind die Operationen durchweg darauf gerichtet, die gegebenen Formen so zu transformiren und zu reduciren, dass die Bestimmung der Wurzelformen von einfacheren als den vorgelegten Functionen abhängig gemacht werden. Die reducirten Formen müssen also aus einfacheren Functionen der Wurzeln bestehen, die zwar in dem Gange der Operationen nicht unmittelbar in die Augen springen, bei genauerer Erwägung jedoch in vielen Fällen leicht erkannt werden. Die Wahrnehmung dieser einfacheren Functionen der Wurzeln ist von Nutzen sowol für die Abkürzung des Ganges der Transformationen, als für die Bestimmung des Grades der in Betrachtung kommenden Hülfsfunctionen, insbesondere der Resolventen. Es liegt nun sehr nahe, solche einfachere Wurzelfunctionen a priori zum Ausgangspuncte der Operationen zu machen. Diese Functionen werden in geeigneter Weise aus den möglichen Wurzeln einer Gleichung durch Combination gebildet, eine Methode, welche zuerst von Vandermonde und Lagrange in Vorschlag und zur Anwendung gebracht worden ist (§ 78). Diese Combinationsmethode besteht demnach darin, dass man für gewisse einfache Combinationen der noch unbekannten Wurzeln x_1, x_2, x_3, u. s. w. eine oder mehrere Hülfsgrössen y, z, u. s. w. substituirt und für diese aus den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$, also aus anderen symmetrischen Wurzelfunctionen eine oder mehrere Hülfsgleichungen oder Resolventen $Y=0$, $Z=0$, u. s. w. herleitet, welche sich leichter als die Hauptgleichung auflösen lassen, also in der Regel von einem niedrigeren Grade sein müssen. Diejenigen Combinationen einiger oder aller Wurzeln x_1, x_2, x_3, u. s. w., welche sich zur Bildung von Resolventen besonders eignen, werden nach Vandermonde's Bezeichnung „Typen" genannt. Aus den mit Hülfe der Resolventen bestimmten Werthen der Typen können durch Anwendung der Methoden für die Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten schliesslich die einzelnen Wurzelwerthe gefunden werden.

§ 284. Von den Wurzeltypen.

Die Wurzeltypen müssen nun von der Beschaffenheit sein, dass die Wurzeln einzeln leicht aus ihnen gefunden werden. Sie sind in der Regel Theile symmetrischer Functionen der Wurzeln, so dass die Summe ihrer möglichen Variationen eine symmetrische Function bilden. Die Anzahl aller möglichen Variationen des Typus bestimmt den Grad der Resolvente, weshalb die Kenntniss geeigneter Typen von derselben Wichtigkeit ist, wie die der Reducenten und Substituirten für die Substitutions- oder Transformationsmethoden. Es sollen deshalb die wichtigsten Wurzeltypen hier vorweg aufgeführt werden. Dabei bezeichnen x_1, x_2, x_3 u. s. w. die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ und y_1, y_2, y_3 u. s. w. oder z_1, z_2, z_3 u. s. w. die Wurzeln ihrer Resolventen $Y=0$, resp. $Z=0$.

a. Die Typen der quadratischen Gleichungen:

(1) $$\begin{cases} x_1 + mx_2 = y_1, \\ mx_1 + x_2 = y_2, \end{cases} \quad \text{(Laplace);}$$

(2) $$\begin{cases} x_1 - x_2 = z_1, \\ x_2 - x_1 = z_2; \end{cases}$$

(3) $$x_1 + ix_2 = y_1, \quad \text{(Lagrange);}$$

(4) $$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = y_1, \quad \text{(arithm. Mittel) (Job);}$$

(5) $$\begin{cases} x_1 x_2 = y, \\ x_1 + x_2 = z; \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y, \\ x_1 + x_2 = z; \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = y\,, \\ x_1 - x_2 = z\,; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y\,, \\ \qquad x_1 x_2 = z\,. \end{cases}$$

b. Die Typen der kubischen Gleichungen:

$$(9)\qquad x_1 + m x_2 + n x_3 = y_1\,, \quad \text{(Laplace, Lacroix)};$$

$$(10)\qquad x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3 = y_1\,, \quad \text{(Vandermonde, Lagrange)};$$

$$(11)\qquad x_1 x_2 + J_1 x_2 x_3 + J_2 x_3 x_1 = y_1\,;$$

$$(12)\qquad x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = y_1\,;$$

$$(13)\qquad \frac{x_1 x_2 + J_1 x_2 x_3 + J_2 x_3 x_1}{x_3 + J_1 x_1 + J_2 x_2} = y_1\,, \quad \text{(Blomstrand)};$$

$$(14)\qquad \frac{x_1^2 + J_1 x_2^2 + J_2 x_3^2}{x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3} = y_1\,;$$

$$(15)\qquad \frac{(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)^2}{x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3} = y_1\,;$$

$$(16)\qquad x_1 - 2 x_2 + x_3 = y_1\,;$$

$$(17)\qquad x_1 x_2 - 2 x_2 x_3 + x_3 x_1 = y_1\,;$$

$$(18)\qquad x_1^2 - x_2 x_3 = y_1\,;$$

$$(19)\qquad x_1 - x_2 = y_1\,;$$

$$(20)\qquad x_1 + x_2 = y_1\,;$$

$$(21)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = y_1\,, \\ \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = y_2\,, \quad \text{(arithm. Mittel), (Job)}; \\ \frac{1}{2}(x_3 + x_1) = y_3\,, \end{cases}$$

$$(22)\qquad x_1 x_2 = y_1^2\,, \quad \text{(geom. Mittel).}$$

c. Die Wurzeltypen der biquadratischen Gleichungen:

$$(23)\qquad x_1 + l x_2 + m x_3 + n x_4 = y_1\,, \quad \text{(Laplace)};$$

$$(24)\qquad x_1 + x_2 \pm m(x_3 + x_4) = y_1\,, \quad \text{(Lagrange)};$$

$$(25)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = y_1\,, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_2\,, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = y_3\,, \end{cases} \quad \text{(Lagrange, Vandermonde, Terquem)};$$

$$(26)\qquad x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4 = y_1\,, \quad \text{(Vandermonde, Bézout)};$$

$$(27)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = y_1\,, & \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \eta_1\,, \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = y_2\,, & \frac{1}{2}(x_2 + x_4) = \eta_2\,, \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_4) = y_3\,, & \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = \eta_3\,, \end{cases} \quad \text{(Ampère, Blomstrand, Job)};$$

$$(28)\quad \begin{cases} x_1 x_2 = y_1^2, & x_3 x_4 = d : y_3^2 = \eta_3^2, \\ x_1 x_3 = y_2^2, & x_2 x_4 = d : y_2^2 = \eta_2^2, \\ x_1 x_4 = y_3^2, & x_2 x_3 = d : y_1^2 = \eta_1^2, \end{cases} \quad \text{(geom. Mittel);}$$

$$(29)\quad \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = y_1, \quad \text{(harmon. Mittel);}$$

$$(30)\quad \begin{cases} x_1 x_2 = y, \\ x_1 + x_2 = z; \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = y, \\ x_1 - x_2 = z, \end{cases} \quad \text{(Bette);}$$

$$(32)\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y, \\ x_1 + x_2 = z; \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y, \\ x_1 x_2 = z; \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1, \\ x_1 x_3 + x_2 x_4 = y_2, \\ x_1 x_4 + x_2 x_3 = y_3, \end{cases} \quad \text{(Lagrange, Wilson, Blomstrand, Hermite, Tortolini, Arndt);}$$

$$(35)\quad \begin{cases} x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1 y_2, \\ x_1 x_3 + x_2 x_4 = y_1 y_3, \\ x_1 x_4 + x_2 x_3 = y_2 y_3, \end{cases} \quad \text{(Methode des Kreisvierecks);}$$

$$(36)\quad \begin{cases} x_1 x_2 - x_3 x_4 = y_1, \\ \text{oder } (x_1 x_2)^2 - (x_1 x_2)\, y = d; \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = y_1, \\ \text{oder } (x_1 + x_2)^2 + a(x_1 + x_2) = y_1, \end{cases} \quad \text{(Ley);}$$

$$(38)\quad \left\{ \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)} = y_1, \right. \quad \text{(Blomstrand, Hunrath);}$$

$$(39)\quad \frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) - x_3 x_4 (x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)} = y_1;$$

$$(40)\quad \frac{(x_1^2 + x_2^2) - (x_3^2 + x_4^2)}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)} = y_1, \quad \text{(Lagrange, Hunrath);}$$

$$(41)\quad (x_1 + x_2)^2 \pm (x_3 + x_4)^2 = y_1;$$

$$(42)\quad (x_1 + x_2)^2 \pm (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_3 + x_4)^2 = y_1;$$

$$(43)\quad x_1 x_2 \mp (x_1 \pm x_2)(x_3 \pm x_4) + x_3 x_4 = y_1;$$

$$(44)\quad \begin{cases} 2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2 x_3 x_4 = y_1, \\ \text{oder } (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) = y_1, \end{cases}$$
(Hermite);

$$(45)\quad x_1 x_2 (x_3 \pm x_4) \mp x_3 x_4 (x_1 \pm x_2) = y_1;$$

$$(46)\quad x_1 x_2 (x_3 + x_4) = y_1;$$

$$(47)\qquad x_1 x_2 : x_3 x_4 = y_1 ;$$

$$(48)\qquad \frac{2 x_1 x_2 x_3 x_4}{x_1 x_2 \pm x_3 x_4} = y_1 ;$$

$$(49)\qquad \frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2} = y_1 ;$$

$$(50)\qquad (x_1 - x_2)^2 \pm (x_3 - x_4)^2 = y_1 ;$$

$$(51)\qquad \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \pm \frac{x_3 x_4}{x_3 + x_4} = y_1 ;$$

$$(52)\qquad \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = y_1 ;$$

$$(53)\qquad (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = y_1 ;$$

$$(54)\qquad x_1 x_2 (x_1 + x_2) = y_1 .$$

II. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§ 285. Methode von Laplace*).

Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$f(x) = x^2 + ax + b = 0 .$$

Die Wurzeln seien x_1 und x_2. Man substituire die lineare Function derselben

$$x_1 + m x_2 = y_1 ,$$
$$m x_1 + x_2 = y_2 ,$$

wo m ein noch unbestimmter Factor ist. Es ist nun

$$x_1 + x_2 = -a , \quad x_1 x_2 = b .$$

Die beiden Wurzeln können mit Hülfe zweier linearer Gleichungen berechnet werden, sobald m, y_1 und y_2 bekannt sind, oder auch nur m und y_1. Die Bestimmung von y_1 führt aber zugleich auch zu der von y_2. Sie sind offenbar die Wurzelwerthe einer andern quadratischen Gleichung und ihre Berechnung wird einfacher sein als die von x, wenn die Gleichung rein quadratisch ist. Die beiden Werthe y_1 und y_2 werden gegeben durch die quadratische Gleichung, welche sich aus dem Producte der Binomialfactoren

$$[y - (x_1 + m x_2)] \cdot [y - (m x_1 + x_2)] = 0$$

ergibt. Dieselbe lautet

*) Laplace, Leçons de mathém. données à l'école normale en 1795. Journal des séances. pt. II. pg. 302.

Lacroix, Complément des élémens d'algèbre. § 14. Paris 1804.

$$y^2 - (m + 1)(x_1 + x_2)y + (x_1 + mx_2)(mx_1 + x_2) = 0\,.$$

Da m willkürlich ist, so erhält man eine rein quadratische Gleichung in y, wenn man den zweiten Term verschwinden lässt. Dies gibt die Bedingungsgleichung $m = -1$ und man hat

$$y^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 4b\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$y_1 \text{ und } y_2 = x_1 - x_2 = \pm\sqrt{a^2 - 4b}\,.$$

Ausserdem ist

$$x_1 + x_2 = -a\,.$$

Die Combination dieser beiden Gleichungen liefert durch Addition und Subtraction sofort die gesuchten Wurzelwerthe

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

§ 286. **Die Methode der Wurzeldifferenzen** [Typus (2)].

Man gehe aus von den beiden Wurzeltypen

$$x_1 - x_2 = y_1\,,$$
$$x_2 - x_1 = y_2\,.$$

Wegen der Relation

$$x_1 + x_2 = -a$$

erhält man die neuen Gleichungen

$$x_1 = \pm\frac{1}{2}(y - a)\,,$$

$$x_2 = \mp\frac{1}{2}(y + a)\,.$$

Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen resultirt

$$x_1x_2 = b = -\frac{1}{4}(y^2 - a^2)\,,$$

folglich

$$y^2 = \frac{1}{2}(a^2 - 4b)$$

und

$$y_1 \text{ und } y_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\,.$$

Demgemäss erhält man wieder die bekannten Formeln

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

§ 287. Die Methode der Wurzelsumme und des Wurzelproducts.

Die gegebene Gleichung sei wiederum

$$x^2 + ax + b = 0 .$$

Man kann die beiden Wurzeln finden mittels der Wurzeltypen (5)

$$x_1 x_2 = y = \quad b ,$$
$$x_1 + x_2 = z = -a .$$

Es finden folgende Identitäten statt:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm (x_1 - x_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}\right] .$$

Folglich hat man

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right) .$$

§ 288. Die Methode der Wurzelsumme und der Summe der Wurzelquadrate [Typus (6)].

Ist die vorgelegte Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0 ,$$

also $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = b$, so ist die Gleichung ihrer Wurzelquadrate

$$x^4 - (a^2 - 2b)x^2 + b^2 = 0 ,$$

folglich

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2b , \quad x_1 x_2 = b , \quad x_1 + x_2 = -a .$$

Wegen der Identität

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

erhält man

$$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{a^2 - 4b} .$$

Daneben ist

$$x_1 + x_2 = -a ,$$

folglich wieder

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right) .$$

§ 289. Die Methode der Wurzelsumme und Wurzeldifferenz nach Haminger.

Um die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

aufzulösen, setze man

$$x_1 = y + z\,,$$
$$x_2 = y - z\,,$$

oder, wie sich hieraus ergibt,

$$x_1 + x_2 = 2y\,,$$
$$x_1 - x_2 = 2z\,.$$

Man setze die angenommenen Ausdrücke ein in die Binomialfactoren

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0\,,$$

also

$$[x - (y + z)] \,.\, [x - (y - z)] = 0\,,$$

oder

$$x^2 - 2yx + (y^2 - z^2) = 0\,.$$

Identificirt man diese Gleichung mit der vorgelegten, so erhält man aus der Vergleichung homologer Coefficienten

$$y = -\frac{1}{2}\,a\,, \quad y^2 - z^2 = b\,,$$

$$z^2 = \frac{1}{4}\,(a^2 - 4b)\,.$$

Demgemäss ist

$$x_1 + x_2 = 2y = -a\,,$$
$$x_1 - x_2 = 2z = \pm\sqrt{a^2 - 4b}\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man durch Addition und Subtraction wieder die Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung, nämlich

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

§ 290. Eine andere Methode der Wurzelsumme und Wurzeldifferenz.

Um die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

aufzulösen, setze man

$$x_1 + x_2 = y\,,$$
$$x_1 - x_2 = z\,.$$

Hieraus folgert man durch Addition und Subtraction

$$x_1 = \frac{1}{2}(y+z)\,,\quad x_2 = \frac{1}{2}(y-z)\,.$$

Man substituire diese Ausdrücke in die gegebene Gleichung, wie folgt:

$$(y+z)^2 + 2a(y+z) + 4b = 0\,,$$
$$(y-z)^2 + 2a(y-z) + 4b = 0\,.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$y^2 + z^2 + 2ay + 4b = 0\,;$$

durch Subtraction

$$2yz + 2az = 0\,.$$

Da z nicht Null wird, wenn nicht die beiden Wurzeln einander gleich sind, so folgt aus der letzten Relation

$$y + a = 0\,,\quad y = -a\,,$$

und aus der vorhergehenden

$$z^2 = a^2 - 4b\,,\quad z = \pm\sqrt{a^2 - 4b}\,.$$

Demgemäss findet man

$$x_1 = \frac{1}{2}(y+z) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(y-z) = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\,.$$

§ 291. Combinationsmethode von Lagrange*).

Eine andere Methode, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Substitution einer linearen Function, welche alle Wurzeln umfasst, die Wurzelwerthe zu bestimmen, ist von Lagrange gegeben worden. Das Princip dieser Methode ist schon früher in dem allgemeinen Theile (§ 47) auseinander gesetzt. Sie möge hier auf die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

angewendet werden.

---

*) Lagrange, Sur la résolution des équations algébriques. Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Note XIII. § 30. Paris 1808. Man vergl. auch § 47.

Man hat hier $n = 2$, also gleich einer Primzahl. Ist α eine Wurzel der Hülfsgleichung

$$\alpha^2 - 1 = 0\,,$$

so substituire man

$$y = x_1 + \alpha x_2\,.$$

Daraus ergibt sich

$$z = y^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2\alpha x_1 x_2\,.$$

Sind u_0, u_2 symmetrische Functionen der Wurzeln, die in diese Entwicklung von z eintreten, so ist

$$z = u_0 + u_1 \alpha\,,$$

also

$$u_0 = x_1{}^2 + x_2{}^2\,, \quad u_1 = 2x_1 x_2\,.$$

Demnach ist $u_1 = 2b$, und weil die Wurzeln der Hülfsgleichung $\alpha^2 - 1 = 0$ der Reihe nach 1, $\alpha = -1$ sind, so ist mit Berücksichtigung der Gleichung

$$z = (-a)^n + (\alpha_1 - 1)u_1 + (\alpha_2{}^2 - 1)u_2 + \cdots,$$

$$x_1 + x_2 \;= \sqrt{z_1}\,, \quad z_1 = (-a)^2\,,$$

$$x_1 + \alpha x_2 = \sqrt{z_2}\,, \quad z_2 = a^2 - 4b\,.$$

Daraus folgt

$$x_1 = \frac{\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}}{2} = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right),$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{z_1} - \alpha\sqrt{z_2}}{2} = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

§ 292. Die Typenmethode von Vandermonde*).

Es ist in § 37 bereits mitgetheilt, dass Vandermonde in den damals bekannten Auflösungsmethoden der Gleichungen der ersten vier Grade ein allgemeines Princip dieser Methoden darin entdeckt zu haben glaubte, dass sich die Wurzelformen in einem und demselben Typus ausdrücken lassen. Als einen solchen stellte er die Form

$$x = \frac{1}{n}\Big[(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots) + \sqrt[n]{(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \cdots)^n}$$
$$+ \sqrt[n]{(x_1 + \alpha^2 x_2 + \beta^2 x_3 + \cdots)} + \sqrt[n]{(x_1 + \alpha^3 x_2 + \beta^3 x_3 + \cdots)^n} + \cdots\Big]$$

*) Vandermonde, Mém. sur la résolution des équations. Mém. de l'acad. roy. année 1772. Paris 1774. Man vergl. auch Lagrange, Traité etc. Note XIII. § 40.

auf, wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die complexen Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^n - 1 = 0$$

bezeichnen. Das Princip besteht also darin, dass der analytische Ausdruck der Wurzeln einer Gleichung eine Function dieser Wurzeln sein muss, von der Beschaffenheit, dass derselbe ohne Unterschied jede der Wurzeln vertreten kann und welcher zugleich aus symmetrischen Functionen der Wurzeln besteht, so dass sich der Ausdruck zugleich in den Coefficienten der vorgelegten Gleichung wiedergeben lässt.

Indem Vandermonde die bekannte Auflösung der Gleichung zweiten Grades prüfte, bemerkte er, dass in der That die Wurzel von der Form

$$x = \frac{(x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2}$$

sei. Wegen der Unbestimmtheit des Vorzeichens des Radicals stellt dieser Ausdruck sowol den Werth x_1 als x_2 dar, und zugleich lassen die Grössen $x_1 + x_2$ und $x_1 - x_2$ sich durch die Coefficienten a und b ausdrücken. Denn man hat

$$x_1 + x_2 = -a,$$
$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a^2 - 4b,$$

woraus sich die bekannte Auflösung ergibt.

III. Von der Auflösung der kubischen Gleichungen.

§ 293. Methode von Laplace*).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Man suche a priori eine Function der Wurzeln, deren Bestimmung nur von der Auflösung einer quadratischen Gleichung abhängt. Die einfachste Annahme würde sein

$$z = lx_1 + mx_2 + nx_3,$$

---

*) Laplace, Leçons de mathém. données à l'école normale en 1795. II. pg. 302.

Lacroix, Complément des élémens d'algèbre § 16. Paris 1804.

Francoeur, Cours de mathém. T. II. pg. 171. § 589. Paris 1837.

Blomstrand, De methodis praecipuis etc. X. Lundae 1847.

§ 294. Methode der Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung nach Lagrange*).

Die vorgelegte Gleichung sei nunmehr

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

und ihre Wurzeln x_1, x_2, x_3. Es werde die in § 47 entwickelte Methode angewandt. Man hat hier $n = 3$, also gleich einer Primzahl, und man substituirt den Typus (10)

$$y = x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3,$$

worin die drei Coefficienten die drei Wurzeln der Hülfsgleichung

$$\alpha^3 - 1 = 0$$

sind, also

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = J_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \alpha_3 = J_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Hieraus ergibt sich nun die Function $z = y^3$, nämlich

$$z = y^3 = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2,$$

wo

$$\begin{aligned} u_0 &= x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + 6x_1x_2x_3, \\ u_1 &= 3(x_1{}^2x_2 + x_2{}^2x_3 + x_3{}^2x_1), \\ u_2 &= 3(x_1x_2{}^2 + x_2x_3{}^2 + x_3x_1{}^2), \end{aligned}$$

zu setzen, und für α einer der Werthe α_1, α_2, α_3 einzusetzen sein wird.

Die Grössen u_1 und u_2 sind nun die Wurzeln einer Gleichung vom zweiten Grade, also der Gleichung

$$u^2 - (u_1 + u_2)u + u_1u_2 = 0,$$

oder

$$u^2 + Au + B = 0.$$

Die Coefficienten A und B sind bestimmbare rationale Functionen der Coefficienten a, b, c, man findet in der That

$$\begin{aligned} -A = u_1 + u_2 &= 3\Sigma(x_1{}^2x_2) = -3ab + 9c, \\ B = u_1u_2 &= 9\Sigma(x_1{}^2x_2) \times \Sigma(x_1x_2{}^2) \\ &= 9[x_1x_2x_3\Sigma(x_1{}^3) + \Sigma(x_1{}^3x_2{}^3) + 3x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2] \\ &= 9[b^3 + a^3c - 6abc + 9c^2]. \end{aligned}$$

Die Resolvente ist demnach (VIII.):

$$u^2 + 3(ab - 3c)u + 9(b^3 + a^3c - 6abc + 9c^2) = 0.$$

---

*) Lagrange, Sur la résolution des équations algébriques, dans son Traité etc. Note XIII. § 31.

Es ist nun allgemein

$$z = (-a)^3 + (\alpha - 1)u_1 + (\alpha^2 - 1)u_2,$$

also, wenn man für α der Reihe nach $\alpha = 1, J_1, J_2$ einsetzt,

$$\begin{aligned} z_1 &= (-a)^3, \\ z_2 &= (-a)^3 + (J_1 - 1)u_1 + (J_2 - 1)u_2, \\ z_3 &= (-a)^3 + (J_2 - 1)u_1 + (J_1 - 1)u_2. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3 hat man jetzt die drei linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a = \sqrt[3]{u_0 + u_1 + u_2}, \\ x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3 &= \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{u_0 + J_1 u_1 + J_2 u_2}, \\ x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3 &= \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{u_0 + J_2 u_1 + J_1 u_2}. \end{aligned}$$

Daraus findet man mit leichter Mühe

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\left(-a + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right), \\ x_2 &= \frac{1}{3}\left(-a + J_2\sqrt[3]{z_1} + J_1\sqrt[3]{z_2}\right), \\ x_3 &= \frac{1}{3}\left(-a + J_1\sqrt[3]{z_1} + J_2\sqrt[3]{z_2}\right). \end{aligned}$$

Nach Lagrange kann man noch einfachere Ausdrücke mittels der Gleichung in z erhalten, welche ebenso wie diejenige in u vom zweiten Grade ist. Angenommen sie sei

$$z^2 + Mz + N = 0.$$

Um die Coefficienten M und N zu bestimmen, beachte man, dass

$$M = -(z_1 + z_2), \quad N = z_1 z_2,$$

wo z_1 und z_2 die beiden Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen. Da

$$\begin{aligned} z_1 &= -a^3 + (J_1 - 1)u_1 + (J_2 - 1)u_2, \\ z_2 &= -a^3 + (J_2 - 1)u_1 + (J_1 - 1)u_2, \end{aligned}$$

so findet man hieraus

$$\begin{aligned} M &= -(z_1 + z_2) = 2a^3 - 3A, \\ N &= z_1 z_2 = a^6 + 3a^3(u_1 + u_2) + 3(u_1 + u_2)^2 - 3u_1 u_2. \end{aligned}$$

Die symmetrischen Functionen von u können aus den beiden Coefficienten der Gleichung in u gefunden werden. Man erhält

$$\begin{aligned} M &= 2a^3 - 9ab + 27c, \\ N &= (a^2 - 3b)^3; \end{aligned}$$

folglich die Resolvente VII:

$$z^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)z + (a^2 - 3b)^3 = 0.$$

§ 295. Die Formeln von Vandermonde.

Das bei der Auflösung der quadratischen Gleichungen angewandte Princip von Vandermonde lässt sich auch auf die kubischen Gleichungen übertragen. Die Wurzelform ist hier ebenso, nämlich allgemein

$$x = \frac{1}{3}\left[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{(x_1+J_1x_2+J_2x_3)^3}+\sqrt[3]{(x_1+J_1^2x_2+J_2^2x_3)^3}\right].$$

In der That wird dieser Ausdruck gleich x_1 oder x_2 oder x_3, je nachdem man die beiden Radicale mit den Kubikwurzeln der Einheit der Reihe nach multiplicirt. Es ist nämlich:

$$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+(x_1+J_1x_2+J_2x_3)+(x_1+J_1^2x_2+J_2^2x_3)],$$

$$x_2 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+J_2(x_1+J_1x_2+J_2x_3)+J_2^2(x_1+J_1^2x_2+J_2^2x_3],$$

$$x_3 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+J_1(x_1+J_1x_2+J_2x_3)+J_1^2(x_1+J_1^2x_2+J_2^2x_3)].$$

Die ganze Schwierigkeit dieser Methode besteht also nur darin, dass man die Radicale in Functionen der Coefficienten a, b, c der vorgelegten Gleichung auszudrücken hat. Es ist nun

$$\begin{aligned}(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)^3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 \\ &\quad - \frac{3}{2}(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2) \\ &\quad - \frac{3}{2}\sqrt{-3}\,(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \\ &= -\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) - \frac{3}{2}\sqrt{3D_3},\end{aligned}$$

und

$$(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)^3 = -\frac{1}{2}(2a^3 - 9ab + 27c) + \frac{3}{2}\sqrt{3D_3}.$$

Man gelangt also zu den bekannten Formeln von Lagrange.

§ 296. Methode der Substitution einer quadratischen Function der Wurzeln.

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man substituire die Combination

$$z = x_1x_2 + J_1x_2x_3 + J_2x_3x_1.$$

Variirt man auf alle mögliche Arten die Wurzelproducte mit J_1 und J_2, so erhält man

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1x_2 + J_1x_2x_3 + J_2x_3x_1\,, \\ J_1z_1 &= x_3x_1 + J_1x_1x_2 + J_2x_2x_3\,, \\ J_2z_1 &= x_2x_3 + J_1x_3x_1 + J_2x_1x_2\,, \\ z_2 &= x_1x_2 + J_2x_2x_3 + J_1x_3x_1\,, \\ J_2z_2 &= x_3x_1 + J_2x_1x_2 + J_1x_2x_3\,, \\ J_1z_2 &= x_2x_3 + J_2x_3x_1 + J_1x_1x_2\,. \end{aligned}$$

Diese sechs Ausdrücke sind demnach die Wurzeln einer Resolvente von der Form

$$z^6 + Az^3 + B = 0\,.$$

Man erhält dieselbe mit Coefficienten als Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, wenn man die Gleichung

$$[z^3 - (x_1x_2 + J_1x_2x_3 + J_2x_3x_1)^3]\,.\,[z^3 - (x_1x_2 + J_2x_2x_3 + J_1x_3x_1)^3] = 0$$

entwickelt. Man hat

$$\begin{aligned} -A &= (x_1x_2 + J_1x_2x_3 + J_2x_3x_1)^3 + (x_1x_2 + J_2x_2x_3 + J_1x_3x_1)^3 \\ &= 2b^3 - 9abc + 27c^2\,, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B &= (x_1x_2 + J_1x_2x_3 + J_2x_3x_1)^3 \cdot (x_1x_2 + J_2x_2x_3 + J_1x_3x_1)^3 \\ &= (b^2 - 3ac)^3\,. \end{aligned}$$

Demnach ist die Resolvente

$$z^6 - (2b^3 - 9abc + 27c^2)z^3 + (b^2 - 3ac)^3 = 0\,.$$

Hieraus findet man z_1 und z_2, und es lassen sich die Wurzeln der vorgelegten Gleichung berechnen aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= b\,, \\ x_1x_2 + J_1x_2x_3 + J_2x_3x_1 &= z_1\,, \\ x_1x_2 + J_2x_2x_3 + J_1x_3x_1 &= z_2\,. \end{aligned}$$

Durch Addition ergeben sich nämlich die Producte x_1x_2, x_2x_3 und x_3x_1; dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -(x_1x_2\,.\,x_3x_1) : c\,, \\ x_2 &= -(x_1x_2\,.\,x_2x_3) : c\,, \\ x_3 &= -(x_2x_3\,.\,x_3x_1) : c\,. \end{aligned}$$

§ 297. Methode der Substitution der Factoren der Reducente (16)II.

Wenn man die Reihe der Reducenten (5) bis (18) in § 79 in ihren typischen Darstellungen überblickt, so wird man leicht darauf geführt, dass nur diejenigen Wurzeltypen auf eine Resolvente zweiten Grades führen, welche die Form eines Productes oder einer Summe zweier Untertypen annehmen können, also die Reducenten (6), (7), (8), (9) und (16)II., von denen die Untertypen beziehungsweise vom ersten, zweiten und dritten Grade sind. Ferner wird man bemerken, dass diejenigen Wurzeltypen, welche nur in der Form eines Productes dreier Untertypen auftreten, z. B. die Reducenten (11), (14) und (17), nur wieder auf eine kubische Resolvente führen, wodurch für die Auflösung der vorgelegten Gleichung keine wesentlichen Vortheile erzielt werden.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Man substituire jetzt auch noch den Untertypus

$$z_1 = x_1^{\,2} x_2 + x_2^{\,2} x_3 + x_3^{\,2} x_1 ,$$
$$z_2 = x_1 x_2^{\,2} + x_2 x_3^{\,2} + x_3 x_1^{\,2} .$$

Alsdann sind z_1 und z_2 die Wurzeln der Resolvente VIII.:

$$z^2 + (ab - 3c)z + (b^3 + a^3 c - 6abc + 9c^2) = 0$$

Setzt man

$$-a^3 + 3ab - 9c = z_0 ,$$

so findet man

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a ,$$
$$x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3 = \sqrt[3]{z_0 + \tfrac{1}{3} J_1 z_1 + \tfrac{1}{3} J_2 z_2} ,$$
$$x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3 = \sqrt[3]{z_0 + \tfrac{1}{3} J_2 z_1 + \tfrac{1}{3} J_1 z_2} .$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen können die Wurzeln einzeln berechnet werden.

§ 298. Methode der Substitution der Untertypen der Reducente (7).

Dividirt man den Typus der Reducente (7) durch das Product

$$(x_3 + J_2 x_1 + J_1 x_2)(x_3 + J_1 x_1 + J_2 x_2) ,$$

so erhält man die Form

$$-\frac{x_1 x_2 + J_1 x_2 x_3 + J_2 x_1 x_3}{x_3 + J_1 x_1 + J_2 x_2} - \frac{x_1 x_2 + J_2 x_2 x_3 + J_1 x_1 x_3}{x_3 + J_2 x_1 + J_1 x_2} .$$

Setzt man den ersten Untertypus gleich z_1, den zweiten gleich z_2, so wird gemäss § 143, 8:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Aus den beiden Untertypen folgt

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z_1}{x_3 - z_1} = - J_2\,,$$

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z_2}{x_3 - z_2} = - J_1\,,$$

und somit das Theorem: Die Wurzeln einer kubischen Gleichung und ihrer Resolvente von der Covariantenform sind einander äquianharmonisch zugeordnet. Sucht man die Wurzeln x_1, x_2, x_3 auszudrücken, so kann dies mit Hülfe identischer Gleichungen geschehen, die wir der Einfachheit wegen in folgende abgekürzte Formen bringen:

$$x_1 = - \frac{(az_1 + b) + z_1 \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z_1 + a)}}{(3z_1 + a) - \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z_1 + a)}}\,,$$

$$x_2 = - \frac{(az_1 + b) + z_1 J_1 \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z_1 + a)}}{(3z_1 + a) - J_1 \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z_1 + a)}}\,,$$

$$x_3 = - \frac{(az_1 + b) + z_1 J_2 \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z_1 + a)}}{(3z_1 + a) - J_2 \sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z_1 + a)}}\,.$$

Zahlenbeispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0\,.$$

Die Resolvente ist

$$z^2 - 13z + 30 = 0\,,$$

$$z_1 = 10\,, \quad z_2 = 3\,.$$

Man findet nun

$$x_1 = -4\,, \quad x_2 = 5 - \sqrt{-3}\,, \quad x_3 = 5 + \sqrt{-3}\,.$$

Endlich ist

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z_1}{x_3 - z_1} = - J_2\,,$$

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z_2}{x_3 - z_2} = - J_1\,.$$

§ 299. Methode der Substitution des Typus (14) nach Blomstrand.

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Man nehme an, es sei

$$-\frac{x_1^2 + J_1 x_2^2 + J_2 x_3^2}{x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3} = z_1 .$$

Diese Function kann nur zwei verschiedene Werthe annehmen, den vorstehenden und den folgenden:

$$-\frac{x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_1 x_3^2}{x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3} = z_2 .$$

Um die Gleichung in z zu bilden, suche man die Summe und das Product der beiden Functionen. Man findet

$$z_1 + z_2 = \frac{2a^3 - 7ab + 9c}{a^2 - 3b} .$$

Es ist nämlich der gemeinschaftliche Divisor der Quotienten

$$(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3) = a^2 - 3b ,$$

und weiter

$$\begin{aligned}(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3)(x_1^2 + J_1 x_2^2 + J_2 x_3^2) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ &+ J_1(x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) + J_2(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) , \\ (x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)(x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_1 x_3^2) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ &+ J_2(x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) + J_1(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 ,\end{aligned}$$

folglich

$$-(z_1 + z_2) = \frac{2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1} ,$$

oder

$$-(z_1 + z_2) = -\frac{2a^3 - 7ab + 9c}{a^2 - 3b} .$$

Ferner ist

$$z_1 z_2 = \frac{S_4 - \Sigma(x_1^2 x_2^2)}{a^2 - 3b} = \frac{a^4 - 4a^2 b + 6ac + b^2}{a^2 - 3b} .$$

Man erhält also die Resolvente IX. in der Form

$$(a^2 - 3b)z^2 - (2a^3 - 7ab + 9c)z + (a^4 - 4a^2 b + 6ac + b^2) = 0 .$$

Hieraus findet man z_1 und z_2. Um x zu bestimmen, gehe man aus von der Annahme

$$x^2 + zx + (q + y) = 0 ,$$

und transformire die gegebene Gleichung so, dass die beiden mittleren Glieder verschwinden. Die Bedingung ist (§ 172):

$$\begin{aligned}y^3 &+ [3q - a(z - a) - 2b]y^2 + [3q^2 - (2az - 2a^2 + 4b)q \\ &+ b(z^2 - az + b) + c(3z - 2a)]y + [q^3 - (az - a^2 + 2b)q^2 \\ &+ [b(z^2 - az + b) + c(3z - 2a)]q - c(z^3 - az^2 + bz - c) = 0 .\end{aligned}$$

Führt man die Reducente $\alpha = \beta = 0$ ein, so erhält man die Resolvente IX und die Reducirte

$$y^3 = -\frac{1}{27}(az - a^2 + 2b)^3 + c(z^3 - az^2 + bz - c).$$

Demgemäss ist

$$x_1^2 + zx_1 + \frac{1}{3}(az - a^2 + 2b) + \sqrt[3]{y_1} = 0,$$

$$x_2^2 + zx_2 + \frac{1}{3}(az - a^2 + 2b) + J_1\sqrt[3]{y_1} = 0,$$

$$x_3^2 + zx_3 + \frac{1}{3}(az - a^2 + 2b) + J_2\sqrt[3]{y_1} = 0.$$

Multiplicirt man die zweite mit J_1, die dritte mit J_2 und addirt alle drei Gleichungen, so erhält man in der That die Functionen, welche für z angenommen sind, und die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung lassen sich mit Hülfe von anderen quadratischen Gleichungen finden.

§ 300. Methode der Substitution des Typus (15).

Um die vollständige Gleichung aufzulösen, nehme man an, es sei die Function der Resolvente

$$\frac{(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)^2}{x_1 + J_2x_2 + J_1x_3} = z_1,$$

und

$$\frac{(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)^2}{x_1 + J_1x_2 + J_2x_3} = z_2.$$

Um die Resolvente in z zu bilden, suche man die Werthe $z_1 + z_2$ und z_1z_2. Man findet mit wenig Mühe

$$z_1 + z_2 = -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{a^2 - 3b}, \quad z_1z_2 = a^2 - 3b.$$

Es ist nämlich wie vorhin

$$(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3) = a^2 - 3b,$$

und weiter

$$(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)^2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3J_1(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) + 3J_2(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2),$$

$$(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)(x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)^2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3J_2(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) + 3J_1(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2).$$

Hieraus und aus den Substituirten ergibt sich

$$z_1 + z_2$$
$$= \frac{2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 - (x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}$$
$$= -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{a^2 - 3b}.$$

Die Resolvente ist in Uebereinstimmung mit X die quadratische

$$(a^2 - 3b)z^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)z + (a^2 - 3b)^2 = 0.$$

Hat man hieraus die Werthe z_1 und z_2 gefunden, so bleibt noch die Bestimmung der Wurzeln x_1, x_2, x_3 übrig. Zu diesem Zwecke gehe man aus von der Annahme

$$x + \left(x + \frac{1}{3} z_2\right)\sqrt[3]{h} + \frac{1}{3}(z_1 + a) = 0,$$

oder nach der Form der Substitution von Bézout:

$$\frac{x + \frac{1}{3}(z_1 + a)}{x + \frac{1}{3} z_2} = -\sqrt[3]{h}, \quad \text{oder} \quad x = -\frac{(z_1 + a) + z_2\sqrt[3]{h}}{3\left(1 + \sqrt[3]{h}\right)}.$$

Da $\sqrt[3]{h}$ drei verschiedene Werthe hat, so gibt es auch drei verschiedene Gleichungen der vorstehenden Form, nämlich

$$x_1 + \left(x_1 + \frac{1}{3} z_2\right)\sqrt[3]{h} + \frac{1}{3}(z_1 + a) = 0,$$
$$x_2 + \left(x_2 + \frac{1}{3} z_2\right)J_1\sqrt[3]{h} + \frac{1}{3}(z_1 + a) = 0,$$
$$x_3 + \left(x_3 + \frac{1}{3} z_2\right)J_2\sqrt[3]{h} + \frac{1}{3}(z_1 + a) = 0.$$

Multiplicirt man die erste mit J_1, die zweite mit J_2 und addirt, so erhält man

$$(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3) + (x_1 + J_2x_2 + J_1x_3)\sqrt[3]{h} = 0.$$

Addirt man ohne Weiteres die drei Gleichungen, so erhält man

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)\sqrt[3]{h} + (z_1 + a) = 0.$$

Setzt man aus der vorhergehenden Gleichung den Werth von $\sqrt[3]{h}$, nämlich

$$\sqrt[3]{h} = -\frac{x_1 + J_1x_2 + J_2x_3}{x_1 + J_2x_2 + J_1x_3}$$

in die letztere ein, so resultirt in der That die angenommene Function

$$z_1 = \frac{(x_1 + J_1x_2 + J_2x_3)^2}{x_1 + J_2x_2 + J_1x_3}.$$

Es bleibt noch übrig $\sqrt[3]{h}$ zu bestimmen. Man gehe aus von der Relation

$$\left(\frac{3x + (z_1 + a)}{3x + z_2}\right)^3 = -h$$

und entwickele nach Potenzen von x, also

$$x^3 + \frac{z_1 + a - z_2 h}{1 - h} x^2 + \frac{(z_1 + a)^2 - z_2{}^2 h}{3(1 - h)} x + \frac{(z_1 + a)^3 - z_2{}^3 h}{27(1 - h)} = 0 .$$

Vergleicht man die homologen Coefficienten dieser und der gegebenen Gleichung, so findet man

$$h = \frac{z_1}{z_2 - a},$$

und x aus der Gleichung ersten Grades

$$x + \left(x + \frac{1}{3} z_2\right) \sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2 - a}} + \frac{1}{3}(z_1 + a) = 0 .$$

§ 301. Methode der Wurzelsummen der variirten Gleichung.

Um noch zu zeigen, dass die Wurzeltypen, welche sich auf drei Untertypen zurückführen lassen, nur eine Resolvente dritten Grades geben, suchen wir die Gleichung der drei Wurzelsummen von

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 ,$$

und um diese für eine Auflösung geeignet zu machen, die Gleichung der Wurzelsummen der variirten Gleichung

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0 .$$

Man substituire zu diesem Zwecke

$$x_1' + x_2' = y_1 ,$$
$$x_1' + x_3' = y_2 ,$$
$$x_2' + x_3' = y_3 .$$

Die Grössen y_1, y_2, y_3 sind also die Wurzeln der Gleichung

$$y^3 + 2\alpha y^2 + (\alpha^2 + \beta)y + (\alpha\beta - \gamma) = 0 ,$$

oder der Kürze wegen

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0 .$$

Man führe die Reducente (8) ein, setze also $B^2 - 3AC = 0$. Dies gibt die Resolvente VI.:

$$(a^2 - 3b)z^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 7ab + 9c)z$$
$$+ \frac{1}{4}(a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0 ,$$

und die Gleichung in y lässt sich auf eine rein kubische reduciren bezüglich $\frac{1}{y}$ vermehrt um eine Constante. Mittels eines der Werthe von z erhält man y_1, y_2, y_3 und somit durch Auflösung der drei linearen Gleichungen die Wurzeln der variirten Gleichung:

$$x_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3),$$
$$x_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3),$$
$$x_3' = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3).$$

Führt man die Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichungen wieder ein, so resultirt endlich

$$x_1 = z + \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3),$$
$$x_2 = z + \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3),$$
$$x_3 = z + \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3).$$

§ 302. Methode der Wurzelproducte der variirten Gleichung.

Bildet man aus der vorgelegten Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

die Variirte und hiervon wieder die Gleichung ihrer Wurzelproducte

$$x_1'x_2' = y_1, \quad x_1'x_3' = y_2, \quad x_2'x_3' = y_3,$$

so erhält man

$$y^3 - \beta y^2 + \alpha\gamma y - \gamma^2 = 0,$$

oder kurz

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0.$$

Mit Anwendung der Reducente (6) $A^2 - 3B = 0$ gelangt man zur Resolvente II:

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0.$$

Die Gleichung in y lässt sich nun mit leichter Mühe auf den Kubus einer zweitheiligen Grösse bringen, und es wird

$$y_1 = -\frac{1}{3}A + \eta,$$
$$y_2 = -\frac{1}{3}A + \eta J_1,$$
$$y_3 = -\frac{1}{3}A + \eta J_2.$$

Nun ist der Annahme entsprechend

$$y_1 = x_1' x_2', \quad y_2 = x_1' x_3', \quad y_3 = x_2' x_3',$$

folglich

$$x_1' = -\frac{1}{\gamma} y_1 y_2, \quad x_2' = -\frac{1}{\gamma} y_1 y_3, \quad x_3' = -\frac{1}{\gamma} y_2 y_3,$$

und endlich

$$\begin{aligned} x_1 &= z - y_1 y_2 : \gamma, \\ x_2 &= z - y_1 y_3 : \gamma, \\ x_3 &= z - y_2 y_3 : \gamma. \end{aligned}$$

IV. Von der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§ 303. Methode von Laplace*).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Man suche a priori eine Function der Wurzeln, welche von einer Gleichung abhängig ist, die entweder von einem geringeren Ordnungsexponenten ist oder sich doch leichter auflösen lässt als die vorgelegte. Man wähle dazu die lineare Function

$$z = kx_1 + lx_2 + mx_3 + nx_4.$$

Ihre Bestimmung hängt ab von der Auflösung einer Gleichung vom 24sten Grade. Man kann die Anzahl der Variationen herabdrücken, indem man $k = l$, $n = m$ nimmt. Dies gibt die sechs Werthe

$$\begin{aligned} z_1 &= l(x_1 + x_2) + m(x_3 + x_4), \\ z_2 &= l(x_1 + x_3) + m(x_2 + x_4), \\ z_3 &= l(x_1 + x_4) + m(x_2 + x_3), \\ z_4 &= l(x_2 + x_3) + m(x_1 + x_4), \\ z_5 &= l(x_2 + x_4) + m(x_1 + x_3), \\ z_6 &= l(x_3 + x_4) + m(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Da das Verhältniss von l zu m willkürlich bleibt, so kann man $m = -l = -1$ setzen, wodurch die Gleichung in z auf eine kubische reducirt wird, indem in den sechs Combinationen

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \quad & z_4 &= -x_1 + x_2 + x_3 - x_4, \\ z_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \quad & z_5 &= -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \\ z_3 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \quad & z_6 &= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4, \end{aligned}$$

*) Man vergleiche l. c. § 293. Wir folgen hier der Darstellung, welche Lacroix und Blomstrand von der Methode gegeben haben.

je zwei, welche in derselben Zeile stehen, sich nur durch ihr Vorzeichen von einander unterscheiden. Die Gleichung vom sechsten Grade, von welcher sie abhängen, muss drei positive und eben so viele negative beziehungsweise gleiche Wurzelwerthe haben. Setzt man demnach $z^2 = y$, so sind die Wurzeln der äquivalenten kubischen Resolvente

$$y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$
$$y_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$y_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2.$$

Nun ist

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = -4p + 4(x_1 x_2 + x_3 x_4),$$
$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 = -4p + 4(x_1 x_3 + x_2 x_4),$$
$$(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = -4p + 4(x_1 x_4 + x_2 x_3).$$

Nehmen wir an, es seien die drei Untertypen $x_1 x_2 + x_3 x_4$, $x_1 x_3 + x_2 x_4$, $x_1 x_4 + x_2 x_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$u^3 + Au^2 + Bu + C = 0,$$

so wird $y = -4p + 4u$ sein. Die Coefficienten A, B, C lassen sich leicht mit Hülfe symmetrischer Functionen finden. Man findet zunächst

$$A = -p.$$

Ferner ist

$$B = S_{2,1,1} = \frac{1}{2}(S_2 . S_1^2 - 2 S_3 . S_1 - S_2^2 + 2 S_4) = -4r.$$

Man gelangt unmittelbar zu diesem Resultat, wenn man erwägt, dass

$$\begin{aligned}[x_1^2 x_2 x_3] = {} & x_1 [x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & + x_2 [x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & + x_3 [x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & + x_4 [x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)[x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)] - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & = -4 x_1 x_2 x_3 x_4 = -4r.\end{aligned}$$

Das letzte Glied der Gleichung in u ist

$$\begin{aligned}C = {} & -(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3) \\ = {} & -\left\{\begin{array}{l} x_1^3 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2^3 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3^3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4^3 \\ + x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_4^2 + x_1^2 x_3^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 x_4^2 \end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Der Werth der ersten Zeile ist

$$x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = -2pr,$$

und der Werth der zweiten gleich

$$[x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)]^2$$
$$-2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=q^2-2pr\,.$$

Folglich ist die Resolvente in u

$$u^3-pu^2-4ru+(4pr-q^2)=0\,.$$

Setzt man wieder $u=\frac{1}{4}y+p$, so resultirt

$$y^3+8py^2+16(p^2-4r)y-64q^2=0\,.$$

Sind also y_1, y_2, y_3 die drei Wurzelwerthe dieser Gleichung, so ist

$$\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3-x_4&=\pm\sqrt{y_1}\,,\\
x_1-x_2+x_3-x_4&=\pm\sqrt{y_2}\,,\\
x_1-x_2-x_3+x_4&=\pm\sqrt{y_3}\,,\\
x_1+x_2+x_3+x_4&=\quad 0\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, sobald man die oberen Vorzeichen wählt:

$$\begin{aligned}
x_1&=\frac{1}{4}(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3})\,,\\
x_2&=\frac{1}{4}(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3})\,,\\
x_3&=\frac{1}{4}(-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3})\,,\\
x_4&=\frac{1}{4}(-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3})\,.
\end{aligned}$$

Um die richtige Wahl der Vorzeichen zu treffen, hat man zu erwägen, dass die Gleichung

$$\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3}=-8q$$

erfüllt werden muss. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3-x_4&=2(x_1+x_2)=\sqrt{y_1}\,,\\
x_1-x_2+x_3-x_4&=2(x_1+x_3)=\sqrt{y_2}\,,\\
x_1-x_2-x_3+x_4&=2(x_1+x_4)=\sqrt{y_3}\,,
\end{aligned}$$

also

$$\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3}=8\,\{x_1^2(x_1+x_2+x_3+x_4)+[x_1x_2x_3]\}=-8q\,.$$

je zwei, welche in derselben Zeile stehen, sich nur durch ihr Vorzeichen von einander unterscheiden. Die Gleichung vom sechsten Grade, von welcher sie abhängen, muss drei positive und eben so viele negative beziehungsweise gleiche Wurzelwerthe haben. Setzt man demnach $z^2 = y$, so sind die Wurzeln der äquivalenten kubischen Resolvente

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \\ y_2 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2, \\ y_3 &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 &= -4p + 4(x_1 x_2 + x_3 x_4), \\ (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 &= -4p + 4(x_1 x_3 + x_2 x_4), \\ (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 &= -4p + 4(x_1 x_4 + x_2 x_3). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es seien die drei Untertypen $x_1 x_2 + x_3 x_4$, $x_1 x_3 + x_2 x_4$, $x_1 x_4 + x_2 x_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$u^3 + Au^2 + Bu + C = 0,$$

so wird $y = -4p + 4u$ sein. Die Coefficienten A, B, C lassen sich leicht mit Hülfe symmetrischer Functionen finden. Man findet zunächst

$$A = -p.$$

Ferner ist

$$B = S_{2,1,1} = \frac{1}{2}(S_2 . S_1^2 - 2S_3 . S_1 - S_2^2 + 2S_4) = -4r.$$

Man gelangt unmittelbar zu diesem Resultat, wenn man erwägt, dass

$$\begin{aligned} [x_1^2 x_2 x_3] = {} & x_1[x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & + x_2[x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & + x_3[x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ & + x_4[x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2)] - x_1 x_2 x_3 x_4 \\ = {} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)[x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2)] - 4x_1 x_2 x_3 x_4 \\ = {} & -4x_1 x_2 x_3 x_4 = -4r. \end{aligned}$$

Das letzte Glied der Gleichung in u ist

$$\begin{aligned} C = {} & -(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3) \\ = {} & -\left\{ \begin{aligned} & x_1^3 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2^3 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3^3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4^3 \\ & + x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_4^2 + x_1^2 x_3^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 x_4^2 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Der Werth der ersten Zeile ist

$$x_1 x_2 x_3 x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = -2pr,$$

und der Werth der zweiten gleich

$$[x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2)]^2$$
$$-2 x_1 x_2 x_3 x_4(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) = q^2 - 2pr\,.$$

Folglich ist die Resolvente in u

$$u^3 - pu^2 - 4ru + (4pr - q^2) = 0\,.$$

Setzt man wieder $u = \frac{1}{4}\,y + p$, so resultirt

$$y^3 + 8py^2 + 16(p^2 - 4r)y - 64q^2 = 0\,.$$

Sind also y_1, y_2, y_3 die drei Wurzelwerthe dieser Gleichung, so ist

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= \pm\sqrt{y_1}\,, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= \pm\sqrt{y_2}\,, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= \pm\sqrt{y_3}\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= \quad 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, sobald man die oberen Vorzeichen wählt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})\,, \\ x_2 &= \frac{1}{4}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})\,, \\ x_3 &= \frac{1}{4}(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})\,, \\ x_4 &= \frac{1}{4}(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})\,. \end{aligned}$$

Um die richtige Wahl der Vorzeichen zu treffen, hat man zu erwägen, dass die Gleichung

$$\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3} = -\,8q$$

erfüllt werden muss. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2(x_1 + x_2) = \sqrt{y_1}\,, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2(x_1 + x_3) = \sqrt{y_2}\,, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2(x_1 + x_4) = \sqrt{y_3}\,, \end{aligned}$$

also

$$\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3} = 8\,\{x_1^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + [x_1 x_2 x_3]\} = -\,8q\,.$$

§ 304. Methode von Lagrange*).

Die vorgelegte Gleichung sei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Man hat hier $n = 4 = 2.2$ und die Hülfsgleichung

$$\alpha^2 - 1 = 0.$$

Die zu substituirende Function ist

$$y = x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 = X_1 + \alpha X_2,$$

wo

$$X_1 = x_1 + x_3, \quad X_2 = x_2 + x_4$$

gesetzt ist. Hieraus findet man weiter die Function

$$z = y^2 = u_0 + \alpha u_1,$$

worin

$$u_0 = X_1^2 + X_2^2, \quad u_1 = 2X_1X_2$$

zu setzen ist. Es ist demnach

$$u_1 = 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4),$$

und weil dieser Ausdruck ein Untertypus ist, welcher drei Variationen zulässt, nämlich

$$\begin{gathered} 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \\ 2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \\ 2(x_1 + x_4)(x_2 + x_3), \end{gathered}$$

so ist u_1 ein Wurzelwerth der kubischen Gleichung

$$u^3 + Au^2 + Bu + C = 0$$

und die Coefficienten A, B, C symmetrische Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4.

Um diese Bestimmung vorzunehmen, erwäge man, dass

$$\begin{aligned} b &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4) \\ &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_1x_2 + x_3x_4) \\ &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + (x_1x_4 + x_2x_3). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass, wenn man annimmt

$$u_1 = 2b - 2\zeta,$$

die Gleichung in u sich in eine Gleichung von ζ transformiren

*) Lagrange, Sur la résolution des équations algébriques dans son Traité etc. Note XIII. § 33.

—— Réflexions etc. Nouv. mém. de l'acad. des sciences année 1770 et 1771. Berlin 1772 et 1773 II.

lässt, deren Wurzeln die Untertypen $(x_1 x_3 + x_2 x_4)$, u. s. w. sind. Diese Gleichung ist aber, wie man ohne Schwierigkeit findet, XIII.:

$$\zeta^3 - b\zeta^2 + (ac - 4d)\zeta - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0.$$

Setzen wir für α den Werth -1 ein, so wird

$$z_1 = u_0 - u_1 = a^2 - 2u_1 = a^2 - 4b + 4\zeta_1.$$

Ferner ist

$$X_1 + X_2 = -a, \quad X_1 - X_2 = \sqrt{z_1},$$

folglich

$$X_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{z_1}), \qquad X_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{z_1}).$$

Da nun $X_1 = x_1 + x_3$ ist, so kann man x_1 und x_3 als die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung z. B.

$$x^2 - X_1 x + \lambda = 0$$

betrachten. Um das Absolutglied λ zu bestimmen, braucht man nur die vorgelegte Gleichung durch diese quadratische Gleichung zu dividiren. Setzt man den ersten Theil des Restes gleich Null, so erhält man

$$\lambda = \frac{X_1^3 + aX_1^2 + bX_1 + c}{2X_1 + a}.$$

Da man X_1 mittels eines Werthes von z findet, so erhält man x_1 und x_3 durch Auflösung der quadratischen Gleichung. Um die beiden andern Wurzelwerthe x_2 und x_4 zu erhalten, braucht man in den vorhergehenden Ausdrücken nur das Vorzeichen von $\sqrt{z_1}$ zu ändern. Man kann diese Auflösungen noch auf einfachere Formeln zurückführen, wenn man wieder substituirt

$$\zeta = \frac{1}{4}(z - a^2 + 4b).$$

Dies gibt die Resolvente XVII.:

$$z^3 - (3a^2 - 8b)z^2 + (3a^4 - 16a^2 b + 16b^2 + 16ac - 64d)z$$
$$- (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0.$$

Nimmt man nun in der substituirten Function

$$y = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4$$

aus $\alpha^2 - 1 = 0$ den Werth $\alpha = -1$ an, so hat man

$$y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$

oder

$$z = y^2 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2.$$

also ζ_1^2, ζ_2^2, ζ_3^2 die drei Wurzeln der Resolvente, oder, was dasselbe ist, $z_1 = \zeta_1^2$, $z_2 = \zeta_2^2$, $z_3 = \zeta_3^2$, so findet man leicht

$$4x_4 - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + a = 0,$$

wo die drei eingeklammerten Grössen ein doppeltes Vorzeichen haben. Die letztere Gleichung entspricht demnach acht Partialgleichungen; mit andern Worten: die Wurzel x_4 hat möglicherweise acht Werthe, von denen aber vier wahre Wurzeln, die vier andern ihre negativen Werthe sind. Die Originalgleichung hierzu ist

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0,$$

welche offenbar dieselbe Resolvente hat, wie die vorgelegte. Nimmt man nun an

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= a + 2(x_1 + x_4), \\ \zeta_2 &= a + 2(x_2 + x_4), \\ \zeta_3 &= a + 2(x_3 + x_4), \end{aligned}$$

so folgt daraus weiter

$$\begin{aligned} 4x_1 + (-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + a &= 0, \\ 4x_2 + \quad (\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3) + a &= 0, \\ 4x_3 + \quad (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3) + a &= 0, \\ 4x_4 + (-\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3) + a &= 0. \end{aligned}$$

Wechselt man die Vorzeichen von ζ, so erhält man die vier fremden Auflösungen. Es handelt sich nun darum zu wissen, welches der beiden Systeme von ζ der gegebenen Gleichung angehört. Um dies zu erkennen, muss man die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 zu dreien combiniren. Es ist

$$\begin{aligned} 16x_1x_2 &= [-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_1\zeta_2] + 2a\zeta_3 + a^2, \\ 4(x_3 + x_4) &= 2(\zeta_3 - a), \quad 4(x_1 + x_2) = -2(\zeta_3 + a), \\ 16x_3x_4 &= [-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 - 2\zeta_1\zeta_2] - 2a\zeta_3 + a^2; \end{aligned}$$

folglich

$$16[x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2)] = [2\zeta_1\zeta_2\zeta_3 + a(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) - a^3].$$

Da weiter $a(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) = 3a^3 - 8ab$ ist, so ergibt sich aus der letzten Gleichung die Relation

$$-16c = 2\zeta_1\zeta_2\zeta_3 + 2a(a^2 - 4b)$$

und

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = -(a^3 - 4ab + 8c).$$

Wir sind bereits auf andere Weise zu derselben Bedingungsgleichung gelangt. Ist $a = 0$, so genügt es zu wissen, dass ζ_1, ζ_2, ζ_3 das entgegengesetzte Vorzeichen von c erhält.

Zahlenbeispiel. (Compt. rend. p. 31. 1858.)

Aufzulösen: $x^4 + 24x^2 + 48x + 52 = 0$.

Die Resolvente ist $z^6 + 12z^4 + 23z^2 - 36 = 0$. Ihre Wurzeln $z_1^2 = 1$, $z_2^2 = -4$, $z_3^2 = -9$; also $\zeta_1 = \pm 1$, $\zeta_2 = \pm 2\sqrt{-1}$; $\zeta_3 = \pm 3\sqrt{-1}$. Man hat der oben gegebenen Vorschrift gemäss die Vorzeichen von ζ so zu wählen, dass $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ negativ werde; also $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 2\sqrt{-1}$, $\zeta_3 = -3\sqrt{-1}$. Daraus ergeben sich die gesuchten Wurzeln

$$x_1 \text{ und } x_4 = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{-1}), \quad x_2 \text{ und } x_3 = \frac{1}{4}(1 \pm 5\sqrt{-1}).$$

§ 306. Die Methode der Wurzelsummen und die Formeln von Ampère*).

Ampère geht aus von der unvollständigen Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

und substituirt eine neue Unbekannte für die Summe zweier Wurzeln z. B.

$$x_1 + x_2 = y.$$

Die Wurzeln der Resolvente sind also die Summen je zweier Wurzeln der biquadratischen Gleichung und die Resolvente muss eine Gleichung vom sechsten Grade sein. Dieselbe wird von Grunert auf folgende Art hergeleitet.

Die Coefficienten der gegebenen Gleichung sind

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0, \\
\text{II.} & x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = p, \\
\text{III.} & x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -q, \\
\text{IV.} & x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 = r.
\end{array}$$

Setzt man $x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4) = y$, so folgt aus II. und III.:

$$\begin{array}{ll}
\text{V.} & x_1 x_2 + x_3 x_4 = p + y^2, \\
\text{VI.} & x_1 x_2 - x_3 x_4 = q : y.
\end{array}$$

Wegen der identischen Gleichung

---

*) Ampère, Sur la résolution des équations du quatrième degré. Corr. math. et phys. par Quetelet IX. 147; Grun. Arch. I. 16. 1841.

L. Matthiessen, Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung. II. § 98. Köln 1878.

also ζ_1^2, ζ_2^2, ζ_3^2 die drei Wurzeln der Resolvente, oder, was dasselbe ist, $z_1 = \zeta_1^2$, $z_2 = \zeta_2^2$, $z_3 = \zeta_3^2$, so findet man leicht:

$$4x_4 - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + a = 0,$$

wo die drei eingeklammerten Grössen ein doppeltes Vorzeichen haben. Die letztere Gleichung entspricht demnach acht Partialgleichungen; mit andern Worten: die Wurzel x_4 hat möglicherweise acht Werthe, von denen aber vier wahre Wurzeln, die vier andern ihre negativen Werthe sind. Die Originalgleichung hierzu ist

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0,$$

welche offenbar dieselbe Resolvente hat, wie die vorgelegte. Nimmt man nun an

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= a + 2(x_1 + x_4),\\ \zeta_2 &= a + 2(x_2 + x_4),\\ \zeta_3 &= a + 2(x_3 + x_4),\end{aligned}$$

so folgt daraus weiter

$$\begin{aligned}4x_1 &+ (-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + a = 0,\\ 4x_2 &+ \quad (\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3) + a = 0,\\ 4x_3 &+ \quad (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3) + a = 0,\\ 4x_4 &+ (-\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3) + a = 0.\end{aligned}$$

Wechselt man die Vorzeichen von ζ, so erhält man die vier fremden Auflösungen. Es handelt sich nun darum zu wissen, welches der beiden Systeme von ζ der gegebenen Gleichung angehört. Um dies zu erkennen, muss man die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 zu dreien combiniren. Es ist

$$\begin{aligned}16x_1x_2 &= [-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_1\zeta_2] + 2a\zeta_3 + a^2,\\ 4(x_3 + x_4) &= 2(\zeta_3 - a), \quad 4(x_1 + x_2) = -2(\zeta_3 + a),\\ 16x_3x_4 &= [-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 - 2\zeta_1\zeta_2] - 2a\zeta_3 + a^2;\end{aligned}$$

folglich

$$16[x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)]=[2\zeta_1\zeta_2\zeta_3+a(\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2)-a^3].$$

Da weiter $a(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) = 3a^3 - 8ab$ ist, so ergibt sich aus der letzten Gleichung die Relation

$$-16c = 2\zeta_1\zeta_2\zeta_3 + 2a(a^2 - 4b)$$

und

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = -(a^3 - 4ab + 8c).$$

Wir sind bereits auf andere Weise zu derselben Bedingungsgleichung gelangt. Ist $a = 0$, so genügt es zu wissen, dass ζ_1, ζ_2, ζ_3 das entgegengesetzte Vorzeichen von c erhält.

Zahlenbeispiel. (Compt. rend. p. 31. 1858.)

Aufzulösen: $x^4 + 24x^2 + 48x + 52 = 0$.

Die Resolvente ist $z^6 + 12z^4 + 23z^2 - 36 = 0$. Ihre Wurzeln $z_1^2 = 1$, $z_2^2 = -4$, $z_3^2 = -9$; also $\zeta_1 = \pm 1$, $\zeta_2 = \pm 2\sqrt{-1}$; $\zeta_3 = \pm 3\sqrt{-1}$. Man hat der oben gegebenen Vorschrift gemäss die Vorzeichen von ζ so zu wählen, dass $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ negativ werde; also $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 2\sqrt{-1}$, $\zeta_3 = -3\sqrt{-1}$. Daraus ergeben sich die gesuchten Wurzeln

$$x_1 \text{ und } x_4 = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{-1}), \quad x_2 \text{ und } x_3 = \frac{1}{4}(1 \pm 5\sqrt{-1}).$$

§ 306. Die Methode der Wurzelsummen und die Formeln von Ampère*).

Ampère geht aus von der unvollständigen Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

und substituirt eine neue Unbekannte für die Summe zweier Wurzeln z. B.

$$x_1 + x_2 = y.$$

Die Wurzeln der Resolvente sind also die Summen je zweier Wurzeln der biquadratischen Gleichung und die Resolvente muss eine Gleichung vom sechsten Grade sein. Dieselbe wird von Grunert auf folgende Art hergeleitet.

Die Coefficienten der gegebenen Gleichung sind

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0, \\
\text{II.} & x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = p, \\
\text{III.} & x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -q, \\
\text{IV.} & x_1x_2 \,.\, x_3x_4 = r.
\end{array}$$

Setzt man $x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4) = y$, so folgt aus II. und III.:

$$\begin{array}{ll}
\text{V.} & x_1x_2 + x_3x_4 = p + y^2, \\
\text{VI.} & x_1x_2 - x_3x_4 = q : y.
\end{array}$$

Wegen der identischen Gleichung

---

*) Ampère, Sur la résolution des équations du quatrième degré. Corr. math. et phys. par Quetelet IX. 147; Grun. Arch. I. 16. 1841.

L. Matthiessen, Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung. II. § 98. Köln 1878.

$$(x_1 x_2 + x_3 x_4)^2 - (x_1 x_2 - x_3 x_4)^2 = 4 x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4$$

ist nun

$$(p + y^2)^2 - (q : y)^2 = 4r\,,$$

und nach Entwickelung der einzelnen Glieder dieser Gleichung erhält man die Resolvente

$$\text{VII.} \quad y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)\,y^2 - q^2 = 0\,.$$

Addirt man V. und VI., so wird

$$2x_1 x_2 = 2x_1(y - x_1) = y^2 + p + q : y\,,$$

oder

$$x_1^{\,2} - y x_1 = -\frac{1}{2}(y^2 + p + q : y)\,.$$

Diese quadratische Gleichung liefert die Wurzeln x_1 und x_2:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{y \pm \sqrt{-y^2 - 2\left(p + \frac{q}{y}\right)}\right\}\,.$$

Subtrahirt man VI. von V., so erhält man

$$2x_3 x_4 = -2x_3(y + x_3) = y^2 + p - q : y\,,$$

oder

$$x_3^{\,2} + y x_3 = -\frac{1}{2}(y^2 + p - q : y)\,,$$

welche Gleichung die beiden übrigen Wurzeln x_3 und x_4 liefert, nämlich

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{y \mp \sqrt{-y^2 - 2\left(p - \frac{q}{y}\right)}\right\}\,.$$

Es genügt nun, zur Bestimmung der vier Wurzelwerthe irgend einen der sechs Wurzelwerthe der bikubischen Resolvente einzusetzen.

Die Resolvente VII. hat wegen des negativen Vorzeichens ihres Absolutgliedes q^2 immer eine positive reelle Wurzel y^2. Die beiden übrigen sind entweder zugleich reell oder complex und zwar im ersteren Falle beide positiv oder beide negativ. Hat die Resolvente drei reelle positive Wurzeln y^2, so hat die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln; hat aber die Resolvente eine positive und zwei negative Wurzeln y^2, so sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung sämmtlich complex, ausgenommen, wenn die negativen Wurzeln einander gleich sind, wodurch zwei Wurzeln reell, die beiden übrigen complex werden. Hat endlich die Resolvente eine reelle positive und zwei complexe Wurzeln y^2, so hat die Gleichung in x ein Paar reelle und ein Paar complexe Wurzeln.

Die vorstehenden Bestimmungen können vermittelst der Discriminante der biquadratischen Gleichung ausgedrückt werden. Die Discriminante einer biquadratischen Gleichung, in welcher das zweite Glied Null ist, lautet:

$$\begin{aligned} D_4 &= -\frac{1}{3}(2p^3 - 8pr + 9q^2)^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}(p^2 + 12r)(p^4 - 8p^2r + 6pq^2 + 16r^2) \\ &= 256r^3 + 144pq^2r - 128p^2r^2 - 4p^3q^2 - 27q^4 + 16p^4r. \end{aligned}$$

Ist die Discriminante D_4 positiv, also

$$\frac{1}{3}(2p^3 - 8pr + 9q^2)^2 < \frac{4}{3}(p^2+12r)(p^4-8p^2r+6pq^2+16r^2),$$

so sind alle vier Wurzeln entweder reell oder complex.

Ist die Discriminante D_4 negativ, also

$$\frac{1}{3}(2p^3 - 8pr + 9q^2)^2 > \frac{4}{3}(p^2+12r)(p^4-8p^2r+6pq^2+16r^2),$$

so ist ein Paar Wurzeln reell und ein Paar complex.

Ist endlich $D_4 = 0$, also

$$\frac{1}{3}(2p^3 - 8pr + 9q^2)^2 = \frac{4}{3}(p^2+12r)(p^4-8p^2r+6pq^2+16r^2),$$

so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

Die Ampère'sche Methode steht im nahen Zusammenhange mit der Euler'schen. Setzt man in den quadratischen Gleichungen von Ampère, also in

$$x^2 \mp yx + \frac{1}{2}(y^2 + p \pm q : y) = 0,$$

$4y$ an die Stelle von y^2, so gehen diese beiden quadratischen Gleichungen über in

$$x^2 \mp 2\sqrt{y}.x + \frac{1}{2}(4y + p \pm q : 2\sqrt{y}) = 0$$

und die Ampère'sche Resolvente in die Euler'sche

$$\text{VIII.}\quad y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)y - \frac{1}{64}q^2 = 0.$$

Da der Coefficient des zweiten Gliedes der quadratischen Gleichung, negativ genommen, gleich der Summe je zweier Wurzeln ist, so hat man zur Bestimmung von x die folgenden linearen Gleichungen aufzulösen, worin y_1, y_2, y_3 die drei Wurzeln der kubischen Resolvente bezeichnen:

$$x_1 + x_2 = \mp 2\sqrt{y_1}, \quad x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2) = \pm 2\sqrt{y_1},$$
$$x_1 + x_3 = \mp 2\sqrt{y_2}, \quad x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3) = \pm 2\sqrt{y_2},$$
$$x_1 + x_4 = \mp 2\sqrt{y_3}, \quad x_2 + x_3 = -(x_1 + x_4) = \pm 2\sqrt{y_3}.$$

Wählt man das obere Vorzeichen, so erhält man die Euler'schen Formeln:

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = +\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).$$

Wählt man dagegen überall das untere Vorzeichen, so erhält man

$$x_1 \text{ und } x_2 = +\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).$$

Um nun darüber zu entscheiden, welche Vorzeichen in jedem speciellen Falle zu wählen sind, recurriren wir auf Gleichung VI.:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = q : (-2\sqrt{y_1}) = q : (x_1 + x_2),$$

indem wir voraussetzen, es sei $x_1 + x_2$ der negative Theil der Wurzelsumme 0. Dann geht die Gleichung über in

$$q = (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_3 x_4) = (-2\sqrt{y_1})(-4\sqrt{y_2 y_3}) = +8\sqrt{y_1 y_2 y_3}.$$

Wenn vorausgesetzt wird, dass $x_1 + x_2 = 2\sqrt{y_1}$ d. h. gleich dem positiven Theile der Summe aller Wurzeln sei, so wird

$$q = (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_3 x_4) = (+2\sqrt{y_1})(-4\sqrt{y_2 y_3}) = -8\sqrt{y_1 y_2 y_3}.$$

Ist also in der vorgelegten biquadratischen Gleichung q positiv, so sind die oberen Vorzeichen zu nehmen; dagegen die unteren, wenn q negativ ist.

In Betreff der Realität der Wurzeln kann man sich folgender Kennzeichen bedienen*). Die positive reelle Wurzel der Resolvente sei y_1; die beiden andern Wurzeln sind entweder beide positiv oder beide negativ, weil $y_1 y_2 y_3$ positiv ist.

Sind nun y_2 und y_3 positiv reell, so hat die biquadratische Gleichung vier reelle Wurzeln. Sind dagegen y_2 und y_3 negativ reell, so hat sie zwei Paare von complexen Wurzeln. Es sei

$$y_2 = -u^2, \quad y_3 = -v^2,$$

so hat $\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$ die Werthe

$$iu + iv, \quad iu - iv, \quad -iu + iv, \quad -iu - iv,$$

---

*) Man vergl. Baltzer, die Elemente der Mathematik. III. § 7.

wo i für $\sqrt{-1}$ gesetzt ist. $\sqrt{y_2 y_3}$ ist im ersten und vierten Falle negativ, in den beiden übrigen Fällen positiv.

Sind endlich y_2 und y_3 ein Paar complexer Wurzeln, so hat die biquadratische Gleichung ein Paar reelle und ein Paar complexe Wurzeln. Es sei

$$y_2 = 2u + 2v\sqrt{-1}, \quad y_3 = 2u - 2v\sqrt{-1},$$

so hat man, wenn $u^2 + v^2 = r^2$ und die Quadratwurzeln absolut genommen werden,

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{r+u} + i\sqrt{r-u}, \quad \sqrt{y_3} = \sqrt{r+u} - i\sqrt{r-u}.$$

Demnach erhält man die Systeme

$\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$	$2\sqrt{r+u}$	$2i\sqrt{r-u}$	$-2i\sqrt{r-u}$	$-2\sqrt{r+u}$
$\sqrt{y_2 y_3}$	$2r$	$-2r$	$-2r$	$2r$.

§ 307. Die Methode der Wurzelsummen zur Auflösung der vollständigen Gleichung.

Gegeben sei die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, und es werde die Summe je zweier Wurzeln der Gleichung mit z bezeichnet, so dass man hat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= z_1, & x_2 + x_3 &= -a - z_3 = z_4, \\ x_1 + x_3 &= z_2, & x_2 + x_4 &= -a - z_2 = z_5, \\ x_1 + x_4 &= z_3, & x_3 + x_4 &= -a - z_1 = z_6. \end{aligned}$$

Die Werthe z_1 bis z_6 sind nun offenbar die Wurzeln einer bikubischen Gleichung, welche sich auf eine bikubische mit lauter geraden Potenzen von z reduciren muss, wenn entweder $a = 0$ ist oder $\zeta + \frac{1}{2}a$ an die Stelle von z gesetzt wird. Da es nämlich sechs verschiedene Combinationen der vier Wurzeln zur zweiten Klasse gibt, so muss die Gleichung in z d. i. die Resolvente vom sechsten Grade sein, und da für den Fall

$$a = 0, \quad z_4 = -z_3, \quad z_5 = -z_2, \quad z_6 = -z_1$$

wird, so müssen die ungeraden Potenzen von z verschwinden. Um die Coefficienten der Resolvente in Functionen von a, b, c, d zu erhalten, kann man entweder auf die Resolvente

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$$

der Ampère'schen Methode recurriren, für p, q, r die drei Varianten einführen und $z + \frac{1}{2} a$ an die Stelle von y setzen; oder man kann die Resolvente herleiten von den vier Coefficientengleichungen

$$\begin{array}{lr}
\text{I.} & (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a, \\
\text{II.} & x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = \quad b, \\
\text{III.} & x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = -c, \\
\text{IV.} & x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 = \quad d.
\end{array}$$

Setzt man $x_1 x_2 = y$, $x_1 + x_2 = z$, so folgen aus den Gleichungen II. und III. die beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{array}{lr}
\text{V.} & y + \frac{d}{y} - z(a + z) = \quad b, \\
\text{VI.} & -y(z + a) + \frac{d}{y} z = -c.
\end{array}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach z geschieht nun am einfachsten dadurch, dass man die erste Gleichung mit z multiplicirt und die zweite subtrahirt, woraus sich ein Ausdruck für y ergibt, nämlich

$$y = x_1 x_2 = (z^3 + az^2 + bz + c) : (2z + a).$$

Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung und ordnet nach Potenzen von z, so resultirt die gesuchte bikubische Resolvente XXIV.:

$$\begin{aligned} z^6 + 3az^5 + (3a^2 + 2b)z^4 + (a^3 + 4ab)z^3 + (ac + 2a^2b + b^2 - 4d)z^2 \\ + (a^2c + ab^2 - 4ad)z - (a^2d - abc + c^2) = 0. \end{aligned}$$

Ist $a = 0$, so verschwinden die ungeraden Potenzen von z.

Setzt man $z = \zeta - \frac{1}{2} a$, so erhält man die Resolvente XVII. von Lagrange.

Es ist nun leicht die Gleichung vom sechsten Grade noch auf eine andere einfachere kubische Gleichung zurückzuführen, indem man nämlich ausgeht von der identischen Gleichung

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0,$$

oder kürzer

$$z^2 + az + \eta = 0.$$

Die Function η kann nun drei verschiedene Werthe annehmen, nämlich

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \\
\eta_2 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \\
\eta_3 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).
\end{aligned}$$

Die Gleichung, von welcher η abhängig ist, kann auf verschiedenen

Wegen gefunden werden, z. B. durch Elimination von z aus der bikubischen Gleichung $[z^6] = 0$ und der quadratischen

$$z^2 + az + \eta = 0.$$

Man dividire zu diesem Zwecke diesen quadratischen Factor in die bikubische Gleichung und setze den Rest gleich Null. Der Quotient sei $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Führt man die Multiplication dieser beiden Polynome aus und setzt Glied für Glied einander gleich, so ergeben sich die Coefficienten A, B, C, D aus folgenden sechs Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & A + a = 3a, \\
\text{II.} & B + aA + \eta \quad = 3a^2 + 2b, \\
\text{III.} & C + aB + A\eta = a^3 + 4ab, \\
\text{IV.} & D + aC + B\eta = 2a^2b + ac + b^2 - 4d, \\
\text{V.} & \qquad aD + C\eta = a^2c + ab^2 - 4ad, \\
\text{VI.} & \qquad\qquad D\eta = -(a^2d - abc + c^2);
\end{array}$$

$$A = 2a, \quad B = a^2 + 2b - \eta, \quad C = 2ab - a\eta,$$
$$D = ac + b^2 - 4d - 2b\eta + \eta^2.$$

Die sechste Gleichung liefert in Verbindung mit D die kubische Resolvente XX. in der Form XVI.:

$$\eta^3 - 2b\eta^2 + (ac + b^2 - 4d)\eta + (a^2d - abc + c^2) = 0.$$

Setzt man dagegen

$$z^2 + az + b + \eta = 0,$$

so erhält man die Resolvente XIII.:

$$\eta^3 - b\eta^2 + (ac - 4d)\eta - (a^2d - 4bd + c^2) = 0,$$

worin η die Function $x_1x_2 + x_3x_4$, also einen neuen Untertypus bezeichnet.

Man findet nun mittels der Wurzelwerthe von z die gesuchten Wurzeln, wie folgt:

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}(\pm a + z_1 \pm z_2 \pm z_3),$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = \frac{1}{2}(- a - z_1 \pm z_2 \mp z_3).$$

§ 308. Eine andere Darstellungsweise der Gleichung der Wurzelsummen.

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

und man suche die Gleichung in $z = x_1 + x_2$. Da x_1 und x_2 Wurzeln der Gleichung sind, so ist

$$x_1^4 + ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0,$$
$$x_2^4 + ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0.$$

Subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man

$$(x_1 - x_2) \times \{(x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3) + a(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c\} = 0$$

oder, da $x_1 - x_2$ im Allgemeinen von Null verschieden ist,

$$(1) \qquad z^3 + az^2 + bz + c - x_1 x_2 (2z + a) = 0.$$

Addirt man dagegen die Gleichungen und erwägt, dass

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= z^4 - 2x_1x_2(2z^2 - x_1x_2), \\ a(x_1^3 + x_2^3) &= az(z^2 - 3x_1x_2), \\ b(x_1^2 + x_2^2) &= b(z^2 - 2x_1x_2), \\ c(x_1 + x_2) &= cz \\ 2d &= 2d, \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Addition dieses Systems von Gleichungen

$$(2) \quad 0 = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 2d - x_1x_2(4z^2 + 3az + 2b) + 2x_1^2 x_2^2.$$

Addirt man hierzu das $z$fache der Gleichung (1) dividirt durch 2, so erhält man

$$(3) \quad 0 = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d - x_1x_2(3z^2 + 2az + b) + x_1^2 x_2^2.$$

Substituirt man hierin den Werth $x_1 x_2$ aus (1), so resultirt die Gleichung der Wurzelsummen in der Form

$$(2z+a)^2(z^4+az^3+bz^2+cz+d) - (2z+a)(3z^2+2az+b)(z^3+az^2+bz+c) + (z^3 + az^2 + bz + c)^2 = 0.$$

§ 309. Methode der Wurzelsummen nach Lacroix und Blomstrand*).

Das vorgelegte Polynom $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ lässt sich in zwei quadratische Factoren zerlegen, von denen je einer die Hälfte der vier Wurzeln liefert, nämlich

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + fx + g = 0,$$
$$x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4 = x^2 + hx + k = 0.$$

Multiplicirt man die beiden quadratischen Trinome miteinander, so erhält man das Biquadrat

*) Lacroix, Compl. d'algèbre. § 49.
Blomstrand, De methodis praecipuis etc. p. 20.

$$x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+(x_1x_2+[x_1+x_2][x_3+x_4]+x_3x_4)x^2$$
$$-(x_1x_2[x_3+x_4]+x_3x_4[x_1+x_2])x+x_1x_2x_3x_4$$
$$=x^4+(f+h)x^3+(g+fh+k)x^2+(fk+gh)x+gk=0.$$

Hieraus findet man durch Vergleichung mit den entsprechenden Coefficienten des gegebenen Biquadrats eine Gleichung vom sechsten Grade für

$$f=-(x_1+x_2),$$

indem die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 sechs solche Variationen geben. Um die Gleichung in f zu erhalten, löse man die vier Gleichungen mit vier Unbekannten

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & f+h=a, \\ \text{II.} & g+fh+k=b, \\ \text{III.} & fk+gh=c, \\ \text{IV.} & gk=d \end{array}$$

nach f auf. Aus II. und III. findet man die Relationen

$$g=\frac{bf-f^2h-c}{f-h},\quad k=-\frac{bh-fh^2-c}{f-h},$$

oder mit Hülfe der Gleichung I.:

$$\text{V.}\quad g=\frac{f^3-af^2+bf-c}{2f-a},$$

$$\text{VI.}\quad k=\frac{f^3-2af^2+(a^2+b)f-(ab-c)}{2f-a}.$$

Bemerkenswerth ist hier die Form der Dividenden. Ist nämlich die Function

$$f^3-af^2+bf-c=0,$$

so ist die Gleichung

$$f^3-2af^2+(a^2+b)f-(ab-c)=0$$

die Gleichung der Wurzelsummen der vorhergehenden.

Setzt man beide Werthe g und k in IV. ein, so erhält man

$$(f^3-af^2+bf-c)(f^3-2af^2+[a^2+b]f-[ab-c])=d(2f-a)^2,$$

und wenn $f=-(x_1+x_2)=-y$ gesetzt wird, die Resolvente XXIV.

Diese Resolvente lässt sich, wie schon früher gezeigt worden ist, in eine andere verwandeln, in welcher die geradstelligen Glieder fehlen, wenn man $f=\frac{1}{2}a+z$ setzt. Der Grund davon ist leicht einzusehen, wenn f und z als Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4 ausgedrückt werden. Es ist nämlich

Die letzte Gleichung kann man durch v dividiren, da v im Allgemeinen von Null verschieden ist. Setzt man den Werth von v^2 aus dieser in die erste ein, so erhält man eine Gleichung in u vom sechsten Grade, welche die Gleichung der halben Wurzelsummen oder der arithmetischen Mittel ist.

Bette hat seine Methode nur auf die unvollständige biquadratische Gleichung angewendet. Die vorstehende Methode ist also eine Verallgemeinerung derselben.

§ 311. Verallgemeinerung der Formeln von Ampère.

Die Resolvente XXIV. genügt mit einem einzigen Wurzelwerthe y sämmtlichen Werthen von x. Setzt man wie oben

$$y = x_1 + x_2 = 2u, \quad z = x_1 - x_2 = 2v,$$

so hat man

$$(4u + a)v^2 + (4u^3 + 3au^2 + 2bu + c) = 0,$$

also

$$v = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c)}{4u + a}},$$

und wenn man beiderseits nach einander $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = u$ addirt und subtrahirt, so erhält man die Wurzelwerthe

$$x_1 \text{ und } x_2 = u \pm \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c)}{4u + a}}.$$

Da ferner $\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = -\frac{1}{2}a - u$ ist, so erhält man den entsprechenden Werth von v, wenn man in $\left(\frac{1}{2}a + u\right)$ in der v-Gleichung an die Stelle von u setzt; dies gibt

$$v = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) = \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c) + \frac{1}{4}(a^3 - 4ab + 8c)}{4u + a}},$$

$$\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = -\frac{1}{2}a - u,$$

folglich

$$x_3 \text{ und } x_4$$

$$= -\frac{1}{2}a - u \pm \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c) + \frac{1}{4}(a^3 - 4ab + 8c)}{4u + a}},$$

Ist $a = 0$, so reduciren sich die allgemeinen Wurzelformen auf die Ampère'schen:

$$x_1 \text{ und } x_2 = \quad u \pm \sqrt{-u^2 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[z \pm \sqrt{-z^2 - 2\left(b + \frac{c}{z}\right)}\right],$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -u \pm \sqrt{-u^2 - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{u}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[z \mp \sqrt{-z^2 - 2\left(b - \frac{c}{z}\right)}\right].$$

§ 312. Die Methode des arithmetischen Mittels — Methode von Job*).

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bezeichnen wir das arithmetische Mittel zweier Wurzeln mit z, also

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = z_1, \quad \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = z_4,$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_3) = z_2, \quad \frac{1}{2}(x_2 + x_4) = z_5,$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_4) = z_3, \quad \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = z_6,$$

so muss die Gleichung in z eine bikubische sein, also allgemein

$$z^6 + Az^5 + Bz^4 + Cz^3 + Dz^2 + Ez + F = 0.$$

Um die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ zu bestimmen, bedenke man, dass sie symmetrische Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 also Functionen der Coefficienten a, b, c, d sind.

Man findet nun

$$A = -[z_1] = -\frac{3}{2}[x_1] = \frac{3}{2}a,$$

$$B = [z_1 z_2] = \frac{1}{4}\left\{\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}[x_1{}^2] - 2\cdot\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}[x_1 x_2]\right\} = \frac{1}{4}(3a^2 + 2b),$$

$$C = -[z_1 z_2 z_3] = \frac{1}{8}(a^3 + 4ab),$$

$$D = \quad [z_1 z_2 z_3 z_4] = \frac{1}{16}(2a^2 b + ac + b^2 - 4d),$$

*) Job, Beitrag zur Auflösung der Gleichungen. Dresden 1864.

Die letzte Gleichung kann man durch v dividiren, da v im Allgemeinen von Null verschieden ist. Setzt man den Werth von v^2 aus dieser in die erste ein, so erhält man eine Gleichung in u vom sechsten Grade, welche die Gleichung der halben Wurzelsummen oder der arithmetischen Mittel ist.

Bette hat seine Methode nur auf die unvollständige biquadratische Gleichung angewendet. Die vorstehende Methode ist also eine Verallgemeinerung derselben.

§ 311. Verallgemeinerung der Formeln von Ampère.

Die Resolvente XXIV. genügt mit einem einzigen Wurzelwerthe y sämmtlichen Werthen von x. Setzt man wie oben

$$y = x_1 + x_2 = 2u, \quad z = x_1 - x_2 = 2v,$$

so hat man

$$(4u + a)v^2 + (4u^3 + 3au^2 + 2bu + c) = 0,$$

also

$$v = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c)}{4u + a}},$$

und wenn man beiderseits nach einander $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = u$ addirt und subtrahirt, so erhält man die Wurzelwerthe

$$x_1 \text{ und } x_2 = u \pm \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c)}{4u + a}}.$$

Da ferner $\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = -\frac{1}{2}a - u$ ist, so erhält man den entsprechenden Werth von v, wenn man in $\left(\frac{1}{2}a + u\right)$ in der v-Gleichung an die Stelle von u setzt; dies gibt

$$v = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) = \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c) + \frac{1}{4}(a^3 - 4ab + 8c)}{4u + a}},$$

$$\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = -\frac{1}{2}a - u,$$

folglich

$$x_3 \text{ und } x_4$$

$$= -\frac{1}{2}a - u \pm \sqrt{\frac{-(4u^3 + 3au^2 + 2bu + c) + \frac{1}{4}(a^3 - 4ab + 8c)}{4u + a}},$$

Ist $a = 0$, so reduciren sich die allgemeinen Wurzelformen auf die Ampère'schen:

$$\begin{aligned} x_1 \text{ und } x_2 &= \quad u \pm \sqrt{-u^2 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{u}} \\ &= \frac{1}{2}\left[z \pm \sqrt{-z^2 - 2\left(b + \frac{c}{z}\right)}\right], \\ x_3 \text{ und } x_4 &= -u \pm \sqrt{-u^2 - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{u}} \\ &= -\frac{1}{2}\left[z \mp \sqrt{-z^2 - 2\left(b - \frac{c}{z}\right)}\right]. \end{aligned}$$

§ 312. Die Methode des arithmetischen Mittels — Methode von Job*).

Gegeben sei die vollständige Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bezeichnen wir das arithmetische Mittel zweier Wurzeln mit z, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= z_1, & \frac{1}{2}(x_2 + x_3) &= z_4, \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_3) &= z_2, & \frac{1}{2}(x_2 + x_4) &= z_5, \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_4) &= z_3, & \frac{1}{2}(x_2 + x_3) &= z_6, \end{aligned}$$

so muss die Gleichung in z eine bikubische sein, also allgemein

$$z^6 + Az^5 + Bz^4 + Cz^3 + Dz^2 + Ez + F = 0.$$

Um die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ zu bestimmen, bedenke man, dass sie symmetrische Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 also Functionen der Coefficienten a, b, c, d sind.

Man findet nun

$$A = -[z_1] = -\frac{3}{2}[x_1] = \frac{3}{2}a,$$

$$B = [z_1 z_2] = \frac{1}{4}\left\{\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}[x_1{}^2] - 2\cdot\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}[x_1 x_2]\right\} = \frac{1}{4}(3a^2 + 2b),$$

$$C = -[z_1 z_2 z_3] = \frac{1}{8}(a^3 + 4ab),$$

$$D = \quad [z_1 z_2 z_3 z_4] = \frac{1}{16}(2a^2 b + ac + b^2 - 4d),$$

*) Job, Beitrag zur Auflösung der Gleichungen. Dresden 1864.

$$E = -[z_1 z_3 z_3 z_4 z_5] = \frac{1}{32}(a^2 c + ab^2 - 4ad),$$

$$F = \quad [z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6] = -\frac{1}{64}(a^2 d - abc + c^2).$$

Die Resolvente ist demgemäss

$$z^6 + \frac{3}{2} a z^5 + \frac{1}{4}(3a^2 + 2b) z^4 + \frac{1}{8}(a^3 + 4ab) z^3$$
$$+ \frac{1}{16}(2a^2 b + ac + b^2 - 4d) z^2 + \frac{1}{32}(a^2 c + ab^2 - 4ad) z$$
$$- \frac{1}{64}(a^2 d - abc + c^2) = 0 .$$

Da nun

$$z_1 + z_6 = z_2 + z_5 = z_3 + z_4 = -\frac{1}{2} a$$

ist, so kann man annehmen, dass je ein Paar der Wurzeln der bikubischen Resolvente der Wurzeln die quadratischen Gleichung

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + y = 0$$

bilde, wodurch die Gleichung vom sechsten Grade in drei quadratische Factoren zerlegt werden kann, welche wegen der drei möglichen Werthe von y, nämlich $z_1 z_6$, $z_2 z_5$, $z_3 z_4$ von einer kubischen Gleichung in y abhängig ist. Die drei quadratischen Factoren sind demnach

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + y_1 = 0 ,$$

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + y_2 = 0 ,$$

$$z^2 + \frac{1}{2} a z + y_3 = 0 ,$$

und y_1, y_2, y_3 die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0 .$$

Multiplicirt man die drei quadratischen Gleichungen mit einander, so resultirt

$$z^6 + \frac{3}{2} a z^5 + \left(\frac{3}{4} a^2 + y_1 + y_2 + y_3\right) z^4 + a\left(\frac{1}{8} a^2 + y_1 + y_2 + y_3\right) z^3$$
$$+ \left[\frac{1}{4} a^2 (y_1 + y_2 + y_3) + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1\right] z^2 + \frac{1}{2} a (y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) z$$
$$+ y_1 y_2 y_3 = 0 .$$

Setzt man in den beiden bikubischen Gleichungen die homologen

Coefficienten einander gleich, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für y_1, y_2, y_3 oder A, B, C:

$$-A = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{2} b,$$

$$B = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = \frac{1}{16}(ac + b^2 - 4d),$$

$$-C = y_1 y_2 y_3 = -\frac{1}{64}(a^2 d - abc + c^2).$$

Die kubische Resolvente ist demnach

$$y^3 - \frac{1}{2} b y^2 + \frac{1}{16}(ac + b^2 - 4d) y + \frac{1}{64}(a^2 d - abc + c^2) = 0.$$

Da nun aus der quadratischen Gleichung folgt

$$z = -\frac{1}{4}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 16y}\right),$$

und in speciellerer Form

$$z_1 \text{ und } z_6 = -\frac{1}{4}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 16y_1}\right),$$

$$z_2 \text{ und } z_5 = -\frac{1}{4}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 16y_2}\right),$$

$$z_3 \text{ und } z_4 = -\frac{1}{4}\left(a \mp \sqrt{a^2 - 16y_3}\right),$$

so resultirt aus den sechs Substitutionsgleichungen das Wurzelsystem

$$x_1 = \frac{1}{2} a + z_1 + z_2 + z_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a + z_1 + z_4 + z_5,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} a + z_2 + z_4 + z_6,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} a + z_3 + z_5 + z_6.$$

Die Wurzelausdrücke sind demnach

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{4}\left[a + \sqrt{a^2 - 16y_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 16y_2} + \sqrt{a^2 - 16y_3}\right)\right],$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{4}\left[a - \sqrt{a^2 - 16y_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 16y_2} - \sqrt{a^2 - 16y_3}\right)\right].$$

§ 313. Die Methode der Wurzelproducte oder der geometrischen Mittel*).

Diese Methode gründet sich auf die Substitution des Untertypus (28) $x_1 x_2$ und führt auf eine Resolvente, welche eine reciproke Gleichung vom sechsten Grade ist, also auf eine kubische reducirt werden kann. Gegeben sei dabei die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bezeichnet man das geometrische Mittel zweier Wurzeln der Gleichung mit u oder das Product derselben mit y, so wird

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= u_1^2 = y_1, & x_2 x_3 &= u_4^2 = d : y_3 = \eta_3, \\ x_1 x_3 &= u_2^2 = y_2, & x_2 x_4 &= u_5^2 = d : y_2 = \eta_2, \\ x_1 x_4 &= u_3^2 = y_3, & x_3 x_4 &= u_6^2 = d : y_1 = \eta_1. \end{aligned}$$

Es sind nun die Werthe $y_1, y_2, y_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ offenbar die sechs Wurzeln der oben bezeichneten reciproken Gleichung. Um zu derselben zu gelangen, setze man in den vier Coefficientengleichungen

$$\begin{aligned} &\text{I.} & &(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a, \\ &\text{II.} & &x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = b, \\ &\text{III.} & &x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = -c, \\ &\text{IV.} & &x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 = d, \end{aligned}$$

den Untertypus $x_1 x_2 = y$ und den Untertypus $x_1 + x_2 = z$. Dann erhält man die neuen Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\text{V.} & y + \frac{d}{y} - z(a + z) &= b, \quad \text{(aus II.)} \\ &\text{VI.} & -y(z + a) + \frac{d}{y} z &= -c, \quad \text{(aus III.)}. \end{aligned}$$

Substituirt man z aus VI. in V., so erhält man die Resolvente XXVI.:

$$\begin{aligned} y^6 - by^5 + (ac - d)y^4 - (a^2 d - 2bd + c^2)y^3 \\ + (ac - d)dy^2 - bd^2 y + d^3 = 0; \end{aligned}$$

---

*) L. Matthiessen, Eine neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VIII. 140. 1863; Grun. Arch. XLI. S. 231 u. XLIV. S. 80; Heis, Aufgabensammlung § 98[b], 1864.

—— Résolution nouvelle de l'équation du quatrième degré. Giornale di matem. dal Prof. Battaglini. Napoli 1867.

—— Methode der Wurzelproducte, eine biquadratische Gleichung aufzulösen. Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung II. § 98[b]. Köln. 1878, und Commentar zu Heis' Aufgabensammlung § 98[b]. Köln 1874.

oder wenn z aus V. in VI. eingesetzt wird, die Resolvente XIII. in der Form

$$\left(y+\frac{d}{y}\right)^3-b\left(y+\frac{d}{y}\right)^2+(ac-4d)\left(y+\frac{d}{y}\right)$$
$$-(a^2d-4bd+c^2)=0.$$

Das Absolutglied ist die Reducente (23); nämlich

$$a^2d-4bd+c^2=(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3).$$

Die Gleichung XXVI. hat sechs Wurzeln $y_1, y_2, y_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$, von denen je zwei, y und η, zusammengehören und durch die Relation $y\eta=d$ mit einander verbunden sind. Wählt man drei der nicht zusammengehörigen Wurzeln z. B. y_1, y_2, y_3, so sind die Wurzelausdrücke der vorgelegten biquadratischen Gleichung entweder

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{y_1y_2y_3}{d}},\quad x_2=\pm\sqrt{\frac{y_1\eta_2\eta_3}{d}},$$
$$x_3=\pm\sqrt{\frac{\eta_1y_2\eta_3}{d}},\quad x_4=\pm\sqrt{\frac{\eta_1\eta_2y_3}{d}},$$

wenn

$$[y_1y_2y_3+(y_1+y_2+y_3)d]:\sqrt{y_1y_2y_3d}=\mp a;$$

oder

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{\eta_1\eta_2\eta_3}{d}},\quad x_2=\sqrt{\frac{\eta_1y_2y_3}{d}},$$
$$x_3=\pm\sqrt{\frac{y_1\eta_2y_3}{d}},\quad x_4=\sqrt{\frac{y_1y_2\eta_3}{d}},$$

wenn

$$[\eta_1\eta_2\eta_3+(\eta_1+\eta_2+\eta_3)d]:\sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3d}=\mp a.$$

Ist im ersten Falle dagegen

$$[y_1y_2y_3+(y_1+y_2+y_3)d]:\sqrt{y_1y_2y_3d}=\mp c:\sqrt{d},$$

so gilt das zweite System; und ist im zweiten Falle

$$[\eta_1\eta_2\eta_3+(\eta_1+\eta_2+\eta_3)d]:\sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3d}=\mp c:\sqrt{d},$$

so gilt das erste System.

Die erste der beiden Bedingungsgleichungen

$$[y_1y_2y_3+(y_1+y_2+y_3)d]:\sqrt{y_1y_2y_3d}=\mp a$$

lässt sich durch die folgenden ersetzen:

$$[\eta_1\eta_2\eta_3+(\eta_1+\eta_2+\eta_3)d]:\sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3d}=\mp c:\sqrt{d},$$
$$(d+\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3):\sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3}=\mp a,$$
$$(d+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3):\sqrt{y_1y_2y_3}=\mp c:\sqrt{d},$$

$$(\sqrt{y_1}+\sqrt{\eta_1})(\sqrt{y_2}+\sqrt{\eta_2})(\sqrt{y_3}+\sqrt{\eta_3})$$
$$+(\sqrt{y_1}-\sqrt{\eta_1})(\sqrt{y_2}-\sqrt{\eta_2})(\sqrt{y_3}-\sqrt{\eta_3}) = \mp 2a\sqrt{d},$$
$$(\sqrt{y_1}+\sqrt{\eta_1})(\sqrt{y_2}+\sqrt{\eta_2})(\sqrt{y_3}+\sqrt{\eta_3})$$
$$-(\sqrt{y_1}-\sqrt{\eta_1})(\sqrt{y_2}-\sqrt{\eta_2})(\sqrt{y_3}-\sqrt{\eta_3}) = \mp 2c.$$

Die Transformationen der zweiten Bedingungsgleichung werden den vorstehenden analog gebildet, indem man η mit y vertauscht.

Man kann die vier Wurzelwerthe auch in logarithmischen Ausdrücken wiedergeben, und zwar ist im ersten Falle:

$$\begin{aligned}
\log(x_1^2) &= \log y_1 + \log y_2 + \log y_3 - \log d,\\
\log(x_2^2) &= \log y_1 + \log \eta_2 + \log \eta_3 - \log d,\\
\log(x_3^2) &= \log \eta_1 + \log y_2 + \log \eta_3 - \log d,\\
\log(x_4^2) &= \log \eta_1 + \log \eta_2 + \log y_3 - \log d,
\end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Relation $y\eta = d$:

$$\begin{aligned}
\log(x_1^2) &= \log y_1 + \log y_2 + \log y_3 - \log d,\\
\log(x_2^2) &= \log y_1 - \log y_2 - \log y_3 + \log d,\\
\log(x_3^2) &= -\log y_1 + \log y_2 - \log y_3 + \log d,\\
\log(x_4^2) &= -\log y_1 - \log y_2 + \log y_3 + \log d.
\end{aligned}$$

Wenn

$$[y_1 y_1 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = \mp c : \sqrt{d}$$

gefunden wird, so wähle man statt eines der Werthe y_1, y_2, y_3 den zugehörigen Werth η, oder man kann auch setzen:

$$\begin{aligned}
\log(x_1^2) &= -\log y_1 - \log y_2 - \log y_3 + 2\log d,\\
\log(x_2^2) &= -\log y_1 + \log y_2 + \log y_3,\\
\log(x_3^2) &= +\log y_1 - \log y_2 + \log y_3,\\
\log(x_4^2) &= +\log y_1 + \log y_2 - \log y_3.
\end{aligned}$$

Da sich die allgemeine biquadratische Gleichung immer so transformiren lässt, dass das Absolutglied gleich 1 wird, so ist nach einer derartigen Verwandlung:

$$\left.\begin{matrix}\log(x_1^2)\\ \log(x_2^2)\end{matrix}\right\} = -\log y_1 \mp (\log y_2 + \log y_3),$$

$$\left.\begin{matrix}\log(x_3^2)\\ \log(x_4^2)\end{matrix}\right\} = +\log y_1 \mp (\log y_2 - \log y_3).$$

Es sind dies Wurzelformen, welche eine auffallende Aehnlichkeit mit den Euler'schen haben. Da ferner

$$x_1 + \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} = -a$$

ist, so kann man den vier Wurzeln auch die folgende Form geben:

$$x_1 = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - (y_1 + y_2 + y_3)},$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - (y_1 + \eta_2 + \eta_3)},$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - (\eta_1 + y_2 + \eta_3)},$$
$$x_4 = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - (\eta_1 + \eta_2 + y_3)};$$

und für den Fall, dass $a = 0$ ist,

$$x_1^2 = -(y_1 + y_2 + y_3),$$
$$x_2^2 = -(y_1 + \eta_2 + \eta_3),$$
$$x_3^2 = -(\eta_1 + y_2 + \eta_3),$$
$$x_4^2 = -(\eta_1 + \eta_2 + y_3).$$

Wenn die gewählten drei nicht zusammengehörigen Wurzeln y_1, y_2, y_3 der bikubischen Resolvente XXVI. der ersten Bedingungsgleichung genügen, so ist auch noch

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{y_1 y_2 y_3}{d}} = -a \mp \frac{(y_1 + y_2 + y_3)d}{\sqrt{y_1 y_2 y_3 d}},$$

oder

$$\frac{1}{x_1} = -\frac{c}{d} \mp \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{\sqrt{\eta_1 \eta_2 \eta_3}},$$
$$\frac{1}{x_2} = -\frac{c}{d} \mp \frac{\eta_1 + y_2 + y_3}{\sqrt{\eta_1 y_2 y_3}},$$
$$\frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d} \mp \frac{y_1 + \eta_2 + y_3}{\sqrt{y_1 \eta_2 y_3}},$$
$$\frac{1}{x_4} = -\frac{c}{d} \mp \frac{y_1 + y_2 + \eta_3}{\sqrt{y_1 y_2 \eta_3}}.$$

Für die speciellen Fälle $a = 0$ oder $c = 0$ nehmen diese Wurzelausdrücke noch einfachere Formen an. Um nun darüber zu entscheiden, welche drei nicht zusammengehörigen Wurzeln der Resolvente man in die Wurzelausdrücke einzuführen hat, beachte man, dass drei solche Wurzeln y_1, y_2, y_3 aus den beiden Gruppen abc, $\alpha\beta\gamma$ der sechs möglichen Wurzeln auf acht verschiedene Arten erhalten werden, nämlich die Variationen ohne Wiederholung

I. $abc,\quad \alpha\beta\gamma,\quad \alpha b\gamma,\quad \alpha\beta c,$

II. $\alpha\beta\gamma,\quad \alpha bc,\quad a\beta c,\quad ab\gamma.$

Ist die Variation $y_1 y_2 y_3$ der ersten Reihe entnommen und genügt sie der Bedingungsgleichung

$$[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = \mp a,$$

so hat man die Variationen I. zu nehmen; genügt sie derselben nicht, so genügt sie jedenfalls der andern, und man kann dann entweder das zweite System der Wurzelausdrücke bilden oder, wenn man will, die Variation $y_1 y_2 y_3$ aus der Reihe II. und zwar beliebig wählen und sie in das erste System einführen. Zwei Gruppen der einen geben $+a$, die beiden übrigen $-a$; zwei Gruppen der andern Reihe geben $+c:\sqrt{d}$, die beiden übrigen $-c:\sqrt{d}$.

Zahlenbeispiel. Aufzulösen:

$$x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 12\frac{5}{12}x^2 + 3\frac{11}{12}x + 1 = 0.$$

Die Resolvente ist

$$y^6 + 12\frac{5}{12}y^5 + 1\frac{11}{18}y^4 - 40\frac{89}{144}y^3 + 1\frac{11}{18}y^2 + 12\frac{5}{12}y + 1 = 0.$$

Substituirt man $y + \frac{1}{y} = z$, so erhält man die kubische Resolvente

$$z^3 + 12\frac{5}{12}z^2 - 1\frac{7}{18}z - 65\frac{65}{144} = 0.$$

Hieraus berechnet sich

$$z_1 = -2\frac{1}{2}, \quad z_2 = -12\frac{1}{12}, \quad z_3 = 2\frac{1}{6}.$$

Die bikubische Resolvente hat demnach folgende Wurzelwerthe:

$$a = -2, \quad b = -12, \quad c = \frac{3}{2},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{12}, \quad \gamma = \frac{2}{3},$$

wo die Buchstaben a, b, c eine von den Coefficienten der vorgelegten Gleichung verschiedene Bedeutung haben. Die acht Variationen sind nun:

$$\text{I.} \quad -2,\ -12,\ \frac{3}{2};\ -2,\ -\frac{1}{12},\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{2},\ -12,\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{12},\ \frac{3}{2};$$

$$\text{II.} \quad -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{12},\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{2},\ -12,\ \frac{3}{2};\ -2,\ -\frac{1}{12},\ \frac{3}{2};\ -2,\ -12,\ \frac{2}{3}.$$

Wählt man die Variation $y_1 y_2 y_3$ aus der Reihe I. z. B. $-2, -12, \frac{3}{2}$, so erfüllt sie die Bedingung

$$[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = -c : \sqrt{d}.$$

Da nun

$$\eta_1 = \frac{1}{-2}, \quad \eta_2 = \frac{1}{-12}, \quad \eta_3 = \frac{2}{3}$$

ist, so sind die Wurzelwerthe

$$x_1 = +\sqrt{\frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{-12} \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{1}{6},$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{1}{-2} \cdot -12 \cdot \frac{3}{2}} = +3,$$

$$x_3 = +\sqrt{-2 \cdot \frac{1}{-12} \cdot \frac{3}{2}} = +\frac{1}{2},$$

$$x_4 = +\sqrt{-2 \cdot -12 \cdot \frac{2}{3}} = -4 \cdot$$

Statt das zweite System der Wurzelformen zu wählen, hätten wir auch die Variation $y_1 y_2 y_3$ aus der Reihe II. entnehmen können z. B. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, \frac{2}{3}$; denn diese erfüllt die Bedingung

$$[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = -a.$$

Da nun

$$\eta_1 = \frac{2}{-1}, \qquad \eta_2 = \frac{12}{-1}, \qquad \eta_3 = \frac{3}{2}$$

ist, so sind die gesuchten Wurzelwerthe:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{1}{6},$$

$$x_2 = +\sqrt{-\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{-1} \cdot \frac{3}{2}} = +3,$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{2}{-1} \cdot -\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2}} = +\frac{1}{2},$$

$$x_4 = +\sqrt{\frac{2}{-1} \cdot \frac{12}{-1} \cdot \frac{2}{3}} = -4.$$

Auf die richtige Stellung der Vorzeichen ist hier überall streng Acht zu geben.

Bei der ersten Wahl der Variation $y_1 y_2 y_3$ aus der Gruppe I. wurde die Bedingung

$$[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = -c : \sqrt{d},$$

erfüllt. Dasselbe geschieht auch durch jede der vier Variationen

$$y_1 y_2 y_3, \quad y_1 \eta_2 \eta_3, \quad \eta_1 y_2 \eta_3, \quad \eta_1 \eta_2 y_3 \cdot$$

Die Variationen

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3, \quad \eta_1 y_2 y_3, \quad y_1 \eta_2 y_3, \quad y_1 y_2 \eta_3$$

dagegen erfüllen die Bedingung

$$[\eta_1 \eta_2 \eta_3 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)d] : \sqrt{\eta_1 \eta_2 \eta_3 d} = -a.$$

Dieselben genügen nun auch den Wurzelformen

$$x_1 = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)}\,;$$

denn es ist

$$x_1 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{2}{3}\right)} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,;$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}\,; \quad x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,; \quad x_4 = -\frac{1}{3} - 3\frac{2}{3}\,.$$

§ 314. Andere Methode der Auflösung mittels der Gleichung der Wurzelproducte.

So wie bei der Ampère'schen Methode ein einziger Wurzelwerth der Resolvente hinreicht, um alle vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu berechnen, so genügt auch die bikubische Resolvente XXVI. mit einem einzigen Wurzelwerthe y sämmtlichen Werthen von x. Setzt man nämlich $d : y = \eta$, so ist gemäss der Gleichung VI.:

$$z = x_1 + x_2 = \frac{c - ay}{y - \eta}\,,$$

$$-(a + z) = x_3 + x_4 = \frac{a\eta - c}{y - \eta}\,;$$

folglich

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - \frac{c - ay}{y - \eta}\,x + y = 0\,,$$

und

$$x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3 x_4 = x^2 - \frac{a\eta - c}{y - \eta}\,x + \eta = 0\,.$$

Multiplicirt man diese beiden quadratischen Gleichungen mit einander, so erhält man

$$x^4 + ax^3 + \left[(y + \eta) + \frac{(c - ay)(a\eta - c)}{(y - \eta)^2}\right] x^2 + cx + d = 0\,.$$

Daraus ergibt sich sofort die Resolvente

$$y + \eta + \frac{(c - ay)(a\eta - c)}{(y - \eta)^2} = b\,.$$

Die Wurzelformen sind in Folge der quadratischen Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{c - ay}{2(y - \eta)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{c - ay}{y - \eta}\right)^2 - 4y}$$

$$= \frac{y(c - ay) \pm \sqrt{y^2(c - ay)^2 - 4y(y^2 - d)^2}}{2(y^2 - d)}\,;$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{a\eta - c}{2(y-\eta)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\eta - c}{y-\eta}\right)^2 - 4\eta}$$

$$= \frac{ad - cy \pm \sqrt{(ad-cy)^2 - 4d(y^2-d)^2 : y}}{2(y^2-d)}.$$

Recurriren wir auf das numerische Beispiel

$$x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 12\frac{5}{12}x^2 + 3\frac{11}{12}x + 1 = 0,$$

wählen unter den Wurzeln der Resolvente den Werth $y = -2$, so berechnen sich aus den beiden vorstehenden Formeln die Werthe

$$x_1 = +\frac{1}{2}, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = +3, \quad x_4 = -\frac{1}{6}.$$

Nimmt man statt dessen den Werth $y = -12$, so findet man

$$x_1 = +3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = +\frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{6}.$$

Substituirt man $y = 1\frac{1}{2}$, so wird

$$x_1 = +3, \quad x_2 = +\frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{6}, \quad x_4 = -4.$$

Für $y = -\frac{1}{2}$ wird gefunden

$$x_1 = +3, \quad x_2 = -\frac{1}{6}, \quad x_3 = +\frac{1}{2}, \quad x_4 = -4.$$

Für $y = -\frac{1}{12}$ erhält man

$$x_1 = +\frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{6}, \quad x_3 = +3, \quad x_4 = -4.$$

Substituirt man endlich $y = \frac{2}{3}$, so findet man

$$x_1 = -\frac{1}{6}, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = +3, \quad x_4 = +\frac{1}{2}.$$

Sind in einem speciellen Falle a und c der Null gleich, also

$$x^4 + bx^2 + d = 0,$$

so ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = \pm\sqrt{-y}, \quad x_3 \text{ und } x_4 = \pm\sqrt{-\eta}.$$

Die Resolvente reducirt sich in diesem Falle auf

$$\left(y + \frac{d}{y}\right)^3 - b\left(y + \frac{d}{y}\right)^2 - 4d\left(y + \frac{d}{y}\right) + 4bd = 0,$$

welche sich in zwei Factoren zerlegen lässt, nämlich in

$$\left(y + \frac{d}{y}\right)^2 - 4d = 0,$$

und

$$\left(y + \frac{d}{y}\right) - b = 0.$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$y + \frac{d}{y} = \pm 2\sqrt{d}, \quad y + \frac{d}{y} = b,$$

sowie die sechs Wurzelwerthe

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{d}, \quad \left.\begin{matrix} y_5 \\ y_6 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4d}.$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Die Resolvente hat die Wurzelwerthe

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} = \pm 6, \quad \left.\begin{matrix} y_5 \\ y_6 \end{matrix}\right\} = -6\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}.$$

Es ist folglich bei Einführung des Werthes $y_5 = -4$:

$$x_1 \text{ und } x_2 = \pm 2, \quad x_3 \text{ und } x_4 = \pm 3.$$

Wenn $a = 0$ und $z = 0$ ist, was immer dann eintritt, wenn zugleich $c = 0$ ist, so lässt sich die Wurzelsumme z aus VI. nicht in V. substituiren. Aus

$$\text{VI.} \qquad -\left(y - \frac{d}{y}\right) z = 0$$

folgt ferner nicht $y - \frac{d}{y} = 0$. Demnach reducirt sich die bikubische Resolvente auf V. d. h. auf

$$y^2 - by + d = 0,$$

und die vier übrigen Werthe von y haben keine Gültigkeit mehr.

§ 315. Eine andere Deduction der Resolventen XIII. und XXVI.

Man kann die Gleichung der Wurzelproducte auch noch mit Hülfe der Sätze über die symmetrischen Functionen der Wurzeln ableiten, indem man ausgeht von den Fundamentalgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= y_1, & x_2x_3 &= d : y_3, \\ x_1x_3 &= y_2, & x_2x_4 &= d : y_2, \\ x_1x_4 &= y_3, & x_3x_4 &= d : y_1. \end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} [y_1] &= [x_1x_2] = b, \\ [y_1y_2] &= [x_1^2x_2x_3] + [x_1x_2x_3x_4] = (ac - 4d) + 3d \\ &= ac - d, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[y_1 y_2 y_3] &= [x_1^3 x_2 x_3 x_4] + [x_1^2 x_2^2 x_3^2] + [x_1^2 x_2^2 x_3 x_4] \\
&= (a^2 - 2b)d + c^2, \\
[y_1 y_2 y_3 y_4] &= [y_1 y_2] d = (ac - d)d, \\
[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5] &= [y_1] d^2 = b d^2, \\
[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6] &= d^3.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten auf diesem Wege wieder die Resolvente XXVI. Um sie auf den dritten Grad zu reduciren, kann man folgendermassen verfahren: es ist

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -\, a, \\
\text{II.} & x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = \quad b, \\
\text{III.} & x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = -\, c, \\
\text{IV.} & x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 = \quad d.
\end{array}
$$

Weil nun

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = y + \frac{d}{y}$$

ist, so geben die vier Gleichungen nach den Untertypen $x_1 + x_2$ und $x_3 + x_4$ aufgelöst,

$$\text{V.} \quad x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}\left[a - \sqrt{(a^2 - 4b) + 4\left(y + \frac{d}{y}\right)}\right],$$

$$\text{VI.} \quad x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}\left[a + \sqrt{(a^2 - 4b) + 4\left(y + \frac{d}{y}\right)}\right].$$

Führt man diese Werthe der Wurzelsumme in III. ein und macht die Gleichung rational, so erhält man die Resolvente XIII.

Die gesuchten Wurzeln sind alsdann

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{d^2}{\eta_1 \eta_2 \eta_3}}, \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2}}, \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{\eta_2 \eta_3}{\eta_1}},$$

wenn

$$(d + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1) : \sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3} = \mp a;$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{d^2}{y_1 y_2 y_3}}, \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{y_1 y_2}{y_3}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{y_1 y_3}{y_2}}, \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{y_2 y_3}{y_1}},$$

wenn

$$(d + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1) : \sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3} = \mp c : \sqrt{d},$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$(d + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) : \sqrt{y_1 y_2 y_3} = \mp a$$

ist.

Die Gleichung der Wurzelproducte lässt sich auch auf folgende Weise auf den dritten Grad reduciren. Erwägt man, dass

$$y_1 y_6 = y_2 y_5 = y_3 y_4 = d,$$

so wird man annehmen müssen, dass je ein Paar Wurzeln der bikubischen Gleichung in y die Wurzeln der quadratischen

$$y^2 - \zeta y + d = 0$$

bilde, wodurch die Gleichung in drei Factoren zerlegt wird und wegen der drei möglichen Werthe von ζ, nämlich

$$\zeta_1 = y_1 + y_6, \quad \zeta_2 = y_2 + y_5, \quad \zeta_3 = y_3 + y_4$$

die Gleichung in ζ vom dritten Grade werden muss.

Die drei trinomischen Factoren sind demnach

$$\begin{aligned} y^2 - \zeta_1 y + d &= 0, \\ y^2 - \zeta_2 y + d &= 0, \\ y^2 - \zeta_3 y + d &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen miteinander, so resultirt

$$\begin{aligned} & y^6 - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) y^5 + (3d + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_1) y^4 \\ & \quad - (2[\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3] d + \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) y^3 + ([\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_1] d + 3d^2) y^2 \\ & \quad - \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) dy + d^3 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Gleichungen in y Glied für Glied einander gleich, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten der Gleichung in ζ:

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 &= b, \\ \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_1 &= ac - 4d, \\ \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 &= a^2 d - 4bd + c^2. \end{aligned}$$

Die kubische Form der Resolvente ist also wieder

$$\zeta^3 - b\zeta^2 + (ac - 4d)\zeta - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0.$$

Wenn die Function $a^2 d - 4bd + c^2$ also positiv ist, so hat diese Gleichung eine positive reelle Wurzel.

Die Deduction der Gleichung der Wurzelproducte kann, wie oben gezeigt ist, auf viele verschiedene Arten bewerkstelligt werden. Wir fügen zum Schlusse noch eine andere hinzu. Ist wieder $x_1 + x_2 = z$, $x_1 x_2 = y$, so ist bekanntlich

(1) $\quad z^3 + az^2 + bz + c - y(2z + a) = 0,$

(2) $\quad z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d - y(3z^2 + 2az + b) + y^2 = 0.$

Multiplicirt man (1) mit z und subtrahirt von (2), so resultirt

$$z^2 = \frac{y^2 - by + \frac{1}{2}d}{y} = y + \frac{d}{2y} - b\,.$$

Man bilde von (1) die Gleichung der Wurzelquadrate

$$z^6 + Az^4 + Bz^2 + C = 0$$

und setze hierin den Werth von z^2 ein. Man gelangt so ebenfalls zur Resolvente XXVI.

§ 316. Die Methode des harmonischen Mittels zweier Wurzeln.

Der Typus (29) kann zu einer Auflösung der biquadratischen Gleichungen verwerthet werden. Man nehme an es sei

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{x_2}\,,$$

oder

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = z\,;$$

dann ist z offenbar die Wurzel einer Resolvente vom sechsten Grade; denn die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 lassen sich sechsmal zur zweiten Klasse ohne Wiederholung combiniren, wie folgt:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = z_1\,, \quad \frac{2x_1x_3}{x_1 + x_3} = z_2\,, \quad \frac{2x_1x_4}{x_1 + x_4} = z_3\,,$$

$$\frac{2x_2x_3}{x_2 + x_3} = z_4\,, \quad \frac{2x_2x_4}{x_2 + x_4} = z_5\,, \quad \frac{2x_3x_4}{x_3 + x_4} = z_6\,.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a\,,\\
&\text{II.} \quad x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = b\,,\\
&\text{III.} \quad x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 = -c\,,\\
&\text{IV.} \quad x_1x_2\,.\,x_3x_4 = d\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun weiter

$$z_1 + z_6 = -\frac{2c}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)}\,,$$

$$z_1 z_6 = \frac{4d}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)}\,,$$

und

$$\frac{2z_1z_6}{z_1 + z_6} = \frac{2z_2z_5}{z_2 + z_5} = \frac{2z_3z_4}{z_3 + z_4}\,;$$

d. h. die harmonischen Mittel aus den drei möglichen Variationen der Wurzeln zur zweiten Klasse sind einander gleich.

Substituirt man nun

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = u,$$

so erhält man

$$z_1 + z_6 = -2c : u,$$
$$z_1 z_6 = 4d : u,$$

und folglich

$$z_1 \text{ und } z_6 = -\frac{c}{u}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4du}{c^2}}\right],$$

oder, wenn z_1 und z_6 die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung vorstellen,

$$z^2 + \frac{2c}{u} z + \frac{4d}{u} = 0,$$

$$u = -2\,\frac{cz + 2d}{z^2}.$$

Setzt man vorläufig $x_1 + x_2 = s$, so folgt aus den vier Coefficientengleichungen:

I. $$s + \frac{u}{s} = -a,$$

oder

$$zs - 2\,\frac{cz + 2d}{zs} = -az.$$

II. $$\frac{1}{2} zs + u + \frac{2d}{zs} = b,$$

oder

$$zs + \frac{4d}{zs} = 2b + 4\,\frac{cz + 2d}{z^2}.$$

Durch Subtraction der beiden Gleichungen in zs ergibt sich weiter

$$s = \frac{2cz^2 + 8dz}{az^3 + 2bz^2 + 4cz + 8d}.$$

Daraus folgt

$$\frac{u}{s} = -2\,\frac{(cz + 2d)(az^3 + 2bz^2 + 4cz + 8d)}{z^2(2cz^2 + 8dz)}.$$

Substituirt man $z = 2\eta$, so erhält man aus I.:

$$\frac{c\eta^2 + 2d\eta}{a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta + d} - \frac{(c\eta + d)(a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta + d)}{\eta^2(c\eta^2 + 2d\eta)} = -a,$$

und nach Entwicklung der Glieder nach Potenzen der Grösse η die Resolvente

$$\eta^6 + \frac{c}{d}\eta^5 + \frac{1}{d^2}(2bd + 3c^2)\eta^4 + \frac{1}{d^3}(c^3 + 4bcd)\eta^3$$
$$+ \frac{1}{d^3}(acd + 2bc^2 + b^2 d - 4d^2)\eta^2 + \frac{1}{d^3}(b^2 c + ac^2 - 4cd)\eta$$
$$- \frac{1}{d^3}(a^2 d - abc + c^2) = 0 .$$

Eliminirt man η aus dieser und der Gleichung

$$u\eta^2 + c\eta + d = 0 ,$$

so reducirt sich die bikubische Resolvente auf die bekannte kubische

$$u^3 - 2bu^2 + (ac + b^2 - 4d)u + (a^2 d - abc + c^2) = 0 .$$

Da nun

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{z_1} ,$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{z_2} ,$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_4} = \frac{2}{z_3} ,$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -\frac{c}{d} ,$$

so ist

$$\frac{1}{x_1} \text{ und } \frac{1}{x_2} = \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \pm \frac{1}{z_3} \pm \frac{c}{2d} ,$$
$$\frac{1}{x_3} \text{ und } \frac{1}{x_4} = -\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \mp \frac{1}{z_3} - \frac{c}{2d} .$$

Unter den sechs verschiedenen Wurzelwerthen von z sind diejenigen drei heraus zu wählen, welche mit einem der übrigen ein gleiches harmonisches Mittel geben.

§ 317. Die Methode der Summe der Wurzelproducte nach Lagrange und Wilson*).

Man gehe aus von dem Typus (34) und substituire

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = z_1 ,$$
$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = z_2 ,$$
$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = z_3 .$$

Die Resolvente in z ist offenbar vom dritten Grade. Um zu der

*) Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouv. mém. de l'acad. des sciences, année 1770. pg. 173. Berlin 1772.

Wilson, Essay on the resolution of algebraical equations. Phil. Trans. pg. 300. 1799.

exacten Form derselben zu gelangen, gehe man wieder aus von den vier Coefficientengleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a\,, \\
\text{II.}\quad & x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = b\,, \\
\text{III.}\quad & x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = -c\,, \\
\text{IV.}\quad & x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 = d\,.
\end{aligned}$$

Aus IV. und der Substituirten $x_1 x_2 + x_3 x_4 = z_1$ folgt zunächst

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = \sqrt{z_1^2 - 4d}\,.$$

Demgemäss ist

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4d}\right),$$

$$x_3 x_4 = \frac{1}{2}\left(z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4d}\right),$$

und analog

$$x_1 x_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \sqrt{z_2^2 - 4d}\right),$$

$$x_2 x_4 = \frac{1}{2}\left(z_2 - \sqrt{z_2^2 - 4d}\right),$$

$$x_1 x_4 = \frac{1}{2}\left(z_3 + \sqrt{z_3^2 - 4d}\right),$$

$$x_2 x_3 = \frac{1}{2}\left(z_3 - \sqrt{z_3^2 - 4d}\right).$$

Bezeichnen wir die Wurzel der Resolvente allgemein mit z, so ist noch

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a\,, \\
\text{II.}\quad & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = b - z\,,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b + 4z}\right),$$

$$x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b + 4z}\right).$$

Dazu kommen die Gleichungen

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4d}\right),$$

$$x_3 x_4 = \frac{1}{2}\left(z - \sqrt{z^2 - 4d}\right).$$

Setzt man diese vier Ausdrücke in III. ein und macht die Resultante rational, so erhält man die Resolvente XIII:

$$z^3 - bz^2 + (ac - 4d)z - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0.$$

Man kann nun entweder alle drei Wurzelwerthe z_1, z_2, z_3 zur Darstellung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 verwenden oder auch einen einzigen, wozu man immer den reellen wählen wird. Im ersten Falle verwendet man die Ausdrücke für die Summe oder das Product je zweier Wurzeln x_1 und x_2. Es ist nun

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b + 4z_1}\right),$$

$$x_1 + x_3 = -\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b + 4z_2}\right),$$

$$x_1 + x_4 = -\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b + 4z_3}\right).$$

Daraus folgt durch Addition aller drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_1} + \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_2} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_3}, \\
x_2 &= -\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_1} - \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_2} \\
&\quad - \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_3}, \\
x_3 &= -\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_1} + \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_2} \\
&\quad - \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_3}, \\
x_4 &= -\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_1} - \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_2} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 4b + 4z_3}.
\end{aligned}$$

Ist nur eine einzige Wurzel z reell, so benutzt man am vortheilhaftesten diese allein zur Darstellung der Wurzeln. Man kann sich aber auch mit Anwendung der vorhergehenden Methoden der Ausdrücke $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ u. s. w. zur Darstellung der Wurzeln bedienen. Es ist nämlich

$$x_1 x_2 \,.\, x_1 x_3 \,.\, x_1 x_4 = x_1^{\,2} d$$

$$= \frac{1}{8}\left(z_1 + \sqrt{z_1^{\,2} - 4d}\right)\left(z_2 + \sqrt{z_2^{\,2} - 4d}\right)\left(z_3 + \sqrt{z_3^{\,2} - 4d}\right),$$

woraus x_1 gefunden wird, und ähnlich die übrigen Wurzeln. Bequemer ist es indess zu substituiren

$$\frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4d}\right) = y,$$

oder

$$z = y + \frac{d}{y},$$

wodurch man wieder zur Resolvente XXVI gelangt. Zu der Anwendung des Typus $x_1 x_2 + x_3 x_4 = z$ wurde Lagrange durch seine Verallgemeinerung der Ferrari'schen Methode geführt. Er ordnet die vollständige biquadratische Gleichung wie folgt:

$$x^4 + ax^3 = - bx^2 - cx - d,$$

und bildet links das vollständige Quadrat eines Trinoms, nämlich

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\,ax + \frac{1}{2}\,z\right)^2 = \left(z + \frac{1}{4}\,a^2 - b\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}az - c\right)x$$
$$+ \left(\frac{1}{4}\,z^2 - d\right) = 0.$$

Die erste Seite wird ebenfalls ein vollständiges Quadrat, wenn die Bedingung

$$\left(\frac{1}{2}\,a\,z - c\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\,z^2 - d\right)\left(z + \frac{1}{4}\,a^2 - b\right) = 0$$

erfüllt wird. Die vier Wurzelwerthe von x ergeben sich alsdann aus der Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{2}\,ax + \frac{1}{2}\,z = \pm\sqrt{z + \frac{1}{4}\,a^2 - b}\,.\left[x + \frac{az - 2c}{4z + a^2 - 4b}\right].$$

Die gegebene Gleichung lässt sich demnach als ein Product zweier quadratischer Formen darstellen:

$$\left[x^2 + \left(\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b + 4z}\right)x + \left(\frac{1}{2}\,z + \frac{az - 2c}{2\sqrt{a^2 - 4b + 4z}}\right)\right]$$
$$\times\left[x^2 + \left(\frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b + 4z}\right)x + \left(\frac{1}{2}\,z - \frac{az - 2c}{2\sqrt{a^2 - 4b + 4z}}\right)\right] = 0.$$

Nun ist offenbar

$$\frac{1}{2}\,z + \frac{az - 2c}{2\sqrt{a^2 - 4b + 4z}} = x_1 x_2,$$
$$\frac{1}{2}\,z - \frac{az - 2c}{2\sqrt{a^2 - 4b + 4z}} = x_3 x_4,$$

mithin $z = x_1 x_2 + x_3 x_4$. Ganz dieselbe Relation ergibt sich aus den Coefficienten der zweiten Glieder der trinomischen Factoren. Es ist

$$-\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b + 4z}\right) = x_1 + x_2,$$
$$-\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b + 4z}\right) = x_3 + x_4.$$

Durch Addition findet man hieraus

$$b - z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

und

$$z = x_1 x_2 + x_3 x_4 .$$

Zur Berechnung von x verfährt Lagrange folgendermassen. Es ist

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = z , \quad x_1 x_2 . x_3 x_4 = d .$$

Die Producte $x_1 x_2$ und $x_3 x_4$ sind demnach die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 - zy + d = 0 .$$

Nun ist

$$- c = x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 ,$$

folglich

$$y_1 (x_3 + x_4) + y_2 (x_1 + x_2) = - c .$$

In Verbindung mit der Relation $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = - a$ erhält man

$$x_1 + x_2 = \frac{c - a y_1}{y_1 - y_2} , \quad x_3 + x_4 = \frac{c - a y_2}{y_2 - y_1} .$$

Demnach sind x_1 und x_2 die Wurzeln von

$$x^2 - \frac{c - a y_1}{y_1 - y_2} x + y_1 = 0 ,$$

x_3 und x_4 die Wurzeln von

$$x^2 + \frac{c - a y_2}{y_1 - y_2} x + y_2 = 0 .$$

§ 318. Ueber eine merkwürdige Beziehung der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung und der Reducente (23) zu den Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks*).

Bildet man aus der bekannten Resolvente

$$z^3 - b z^2 + (ac - 4d) z - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0$$

die Gleichung ihrer Wurzelproducte

$$\eta^3 - (ac - 4d)\eta^2 + b(a^2 d - 4bd + c^2)\eta - (a^2 d - 4bd + c^2)^2 = 0$$

und substituirt

$$\eta = y \sqrt{a^2 d - 4bd + c^2} ,$$

*) Matthiessen, Beziehung der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung u. s. w. Zeitschr. f. Math. u. Phys. X. 331. 1865. Man vergl. Schlüssel zu Heis' Aufgabensamml. § 98b. XIII. Köln 1878.

so erhält man die Gleichung

$$y^3 - \frac{ac - 4d}{\sqrt{a^2d - 4bd + c^2}}\, y^2 + by - \sqrt{a^2d - 4bd + c^2} = 0\,.$$

Dieses ist nun die Gleichung der drei Diagonalen y_1, y_2, y_3 eines Kreisvierecks, dessen Seiten x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dargestellt werden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_3x_4 &= y_1y_2\,, \\ x_1x_3 + x_2x_4 &= y_1y_3\,, \\ x_1x_4 + x_2x_3 &= y_2y_3\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$y_1y_2y_3 = \sqrt{a^2d - 4bd + c^2}\,,$$

und

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = b\,.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} y_1^{\,2} &= \frac{(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)}{(x_1x_4 + x_2x_3)}\,, \\ y_2^{\,2} &= \frac{(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)}{(x_1x_3 + x_2x_4)}\,, \\ y_3^{\,2} &= \frac{(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)}{(x_1x_2 + x_3x_4)}\,. \end{aligned}$$

Addirt man diese drei Gleichungen zu einander, so findet man

$$y_1^{\,2} + y_2^{\,2} + y_3^{\,2} = \frac{(ac - 4d)^2}{a^2d - 4bd + c^2} - 2b = \frac{(ac - 4d)^2}{a^2d - 4bd + c^2} - 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)\,.$$

Daraus folgt

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{ac - 4d}{\sqrt{a^2d - 4bd + c^2}}\,.$$

Es ist nun auch leicht, nicht allein die Fläche des Kreisvierecks, den Radius des umschriebenen Kreises, sondern auch die Diagonalen durch die Coefficienten a, b, c, d einzeln ausdrücken, ohne dass die Gleichung aufgelöst zu werden braucht.

Sind $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die drei Wurzeln der Gleichung

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0\,,$$

so ist

$$y_1 = \frac{\left(2\zeta_2 + \frac{1}{3}b\right)\left(2\zeta_3 + \frac{1}{3}b\right)}{\sqrt{a^2d - 4bd + c^2}},$$

$$y_2 = \frac{\left(2\zeta_1 + \frac{1}{3}b\right)\left(2\zeta_3 + \frac{1}{3}b\right)}{\sqrt{a^2d - 4bd + c^2}},$$

$$y_3 = \frac{\left(2\zeta_1 + \frac{1}{3}b\right)\left(2\zeta_2 + \frac{1}{3}b\right)}{\sqrt{a^2d - 4bd + c^2}}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 16F^2 &= (a + 2x_1)(a + 2x_2)(a + 2x_3)(a + 2x_4) \\ &= - a^4 + 4a^2b - 8ac + 16d, \end{aligned}$$

also der Flächeninhalt des Vierecks:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{- a^4 + 4a^2b - 8ac + 16d}.$$

Den Radius des umschriebenen Kreises findet man mit Hülfe des Satzes von Gerhard gleich

$$R = \sqrt{\frac{a^2d - 4bd + c^2}{- a^4 + 4a^2b - 8ac + 16d}}.$$

Den Flächeninhalt kann man auch noch in folgender Form ausdrücken:

$$\begin{aligned} 16F^2 &= - a^2(a^2 - 4b) - 8y_1y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= - u^4 + 4(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)u^2 - 8y_1y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned}$$

wo u den Umfang des Vierecks bedeutet.

Um noch ein Zahlenbeispiel anzuführen, in welchem die Diagonalen und zugleich der Inhalt des Vierecks, folglich auch der Halbmesser des Kreises rational ausfallen, so sei

$$x_1 = 300, \quad x_2 = 195, \quad x_3 = 91, \quad x_4 = 80.$$

Daraus findet man die Werthe

$$y_1 = 165, \quad y_2 = 260, \quad y_3 = 253, \quad F = 16698, \quad 2R = 325.$$

Construirt man das vollständige Kreisviereck, so hat ein solches noch drei äussere Diagonalen, welche sich ebenfalls in Functionen von a, b, c, d ausdrücken lassen. Bezeichnet man dieselben mit η_1, η_2, η_3, so findet man

$$\eta_1^2 = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)\left[\frac{x_1x_3}{(x_1^2 - x_3^2)^2} + \frac{x_2x_4}{(x_2^2 - x_4^2)^2}\right],$$

$$\eta_2^2 = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)\left[\frac{x_1x_4}{(x_1^2 - x_4^2)^2} + \frac{x_2x_3}{(x_2^2 - x_3^2)^2}\right],$$

$$\eta_3^2 = (x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)\left[\frac{x_1x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} + \frac{x_3x_4}{(x_3^2 - x_4^2)^2}\right].$$

Die Combinationen dieser Grössen zur ersten, zweiten und dritten Klasse geben symmetrische Functionen der vier Wurzeln und sie haben zum gemeinschaftlichen Nenner die Discriminante $D_{4,2}$, d. h. die Discriminante der Gleichung der Wurzelquadrate.

§ 319. Methode der Differenzen der Wurzelproducte.

Zur Auflösung der biquadratischen Gleichung kann man sich auch des Typus (36) bedienen, also setzen

$$\begin{aligned} x_1x_2 - x_3x_4 &= z_1\,, \\ x_1x_3 - x_2x_4 &= z_2\,, \\ x_1x_4 - x_2x_3 &= z_3\,. \end{aligned}$$

Die Resolvente in z wird vom sechsten Grade sein, und nur gerade Potenzen von z enthalten, weil noch folgende Permutationen der Verbindungen möglich sind:

$$\begin{aligned} x_3x_4 - x_1x_2 &= - z_1\,, \\ x_2x_4 - x_1x_3 &= - z_2\,, \\ x_2x_3 - x_1x_4 &= - z_3\,. \end{aligned}$$

Um die Coefficienten der Resolvente zu erhalten, transformire man den Typus in eine Substituirte, wie folgt

$$x_1x_2 - x_3x_4 = z_1\,,$$

$$x_1x_2 - \frac{d}{x_1x_2} = z_1\,,$$

$$(x_1x_2)^2 - z_1(x_1x_2) - d = 0\,,$$

oder, indem wir y an die Stelle von x_1x_2 setzen,

$$y^2 - zy - d = 0\,.$$

Man hat nun y zu eliminiren mittels dieser Substitution aus der Gleichung der Wurzelproducte XXVI. Es resultirt daraus die gesuchte Resolvente

$$z^6 + (2ac - b^2 + 4d)z^4 + (a^2c^2 - 2a^2bd + 8acd - 2bc^2)z^2 - (a^2d - c^2)^2 = 0\,.$$

Hieraus bestimme man einen reellen Werth von z und berechne darnach x_1x_2 aus

$$x_1x_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 \pm \sqrt{z_1^2 + 4d}\right)$$

und

$$x_3 x_4 = -\frac{1}{2}\left(z_1 \mp \sqrt{z_1^2 + 4d}\right),$$

in welchen Ausdrücken noch das Vorzeichen des Radicals zu bestimmen bleibt. Um die Wurzeln zu erhalten, hat man bei Berücksichtigung der oberen Vorzeichen:

$$x_1 x_2 \,.\, x_1 x_3 \,.\, x_1 x_4 = x_1^2 d$$

$$= \frac{1}{8}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4d}\right)\left(z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4d}\right)\left(z_3 + \sqrt{z_3^2 + 4d}\right),$$

$$x_1 x_2 \,.\, x_2 x_4 \,.\, x_2 x_3 = x_2^2 d$$

$$= \frac{1}{8}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4d}\right)\left(- z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4d}\right)\left(- z_3 + \sqrt{z_3^2 + 4d}\right),$$

$$x_3 x_4 \,.\, x_1 x_3 \,.\, x_2 x_3 = x_3^2 d$$

$$= \frac{1}{8}\left(- z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4d}\right)\left(z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4d}\right)\left(- z_3 + \sqrt{z_3^2 + 4d}\right),$$

$$x_3 x_4 \,.\, x_2 x_4 \,.\, x_1 x_4 = x_4^2 d$$

$$= \frac{1}{8}\left(- z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4d}\right)\left(- z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4d}\right)\left(z_3 + \sqrt{z_3^2 + 4d}\right).$$

Setzt man $\sqrt{\zeta^2 - 4d}$ an die Stelle von z, so wird

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2}\left(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4d}\right),$$

und nach der Methode von Lagrange die Resolvente XIII:

$$\zeta^3 - b\zeta^2 + (ac - 4d)\zeta - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0 .$$

Diese Resolvente erhält man auch leicht aus der Gleichung in y, wenn man erwägt, dass $y + \frac{d}{y} = \zeta$ ist. Ueber das richtige Vorzeichen von $\sqrt{z^2 + 4d} = \zeta$ ist nun nach den Coefficienten der Resolvente XIII. zu entscheiden.

Zahlenbeispiel. Aufzulösen:

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0 .$$

Die Resolvente ist $z^6 - 769z^4 - 18000z^2 - 60^4 = 0$, und ihre Wurzeln sind $\pm z_1 = 20$, $\pm z_2 = 15$, $\pm z_3 = 12$.

Demgemäss ist nun

$$(x_1 x_2)^2 \pm 20(x_1 x_2) + 36 = 0, \quad \left.\begin{matrix} x_1 x_2 \\ x_3 x_4 \end{matrix}\right\} = \mp 10 - 8,$$

$$(x_1 x_3)^2 \pm 15(x_1 x_3) + 36 = 0, \quad \left.\begin{matrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_4 \end{matrix}\right\} = \mp 7{,}5 - 4{,}5,$$

$$(x_1 x_4)^2 \pm 12(x_1 x_4) + 36 = 0, \quad \left.\begin{matrix} x_1 x_4 \\ x_2 x_3 \end{matrix}\right\} = \mp 6 - 0.$$

Daraus folgt weiter

$$x_1^2 d = (-10-8)(-7{,}5-4{,}5)(-6) = -36^2,$$
$$x_1^2 = 36, \quad x_1 = -6,$$
$$x_2^2 d = (-10-8)(+7{,}5-4{,}5)(+6) = -18^2,$$
$$x_2^2 = 9, \quad x_2 = 3,$$
$$x_3^2 d = (+10-8)(-7{,}5-4{,}5)(+6) = -12^2,$$
$$x_3^2 = 4, \quad x_3 = 2,$$
$$x_4^2 d = (+10-8)(+7{,}5-4{,}5)(-6) = -6^2,$$
$$x_4^2 = 1, \quad x_4 = 1.$$

§ 320. Methode von Ley*).

Um die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

aufzulösen, denke man sich das Biquadrat in zwei quadratische Factoren

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$
$$x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3 x_4 = 0,$$

zerlegt. Die unbestimmten Coefficienten dieser Trinome lassen sich dann finden aus den Relationen

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = z_1,$$
$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a,$$
$$x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 = d,$$
$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = b - z_1.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgen die neuen

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4z}),$$
$$x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4z});$$

aus den beiden andern

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2}(b - z + \sqrt{(b-z)^2 - 4d}),$$
$$x_3 x_4 = \frac{1}{2}(b - z - \sqrt{(b-z)^2 - 4d}).$$

Da nun

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = -c$$

---

*) Ley, Ueber einige besondere Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades. Progr. Köln 1850.

ist, so ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen

$$(a^2 - 4z)([b-z]^2 - 4d) = (a[b-z] - 2c)^2,$$

oder die Resolvente XVI:

$$z^3 - 2bz^2 + (b^2 + ac - 4d)z + (a^2 d - abc + c^2) = 0.$$

Hieraus berechne man z. Die Relationen für $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$. u. s. w. führen zu den Job'schen Formeln. Statt dessen löst Ley die vorangesetzten quadratischen Gleichungen auf.

Zahlenbeispiel. Aufzulösen:

$$x^4 - 30x^3 + 326x^2 - 1550x + 3125 = 0.$$

Die Resolvente ist $z^3 - 652z^2 + 140276z - 9944000 = 0$ und ihre Wurzelwerthe: $z_1 = 176$, $z_2 = 226$, $z_3 = 250$. Nimmt man den ersten Werth, so wird $b - z = 150$, also

$$x_1 + x_2 = +8, \quad x_3 + x_4 = +22.$$

Ferner ist

$$x_1 x_2 = 125, \quad x_3 x_4 = 25,$$

so dass man erhält

$$x^2 - 22x + 125 = 0,$$
$$x^2 - 8x + 25 = 0,$$

und hieraus

$$x_1 \text{ und } x_2 = 11 \pm 2\sqrt{-1}, \quad x_3 \text{ und } x_4 = 4 \pm 3\sqrt{-1}.$$

Wählt man unter den möglichen Werthen von z den zweiten

$$z_2 = 226,$$

so ist $b - z = 100$ und

$$-(x_1 + x_2) = -15 \pm \sqrt{-1}, \quad -(x_3 + x_4) = -15 \mp \sqrt{-1},$$
$$x_1 x_2 = 50 \mp 25\sqrt{-1}, \quad x_3 x_4 = 50 \pm 25\sqrt{-1}.$$

Das Biquadrat wird dadurch auf die Productenform

$$[x^2 - (15 - \sqrt{-1})x + 50 - 25\sqrt{-1}] \times$$
$$[x^2 - (15 + \sqrt{-1})x + 50 + 25\sqrt{-1}] = 0$$

gebracht. Wählt man endlich unter den drei Werthen von z den letzten $z_3 = 250$, so ist $b - z = 76$, und

$$-(x_1 + x_2) = -15 \pm 5\sqrt{-1}, \quad -(x_3 + x_4) = -15 \mp 5\sqrt{-1},$$
$$x_1 x_2 = 38 \pm 41\sqrt{-1}, \quad x_3 x_4 = 38 \mp 41\sqrt{-1}.$$

Um darüber zu entscheiden, ob das obere oder untere Vorzeichen der Radicale zu nehmen ist, erwäge man, dass wegen

$$-2c = -3100\,, \quad a(b-z) = -2280$$

das Radical in

$$2c = a(b-z) \mp \sqrt{(a^2-4z)([b-z]^2-4d)}$$

negativ ist. Folglich gelten, indem die Werthe der Summe und Producte der Wurzelpaare (x_1, x_2) und (x_3, x_4) complex sind, von den negativen Summen die obersten, von den Producten die zweiten Werthe, d. h. es ist

$$[x^2 - 5(2-\sqrt{-1})\,x + 38 - 41\sqrt{-1}] \times$$
$$[x^2 - 5(2+\sqrt{-1})\,x + 38 + 41\sqrt{-1}] = 0.$$

Der erste trinomische Factor gibt die Wurzeln

$$x_1 = 11 - 2\sqrt{-1}\,, \quad x_2 = 4 - 3\sqrt{-1}\,,$$

der zweite

$$x_3 = 11 + 2\sqrt{-1}\,, \quad x_4 = 4 + 3\sqrt{-1}\,.$$

§ 321. Methode der Anwendung des Typus (38) zur Bildung einer Resolvente nach Blomstrand und Hunrath*).

Blomstrand hat die Bemerkung gemacht, dass die Substitutionsformeln

$$\frac{x^2+l}{x+z} = y\,, \quad y^2 + h = 0\,,$$

welche Bézout zur Auflösung der unvollständigen biquadratischen Gleichung benutzte, auf den Typus (38) führt. Es ist nämlich in dem vorausgesetzten Falle

$$\sqrt{-h} = x_1 + x_2\,, \qquad -\sqrt{-h} = x_3 + x_4\,,$$
$$l - z\sqrt{-h} = x_1 x_2\,, \qquad l + z\sqrt{-h} = x_3 x_4\,;$$

folglich

$$\sqrt{-h} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\,,$$

$$z\sqrt{-h} = -\frac{1}{2}(x_1 x_2 - x_3 x_4)\,,$$

---

*) Blomstrand, De methodis praecipuis etc. p. 54.

Hunrath, Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausen's Methode. Progr. Glückstadt. 1876. S. 21. Die hier erwähnte Methode, welche bis jetzt nach einer von mir Herrn Prof. Heis gemachten Mittheilung (Aufgabensammlung § 98 b.) dem Lotteriesecretär Hulbe zugeschrieben wurde, ist eine Erfindung von Prof. Mallet in Stockholm. Man vergl. § 217, 4 (22) und § 218.

und endlich

$$z = -\frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)}.$$

Die Grösse z hängt offenbar, da sie durch Permutation der Wurzeln drei verschiedene Werthe annehmen kann, von einer kubischen Gleichung ab.

Diese kubische Resolvente wird von Hunrath mittels der durch Schlömilch modificirten Methode von Mallet für das vollständige Biquadrat folgendermassen hergeleitet. Setzt man

$$x = qy + z,$$

so geht die vorgelegte Gleichung über in

$$y^4 + \frac{4z + a}{q} y^3 + \frac{6z^2 + 3az + b}{q^2} y^2 + \frac{4z^3 + 3az^2 + 2bz + c}{q^3} y$$
$$+ \frac{z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d}{q^4} = 0.$$

Man bestimme q und z so, dass diese Transformirte eine reciproke Gleichung wird. Ihre Wurzeln seien y_1 und $1 : y_1$, y_2 und $1 : y_2$. Dann sind die vier Werthe von x:

$$x_1 = qy_1 + z, \quad x_3 = qy_2 + z,$$
$$x_2 = q : y_1 + z, \quad x_4 = q : y_2 + z.$$

q und z werden dann bestimmt sein durch die Relationen

$$q^4 = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d,$$

und XXII:

$$(a^3 - 4ab + 8c)z^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)z^2$$
$$+ (a^2c - 4bc + 8ad)z + (a^2d - c^2) = 0.$$

Durch Elimination von y_1 und y_2 aus den vier Wurzelausdrücken erhält man nun

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2)z + z^2 = q^2,$$
$$x_3 x_4 - (x_3 + x_4)z + z^2 = q^2,$$

folglich

$$z = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)}.$$

Es ist hiermit zugleich der Weg angedeutet, auf welchem man eine Wurzel x findet, wenn ein Werth von z bekannt ist.

Wie in § 217, 4 (22) gezeigt worden ist, kann man auch ausgehen von der Reducente (22):

$$\Pi = a^2d - c^2 = (x_1x_2 - x_3x_4)(x_1x_3 - x_2x_4)(x_1x_4 - x_2x_3).$$

Setzt man $x' + z$ an die Stelle von x, so wird für die Variirte die Function Π verschwinden, wenn man annimmt

$$\begin{aligned} x_1' x_2' - x_3' x_4' &= (x_1 - z)(x_2 - z) - (x_3 - z)(x_4 - z) \\ &= (x_1 x_2 - x_3 x_4) - (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) z = 0 \,. \end{aligned}$$

Da die Function Π drei solcher Factoren besitzt, so ist die Gleichung in z vom dritten Grade. Man erhält dieselbe in den Coefficienten a, b, c, d ausgedrückt, wenn man die Function $\alpha^2 \delta - \gamma^2$ gleich Null setzt und nach Potenzen von z entwickelt. Dies gibt ebenfalls die Resolvente von Mallet.

Man kann der Resolvente XXII eine einfachere Form geben, wenn man substituirt

$$z = - \frac{ab - 6c + 6a\zeta}{3a^2 - 8b + 24\zeta} \,.$$

Man findet daraus die Form XXX:

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{T} = 0 \,,$$

wo $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{T}$ die beiden Invarianten des Biquadrats bezeichnen.

§ 322. Bildung einer kubischen Resolvente aus dem Typus (39).

Substituirt man

$$\frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) x_3 x_4}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)} = y \,,$$

so ist y die Wurzel einer kubischen Gleichung. Um sie abzuleiten, gehe man aus von der Bemerkung, dass die Function

$$z^2 - 2 \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} z + \frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) - x_3 x_4 (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$$

ein trinomischer Factor der bikubischen Covariante $C_{4,6}(z)$ ist, also von

$$\begin{aligned} z^6 &+ 2 \frac{a^2 b + 2ac - 4b^2 + 16d}{a^3 - 4ab + 8c} z^5 + 5 \frac{a^2 c + 8ad - 4bc}{a^3 - 4ab + 8c} z^4 \\ &+ 20 \frac{a^2 d - c^2}{a^3 - 4ab + 8c} z^3 - 5 \frac{ac^2 - 4abd + 8cd}{a^3 - 4ab + 8c} z^2 \\ &- 2 \frac{bc^2 + 2acd - 4b^2 d + 16d^2}{a^3 - 4ab + 8c} z - \frac{c^3 - 4bcd + 8ad^2}{a^3 - 4ab + 8c} = 0 \,. \end{aligned}$$

Schreibt man den trinomischen Factor der Kürze wegen allgemein $z^2 - 2mz + n$, so ist die bikubische Gleichung gleich dem Producte

$$(z^2 - 2m_1 z + n_1)(z^2 - 2m_2 z + n_2)(z^2 - 2m_3 z + n_3) = 0 \,.$$

Bildet man nur die Glieder mit den geraden Potenzen der z, so erhält man hieraus

$$z^6 + [4(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) + n_1 + n_2 + n_3] z^4 +$$
$$[4(m_1 m_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 + m_3 m_1 n_2) + n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1] z^2 + n_1 n_2 n_3 = 0.$$

Nun folgt aus der Resolvente XXII:

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = \frac{a^2 c - 4bc + 8ad}{a^3 - 4ab + 8c},$$

also ist

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{a^2 c - 4bc + 8ad}{a^3 - 4ab + 8c}.$$

Aus der vorhergehenden folgt weiter

$$n_1 n_2 n_3 = -\frac{c^3 - 4bcd + 8ad^2}{a^3 - 4ab + 8c}.$$

Da nun

$$(y - n_1)(y - n_2)(y - n_3)$$
$$= y^3 - (n_1 + n_2 + n_3) y^2 + (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) y - n_1 n_2 n_3 = 0$$

ist, so hat man die Resolvente XXI:

$$(a^3 - 4ab + 8c) y^3 - (a^2 c - 4bc + 8ad) y^2 + (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) y$$
$$+ (c^3 - 4bcd + 8ad^2) = 0,$$

so dass man an die Stelle des dritten Coefficienten zu setzen hat

$$n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_3 = -\frac{ac^2 - 4abd + 8cd^2}{a^3 - 4ab + 8c}.$$

§ 323. Bildung einer kubischen Resolvente aus dem Typus (40) nach Lagrange und Hunrath*).

Es ist bereits in § 217, 4 (26) gezeigt worden, wie man durch eine quadratische Transformation und Einführung der Reducente (26) die quadratische Gleichung reduciren kann. Die Auflösung führt auf eine Resolvente, deren Wurzeln durch den Typus

$$\frac{(x_1{}^2 + x_2{}^2) - (x_3{}^2 + x_4{}^2)}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)} = y$$

ausgedrückt wird. Man kann dieselbe, wie Hunrath gezeigt hat, auch ableiten von der Resolvente XXII. Es ist nämlich nach § 321, wenn z einen Wurzelwerth von XXII bezeichnet,

$$z = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)}.$$

*) Lagrange, Réflexions etc. Art. 40. S. 196. Man vergl. Hunrath am Ende seiner Abhandlung, sowie oben § 217, 4 (26).

Weil nun $a = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ ist, so findet man daraus

$$2z + a = -\frac{(x_1{}^2 + x_2{}^2) - (x_3{}^2 + x_4{}^2)}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)} = -y\,.$$

Substituirt man demnach in XXII: $z = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y$, und ordnet nach Potenzen von y, so resultirt die gesuchte Resolvente XX. in der Form

$$\begin{aligned}(a^3 - 4ab + 8c)y^3 &+ (3a^4 - 14a^2b + 20ac + 8b^2 - 32d)y^2 \\ &+ (3a^5 - 16a^3b + 20a^2c + 16ab^2 - 32ad - 16bc)y \\ &+ (a^6 - 6a^4b + 8a^3c + 8a^2b^2 - 8a^2d - 16abc + 8c^2) = 0.\end{aligned}$$

Lagrange leitet sie auf folgende Weise ab. Substituirt man in der vollständigen biquadratischen Gleichung die quadratische Function

$$x^2 - yx + v - u = 0\,,$$

ordnet die neue Gleichung nach Potenzen von u und setzt den zweiten und vierten Term gleich Null, so erhält man die obige Resolvente. Zur Bestimmung von u^2 hat man die quadratische Gleichung

$$u^4 + Au^2 + B = 0\,.$$

Bezeichnet man die Wurzeln derselben mit u_1 und $-u_1$, u_2 und $-u_2$, so ist

$$\begin{aligned}x_1{}^2 - yx_1 + v &= u_1\,, \\ x_2{}^2 - yx_2 + v &= -u_1\,, \\ x_3{}^2 - yx_3 + v &= u_2\,, \\ x_4{}^2 - yx_4 + v &= -u_2\,.\end{aligned}$$

Durch Elimination von u_1 und u_2 erhält man

$$\begin{aligned}x_1{}^2 + x_2{}^2 - y(x_1 + x_2) + 2v &= 0\,, \\ x_3{}^2 + x_4{}^2 - y(x_3 + x_4) + 2v &= 0\,.\end{aligned}$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so erhält man in der That

$$y = \frac{(x_1{}^2 + x_2{}^2) - (x_3{}^2 + x_4{}^2)}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)}\,.$$

§ 324. Bildung einer kubischen Resolvente aus dem Typus (41).

Man kann ferner eine kubische Resolvente suchen, deren Wurzel ausgedrückt wird durch

$$(x_1 + x_2)^2 \pm (x_3 + x_4)^2 = y\,.$$

Wählt man das obere Vorzeichen des zweiten Gliedes, so kann man statt dessen schreiben:

$$(a^2 - 2b) + 2(x_1x_2 + x_3x_4) = y\,,$$

oder

$$z = x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(a^2 - 2b)\,.$$

Da z eine Wurzel der Resolvente

$$z^3 - bz^2 + (ac - 4d)z - (a^2d - 4bd + c^2) = 0$$

ist, so lässt sich leicht eine kubische Gleichung herstellen, von welcher y die Wurzel ist.

Wählt man dagegen das untere Vorzeichen, so erhält man durch Division der Gleichungen

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2 = y\,,$$

und

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a\,,$$

in einander

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -y : a\,.$$

Der Ausdruck links ist die Wurzel der Resolvente von Lagrange

$$z^6 - (3a^2 - 8b)z^4 + (3a^4 - 16a^2b + 16ac + 16b^2 - 64d)z^2$$
$$- (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0\,,$$

worin an die Stelle von z die Hauptgrösse $-y:a$ einzusetzen ist. Die Berechnung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 aus y bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

§ 325. Ableitung einer Resolvente aus dem Typus (42).

Wir nehmen an, es sei

$$(x_1 + x_2)^2 \pm (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_3 + x_4)^2 = y\,.$$

Wegen der Relation

$$(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_3 + x_4)^2 = a^2$$

ist alsdann je nach dem Zeichen entweder

$$z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = a^2 - y\,,$$

oder

$$z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{1}{3}(a^2 - y)\,.$$

Es ist nun z eine Wurzel der Resolvente XVI., woraus sich leicht mittels Substitution die beiden Gleichungen in z darstellen lassen.

§ 326. Ableitung einer Resolvente aus dem Typus (43).

Wir nehmen jetzt an, es sei

$$x_1x_2 \mp (x_1 \pm x_2)(x_3 \pm x_4) + x_3x_4 = y\,.$$

Wählt man die oberen Vorzeichen, so erhält man durch Zuziehung der Relation

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = b\,,$$

indem man die beiden Gleichungen addirt,

$$x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{1}{2}(y + b)\,,$$

oder, wenn man sie von einander subtrahirt,

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{1}{2}(b - y)\,.$$

Die erste dieser beiden Untertypen ist die Wurzel der Resolvente XIII., die zweite die Wurzel der Resolvente XVI. Die Auffindung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 bietet also keine besondere Schwierigkeit, sobald man die Resolvente in y kennt.

Wählt man die unteren Vorzeichen des Typus, setzt also

$$x_1x_2 + (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + x_3x_4 = y\,,$$

und subtrahirt diese Gleichung von

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = b\,,$$

so erhält man

$$x_1x_4 + x_2x_3 = \frac{1}{2}(b - y)\,.$$

Die linke Seite ist die Wurzel z der Resolvente XIII., und es kann somit die Resolvente in y leicht durch Substitution $z = \frac{1}{2}(b - y)$ hergestellt werden.

§ 327. Bildung einer kubischen Resolvente aus dem Typus (44).

Die Substitution des Typus

$$2x_1x_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2x_3x_4 = y\,,$$

oder

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) = y\,,$$

ist von Hermite*) zu einer eleganten Methode der Auflösung

*) Hermite, Sur les fonctions homogènes. Crelle's Journ. LII. S. 4. 1856. Man vergl. § 274.

biquadratischer Gleichungen verwendet worden. Verbindet man die Annahme mit der Relation

$$x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = b$$

durch Addition, so resultirt

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{1}{3}(y + b) .$$

Die linke Seite ist die Wurzel der Resolvente XIII und man erhält durch Substitution von $z = \frac{1}{3}(y + b)$:

$$y^3 - 36\mathcal{J} y + 512\mathcal{F} = 0 .$$

Setzt man jetzt $y = 6\zeta$, so erhält man die bekannte Resolvente XXX:

$$\zeta^3 - \mathcal{J}\zeta + 2\mathcal{F} = 0 .$$

Um die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 zu erhalten, kann man recurriren auf den Typus (25), nämlich

$$z_1 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 .$$

Eine Beziehung zwischen z und ζ findet man nach Hermite auf folgende Art. Es ist

$$\begin{aligned} 3z^2 = {} & [(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \\ & + (x_3 - x_4)^2] + 4[(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)] \\ = {} & 3a^2 - 8b + 24\zeta ; \end{aligned}$$

folglich

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{3}(3a^2 - 8b) + 8\zeta} .$$

Die Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung lassen sich also ohne Schwierigkeit mittels der Methoden von Lagrange und Terquem berechnen, nachdem das Vorzeichen von z nach den gewöhnlichen Regeln bestimmt ist.

§ 328. Bildung einer kubischen Resolvente aus dem Typus (45).

Wir substituiren jetzt

$$x_1 x_2 (x_3 \pm x_4) \mp (x_1 \pm x_2) x_3 x_4 = y .$$

Lässt man das obere Vorzeichen gelten und verbindet die Substitution mit der Gleichung

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = - c ,$$

so erhält man durch Addition

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) = \frac{1}{2}(y - c),$$

durch Subtraction

$$x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -\frac{1}{2}(y + c).$$

Multiplicirt man die beiden letzteren Gleichungen mit einander, so findet man

$$z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -\frac{1}{4d}(y^2 - c^2).$$

Die linke Seite ist die Wurzel der Resolvente XVI, woraus sich ohne Schwierigkeit durch Substitution von $z = -\frac{1}{4d}(y^2 - c^2)$ die Resolvente in y ergibt.

Wenn die unteren Vorzeichen genommen werden, also gesetzt wird

$$x_1 x_2 (x_3 - x_4) + (x_1 - x_2) x_3 x_4 = y,$$

so kann man diese Gleichung durch Addition und Subtraction mit der Coefficientengleichung

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) x_3 x_4 = -c$$

verbinden. Man findet

$$x_1 x_3 (x_2 + x_4) = \frac{1}{2}(y - c),$$

$$x_2 x_4 (x_1 + x_3) = -\frac{1}{2}(y + c).$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen miteinander, so wird

$$z = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -\frac{1}{4d}(y^2 - c^2).$$

Die linke Seite ist eine Wurzel der Resolvente XVI; es kann somit die Resolvente in y^2 gefunden werden. Es leuchtet ein, dass man noch zu einer andern Resolvente vom sechsten Grade gelangt, wenn man von dem Untertypus (46) ausgeht. Auch bietet die Ableitung von Resolventen aus den übrigen aufgeführten Typen (47) bis (54) keine besondere Schwierigkeit. Wir wollen unter diesen nur noch den Typus (53) besonders betrachten, indem derselbe im Zusammenhange mit dem Typus (44) steht.

§ 329. Ableitung einer Resolvente aus dem Typus (53).

Substituirt man $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = y$, so übersieht man leicht, dass derselbe sechs verschiedene Werthe annehmen kann, also auf eine Gleichung vom sechsten Grade führen muss, in welcher die ungeraden Potenzen fehlen. Die möglichen Permutationen der vier Wurzeln sind nämlich:

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = + y_1\,,\\
(x_2 - x_1)(x_3 - x_4) &= (x_1 - x_2)(x_4 - x_3) = - y_1\,,\\
(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = - y_2\,,\\
(x_3 - x_1)(x_2 - x_4) &= (x_1 - x_3)(x_4 - x_2) = + y_2\,,\\
(x_4 - x_1)(x_3 - x_2) &= (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = + y_3\,,\\
(x_4 - x_1)(x_2 - x_3) &= (x_1 - x_4)(x_3 - x_2) = - y_3\,.
\end{aligned}$$

Geht man aus von der in § 327 nach Hermite angenommenen Substitution

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) &= 6\zeta_1 = - y_2 + y_3\,,\\
(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_4) &= 6\zeta_2 = \quad y_1 - y_3\,,\\
(x_3 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_4) &= 6\zeta_3 = \quad y_2 - y_1\,,
\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\zeta_1 - \zeta_2 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(x_1 - x_4) = \frac{1}{2} y_3\,,\\
\zeta_2 - \zeta_3 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = \frac{1}{2} y_1\,,\\
\zeta_3 - \zeta_1 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_4 - x_2) = \frac{1}{2} y_2\,.
\end{aligned}$$

Demnach sind y_1, y_2, y_3 die Wurzeln der Gleichung der zweifachen Wurzeldifferenzen von der Gleichung XXXI:

$$\zeta^3 - \mathfrak{J}\zeta + 2\mathfrak{F} = 0\,.$$

Ist nun $\zeta_1 - \zeta_2 = z$, so ist nach § 19:

$$z^6 - 6\mathfrak{J}z^4 + 9\mathfrak{J}^2 z^2 - 4(\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{F}^2) = 0\,,$$

und wenn man $2(\zeta_1 - \zeta_2) = y$ setzt,

$$y^6 - 24\mathfrak{J}y^4 + 144\mathfrak{J}^2 y^2 - 256(\mathfrak{J}^3 - 27\mathfrak{F}^2) = 0\,,$$

oder

$$(y^3 - 12\mathfrak{J}y)^2 - D_4 = 0\,.$$

Die Gleichung in y lässt sich demnach in zwei kubische zerlegen, nämlich

$$y^3 - 12\mathfrak{J}y \mp \sqrt{D_4} = 0\,.$$

§ 330. Methode der Auflösung der biquadratischen Gleichung von der Cayley'schen Form mittels Combination der Wurzeln.

Um die Quartic

$$(a, b, c, d, e \,\widehat{)}\, (x, 1)^4 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

aufzulösen, wollen wir noch ein Paar Combinationsmethoden mittheilen, und zwar eine, welche auf die Wurzelformen der Methode der Wurzelproducte und eine zweite, welche auf die Formeln von Aronhold führt.

Bezeichnet man das Product zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung mit y, so wird (§ 313)

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= y_1, & x_2 x_3 &= e : a y_3 = \eta_3, \\ x_1 x_3 &= y_2, & x_2 x_4 &= e : a y_2 = \eta_2, \\ x_1 x_4 &= y_3, & x_3 x_4 &= e : a y_1 = \eta_1. \end{aligned}$$

Es sind nun nach dem Früheren $y_1, y_2, y_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ die Wurzeln der Resolvente

$$a^3\left(y+\frac{e}{ay}\right)^3 - 6a^2c\left(y+\frac{e}{ay}\right)^2 + 4a(4bd-ae)\left(y+\frac{e}{ay}\right) \\ - 8(2b^2e - 3ace + 2ad^2) = 0.$$

Setzt man

$$a\left(y+\frac{e}{ay}\right) = 2(2\lambda + c),$$

so geht die Resolvente über in die $\varDelta$-Determinante von Aronhold

$$\varDelta = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0.$$

Man hat demnach

$$y^2 - 2\,\frac{2\lambda+c}{a}\,y + \frac{e}{a} = 0,$$

und

$$y = \frac{2\lambda+c}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{(2\lambda+c)^2 - ae}.$$

Dem Radical können wir noch eine andere einfachere Form geben. Es ist nämlich

$$(2\lambda+c)^2 - ae = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial\varDelta}{\partial c} - \frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right) = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)} = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)}.$$

Der Wurzelausdruck geht dadurch über in

$$y = \frac{2\lambda+c}{a} \pm \frac{1}{2a}\cdot\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)}} = \frac{2\lambda+c}{a} \pm \frac{1}{2a}\cdot\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)}},$$

und man erhält

$$y_1 = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1}} \cdot \left[(2\lambda_1 + c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1\right],$$

$$\eta_1 = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{d \varDelta}{d e}\right)_1}} \cdot \left[(2\lambda_1 + c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1\right];$$

$$y_2 = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2}} \cdot \left[(2\lambda_2 + c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2\right],$$

$$\eta_2 = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2}} \cdot \left[(2\lambda_2 + c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2\right];$$

$$y_3 = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}} \cdot \left[(2\lambda_3 + c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3\right],$$

$$\eta_3 = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}} \cdot \left[(2\lambda_3 + c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3\right].$$

Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind nun

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{a y_1 y_2 y_3}{e}}, \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{a y_1 \eta_2 \eta_3}{e}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{a \eta_1 y_2 \eta_3}{e}}, \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{a \eta_1 \eta_2 y_3}{e}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\log(x_1^2) \text{ und } \log(x_2^2) = \log y_1 \pm \log y_2 \pm \log y_3 \mp \log e \pm \log a,$$

$$\log(x_3^2) \text{ und } \log(x_4^2) = -\log y_1 \pm \log y_2 \mp \log y_3 + \log e - \log a,$$

wenn

$$[a y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)e] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 \frac{e}{a}} = \mp 4b$$

ist.

Setzt man nun die oben gefundenen Werthe für y ein und berücksichtigt, dass

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2 \cdot \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3} = -\frac{1}{2} V_3$$

ist, so findet man

$$x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{-e}\,V_3}\left[(2\lambda_1+c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[(2\lambda_2+c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[(2\lambda_3+c)\sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Analog sind die drei übrigen Wurzelformen zu bilden, indem man die Vorzeichen des zweiten Gliedes innerhalb der Klammern ändert.

Wird bei einer beliebigen Wahl von nicht zusammengehörigen Werthen von y_1, y_2, y_3 gefunden

$$[a y_1 y_2 y_3 + (y_1+y_2+y_3)c] : \sqrt{y_1 y_2 y_3} = \mp 4d,$$

so braucht man nur nach den in § 313 gegebenen Regeln in entsprechender Weise die Vorzeichen des zweiten Gliedes innerhalb der Klammern zu ändern.

§ 331. Ableitung der Formeln von Aronhold mittels symmetrischer Functionen der Wurzeln*).

Um die Quartic

(1) $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$

aufzulösen, gehe man aus von der Identität

(2) $$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & -\frac{1}{4}a(x_1+x_2+x_3+x_4), & \frac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4) \\ -\frac{1}{4}a(x_1+x_2+x_3+x_4), & \frac{1}{4}a(x_1+x_2)(x_3+x_4), & -\frac{1}{4}a(x_1x_2[x_3+x_4]+x_3x_4[x_1+x_2]) \\ \frac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4), & -\frac{1}{4}a(x_1x_2[x_3+x_4]+x_3x_4[x_1+x_2]), & a x_1x_2x_3x_4 \end{vmatrix}$$

Die in der positiven Diagonale dieser Determinante gelegenen Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind keine vollständig symmetrische, sondern lassen die dreifachen Variationen

$$\begin{aligned} &x_1x_2+x_3x_4, \quad (x_1+x_2)(x_3+x_4), \\ &x_1x_3+x_2x_4, \quad (x_1+x_3)(x_2+x_4), \\ &x_1x_4+x_2x_3, \quad (x_1+x_4)(x_2+x_3) \end{aligned}$$

zu. Deswegen muss die Determinante eine Resolvente der Quartic sein. Da die drei Variationen einen Theil von c bilden, so setze man

*) Man vergl. Crelle's Journ. Bd. LII, und oben § 264.

$$\frac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4)=c+2\lambda\,.$$

Man erhält auf diese Weise die $\varDelta$-Determinante von **Aronhold**, nämlich

$$(3)\quad \varDelta=\begin{vmatrix} a & b & (c+2\lambda) \\ b & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda) & d & e \end{vmatrix}=-4\lambda^3+J_{4,2}\lambda-J_{4,3}=0.$$

Da nun die Determinante (2) stets verschwindet, wenn die Quartic (1) gleich Null ist, so ist die Determinante

$$(4)\quad \begin{vmatrix} 0 & \eta^2 & -\eta\xi & \xi^2 \\ \eta^2 & a & b & (c+2\lambda) \\ -\eta\xi & b & (c-\lambda) & d \\ \xi^2 & (c+2\lambda) & d & e \end{vmatrix}=\varPhi^2,$$

d. h. ein vollständiges Quadrat. Um dies nachzuweisen und zugleich die trinomische, quadratische Form von $\varPhi$ darzustellen, entwickeln wir die Determinante (4). Wir erhalten daraus

$$\varPhi^2=\xi^4\begin{vmatrix} a & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}+2\xi^3\eta\begin{vmatrix} a & b \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix}+2\xi^2\eta^2\begin{vmatrix} b & c-\lambda \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix}$$
$$+\xi^2\eta^2\begin{vmatrix} a & c+2\lambda \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix}+2\xi\eta^3\begin{vmatrix} b & d \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix}+\eta^4\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ d & e \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten dieses Ausdrucks lassen sich durch die partiellen Differentialquotienten von $\varDelta$ ersetzen; es ist nämlich

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)=d^2-ce+c\lambda=\begin{vmatrix} c-\lambda, & d \\ d, & e \end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)=-2(cd-bc+2d\lambda)=-2\begin{vmatrix} b, & d \\ c+2\lambda, & c \end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\right)=3c^2-2bd-ae+6c\lambda=\begin{vmatrix} a, & c+2\lambda \\ c+2\lambda, & e \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} b, & c-\lambda \\ c+2\lambda, & d \end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)=-2(bc-ad+2b\lambda)=-2\begin{vmatrix} a, & b \\ c+2\lambda, & d \end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)=b^2-ac+a\lambda=\begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda}\right)=ae-4bd+3c^2-12\lambda^2=4\begin{vmatrix} b, & c-\lambda \\ c+2\lambda, & d \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a, & c+2\lambda \\ c+2\lambda, & e \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$(5)\quad \Phi^2 =$$

$$\xi^4\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)-\xi^3\eta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)+\xi^2\eta^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)-\xi\eta^3\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)+\eta^4\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right).$$

Berücksichtigt man nun die Relationen

$$(6)\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)=0,$$

$$(7)\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)+\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)=6\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)}=6\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)},$$

$$(8)\quad 2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)=\frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}=\frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)},$$

so ergibt sich aus (5) ohne besondere Schwierigkeiten

$$(9)\quad \Phi=\pm\left[\xi^2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}-\frac{1}{2}\,\xi\eta\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}}+\eta^2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}\right]$$

$$=\pm\frac{\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right),\ -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right),\ \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\right]\widehat{\ }\left[\xi,\eta\right]^2}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6) bis (8) lässt sich der Werth von Φ auch noch in andere Determinantenformen bringen, z. B.

$$(10)\quad \Phi=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}}\cdot\begin{vmatrix}\eta^2 & a & b\\ -\eta\xi & b & (c-\lambda)\\ \xi^2 & (c+2\lambda) & d\end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}}\cdot\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\xi^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\xi\eta+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)+\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)\right]\eta^2\right],$$

$$(11)\quad \Phi=\pm\frac{2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}\cdot\begin{vmatrix}\eta^2 & a & (c+2\lambda)\\ -\eta\xi & b & d\\ \xi^2 & (c+2\lambda) & e\end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}\cdot\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\xi^2-\frac{2}{3}\left[2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)\right]\xi\eta+\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\eta^2\right],$$

$$(12)\quad \Phi = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)}} \cdot \begin{vmatrix} \eta^2 & b & (c+2\lambda) \\ -\eta\xi & (c-\lambda) & d \\ \xi^2 & d & e \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)}} \cdot \left[\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)\right]\xi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)\xi\eta + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)\eta^2\right].$$

Geht man nun aus von der Gleichung (10) und bezeichnet die drei möglichen Werthe von Φ, die sich durch Einsetzung der Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ergeben, mit φ, ψ, χ, so erhält man, vom Vorzeichen abgesehen,

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{4\varphi}{a} = (x_1+x_2-x_3-x_4)\xi^2 - 2(x_1x_2-x_3x_4)\xi\eta + (x_1x_2[x_3+x_4] - x_3x_4[x_1+x_2])\eta^2, \\ \frac{4\psi}{a} = (x_1-x_2+x_3-x_4)\xi^2 - 2(x_1x_3-x_2x_4)\xi\eta + (x_1x_3[x_2+x_4] - x_2x_4[x_1+x_3])\eta^2, \\ \frac{4\chi}{a} = (x_1-x_2-x_3+x_4)\xi^2 - 2(x_1x_4-x_2x_3)\xi\eta + (x_1x_4[x_2+x_3] - x_2x_3[x_1+x_4])\eta^2. \end{cases}$$

Bezeichnet man ferner eine der vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, z. B. x_1 allgemein mit x, addirt die drei Gleichungen und dividirt durch 4, so resultirt

$$(14)\quad \varphi + \psi + \chi = (ax+b)\xi^2 + (ax^2+4bx+3c)\xi\eta - \left(d + \frac{e}{x}\right)\eta^2$$

$$= \frac{(ax+b)\xi^3 + 3(bx+c)\xi^2\eta + 3(cx+d)\xi\eta^2 + (dx+e)\eta^3}{\xi - x\eta},$$

wo ξ und η willkürliche Grössen sind, also auch für eine von beiden Null gesetzt werden können. Setzt man aus (5) für φ, ψ und χ ihre Werthe ein, welche man erhält, wenn man in die partiellen Differenzialquotienten nacheinander die Wurzelwerthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Resolvente (3) $\Delta = 0$ einführt, so gelangt man zu den bekannten Formeln von Aronhold, nämlich

$$\frac{(a, b, c, d, e)\widehat{\ }(\xi, \eta)^3\widehat{\ }(x, y)}{\xi - x\eta}$$

$$= \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_1, -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_1, \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_1, -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_1, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_1\right]\widehat{\ }(\xi, \eta)^4}$$

$$\pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_2, -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_2, \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_2, -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_2, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_2\right]\widehat{\ }(\xi, \eta)^4}$$

$$\pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_3, -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)_3, \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial c}\right)_3, -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_3, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_3\right]\widehat{\ }(\xi, \eta)^4}.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (9), (10), (11), (12) lässt sich diese allgemeine Wurzelform noch in vielen andern theils symmetrischen, theils unsymmetrischen Ausdrücken gestalten; ebenso die bikubische Covariante $C_{4,6}$ und die Discriminante $\overline{D}_4$. Eine solche lineare Wurzelform der Quartic (1) ist z. B.

$$\frac{(a, b, c, d, e)\widehat{\ }(\xi, \eta)^3\widehat{\ }(x, 1)}{\xi - \eta x} =$$

$$\pm\left[\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_1, \ -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_1\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1, \ \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_1\right]\widehat{\ }\left[\xi, \eta\right]^2 : \sqrt[4]{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_1\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_1^2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_1^2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_1}$$

$$\pm\left[\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_2, \ -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2, \ \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_2\right]\widehat{\ }\left[\xi, \eta\right]^2 : \sqrt[4]{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_2^2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_2^2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_2}$$

$$\pm\left[\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_3, \ -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_3\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3, \ \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_3\right]\widehat{\ }\left[\xi, \eta\right]^2 : \sqrt[4]{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial a}\right)_3\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial b}\right)_3^2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial d}\right)_3^2\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial e}\right)_3}$$

$$= \pm\begin{vmatrix} 0 & \eta^2 & -\eta\xi & \xi^2 \\ \eta^2 & a & b & (c+2\lambda_1) \\ -\eta\xi & b & (c-\lambda_1) & d \\ \xi^2 & (c+2\lambda_1) & d & e \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \pm \begin{vmatrix} 0 & \eta^2 & -\eta\xi & \xi^2 \\ \eta^2 & a & b & (c+2\lambda_2) \\ -\eta\xi & b & (c-\lambda_2) & d \\ \xi^2 & (c+2\lambda_2) & d & e \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm\begin{vmatrix} 0 & \eta^2 & -\eta\xi & \xi^2 \\ \eta^2 & a & b & (c+2\lambda_3) \\ -\eta\xi & b & (c-\lambda_3) & d \\ \xi^2 & (c+2\lambda_3) & d & e \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Für die bikubische Covariante $C_{4,6}(\xi, \eta)$ gilt die Beziehung

$$C_{4,6}(\xi, \eta) = 2\varphi\psi\chi$$

$$= \left[\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1 \xi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1 \xi\eta + \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1 \eta^2\right]$$

$$\times \left[\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2 \xi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2 \xi\eta + \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_2 \eta^2\right]$$

$$\times \left[\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3 \xi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3 \xi\eta + \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_3 \eta^2\right] : (2V_3\,\Pi\,V'_{3,4}).$$

Ausserdem sind neue Ausdrücke für die Discriminante der Quartic

$$\bar{D}_4 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1, & -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2, & -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3, & -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_3 \end{vmatrix} : (2V_3\,\Pi\,V'_{3,4})^2$$

$$= \frac{a^6}{4^5}\begin{vmatrix} x_1+x_2-x_3-x_4, & x_1x_2-x_3x_4, & x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2) \\ x_1-x_2+x_3-x_4, & x_1x_3-x_2x_4, & x_1x_3(x_2+x_4)-x_2x_4(x_1+x_3) \\ x_1-x_2-x_3+x_4, & x_1x_4-x_2x_3, & x_1x_4(x_2+x_3)-x_2x_3(x_1+x_4) \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1, & -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1}}, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2, & -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_2\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_2}}, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3, & -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_3\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_3}}, & \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3 \end{vmatrix} : (4\Pi).$$

Betrachtet man die Quadrics φ, ψ, χ als die Factoren einer Sextic, so haben die Wurzeln dieser, wie schon Hesse (§ 262) im Jahre 1851 gezeigt hat, die merkwürdige Eigenschaft, dass jedes Werthepaar $\frac{\xi_1}{\eta_1}$, $\frac{\xi_2}{\eta_2}$ je zweien Wurzeln der Quartic harmonisch zugeordnet ist. Diese Sextic ist die bikubische Covariante der Quartic. Um das Theorem von Hesse noch auf eine andere Art zu beweisen, schreibe man die erste Gleichung in (13) wie folgt

$$\frac{4\varphi}{a\eta^2(x_1+x_2-x_3-x_4)} =$$

$$\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 - 2\frac{x_1x_2-x_3x_4}{x_1+x_2-x_3-x_4}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) + \frac{x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)}{x_1+x_2-x_3-x_4} = 0,$$

und setze der Kürze wegen $\frac{\xi_1}{\eta_1} = z_1$, $\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta_1$; alsdann wird

$$\frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = \frac{1}{2}(z_1 + \zeta_1),$$

$$\frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) - x_3 x_4 (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = z_1 \zeta_1 .$$

Aus den Identitäten

$$\frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) - x_3 x_4 (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} - \frac{(x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_3 x_4)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} + x_1 x_2 = 0,$$

$$\frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) - x_3 x_4 (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} - \frac{(x_3 + x_4)(x_1 x_2 - x_3 x_4)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} + x_3 x_4 = 0$$

folgen die Relationen

$$(15) \quad \begin{cases} x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(z_1 + \zeta_1) + z_1 \zeta_1 = 0, \\ x_3 x_4 - \frac{1}{2}(x_3 + x_4)(z_1 + \zeta_1) + z_1 \zeta_1 = 0. \end{cases}$$

Analog erhält man

$$(16) \quad \begin{cases} x_1 x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)(z_2 + \zeta_2) + z_2 \zeta_2 = 0, \\ x_2 x_4 - \frac{1}{2}(x_2 + x_4)(z_2 + \zeta_2) + z_2 \zeta_2 = 0, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 x_4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_4)(z_3 + \zeta_3) + z_3 \zeta_3 = 0, \\ x_2 x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)(z_3 + \zeta_3) + z_3 \zeta_3 = 0. \end{cases}$$

Je zwei dieser Systeme geben je eine Gleichung des folgenden:

$$(18) \quad \begin{cases} z_2 \zeta_2 - \frac{1}{2}(z_2 + \zeta_2)(z_3 + \zeta_3) + z_3 \zeta_3 = 0, \\ z_3 \zeta_3 - \frac{1}{2}(z_3 + \zeta_3)(z_1 + \zeta_1) + z_1 \zeta_1 = 0, \\ z_1 \zeta_1 - \frac{1}{2}(z_1 + \zeta_1)(z_2 + \zeta_2) + z_2 \zeta_3 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass die so bestimmten Punctepaare $z_1 \zeta_1$, $z_2 \zeta_2$, $z_3 \zeta_3$ ebenfalls einander harmonisch zugeordnet sind.

Sechster Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade mit Hülfe goniometrischer Functionen.

I. Das Princip der goniometrischen Methoden.

§ 332. Allgemeine Bemerkungen.

Bei der Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen, insbesondere der numerischen und einiger specieller Fälle höherer Gleichungen, z. B. der irreductiblen Formen, lassen sich mit Vortheil goniometrische Functionen zur Darstellung und Berechnung der Wurzelwerthe verwenden. Insofern nun die Wurzeln der genannten Gleichungen sich in allgemeinen und geschlossenen Formen darstellen lassen, was nicht immer ohne Beimischung algebraischer Ausdrücke möglich ist, wird man die goniometrischen Methoden den allgemeinen Methoden zuzählen und aus diesem Grunde in einer Algebra der Gleichungen abhandeln dürfen. Das Princip der goniometrischen Methoden besteht im Wesentlichen in der Benutzung der goniometrischen Functionen, gebrochene Potenzen mehrgliedriger Ausdrücke darzustellen und dieselben zur Berechnung derselben mit Hülfe von Logarithmen geeignet zu machen. Für die Auflösung der linearen Gleichungen gewähren die goniometrischen Functionen keine nennenswerthen Vortheile. Wir beginnen deshalb sofort mit der goniometrischen Auflösung der quadratischen Gleichungen.

II. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen*).

§ 333. Goniometrische Auflösung der Gleichung $x^2 + px - q = 0$.

Die vorgelegte Gleichung gibt durch Anwendung der Algebra

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}.$$

Macht man die Substitution

$$\frac{2\sqrt{q}}{p} = \tan\lambda, \quad \text{oder} \quad p = 2\sqrt{q} \,.\, \cot\lambda,$$

so wird

$$x_1 = -\sqrt{q} \,.\, \cot\lambda + \sqrt{q} \,.\, \sqrt{\cot\lambda^2 + 1} = -\sqrt{q} \,.\, \cot\lambda + \sqrt{q} : \sin\lambda$$

$$= \sqrt{q}\left[\frac{1}{\sin\lambda} - \cot\lambda\right] = \sqrt{q} \cdot \frac{1 - \cos\lambda}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda;$$

$$x_2 = -\sqrt{q} \,.\, \cot\lambda - \sqrt{q} \,.\, \sqrt{\cot\lambda^2 + 1} = -\sqrt{q} \,.\, \cot\lambda - \sqrt{q} : \sin\lambda$$

$$= -\sqrt{q}\left[\frac{1}{\sin\lambda} + \cot\lambda\right] = -\sqrt{q} \,.\, \frac{1 + \cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \,.\, \cot\frac{1}{2}\lambda.$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 + 1{,}1102x - 3{,}3594 = 0$. Man substituire einen Hülfswinkel λ durch die Annahme

$$\frac{2\sqrt{3{,}3594}}{1{,}1102} = \tan\lambda.$$

Man findet $\log\tan\lambda = 0{,}5187596$; $\lambda = 73^0\, 9'\, 2'',1$.

Nun ist $\log\sqrt{3{,}3594} = 0{,}2631308$, $\log\tan\frac{1}{2}\lambda = \overline{1},8704019$;

folglich $\log x_1 = 0{,}1335327$; $x_1 = 1{,}35998$.

Ferner ist $\log\cot\frac{1}{2}\lambda = 0{,}1295983$;

folglich $\log(-x_2) = 0{,}3927291$; $x_2 = -2{,}47018$.

---

*) Mollweide, Allgemeine Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen durch die Goniometrie. Zach, Monatl. Corresp. XXII. 1810.

Förstemann, Ueber die Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen mittels goniometrischer Functionen. Danzig 1836.

Fischer, Die Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen durch Anwendung der goniometrischen Functionen. Elberfeld 1856.

Heis, Anwendung der Goniometrie zur Auflösung der Gleichungen zweiten Grades. Lehrbuch der Trigonometrie. Cap. VIII. 4. Abschnitt.

—— Aufgabensammlung § 69.

Scherling, Zur trigonometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen. Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht. V. S. 52. 1874.

§ 334. Goniometrische Auflösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Durch Anwendung der Algebra erhält man die Wurzelform

$$x = -\frac{1}{2} p \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn $4q \leq p^2$ ist, so substituire man

$$p = 2\sqrt{q} : \sin\lambda;$$

dadurch wird

$$x_1 = -\frac{\sqrt{q}}{\sin\lambda} + \sqrt{q}\sqrt{\frac{1-\sin\lambda^2}{\sin\lambda^2}} = -\sqrt{q} : \sin\lambda + \sqrt{q} \,.\, \cot\lambda$$

$$= -\sqrt{q}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - \cot\lambda\right) = -\sqrt{q}\,\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda;$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{q}}{\sin\lambda} - \sqrt{q}\sqrt{\frac{1-\sin\lambda^2}{\sin\lambda^2}} = -\sqrt{q} : \sin\lambda - \sqrt{q} \,.\, \cot\lambda$$

$$= -\sqrt{q}\left(\frac{1}{\sin\lambda} + \cot\lambda\right) = -\sqrt{q}\,\frac{1+\cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \,.\, \cot\frac{1}{2}\lambda.$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 + 9{,}125571\,x + 9{,}7419265 = 0$. Man substituire

$$\frac{2\sqrt{9{,}7419265}}{9{,}125571} = \sin\lambda;$$

dann ist

$$\log\sin\lambda = \bar{1}{,}8350923; \quad \lambda = 43^0\, 9'\, 41'',4.$$

Nun ist

$$\log\sqrt{9{,}7419265} = 0{,}4943224,$$

$$\log\tan\frac{1}{2}\lambda = \bar{1}{,}5971902.$$

Daraus ergibt sich

$$\log(-x_1) = 0{,}0915126, \quad x_1 = -1{,}23456.$$

Ferner ist

$$\log\cot\frac{1}{2}\lambda = 0{,}4028102,$$

woraus sich berechnet

$$\log(-x_2) = 0{,}8971326; \quad x_2 = -7{,}891011.$$

b) Wenn $4q > p^2$ ist, so substituire man

$$p = 2\sqrt{q}\cos\vartheta.$$

Dadurch nimmt die Gleichung die Form

$$x^2 + 2\sqrt{q}\cos\vartheta \,.\, x + q = 0$$

an. Aus der algebraischen Wurzelform erhält man nun

$$x_1 = -\sqrt{q}\,.\cos\vartheta + \sqrt{q}\sqrt{\cos\vartheta^2 - 1} = -\sqrt{q}(\cos\vartheta - \sin\vartheta\sqrt{-1}),$$
$$x_2 = -\sqrt{q}\,.\cos\vartheta - \sqrt{q}\sqrt{\cos\vartheta^2 - 1} = -\sqrt{q}(\cos\vartheta + \sin\vartheta\sqrt{-1}).$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen

$$x^2 - 138{,}72274x + 8016 = 0.$$

Da hier $4q > p^2$ ist, so substituire man

$$\frac{138{,}72274}{2\sqrt{8016}} = \cos\vartheta.$$

Alsdann findet man

$$\log\cos\vartheta = \bar{1}{,}8891388, \quad \vartheta = 39^0\,13'\,16'',7.$$

Nun ist

$$\log\sqrt{8016} = 1{,}9519788,$$
$$\log\sin\vartheta = \bar{1}{,}8009331,$$

folglich

$$\log[\sqrt{q}\,.\sin\vartheta] = 1{,}7529119$$

und

$$x_1 \text{ und } x_2 = 69{,}36137 \pm 56{,}61272\sqrt{-1}.$$

§ 335. Methode von Förstemann*).

Gegeben sei die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$. Bezeichnet man ihre Wurzeln mit x_1 und x_2, so ist

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 = b.$$

Um mit Hülfe goniometrischer Functionen die Wurzeln einzeln zu bestimmen, unterscheide man zwei Fälle:

a) Das Absolutglied oder das Product der Wurzeln b sei positiv, also die Gleichung von der Form $x^2 - px + q = 0$.

Sollen die Wurzeln reell sein, so muss $p^2 \geqq 4q$ sein; denn es ist $(x_1 - x_2)^2 \overline{\geqq} 0$, also $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \overline{\geqq} 0$, d. i. $p^2 - 4q \overline{\geqq} 0$. Substituirt man

$$x_1 = \sqrt{q}\,.\tan\varphi, \quad x_2 = \sqrt{q}\,.\cot\varphi,$$

*) Förstemann, l. c. § 2.
Heis, l. c. § 110 und § 111.

so wird $x_1 x_2 = q = b$ und

$$-a = p = \sqrt{q}\,(\tan\varphi + \cot\varphi) = \sqrt{q}\,\frac{2}{\sin 2\varphi}\,.$$

Den Hülfswinkel erhält man hiernach aus der Formel

$$\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}\,,\quad p \gtreqqless 2\sqrt{q}\,.$$

Wenn $p^2 < 4q$, so setze man

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{q}\,(\cos\vartheta \pm \sin\vartheta\,.\sqrt{-1})\,,$$

wodurch ebenfalls $x_1 x_2 = q$ wird. Da $p = 2\sqrt{q}\cdot\cos\vartheta$ ist, so erhält man ϑ aus

$$\cos\vartheta = \frac{p}{2\sqrt{q}}\,.$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 - 93{,}7062x + 1984{,}74 = 0$. Man findet aus

$$\sin\,2\varphi = 2\sqrt{q} : p\,,$$
$$2\varphi = 71^0\,57'\,44'',6\,,$$

und aus

$$x_1 = \sqrt{q}\,.\tan\varphi\,,\quad x_2 = \sqrt{q}\,.\cot\varphi\,,$$
$$x_1 = 61{,}3607\,,\qquad x_2 = 32{,}3454\,.$$

b) Das Absolutglied oder das Product der Wurzeln b sei negativ, also die Gleichung von der Form $x^2 - px - q = 0$.

Man setze $x_1 = -\sqrt{q}\,.\tan\varphi$, $x_2 = \sqrt{q}\,.\cot\varphi$, wodurch $x_1 x_2$ gleich $-q$ wird. Weiter erhält man

$$-a = p = x_1 + x_2 = \sqrt{q}\,(-\tan\varphi + \cot\varphi) = 2\sqrt{q}\cot.2\varphi\,.$$

Der Hülfswinkel φ ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}\,.$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 - 504{,}67x - 236489 = 0$.

Man findet aus $\tan 2\varphi = 2\sqrt{q} : p$

$$2\varphi = 62^0\,34'\,33'',0\,,$$

und hieraus die Wurzelwerthe

$$x_1 = 800{,}205\,,\quad x_2 = -295{,}535\,.$$

§ 336. Auflösung einer quadratischen Gleichung mit complexen Coefficienten*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + (a + bi)x + (c + di) = 0.$$

Auf algebraischem Wege findet man

$$x = + \frac{1}{2}\left[-(a + bi) \pm \sqrt{(a^2 - b^2 - 4c) + (2ab - 4d)i}\right].$$

Man substituire

$$\frac{2ab - 4d}{a^2 - b^2 - 4c} = \tan\varphi, \quad r = \frac{a^2 - b^2 - 4c}{\cos\varphi} = \frac{2ab - 4d}{\sin\varphi}.$$

Dann ist

$$x = \frac{1}{2}\left[-\left(a + bi\right) \pm \sqrt{r}\left(\cos\frac{1}{2}\varphi + i\sin\frac{1}{2}\varphi\right)\right.$$

oder

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\left[\left(-a \pm \sqrt{r}.\cos\frac{1}{2}\varphi\right) + \left(-b \pm \sqrt{r}.\sin\frac{1}{2}\varphi\right)\sqrt{-1}\right].$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen: $x^2 - (5 + 4i)x + (6 + 8i) = 0$. Man findet

$$r\cos\varphi = -15, \quad r\sin\varphi = 8, \quad \tan\varphi = -\frac{8}{15}.$$

Es muss demnach φ ein Winkel des zweiten Quadranten sein. Man hat aber auch

$$\cos\varphi = -\frac{15}{17}, \quad \sin\varphi = \frac{8}{17}, \quad r = \frac{-15}{\cos\varphi} = 17.$$

Ferner findet man

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)} = \sqrt{\frac{1}{17}},$$

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{\frac{16}{17}},$$

folglich ist

$$\sqrt{r}.\cos\frac{1}{2}\varphi = 1, \quad \sqrt{r}.\sin\frac{1}{2}\varphi = 4,$$

und

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[(5 + 1) + (4 + 4)\sqrt{-1}\right] = 3 + 4\sqrt{-1},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[(5 - 1) + (4 - 4)\sqrt{-1}\right] = 2.$$

*) Cauchy, Exercices mathématiques T. IV. p. 83, und Förstemann, l. c. § 4.

§ 337. Goniometrische Methode von **Fischer***).

Gegeben sei

$$x^2 - px + q = 0, \quad p^2 \overline{>} 4q.$$

Man substituire

$$x_1 = p \cos \varphi^2, \quad x_2 = p \sin \varphi^2.$$

Daraus folgt

$$x_1 + x_2 = p(\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2) = p,$$
$$x_1 x_2 = p^2(\sin \varphi \cos \varphi)^2 = \frac{1}{4} p^2 (\sin 2\varphi)^2.$$

Der Hülfswinkel wird gefunden aus der Relation

$$\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 - 93{,}7062x + 1984{,}74 = 0$. Man findet

$$2\varphi = 71^0\,57'\,44'',6, \quad \varphi = 35^0\,58'\,52'',3,$$

und daraus

$$x_1 = 61{,}3607, \quad x_2 = 32{,}3454.$$

§ 338. Methode von **Grunert****).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 - px + q = 0.$$

Wenn die beiden Wurzeln x_1 und x_2 mit $\tan \varphi_1$ und $\tan \varphi_2$ bezeichnet werden und $\varphi_1 > \varphi_2$ angenommen wird, so ist

$$\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2 = p, \quad \tan \varphi_1 \tan \varphi_2 = q.$$

Demgemäss ist nun

$$\text{I.} \quad \tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2}{1 - \tan \varphi_1 \tan \varphi_2} = \frac{p}{1 - q}.$$

Weil ferner

$$\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{1 + \tan \varphi_1 \tan \varphi_2}{\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2} = \frac{1 + q}{p},$$

so erhält man ausserdem die Gleichung

---

*) Fischer, l. c. S. 11.

**) Grunert, Eine neue Auflösung der quadratischen Gleichungen durch goniometrische Functionen. Grunert's Archiv. I. S. 12. 1841.

Man vergl. den Schlüssel zu Heis' Aufgabensammlung. I. § 69. Nr. 175.

$$\text{II.} \qquad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1+q}{p} \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Aus I. und II. können φ_1 und φ_2 bestimmt werden.

1. Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 - 24{,}691\,x + 61{,}6 = 0$. Es ist zunächst

$$p : (1 - q) = 24{,}691 : (-60{,}6).$$

Da also $\tan(\varphi_1 + \varphi_2)$ negativ ist, so liegt $\varphi_1 + \varphi_2$ im zweiten Quadranten. Man findet nun

$$\log p - \log(1 - q) = \bar{1}{,}6100661,$$

folglich

$$\text{I.} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = 157^0\, 49'\, 55'',0.$$

Ferner ist

$$\log\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \bar{1}{,}5767305, \quad \log(1 + q) = 1{,}7965743$$

und

$$\log p = 1{,}3925387.$$

Daraus folgt

$$\log\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \bar{1}{,}9807661,$$

und

$$\text{II.} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = 16^0\, 55'\, 59'',6.$$

Die beiden Winkel werden aus I. und II. berechnet. Zu

$$\varphi_1 = 87^0\, 22'\, 57'',3 \text{ und } \varphi_2 = 70^0\, 26'\, 57'',7.$$

Nun ist

$$\log\tan\varphi_1 = 1{,}3399475, \quad \tan\varphi_1 = x_1 = 21{,}875;$$
$$\log\tan\varphi_2 = 0{,}4496327, \quad \tan\varphi_2 = x_2 = 2{,}816.$$

2. Zahlenbeispiel. Aufzulösen

$$x^2 - 2{,}3927x - 5{,}757312 = 0.$$

Da $\tan\varphi_1 \tan\varphi_2$ negativ ist, so liegt der eine Winkel im zweiten Quadranten und somit $\varphi_1 + \varphi_2$ im dritten Quadranten, weil $\tan(\varphi_1 + \varphi_2)$ positiv ausfällt. Es ist nun

$$\log p - \log(1 - q) = \bar{1}{,}5491137,$$

und

$$\text{I.} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = 199^0\, 29'\, 54'',8.$$

Ferner ist

$$\log\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \bar{1}{,}5234643,$$
$$\log(1 - q) = 0{,}6773616, \quad \log p = 0{,}3788882.$$

Da $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $(1 + q)$ zugleich negativ sind, so liegt der Winkel $\varphi_1 - \varphi_2$ im ersten Quadranten. Es ist nämlich

$$\log\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \bar{1},8219377,$$

$$\text{II.} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = 40^0\,25'\,16'',6.$$

Aus I. und II. folgt

$$\varphi_1 = 123^0\,57'\,35'',7, \quad \varphi_2 = 75^0\,32'\,19'',1.$$

Nun ist $\tan\varphi$ negativ, also

$$\log(-\tan\varphi_1) = 0,1716680, \quad \tan\varphi_1 = x_1 = -1,4848;$$
$$\log\tan\varphi_2 = 0,5885516, \quad \tan\varphi_2 = x_2 = 3,8775.$$

3. Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 + 0,43555x - 0,2016 = 0$. Hier ist

$$p = -0,43555, \; 1 - q = 1,2016.$$

Da also $\tan(\varphi_1 + \varphi_2)$ negativ ist, so liegt $\varphi_1 + \varphi_2$ im zweiten Quadranten. Es ist ferner

$$\log(0,43555 : 1,2016) = \bar{1},5592781,$$

also

$$\text{I.} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = 160^0\,4'\,32'',5.$$

Dann ist

$$\log\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \bar{1},5324736,$$
$$\log(1 + q) = \bar{1},9022205, \quad \log(-p) = \bar{1},6390380.$$

Da nun $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ negativ ist, so liegt der Winkel $\varphi_1 - \varphi_2$ im zweiten Quadranten; also ist

$$\log\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \bar{1},7956561,$$

$$\text{II.} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = 128^0\,39'\,30'',2.$$

Aus I. und II. folgt

$$\varphi_1 = 144^0\,22'\,1'',3, \quad \varphi_2 = 15^0\,42'\,31'',1.$$

Nun ist $\tan\varphi$ negativ, also

$$\log(-\tan\varphi_1) = \bar{1},8553983, \quad \tan\varphi_1 = x_1 = -0,7168,$$
$$\log\tan\varphi_2 = \bar{1},4490925, \quad \tan\varphi_2 = x_2 = 0,28125.$$

4. Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^2 + 0,91931x + 0,2112 = 0$. Hier ist

$$p = -0,91931, \; 1 - q = 0,7888.$$

Da also $\tan(\varphi_1 + \varphi_2)$ negativ ist, so liegt der Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ entweder im zweiten oder im vierten Quadranten. Nun ist

$\tan \varphi_1 \tan \varphi_2$ aber positiv, also liegen φ_1 und φ_2 entweder beide im ersten oder beide im zweiten Quadranten. Endlich ist unter der Annahme, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ im zweiten Quadranten liege, $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ negativ; dies würde aber der ursprünglichen Voraussetzung widersprechen, dass immer $\varphi_1 > \varphi_2$ sein solle. Demgemäss ist der Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ im vierten Quadranten gelegen. Es ist nun

$$\log(-p) - \log(1-q) = 0{,}0664951$$

und

$$\text{I.} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = 310^0\,57'\,50'',7.$$

Ferner ist

$$\log \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \bar{1}{,}8801971\,,$$

$$\log(1+q) = 0{,}0832159\,, \quad \log(-p) = \bar{1}{,}9634620\,.$$

Folglich wird

$$\log \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \bar{1}{,}9999510\,,$$

$$\text{II.} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = 0^0\,51'\,37'',5\,.$$

Aus I. und II. folgt endlich

$$\varphi_1 = 155^0\,44'\,44'',1\,, \quad \varphi_2 = 154^0\,53'\,6'',6\,.$$

Daraus werden die Wurzeln mit Hülfe der Tangenten berechnet, nämlich

$$\log(-\tan \varphi_1) = \bar{1}{,}6537171\,, \quad \tan \varphi_1 = x_1 = -\,0{,}45056\,,$$

$$\log(-\tan \varphi_2) = \bar{1}{,}6709752\,, \quad \tan \varphi_2 = x_2 = -\,0{,}46875\,.$$

III. Von der Auflösung der kubischen Gleichungen.

§ 339. Goniometrische Auflösung der Gleichungen von der Form*)

$$x^3 + px \pm q = 0\,.$$

Die vorstehende Gleichung hat stets eine reelle und zwei complexe Wurzeln. Es ist nämlich nach der Cardanischen Formel

$$x_1 = \mp \left[\sqrt[3]{\tfrac{1}{2} q + \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27} p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} q - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27} p^3}}\right].$$

Substituirt man

$$4p^3 : 27q^2 = \tan \alpha^2\,,$$

*) Eytelwein, Die Grundlehren der höheren Analysis. Bd. I. § 175. Berlin, 1824.

Förstemann, l. c. § 5. Heis, Aufgabensammlung. § 96.

so geht die Formel über in

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{\frac{1}{2} q} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\cos \alpha}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\cos \alpha}}\right]$$
$$= \mp \sqrt[3]{\frac{1}{2} q \tan \alpha} \left[\sqrt[3]{\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}\right]$$
$$= \mp \sqrt{\frac{1}{3} p} \left[\sqrt[3]{\cot \frac{1}{2} \alpha} - \sqrt[3]{\tan \frac{1}{2} \alpha}\right].$$

Setzt man weiter

$$\sqrt[3]{\tan \frac{1}{2} \alpha} = \tan \beta,$$

so erhält man die Wurzelform

$$x_1 = \mp \sqrt{\frac{1}{3} p} (\cot \beta - \tan \beta) = \mp 2 \sqrt{\frac{1}{3} p} . \cot 2\beta .$$

Weil nun

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2} x_1 \pm \sqrt{-\frac{3}{4} x_1^2 - p}$$

ist, so sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, in goniometrischen Functionen ausgedrückt,

$$x_1 = \mp 2 \sqrt{\frac{1}{3} p} . \cot 2\beta ,$$
$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p} \left(\cot 2\beta + \frac{\sqrt{-3}}{\sin 2\beta}\right),$$
$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p} \left(\cot 2\beta - \frac{\sqrt{-3}}{\sin 2\beta}\right).$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^3 + 7x + 3 = 0$.

Man substituire

$$\frac{p}{3q} \sqrt{\frac{4}{3} p} = \frac{7}{9} \sqrt{9\tfrac{1}{3}} = \tan \alpha .$$

Man findet

$$\log \frac{7}{9} = \bar{1},8908555, \quad \log \sqrt{9\tfrac{1}{3}} = 0,4850183,$$
$$\log \tan \alpha = 0,3758739, \quad \alpha = 67^0\, 10'\, 34'',56;$$
$$\log \tan \frac{1}{2} \alpha = \bar{1},8222335, \quad \log \tan \beta = \bar{1},9407442;$$
$$\beta = 41^0\, 6'\, 11'',98, \quad \log \cot 2\beta = \bar{1},1362916 .$$

Folglich ist

$$\log(-x_1) = \bar{1},6213099, \quad x_1 = -0,4181286;$$
$$x_2 \text{ und } x_3 = 0,209064 \pm 2,67042 \sqrt{-1}.$$

§ 340. Goniometrische Auflösung derselben Gleichung nach Terquem*).

Die vorgelegte Gleichung sei von der Form

$$x^3 + px - q = 0.$$

Man substituire wie vorhin

$$4p^3 : 27q^2 = \alpha^2,$$

so wird

$$x_1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left[\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\alpha} - \sqrt[3]{\tan\tfrac{1}{2}\alpha}\right].$$

Man setze ferner

$$\sqrt[3]{\tan\tfrac{1}{2}\alpha} = \sin\beta,$$

so resultiren die Wurzelformen:

$$x_1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\beta\cot\beta,$$

$$x_2 \text{ und } x_3 =$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\beta\cot\beta \pm \sqrt{p}\,.\,\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\cos\beta^2\cot\beta^2}.$$

Zur leichteren Berechnung der beiden complexen Wurzeln kann man noch substituiren

$$\tfrac{1}{2}\cos\beta\cot\beta = \tan\gamma.$$

Daraus erhält man

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\tan\gamma \pm \sqrt{p}\,\frac{\sqrt{-1}}{\sin\gamma}.$$

§ 341. Goniometrische Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$, wenn $4p^3 \overline{\gtrless} 27q^2$.

Geht man wiederum aus von der algebraischen Darstellung der Wurzeln und substituirt

$$4p^3 : 27q^2 = \sin\gamma^2,$$

was wegen der vorgeschriebenen Bedingung immer möglich ist, so erhält man

*) Terquem, Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré. Nouv. ann. math. XX. p. 421. 1861. Auszug in den Astron. Nachr. Nr. 1016. S. 118.

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{q}\left[\sqrt[3]{\frac{1+\cos\gamma}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-\cos\gamma}{2}}\right]$$
$$= \mp \sqrt[3]{q\left(\cos\frac{1}{2}\gamma\right)^2}\cdot\left(1+\sqrt[3]{\left(\tan\frac{1}{2}\gamma\right)^2}\right).$$

Weil ferner

$$q = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3} : \sin\gamma = \sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3} : \left(\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma\right)$$

ist, so wird

$$\sqrt[3]{q\left(\cos\frac{1}{2}\gamma\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}p}\cdot\cot\delta,$$

und folglich

$$x_1 = \mp\sqrt{\frac{1}{3}p}\,\frac{\cot\delta}{\cos\delta^2} = \mp\sqrt{\frac{4}{3}p} : \sin 2\delta,$$
$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}p}\left(\frac{1}{\sin 2\delta} + \cot 2\delta\sqrt{-3}\right),$$
$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}p}\left(\frac{1}{\sin 2\delta} - \cot 2\delta\sqrt{-3}\right).$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^3 - 7x + 11 = 0$.
Man substituire

$$\frac{p}{3q}\sqrt{\frac{4}{3}p} = \frac{7}{33}\sqrt{9\frac{1}{3}} = \sin\gamma.$$

Zur Berechnung dienen folgende numerische Daten:

$$\log\frac{7}{33} = \bar{1},3265841, \quad \log\sqrt{9\frac{1}{3}} = 0,4850183,$$
$$\log\sin\gamma = \bar{1},8116024, \qquad \gamma = 40^0\,23'\,38'',6,$$
$$\log\tan\frac{1}{2}\gamma = \bar{1},5656936, \quad \log\tan\delta = \bar{1},8552312,$$
$$\delta = 35^0\,37'\,21'',1, \quad \log\sin 2\delta = \bar{1},9763051.$$

Folglich ist

$$\log(-x_1) = \quad 0,5087132,$$

und

$$x_1 = -3,226362,$$
$$x_2 \text{ und } x_3 = \quad 1,613181 \pm 0,898365\sqrt{-1}.$$

§ 342. Goniometrische Auflösung des irreductibeln Falles nach Vieta, Girard und van Schooten*).

Gegeben sei die unvollständige kubische Gleichung

$$x^3 - px \pm q = 0\,, \quad 4p^3 \geqq 27q^2\,.$$

a) Man geht aus von der goniometrischen Formel für den Sinus des dreifachen Winkels, also

$$\sin 3\varepsilon = 3 \sin \varepsilon - 4 \sin \varepsilon^3\,,$$

oder

$$\sin \varepsilon^3 - \frac{3}{4} \sin \varepsilon + \frac{1}{4} \sin 3\varepsilon = 0\,.$$

Substituirt man in derselben $\sin \varepsilon = x : r$, also $r > x$, wo r eine Unbestimmte ist, so erhält man die nach x geordnete Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = 0\,.$$

Identificirt man diese Gleichung mit der vorgelegten, so erhält man zur Bestimmung von r und 3ε die beiden Relationen:

$$\frac{3}{4} r^2 = p\,,$$

$$\frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = \pm q\,.$$

Daraus folgt

$$r = \pm \sqrt{\frac{4}{3} p}\,, \quad \sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} : \sqrt{\frac{4}{3} p}\,.$$

Der zweiten Gleichung unter diesen genügen aber drei verschiedene Werthe des Winkels, indem bekanntlich

$$\sin 3\varepsilon = \sin (360^0 + 3\varepsilon) = \sin (720^0 + 3\varepsilon)\,,$$

oder

$$\sin 3\varepsilon = \sin (180^0 - 3\varepsilon) = - \sin (180^0 + 3\varepsilon)$$

ist. Da nun $x = r \sin \varepsilon$ ist, so lassen sich aus jenen drei verschiedenen Werthen eben so viele verschiedene Drittheile des Winkels ableiten, nämlich

---

*) Alex. Anderson, Ad angularium sectionum analyticen theoremata καθολικώτερα. Theorema VI. publ. Paris 1615. Op. math. Vietae edit. a Fr. a Schooten. Lugd. Batav. 1646.

Alb. Girard, Invention nouvelle en l'algèbre. Amsterdam 1629.

Fr. v. Schooten, Appendix de cubicarum aequationum resolutione opera mathem. Vietae. pag. 345. Lugd. Bat. 1646.

$$\varepsilon\,, \quad 120^0+\varepsilon\,, \qquad 240^0+\varepsilon\,,$$

oder

$$\varepsilon\,, \quad 60^0-\varepsilon\,, \quad -(60^0+\varepsilon)\,.$$

Ebenso viele verschiedene Werthe erhält man für x, nämlich

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\sin\varepsilon\,,$$

$$x_2=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\sin(120^0+\varepsilon)=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\sin(60^0-\varepsilon)\,,$$

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\sin(240^0+\varepsilon)=\mp\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\sin(60^0+\varepsilon)\,.$$

b) Man kann auch ausgehen von der Formel für den Cosinus des dreifachen Winkels, also von

$$\cos 3\varepsilon=-3\cos\varepsilon+4\cos\varepsilon^3\,,$$

oder

$$\cos\varepsilon^3-\frac{3}{4}\cos\varepsilon-\frac{1}{4}\cos 3\varepsilon=0\,.$$

Substituirt man in derselben $\cos\varepsilon=x:r$, wo $r>x$ ist, so erhält man eine Gleichung in x, welche mit der vorgelegten identificirt, Bestimmungsgleichungen für r und ε abgibt. Dieselbe lautet

$$x^3-\frac{3}{4}r^2x-\frac{1}{4}r^3\cos 3\varepsilon=0\,.$$

Die Bestimmungsgleichungen sind

$$r=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\ \text{(jenachdem das Absolutglied } \pm q \text{ ist)},$$

und

$$\cos 3\varepsilon=\frac{3q}{p}:\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.$$

Nun ist

$$\cos 3\varepsilon=-\cos(180^0-3\varepsilon)=-\cos(180^0+3\varepsilon)\,,$$

und wegen der Annahme $x=r\cos\varepsilon$:

$$x_1=\mp\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\varepsilon\,,$$

$$x_2=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos(60^0-\varepsilon)\,,$$

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos(60^0+\varepsilon)\,.$$

1. Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^3-7x+6=0$.

Man setze

$$\frac{18}{7} : \sqrt{9\,\frac{1}{3}} = \sin 3\varepsilon\,,$$

alsdann findet man

$$\log \frac{18}{7} = 0{,}4101745\,, \quad \log \sqrt{9\,\frac{1}{3}} = 0{,}4850183\,,$$

$$\log \sin 3\varepsilon = \bar{1}{,}9251562\,, \quad \varepsilon = 19^0\,6'\,23'',8\,,$$

$$\log \sin \varepsilon = \bar{1}{,}5149817\,, \quad \log x_1 = 0{,}0000000\,,$$

$$\log \sin (60^0 - \varepsilon) = \bar{1}{,}8160117\,, \quad \log x_2 = 0{,}3010300\,,$$

$$\log \sin (60^0 + \varepsilon) = \bar{1}{,}9921030\,, \quad \log (-x_3) = 0{,}4771213\,.$$

Die Wurzelwerthe sind demnach

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 2\,, \quad x_3 = -3\,.$$

2. Zahlenbeispiel. Aufzulösen $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Man setze

$$\frac{3q}{p} : \sqrt{\frac{4}{3}\,p} = 1 = \cos 3\varepsilon\,.$$

Daraus folgt $\varepsilon = 0^0$ und

$$x_1 = -2\,, \quad x_2 = x_3 = 1\,.$$

Historische Bemerkungen. Die ältesten Methoden, trigonometrische Functionen zur Auflösung kubischer Gleichungen anzuwenden, stehen im Zusammenhange mit dem Probleme von der Dreitheilung des Winkels *(trisectio anguli)*, allgemein mit dem Problem von der Theilung des Kreisbogens in eine Anzahl aliquoter Theile. Woepcke theilt im Anhang E. zu der Algebra des Omar Alkhayyami ein Problem mit, welches von Albiruni dem Abul Djud Mohammed ben Allaïth (1038 n. Chr.) seiner Zeit vorgelegt wurde. Dasselbe geht hervor aus den Worten: „Weshalb wir behaupten in dem 7. Satze des 7. Kapitels vom 4. Buche unserer Geometrie, dass mittels dieses Satzes (es handelt sich um die Construction der Gleichung $ax = x^3 + b$) sich algebraisch das reguläre Neuneck construiren lässt.“

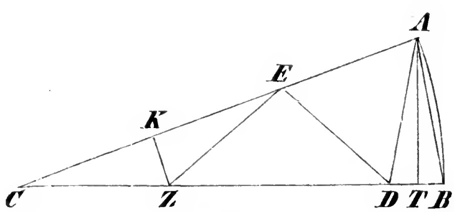


Fig. 27.

In seiner Beantwortung des Problems betrachtet Abul Djud die Sehne AB (Fig. 27), welche den achtzehnten Theil eines Kreises vom

Radius $CB = CA$ überspannt. Er nimmt $AD = AB$, $ED = AD$, $EZ = ED$ an und findet auch $CZ = AB$ sowie $EA = AB$. Fällt man die Perpendikel AT und ZK, so erhält man

$$CZ : CK = CA : CT,$$

und

$$CZ : CE = CA : 2CT;$$

folglich

$$CZ : (CZ + CE) = CA : (CA + 2CT),$$

oder

$$AB : (AE + CE) = CA : (CB + CB + CD),$$

d. h.

$$AB : CA = CA : (CD + 2CB).$$

Nun setzt der arabische Mathematiker $AC = 1$ und $AB = x$, wodurch er erhält

$$x(CD + 2) = 1.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, BDA hat man nun $AC \, . \, BD = AB^2$, also $BD = x^2$, $CD = 1 - x^2$. Setzt man dies in die Gleichung ein, so erhält man die kubische Gleichung $x^3 + 1 = 3x$. So weit der Autor.

Es ist dies in der That dieselbe Gleichung, welche man erhält, wenn man in $4 \sin \varepsilon^3 + \sin 3\varepsilon = 3 \sin \varepsilon$ einsetzt: $2 \sin \varepsilon = x$ und $\varepsilon = 30^0$.

Woepcke erwähnt noch die Construction des regulären Siebenecks, welche sich bei den Arabern findet, und ebenfalls von einer kubischen Gleichung abhängt. Ist in der obigen Figur AB die Seite des regulären Vierzehnecks, so ist nach dem anonymen Verfasser und Zeitgenossen des Abu Sahl Alkuhi (980):

$$BD : AB = AB : AC,$$

und

$$AB : CD = AC : (AC + CD).$$

Setzt man $AC = 1$, $AB = x$, so erhält man die kubische Gleichung

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, auf die später Vieta dasselbe Problem zurückführte. (Man vergleiche *Franc. Vietae op. math. in unum volumen congesta, opera et studio Franc. a Schooten, Lugd. Bat.* 1646. fol. pag. 362, prot. IV.)

Das Princip der im Anfange dieses Paragraphen gegebenen goniometrischen Auflösung rührt nach v. Schooten's Mittheilung von Vieta her. Im 6. und 9. Theorem der *Sect. angul.* befinden sich unter den Kreistheilungen die beiden folgenden Relationen bezüglich der Dreitheilung des Winkels:

Sit semidiameter 1. basis prima 1 *N. Erit*

$$1C - 3N \quad \textit{basis anguli tripli}.$$

(Sit semidiameter 1.*)* 1 *N intelligitor perpendiculum trianguli. Erit*

$3N - 1C$ *perpendiculum anguli tripli.*

Hierin sind offenbar die beiden folgenden Sätze enthalten

$$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = 0, \quad x = r \sin \varepsilon;$$

$$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x - \frac{1}{4} r^3 \cos 3\varepsilon = 0, \quad x = r \cos \varepsilon.$$

Eine klarere geometrische Illustration von dieser Regel gab Fr. v. Schooten in seinem Appendix zur Geometrie von Descartes, woraus hervorgeht, dass bereits 1629 Albert Girard dieselbe Methode, freilich ebenfalls ohne Einführung goniometrischer Functionen, auf die kubische Gleichung

1 ③ ∞ 13 ① + 12, (d. i. $x^3 = 13x + 12$)

angewandt hatte. Die Auflösung Girard's ist folgende:

Man bestimme die mittlere geometrische Proportionale von 13 und 3, d. i. $\sqrt{\frac{13}{3}}$, und construire mittels derselben als Radius FH (Fig. 28) einen Kreis. Alsdann ziehe die Sehne FG gleich $2\frac{10}{13}$ d. h. gleich dem Quotienten der Division von 12 durch $4\frac{1}{3}$, und theile den Complementarbogen GK in J und L in drei gleiche Theile. Die Sehne FL wird

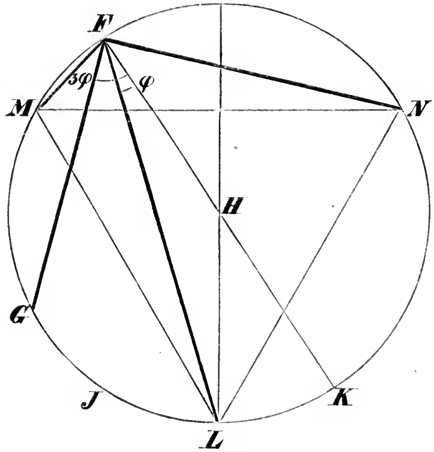


Fig. 28.

dann eine Wurzel der Gleichung sein. Er fügt hinzu, dass zwei andere negative Wurzelwerthe durch die Sehnen FM und FN dargestellt würden, wobei M und N gefunden würden, indem man von L aus ein gleichseitiges Dreieck LMN beschreibe.

Zum Beweise dieses Theorems bezeichne man den Winkel GFK mit 3φ, LFK mit φ, FL mit x_1. Dann ist

$$x : 2r = \cos\varphi\,, \quad FG = q : \frac{1}{3}p = 2r\cos 3\varphi\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{q}{2\left(\frac{1}{3}p\right)^{\frac{3}{2}}} = \cos 3\varphi = -3\cos\varphi + 4\cos\varphi^3$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} + \frac{4x^3}{8\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3}}\,,$$

und endlich

$$x^3 - px - q = x^3 - 13x - 12 = 0\,.$$

Nun ist der Peripheriewinkel des Bogens KGM gleich $60^0 + \varphi$, der des Bogens $KN = 60^0 - \varphi$. Die beiden andern Wurzeln sind demnach

$$x_2 = -2r\cos(60^0 + \varphi)\,, \quad x_3 = -2r\cos(60^0 - \varphi)\,.$$

§ 343. Goniometrische Methode nach Landen und Colson*).

Landen hat gezeigt, dass die unvollständige Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

sich durch Differenzirung des Absolutgliedes q nach der Unbekannten x auf die integrabele Differenzialgleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\frac{4}{3}p - x^2}} = -\frac{\partial q}{3\sqrt{\frac{4}{27}p^3 - q^2}}$$

reduciren lässt. Diese beiden Ausdrücke sind nun offenbar die Differenziale der Bögen zweier Winkel, nämlich von

$$\text{arc sin}\,\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sin}\,\frac{-3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}\,.$$

Substituirt man

$$\frac{-3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}} = \alpha\,,$$

und setzt den kleinsten Winkel, welcher dem sin $(= \alpha)$ entspricht, gleich 3φ, so erhält man

*) Joh. Landen, Mathematical lucubrations. London 1755.
Colson, Commentar zu Newton's Method of fluxions. pag. 308.
Kästner, De Formula Cardani. Index praelectionum Prop. IV. pg. 12. Gottingae 1757.
Man vergl. auch oben § 133 und 145.

$$\arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{p}} = \varphi ,$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3} p} \,.\, \sin\varphi .$$

Wir wollen diese elegante Methode für die vollständige Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

erweitern. Nach § 145 ist

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - 4b) - \frac{2}{3} ax - x^2}}$$

$$= \frac{-\partial c}{3\sqrt{\frac{1}{27}(a^2 - 4b)b^2 - \frac{2}{27}(2a^3 - 9ab)c - c^2}} ,$$

woraus man durch Integration erhält:

$$\arcsin \frac{3x + a}{2\sqrt{a^2 - 3b}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{-(2a^3 - 9ab + 27c)}{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}} .$$

Man substituire

$$\frac{-(2a^3 - 9ab + 27c)}{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}} = \alpha ,$$

und setze den kleinsten Winkel, welcher dem sin $(= \alpha)$ entspricht, gleich 3φ, so ist

$$\arcsin \frac{3x + a}{2\sqrt{a^2 - 3b}} = \varphi ,$$

folglich

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a^2 - 3b} \,.\, \sin\varphi - a}{3} ,$$

und analog

$$x_2 = \frac{2\sqrt{a^2 - 3b} \,.\, \sin(60^0 - \varphi) - a}{3} ,$$

$$x_3 = \frac{-2\sqrt{a^2 - 3b} \,.\, \sin(60^0 + \varphi) - a}{3} .$$

§ 344. Goniometrische Auflösung des irreductibeln Falles nach Moivre und Eytelwein*).

Gegeben sei die unvollständige Gleichung

$$x^3 - px \pm q = 0 , \quad 4p^3 \geqq 27q^2 .$$

*) Eytelwein, Die Grundlehren der höheren Analysis. Bd. I. § 175. S. 216. Berlin 1824.

Heis, Ebene und sphär. Trigonometrie III. Th. Cap. VIII. Aufg. 116 u. 118.

Man setze

$$x = y + z\,,$$

wodurch die vorgelegte Gleichung übergeht in

$$x^3 - 3yzx - (y^3 + z^3) = 0\,.$$

Die Bestimmungsgleichungen für y und z sind

$$yz = \frac{1}{3}p\,, \quad y^3 + z^3 = \mp q\,.$$

Die Grössen y und z sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$y^6 \pm qy^3 + \frac{1}{27}p^3 = 0\,,$$

also

$$y = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\pm \frac{1}{2}q\right)^2 - \frac{1}{27}p^3}} = u\,,$$

$$z = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\pm \frac{1}{2}q\right)^2 - \frac{1}{27}p^3}} = v\,.$$

Die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind also:

$$x_1 = u + v\,,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3}\,,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3}\,.$$

Man substituire nun

$$\frac{3q}{p} : \sqrt{\frac{4}{3}p} = \cos 3\varphi\,,$$

also

$$\frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{27}p^3}\,.\cos 3\varphi\,.$$

Mit Anwendung des Moivre'schen Theorems ist dann

$$u = \mp(\cos 3\varphi - \sin 3\varphi\,.\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}p} = \mp(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sqrt{\frac{1}{3}p}\,,$$

$$v = \mp(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi\,.\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}p} = \mp(\cos\varphi + i\sin\varphi)\sqrt{\frac{1}{3}p}\,.$$

Weil nun

$$u + v = \mp\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\varphi\,,$$

und

$$u - v = \pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\sqrt{-1}\,.\sin\varphi$$

ist, so erhält man die drei reellen Wurzelwerthe

$$x_1 = \mp \left(\sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos \varphi\right),$$

$$x_2 = \pm \left(\sqrt{\tfrac{1}{3} p} \,.\, \cos \varphi + \sqrt{p} \,.\, \sin \varphi\right),$$

$$x_3 = \pm \left(\sqrt{\tfrac{1}{3} p} \,.\, \cos \varphi - \sqrt{p} \,.\, \sin \varphi\right).$$

Die beiden letzten Werthe lassen sich noch einfacher ausdrücken, wenn man bemerkt, dass $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ist. Da nämlich

$$\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{3} = 2\left[\frac{1}{2}\cos \varphi \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi\right]$$

$$= 2\,[\cos 60^0 \cos \varphi \pm \sin 60^0 \sin \varphi] = 2 \cos (60^0 \mp \varphi)$$

wird, so ist in einfacheren Ausdrücken

$$x_1 = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos \varphi = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos \tfrac{1}{3}(3\varphi),$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos (60^0 - \varphi) = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos \tfrac{1}{3}(360^0 + 3\varphi),$$

$$x_3 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos (60^0 - \varphi) = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3} p} \,.\, \cos \tfrac{1}{3}(720^0 + 3\varphi).$$

§ 345. Goniometrische Behandlung des irreductibeln Falles nach Könitzer*).

Gegeben sei die unvollständige kubische Gleichung

$$x^3 - px \pm q = 0, \quad 4p^3 \gtrless 27q^2.$$

Nach der Cardanischen Formel ist

$$x_1 = \sqrt[3]{\mp \tfrac{1}{2} q + \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{\mp \tfrac{1}{2} q - \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3}}.$$

Substituirt man

$$\mp \tfrac{1}{2} q = a, \quad \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3} = b\sqrt{-1},$$

so wird

$$x_1 = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}$$

$$= \sqrt[3]{a}\left[\left(1 + \tfrac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \tfrac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

---

*) Man vergl. Berkhan, Anwendung der Trigonometrie. Halle 1863.

Wird ferner $b:a = \tan 3\varphi$ gesetzt, so erhält man

$$x_1 = \sqrt[3]{a}\left[(1 + i\tan 3\varphi)^{\frac{1}{3}} + (1 - i\tan 3\varphi)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= \sqrt[3]{\frac{a}{\cos 3\varphi}}\left[(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)^{\frac{1}{3}} + (\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Die Wurzeln sind demnach

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{a}{\cos 3\varphi}}\cdot\cos\varphi = \mp\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\varphi\,,$$
$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{a}{\cos(360^0 + 3\varphi)}}\cdot\cos\frac{1}{3}(360^0 + 3\varphi) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos(60^0 - \varphi),$$
$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{a}{\cos(720^0 + 3\varphi)}}\cdot\cos\frac{1}{3}(720^0 + 3\varphi) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos(60^0 + \varphi).$$

§ 346. Methode der Auflösung des irreductibeln Falles von Grunert*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

Man substituire

$$x = (z_1 + y_1\sqrt{-1}) + (z_2 + y_2\sqrt{-1}) = (z_1 + z_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{-1}\,.$$

Daraus folgt zunächst durch Potenzirung

$$x^3 = 3(z_1 + y_1\sqrt{-1})(z_2 + y_2\sqrt{-1})x + (z_1 + y_1\sqrt{-1})^3$$
$$+ (z_2 + y_2\sqrt{-1})^3\,.$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der gegebenen folgen die Bestimmungsgleichungen

$$3(z_1 + y_1\sqrt{-1})(z_2 + y_2\sqrt{-1}) = -p\,,$$
$$(z_1 + y_1\sqrt{-1})^3 + (z_2 + y_2\sqrt{-1})^3 = -q\,,$$

oder

$$(z_1z_2 - y_1y_2) + (z_1y_2 + z_2y_1)\sqrt{-1} = -\frac{1}{3}p\,,$$

und

$$z_1^3 + z_2^3 - 3(z_1y_1^2 + z_2y_2^2)$$
$$-(y_1^3 + y_2^3 - 3[z_1^2y_1 + z_2^2y_2])\sqrt{-1} = -q\,.$$

Man nehme nun weiter an, es sei

*) Grunert's Arch. VI. 1.

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad z_1 z_2 - y_1 y_2 = -\frac{1}{3} p\,, \\
&\text{II.} \quad z_1 y_2 + z_2 y_1 = 0\,, \\
&\text{III.} \quad z_1^3 + z_2^3 - 3(z_1 y_1^2 + z_2 y_2^2) = -q\,, \\
&\text{IV.} \quad y_1^3 + y_2^3 - 3(z_1^2 y_1 + z_2^2 y_2) = 0\,.
\end{aligned}$$

Um die reelle Wurzel zu bestimmen, können wir noch annehmen, es sei $y_1 + y_2 = 0$. In dem Falle $y_2 = -y_1 = 0$ gelangt man zur Cardanischen Formel. Sollen y_1 und y_2 nicht verschwinden, so folgt wegen der Annahme $y_1 + y_2 = 0$ zunächst aus I. und III.:

$$z_1^2 + y_1^2 = -\frac{1}{3} p\,,$$

$$z_1^3 - 3 z_1 y_1^2 = -\frac{1}{2} q\,.$$

Die erste Gleichung lässt sich auch schreiben in der Form

$$\left(z_1 \sqrt{-\frac{3}{p}}\right)^2 + \left(y_1 \sqrt{-\frac{3}{p}}\right)^2 = 1\,.$$

In dem Falle, wo die eingeklammerten Grössen reelle ächte Brüche sind, kann man dafür setzen

$$\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1\,,$$

und mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung:

$$\sin\varphi^3 - 3\sin\varphi\cos\varphi^2 = \sqrt{-\frac{27 q^2}{4 p^3}}\,,$$

oder

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{-\frac{27 q^2}{4 p^3}}\,.$$

Die Realität des Winkels φ erfordert, dass $4p^3 \leqq -27 q^2$ oder $\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3 \leqq 0$ sei. Dieses ist bekanntlich die Relation, welche für den irreductibeln Fall gilt.

§ 347. Goniometrische Auflösung der kubischen Gleichung nach Demongeot*).

Die Auflösung der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

lässt sich in allen Fällen auf die Dreitheilung eines Winkels reduciren, wenn man complexe Winkel zulässt. Es werde dabei der Fall ausser Acht gelassen, wo alle drei Wurzeln reell sind und

*) Nouv. Ann. math. XX. pg. 143. 1861.

ebenso die Winkel der Function, welche die Wurzeln darstellen. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Gegeben sei die explicite Form der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0\,.$$

Die Gleichung zwischen dem Cosinus eines Winkels und seinem Dritttheile ist

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{3}\cos(\eta + \vartheta i) = 0\,.$$

Setzt man $x = ry$, so erhält man aus der vorgelegten Gleichung:

$$y^3 - \frac{p}{r^2}y + \frac{q}{r^3} = 0\,.$$

Diese wird identisch mit der goniometrischen, wenn angenommen wird

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}p}\,, \quad \cos(\eta + \vartheta i) = -\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\,,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(e^\vartheta + e^{-\vartheta})\cos\eta - i(e^\vartheta - e^{-\vartheta})\sin\eta = -q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\,.$$

Man sieht leicht, dass der imaginäre Term gleich Null sein muss, was geschieht, wenn $\eta = 0$ ist. Die Gleichung reducirt sich also auf

$$e^\vartheta + e^{-\vartheta} = -q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\,.$$

Substituirt man

$$\sin 2\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,,$$

so erhält man durch Anwendung der goniometrischen Methoden der Auflösung quadratischer Gleichungen

$$e^\vartheta = \tan\varphi\,, \quad e^{-\vartheta} = \cot\varphi\,.$$

Hierbei ist der Winkel φ reell, da p positiv ist, und die gesuchten Wurzeln sind

$$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\left(\frac{1}{3}\vartheta i\right)\,,$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\frac{1}{3}(2\pi + \vartheta i)\,,$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\frac{1}{3}(4\pi + \vartheta i)\,.$$

Die Entwicklung der goniometrischen Function und die Substitution von

$$\sqrt[3]{\tan\varphi} = \tan\delta$$

führt auf die expliciten Wurzelformen

$$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}p} \,.\, \operatorname{cosec} 2\delta\,,$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\sqrt{\frac{1}{3}p}\,[\operatorname{cosec} 2\delta \pm \cot 2\delta \,.\, \sqrt{-3}]\,.$$

II. Gegeben sei die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

Man setze wiederum $x = ry$, woraus

$$y^3 + \frac{p}{r^2}\,y + \frac{q}{r^3} = 0\,.$$

Daneben gilt die goniometrische Formel

$$y^3 - \frac{3}{4}\,y - \frac{1}{4}\cos(\eta + \vartheta i) = 0\,.$$

Diese beiden Gleichungen werden identisch unter der Annahme

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot \sqrt{-1}\,, \quad \cos(\eta + \vartheta i) = -\frac{1}{2}\,q\sqrt{\frac{27}{p^3}} \cdot \sqrt{-1}\,.$$

Für die zweite Gleichung kann man Exponentialfunctionen einführen, also setzen

$$(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})\cos\eta - i\,(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})\sin\eta = -\,q\sqrt{\frac{27}{p^3}} \cdot \sqrt{-1}\,.$$

Man sieht leicht, dass auf der linken Seite der reelle Term gleich Null sein muss, was der Fall ist, wenn $\eta = \frac{1}{2}\,\pi$. Die Gleichung reducirt sich dadurch auf

$$e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} = q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\,.$$

Setzt man ausserdem

$$-\frac{2}{q}\sqrt{\frac{27}{p^3}} = \tan 2\varphi\,,$$

so wird nach der Methode der goniometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen

$$e^{\vartheta} = \tan\varphi\,, \quad e^{-\vartheta} = -\cot\varphi\,,$$

Der Winkel φ ist stets reell, weil p positiv vorausgesetzt ist. Demnach sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$x_1 = i\sqrt{\frac{4}{3}p} \,.\, \cos\left(\frac{1}{6}\,\pi + \frac{1}{3}\,\vartheta i\right),$$

$$x_2 = i\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{3}\vartheta i\right),$$

$$x_3 = i\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cos\left(\frac{9}{6}\pi + \frac{1}{3}\vartheta i\right).$$

Substituirt man

$$\sqrt[3]{\tan\varphi} = \tan\beta\,,$$

und entwickelt die goniometrischen Functionen, so resultiren die Wurzelformen

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\left[\cot 2\beta \pm \sqrt{-3}\,.\operatorname{cosec} 2\beta\right],$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{4}{3}p}\,.\cot 2\beta\,.$$

§ 348. Goniometrische Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung mittels der Formel für die Tangente des dreifachen Winkels nach Stoll*).

Um die vollständige kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

aufzulösen, kann man ausgehen von der Identität

$$\tan 3\varphi = \frac{3\tan\varphi - \tan\varphi^3}{1 - 3\tan\varphi^2}\,,$$

oder

$$\tan\varphi^3 - 3\tan 3\varphi\,.\tan\varphi^2 - 3\tan\varphi + \tan 3\varphi = 0\,.$$

Man setze $\tan\varphi = y$ und

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0\,.$$

Die goniometrische Gleichung nimmt die Form

$$y^3 - 3\tan 3\varphi\,.\,y^2 - 3y + \tan 3\varphi = 0$$

an und die Identität dieser mit der vorhergehenden fordert, dass die Reducente $\alpha\beta - 9\gamma$ gleich Null werde. Man bilde deshalb von der gegebenen Gleichung, indem man $x = y + z$ setzt, die Variirte und entwickele die Gleichung $\alpha\beta - 9\gamma = 0$. Dies gibt die Resolvente

$$2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0\,.$$

Es sei nun allgemein $y = r\tan\varphi$, so geht die Variirte über in

*) Stoll, Zur Lösung der kubischen Gleichungen. Progr. Bensheim. 1876. S. 11.

$$\tan\varphi^3 + \frac{\alpha}{r}\tan\varphi^2 + \frac{\beta}{r^2}\tan\varphi + \frac{\gamma}{r^3} = 0\,.$$

Durch Vergleichung der homologen Coefficienten dieser und der vorhergenannten

$$\tan\varphi^3 - 3\tan 3\varphi\,.\,\tan\varphi^2 - 3\tan\varphi + \tan 3\varphi = 0$$

erhält man die nöthigen Bestimmungsgleichungen für r und $\tan 3\varphi$, und damit auch für $\tan\varphi$, nämlich

$$\alpha = -3r\tan 3\varphi\,,\qquad \tan 3\varphi = -\frac{\alpha}{3r}\,,$$

$$\beta = -3r^2\,,\qquad r = \sqrt{-\frac{1}{3}\beta}\,,$$

$$\gamma = r^3\tan 3\varphi\,,\qquad \tan 3\varphi = \frac{\gamma}{r^3}\,.$$

Demnach ist

$$r^2 = -\frac{1}{3}(3z^2 + 2az + b)\,,$$

und den Winkel φ findet man aus der ersten oder dritten Gleichung, nämlich aus

$$\tan 3\varphi = -\frac{\alpha}{3r} = \frac{\gamma}{r^3}\,.$$

Setzt man den Werth

$$z = -\frac{ab - 9c}{2(a^2 - 3b)}$$

in die Gleichung für r^2 ein, so findet man

$$r^2 = \frac{-(ab - 9c)^2 + 4(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac)}{4(a^2 - 3b)^2}$$

oder

$$r = \frac{\sqrt{-3D_3}}{2(a^2 - 3b)}\,.$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\tan 3\varphi = -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{3\sqrt{-3D_3}} = -\frac{9V_3}{\sqrt{-3D_3}}\,,$$

wo V_3 die kubische Variante bedeutet und D_3 die Discriminante

$$-(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2\,.$$

Nun ist

$$x_1 = y + z = z + r\tan\varphi\,,$$

und weil $\tan 3\varphi = \tan(2\pi + 3\varphi) = \tan(4\pi + 3\varphi)$ ist, so sind die beiden andern Wurzeln

$$x_2 = z + r \tan\left(\frac{2}{3}\pi + \varphi\right) = z - r \tan\left(\frac{1}{3}\pi - \varphi\right),$$
$$x_3 = z + r \tan\left(\frac{4}{3}\pi + \varphi\right) = z + r \tan\left(\frac{1}{3}\pi + \varphi\right).$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die Discriminante D_3 negativ sei. Ist sie positiv, so werden r und $\tan 3\varphi$ rein imaginär und nur die erste Wurzel x_1 ist reell. Ist nämlich $\tan 3\varphi$ rein imaginär, so ist es auch $\tan\varphi$; die übrigen Werthe $\tan\left(\frac{1}{3}\pi - \varphi\right)$ und $\tan\left(\frac{1}{3}\pi + \varphi\right)$ sind complex.

Den Wurzelformen kann man noch eine andere Form geben, indem man für z seinen Werth

$$z = -\frac{1}{3}a - r\tan 3\varphi$$

einsetzt. Man erhält dann

$$x_1 = -\frac{1}{3}a - 2r\frac{\sin\varphi}{\cos 3\varphi},$$
$$x_2 = -\frac{1}{3}a - 2r\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi - \varphi\right)}{\cos 3\varphi},$$
$$x_3 = -\frac{1}{3}a + 2r\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \varphi\right)}{\cos 3\varphi}.$$

Die Formeln reduciren sich auf das zweite Glied, wenn $a = 0$ ist.

Zahlenbeispiel. Aufzulösen

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Man findet mit Hülfe der aufgestellten Formeln

$$z = \frac{2761}{857}, \quad r = \frac{\sqrt{147}}{854}, \quad \tan 3\varphi = -\frac{17647}{2562r}.$$

Die Winkel sind

$$3\varphi = 90^0 7' 5'',14, \quad \varphi = 30^0 2' 21'',71,$$

und hieraus folgen die drei Wurzelwerthe

$$x_1 = 3{,}22952, \quad x_2 = 3{,}21313, \quad x_3 = -17{,}44265.$$

Die Function $\tan 3\varphi$ kann auch durch die Function $\sin 3\varphi$ ersetzt werden. Es ist nämlich

$$27D_3 = (2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 4(a^2 - 3b)^3,$$

also

$$\tan 3\varphi = -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{\sqrt{-(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(a^2 - 3b)^3}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{4(a^2-3b)^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2} - 1}}.$$

Daraus folgt aber

$$\sin 3\varphi = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}$$

und für die Realität der Wurzeln dasselbe Theorem, wie aus der Tangentenformel. Die Discriminante D_3 kann nur negativ sein, wenn

$$a^2 - 3b > 0 \quad \text{und} \quad 4(a^2 - 3b)^3 > (2a^3 - 9ab + 27c)^2.$$

In diesem Falle ist aber auch $\sin 3\varphi$ reell und folglich auch $\sin\frac{1}{3}(2\pi + 3\varphi)$ und $\sin\frac{1}{3}(4\pi + 3\varphi)$.

§ 349. Eine andere Methode von Stoll, die vollständige kubische Gleichung goniometrisch aufzulösen.

Gegeben sei wiederum die Gleichung

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Substituirt man

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = u,$$

so ist nach dem Früheren (§ 162)

$$\begin{aligned} &\text{I.} && 3z_1z_2 + a(z_1 + z_2) + b \;\; = 0, \\ &\text{II.} && az_1z_2 + b(z_1 + z_2) + 3c = 0, \end{aligned}$$

also z_1 und z_2 die Wurzeln der quadratischen Resolvente

$$(a^2 - 3b)z^2 + (ab - 9c)z + (b^2 - 3ac) = 0,$$

und eine der Wurzelformen der vorgelegten Gleichung

$$x_1 = \frac{z_2\sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}a} - z_1\sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}a}}{\sqrt[3]{z_1 + \frac{1}{3}a} - \sqrt[3]{z_2 + \frac{1}{3}a}}.$$

Sind z_1 und z_2 complex, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln. Um dieselben durch goniometrische Functionen auszudrücken, setze man

$$z_1 = \varrho(\cos\eta + i\sin\eta), \quad z_2 = \varrho(\cos\eta - i\sin\eta).$$

Weil aber

$$z_1 + z_2 = -\frac{ab - 9c}{a^2 - 3b}, \quad z_1 z_2 = \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b}$$

ist, so hat man zur Bestimmung von ϱ und η:

$$2\varrho \cos \eta = -\frac{ab - 9c}{a^2 - 3b},$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b}}.$$

Nachdem man aus der letzten Gleichung ϱ gefunden hat, berechnet man aus der vorhergehenden nach Substitution des Werthes von ϱ den Werth von η. Die Substitution der für z_1 und z_2 angenommenen Ausdrücke in den algebraischen Wurzelwerth x_1 ergibt nun:

$$x_1 =$$

$$\varrho \frac{(\cos\eta - i\sin\eta)\sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta + i\sin\eta)} - (\cos\eta + i\sin\eta)\sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta - i\sin\eta)}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta + i\sin\eta)} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta - i\sin\eta)}}.$$

Die Bestimmung der Kubikwurzeln wird sehr vereinfacht, wenn $a = 0$ ist; denn man erhält durch Anwendung des Moivre'schen Satzes:

$$x_1 = \varrho \frac{(\cos\eta - i\sin\eta)\left(\cos\frac{1}{3}\eta + i\sin\frac{1}{3}\eta\right) - (\cos\eta + i\sin\eta)\left(\cos\frac{1}{3}\eta - i\sin\frac{1}{3}\eta\right)}{\left(\cos\frac{1}{3}\eta + i\sin\frac{1}{3}\eta\right) - \left(\cos\frac{1}{3}\eta - i\sin\frac{1}{3}\eta\right)},$$

oder kürzer

$$x_1 = -2\varrho\cos\frac{1}{3}\eta,$$

und analog

$$x_2 = 2\varrho\cos\frac{1}{3}(\pi - \eta), \quad x_3 = 2\varrho\cos\frac{1}{3}(\pi + \eta).$$

Ist aber a von Null verschieden, so substituire man

$$\varrho\cos\eta + \frac{1}{3}a = R\cos\varepsilon, \quad \varrho\sin\eta = R\sin\varepsilon,$$

woraus

$$\tan\varepsilon = \frac{\sin\eta}{\cos\eta + \frac{1}{3}\frac{a}{\varrho}}.$$

Berücksichtigt man, dass sich R im Zähler und Nenner des Wurzelausdrucks x_1 hebt, so findet man

$$x_1 = \varrho \frac{(\cos\eta - i\sin\eta)\left(\cos\frac{1}{3}\varepsilon + i\sin\frac{1}{3}\varepsilon\right) - (\cos\eta + i\sin\eta)\left(\cos\frac{1}{3}\varepsilon - i\sin\frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\left(\cos\frac{1}{3}\varepsilon + i\sin\frac{1}{3}\varepsilon\right) - \left(\cos\frac{1}{3}\varepsilon - i\sin\frac{1}{3}\varepsilon\right)}$$

$$= \varrho \frac{\sin\left(\frac{1}{3}\varepsilon - \eta\right)}{\sin\frac{1}{3}\varepsilon};$$

und analog

$$x_2 = \varrho \frac{\sin\left[\frac{1}{3}(2\pi + \varepsilon) - \eta\right]}{\sin\frac{1}{3}(2\pi + \varepsilon)} = \varrho \frac{\sin\left[\frac{1}{3}(\pi - \varepsilon) + \eta\right]}{\sin\frac{1}{3}(\pi - \varepsilon)},$$

$$x_3 = \varrho \frac{\sin\left[\frac{1}{3}(4\pi + \varepsilon) - \eta\right]}{\sin\frac{1}{3}(4\pi + \varepsilon)} = \varrho \frac{\sin\left[\frac{1}{3}(\pi + \varepsilon) - \eta\right]}{\sin\frac{1}{3}(\pi + \varepsilon)}.$$

Zu denselben Formeln, wie sie zuerst von Stoll veröffentlicht sind, bin ich schon 1875 gelangt, freilich auf einem Umwege. Man kann nämlich auch irgend eine der übrigen in meinem Schlüssel (§ 95 b. 31.II) abgeleiteten algebraischen Wurzelformen zum Ausgangspunkte wählen, z. B.

$$x_1 = \frac{z_2 \sqrt[3]{\varphi_1} - z_1 \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - \sqrt[3]{\varphi_2}}.$$

Um dieselbe durch goniometrische Functionen auszudrücken, setze man allgemein

$$w = \varrho\cos\eta, \quad v = \varrho\sin\eta,$$

und

$$z = w \pm vi = \varrho(\cos\eta \pm i\sin\eta).$$

Daraus folgen dann die Relationen

$$z^2 - 2\varrho z\cos\eta + \varrho^2 = 0,$$

$$\varrho^2 = z_1 z_2 = \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b},$$

$$2\varrho\cos\eta = z_1 + z_2 = -\frac{ab - 9c}{a^2 - 3b},$$

$$\cos\eta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(ab - 9c)^2}{(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac)}},$$

$$\sin\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-3D_3}{(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac)}}.$$

Substituirt man z_1 und z_2 in die Functionen der vorgelegten Gleichung, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen I. und II., nämlich

$$\varrho^2 + \frac{2}{3} a \varrho \cos\eta + \frac{1}{3} b = 0,$$
$$\frac{1}{3} a \varrho^2 + \frac{2}{3} b \varrho \cos\eta + c \quad = 0,$$

die Beziehungen

$$\varphi_1 = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = -4\varrho^3 \sin\eta^2 (\cos\eta + i\sin\eta) - \frac{4}{3} a \varrho^2 \sin\eta^2,$$
$$\varphi_2 = R(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = -4\varrho^3 \sin\eta^2 (\cos\eta - i\sin\eta) - \frac{4}{3} a \varrho^2 \sin\eta^2.$$

Es ist nämlich

$$w^3 - 3wv^2 + a(w^2 - v^2) + bw + c = R\cos\vartheta,$$
$$3w^2 v - v^3 + 2awv + bv = R\sin\vartheta,$$

also

$$bw + c = -\varrho^3 \cos\eta - \frac{1}{3} a \varrho^2 (1 + 2\cos\eta^2)$$

und

$$R\cos\vartheta = -4\varrho^3 \cos\eta \sin\eta^2 - \frac{4}{3} a \varrho^2 \sin\eta^2,$$
$$R\sin\vartheta = -4\varrho^3 \sin\eta^3.$$

Nach einigen einfachen Reductionen erhält man hieraus wieder die Wurzelform

$$x_1 = \varrho \frac{(\cos\eta - i\sin\eta)\sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta + i\sin\eta)} - (\cos\eta + i\sin\eta)\sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta - i\sin\eta)}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta + i\sin\eta)} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} + (\cos\eta - i\sin\eta)}},$$

welche sich nach Art der vorigen Methode auf die angegebenen einfacheren goniometrischen Formeln reduciren lässt. Zu dem Zwecke setze man

$$\cos\eta + \frac{1}{3}\frac{a}{\varrho} = Q\cos\varepsilon, \quad \sin\eta = Q\sin\varepsilon.$$

Da Q aus der algebraischen Wurzelform verschwindet, so bedarf es zur Berechnung des Winkels ε nur einer der Gleichungen

$$\sin\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-27 D_3}}{(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}}.$$

Zur Demonstration seiner Methode gibt Stoll folgendes Zahlenbeispiel:

$$x^3 + 2x^2 - 30x + 39 = 0.$$

Hier ist

$$a^2 - 3b = 94, \quad ab - 9c = -411,$$
$$b^2 - 3ac = 666, \qquad D_3 = -27165.$$

Da die Discriminante negativ ist, so haben also $\sin\eta$ und $\cos\eta$ reelle Werthe.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\varrho &= \sqrt{666 : 94}\,, & \log\varrho &= 0{,}4251731\,,\\
\varrho\cos\eta &= 411 : 188\,, & \eta &= 34^0\,46'\,59'',4\,,\\
\tan\varepsilon &= \frac{\sqrt{-3D_3}}{9V_3}\,, & \varepsilon &= 28^0\,1'\,29'',9\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\varrho\,\frac{\sin 25^0\,26'\,29'',4}{\sin\ \ 9^0\,20'\,30'',0} = -7{,}04452\,,\\
x_2 &= \ \ \varrho\,\frac{\sin 85^0\,26'\,29'',4}{\sin 50^0\,39'\,30'',0} = +3{,}43087\,,\\
x_3 &= \ \ \varrho\,\frac{\sin 34^0\,33'\,30'',6}{\sin 69^0\,20'\,30'',0} = +1{,}61365\,.
\end{aligned}$$

Stoll betrachtet auch noch den Fall, wo zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung nahe zusammenliegen. Alsdann hat die Discriminante einen sehr kleinen Werth, und die Formeln

$$\sin\eta = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-3D_3}}{\sqrt{(a^2-3b)\,(b^2-3ac)}}\,, \qquad \tan\eta = -\frac{\sqrt{-3D_3}}{ab-9c}$$

geben dann für η auch nur einen sehr kleinen Werth. Man thut in diesem Falle besser, die vorstehende Formel zu gebrauchen, statt derjenigen für $\varrho\cos\eta$.

Zahlenbeispiel. Aufzulösen: $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$. Man findet

$$\begin{aligned}
a^2 - 3b &= 427\,, & ab - 9c &= -2751\,,\\
b^2 - 3ac &= 4431\,, & D_3 &= -49\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\tan\eta &= \frac{\sqrt{147}}{2751}\,, & \eta &= 15'\,9'',055\,,\\
\varrho &= \sqrt{4431 : 427}\,, & \log\varrho &= 0{,}5080369\,,\\
\sin\varepsilon &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27\,.\,49}{427^3}}\,, & \varepsilon &= 7'\,5'',1413\,.
\end{aligned}$$

Die Wurzelwerthe sind hiernach

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\varrho\,\frac{\sin 12'\,47'',3417}{\sin\ \ 2'\,21'',7138} = -17{,}44265\,,\\
x_2 &= \ \ \varrho\,\frac{\sin 60^0\,12'\,47'',34}{\sin 59^0\,57'\,38'',29} = \ \ 3{,}22952\,,\\
x_3 &= \ \ \varrho\,\frac{\sin 59^0\,47'\,12'',66}{\sin 60^0\ \ 2'\,21'',71} = \ \ 3{,}21313\,.
\end{aligned}$$

IV. Von der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§ 350. Goniometrische Auflösung der kanonischen Form der biquadratischen Gleichungen.

Es ist in §§ 263, 271 und 278 gezeigt worden, dass sich jede vollständige biquadratische Gleichung mit Hülfe einer kubischen Resolvente auf die kanonische Form

$$x^4 - px^2 + q = 0$$

bringen lässt. Diese Umformung lässt sich also mit Hülfe goniometrischer Functionen bewerkstelligen. Behufs einer Anwendung goniometrischer Functionen zur vollständigen Auflösung der reducirten Form wollen wir hier nur den Fall berücksichtigen, wenn dieselbe vier reelle Wurzeln hat. In diesem Falle lassen dieselben, wie in § 67 gezeigt worden ist, sich auch in complexer Form darstellen (casus irreductibilis). Substituirt man

$$x = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}},$$

so erhält man nach der Annahme $x^2 + y^2 = p$ die Gleichung

$$(x + y\sqrt{-1})^8 + (16q - 2p^2)(x + y\sqrt{-1})^4 + p^4 = 0,$$

also

$$x + y\sqrt{-1} = 2\sqrt[4]{1}\sqrt[4]{-\frac{1}{2}q + \left(\frac{p}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4q\left(\frac{p}{4}\right)^2}} = 2\sqrt[4]{1}\,.\,u,$$

$$x - y\sqrt{-1} = 2\sqrt[4]{1}^3\sqrt[4]{-\frac{1}{2}q + \left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4q\left(\frac{p}{4}\right)^2}} = 2\sqrt[4]{1}^3\,.\,v.$$

Ist nun $\left(\frac{p}{4}\right)^2 > \frac{1}{4}q$ und q positiv, so hat die Gleichung vier reelle Wurzeln in complexer Form, und zwar ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[4]{\alpha + \beta\sqrt{-1}} + \sqrt[4]{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = u + v,\\
x_2 &= \sqrt{-1}\sqrt[4]{\alpha + \beta\sqrt{-1}} - \sqrt{-1}\sqrt[4]{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = \alpha u + \alpha^3 v,\\
x_3 &= -\sqrt[4]{\alpha + \beta\sqrt{-1}} - \sqrt[4]{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = -u - v,\\
x_4 &= -\sqrt{-1}\sqrt[4]{\alpha + \beta\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}\sqrt[4]{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = -\alpha u - \alpha^3 v,
\end{aligned}$$

wo

$$-\frac{1}{2}q+\left(\frac{p}{4}\right)^2=\alpha, \quad \sqrt{q\left(\frac{p}{4}\right)^2-\frac{1}{4}q^2}=\beta$$

gesetzt worden ist.

Man substituire

$$\alpha=r\cos\varphi, \quad \beta=r\sin\varphi,$$

dann wird

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{r}\left[\sqrt[4]{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}}+\sqrt[4]{\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}}\right] \\ &= \sqrt[4]{r}\left[\left(\cos\frac{1}{4}\varphi+i\sin\frac{1}{4}\varphi\right)+\left(\cos\frac{1}{4}\varphi-i\sin\frac{1}{4}\varphi\right)\right], \end{aligned}$$

oder kurz

$$x_1=2\sqrt[4]{r}\cos\frac{1}{4}\varphi,$$

und weiter

$$\begin{aligned} x_2 &= -2\sqrt[4]{r}\sin\frac{1}{4}\varphi; \\ x_3 &= -2\sqrt[4]{r}\cos\frac{1}{4}\varphi, \\ x_4 &= +2\sqrt[4]{r}\sin\frac{1}{4}\varphi. \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen: $x^4-13x^2+36=0$. Hier ist

$$\alpha=-\frac{119}{16}, \quad \beta=\frac{15}{2},$$

folglich

$$r^2=\frac{119^2+120^2}{16^2}, \qquad \tan\varphi=-\frac{120}{119};$$

$$\log r=1{,}0237667, \qquad \varphi=134^0\,45'\,37''.$$

Hieraus findet man

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt[4]{r}\cos\frac{1}{4}\varphi = 3, \\ x_2 &= -2\sqrt[4]{r}\sin\frac{1}{4}\varphi = -2, \\ x_3 &= -2\sqrt[4]{r}\cos\frac{1}{4}\varphi = -3, \\ x_4 &= 2\sqrt[4]{r}\sin\frac{1}{4}\varphi = 2. \end{aligned}$$

§ 351. Goniometrische Auflösung der reciproken Gleichungen vierten Grades nach Heis*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 + ax^3 - bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Man substituire

$$\frac{2\sqrt{b+2}}{a} = \tan 2\alpha,$$

$$-\sqrt{\frac{4}{b+2}} \cdot \tan\alpha = \sin 2\beta_1, \qquad \sqrt{\frac{4}{b+2}} \cdot \cot\alpha = \sin 2\beta_2,$$

so wird

$$x_1 = -\tan\beta_1, \quad x_2 = -\cot\beta_1, \quad x_3 = \cot\beta_2, \quad x_4 = \tan\beta_2.$$

Zur Demonstration dieser Methode versuche man die Auflösung nach bekannter Weise algebraisch. Setzt man

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

so erhält man die Hülfsgleichung

$$z^2 + az - b - 2 = 0$$

und die Wurzelwerthe

$$z_1 \text{ und } z_2 = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{1 + \frac{4(b+2)}{a^2}}.$$

Durch die erste Substitution erhält man

$$z_1 \text{ und } z_2 = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a : \cos 2\alpha,$$

also

$$z_1 = \frac{1}{2}a\frac{1-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sqrt{b+2} \cdot \tan\alpha$$

Demgemäss ist

$$x^2 - \sqrt{b+2} \,.\, \tan\alpha \,.\, x + 1 = 0,$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{b+2} \,.\, \tan\alpha \pm \sqrt{\frac{b+2}{4}\tan\alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{\sin 2\beta_2} \pm \frac{\cos 2\beta_2}{\sin 2\beta_2} = \frac{1 \pm \cos 2\beta_2}{\sin 2\beta_2},$$

oder

$$x_3 = \cot\beta_2, \quad x_4 = \tan\beta_2.$$

*) Heis, Ebene und sphärische Trigonometrie. Cap. VIII. 4. Abschnitt. 115. Aufgabe. Köln 1867.

Ferner ist

$$z_2 = -\frac{1}{2} a \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\sqrt{b+2} \,.\, \cot \alpha,$$

und demgemäss

$$x^2 + \sqrt{b+2} \,.\, \cot \alpha \,.\, x + 1 = 0,$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{b+2} \,.\, \cot \alpha \mp \sqrt{\frac{b+2}{4} \cot \alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{\sin 2\beta_1} \mp \frac{\cos 2\beta_1}{\sin 2\beta_1} = \frac{1 \mp \cos 2\beta_1}{\sin 2\beta_1},$$

oder

$$x_1 = -\tan \beta_1, \quad x_2 = -\cot \beta_1 .$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen:

$$x^4 + 1\frac{1}{2} x^3 - 8x^2 + 1\frac{1}{2} x + 1 = 0 .$$

Man findet

$$2\alpha = 76^0 39' 27'',6, \quad 2\beta_1 = 30^0, \; 2\beta_2 = 53^0 7' 48'',$$
$$x_1 = -0{,}26795, \quad x_2 = -3{,}73205, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0{,}5 .$$

§ 352. Goniometrische Auflösung der reciproken Gleichungen vierten Grades nach Björling*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 .$$

Man setze $x + \frac{1}{x} = z$ und die vorgelegte Gleichung verwandelt sich in die quadratische

$$z^2 + az + b - 2 = 0 .$$

Ihre Wurzeln sind

$$z_1 \text{ und } z_2 = -\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b + 8} .$$

Man substituire jetzt $x = \tan \alpha$, woraus entsteht

$$\frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8}\right) = \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} .$$

Es ist demnach

$$\sin 2\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2 - b} .$$

Hieraus berechne man den Winkel α, welcher vier Werthe α_1, α_2, α_3, α_4 hat. Die Wurzelwerthe der Gleichung sind alsdann

*) Björling, Goniometriska expressioner för rötterna till tredje og fierde gradens equationer. Acad. Förhandl. 1850.

$$x_1 = \tan \alpha_1 , \quad x_3 = \tan \alpha_3 ,$$

und wegen $x_1 x_2 = 1$,

$$x_2 = \tan \alpha_2 = \cot \alpha_1 , \quad x_4 = \tan \alpha_4 = \cot \alpha_3 .$$

Zahlenbeispiel. Aufzulösen:

$$x^4 + 1\tfrac{1}{2} x^3 - 8x^2 + 1\tfrac{1}{2} x + 1 = 0 .$$

Hier ist $a = 1\frac{1}{2}$, $b = -8$; folglich

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{20}(3 \pm 13); \quad \frac{4}{5} \text{ oder } -\frac{1}{2} .$$

Man findet

$$\text{I. für } \sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \qquad 2\alpha_1 = 53^0\, 7'\, 48'', \quad 2\alpha_2 = 126^0\, 52'\, 12'',0$$

$$\text{II. für } \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}, \quad 2\alpha_3 = -30^0, \qquad 2\alpha_4 = 210^0 .$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tan \alpha_1 = \tan 26^0\, 33'\, 54'' = 0{,}5 ; \\
x_2 &= \tan \alpha_2 = \tan 63^0\, 26'\, 6'' \;\; = \cot 26^0\, 33'\, 54'' = 2 ; \\
x_3 &= \tan \alpha_3 = \tan (-15^0) \;\; = -0{,}26795 ; \\
x_4 &= \tan \alpha_4 = \tan 105^0 \;\; = -\cot 15^0 = -3{,}73205 .
\end{aligned}$$

§ 353. Goniometrische Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichungen.

Die Vortheile, welche die Anwendung goniometrischer Functionen bei der Auflösung biquadratischer Gleichungen gewährt, sind, mit den Methoden der Auflösung kubischer Gleichungen verglichen, ganz unerheblich. Sie beschränken sich eigentlich ganz und gar auf die Auflösung der kubischen Resolventen. Wenn es aber nur darauf ankommt, die Wurzelformen der Biquadrate in einer möglichst eleganten Form darzustellen, und man dabei auf Vortheile der Berechnung der Wurzeln verzichtet, so mag immerhin die folgende Darstellung der Wurzelwerthe einige Berücksichtigung verdienen.

Zur Verallgemeinerung der Methode gehen wir aus von der vollständigen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 .$$

Wir setzen der Kürze wegen

$$-b = \alpha, \quad ac - 4d = \beta, \quad -(a^2 d - 4bd + c^2) = \gamma ,$$

und ferner

$$\text{I.}\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-3\,D_3}}{\sqrt{(\alpha^2-3\beta)(\beta^2-3\alpha\gamma)}}=\sin\eta\,,$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-27\,D_3}}{(\alpha^2-3\beta)\sqrt{\alpha^2-3\beta}}=\sin\varepsilon\,,$$

$$\text{III.}\quad \frac{\beta^2-3\alpha\gamma}{\alpha^2-3\beta}=\varrho^2,$$

$$\text{IV.}\quad \varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\varepsilon-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}\varepsilon}=y+\frac{d}{y}.$$

Daraus folgen die folgenden Relationen:

$$y^2-\varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\varepsilon-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}\varepsilon}\,y+d=0\,,$$

$$y^2-\varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}[2\pi+\varepsilon]-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}[2\pi+\varepsilon]}\,y+d=0\,,$$

$$y^2-\varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}[4\pi+\varepsilon]-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}[4\pi+\varepsilon]}\,y+d=0\,.$$

y ist also die Wurzel einer bikubischen Gleichung. Ausserdem ist

$$\begin{aligned}
D_3 = {} & \frac{1}{3}(\alpha\beta-9\gamma)^2-\frac{4}{3}(\alpha^2-3\beta)(\beta^2-3\alpha\gamma)\\
= {} & \frac{1}{3}[b(ac-4d)-9(a^2d-4bd+c^2)]^2\\
& -\frac{4}{3}(b^2-3ac+12d)[(ac-4d)^2-3b(a^2d-4bd+c^2)]\\
= {} & -\frac{4}{27}(b^2-3ac+12d)^3+\frac{1}{27}(72bd+9abc-27c^2-27a^2d-2b^3)^2\\
= {} & -256\,(\mathfrak{J}^3-27\mathfrak{J}^2)=-D_4\,.
\end{aligned}$$

Deshalb kann man an die Stelle der Gleichungen I. und II. auch setzen:

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3\,D_4}}{\sqrt{(\alpha^2-3\beta)(\beta^2-3\alpha\gamma)}}=\sin\eta\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{27\,D_4}}{(\alpha^2-3\beta)\sqrt{\alpha^2-3\beta}}=\sin\varepsilon\,,$$

und in Berücksichtigung von III.

$$\sin\eta = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{\alpha^2-3\beta}}{\varrho}\sin\varepsilon\,.$$

Wenn nun die Winkel η und ε reell, $d > 0$ ist, so substituire man

$$2\sqrt{d}:\varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\,\varepsilon-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}\,\varepsilon} = \sin\lambda_1\,,$$

$$2\sqrt{d}:\varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}[2\pi+\varepsilon]-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}\,[2\pi+\varepsilon]} = \sin\lambda_2\,,$$

$$2\sqrt{d}:\varrho\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}[4\pi+\varepsilon]-\eta\right)}{\sin\frac{1}{3}\,[4\pi+\varepsilon]} = \sin\lambda_3\,.$$

Alsdann gelten folgende Relationen

$$y_1 = \sqrt{d}\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_1\,,\quad \eta_1 = \sqrt{d}\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_1\,,$$

$$y_2 = \sqrt{d}\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_2\,,\quad \eta_2 = \sqrt{d}\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_2\,,$$

$$y_3 = \sqrt{d}\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_3\,,\quad \eta_3 = \sqrt{d}\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_3\,.$$

Hieraus ergeben sich endlich folgende elegante Wurzelausdrücke:

$$x_1 = \pm\sqrt[4]{d}\,.\sqrt{\tan\frac{1}{2}\lambda_1\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_2\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

$$x_2 = \pm\sqrt[4]{d}\,.\sqrt{\tan\frac{1}{2}\lambda_1\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_2\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

$$x_3 = \pm\sqrt[4]{d}\,.\sqrt{\cot\frac{1}{2}\lambda_1\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_2\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

$$x_4 = \pm\sqrt[4]{d}\,.\sqrt{\cot\frac{1}{2}\lambda_1\,.\cot\frac{1}{2}\lambda_2\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

wenn die Bedingung

$$\frac{\sqrt[4]{d}\left[\tan\frac{1}{2}\lambda_1\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_2\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_3+\tan\frac{1}{2}\lambda_1+\tan\frac{1}{2}\lambda_2+\tan\frac{1}{2}\lambda_3\right]}{\sqrt{\tan\frac{1}{2}\lambda_1\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_2\,.\tan\frac{1}{2}\lambda_3}} = \mp a$$

erfüllt wird; dagegen

$$x_1 = \pm \sqrt[4]{d} \,.\, \sqrt{\cot\frac{1}{2}\lambda_1 \,.\, \cot\frac{1}{2}\lambda_2 \,.\, \cot\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

$$x_2 = \pm \sqrt[4]{d} \,.\, \sqrt{\cot\frac{1}{2}\lambda_1 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_2 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

$$x_3 = \pm \sqrt[4]{d} \,.\, \sqrt{\tan\frac{1}{2}\lambda_1 \,.\, \cot\frac{1}{2}\lambda_2 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

$$x_4 = \pm \sqrt[4]{d} \,.\, \sqrt{\tan\frac{1}{2}\lambda_1 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_2 \,.\, \cot\frac{1}{2}\lambda_3}\,,$$

wenn die Bedingung

$$\frac{\sqrt[4]{d}\left[\tan\frac{1}{2}\lambda_1 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_2 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_3 + \tan\frac{1}{2}\lambda_1 + \tan\frac{1}{2}\lambda_2 + \tan\frac{1}{2}\lambda_3\right]}{\sqrt{\tan\frac{1}{2}\lambda_1 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_2 \,.\, \tan\frac{1}{2}\lambda_3}} = \mp c : \sqrt{d}$$

erfüllt wird. Für die numerische Berechnung lassen sich nach § 313 die vorstehenden Wurzelwerthe leicht in logarithmische Ausdrücke verwandeln.

Siebenter Abschnitt.

Von den geometrischen Constructionen der Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

I. Das Princip der geometrischen Methoden.

§ 354. Allgemeine und historische Bemerkungen.

Die Methode der Auflösung der Gleichungen, welche ebenso wie der geometrische Sinn einer Gleichung und ihrer Wurzel, historisch der analytischen voranging, ist die geometrische Construction der Wurzelwerthe mit Hülfe von Intersectionen gerader Linien oder der Geraden mit dem Kreise oder auch der Curven höherer Ordnung und der Kegelschnitte miteinander. So ist die quadratische Algebra bei Euclides noch rein geometrisch, ebenso in dem alten chinesischen *Kiu-tschang*. Auch bei den Arabern und den Occidentalen bis zu Cardan's Zeit blieb die höhere Algebra, beeinflusst durch das Studium der griechischen mathematischen Litteratur, namentlich des Euclides und Apollonius, vorwiegend geometrisch. Erst allmählig machte sich die abstracte und numerische Algebra von den Fesseln geometrischer Anschauung frei, wie schon aus den für die Potenzen der Unbekannten üblichen Bezeichnungen, x^2 durch „Quadrat", x^3 durch „Kubus" hervorgeht, sowie aus dem Umstande, dass, abgesehen von einigen speciellen Fällen, die sich bei Abul Wafa und einer anonymen arabischen Abhandlung vorfinden und eine geometrische Construction der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung enthalten, sich die arabischen Algebristen wegen der Absurdität des Biquadrats unter der Kategorie messbarer Grössen nicht über die Auflösung der kubischen Gleichungen zu erheben vermochten. Es bleibt eine auffallende Erscheinung, wie wenig die Araber aus der Bekanntschaft mit den Schriften des Diophant und der indischen Algebristen für ihre numerische und symbolische Algebra Nutzen zu ziehen versuchten. Diese unschätzbaren mathematischen Werke verschwanden aus dem Bereiche der Litteratur und es sind nur unbekannte glückliche Umstände zusammengetroffen, durch welche sie der neuern Zeit erhalten worden sind. In den genannten algebraischen Werken finden sich mehrere Beispiele einer synthetischen algebraischen Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen. Die allgemeinere Methode einer algebraischen Auflösung wurde indess, wie wir in den früheren Abschnitten entwickelt haben, von den älteren Italienern, welche unter dem geistigen Einflusse der arabischen Litteratur standen, auch nur auf synthetisch-geometrischem Wege gefunden.

Beispiele geometrischer Constructionen der Wurzeln einer Gleichung ersten Grades kommen zwar nirgend in der Litteratur der Alten vor. Es ist aber mehr als wahrscheinlich, dass eine solche bei den arabischen Algebristen vor Ibn Albanna, einem Zeitgenossen des Fibonacci, erfunden und gebraucht worden ist, welche aber bald einem arithmetischen Schematismus Platz machte, der unter dem Namen der „Regel der Wagschalen“ bekannt geworden ist. Was die geometrische Construction der quadratischen Gleichungen anbelangt, so sind die Principien derselben, so weit es sich um die Bestimmung der Glieder rein geometrischer Ausdrücke zweiten Grades, also z. B. um die geometrische Construction der Seite eines Rechtecks von gegebener Summe oder Differenz seiner Seiten und von gegebenem Inhalte handelt, allerdings schon im VI. Buche der Elemente des Euclides implicite enthalten. Wenn man aber den Ursprung der Algebra von dem wichtigen Schritte datiren will, wo solche Abhängigkeitsverhältnisse oder Gleichungen zwischen gegebenen und noch zu bestimmenden Grössen arithmetisch aufgefasst und zergliedert, wo die geometrische Ausdrucksweise der Theoreme beseitigt und gewissermassen in Formeln verwandelt, oder die Verbindung der Grössen im allgemeinen arithmetischen Gewande, also der Inhalt eines Rechtecks in Form eines Zahlenproducts vorgelegt worden sind, wie dies in der ausgeprägtesten Gestalt zuerst in der griechischen Litteratur bei Diophant, in der indischen bei Brahmegupta, in der arabischen bei Mohammed ben Musa zu Tage tritt, dann finden wir die geometrische Construction und Bestimmung der Wurzeln quadratischer Gleichungen zuerst in der Algebra von Omar Alkhayyami. Dieser scharfsinnige Mathematiker entwickelt in gründlichster Weise die Theorie der quadratischen Gleichungen, indem er dieselben zuerst algebraisch löst, dann diese Auflösungsmethode geometrisch interpretirt und endlich auch eine geometrische Construction der Wurzel angibt, wobei er sich gerade auf die von Euclid in dem VI. Buche der Elemente angewendete Construction der entsprechenden planimetrischen Aufgabe bezieht und dieselbe mit einigen Abbreviaturen wiedergibt. Sonst habe ich wenigstens in der älteren Litteratur nirgend eine geometrische Construction der Wurzeln der quadratischen Gleichungen entdecken können. Denn die geometrischen Begründungen, welche der Chowarizmier in seiner Algebra den gegebenen Regeln der arithmetischen Auflösung hinzufügt, sind keine geometrischen Constructionen der Wurzeln, wie Einige*) meinen, sondern eben nur geometrische Erläuterungen der bei der algebraischen Lösung zur Anwen-

*) Man vergleiche Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. S. 263. Z. 7 u. 14 v. o.

dung gebrachten arithmetischen Sätze, insbesondere des Satzes von den Potenzen der Binome. Aehnlich verhält es sich mit den geometrischen Beweisen, welche Cardano für die Methoden der Auflösung kubischer Gleichungen von Ferro und Tartaglia erfand und in seiner *Ars magna* entwickelt hat.

Ueber den Ursprung der Methode, die Wurzelwerthe kubischer Gleichungen durch Intersection von Linien darzustellen, ist bereits Mehreres im IV. Abschnitt § 127 in den historischen Bemerkungen mitgetheilt worden. Wir fügen demselben nur noch einige Bemerkungen über einzelne Momente und den weiteren Verlauf der Geschichte der geometrischen Methoden hinzu. Die Methode der Anwendung der Apollonischen Kegelschnitte nahm ihren Ursprung bei den Griechen, veranlasst durch die Probleme von der Verdoppelung des Würfels, der Trisection des Winkels und dem Archimedischen Probleme der Kugeltheilung. Das erste Problem, welches von der Auflösung einer rein kubischen Gleichung abhängt, wurde in der Platonischen Schule, das dritte, welches von der Auflösung einer gemischten kubischen Gleichung abhängig ist, nach dem Zeugnisse des Eutocius von Archimedes selbst gelöst, wofür es allerdings an Originalbeweisen fehlt*). Den Arabern, welche sich im Besitze der Schriften des Archimedes befanden und sich vielfach bemühten, das Problem zu lösen, war eine Methode des Archimedes jedenfalls unbekannt. Wie dem nun auch sei, die Araber haben, durch jene Probleme angereizt, die Geometrie der kubischen Gleichungen in verhältnissmässig kurzer Zeit durch eine systematische Behandlungsweise zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Freilich blieb ihnen ein wichtiger Theil der Theorie fremd: die Aufstellung der Diorismen zwischen der Realität der Wurzeln und der speciellen Beschaffenheit der Glieder oder Coefficienten der Gleichung. Daran zu gehen hinderte sie jedenfalls der Mangel algebraisch-analytischer Gewandtheit. Unter den Geometern, welche sich an diesen Problemen lebhaft betheiligten, sind besonders zu erwähnen Almahani, (850), Alkhazin (950), Alkuhi (900), Abul Djud (1030), Alhaitham († 1038) und Omar Alkhayyami (1080). Ausserdem muss erwähnt werden, dass der berühmte Geometer Abul Wafa (940—998) nach dem Zeugnisse seines Zeitgenossen Abul Faradj im *Kitab Alfihrist* ein Buch geschrieben haben soll über die Bestimmung der Seite des Kubus und des Biquadrats, sowie der aus beiden zusammengesetzten Ausdrücke*), d. h. also über die Construction der Wurzeln der Gleichungen $x^3 = a$, $x^4 = a$ und $x^4 + ax^3 = b$. Abul Wafa war der Erste, welcher einen arabischen Commentar zur Algebra des Diophant, sowie zur Algebra des Chowarizmiers schrieb. Die erste vollständige und systematische Behandlung der kubischen Gleichungen enthält das Werk des oben erwähnten Omar ben Ibrahim.

*) Ibid. S. 274.

**) Woepcke, Recherches sur l'hist. des sciences mathém. chez les Orientaux. p. 28 et 37. Paris 1875.

Seine Classification der quadratischen und kubischen Gleichungen, so weit sie reelle positive Wurzeln besitzen, und worauf die älteren Algebristen, bis zu Cardano herauf, ein besonderes Gewicht legten, ist bereits in § 90 ausführlich mitgetheilt worden. Es ist anzunehmen, dass Cardano seine Tabelle selbständig erfand; er fügte auch nach der Erfindung Ferrari's das System der biquadratischen Gleichungen hinzu.

Da jene schönen algebraischen Untersuchungen der Araber der älteren italienischen Schule anscheinend unbekannt geblieben und erst in neuester Zeit im Occident wieder ans Licht gezogen sind, so wurden die geometrischen Methoden von den Nachfolgern der altitalienischen Schule selbständig und zwar zuerst von Cartesius nacherfunden und bald darauf gaben van Schooten, Hudde, Baker, Halley und Roberval verschiedene Methoden an, die allgemeinen kubischen und biquadratischen Gleichungen mittels Anwendung der Kegelschnitte aufzulösen. Newton endlich zeigte in seiner *Arithmetica universalis*, wie auch eine andere mechanisch construirbare Curve, die Conchoide des Nicomedes, welcher dieser sich zur Lösung des delischen Problems, sowie auch zur Trisection des Winkels bediente, sich mit Vortheil zur Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen verwenden lasse. In der That aber ist nichts geeigneter, die Existenz sowol reeller als complexer Wurzeln vor die Augen zu führen, als diese Art geometrischer Interpretation der algebraischen Formen, an welche die Bedingung geknüpft ist, für jene speciellen näher zu bestimmenden Werthe der Variabeln einen vorher bestimmten Werth anzunehmen.

II. Geometrische Auflösung der linearen Gleichungen.

§ 355. Die Methode der Wagschalen nach Ibn Albanna*).

Der Methode, welche die arabischen Algebristen Abraham ben Esra (1130), Ibn Albanna (1222) und sein Commentator Alkalzadi (1470) unter dem Namen der Methode der Wagschalen *(âml b'il kaffatain)* zur Bestimmung der Wurzelwerthe einer Gleichung vom ersten Grade in einer schematischen Rechnungsform anwenden, liegt augenscheinlich ein geometrisches Princip zu Grunde. Ibn Albanna bezeichnet diese eigenthümliche noch jetzt unter dem Namen der Regel der falschen Substitutionen oder Rechnung der beiden Fehler (lat. *regula falsorum*, arab. *hisâb al-khata'ain*) angewandten Bestimmungsart der Wurzeln als eine Methode der Proportionen. Er fügt ausserdem hinzu, die Methode sei „*hindissije*“, von welchem Worte es freilich zweifelhaft ist, ob es „indisch“ oder „geometrisch“ bedeuten soll. Die Regel besteht in Folgendem. Die gegebene Gleichung sei

*) Man vergl. oben §§ 84, 85 und 86.

$$ax = b\,.$$

Man versuche es mit $x = z_1$; man erhält

$$az_1 = b - \varphi_1\,;$$

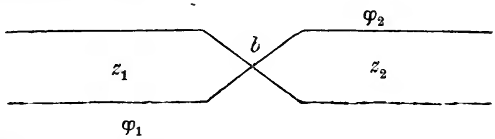
und man nenne φ_1 den ersten Fehler. Alsdann versuche man es mit $x = z_2$; man erhält

$$az_2 = b + \varphi_2$$

und nenne φ_2 den zweiten Fehler. Die gesuchte Wurzel ist

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\,.$$

und das Rechenschema



Um diese Methode geometrisch zu interpretiren, so mögen die Fehler φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 verschiedener Annahmen z_1, z_2, z_3, z_4 an einer Geraden AB (Fig. 29) je nach dem positiven oder negativen Sinne der ersteren in senkrechter Richtung abgetragen werden, wobei die Abstände derselben vom Anfangspunkte A die beliebigen Annahmen (*mafrud*, *lances*) bedeuten, während die Unbekannte x selbst die allein richtige und fehlerlose Annahme AO sein würde.

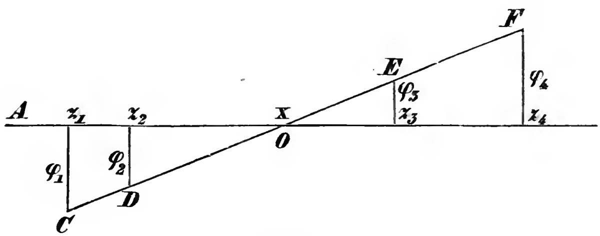


Fig. 29.

Der Entdecker fand nun entweder durch arithmetische Betrachtung oder, was wahrscheinlicher ist, durch eine planimetrische Auffassung der in Rede stehenden Ausdrücke und Resultate, dass die Fehler der Substitution sich immer zu einander verhalten, wie die Fehler der Resultate. Denn aus den Ausdrücken

$$ax = b,\ az_1 = b - \varphi_1,\ az_2 = b - \varphi_2,\ az_3 = b + \varphi_3,\ az_4 = b + \varphi_4,$$

folgt durch Subtraction

$$a(x - z_1) = \varphi_1,\ a(x - z_2) = \varphi_2,\ a(z_3 - x) = \varphi_3,\ a(z_4 - x) = \varphi_4,$$

und durch Division

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad \frac{z_3 - x}{z_4 - x} = \frac{\varphi_3}{\varphi_4}.$$

Aus diesen geometrischen Proportionen folgt, dass die Endpunkte C, D, E, F der Fehlergrössen eine Gerade bilden und dass durch die Intersection dieser Geraden mit der Linie der Annahmen für die Unbekannte diejenige Annahme AO oder x' gefunden werden kann, für welche die Fehlergrösse verschwindet, das Resultat also gleich b wird. Nur aus diesem Grunde wird es erklärlich, wenn der arabische Algebrist die Zahl b auf den Durchschnitt der beiden Linien (den Drehpunct der Wage) schreibt. Der gesuchte Werth AO oder x ergibt sich aber durch eine leichte Umformung, nämlich

$$x = \frac{z_2 \varphi_1 - z_1 \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Die geometrische Construction der Wurzel einer linearen Gleichung würde demnach in Folgenden bestehen. Man trage vom Anfangspuncte A der Strecke auf der Linie AB die erste Annahme bis z_1, die zweite bis z_2 ab, setze davon unter einem rechten Winkel die Strecke des Fehlers φ_1 unter der Linie bis C, wenn derselbe negativ ist, und die Strecke des Fehlers φ_2 über der Linie bis D, wenn derselbe positiv ist. Alsdann verbinde C mit D durch eine Gerade und die Entfernung AO des Durchschnittspunctes vom Anfangspuncte wird die gesuchte Wurzel der Gleichung sein. Es verdient zum Verständniss der Methode der Wagschalen bemerkt zu werden, dass die arabischen Algebristen in dem Falle, wo beide Abweichungen positiv ausfielen, in consequenter Weise auch beide über die Schalen einer zweiarmigen Wage schrieben. Aber der einmal adoptirte Schematismus verdunkelte den geometrischen Ursprung dieser Rechenmethode, da genau genommen in diesem Falle das Schema einer einarmigen Wage hätte angewendet werden müssen.

III. Geometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§ 356. Die Methoden von Euclides und Omar ben Ibrahim.

Die allgemeinste Form der quadratischen Gleichungen mit einer unbekannten Grösse lässt sich immer auf eine der vier Formen

$$x^2 \pm mx \pm n = 0$$

reduciren. Werden diese Ausdrücke planimetrisch aufgefasst, wie solches bei Euclides und Omar der Fall ist, so müssen zur Vermeidung einer Absurdität die einzelnen Theile homogen, also m eine Linie, n eine Fläche darstellen, welche sich durch b^2 ausdrücken lässt. Auch kann, falls n eine Linie vorstellt, $n\alpha$ statt n gesetzt werden, wo α die Längeneinheit bezeichnet. Das Rechteck $n\alpha$ lässt sich aber immer in ein Quadrat b^2 verwandeln.

Da es sich in den planimetrischen Constructionen des Euclides und den algebraischen Auswerthungen unbekannter Grössen der Araber nur um positive Werthe jener handelt, so schliessen diese Untersuchungen den ersten der vier Fälle, nämlich

$$x^2 + mx + n = 0$$

zunächst von den übrigen aus, und es bleiben drei, welche von Euclides unter den Formen von Rechtecken

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x(a - x) = b^2, \\ \text{II.} & x(a + x) = b^2, \\ \text{III.} & x(x - a) = b^2, \end{array}$$

von Omar unter den drei Formen

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 + ax = b, \\ \text{II.} & x^2 + a = bx, \\ \text{III.} & ax + b = x^2 \end{array}$$

behandelt werden. Da sich Omar in seinen geometrischen Constructionen auf die des Euclides beruft, so beschränken wir uns darauf, die betreffenden Sätze und Aufgaben des Letzteren, welche sich allgemein auf Parallelogramme beziehen, auf die vorgelegten drei Probleme in dieser speciellen Form anzuwenden. Es wird sich empfehlen, den Text möglichst wörtlich wiederzugeben.

1) *Element.* lib. VI. prop. 27. Lehrsatz: Von allen an einer gegebenen Geraden a entworfenen Parallelogrammen, deren Ergänzungen dem Parallelogramme auf der halben Linie ähnlich sind und ähnlich gelegen, ist das seiner Ergänzung ähnliche Parallelogramm auf der halben Geraden ein Maximum*).

Specialisirung**). Von allen Rechtecken AM (Fig. 30),

*) Dieser Satz enthält, wie man leicht sieht, die Determination der Realität der Wurzeln des Falles I.

**) Die hinzugefügten Specialisirungen sind implicite in den Sätzen und Aufgaben des Euclid enthalten.

die über AB entworfen werden können und deren Ergänzung KH ein Quadrat, also dem Quadrate CE über der halben Linie AB ähnlich und homothetisch ist, ist das Quadrat CE ein Maximum.

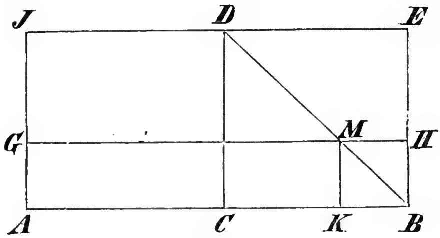


Fig. 30.

Folgerung. Sei das Rechteck $AM = b^2$ und $KB = BH = x$, $AB = a$, so ist offenbar $(a - x)x = b^2$ und $\left(\frac{1}{2} a\right)^2 > b^2$ die Bedingung der Möglichkeit (Realität) von x.

Setzt man $AK = x$, also $KM = KB = a - x$, so ist ebenfalls $(a - x)\,x = b^2$. Hieraus geht hervor, dass für den Fall $\left(\frac{1}{2} a\right)^2 > b^2$ die vorgelegte Gleichung zwei Lösungen zulässt, von denen die eine den Werth x, die andere den Werth $a - x$ hat.

2) *Element.* lib. VI. prop. 28; Dat. prop. 58. Aufgabe. An einer gegebenen Geraden a ein der gegebenen geradlinigen Figur vom Inhalt b^2 gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramme ähnlich ist.

Specialisirung. An einer gegebenen Geraden AB (Fig. 31)

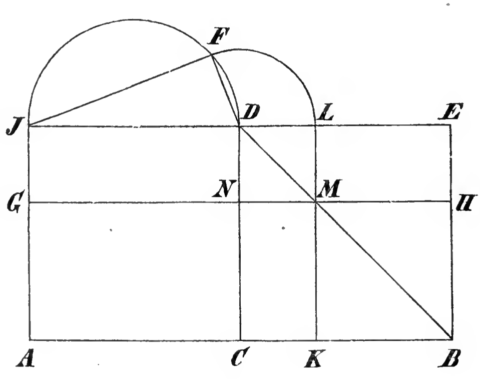


Fig. 31.

gleich a ein Rechteck AM gleich b^2 zu entwerfen, dessen Ergänzung KH ein Quadrat ist.

Diese Aufgabe löst **Euclides** sehr elegant auf folgende Weise. Halbire AB in C und construire über CB das Quadrat CE, über AC das Quadrat AD. Ferner mache

$$FD = \sqrt{JD^2 - JF^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 - b^2} \text{ und } DL = DF.$$

Endlich ziehe DB und $MG \parallel AB$, so ist AM das verlangte Rechteck.

Beweis und Folgerung. Sei $KB = KM = x$, so ist offenbar $AM = x(a-x)$. Weil ferner der Gnomon

$$MNCBEL = \left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 - MN^2 = b^2$$

ist und das Rechteck $ME = MC$, so ist das Rechteck CH vermehrt um CM gleich dem Rechteck AM oder gleich dem Inhalte b^2. Es ist aber auch $AM = x(a-x)$ und also die Construction der Aufgabe in dem angenommenen speciellen Falle eine Lösung der Gleichung $x(a-x) = b^2$ oder von

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Aus der Figur folgt weiter

$$KM = KB = AC + CK = AC + MN,$$

und nach der eingeführten Bezeichnungsweise

$$x_1 = \frac{1}{2}\,a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 - b^2}.$$

Gemäss der sub prop. 27 gemachten Bemerkung, dass der eine Werth der Unbekannten x, der andere $a - x$ sei, ist nun auch noch

$$x_2 = \frac{1}{2}\,a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 - b^2}.$$

Auf diese Deductionen bezieht sich nun auch Omar*) bei seiner Auflösung und Determination der Gleichung

$$x^2 + a = bx.$$

3) *Element.* lib. VI. prop. 29; Dat. prop. 59. Aufgabe. An einer gegebenen Geraden a ein einer gegebenen geradlinigen Figur vom Inhalte b^2 gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Ueberschuss einem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist.

Specialisirung. An einer gegebenen Geraden $AB = a$ ein Rechteck $AM = b^2$ zu entwerfen, dessen Ueberschuss HK ein Quadrat ist. (Fig. 32.)

---

*) Omar von Woepcke, arab. Text S. 13 und 14.

Euclides löst diese Aufgabe ähnlich wie die vorige. Halbire AB in C und construire über den beiden Hälften die Quadrate AD und CE. Ferner mache

$$FD = \sqrt{JD^2 + JF^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 + b^2}$$

und $DL = FD$. Ziehe DBM und $LM \parallel CD$, so wird AM das verlangte Rechteck sein.

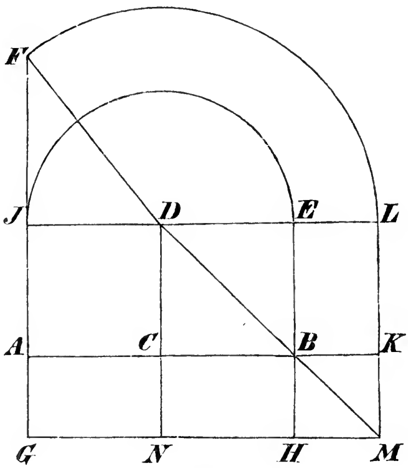


Fig. 32.

Beweis und Folgerung. Sei $KB = KM = x$, so ist offenbar BM ein Quadrat und $AM = x(a+x)$. Weil ferner der Gnomon

$$MNCBEL = MN^2 - \left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 = b^2$$

ist und das Rechteck $ME = MC$, so ist Rechteck CH + Rechteck CM = Rechteck $AM = b^2$. Es war aber auch $AM = x(a+x)$. Die Euclidische Construction der allgemeinen Aufgabe schliesst demnach die Lösung der Gleichung

$$x(a+x) = b^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + ax - b^2 = 0$$

als speciellen Fall ein.

Wollte man die Linie AK mit x bezeichnen, so wäre

$$KM = AK - AB = x - a$$

und die Construction eine Lösung der Gleichung $x(x-a) = b^2$ oder von $x^2 - ax - b^2 = 0$.

Aus der Figur folgt weiter

$$KM = KB = AC + CK = AC + MN,$$

und nach der oben angenommenen Bezeichnung

$$x_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}.$$

Der andere (negative) Wurzelwerth

$$x_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$$

bleibt bei dieser Methode verborgen und auch Omar, der seine Discussion der Gleichungen $x^2 \pm ax = b^2$ auf die Theoreme des Euclides bezieht, erwähnt dessen, sowie überhaupt aller negativen Wurzeln nicht*).

§ 357. Methode von Francoeur**).

Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$x^2 - ax \pm c = 0.$$

Man mache sie zunächst homogen, indem c der Ausdruck für einen Flächeninhalt z. B. den eines gegebenen Quadrats b^2 sein muss, wenn x und a Linien bedeuten.

1) $x^2 - ax + b^2 = 0$. Aus dieser Gleichung folgt $b^2 = x(a-x)$ oder

$$x : b = b : (a - x),$$

d. h. b ist das geometrische Mittel von x und $a - x$.

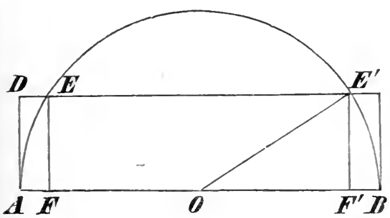


Fig. 33.

Hierauf gründet sich folgende Construction des Werthes x. Man schlage über AB (Fig. 33) oder a einen Halbkreis, errichte in A das Perpendikel $AD = b$ und ziehe zu AB die Parallele DE. Alsdann sind $AF = x_1$ und $AF' = x_2$ zwei Strecken, welche der Aufgabe genügen, also Wurzelwerthe von x.

Beweis. Der Construction zufolge, nachdem man noch OE' gezogen hat, ist

$$OF' = OF = \sqrt{OE'^2 - E'F'^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

*) Man vergleiche hierüber seine Auflösungen der Gleichungen VII. u. IX., Omar, arab. Text pag. 11. 12. 14. 15.

**) Francoeur, Cours compl. de mathém. I. § 330, und Burg, Lehrbuch III. S. 18.

also auch

$$AF' = BF = AO + OF' = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

und

$$AF = AO - OF = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

2) $x^2 - ax - b^2 = 0$. Aus dieser zweiten Form der Gleichung folgt $b^2 = x(x-a)$ oder

$$x : b = b : (x - a),$$

d. h. b ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen x und $x - a$. Hierauf beruht die folgende Construction. Man beschreibe mit AD (Fig. 34) gleich $\frac{1}{2}a$ einen Halbkreis und nehme auf der Tangente AC den Abstand b. Dann werden die Wurzelstrecken auf der Secante CF liegen, nämlich $-CE = x_1$ und $CF = x_2$.

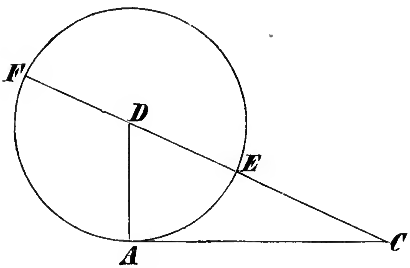


Fig. 34.

Beweis. Der Construction zufolge ist mit Berücksichtigung des Sinnes der Strecken

$$b^2 = (-CE).(-CF) = (-CE).(-CE - a) = x_1(x_1 - a),$$

und

$$b^2 = CF.CE = CF.(CF - a) = x_2(x_2 - a).$$

Wenn man die Wurzelwerthe selbst bestimmen will, so hat man hierfür

$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2},$$

$$CF = DE + CD = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2};$$

endlich wegen $CE = CD - DE$:

$$-CE = DE - CD = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

§ 358. Methode von Koppe*).

Gegeben sei die homogene quadratische Gleichung

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

*) Lehrbuch der Planimetrie. S. 148. 1863.

Man bilde ein rechtwinkliges Dreieck CDE (Fig. 35) mit der Kathete $CD = b$ und der Hypotenuse $\frac{1}{2}a$; beschreibe einen Halbkreis mit dem Radius $\frac{1}{2}a$, welcher die Verlängerung von DE in den Punkten F und G schneidet. Die Strecken der Unbekannten sind alsdann $FD = x_1$ und $GD = x_2$. Es ist nämlich der Construction gemäss

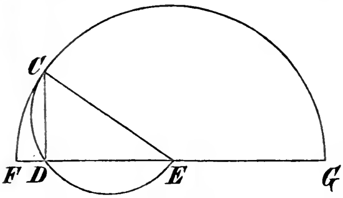


Fig. 35.

$$DE = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

$$FD = FE - DE = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

$$GD = FE + DE = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

§ 359. Methoden von Heis und Eschweiler*).

Von diesen Geometern mögen hier vier Auflösungen der verschiedenen Fälle angeführt werden.

1) Wenn die quadratische Gleichung auf die homogene Form

$$x^2 - ax + bc = 0$$

gebracht werden kann, so errichte man in den Endpunkten A und B der Geraden AB (Fig. 36) $= a$ die Senkrechten $AC = b$ und $BD = c$, beide nach derselben Seite; alsdann verbinde man C mit D und beschreibe um O als Mittelpunct einen Kreisbogen $CXX'D$. Alsdann ist $AX = x_1$ und $BX = AX' = x_2$, welches die beiden gesuchten Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung sein werden.

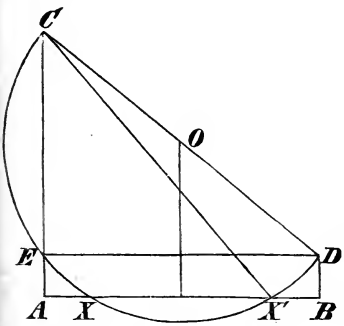


Fig. 36.

Was die Determination der Realität der Wurzeln anbetrifft, so geht aus der Figur die Bedingung hervor, dass der Kreis die Linie AB nur dann schneiden kann, wenn $2r \geq b + c$ ist, und wenn rücksichtlich der Beziehung $4r^2 = (b - c)^2 + a^2$ die Ungleichungen

$$(b + c)^2 \leq (b - c)^2 + a^2$$

*) Lehrbuch der Planimetrie Kap. V. § 67.

oder

$$\frac{1}{2}a \geqq \sqrt{bc}$$

stattfinden.

2) Wenn die vorgelegte Gleichung sich auf die Form

$$x^2 + ax - bc = 0$$

reduciren lässt, so errichte man die Liniengrössen b und c zu verschiedenen Seiten senkrecht in A und B (Fig. 37) auf der Linie $AB = a$, verbinde C mit D und beschreibe um den Mittelpunct O ebenfalls einen Kreis. Dann sind wiederum AX und $-AX'$ die gesuchten Wurzelwerthe.

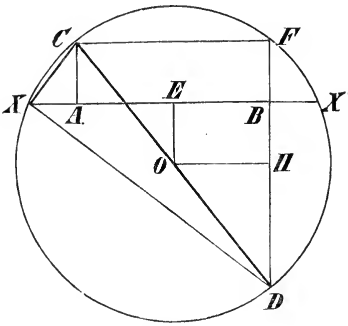


Fig. 37.

Da der Kreis unter allen Umständen die Verlängerung von AB schneidet, so sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung immer reell.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke XCA und XBD folgt

$$XA : AC = BD : XB,$$

oder, wenn man XA mit x_1 bezeichnet,

$$bc = AX \,.\, XB = x_1(x_1 + a).$$

Gleicherweise ist

$$bc = (-XB)(-AX) = (-AX')(-AX) = (-AX')(-AX' + a),$$

oder

$$bc = x_2(x_2 + a).$$

Es folgt nun aus der Construction

$$\begin{aligned} XA &= -AE + XE = -AE + \sqrt{XO^2 - OE^2} \\ &= -AE + \sqrt{OD^2 - BH^2}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} XA &= -AE + \sqrt{OH^2 + HD^2 - BH^2} \\ &= -AE + \sqrt{OH^2 + (HD - BH)(HD + BH)}, \end{aligned}$$

und in Coefficienten der Gleichung ausgedrückt

$$x_1 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}\,.$$

Endlich ist

$$-AX' = -AE - EX' = -AE - XE,$$

oder kurz

$$x_2 = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}.$$

3) Eine zweite Auflösung der Gleichung $x^2 - ax + bc = 0$ ist folgende: Es sei $b > c$. Man mache OB (Fig. 38) $= b$, $OA = c$ und errichte inmitten AB die Senkrechte EM. Sodann mache man $\angle BOY$ beliebig gross und $OD = +\frac{1}{2}a$, errichte die Senkrechte DM und construire um den Punct M mit MA als Radius einen Kreis. Alsdann werden $OX = x_1$ und $OY = a - x_1 = x_2$ die gesuchten Wurzelwerthe sein mit der früher angegebenen Beschränkung

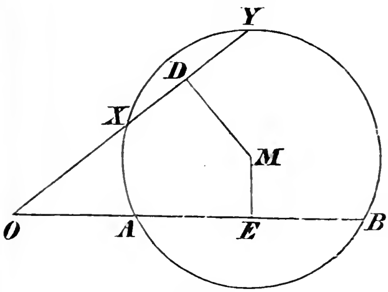


Fig. 38.

$$\frac{1}{4}a^2 \geqq bc.$$

4) Eine zweite Auflösung der Gleichung $x^2 + ax - bc = 0$ ist folgende: Trägt man die Strecken $b = AO$, $c = BO$ zu verschiedenen Seiten des Punctes O (Fig. 39) auf einer Geraden ab und macht in einer beliebigen andern Richtung $OD = \frac{1}{2}a$; errichtet ferner DM senkrecht zu DO, EM senkrecht inmitten AB, so ist M der Mittelpunct eines Hülfskreises $AXBY$, es werden $OX = x_1$ und $OY = -a - x_1 = x_2$ die gesuchten Wurzelwerthe sein.

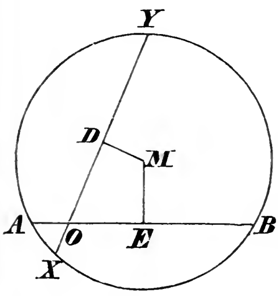


Fig. 39.

§ 360. Die Methode rechtwinkliger Coordinaten.

An den vorangehenden Methoden ist gezeigt, wie man im Stande ist, die Wurzeln der quadratischen Gleichungen zu construiren, ohne sie zuvor aufzulösen, indem die Wurzeln durch Intersectionen der geraden Linie mit dem Kreise gefunden worden. Sieht man die gegebene Gleichung als das Ergebniss der Elimination zweier Gleichungen mit zwei variabeln Grössen an, worunter die eine, welche in der gegebenen Gleichung vorkommt, also x, die Abscisse und die andere die Ordinate einer Curve bezeichnet, so stellen diese beiden Gleichungen zusammengenommen ein System zweier Linien dar, die sich in einem oder mehreren Puncten schneiden und die Abscissen dieser Durchschnittspuncte sind die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung. Werden nun die Gleichungen zweier Linien als coexistirend gedacht, so gelten die Coordinaten x und y derselben nur für die Durchschnittspuncte beider Linien. Da die Anzahl der reellen Wurzeln der Finalgleichung oder Resultante $x^2 + ax + b = 0$ nur zwei beträgt, so wird man zwei Curven zu wählen haben, welche sich höchstens in zwei Puncten schneiden, also entweder zwei Kreise oder die gerade Linie in Verbindung mit einem Kegelschnitte. Wir wählen der Einfachheit wegen die zweite Combination und unter den Kegelschnitten den Kreis, indem wir die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad x^2 - ax + b^2 = 0\,, \\ &\text{II.} \quad x^2 - ax - b^2 = 0 \end{aligned}$$

zu construiren suchen.

1) Gegeben sei die Gleichung $x^2 - ax + b^2 = 0$. Sie sei die Resultante der beiden Linien

$$\begin{aligned} y &= mx + n, \text{ (Gerade)}, \\ y^2 &= x(2r - x), \text{ (Scheitelgleichung des Kreises).} \end{aligned}$$

Der Coexistenz der Resultante mit der vorgelegten Gleichung genügen die einfacheren Annahmen $m = 0,\ n = b,\ r = \frac{1}{2}a$, also

$$y = b\,, \quad y^2 = x(a - x)\,.$$

Die Finalgleichung, welche durch Elimination von y erhalten wird, ist offenbar die quadratische

$$x^2 - ax + b^2 = 0\,.$$

Die sich hieraus ergebende Construction stimmt vollständig mit der in § 357 gegebenen überein. Es sei A der Anfangspunct der Coordinaten, $AB = a$, $AD = b$, so ist $y = b$ die Gleichung der Geraden DE', sowie E und E' die beiden Durchschnittspuncte derselben mit dem Kreise.

2) Gegeben sei die Gleichung $x^2 - ax - b^2 = 0$. Sie sei die Finalgleichung der zwei folgenden:

$$y = mx + n, \text{ (Gleichung einer Geraden)},$$
$$y^2 = r^2 - x^2, \text{ (Mittelpunctsgleichung des Kreises)}.$$

Der Coexistenz der Finalgleichung mit der vorgelegten genügen die Annahmen $m = 1$, $n = -a$, $r^2 = a^2 + 2b^2$, also

$$y = x - a,$$
$$y^2 = a^2 + 2b^2 - x^2.$$

Es sei O (Fig. 40) der Anfangspunct, OY und OX die rechtwinkligen Axen des Systems. Man trage $OM = a$ auf OY ab

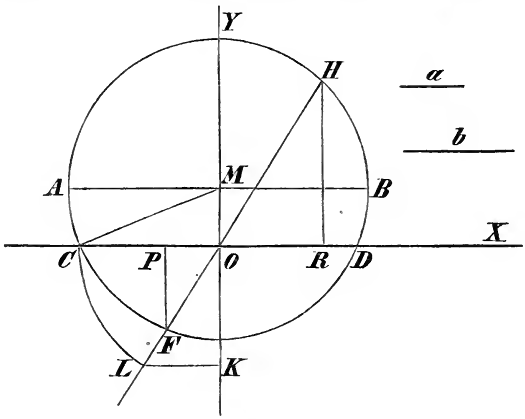


Fig. 40.

und nach der entgegengesetzten Richtung $OK = b$, errichte KL senkrecht gegen OK und gleich b, verbinde L mit O und trage OL auf OX ab bis C. Alsdann construire man mit MC einen Kreis AB und halbire den Winkel MOX durch die Gerade FH. Die Abscissen ihrer Durchschnittspuncte mit dem Kreise, nämlich OP und OR, sind die beiden gesuchten Wurzelwerthe der vorgelegten Gleichung.

Aus dem nothwendigen Gegensatze ihrer Lage oder Richtung folgt, dass die eine Wurzel stets positiv, die andere negativ sein muss. Ebenso folgt aus der Ungleichung $MO < MC$, dass die Gerade unter allen Umständen den Kreis schneiden muss, dass also die beiden Wurzeln stets reell sein werden.

Dieselbe Construction kann zur Auflösung der vorigen Aufgabe verwendet werden. Die Gleichung $x^2 - ax + b^2 = 0$ ist dann die Finalgleichung der beiden folgenden:

$$y = x - a,$$
$$y^2 = a^2 - 2b^2 - x^2.$$

Soll aber die Gerade den Kreis schneiden, d. h. reelle Strecken für die Wurzeln ergeben, so muss stets die Ungleichung

$$a^2 - 2b^2 \geqq \frac{1}{2} a^2, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4} a^2 \geqq b^2$$

erfüllt sein.

IV. Geometrische Auflösung der kubischen Gleichungen

§ 361. Lösung des Problems von der Duplication des Würfels nach Menächmus*). (Griech. διπλασιασμὸς τοῦ στερεοῦ.)

Eine geometrische Auflösung der rein kubischen Gleichung

$$x^3 = c$$

ist zuerst erfunden von dem Platoniker Menächmus (370 v. Chr.) und wird bewerkstelligt mittels Intersection zweier Kegelschnitte. Dies Problem unter der Form der Gleichung

$$x^3 = 2a^3$$

dargestellt, war in der platonischen Schule bekannt unter der Bezeichnung „Verdoppelung des Würfels" (griech. διπλασιασμὸς τοῦ στερεοῦ, lat. *duplicatio cubi*), und Plato selbst hatte erkannt, dass die Discussion desselben sich stütze auf die Lösung der Aufgabe des Hippokrates (450 v. Chr.): zu zweien gegebenen Linien zwei mittlere Proportionalen (τὰς δύο μέσας) zu finden. Die Bedingung

$$a : x = x : y = y : b$$

lässt sich nämlich einkleiden in die Formen:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

oder auch

$$x^2 = ay, \quad xy = ab,$$

also nach Elimination der Grösse y noch kürzer in

$$x^3 = a^2 b.$$

Wenn nun vorausgesetzt wurde $b = 2a$, so war in diesem speciellen Falle die Gleichung $x^3 = 2a^3$ gelöst, sobald es gelungen war, zwischen a und $2a$ zwei mittlere Proportionalen zu construiren.

Menächmus hat von dieser Aufgabe zwei elegante Auflösungen

*) Man vergl. Eutocii comm. ad Archimedem lib. II. prop. 2. Edit. Oxford. p. 142. L'algèbre d'Omar trad. par Woepcke. pg. 28 et XIII.

Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione.. Gottingae 1798.

gegeben. Wir folgen der analytisch-geometrischen Darstellung, welche Omar ben Ibrahim in seiner Schrift „Ueber die Beweise der algebraischen Theoreme“ davon gegeben hat, ohne freilich sich auf Menächmus' Entdeckung zu beziehen. Omar gründet, wie seine Vorgänger, die geometrische Lösung des Problems von der Verdoppelung des Würfels auf die des folgenden:

Zwei Linien zwischen zweien gegebenen Linien zu finden, so dass diese vier Linien eine fortlaufende Proportion bilden.

Die gegebenen Geraden seien $AB = a$ und $BC = b$ (Fig. 41). Man lege dieselben unter einem rechten Winkel zusammen, construire die Parabel BDE mit dem Scheitel B, der Axe BX und

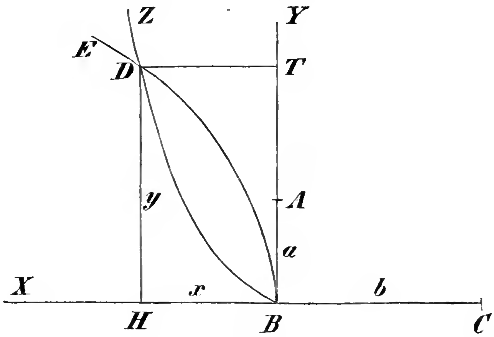


Fig. 41.

dem Parameter $BC = b$; ferner die Parabel BDZ mit dem Scheitel B, der Axe BY und dem Parameter $BA = a$. Diese beiden Kegelschnitte schneiden sich im Puncte D und die Coordinaten desselben $DT = x$ und $DH = y$ sind die gesuchten Linien, so dass man hat

$$a : x = x : y = y : b\,.$$

Um dies zu erweisen, beachte man, dass für die Parabel BDE:

$$y^2 = bx\,,$$

folglich

$$\text{I.}\quad b : y = y : x\,;$$

für die Parabel BDZ:

$$x^2 = ay\,,$$

also

$$\text{II.}\quad y : x = x : a$$

ist. Die beiden Proportionen I. und II. geben die fortlaufende Proportion und die Gleichung $x^3 = a^2 b$.

Um nun die Wurzel der rein kubischen Gleichung

$$x^3 = c$$

zu construiren, möge die Zahl c durch ein rechtwinkliges Parallelepipedon dargestellt werden, dessen quadratische Basis die Einheit zur Seite hat. Dann ist seine Höhe gleich c und

$$x^3 = 1^2 . c .$$

Man suche nun zwischen den Linien 1 und c zwei mittlere Proportionalen x und y, so ist die erstere die Kante des Würfels, welcher mit dem gegebenen Parallelepipedon gleichen Inhalt hat.

Eine zweite Auflösung des Problems gibt Menächmus durch Construction des Durchschnittspunctes D einer jener beiden Parabeln mit der Hyperbel

$$xy = ab ,$$

deren Asymptoten die Linien BX und BY sind.

§ 362. Methode von Plato*).

Die Lösung des sogenannten Delischen Problems wurde von den griechischen Geometern in mannigfacher Weise durch andere mechanische Constructionen versucht. So erfand zu diesem Zwecke Nicomedes die Conchoide, Diocles die Cissoide. Auch Plato und Hero der ältere, Schüler des Ktesibios von Askra**), geben eine solche mechanische Construction an, deren analytische Discussion, wie die der Conchoide und Cissoide, auf algebraische Curven höheren Grades führen. Die Auflösung von Plato gründet sich auf seine Betrachtung über die geometrische Darstellung der zwei mittleren Proportionalen.

Man trage auf den beiden Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel B (Fig. 42) zwei Segmente $BA = a$ und $BC = b$ ab. Mit Hülfe der mechanischen Drehung zweier Lineale CD und AE um die Puncte C und A, deren eines Ae sich stets in paralleler Lage zu dem andern Cd befindet, bis die Normale DE derselben mit ihrem Fusspuncte E in die Verlängerung von CB

*) Eutocii Comm. ad Archimedem. Edit. Oxford. p. 135. L'algèbre d'Omar, trad. par Woepcke. Add. A. p. 94.

**) Ἥρωνος Κτησιβίου βελοποιικά. Vet. mathem. p. 142; Pappus, edit. Commandin. p. 9—10.

zu liegen kommt, findet man die beiden mittleren Proportionalen $y = BD$ und $x = BE$, so dass man hat

$$a : x = x : y = y : b .$$

Diese Constructionsaufgabe lässt sich auch so formuliren:

Den geometrischen Ort der Fusspuncte aller Perpendikel Ae zu construiren, welche von A auf alle Tangenten der Parabel gefällt

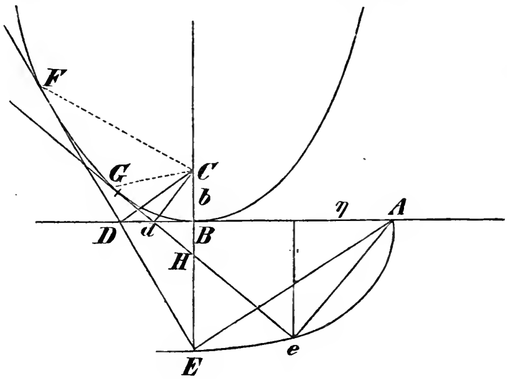


Fig. 42.

sind, wovon C der Brennpunct und BA die Tangente des Scheitels ist; dann diese Curve durch die Verlängerung von BC in E zu schneiden. Die Gleichung der Curve AeE findet man aus den Eigenschaften der Parabel BGF. Ist G Tangentialpunct von ed, CG Radius vector, so ist $CG = CH$ und die Normale CA schneidet die Tangente HG stets in der Tangente des Scheitels B. Es ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken leicht folgende Proportionen:

$$\eta : x = x : (a - \eta + BH) = BH : Bd ,$$
$$Bd^2 = BH . b .$$

Durch Elimination von BH und Bd findet man die Gleichung dritten Grades

$$x^3 + \eta^2 x - a\eta x - b\eta^2 = 0 .$$

Combinirt man diese mit der Geraden $\eta = a$, so erhält man wieder

$$x^3 = a^2 b .$$

Die Auflösung des gestellten Problems involvirt demnach bei der platonischen Methode die Construction einer algebraischen Curve dritten Grades.

§ 363. Das Theorem von Eutocius und die Gleichung von Almahani.

Den Ausgangspunct der Untersuchungen der arabischen Mathematiker über die geometrische Auflösung der gemischten kubischen Gleichungen bildete ein Problem des Archimedes, welches von ihm selbst höchstwahrscheinlich nicht gelöst, ein Gegenstand eifriger Forschung bei den Arabern war. In dem vierten Satze des zweiten Buches der Abhandlung über die Kugel und den Cylinder stellt sich Archimedes folgendes Problem:

Eine Kugel durch eine Ebene zu schneiden, dass das Verhältniss des einen Segmentes zum andern eine gegebene Grösse habe.

Archimedes weist nach, dass die Lösung abhänge von folgender Construction: Gegeben sei eine Linie DZ (Fig. 43) und auf

Fig. 43.

derselben zwei Puncte B und T, so dass B zwischen D und T liegt. Einen Punct X der Linie zu bestimmen, so dass

$$XZ : ZT = BD^2 : DX^2\,.$$

Um dies Problem algebraisch auszudrücken, setzen wir

$$BD = a\,,\quad ZT = b\,,\quad ZD = c\,,\quad DX = x\,,$$

und es handelt sich nun offenbar darum, x vermittels der Proportion

$$(c - x) : b = a^2 : x^2$$

zu suchen, d. h. die kubische Gleichung

$$x^3 - cx^2 + a^2b = 0$$

aufzulösen.

Der Erste, der dies Problem in Form einer kubischen Gleichung aufstellte, war Almahani von Bagdad (860). Es gelang ihm jedoch nicht, eine Auflösung derselben zu erfinden. Nach dem Zeugnisse von Omar Alkhayyami soll sie zuerst von Abu Djafar Alkhazin mittels Kegelschnitte gelöst sein. Nach ihm wurden von verschiedenen Geometern Lösungen gefunden: von Abu Sahl Alkuhi (um 900), Alhasan ben Alhaitham (1038) und Andern. Bemerkenswerth ist die Bestimmung der Grenzen der Realität der Wurzeln durch Alkuhi, welche sich auf folgendes Theorem des Eutocius (540 n. Chr.) stützt:

Soll eine Linie DZ dergestalt in E getheilt werden, dass das Parallelepipedon aus dem einen Segmente und dem Quadrate des andern gleich einem gegebenen Parallelepipedon werde, so darf dieses nicht grösser sein, als wenn man $XZ = 2DX$ setzt.

Drücken wir diese Determination in algebraischen Zeichen nach den angenommenen Bezeichnungen aus, so ist das Product $a^2 b$ ein Maximum für $x = \frac{1}{2}(c - x)$. Dies Resultat zu erhalten, ist für die moderne Analysis freilich eine Kleinigkeit; für die Analysis der Alten aber war dies Resultat von nicht geringer Bedeutung. Den elementaren Beweis, welchen Eutocius und Alkuhi*) in ihren Commentaren zum Archimedes geben, müssen wir hier übergehen.

§ 364. Das Theorem von Alkuhi und seine Methode die Gleichung von Almahani aufzulösen**).

In einem Memoire, welches Woepcke dem Alkuhi zuschreiben zu müssen glaubt, geht dieser an die Lösung der Proportion

$$(c - x) : b = b^2 : x^2,$$

oder der Gleichung von Almahani:

$$(c - x)\, x^2 = b^3 = a,$$

wobei er folgende Determination gibt:

Die Auflösung der Gleichung $(c - x)x^2 = a$ in positiven Wurzeln ist nur dann möglich, wenn die Bedingung $27a \leqq 4c^3$ erfüllt ist.

Dies Theorem ergibt aus der in § 363 angegebenen Bestimmung, dass a ein Maximum werde für $x = \frac{2}{3}c$. Ferner ist nach der Cardanischen Formel die Wurzel

$$\frac{1}{x_1} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{1 - \frac{4}{27}\frac{c^3}{a}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{1 - \frac{4}{27}\frac{c^3}{a}}}.$$

Für den Fall $27a > 4c^3$ ist diese Wurzel negativ, die beiden übrigen complex. Die Gleichung kann also nur positive Wurzeln haben, wenn $27a \leqq 4c^3$ ist.

*) Omar, p. 113. Add. C.

**) Omar, Add. B.

Der arabische Mathematiker betrachtet nun die beiden Fälle

$$(c \pm x)\, x^2 = b^3 = a$$

und gibt die folgende Construction der Wurzel. Man mache $BE = b$ und construire über BE als Basis das Quadrat $BEZH$ (Fig. 44). Alsdann beschreibe man eine Parabel, deren Scheitel A,

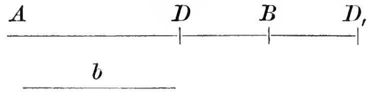


Fig. 44 a.

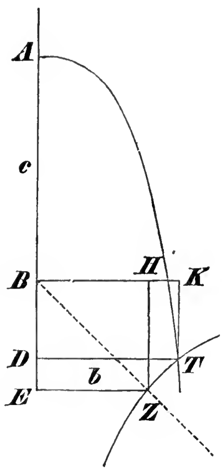


Fig. 44 b.

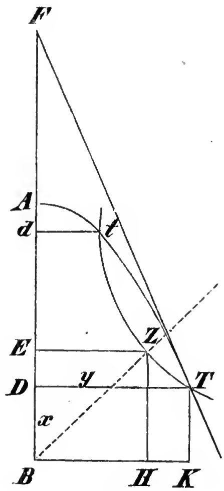


Fig. 44 c.

die Axe AB und der Parameter gleich b ist. Ferner construire man eine Hyperbel zu den Asymptoten EB und BH, welche durch Z geht. Die Gleichungen dieser Curven sind bezüglich des Coordinatenanfangspunctes B:

$$\text{I.}\quad y^2 = b(c + x)\,, \quad xy = b^2\,, \quad \text{(Fig. 44b).}$$

$$\text{II.}\quad y^2 = b(c - x)\,, \quad xy = b^2\,. \quad \text{(Fig. 44c).}$$

Beide schneiden sich im Puncte T, und $BD = x$ wird eine Wurzel der Gleichung sein.

Der Autor gibt weiter richtig an, dass nur der zweite Fall (Fig. 44c) eine Grenzbestimmung erfordere, welche sich durch die Ungleichung $27a < 4c^3$ ausdrücken lasse.

Woepcke stellt hinterher noch eine Betrachtung an, wie die arabischen Geometer zu dieser Determination gelangen konnten. Wir wollen auf andere Art zeigen, wie Alkuhi zu derselben Grenzbestimmung hätte gelangen können. Zieht man in T (Fig. 44c) die Tangente TF an eine der Curven und bezeichnet die Subtangente FD mit m, so ist für die Parabel $mb = 2y^2$, für die Hyperbel $m = x$. Der Grenzfall tritt offenbar ein bei gemeinschaftlicher Tangente. Dann ist $y^2 = \frac{1}{2} bx$, und wenn diese Gleichung zugleich mit den beiden andern: $y^2 = b(c - x)$ und $xy = b^2$ bestehen soll, so muss die Bedingung $27b^3 = 4c^3$ oder $27a = 4c^3$ erfüllt sein.

§ 365. Construction der Wurzel einer defecten kubischen Gleichung nach Omar*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + ax = b\,,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass a und b positive Werthe haben. Omar drückt dieselbe Gleichung in Worten so aus: „Ein Kubus und Kanten sind gleich einer Zahl“. Die Auflösung, welche der arabische Geometer von dieser Gleichung gibt und die wir nicht wörtlich, sondern im Auszuge wiedergeben, ist folgende:

Es sei AB (Fig. 45) die Seite des Quadrats $p^2 = a$. Man construire mittels Anwendung der in § 361 gegebenen Methode ein Parallelepipedon $p^2r = b$ und mache $BC = r$ und $\perp BA$. Alsdann verlängere man AB beliebig weit und construire die

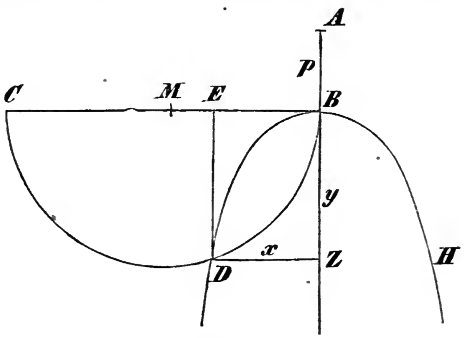


Fig. 45.

Parabel DBH vom Parameter AB über der Axe BZ. Ferner beschreibe man über BC einen Halbkreis, welcher die Parabel im

*) Omar, p. 32. XIII.

Zur Auflösung der vollständigen Gleichung

$$x^3 + bx = ax^2 + c\,,$$

oder

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

bedient Omar sich der Intersection eines Kreises

$$\text{I.}\quad y^2 = (x - s)(a - x)\,,$$

und einer Hyperbel

$$\text{II.}\quad x(p - y) = ps\,,$$

wobei $b = p^2$, $c = p^2 s$ gesetzt worden ist.

Die Gleichung hat immer eine positive reelle Wurzel. Omar ist es leider entgangen, dass sie in dem Falle $c < ab$ auch drei positive Wurzeln haben kann.

§ 367. Methode von Cartesius*).

Cartesius scheint die geometrischen Methoden der arabischen Geometer zuerst selbständig nacherfunden zu haben. Derselbe geht bei seinen Betrachtungen aus von der reducirten Form der kubischen Gleichung, nämlich

$$x^3 = ax + b\,.$$

Er setzt $a = mp$ und $b = m^2 q$ und bewerkstelligt die Auflösung in folgender Weise. Angenommen die Curve FAG (Fig. 47) sei eine Parabel mit der Axe AL und dem Parameter m. Man mache

$$AC = \frac{1}{2}m\,,\quad CD = \frac{1}{2}p$$

und $DE \perp DA$ und gleich $\frac{1}{2}q$. Alsdann beschreibe man um E als Mittelpunct einen Kreis FG mit dem Radius AE. Dieser Kreis wird die Parabel, abgesehen vom Scheitelpuncte A, entweder in einem oder in drei Puncten schneiden, oder in einem Puncte schneiden und in einem Puncte berühren, oder überhaupt nur in einem einzigen Puncte schneiden. Die Ordinaten x_1, x_2, x_3 werden die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein.

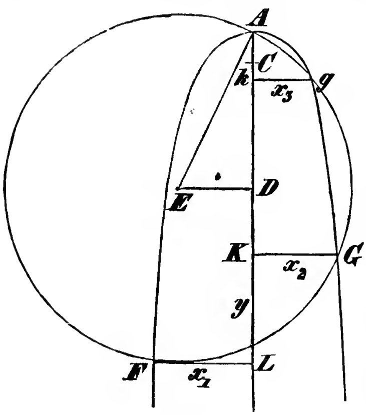


Fig. 47.

*) Cartesii Geometria lib. III.
Halley, De constructione problematum solidorum.

Zur Begründung dieser Behauptung berücksichtige man, dass mit Bezug auf den Anfangspunct A die Gleichung der Parabel sein muss

$$\text{I.} \quad x^2 = my ,$$

die des Kreises

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = qx + (p + m)y .$$

Substituirt man y aus I. in II., so wird daraus

$$x^2 = mpx + m^2 q = ax + b .$$

Da m eine willkürliche Grösse ist, so kann man sich zur Auflösung aller kubischen Gleichungen von der vorgelegten Form einer unveränderlichen, festen Parabel bedienen.

§ 368. Methode von van Schooten*).

Gegeben sei die vollständige kubische Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0 .$$

Die Coordinatenaxen seien AB und AC (Fig. 48). Man mache $AD = \sqrt{b}$ und errichte in D die Senkrechte DF. Nachdem

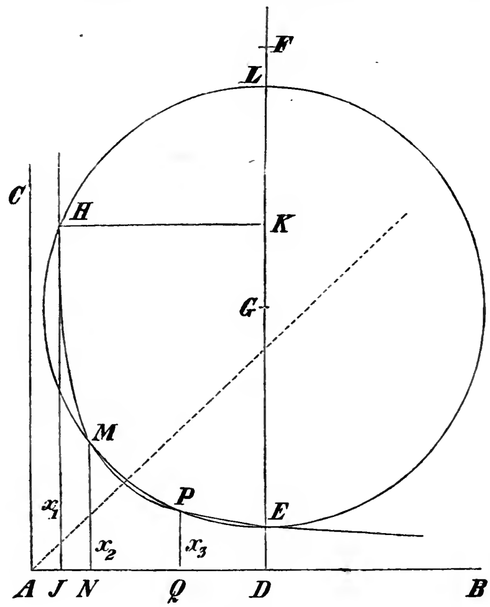


Fig. 48.

$DE = c : b$ und $EF = a$ gemacht worden ist, beschreibe man durch E die Hyperbel EhH mit den Asymptoten AC und AB.

---

*) Fr. v. Schooten, Comm. in Cartesii Geometriam lib. III.

Zur Auflösung der vollständigen Gleichung

$$x^3 + bx = ax^2 + c\,,$$

oder

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

bedient Omar sich der Intersection eines Kreises

$$\text{I.}\quad y^2 = (x - s)(a - x)\,,$$

und einer Hyperbel

$$\text{II.}\quad x(p - y) = ps\,,$$

wobei $b = p^2$, $c = p^2 s$ gesetzt worden ist.

Die Gleichung hat immer eine positive reelle Wurzel. Omar ist es leider entgangen, dass sie in dem Falle $c < ab$ auch drei positive Wurzeln haben kann.

§ 367. Methode von Cartesius*).

Cartesius scheint die geometrischen Methoden der arabischen Geometer zuerst selbständig nacherfunden zu haben. Derselbe geht bei seinen Betrachtungen aus von der reducirten Form der kubischen Gleichung, nämlich

$$x^3 = ax + b\,.$$

Er setzt $a = mp$ und $b = m^2 q$ und bewerkstelligt die Auflösung in folgender Weise. Angenommen die Curve FAG (Fig. 47) sei eine Parabel mit der Axe AL und dem Parameter m. Man mache

$$AC = \frac{1}{2}\,m\,,\quad CD = \frac{1}{2}\,p$$

und $DE \perp DA$ und gleich $\frac{1}{2}\,q$. Alsdann beschreibe man um E als Mittelpunct einen Kreis FG mit dem Radius AE. Dieser Kreis wird die Parabel, abgesehen vom Scheitelpuncte A, entweder in einem oder in drei Puncten schneiden, oder in einem Puncte schneiden und in einem Puncte berühren, oder überhaupt nur in einem einzigen Puncte schneiden. Die Ordinaten x_1, x_2, x_3 werden die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein.

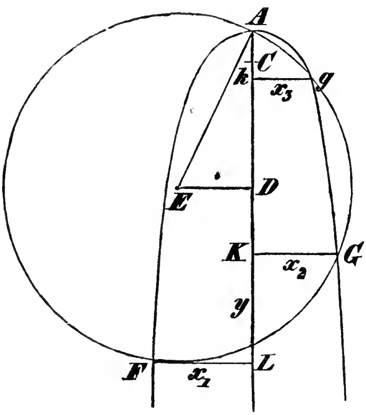


Fig. 47.

*) Cartesii Geometria lib. III.

Halley, De constructione problematum solidorum.

Zur Begründung dieser Behauptung berücksichtige man, dass mit Bezug auf den Anfangspunct A die Gleichung der Parabel sein muss

$$\text{I.} \quad x^2 = my\,,$$

die des Kreises

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = qx + (p + m)y\,.$$

Substituirt man y aus I. in II., so wird daraus

$$x^2 = mpx + m^2 q = ax + b\,.$$

Da m eine willkürliche Grösse ist, so kann man sich zur Auflösung aller kubischen Gleichungen von der vorgelegten Form einer unveränderlichen, festen Parabel bedienen.

§ 368. Methode von van Schooten*).

Gegeben sei die vollständige kubische Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0\,.$$

Die Coordinatenaxen seien AB und AC (Fig. 48). Man mache $AD = \sqrt{b}$ und errichte in D die Senkrechte DF. Nachdem

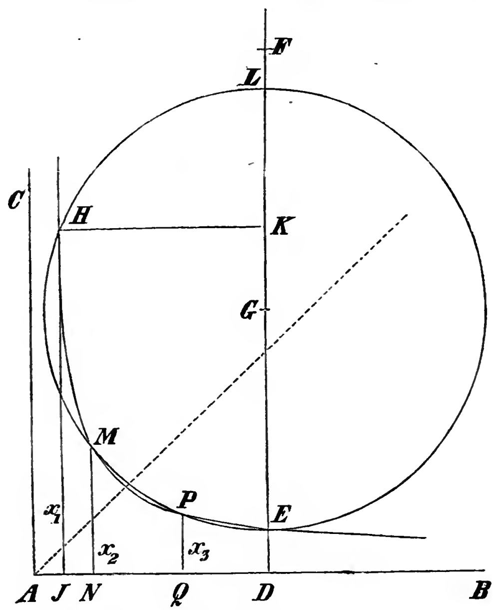


Fig. 48.

$DE = c : b$ und $EF = a$ gemacht worden ist, beschreibe man durch E die Hyperbel EhH mit den Asymptoten AC und AB.

*) Fr. v. Schooten, Comm. in Cartesii Geometriam lib. III.

Wird ferner DF in G halbirt und mit GE als Radius ein Kreis um G beschrieben, welcher die Hyperbel, abgesehen vom Puncte E, in so viel Puncten H, M und P schneidet oder berührt, als die vorgelegte Gleichung reelle Wurzeln hat, so sind die Ordinaten $HJ = x_1$, $MN = x_2$, $PQ = x_3$ die gesuchten Wurzeln. Um diese Behauptung zu beweisen, sei allgemein $HJ = x$. Dann ist nach dem Vorhergehenden $AJ \times x = \frac{c}{b} \times \sqrt{b}$ und folglich

$$JD = HK = \sqrt{b} - \frac{c}{bx}\sqrt{b}\,.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so erhält man

$$HK^2 = b - \frac{2c}{x} + \frac{c^2}{bx^2}\,.$$

Weil nun $DE = c : b$ ist, so ergibt sich weiter

$$EK = JH - DE = x - \frac{c}{b}\,,$$

und wegen $EF = a$:

$$KL = DL - JH = a - x\,,$$

also

$$EK \times KL = ax - \frac{ac}{b} - x^2 + \frac{c}{b}\,x\,.$$

Wegen der Beziehung $HK^2 = EK \times KL$ ist nun

$$b - \frac{2c}{x} + \frac{c^2}{bx^2} = ax - \frac{ac}{b} - x^2 + \frac{c}{b}\,x\,,$$

oder, nach Potenzen von x geordnet,

$$x^4 - \left(\frac{c}{b} + a\right)x^3 + \left(b + \frac{ac}{b}\right)x^2 - 2cx + \frac{c^2}{b} = 0\,.$$

Diese Gleichung hat den überflüssigen Factor $x - \frac{c}{b}$, welcher abgesondert werden muss, weil er sich auf den Punct E bezieht. Es bleibt dann die vorgelegte Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

übrig, woraus hervorgeht, dass HJ eine der gesuchten Wurzeln ist.

Schneller gelangt man freilich zum Ziele, wenn man von den Gleichungen der beiden Curven ausgeht. Die der Hyperbel ist

$$\text{I.}\quad xy = c : \sqrt{b}\,,$$

die des Kreises

$$\text{II.}\quad (\sqrt{b} - y)^2 = \left(x - \frac{c}{b}\right)(a - x)\,.$$

Eliminirt man y, so erhält man ebenfalls nach Ausscheidung des überflüssigen Factors die vorgelegte Gleichung.

§ 369. Die Methode der Conchoide nach Newton*).

Zur Construction der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

schlägt Newton die Anwendung der Conchoide vor. Man nehme beliebig die Länge m und construire die Linie $GC = \frac{1}{2} m$ (Fig. 49), senkrecht dagegen $GD = \sqrt{\frac{c}{a}}$. Wenn a und c von ungleichem Vorzeichen sind, beschreibe man mit CD um C einen Kreis; sind a und c von gleichem Vorzeichen, so mache man $DH = GC$, (Fig. 49b) und beschreibe mit GH um C einen Kreis. Alsdann

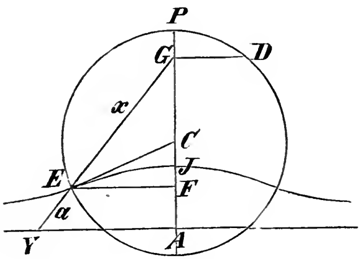


Fig. 49 a.

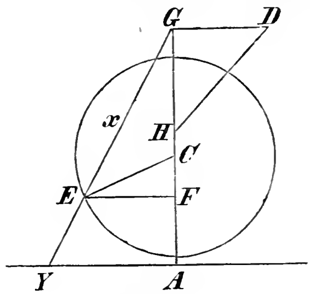


Fig. 49 b.

mache man $GA = -\frac{b}{m} - \frac{c}{ma}$ und trage diese Strecke von G nach C hin ab, wenn GA positiv ist, sonst nach der entgegengesetzten Richtung. In A ziehe man die Senkrechte AY und suche GY so zu legen, dass $EY = a$ werde; alsdann ist $EG = x$ die gesuchte Wurzel. x ist positiv oder negativ, je nachdem es auf dieser oder der andern Seite von G liegt. Ist a negativ, so muss Y zwischen E und G gelegt werden.

Zum Beweise bemerke man, dass

1. $EG^2 + GC^2 = EC^2 + 2GC \times GF$,
2. (Fig. 49a) : $EG^2 - GD^2 = 2GC \times GF$,
3. (Fig. 49b) : $EG^2 + GD^2 = 2GC \times GF$,
4. $GY \times GF = AG \times GE$.

Bezeichen wir GE kurz mit x, so ist im ersten Falle (Fig. 49a)

*) Newtoni Arithm. univ. in App. De aequationum constructione lineari. Lugd. Bat. 1732.

$$x^2 - \frac{c}{a} = m \,.\, GF\,,$$

und wenn man mit $x + a = GY$ multiplicirt:

$$x^3 + ax^2 - \frac{c}{a}x - c = m \,.\, GF \times GY = m \,.\, AG \times GE\,.$$

Wegen der Beziehungen $AG = -\frac{b}{m} - \frac{c}{ma}$, $GE = x$ resultirt

$$x^3 + ax^2 + bx - c = 0\,.$$

Im zweiten Falle dagegen wird sein (Fig. 49b)

$$x^2 + \frac{c}{a} = m \,.\, GF\,,$$

und wenn man mit $x + a = GY$ multiplicirt:

$$x^3 + ax^2 + \frac{c}{a}x + c = m \,.\, AG \times GE\,.$$

Wegen der Beziehungen $AG = -\frac{b}{m} + \frac{c}{ma}$, $GE = x$ resultirt nunmehr die vorgelegte Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Die Curve JE ist die Conchoide, deren Pol der Punct G und deren Asymptote AY ist.

Kürzer kann der Beweis geführt werden, wenn man von der Polargleichung der Conchoide ausgeht, nämlich von

$$r = -a + GA \,.\, \sec v\,,$$

wo $v = CGE$ ist. Man erhält so

$$x = -a - \left(\frac{b}{m} - \frac{c}{ma}\right) \sec v\,.$$

Der Winkel v wird gefunden aus der Gleichung

$$EG^2 + GD^2 = 2EG \times GC \times \cos v\,,$$

oder

$$x^2 + \frac{c}{a} = mx \cos v\,.$$

Setzt man hieraus den Werth der Winkelfunction in die Polargleichung ein, so erhält man die vorgelegte kubische Gleichung.

V. Geometrische Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§ 370. Auflösung der Biquadrate bei den arabischen Geometern.

Von Methoden, die biquadratischen Gleichungen aufzulösen, finden sich bei den Arabern nur Spuren, nämlich in einer verlorenen Abhandlung von Abul Wafa*) (940—998) und in einer anonymen Schrift**). Die Schrift von Abul Wafa ist betitelt: Von der Methode die Seite des Kubus und Biquadrats, sowie von Ausdrücken zu finden, welche aus diesen Potenzen zusammengesetzt sind. Woepcke bemerkt dazu, dass die Schrift von Abul Wafa augenscheinlich zum Gegenstande gehabt habe die geometrische Construction der Gleichungen

$$x^3 = a\,, \quad x^4 = a\,, \quad x^4 + ax^3 = b\,.$$

Was die dritte dieser Formen anbetreffe, so lasse sich dieselbe auflösen mittels Intersection der Hyperbel $y^2 + axy = b$ und der Parabel $x^2 = y$.

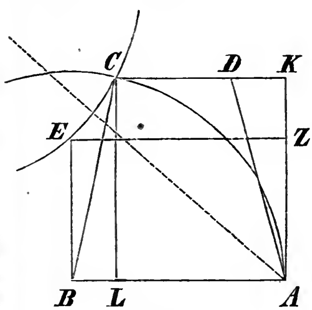


Fig. 50.

Was die Schrift des Anonymus anbetrifft, so handelt es sich darin um die Auflösung folgender Aufgabe:

Ein Trapez $ABCD$ (Fig. 50) zu construiren, dessen Basis und Schenkel gleich 10 und dessen Fläche gleich 90 ist. Der Autor zeigt, dass die Lösung der Aufgabe von der Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - 20x^3 + 2000x - 1900 = 0\,,$$

allgemein

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^3x - a^4 + b^4 = 0$$

abhängig sei.

Die Aufgabe wird nun auf folgende Art geometrisch gelöst: Ist $ABCD$ das Trapez und $AB = BC = AD = a$ und der Inhalt gleich b^2, so mache man $BE = b^2 : a$, vervollständige das Rechteck

---

*) Abul Wafa, Achte Abhandlung der Liste seiner im Kitab Alfihrist aufgezählten Werke. Man vergl. Woepcke, Recherches sur l'hist. des sciences mathém. chez les Orientaux. p. 36. Paris 1855.

**) Omar, trad. par Woepcke. Add. D. p. 115.

$ABEZ$ und ziehe durch E eine Hyperbel zu den Asymptoten AB und AZ. Ihre Gleichung ist bezüglich des Coordinatenanfangspunctes B:

$$\text{I.} \quad (a-x)y = b^2 .$$

Ein Kreis beschrieben um das Centrum B mit dem Radius BA wird die Hyperbel schneiden, weil $AB > BE$ ist. Seine Gleichung ist

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = a .$$

Zieht man die Gerade $AD = AB$ und construirt den Winkel $BAD = ABC$, wobei $AD = BC$ gemacht wird, so ist $ABCD$ das verlangte Trapez.

Eliminirt man y aus den Gleichungen I. und II., so erhält man in der That die vorgelegte biquadratische Gleichung.

§ 371. Methode von Cartesius*).

Gegegen sei die Gleichung

$$x^4 = ax^2 + bx + c .$$

Um die Gleichung geometrisch homogen zu machen, setzt Cartesius $a = mp$, $b = m^2 q$, $c = m^3 r$ und verfährt folgendermassen. Angenommen die Curve FAG (Fig. 51) sei eine Parabel mit der Axe AL und dem Parameter m. Man mache

$$AC = \frac{1}{2} m , \quad CD = \frac{1}{2} p$$

und $DE \perp DA$ und gleich $\frac{1}{2} q$. Alsdann verbinde man A mit E und trage $AR = r$ von A aus ab, auf der Verlängerung aber m. Alsdann construire man über RS einen Halbkreis und errichte in A die Senkrechte AH. Endlich beschreibe man mit dem Radius EH einen Kreis, welcher die Parabel im Allgemeinen schneiden wird (Fig. 51a). Wenn r negativ ist, so hat man zuvor noch einen Halbkreis über EA zu construiren und von A aus die Senkrechte AH einzuschneiden in J. Der Hauptkreis wird schliesslich mit dem Radius EJ gezogen (Fig. 51b). Die Ordinaten der Intersectionspuncte F, f, g, G sind die gesuchten Wurzeln.

Um dies zu erreichen, sei eine der Wurzeln $GK = x$. Dann

*) Cartesii Geometria lib. III. Man vergl. Hoppe in Grun. Arch. Bd. 55. S. 11. 1874.

ist $mAK = x^2$, also, wenn man A zum Anfangspunct der Coordinaten wählt, die Gleichung der Parabel

$$\text{I.}\quad x^2 = my\,,$$

die des Kreises (Fig. 51a):

$$\text{II.}\quad x^2 + y^2 = qx + (p+m)y + rm\,.$$

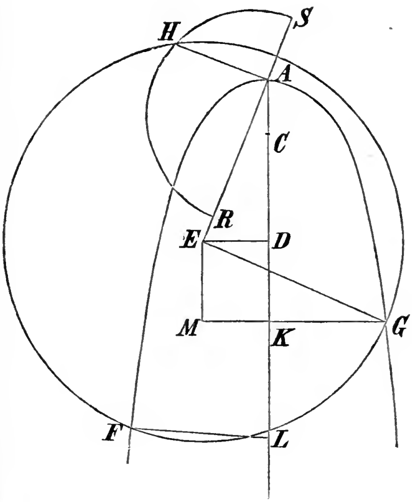


Fig. 51 a.

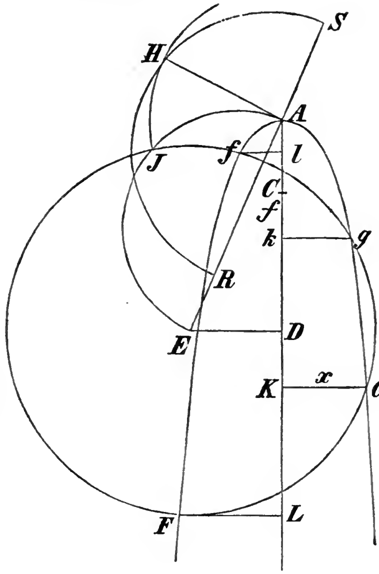


Fig. 51 b.

Substituirt man y aus I. in II., so erhält man in der That die vorgelegte Gleichung.

§ 372. Methode von van Schooten*).

Gegeben sei die vollständige biquadratische Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0\,.$$

Die Coordinatenaxen der Curven seien AB und AC (Fig. 52). Man mache $AD = \frac{1}{2}a$ und errichte in D das Perpendikel DF. Ferner bestimme man den Punct E dergestalt, dass das Rechteck $AD \times DE = \sqrt{d}$ wird und beschreibe durch E eine Hyperbel mit den Asymptoten AB und AC. Nachdem man weiter

$$DF = \frac{1}{2}\,c : \sqrt{d}$$

*) Fr. v. Schooten, Comm. in Cartes. geom. lib. III.

gemacht hat, verbinde man F mit A und beschreibe darüber den Halbkreis ADF. Alsdann trage man von A aus in denselben $AG = \sqrt{b}$ als Sehne ein und construire mit dem Radius FG um F als Centrum einen Kreis, welcher die Hyperbel in so viel Puncten

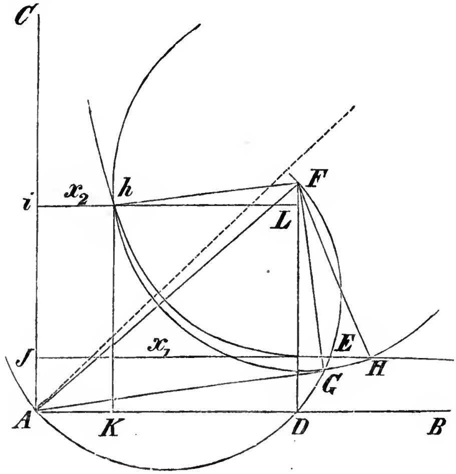


Fig. 52.

H, h u. s. w. schneiden wird, als die vorgelegte Gleichung reelle Wurzeln hat. Die Abscissen $HJ = x_1$, $hi = x_2$ u. s. w. sind die gesuchten Wurzeln. Um dies zu beweisen, sei HJ allgemein gleich x. Dann ist wegen $AJ \times JH = \sqrt{d}$ die Gleichung der Hyperbel

$$\text{I.} \quad xy = \sqrt{d}\,.$$

Die Gleichung des Kreises ist

$$\text{II.} \quad y^2 + x^2 - \frac{c}{\sqrt{d}}\,y - ax + b = 0\,.$$

Eliminirt man y aus diesen beiden Gleichungen, so resultirt daraus die vorgelegte Gleichung.

§ 373. Methode von Colson*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Man bringe dieselbe auf die Form

*) Colson, Aequationum cubicarum et biquadraticarum tum geometrica tum mechanica resolutio universalis. Phil. Trans. No. 309. p. 2353.

$$x^4 + 4rx^3 + (4r^2 - 2s + m^2)x^2 + 2(q - 2rs)x$$
$$+ \left(\frac{q^2}{m^2} + s^2 - t^2\right) = 0 .$$

Die Grössen q, r, s, t lassen sich bestimmen mittels der Gleichungen

$$4r = a, \quad 2s = 4r^2 + m^2 - b, \quad 2q = c + 4rs, \quad t^2 = \frac{q^2}{m^2} + s^2 - d.$$

Man construire eine Parabel mit dem Scheitel A (Fig. 53) und dem Parameter m, welcher als eine überzählige Grösse beliebig genommen werden kann, und ziehe durch den Scheitel eine Tangente. Auf dieser trage man die Strecke $AG = r$ ab und ziehe GR parallel zur Axe der Parabel, welche von der Parallelen in B geschnitten wird. Man mache $BR = s : m$ und errichte in R die Senkrechte

$$RE = q : m^2.$$

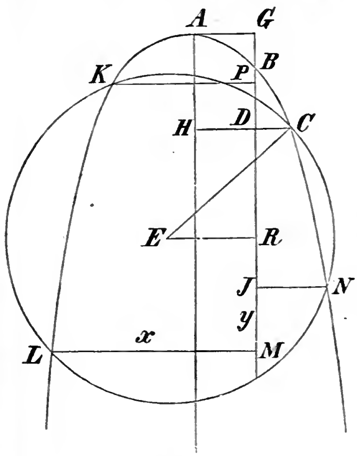


Fig. 53.

Nun beschreibe man einen Kreis mit dem Radius $EC = t : m$ um das Centrum E. Dieser Kreis wird die Parabel im Allgemeinen in vier Puncten schneiden, deren senkrechte Abstände von der Axe G die Abscissen x und die Wurzeln der Gleichung sein werden.

Um die Richtigkeit der Construction zu beweisen, suche man die Gleichungen der beiden Curven zu bilden. Da GR die Coordinatenaxe ist, so erhält man für die Parabel wegen der Relation $HC^2 = m \,.\, AH$ die Gleichung

$$\text{I.} \quad (x + r)^2 = my .$$

Ferner ist wegen $EL^2 = (y - GR)^2 + (x - ER)^2$ die Kreisgleichung

$$\text{II.} \quad \left(y - \frac{r^2 + s}{m}\right)^2 + \left(-x - \frac{q}{m^2}\right)^2 = \frac{t^2}{m^2} .$$

Eliminirt man y aus I. und II., so resultirt hieraus die vorgelegte Gleichung.

§ 374. Mechanische Construction der Wurzeln mittels der Conchoide.

Die Gleichung der Conchoide in rechtwinkligen Coordinaten ist

$$x^2 y^2 = (a^2 - x^2)(b + x)^2 .$$

Um mittels der Conchoide ASB (Fig. 54) eine Wurzel $PN = \xi$ der unvollständigen Gleichung

$$\xi^4 + p\xi^2 + q\xi + r = 0$$

zu erhalten, substituire man $x = \xi - \frac{1}{2} b$, woraus sich ergeben wird

$$\begin{array}{r|r|l} \xi^4 + y^2 & \xi^2 - by^2 & \xi + \frac{1}{4} b^2 y^2 = 0 . \\ - a^2 & - ba^2 & - \frac{1}{4} a^2 b^2 \\ - \frac{1}{2} b^2 & & + \frac{1}{16} b^4 . \end{array}$$

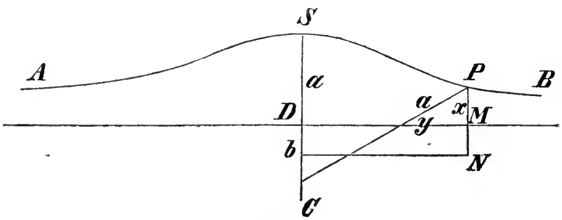


Fig. 54.

Man hat jetzt nur noch y, a und b zu bestimmen aus den drei Gleichungen

$$y^2 - a^2 - \frac{1}{2} b^2 = p ,$$

$$- b(y^2 + a^2) = q ,$$

$$\frac{1}{4} b^2 \left(y^2 - a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right) = r .$$

Substituirt man y aus der ersten Gleichung in die dritte, so liefert diese den Werth b; die erste und zweite ergeben dann y und a. Dieselbe Methode lässt sich offenbar auch anwenden, um die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\xi^3 + p\xi + q = 0$$

zu finden. In diesem Falle ist

$$\frac{1}{4} b^2 \left(y^2 - a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right) = \frac{1}{4} b^2 \left(p + \frac{3}{4} b^2 \right) = 0,$$

folglich

$$b = \pm 2 \sqrt{-\frac{1}{3} p}.$$

Ferner ist

$$-b(y^2 + a^2) = q,$$

und

$$y^2 - a^2 - \frac{1}{2} b^2 = p.$$

Hieraus folgen die Relationen

$$y^2 = -\frac{1}{6} p \pm \frac{1}{4} \sqrt{-3 \frac{q^2}{p}},$$
$$a^2 = +\frac{1}{6} p \pm \frac{1}{4} \sqrt{-3 \frac{q^2}{p}},$$

mit der Bedingung: p negativ.

§ 375. Methode von Francoeur*).

Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man bringe sie auf die homogene Form

$$x^4 - pqx^2 + p^2 rx + p^2 m^2 = 0,$$

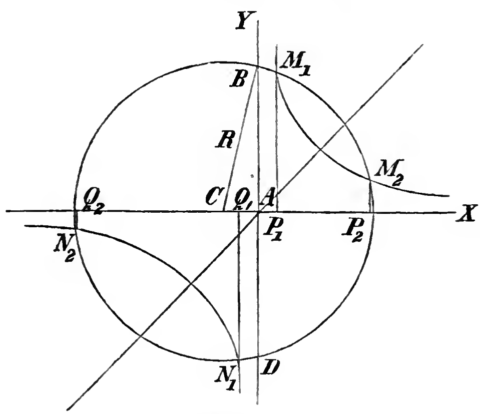


Fig. 55.

und construiere die gleichseitige Hyperbel

$$\text{I.} \quad xy = pm.$$

*) Francoeur, Cours compl. Tom I. p. 493. Man vergl. auch Burg II. § 153.

Eliminirt man pm aus dieser und der Hauptgleichung, so erhält man die Gleichung des Kreises

$$\text{II.}\quad y^2 + x^2 + \frac{pr}{m} y - pq = 0.$$

Um die Dimensionen der Wurzeln zu construiren, mache man (Fig. 55)

$$AC = pr : (2m) \text{ und } CB = \text{rad. } R = \sqrt{pq + \frac{p^2 r^2}{4m^2}};$$

dann ist

$$x_1 = AQ_1, \quad x_2 = AQ_2, \quad x_3 = AP_1, \quad x_4 = AP_2.$$

Man kann nach Francoeur's Anleitung die gegebene Gleichung auch auf die homogene Form

$$x^4 - p^2 x^2 + p^2 q x + p^3 r = 0$$

bringen. Man construire alsdann die Parabel

$$\text{I.}\quad x^2 = py.$$

Durch Substitution dieser Gleichung in die vorhergehende erhält man die Gleichung

$$y^2 - py + qx + pr = 0,$$

und wenn man die andere Gleichung $x^2 - py = 0$ dazu addirt, die Kreisgleichung

$$\text{II.}\quad y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0.$$

Um die Wurzeldimensionen zu construiren, gehe man aus von der Parabel $M_1 A M_2$ (Fig. 56) und suche den Mittelpunkt C des Kreises. Die Figur ist folgende:

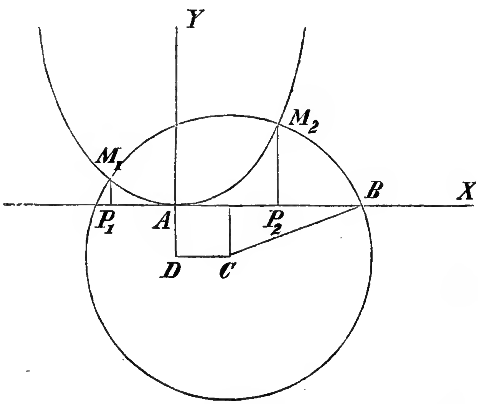


Fig. 56.

Die Wurzeln $AP_1 = x_1$, $AP_2 = x_2$ sind reell, die beiden übrigen x_3 und x_4 complex.

§ 376. Analytisch-geometrische Methode von Spitz*).

Die Bestimmung der vier Durchschnittspuncte zweier Kegelschnitte kommt stets auf die Auflösung einer kubischen Gleichung hinaus. Vier Puncte lassen sich auf drei verschiedene Arten zu Linienpaaren verbinden, welche drei Durchschnittspuncte haben. Um die Durchschnittspuncte der Kegelschnitte zu finden, kann man eines dieser geradlinigen Paare (Hyperbeln) der Schaar mit der Gleichung eines der Kegelschnitte combiniren, welches auf die Auflösung zweier quadratischen Gleichungen führt. Berücksichtigt man, dass sich die Wurzeln biquadratischer Gleichungen mit Hülfe zweier Kegelschnitte geometrisch darstellen lassen, so ersieht man, dass in dieser Betrachtungsweise zugleich die Darlegung der Möglichkeit der Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine kubische enthalten ist.

Die Gleichungen der Kegelschnitte seien

$$F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0;$$

dann ist die ganze Schaar derselben enthalten in

$$F + z \,.\, f = 0 .$$

Werden die den drei geradlinigen Paaren entsprechende Werthe von z durch z_1, z_2, z_3 bezeichnet, so sind

$$\begin{aligned} F + z_1 f &= 0, \\ F + z_2 f &= 0, \\ F + z_3 f &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen jener Liniensysteme. Wir haben z demnach so zu wählen, dass jene Gleichungen Systeme zweier Geraden darstellen. Es sei

$$\begin{aligned} F(x, y) &= A_1 y^2 + 2B_1 yx + C_1 x^2 + 2D_1 y + 2E_1 x + F_1 = 0, \\ f(x, y) &= A_2 y^2 + 2B_2 yx + C_2 x^2 + 2D_2 y + 2E_2 x + F_2 = 0, \\ F + zf &= Ay^2 + 2Byx + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0. \end{aligned}$$

Alsdann ist

---

*) Spitz, Grunert's Archiv XXXII. S. 198; XXXIII. S. 442. 1859.

$$A(F + zf) = [Ay + Bx + D]^2 - [(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + (D^2 - AF)] = 0$$

oder, wenn man beiderseits mit $B^2 - AC$ multiplicirt:

$$(B^2 - AC)[Ay + Bx + D]^2 - [(B^2 - AC)x + (BD - AE)]^2 + [BD - AE]^2 - [B^2 - AC][D^2 - AF] = 0.$$

Wenn diese Gleichung das System zweier Geraden vorstellen soll, so muss

$$[BD - AE]^2 = [B^2 - AC][D^2 - AF]$$

sein, also

$$AE^2 - ACF + B^2F - 2BDE + CD^2 = 0,$$

welches eine kubische Gleichung in Bezug auf z ist. Dann ist

$$\sqrt{B^2 - AC}\,.\,[Ay + Bx + D] \pm [(B^2 - AC)x + (BD - AE)] = 0.$$

Es sei nun gegeben die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

so kann dieselbe als das Resultat der Elimination von y aus den beiden Kegelschnittsgleichungen betrachtet werden. Da diese aber zusammen zwölf unbestimmte Grössen enthalten, so kann man mindestens acht willkürlich annehmen, also etwa

$$F(x, y) = x^2 + 2D_1 y = 0,$$

und in Verbindung mit der vorgelegten Gleichung:

$$f(x, y) = 4D_1^2 y^2 - 2aD_1 yx - 2bD_1 y + cx + d = 0.$$

Dies gibt

$$F + zf = 4D_1^2 y^2 - 2aD_1 yx + zx^2 - 2D_1(b + z)y + cx + d = 0.$$

Setzt man nun

$$4D_1^2 = A, \quad -2aD_1 = 2B, \quad z = C,$$
$$-2D_1(b + z) = 2D, \quad c = 2E, \quad d = F,$$

und führt die obige Bedingungsgleichung ein, so wird

$$z^3 - 2bz^2 + (ac + b^2 - 4d)z + (a^2 d - abc + c^2) = 0,$$

welche mit der Resolvente XVI. übereinstimmt.

Nun ist

$$Ay + Bx + D = \frac{(B^2 - AC)x + (BD - AE)}{\mp\sqrt{B^2 - AC}},$$

und weil

$$BD - AE = \sqrt{B^2 - AC} \times \sqrt{D^2 - AF}$$

ist, auch noch

$$Ay + Bx + D = \pm D_1 \sqrt{a^2 - 4z} \,.\, x \pm D_1 \sqrt{(b - z)^2 - 4d}\,.$$

Verbindet man diese Gleichung mit derjenigen der Parabel

$$x^2 + 2D_1 y = 0\,,$$

und setzt $2D_1 = -1$, also $x^2 = y$, so wird

$$x^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2}(b - z) = \mp \frac{1}{2}\left[x \sqrt{a^2 - 4z} + \sqrt{(b - z)^2 - 4d}\right],$$

woraus die Zerlegung der gegebenen Gleichung in zwei quadratische Factoren erkennbar wird.

Achter Abschnitt.

Gesammtlitteratur der Algebra der Gleichungen.

I. Die algebraischen und geometrischen Methoden der Auflösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade.

a. Altchinesische Litteratur.

Kiu-tschang oder „Die neun Kapitel der Rechenkunst". Es ist dies das älteste, viele Jahrhunderte hindurch vererbte, oft commentirte und immer wieder unter demselben Titel erschienene mathematische Lehrbuch der Chinesen. Diese eigenthümliche Erscheinung findet ihre Erklärung in dem streng conservativen Charakter des Volkes der Mitte, in seinem Respect vor dem Althergebrachten, sowie in der Pflege, welche die chinesischen Kaiser von Alters her den mathematischen Wissenschaften angedeihen liessen. Die Kiu-tschang sind ohne Zweifel das älteste mathematische Werk überhaupt. Sie sollen schon um 2600 v. Chr. von Lischau, Minister des Kaisers Hwang-ti, verfasst worden sein. Derselben geschieht wiederholt Erwähnung in dem Ritual oder Studienplan der kaiserlichen Prinzen, z. B. unter dem berühmten Kaiser Tschau-kong (1100 v. Chr.).

Tschang-tsang (100 v. Chr.) verfasste Kiu-tschang swan suh, d. i. arithmetische Regeln der neun Kapitel. Auch hierin wird auf das Ritual der Prinzen Bezug genommen.

Sun Tsze (250 n. Chr.), kaiserlicher Offizier, schrieb Swan-king, d. i. arithmetischer Classiker. Hierin findet sich die Ta-yen-Regel zur Auflösung unbestimmter Gleichungen.

Yih-Hing († 717 n. Chr.), indischer Buddhapriester in China, unter der Thang-Dynastie lebend, schrieb Ta yen lei schuh, ein Buch über die unbestimmte Analytik.

Tschuhi, Minister (um 1150), gab einen Auszug aus dem Werke Kiutschang im fünfzehnten Hefte des Y-ly.

Tsin Kiu Tschāu (1210—1290), der gelehrteste unter den chinesischen Mathematikern des Mittelalters, unter der Sung-Dynastie (950—1280) lebend, verfasste einen Commentar zu dem Werke von Yih Hing, sowie um 1240 das Buch Su schuh Kiu-tschang, d. i. die neun Kapitel der Zahlenkunst; ferner um 1290 Leih tien yuen yih (Algebra der höheren Gleichungen), worin eine Näherungsmethode zur

Auflösung der numerischen Gleichungen enthalten ist. Diese Methode besteht in der Tien yuen-Regel und gründet sich auf eine Anwendung der Lihn-Tafel (Binomialcoefficienten-Tafel); dieselbe hat einige Aehnlichkeit mit der bekannten Horner'schen Näherungsmethode. In Europa war Vieta (1540—1603) der Erste, welcher (um 1600) eine ähnliche Methode erfand.

Yang Hwang (um 1250) schrieb Tseang kea kiu-tschang swan fa, d. i. Commentar zur Arithmetik der neun Kapitel.

Le Yay Jin King (um 1300) verfasste Tsih yuen ha king, d. i. die Algebra. Darin wird die Tien yuen-Regel auf die Auflösung von Gleichungen angewendet*).

Pin Kue (um 1590), unter der Ming-Dynastie lebend, schrieb Swan fa tong tsong, d. i. Compendium der Mathematik, in zwölf Heften. Dies Werk als neue Ausgabe bezeichnet und datirt vom Jahre 1593, befindet sich in der Pariser Bibliothek (Nr. 892 au fond chinois). Eine ausführliche Inhaltsangabe von Edouard Biot findet man im Journal asiatique Sér. III. Tome VII. p. 201 seqq. 1839. (Man vergleiche auch einen früheren Aufsatz von Edouard Biot im Journal des Savants 1835.) Das Werk von Pin Kue enthält meistens Auszüge aus den alten Kiu-tschang**). Unter vielem Andern der politischen Arithmetik angehörigen enthält das sechste Heft die Auflösung der quadratischen Gleichungen (S. 9 u. 10), sowie die numerische Auflösung einiger kubischer Gleichungen mit commensurabeln Wurzeln.

---

*) Ueber die Tien yuen-Regel sind im achtzehnten Jahrhundert mehrere Werke von Chinesen verfasst worden. Besondere Fortschritte und mathematische Theorien sind jedoch nirgends erkennbar. Die vorstehenden Nachrichten über die Litteratur und Geschichte der Algebra bei den Chinesen verdanken wir dem Engländer Alexander Wylie in Shanghae, der sie in einem Aufsatze: Jottings on the science of chinese arithmetic zuerst im North China Herald 1852, dann im Shanghae Almanac for 1853 niedergelegt hat. Leider ist nach brieflicher Mittheilung des Verfassers (1874) das Original nicht mehr aufzutreiben. Ein Auszug findet sich in Crelle's Journal 52. Bd. von Biernatzki: Ueber die Arithmetik der Chinesen.

**) Es wird vielleicht dem Leser von Interesse sein, die Titel der Kiu-tschang oder „der neun Sectionen" kennen zu lernen. Dieselben sind in dem dritten bis achten Hefte des Werkes von Pin Kue enthalten; eine oberflächliche Inhaltsangabe findet man auch in Libri, Histoire des sciences mathématiques. I. Note VIII. 1835.

Kap. I. Die Geometrie und Feldmesskunst. (31 Seiten.)

Kap. II. Kaufmännisches Rechnen (Getreide, Metall). (23 Seiten.)

Kap. III. Repartitionsrechnung. (29 Seiten.)

Am Ende dieses Kapitels finden sich Aufgaben aus der unbestimmten Analytik, z. B. die Gleichung $z = 3x + 2 = 5y + 3 = 7t + 2$. Dieselbe Aufgabe findet sich im Swan-king von Sun Tsze, im Tayen lei schu von Yih Hing (sic!) und sogar in Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithm. libri duo, rec. Rich. Hoche. Leipzig 1866. Anhang; Probl. V anonymi auctoris. In sachlicher Beziehung möge bemerkt werden, dass die Tayen der Chinesen und die cuttuca d'hyaya der Inder durchaus nicht dasselbe sind, wie dies z. B. in der Geschichte der Mathematik des Alterthums von Hankel behauptet worden ist. Die Cuttuca ist nämlich die Methode der Kettenbrüche,

b. Altegyptische Litteratur.

Ahāmesu (um 1700 v. Chr.) verfasste unter der Regierung des Königs Ra-ā-us den Papyrus Rhind des Brit. Mus. Derselbe ist übersetzt und erklärt von dem Heidelberger Aegyptologen Prof. Dr. Aug. Eisenlohr unter dem Titel: Ein mathematisches Handbuch' der alten Aegypter. Bd. I. Commentar. Bd. II. Tafeln. Leipzig 1877. Hierin kommt unter Anderem*) auch die Behandlung von Gleichungen ersten Grades vor (Hau-Rechnung).

---

die Tayen dagegen mit der Congruenzmethode von Gauss (Disqu. arithm. § 32—36) identisch, wie ich früher in zwei Aufsätzen nachgewiesen habe, nämlich: Ueber die Algebra der Chinesen (Zeitschrift für Math. u. Phys. XIX. S. 270. 1874) und: Vergleichung der indischen Cuttuca und der chinesischen Tayen-Regel (Sitzungsberichte der math.-naturw. Section in der Verhandlungen der Philologenversammlung zu Rostock 1875).

Kap. IV. Von den Quadraten, Rechtecken, Dreiecken und Kreisen. (56 Seiten.) Dies Kapitel enthält das Wichtigste aus der elementaren Algebra: die Lihn-Tafel, die Ausziehung der Wurzeln, die Auflösung der quadratischen Gleichungen. Diese letzteren werden unter der Form des Inhalts eines Rechtecks betrachtet, also $x(x+a)=s$, und unter der Bezeichnung der Aufgabe: Auflösung der Quadrate mit Hinzufügung einer Länge. Der Wurzelwerth wird sowol durch den Versuch ermittelt, als auch durch directe Auflösung nach der Formel

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{s + \frac{1}{4}a^2}.$$

In demselben Kapitel werden Regeln angegeben sowol über die Bestimmung der Seite des Würfels, als auch des Würfels mit der Hinzufügung einer Länge, d. h. Auflösungen kubischer Gleichungen mit commensurabeln Wurzeln in drei Aufgaben, welche die Auflösung folgender Formen fordern:

$$(x+a)x^2 = A, \quad (x+a)^2 x = A \quad \text{und} \quad x^2(x-a) = A.$$

Kap. V. Von der Ausmessung der Körper. (16 Seiten.) Darin die Pyramidalzahlen und die arithmetischen Reihen.

Kap. VI. Von den Proportionen. (9 Seiten.)

Kap. VII. Von positiven und negativen Grössen. (12 Seiten.) Darin Aufgaben, welche auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen.

Kap. VIII. Von den Verhältnissen mehrerer Unbekannten. (8 Seiten.) Viele Regelverse.

Kap. IX. Vom rechtwinkligen Dreieck. (20 Seiten.) Darin der Pythagoräische Lehrsatz und als Anwendung desselben auch die bekannte Aufgabe vom gebrochenen Bambus.

*) Dem Inhalte nach zerfällt der mathematische Papyrus Rhind in folgende fünf Theile:

I. Theil: Arithmetik.
  Erster Abschnitt. Theilung der Zahl 2.
  Zweiter Abschnitt. Vertheilung von Broden.
  Dritter Abschnitt. Ergänzungsrechnung der Brüche.
  Vierter Abschnitt. Die Haurechnung (Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten).
  Fünfter Abschnitt. Theilungsrechnung.
II. Theil. Volumetrie und Kreisrechnung.
III. Theil. Flächenrechnung.
IV. Theil. Berechnung der Pyramiden.
V. Theil. Sammlung von Beispielen aus dem praktischen Leben.

c. Indische Litteratur.

Aryabhatiya (geb. 476 n. Chr.)*), indischer Astronom und Mathematiker, schrieb ein Lehrbuch der Arithmetik und Astronomie. Dasselbe ist nach zwei Handschriften in London mit dem Commentar Bhatadîpikâ von Paramâdîçvara im Sanskrit veröffentlicht von H. Kern. Leyden 1874.

Brahmegupta (geb. 598), indischer Astronom und Mathematiker, schrieb ein Lehrbuch der Arithmetik und Astronomie, von welchem das zwölfte Kapitel über Arithmetik und Geometrie, das achtzehnte Kapitel von der Algebra handelt.

---

*) Nach den Forschungen des indischen Gelehrten Dr. Bhâu Dâjî wurden geboren: Aryabhatiya 476 n. Chr., Brahmegupta 598 und Bhâskăra Âchârya 1114. Von dem Aryabhatiya möge hier das Inhaltsverzeichniss des zweiten Theiles folgen.

Abschnitt über die Berechnung.

1. Aussage.
2. Benennung der zehn Stellen Zählenden.
3. Wesen des Quadrats und Wesen des Kubus.
4. Die Quadratwurzel.
5. Die Kubikwurzel.
6. Berechnung der drei Seiten eines Dreiecks und Berechnung der drei Seiten eines Würfels.
7. Berechnung der Kreisfläche und Berechnung der Kugel.
8. Flächenberechnung der unebenen Vierecke.
9. Herbeiführung der Berechnung aller Flächen und Erkenntniss der gleichartigen Sehnen der Hälfte des Durchmessers.
10. Umfang des paridhi des Kreises.
11. Methode der Bestimmung der Sehnen.
12. Herbeiführen der Namen der Sehne und der Sätze einer Gleichung (?).
13. Bewirken der Bestimmung des Kreises u. s. w.
14. Bestimmung der Hälfte des Durchmessers eines Kreises.
15. Bestimmung des Schattens.
16. Bestimmung des äussersten Grades und Bestimmung der Seite einer Fläche.
17. Bestimmung der Diagonale und Bestimmung der halben Sehne.
18. Doppelte Bestimmung des sinus versus.
19. Bestimmung der Kettenberechnung.
20. Bestimmung der Periode einer Progression.
21. Bestimmung der Addition.
22. Bestimmung der Addition vom Quadrat und Kubus.
23. Aufweisen der Bestimmung des Zusammenbringens zweier Zahlen.
24. Doppelte Bestimmung einer Zahl durch Zusammenbringen der Zahl.
25. Bestimmung der Wurzelberechnung.
26. Die Regeldetri.
27. Theile auf den gleichen Nenner zu bringen.
28. Inversion.
29. Bestimmung des Ueberschusses der Menge.
30. Das Zeigen des Werthes unbekannter Grössen.
31. Bestimmung des Abschnittes der Summe der Erkenntniss durch den Inhalt der Erkenntniss.

32. 33. Berechnung des Vollziehens der Kudda.

Bhâskăra-Achârya (1141 — 1225)*) aus Biddur in Dekan, Astronom und Mathematiker, verfasste ein Buch genannt die Lilavati (die Hehre, Erhabene) über Arithmetik, sowie ein Buch genannt Bija ganita (Algebra der Gleichungen).

Brahmegupta and Bhascara**), Algebra with arithmetic and mensuration, from the sanscrit translated by H. T. Colebrooke. London 1817.

Ganesa, indischer Astronom, schrieb einen Commentar zur Lilavati um das Jahr 1545.

Fyzi schrieb 1587 auf Befehl des Königs Akber eine persische Uebersetzung der Lilavati aus dem Sanscrit.

Ata Allah Ruschidi ben Ahmed Nadir stellte eine persische Uebersetzung der Bija ganita von Bhascara her. Diese Uebersetzung ist datirt 1044 H. (1634 n. Chr.) und dem Schah Jehan gewidmet. Sie besteht aus einer Einleitung, enthaltend die Arithmetik und unbestimmte Analytik, sowie fünf Bücher, enthaltend Aufgaben aus der bestimmten und unbestimmten Analytik.

Strachey, Edward, Uebersetzung und Erklärung der Bija ganita nach der persischen Uebersetzung von Atah Allah Ruschidi in englischer Sprache. London 1813. Nebst einem Anhang enthaltend Notizen von Mr. Davis über die Bija ganita.

Taylor, J., Translation of the Lilavati. Bombay 1816. (Man vergleiche Libri, Histoire des sciences mathém. I. p. 133.)

Buchner, De algebra Indorum. Elbing 1821.

---

*) Das Attribut Âchârya bedeutet soviel als Doctor philosophiae. (Man vergleiche Journal asiatique. New Ser. I. 392—418. London 1865.)

**) Dieses berühmte Werk enthält die Lilavati und die Bija ganita; ausserdem das zwölfte und achtzehnte Buch der Astronomie von Brahmegupta. Den interessantesten Theil bildet für uns die Bija ganita, deren Inhalt hier ausführlicher mitgetheilt wird.

Kap. I. Die arithmetischen Operationen.
- Erster Abschnitt. Einleitung.
- Zweiter Abschnitt. Rechnung mit positiven und negativen Grössen.
- Dritter Abschnitt. Die Rechnung mit Null.
- Vierter Abschnitt. Arithmetische Operationen mit Buchstabengrössen.
- Fünfter Abschnitt. Rechnung mit irrationalen Grössen.

Kap. II. Unbestimmte Gleichungen ersten Grades (Cuttuca d'hyaya).

Kap. III. Unbestimmte Gleichungen zweiten Grades (Varga pacriti).
- Erster Abschnitt. Methode der kleinsten Wurzel.
- Zweiter Abschnitt. Die cyklische Methode.
- Dritter Abschnitt. Vermischtes.

Kap. IV. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten.

Kap. V. Quadratische Gleichungen (Mad'hyama harana).

Kap. VI. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Kap. VII. Unbestimmte Gleichungen höherer Grade.

Kap. VIII. Rectanguläre oder zusammengesetzte Gleichungen.

Kap. IX. Schluss.

d. Griechische Litteratur.

Hero der Aeltere in Alexandrien (um 100 v. Chr.) schrieb „Mensurae", worin die sogenannten „Brunnenaufgaben" vorkommen.

Diophantos in Alexandrien (um 360 n. Chr.) schrieb ἀριθμητικῶν βιβλία ῑγ; also dreizehn, während wir jetzt nur noch sechs besitzen. Nach Abulfarag lebte Diophant unter der Regierung des Julianus Apostata. Sein Werk wurde mehrfach ins Arabische übersetzt. Nach Ibn Abi Oseibia schrieb Kosta ben Luca (900) ein Buch enthaltend die Uebersetzung des Diophant über aldjebr w'almokabalâ. Ferner verfasste nach Abulfarag und dem Tharikh-al-Hokma (Chronik der Gelehrten) von El Kifti der Mathematiker Abul Wafa (970) eine Uebersetzung oder einen Commentar zu Diophant's Algebra. Die Arithmetik enthält die Auflösung der bestimmten Gleichungen ersten Grades, sowie der unbestimmten Gleichungen des zweiten und höherer Grade. Unzweifelhaft war dem Diophant auch die Auflösung der bestimmten quadratischen Gleichungen bekannt. Da aber diese sowie die unbestimmten Gleichungen ersten Grades fehlen, so hat allem Anscheine nach die Arithmetik in ihrer jetzigen Gestalt einen Defect und zwar zwischen dem ersten und zweiten Buche, wenigstens schon seit der Zeit, als Maximus Planudes (1350) seine Scholien schrieb. Im Uebrigen findet sich über Algebra bei den Griechen nichts vor. Man vergleiche Bachet, Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Griechische Ausgabe mit lateinischem Commentar. Paris 1621. Montucla, Histoire des Mathémat. T. I. 349; Nesselmann, Die Algebra der Griechen. S. 45—49, 274; Woepcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathémat. p. 34, und L'Algèbre d'Omar Alkhayyamî, p. VIII. Paris 1851; Zeitschrift für Mathem. und Phys. IX. 330. (1864), X. 499 (1865).

e. Arabische und persische Litteratur.

Abu Abdallah Mohammed ben Musa al-Khowarizmi schrieb: Kitab al mokhtessar fi hisab aldjebr w'almokabalâ. Der Verfasser ist der Mathematiker und Bibliothekar des Khalifen Al-Mamun; er schrieb ein Buch über die indische Rechenmethode (Algorithmus) und ein Buch über die Algebra der Gleichungen. Dasselbe ist nach einem Oxforder Ms. herausgegeben unter dem Titel: Abu Abdallah Mohammed ben Musa al-Khowarizmi algebra, edited and translated by F. Rosen. London 1831, und Rome 1866. Diese Schriften sind nach Sédillot um 830 n. Chr. nach indischen Vorlagen verfasst. Nach andern Angaben soll der Khowarizmier schon früher gestorben sein: 812 nach Cantor (Zeitschrift für Math. u. Phys. I. S. 73); 820 nach Grunert's Arch. Bd. 46. Litterar. Berichte. Man vergleiche auch: Woepcke, Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en l'Occident. pg. 16—19, 57. Rome 1859; Libri, hist. des sciences mathémat. I. pg. 131 (3); Rosen, p. 11. des englischen und pgg. 55—64 des arabischen Textes (geschrieben um 1350); Zeitschrift für Math. u. Phys. X. S. 486—487. 1865.

Maumeti filii Moysi alchoarismi, liber de algebra et almuchabala. Ms. lat. in Libri's Histoire des sciences mathématiques p. 227. Note IV. Diese lateinische Uebersetzung ist älter als das Oxforder Ms., welches Rosen übersetzt hat und nur halb so umfangreich. Man vergleiche Montucla, Hist. des mathémat. I. 403; Cardani, ars magna cap. I.

Abul Wafa Mohammed ben Mohammed Al-Buzdjani, oder nach Nesselmann S. 274 36) Mohammed Ibn Mohammed ibn Yahyâ ibn Ismaîl ibn Al-abbâs Abu'lwafa Al-Bûzjâni (940—998), aus Buzjan in Persien, seit 959 Studiosus und dann Professor der Mathematik in Bagdad, schrieb 1) Commentar zur Algebra des Diophant; 2) Commentar zu den Werken von Al-Khowarizmi über Algebra; 3) Commentar zur Algebra des Hipparch (160 v. Chr.); 4) Ueber das Verfahren die Seite des Kubus und des Biquadrats, sowie der Ausdrücke, welche aus beiden zusammengesetzt sind, zu finden. (Geometrische Construction der Gleichungen: $x^3 = a$, $x^4 = a$, $x^4 + ax^3 = b$.) Man vergleiche: Woepcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathémat. chez les Orientaux, p. 34. 36. Paris 1855.

Jacub ben Isaac Abu Jussuf Al-chindi Al-Basri: De quantitate relativa sive de algebra. Bassora (850) Un traité sur l'arithmétique des Hindus. Mont. Hist. des mathémat. I. 406.

Abu Abdallah Almahani in Bagdad (um 860), Commentar zum zweiten Buche des Archimedes, die geometrische Auflösung kubischer Gleichungen betreffend. Woepcke, Omar. Add. B. Gleichung von Almahani: $x^3 + c = ax^2$.

Abul Hassan ben Alhassan ben Alhaitham († 1038), Sur une solution mécanique des équations cubiques. Woepcke, Omar, Add. A. Omar nennt ihn Abu Ali Ibn Alhaitham. Man vergl. Zeitschr. für Mathematik und Physik. 1865. S. 459.

Abul Sahl Vidjan ben Vastem (Rustem) Alkuhi (um 980), Traité des additions au second livre d'Archimède. Woepcke, Omar. Add. B et C. Er löst die Gleichung von Almahani

$$(a - x) : \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{c^2} : x^2 \quad \text{mit der Bedingung} \quad 4a^3 > 27c.$$

Vergl. Zeitschr. für Math. und Phys. 1865. S. 480.

Abu Bekr Mohammed ben Alhazan Al-karkhi (um 1000), Traité d'algèbre, Extrait du Fakhri, édit. par Woepcke. Paris 1853. Man vergl. Woepcke, sur l'introd. pg. 53. 64.

Abul Djud Moh. ben Allaith (1038), Résolution d'une équation du IV$^{\text{me}}$ degré. Omar. Add. D.

— Abhandlung über die Auflösung der kubischen Gleichungen.

Omar ben Ibrahim Al-khayyami de Nichabur († 1123), Mémoire sur les démonstrations des problèmes de l'algèbre, publ. et trad. par Woepcke. Paris 1851. Dies berühmte Werk ist um 1080 verfasst und enthält einen vollständigen Cursus der algebraischen und geometrischen Auflösung der quadratischen, sowie der geometrischen Auflösung der kubischen Gleichungen mittels der Kegelschnitte. Man vergl. Woepcke, Sur l'algèbre d'Omar. Crelle's Journal XL.; Libri, Hist. des sciences mathémat. I. pg. 268. 1835; Sédillot, Journ. asiat. 1834. Es ist unbegreiflich, dass Suter diese Uebersetzung unbekannt geblieben ist (Gesch. der math. Wiss. I. Zürich 1873. S. 139).

Omar ben Ibrahim, algebra cubicarum aequationum sive de problematum solidorum resolutione. Arab. Ms. der Leydener Bibl. nach Bossut. I. S. 296. Zuerst wurde dies Werk, welches mit dem vorhergehenden identisch ist, citirt von Meerman (1742) in seinem Specimen calculi fluxionalis. Leyden. Dann erschien ein Fragment von Sédillot in den Notices et extraits des manuscrits de la bibl. roy. Tom. XIII. pg. 130—136. 1837.

Abraham ben Esra (1093—1168), Liber augmenti et diminutionis (aldjebr w'almokabala), vocatus „numeratio divinationis" ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum, qui Indorum dictus est, composuit. Libri, Hist. des sciences mathémat. I. pg. 269. Note VI. (1835.)

Das indische Buch ist leider verloren gegangen und in der uns bekannten indischen Litteratur findet sich von der darin gelehrten Rechnung keine Spur. Diese numeratio divinationis (hisab al-mafrud) ist die berühmte regula falsorum (hisab al-khataayn) oder regula lancium (aml bi'l kaffat, Methode der Wagschalen) zur Auflösung der Gleichungen ersten Grades. Man vergleiche Schnitzler, Zeitschr. für Math. und Phys. von Schlömilch und Cantor. IV. S. 383. 1859; Steinschneider ibid XII. S. 20. 1867; Terquem, Notice sur un Ms. hebreu du traité d'arithmétique. Journ. mathém. VII. 1841; Drobisch, de Joanne Widmanno Egerano. Leipzig 1840.

Ahmed ben Mohammed Othman Alazadi Abul Abbas al-Marokeschi, ibn Albanna (Sohn des Architecten), Talkhys ou traité d'analyse des opérations du calcul (en 1222), trad. et publ. par Aristide Marre. Rome 1864. Atti del Acad. pontif. XVII.; Zeitschr. für Math. und Phys. X. 1865 in der Litteraturzeitung S. 26; auch in Grunert's Archiv CLXX. Litter. Berichte; ferner Journ. mathém. X.; wo es heisst: Abul Abbas Ahmed ibn Albannâ al Marokeschi, Talkhys amâli al hissâb, copié par Fr. Woepcke.

Mohammed filii Haladi, filii Tahari, filii Haladdini Al-Hagian, liber de scientia aequationis. Ms. arab. Scaligeri. (Libri Hist. I. pg. 217.)

Muaffec Al-Bagdadi, kitab aldjebr w'hisab alhindi (Buch über Algebra und indische Arithmetik).

Abu Abdallah Mohammed ben Omar ben Badr, algebrae sive comparationis aequationum epitome. (Montucla, Hist. I. p. 404.)

Abul Hassan Ali ben Mohammed Al-Kalçadi († 1477 s. 1486), s. Ali ben Mohammed ben Mohammed ben Ali Al-Koraichi, Alkalçadi Albasthi, Traité d'arithmétique trad. par Woepcke dans les Recherches sur plusieurs ouvrages de Leonard de Pise. Rome 1859. (Hisab al-khataayn et aldjebr ou'al mokabala voir Part. IV. chap. II.—IV.)

— Commentar zum Talkhys von Ibn Albanna.

. . . . . . (Anonymus), Construction d'une équation du quatrième degré. Woepcke, Journ. mathém. XXVIII. pg. 57. 1863; Omar par Woepcke. Add. D. pg. 115—116.

Behâ-Eddîn al-Aamoulî, Kholaçat al-hissab ou quintessence du calcul, trad. par Aristide Marre. Rome 1864. Man vergleiche Zeitschr. für Math. u. Phys. X. Litteraturzeitung S. 42. 1865.

Behâ-Eddin Mohammed ben Alhossain al-Amuli (1547—1622), Khilâzat al-hissâb (Essenz der Rechenkunst). Arab. und Deutsch von Nesselmann. Berlin 1843.

Buhae ood-Deen of Amool*) in Syria, The Kholasut ool-hisab, a compendium of arithmetic and geometry in the arabic language, with translation into Persian and Commentary by the late Muolawee Ruoschun Ulee of Juonpoor. To this work is added the following:

Nujm-ood-Deen Ulee Khan, head Qazee, to the Sudr Deewanee and Nizamut Udalut etc., Treatise on algebra. Revised and edited by Tarinee Churun Mitr, Muoluwee Jun Ulee and Ghoolam Ukbur. Calcutta 1812.

Léon Rodet, l'algèbre d'Al-khârizmi et les méthodes indiennes et grecques. Journ. asiat. Sér. VII. Tom. XI. Paris 1878.

f. Litteratur der älteren italienischen Schule. (1100—1600.)

Gherardo Cremonese, Algebra, publ. von Boncompagni (Atti dell' Acad. Roma 1851; Compt. rend. XXXIV. 1852).

Fibonacci s. Leonardo Pisano, liber abaci, um 1202 verfasst und 1228 vermehrt herausgegeben. Es ist dies das erste von einem Christen geschriebene Werk, durch welches die indisch-arabische Zahlenrechnung (Algorithmus) sowie die Algebra in Europa eingeführt und verbreitet wurde. Man vergleiche Cossali, Origine, transporte in Italia e primi progressi in essa di Algebra. Parma 1797.

Liber abaci di Leonardo Pisano, pubbl. da Baldassare Boncompagni. Roma 1847. (Man vergl. Libri, Hist. des sciences mathémat. T. II. p. 20; Woepcke, Sur l'introd. p. 4 et p. 64.)

Baldassare Boncompagni, Intorno al alcune opere di Leonardo Pisano Notizie; Roma 1854.

Fibonacci (filius Bonacci) ou Leonardo de Pise, essay de déterminer la nature de la racine d'une équation du III$^{\text{ième}}$ degré. Woepcke, Journ. asiatique 1854. Journ. mathémat. par Liouville. Tom XIX. pg. 401—406. 1854; XX. pg. 54—62. 1855.

Canacci (um 1350), Ragiomento di algebra. Florenz.

---

*) Nähere historische Notizen über Behâ-Eddîn gibt Strachey im 12. Bande der Asiatic Researches (Calcutta 1816. pg. 166) und der Paraphrast des Khilazat, Maulewi Ruschen Ali, ein mit Strachey bekannter Indischer Gelehrter. Beha-Eddin war geboren in Amul und gestorben in Ispahan. Seine Schrift steht in Vorderasien, besonders in Indien in grossem Ansehen und ist dort Schulbuch und nach Strachey's Versicherung das einzige Werk über Algebra, welches dort gelesen wird. Man vergl. die Uebersetzung von Nesselmann S. 74.

Dagomari s. dall' Abbaco († 1365), schrieb ein Werk über Arithmetik und Algebra. Florenz.

Lucas Paccioli de Burgo, Summa di Aritmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita. Venedig 1494. (Kästner, Gesch. d. Math. I. S. 70.)

Scipione dal Ferreo, Prof. der Math. in Bologna (1496—1526), erfand 1515 die algebraische Auflösung der kubischen Gleichungen, ohne sie zu veröffentlichen. Cardanus in libro de arte magna sive de regulis algebraicis, Norimbergae 1545 edito, cap. I. pag. 5 „temporibus nostris, ait, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit, rem sane pulchram et admirabilem. — Man vergl. Gherardi, Beiträge zur Geschichte der mathematischen Facultät der Universität Bologna in Grun. Arch. LII. S. 143 u. flg. Ferner: Note sur Ferro Scipione par Boncompagni. Nouv. ann. math. XXI. 1862.

Francesco Ghaligai, Summa di aritmetica. Florenz 1521. (Libri, Hist. III., pg. 145.)

Christoff Rudolff von Jawer, die Coss. 1524. Neu edirt und commentirt von Stifel. 1553. Man vergl. Nesselmann, Geschichte der Algebra bei den Griechen. S. 57. 45).

Joh. di Regio Monte (Regiomontanus) (1436—1476): De triangulis omnimodis libri V. Norimbergae 1533.

Gemma Frisius, arithmeticae practicae methodus facilis. Antwerpae 1540.

Michael Stifel (1487—1567), Augustiner, Arithmetica integra, die vollkommene Rechenkunst, mit einer Vorrede von Ph. Melanchthon. Norimb. 1544.

— Die Coss Christoff Rudolff's, mit schönen Exempeln der Coss gebessert. Königsberg 1554.

Geronimo Cardano (1500—1576) Dr. med. und Prof. der Math. und Medicin in Mailand und Bologna: Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus. Norimb. (Mediolan.) 1545. Man vergl. auch Cardani Opera, X. vol. fol. Lugd. 1663.

Nicolo Tartaglia (1506—1559), Lehrer der Math. in Venedig, Quesiti ed invenzioni diverse. Venezia 1546.

Ludovico Ferrari (1522—1565), Freund und Schüler Cardans, Prof. der Math. zu Mailand und Bologna, erfand die algebraische Auflösung der biquadratischen Gleichungen, ohne die Methode selbst zu veröffentlichen. Man vergl. 39. Kap., Regel II. der Ars magna von Cardanus und die Algebra von Bombelli.

Scheubelius (Scheybl), Prof. der Math. in Tübingen: Algebrae compendiosa facilisque descriptio. Parisiis 1551.

Peucer, Prof. der Math. in Wittenberg: Logistice regulae arithmeticae quam cossam et algebram quadratam vocant. Viteb. 1556.

Nuñez (Nonius) Prof. der Math. in Coimbra: Livro de Algebra em Arithmetica e Geometrica. Antwerpen 1567.

Rafaelo Bombelli, Ingenieur aus Bologna: L'algebra parte maggiore dell' Aritmetica divisa in tre libri. Bologna 1572.

Gosselin, Pierre, aus Cahors: De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur, libri IV. Paris 1577.

g. Litteratur der abendländischen Völker bis zur Gegenwart. (1600—1878.)

Reimarus Ursus (Reimers) († 1600): Arithmetica analytica vulgo Cosa sive Algebra. Frankfurt a. d. O. 1601.

Faulhaber, Joh., Arithmetischer cubiccossicher Lustgarten, mit neuen Inventiones gepflanzet. 1604.

— miracula arithmetica etc. Augsburg 1622.

— Academia algebra, darinnen die mirakulosischen Inventiones zu den höchsten Cossen weiteres continuiret und proficirt worden. Ulm 1631.

Rothe, Arithmetica philosophica oder schöne neue und wohlgegründete künstliche Rechnung der Coss oder Algebra. Nürnberg 1607.

Vieta, Franz (1540—1603): Isagoge in artem analyticam. Tours 1591. Seine Opera mathem. edirt von Fr. v. Schooten Lugd. Batav. 1646, enthalten: I. Isagoge etc. II. Ad logisticen speciosam notae priores. IV. De aequationum recognitione et emendatione libri duo, publ. zuerst von Alexander Anderson, Paris 1615. Tract II. cap. VI et VII.

Harriot, Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas. London 1631. (Op. posthum.)

Cartesius (Descartes) (1596—1650): La géometrie. Leyden 1637. Paris 1664. p. 89. Lateinisch mit Commentar von Fr. v. Schooten jun. Lugd. Batav. 1649. Ausgabe von Beaune. Frankf. a. Main 1695. — Geometria a Ren. des Cartes: De natura aequationum. Lib. III. pg. 92. Amstelodami 1683.

Franc. v. Schooten, De cubicarum aequationum resolutione. App. Comment. in Geom. Cartesii p. 345.

Renaldini, Opus algebraicum, in quo Ars analyticae quam obscure Vieta litteris mandavit, traditur. Anconae 1644.

— Ars analytica mathematatum. Florent. 1655.

Hudde, De reductione aequationum epist. prima ad Fr. v. Schooten, publ. in Cartesii geom. edit. a Schooten. 1659.

Brasser, Regula Coss of Algebra, zynde de allerkonstriksten Regel om het onbekende bekent te maken. Amsterdam 1663.

— Neu vermehrter arithmetischer Raritätenkasten, in welchem die curieusen regula falsi, coeci und coss oder Algebra gezeigt werden. Leipzig 1716.

Caravaggio (1617—1688), Methodus resolvendi omnes aequationes cubicas et quadrato-quadraticas. Mediol. (ohne Datum).

De la Hire, La construction des équations analytiques. Paris 1679.

Baker, New discovery of the construction of all Equations etc. London 1684.

Tschirnhaus, Graf von (1651—1708), Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione per D. T. Act. Erudit. II. 204. Lipsiae 1683.

Halley, De constructione aequationum III^{ae} vel IV^{ae} potestatis unica data parabola ac circulo. Phil. Trans. 1687.

— De numero radicum in aequationibus solidis ac biquadraticis. Ibid.

Roberval, De recognitione aequationum. — De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione. Anc. Mém. Paris. T. VI. 1693.

Rolle, Traité de l'algèbre. Paris 1690.

— Méthode pour resoudre les égalités de tous les degrés, qui sont exprimés en termes généraux. Anc. Mém. Paris T. X.

— Eclaircissements sur la construction des egalités. Mém. Paris 1708. 1709. 1711.

Raphson, Analysis aequationum universalis s. methodus ad resolvendas aequationes algebraicas. Londini 1697.

Beaune, De aequationum natura, constitutione et limitibus opusc. duo. Francf. 1695.

Leibnitz, Epist. ad Wallisium. Wallisii opera T. III. Epist. 27. 1698.

Newton, De conchoide Nicomedis ad constructionem radicum aequationum cubicarum et biquadraticarum adhibenda. In App. Arithmeticae universalis. (Edit. Castillon.) pg. 237. Amstelodami 1761. Zuerst publicirt von Whiston. Cambridge 1707.

Moivre, Aequationum quarundam potestatis $2n+1$ resolutio analytica. Phil. Trans. 1707.

— De sectione anguli. Ibid. 1722.

Colson, Aequationum cubicarum et biquadraticarum tum analytica tum geometrica et mechanica resolutio universalis. Phil. Trans. 1707, pg. 2353.

— Comment. to Is. Newton's Method of fluxions. pg. 308. 1736.

Ditton, Additamenta ad algebram Joh. Alexandri. Londini 1709.

Paul Halcke, Die Cardanische Formel in: Mathematisches Sinnenconfect. Hamburg 1719. Man vergl. Grunert's Archiv. S. 132. 1850.

Cotes, Harmonia mensurarum. Cambridge 1722.

Fagnano, Due maniere di risolvere algebraicamente l'equazioni quadratiche. Raccolta d'opusculi scientifici. XII. 1735.

— Nuovo metodo per risolvere algebraicamente l'equazioni del quarto grado. Ibid. XIII. 1736; XIV. 1737; XV. 1737.

Kästner, Dissertatio de theoria radicum in aequationibus. Lipsiae 1736 (oder 1739?).

— Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere ostendit. Gottingae 1757.

Maclaurin, A treatise of algebra II. chap. 8 (posthum). London 1746.

— Letter concerning equations with impossible roots. Phil. Trans. 1726. 1729.

Nicole, Sur les équations du troisième degré. Mém. Par. 1738. pg. 100.

— Sur le cas irreductible du troisième degré. Ibid. 1738, 1741 et 1743.

Fuchs, Theoria radicum in aequationibus. Lipsiae 1739.

Euler, Conjectatio de formis radicum aequationum cujusvis ordinis. Comm. Petrop. vet. VI. p. 223. 1739.

— De eliminatione. Introd. in anal. infinit. II. Cap. 19. Lausanne 1748.

— De resolutione aequationum cujusvis gradus. Nov. Comm. acad. Petrop. IX (ad annos 1762 et 1763). 1764.

— Observationes circa radices aequationum. Ibid. XIV. 1770.

— Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations. Mém. de Berlin p. 91. 1764.

— Von der Regel des Cardani. Vollst. Anl. zur Algebra. Petersburg 1770. II. Kap. 12. § 155.

— Eine neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Ibid. II. Kap. 15. § 192.

Simpson, Treatise of algebra. London 1745. (Edit II. London 1755. pg. 150.)

Clairault, Elémens d'algèbre. P. V. § VI. sequ. p. 302. Paris 1746.

Fontaine des Bertins, Sur la résolution des équations. Mém. Par. 1747.

Aepinus, Demonstrationes primariarum quarundam aequationibus algebraicis competentium proprietatum. Rostock 1752.

Abhortis, Sam., De methodo generali construendi omnes aequationes algebraicas. Gryphiswaldiae 1755.

Landen, Mathematical lucubrations containing new improvements in various branches of the mathematics. P. VI. London 1755.

Agnesi, Maria Gaetana, Institutioni analitiche ad uso della gioventù Italiana. T. I. § 187. Milano 1748.

Bézout, Mémoire sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une résolution algébrique. Mém. de l'acad. roy. année 1762. Paris 1764.

— Procédé de la méthode pour l'élimination et réflexions qui tendent à l'abréger. Ibid.

— Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues. Mém. Par. 1764.

— Mémoire sur la résolution générale des équations de tous les degrés. Ibid. année 1765. Paris 1768.

— Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779.

Waring, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis. Cantabrigiae 1762. p. 35.

— Meditationes algebraicae. Ibid. 1770. p. 92.

— On the general resolution of algebraical equations. Phil. Trans. 1779.

Zanotti, De radicibus aequationum cubicarum. Comm. Bonon. V. 1767.

Reitz, Nieuwe oplossing der stelkundige vergelykingen (der algebraischen Gleichungen) van de vierde magt, en hierdoor ook van de derde magt (Potenz). Verhandl. Maatsch. Haarlem IX. 1767.

Vivorio, De cubicis et biquadraticis aequationibus tractatus. Verona 1769.

Lagrange, Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mém. de Berlin 1768.

— Sur l'élimination. Abh. der Berl. Acad. XXV. 1769.

— Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouv. mém. des sciences, année 1770 et 1771. Berlin 1772 et 1773. II.

— Leçons d'arithmétique et d'algèbre. (Séances des écoles normales 1794—1795.)

— Sur la résolution des équations algébriques. Note XIII et XIV du Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1798.

Vandermonde, Mémoire sur la résolution des équations. Mém. de l'acad. des sciences. (Année 1771 et 1772.) Paris 1773 et 1774.

Mako von Kerek Gede, De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus. Viennae 1770.

Frisi, De resolutione aequationum tertii gradus. Atti Siena IV. 1771.

Mallet, De reductione aequationis cubicae. Holmiae 1777.

— De aequatione biquadratica. Stockholm 1784.

— Nova analysis aequationum secundi, tertii et quarti gradus. Nov. act. Upsal. III. 1780.

Maseres, A method of extending Cardan's rule for resolving one case of a cubic equation of the form $x^3 - qx = r$ to the irreductible case. Phil. Trans. 1780.

— A conjecture concerning the method by which Cardan's rules for resolving the cubic equation $x^3 + qx = r$ in all cases etc. were probably discovered by Scipio Ferreus. Ibid. 1780.

— Appendix to Frend's Principles of algebra. London 1798.

— Tracts on the resolution of cubick and biquadratick algebraic equations. London 1803.

Riccati, Della risoluzione Cardanica dell' equazione del terzo grado. Nuovo Giorno de Letterati d'Italia. XXIV. 1782.

Canterzani, De aequatione cujus radices sunt binarum datae aequationis radicum summae. Comm. Bonon. VI. 1783.

Schaffgotsch, Ueber die Auflösung verschiedener Gleichungen aller Grade. Abhandl. der Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. I. 1785.

Lejonmarck, Om cubiscka och biquadratiscka equationers jackade och neckade samt imaginaria eller så kallade orimliga rötter. Vetensk. Acad. Handl. 1785 och 1786, Zusätze dazu ibid. 1789.

Bring, Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum. Lundae 1786. Ein Auszug davon in Grun. Arch. XLI. 105. 1864.

Nicolai, Giamb., Della possibilità della soluzione analitica del caso irreducibile. Padova 1791.

Hulbe, Analytische Entdeckungen in der Verwandlungs- und Auflösungskunst der höhern Gleichungen. Berlin und Stralsund 1794.

Bourguet (Dubourget), Opuscules mathématiques contenant de

nouvelles théories pour la résolution des équations de 2^{me} — 4^{me} degrés. Leyde et Paris 1794.

Frend, Principles of algebra. 1796.

Tegman, Regula Cardani et methodus Bringiana radius inveniendi cubicas inter se collatae. II Pt. Lundae 1798.

— De aequatione biquadratica. Ibid. 1798.

— Ett ny sätt, att transformera equationer och finna rötter. (Vetensk. Acad. Handl. 1801.)

Wilson, Essay on the resolution of algebraical equations. Phil. Trans. 1799. pg. 300.

Wood, On the roots of equations. Phil. Trans. 1798.

Lacroix, De la résolution générale des équations. Complém. des Elements d'Algèbre. pg. 24—143. Paris 1804. (I. édition 1799.)

Ruffini, Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazione generali di grado superiore al quarto. 2 Vol. Bologna 1798.

— Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto. Mem. Soc. Ital. X. 1803. XII. 1805. Mem. Istit. Nazion. Italian. I. 1806.

— Riflessioni intorno alla soluzione dell' equazioni algebraiche generali. Modena 1813. I. cap. 1. II. cap. 3.

Gauss, Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii 1799.

— Demonstratio altera. Zach's monatl. Corr. III. 1814.

— Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae 1801.

— Auflösung der binomischen Gleichungen. Abh. der Göttinger Gesellschaft. IV. 1849.

— Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Göttingen 1849.

Malfatti, Dublei proposti a Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado. Mem. Soc. Ital. XI. 1804.

Meredith, A new method of resolving cubic equations. Trans. of the Royal Irish Acad. VII. Dublin 1800.

Poisson, Sur l'élimination dans les questions algébriques. Journ. polyt. cah. II. 1802.

Rewoldt, De aequationum cubicarum solutione. Greifswald 1808.

Prändel, Neue Theorie der reinen und cubischen Gleichungen. München 1809.

Francoeur, Résolution des équations. Cours compl. de math. Liv. V. II. Paris 1809 et 1837.

Guglielmini, Equazione di terzo grado. Bologna 1809.

Hirsch, Meyer, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der Gleichungen I. 142. 1809.

Lea, On the resolutions of the higher equations in algebra. London 1811.

Schönberg, De analyticis nonnullis aequationum formis. Upsalae 1812.

— Prolegomena in modum exprimendi aequationum radices. Ibid. 1816.

Garnier, Discussion des racines et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues. Paris 1813.

Pilatte, Résolution de l'équation du quatrième degré. Ann. de mathém. pures et appliquées II. Nîmes 1812.

Oestmann et Engstrand, De aequationum biquadraticarum resolutione. Greifswald 1815.

Schuster, Neue Auflösungsmethode quadratischer Gleichungen. Salzburg 1816.

Svanberg, In solutionem aequationum algebraicarum disquisitiones. XV. Pt. Upsalae 1817.

— Nouv. considérations sur la résolution des équations algébriques. Nova acta Soc. Upsal. X. 1832.

Cossali, Artificii degli Antichi per evitare nelle soluzioni dei probleme i l'equazioni al secondo grado. Mem. Soc. Ital. XVII. 1815.

— Particulares methodi de cubicae aequationis solutione a Cardano luci traditae. Tipaldo biograph. 1834.

Ekelund, De nexu radicum aequationis cubicae ejusque reductae. Lundae 1820.

Gergonne, Procédé nouv. pour la résolution de l'équation générale de IV^me degré. Ann. de mathém. pures et appl. XIII. Nîmes 1822.

Posselt, Indirecte Auflösung der Gleichungen dritten Grades. Astron. Nachr. III. 1825.

Struve, Ueber die Theorie der cubischen Gleichungen. Programm. Altona 1825.

Legendre, Die Auflösung der Biquadraten betr. in seinem Traité des fonctions elliptiques I. pg. 8. Paris 1825; Exercises de calcul intégral. Paris 1811.

Umpfenbach, Von der directen Auflösung der höheren Gleichungen. Lehrbuch der Algebra. S. 469—503. Giessen 1825.

Lockhart, Resolution of cubic equations. (Nieuwe oplossing van cubick vergelyken door juiste uitdrukkingen.) Haarlem 1825.

— Nieuwe en algemeene leerwyze biquadraten optelossen, waarby de systemas van Descartes en Euler tot biquadraten met derzelven tweede termen worden voortgezet. Haarlem 1833.

— Resolution of equations. Oxford 1837.

Paucker, Mémoire sur la construction géometrique des équations du troisième degré et sur les propriétés principales de ces équations Mém. de l'acad. X. Petersburg 1826.

Abel, N. H., Sur les résolutions algébriques des équations. Oeuvres compl. de N. H. A. par Holmboe II. Christiania 1839.

— Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Christiania 1826 et Crelle Journ. I. 65. 1826.

Hill, Casum irreducibilem solvendi conatus. Crelle's Journ. II. 1827 et VIII. 1831.

— Solutio casus irreducibilis optica s. trisectio et multisectio anguli optica. Grun. Arch. I. 1841.

Christman, Cabbala algebraica sive aequationum quarti gradus et altioris resolutio algebraica. Stuttgart 1827.

Schimmel, Ueber die Auflösung der kubischen Gleichungen mittels der Cardanischen Regel. Glatz 1829.

Caccianino, Sulla impossibilità di risolvere le equazioni generali algebriche superiori al quarto grado. (Atti di Modena 183.)

Galois, Analyse d'une mémoire sur la résolution algébrique des équations. (Férussac, Bullet. sciences mathém. XIII. 1830.) Note sur la même chose, ibid.

— Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. 1831. Liouville, Journ. math. XI. 1846.

Klupsz, Theorie der Gleichungen dritten und vierten Grades. Rastenburg 1831.

Gebauer, Auflösungsmethode biquadratischer Gleichungen. Jahresbericht der Hamb. Gesellsch. zur Verbreit. math. Kenntn. Hamburg 1832.

Brosius, Ueber die cubischen Gleichungen. Düren 1832.

Murphy, On the resolution of algebraical equations. Trans. Cambrigde. IV. 1833.

Richelot, De resolutione algebraica aequationis $x^{257}=1$. Berolini 1833.

Mazzola, Delle equazioni del secondo e del quarto grado. Lodi 1834.

Strehlke, Bemerkung zu der Euler'schen Auflösungsmethode der biquadratischen Gleichungen. Crelle's Journ. XIII. 358. 1834.

Magistrini, De aequationibus algebraicis tum determinatis tum indeterminatis geometrice construendis. Nov. comm. Bonon I. 1834.

Jerrard, Mathematical researches 1834. (Vergl. Phil. Mag. VII. 202. 1835, und Zeitschr. für Math. u. Phys. von Schlömilch IV. Leipzig 1859.

Dirksen, Ueber die Darstellung der Wurzeln einer allgemein algebraischen Gleichung mittels expliciter algebraischer Ausdrücke von den Coefficienten. Ein Versuch, die Unmöglichkeit einer allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen zu beweisen. (In der Akad. gelesen 1834.) Berlin 1836.

Heickel, Anteckningar om algebraiska equationers upplösning, i systematisk sammandrag framställda. Helsingfors 1835.

Hochenegg, Graf von, Theorie zur allgemeinen Auflösung der bestimmten algebraischen Gleichungen nebst kritisch analytischen Untersuchungen der bis jetzt bekannten algebraischen und Aufstellung neuer wissenschaftlich begründeter Auflösungen. Wien 1835.

Hartmann von Franzens-Huld, Theorie der Gleichungen zweiten Grades. Wien 1836.

Förstemann, Ueber die Auflösung quadratischer, cubischer und biquadratischer Gleichungen. Progr. Danzig 1836.

Burg, Die Auflösung algebraischer Gleichungen. Wien 1837.

Burg, Die Construction der Gleichungen des dritten und vierten Grades. Lehrbuch der höh. Math. Wien 1833.

Sédillot, Lösung der Gleichungen dritten Grades bei den Arabern. (Notices publ. par l'acad. d. Inscriptions T. XIII. 1837.)

Francoeur, Les équations du quatrième degré. Cours compl. de mathém. pure. Paris 1837. (I. edit. 1809.)

— Die Construction der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Ibid. Tom. I. 350. 492.

Collins, Zur Theorie der symmetrischen Gleichungen. Bull. scient. III. 1838.

Murphy, A treatise on the theory of algebraical equations. London 1839.

Badano, Nuove ricerche sulla risoluzione generale delle equazioni algebriche. Genova 1840.

Ampère, Sur une résolution de l'équation du quatrième degré. Corr. math. et phys. par Quetelet. IX. 147. 1836. Uebersetzt in Grun. Arch. I. 16. 1841.

Bridge, A compendious treatise on the theorie and solution of cubic and biquadratic equations and of equations of the higher orders. London 1840.

Sylvester, A method of determining the derivatives from two equations of any degree. Phil. Mag. 1840.

— An essay on canonical forms. London 1851.

Vittorio de la Casa, Sulle equazioni di terzo e quarto grado. Padova 1840.

Hymers, A treatise on the theorie of algebraical equations. II. edit. Cambridge 1840.

Paalzow, Die Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten. Progr. Prenzlau 1841.

Somoff, Théorie des équations algébriques déterminées (russisch). Moscou 1841.

. . . . (?) Note on the theory of the solution of cubic and biquadratic equations. Cambr. math. Journ. Nr. XV. 1842. (Der Name des Verfassers ist mir unbekannt.)

Boole, Die Invarianten betr. Cambr. math. Journ. IV. p. 208. 1845.

Young, J. R., The analysis and solution of cubic and biquadratic equations. London 1842.

Cockle, On a solution of cubic equations. Cambr. math. Journ. XII. pg. 248. 1841. (Uebersetzt in Grun. Arch. I. 254. 1841.) Ibid. XIX. 1848.

Perkins, A Treatise on Algebra. Utica (United States) 1842.

Casinelli, De aequationum algebraicarum resolutione. Nov. Comm. Bonon. V. 1842. VII. 1844.

— Disquisitiones variae super resolutionem nonnullarum aequationum algebraicarum praesertim quinti gradus. Nov. Comm. Bonon. VI. 1844.

Casinelli, De aequationibus algebraicis, quarum radices constant ex quatuor elementis. Ibid. VIII. 1846.

— De formis radicum aequationum algebraicarum. Ibid.

Bretschneider, Ueber die Auflösung der cubischen Gleichungen. Grun. Arch. IV. 410. 1844.

Colombo, Nuova formola per la soluzione delle equazioni del secondo grado. Milano 1844.

Hesse, Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht. Crelle's Journ. XXVII. 1844.

— Transformation einer beliebigen homogenen Function vierten Grades von zwei Variabeln durch lineare Substitutionen neuer Variabeln, in die Form die nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält. Crelle's Journ. XLI. pg. 243. 1851.

Eisenstein, Allgemeine Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade. Crelle's Journ. XXVII. S. 81. 1844.

— Eigenschaften und Bezeichnungen der Ausdrücke, welche bei der Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichungen erscheinen. Ibid. S. 319.

Lobatto, Sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré. Journ. math. par Liouville pg. 177. 1844. (Ein Auszug findet sich in Grun. Arch. V. 417. 1844.) Die Aufsätze beziehen sich auf die vorher erwähnte Schrift von J. R. Young. London 1842.

Granlund, Solutio aequationis generalis tertii gradus. Upsalae 1846.

— Methodus aequationes solvendi in functionibus symmetricis partialibus nixa. Diss. acad. Upsalae 1847. Grun. Arch. XXIII. S. 489. 1854.

Malmstén, In solutionem aequationum algebraicarum disquisitio. IV. Pt. Upsalae 1845. Crelle's Journ. XXXIV. 1847.

Dippe, Die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen dritten und vierten Grades. Grun. Arch. VII. S. 149 u. 334. 1846.

Blomstrand, De methodis praecipuis universales aequationum algebraicarum solutiones inveniendi commentatio academica. Lundae 1847.

Verdam, Bidrage tot de Geschiedenis der algemeene oplossing van de cubische aequation. Het Nederl. Instituut. VI. 1847.

Luther, Ueber die Factoren der algebraisch lösbaren irreductibeln Gleichungen sechsten Grades. Crelle's Journ. XXXVII. 1848.

Andersen, Ueber den Abel'schen Beweis der Unauflösbarkeit algebraischer Gleichungen höherer Grade als des vierten. Breslau 1848.

Schlesicke, Ueber die Auflösungen der Gleichungen dritten Grades. Grun. Arch. XI. S. 345. 1848.

— Ueber die Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Ibid. XII. S. 166. 1849.

— Eine allgemeine Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Ibid. XVI. S. 58. 1851.

Blanken, H. van, Essai sur la résolution des équations. Zwolle 1849.

Franke, Die Gleichungen des vierten Grades. Elemente der Zahlenlehre. S. 406. Leipzig 1850.

Ley, Ueber einige besondere Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades. Köln 1850.

Mossbrugger, Zur Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades. Grun. Arch. XIV. S. 113. 1850.

— Untersuchung über die Theile der Wurzeln einer Gleichung des n^{ten} Grades, nebst deren Anwendung auf die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades. Grun. Arch. XXVIII. S. 205. 1857.

Scheffler, Allgemeine Auflösung der Gleichungen. Situationskalkül. S. 398. Braunschweig 1851.

Grunert, Ueber den Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen dritten Grades. Grun. Arch. V. S. 1 u. 428. 1845.

— Ueber Paul Halcken's Darstellung der gewöhnlichen Darstellung der Wurzeln cubischer Gleichungen durch die Cardanische Formel. Ibid. XIV. S. 132. 1850.

— Einige Bemerkungen über die Gleichungen dritten Grades. Ibid. XXII. S. 347. 1854.

— Zur Auflösung quadratischer und cubischer Gleichungen. Ibid. XXIV. S. 113. 1855.

— Die Auflösung der Gleichungen des fünften und sechsten Grades durch Construction nach Cartesius. Ibid. XXVII. 1856.

— Ueber eine von transcendenten Operationen nicht abhängige Formel zur Auflösung des irreductibeln Falles bei den cubischen Gleichungen. Ibid. XXX. S, 135. 1857.

— Ueber Lagrange's Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichungen, in denen das zweite Glied nicht fehlt. Ibid. XXXI. S. 477. 1858.

— Neue Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Ibid. XXXIX. S. 198. 1862.

— Die allgemeine Cardanische Formel. Ibid. XL. S. 246. 1863.

— Allgemeine Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Ibid. S. 394.

— Die Methoden von Tschirnhaus und Jerrard zur Transformation der Gleichungen. Ibid. S. 214.

Plana, Mémoire sur une nouvelle solution algébrique de l'équation à deux termes $x^n - 1 = 0$; n étant une nombre première. Mem. Torino. Ser. II. T. XI. 1851.

Björling, Ueber eine Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Grun. Arch. XIX. S. 299. 1852.

— Méthode pour la résolution algébrique de certaines espèces d'équations d'un degré quelconque. Ibid. XXI. 1853. (Extrait des Trans. de l'acad. de Stockholm 1852.)

Michaelis, Von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades. Progr. Freiberg 1852.

Kronecker, Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. 2 Theile. Berlin 1853—56.

Kronecker, Ueber die algebraische Auflösung der Gleichungen. Berlin 1861.

Bette, Neue Auflösung der cubischen, biquadratischen und Moivreschen Gleichungen des fünften Grades. Progr. Halberstadt 1854.

Broz, Ueber cubische Gleichungen. Lemberg 1854.

Lindman, De variis modis aequationes quarti gradus solvendi. Grun. Arch. XXIII. S. 435. 1854. Vergl. auch ibid. XXVII. S. 1. 1856.

Lottner, Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Crelle's Journ. XLVII. 1854.

Müller, Verallgemeinerung der Cardanischen Formel. Grun. Arch. XXII. S. 16. 1854.

Sturm, Zur Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen. Ibid. XXIV. 1855.

Chasles, Construction des équations du III^me^ et IV^me^ degré. Compt. rend. XLI. p. 677. Paris 1855.

Heilermann, Zerlegung der homogenen quadrat., cubischen und biquadrat. Functionen zweier Veränderlicher in Factoren. Progr. Trier 1855.

— Bemerkung zu der Auflösung biquadratischer Gleichungen. Ztschft. f. Math. u. Phys. XXI. S. 364. 1876.

Tortolini, Barnab., Sulle relazioni che passano fra le radici delle equazioni di secondo, terzo e quarto grado. Roma 1855.

— Sulla risoluzione algebrica dell'equazioni di terzo et quarto grado. Ann. di mat. I. 310. Roma 1858.

— Risoluzione di un problema relat. all'equazioni di terzo grado. Ibid. VII. 297.

Heger, Auflösungsmethode für algebraische Buchstabengleichungen mit einer unabhängigen Buchstabengrösse. Wien 1856.

Sommer, Eine Lösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade. Grun. Arch. XXVII. S. 354. 1856.

Aronhold, Ueber eine Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Crelle's Journ. LII. 1856.

— Remarque sur la résolution des équations biquadratiques. N. ann. math. XVII. pg. 391. Paris 1858.

Roberts, Sur l'équation aux carrés des differences des racines d'une équation du quatrième degré. N. ann. math. XVII. pg. 268. 1858.

— Note sur l'équation du quatrième degré. Ibid. XVIII. p. 87. 1859.

Hermite, Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. Compt. rend. XLVI. pg. 715. 961. Paris 1858. Crelle's Journ. LII. pg. 6.

— Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859. Man vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVIII. S. 94. 1873.

— Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. Extr. d'une lettre à l'éditeur. Crelle's Journ. LX. S. 304. Berlin 1862.

Lebesgue, Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. N. ann. math. XVII. pg. 386. Paris 1858.

— Sur la résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques. Journ. math. XXIII. pg. 391. 1858.

Schlechter, Die quadratische Gleichung. Progr. Bruchsal 1859.

Jourdain, Méthode pour la résolution des équations littérales du troisième et quatrième degré. Journ. math. XXIV. pg. 205. 1859.

Cayley, Sur l'équation $x^{257}-1=0$. Crelle's Journ. XLI. 1851.

— Nouv. recherches sur les covariants. Crelle's Journ. XLVII. 1854.

— On quantics. Proceed. of the Roy. Soc. vol. VII. 1856.

— Note sur la méthode d'élimination de Bézout. Crelle's Journ. LIII. 1856.

— On the theory of algebraic curves. Cambr. math. Journ. IV. 1845.

— Note sur les covariants d'une function quadratique, cubique ou biquadratique à deux indéterminées. Crelle's Journ. L. S. 285. 1855.

— On the theory of linear transformations. Ibid. and Cambr. and Dublin math. Journ. I. 1846.

— Deux Notes sur la transformation de Tschirnhausen. Crelle's Journ. LVIII. S. 259 u. 263. 1860.

— Note on the equation for the squared differences of the roots of a cubic equation. Quart. Journ. math. III. pg. 307. 1860.

— Ueber biquadratische Formen. Math. Ann. I. S. 54. 1869.

— On the geometrical interpretation of the covariants of a binar cubic. Quart. Journ. math. X. 148. 1870.

— On the theory of invariants. Math. Ann. III. 268. 1871.

— Fifth Memoir upon quantics. Phil. Trans. vol. 148. p. 429. London 1858.

— On a theorem in covariants. Math. Ann. V. 625. 1873.

Brioschi, Sur une formule de Cayley, contenant une rélation entre les covariants de la fonction biquadratique. Crelle's Journ. LIII. p. 377. 1856.

— Teoria dei covarianti. Ann. di mat. pur. ed applic.

— Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques. Ibid. p. 372.

Müller, H., Beiträge zur Geschichte der Algebra. München 1857.

— Ueber biquadratische Gleichungen. München 1868.

Blerzy, de, Invariants. Nouv. ann. de mathém. XVII. pg. 301. 1858; XVIII. p. 420. 1859.

— Usage des invariants dans la résolution algébrique des équations du III$^{\text{ième}}$ et IV$^{\text{ième}}$ degré. p. 428.

Terquem, Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants. Nouv. ann. de math. XVIII. p. 249. 299. 446. 1859.

— L'équation du quatrième degré. Nouv. ann. math. XIX. pg. 14. 1860.

Spitz, Neue Auflösung der cubischen Gleichungen. Grun. Arch. XXXII. S. 199. 435. 1859.

— Zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Ibid. XXXIII. S. 442. 1859.

Dewulf et Martelli, Sur l'équation aux carrés des differences des racines de l'équation du quatrième degré. N. ann. math. XIX. pg. 195. 1860.

Young, Paxton, Exact resolution of algebraical equations in all the solvible cases. Quart. Journ. math. IV. p. 341. 1860.

Kulik, Beiträge zur Auflösung höherer Gleichungen überhaupt und der cubischen Gleichungen insbesondere. Prag 1860.

Janfroid, Solution d'une équation cubique littérale. Nouv. ann. math. XX. 1861.

— Sur les racines d'une équation du quatrième degré. Ibid. XXIII. p. 399. 1864.

Bellavitis, Sulla risoluzione algebrica dell'equazioni. Venezia 1861.

— Résolution de l'équation du quatrième degré. N. ann. math. XXIII. pg. 121. 1864.

Catalan, Note sur l'équation du troisième degré. Compt. rend. LIV. pg. 659. 1862.

— Sur l'équation du quatrième degré. N. ann. math. XXII. pg. 341. 520. 1863; XXIX. pg. 379. 1870.

— Sur la transformation des équations. N. corresp. math. II. 342. 1876.

Eisenlohr, Sur l'équation du troisième degré. Compt. rend. LV. pg. 64. 1862.

Fiedler, Die Elemente der neuern Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig 1862.

Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra. Dublin 1859. Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von Fiedler. Leipzig 1863.

— Leçons d'algèbre supérieure. Traduit par Bazin et Hermite. XIII. Paris 1868.

— Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. Deutsch von Fiedler. Leipzig 1865.

Schlömilch, Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VI. S. 49. 1861. Man vergl. auch Grun. Arch. XXXIX. S. 230. 1862; XLIV. S. 50. 1865.

— Ueber die Reduction der biquadratischen Gleichungen. Ztschr. f. Math. u. Phys. VIII. S. 223. 1863.

— Sur l'équation du quatrième degré. Journ. math. XXVIII. p. 99. 1863.

Meyer, G. F., Bemerkung zu Schlömilch's Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Grun. Arch. XXXIX. S. 230. 1862.

Matthiessen, Ludwig, Neue Auflösungen der quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VIII. S. 133. 1863.

— Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Ibid. S. 140; Grun. Arch. XLI. S. 231. 1864; XLIV. S. 80. 1865; Heis' Aufgabensammlung. S. 354. Köln 1864.

— Ueber einen Zusammenhang der Seiten eines Kreisvierecks mit den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. IX. S. 453. 1864.

— Ueber eine merkwürdige Beziehung der Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks zu den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung und ihrer Resolvente. Ibid. X. S. 331. 1865.

Matthiessen, Ludwig, Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Erste Serie: Die Substitutionsmethoden. Leipzig 1866.

— Methode der Auflösung litteraler cubischer und biquadratischer Gleichungen. Grun. Arch. XLV. S. 415. 1866.

— Résolution nouvelle de l'équation du quatrième degré. Giornale di Matem. dal Battaglini. Napoli 1867.

— Methode der Entwicklung der Gleichung der Wurzelsumme behufs Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XII. S. 310. 1867.

— Ueber ein die cubischen Gleichungen betreffendes Problem von Barn. Tortolini. Grun. Arch. XLVII. S. 460.

— Die Regel vom falschen Satze (hisab al-khataayn) bei den Indern und Arabern des Mittelalters und Anwendung derselben zur algebraischen Auflösung der linearen, quadratischen und cubischen Gleichungen. Ztschr. f. Math. u. Phys. XV. S. 41. 1870.

— Die Methoden der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Dr. E. Heis. I. Bd. § 61. Köln u. Wien 1873 u. 1878.

— Die Methoden der Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade. Ibid. § 69. A. u. B.

— Die Methoden der Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade. Ibid. § 95^a u. § 95^b.

— Die Methoden der Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade. Ibid. § 98^a u. § 98^b.

Nordheim, Directe Lösung der Gleichungen höheren Grades. Frankfurt 1863.

Machowetz, Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Prag 1863.

Arndt, Beiträge zur Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen. Progr. Spandau 1864.

Unferdinger, Die Wurzelformel der allgemeinen Gleichung des vierten Grades. Sitzungsber. der k. k. Acad. der Wiss. Bd. L. Wien 1864.

Clebsch, Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen. Crelle's Journ. LIX. 1. 1862.

— Die Auflösung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. In seiner: Theorie der binären algebraischen Formen. §§ 30—51. Leipzig 1872.

— Zur Theorie der binären algebraischen Formen. Math. Ann. III. 265. 1871.

— Die binären quadratischen, cubischen und biquadratischen Formen. In seinen: Vorlesungen über Geometrie. Bd. I. Leipzig 1876.

Faure, Sur l'équation du troisième degré. N. ann. math. XXIII. pg. 116. 1864.

Job, Beiträge zur Auflösung der Gleichungen. Progr. Dresden 1864.

Martelli, Racine de l'équation générale du quatrième degré. N. ann. math. XXIII. p. 401. 1864.

Vériot, Sur la résolution de l'équation du troisième degré. Compt. rend. LX. pg. 556. 1865; LXVI. p. 619, 730. 1868.

Vogt, Théorie des équations réciproques. Grun. Arch. XLIV. S. 50. 1865.

Ball, On the algebraical solution of biquadratic equations. Quart. Journ. VII. p. 6, 358. 1865.

Pokorny, Ueber die biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. X. 320. 1865.

Dienger, Theorie und Auflösung der höheren Gleichungen. Stuttgart 1866.

— Studien zur Theorie der Covarianten und Invarianten der binären Formen. Prag 1870.

Pratt, Solution of the cubic and biquadratic equations. London and Liverpool 1866.

Alexandre, Méthode pour résoudre les équations du troisième degré en amenant dans le premier membre un cube parfait. N. ann. math. XXV. p. 358, 527. 1866.

— Sur le moyen de ramener une équation quelconque du quatrième degré à une équation réciproque du même degré. Ibid. p. 477.

— Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré. Ibid. XXIX. p. 293. 1870.

Siebel, Ein Beitrag zur geometrischen und algebraischen Auflösung der cubischen Gleichungen. Düsseldorf 1866.

— Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Grun. Arch. LVI. 422. 1874; LVII. 73, 350. 1875; LVIII. 127. 1876.

Schramm, Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation. Annali di matem. Ser. II. I. pg. 259. 1867; III. p. 41. 1870.

Jordan, Sur les covariants et invariants des formes binaires. Compt. rend. LXVI. p. 117. 1868.

Kirkman, On the general resolution of algebraic equations. Phil. Mag. XXXVI. pg. 169, 264. 1868.

Beckendahl, Gleichungen höherer Grade. Nürnberg 1869.

Grassmann, H., Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. Grun. Arch. LI. S. 93. 1870.

Le Besgue (voir Art. Lebesgue), Sur l'équation du troisième degré. N. ann. math. XXIX. pg. 529. 1870.

Bardey, Eine Auflösung der vollständigen Gleichungen vierten Grades. In seiner Aufgabensammlung Kap. 39. Leipzig 1871.

Gundelfinger, Zur Auflösung der cubischen Gleichungen. Math. Ann. III. S. 272. Leipzig 1871.

— Ueber binäre Formen. Crelle's Journ. LXXIV. S. 87. 1872.

Schulenburg, Die Gleichungen der drei ersten Grade. Altona 1871.

Gerono, L'équation

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & h & g \\ h, & b-\lambda, & f \\ g, & f, & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

du troisième degré en λ a toutes ses racines réelles. N. ann. math. XXXI. pg. 305. 1872.

Darboux, Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. Journ. math. XXXVIII. pg. 220. 1873.

Enneper, Notiz über die biquadratische Gleichung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVIII. S. 93. 1873.

Diekmann, Zur Theorie der Gleichungen zweiten Grades. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. IV. S. 392. 1873; V. S. 222 u. 362. 1874.

— Zur Theorie der biquadratischen Gleichungen. Ibid. VII. S. 100. 1876.

— Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Kap. V seiner Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung. Essen 1876.

Nell, Ueber die allgemeine Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Grun. Arch. LVI. S. 407. 1874.

Bauer, K. L., Ueber eine Art biquadratischer Gleichungen, die sich mit Hülfe quadratischer Gleichungen lösen lassen. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. V. S. 317. 1874.

Binder, Ueber biquadratische Gleichungen. Ibid. S. 369.

Hoppe, Construction der reellen Wurzeln einer Gleichung dritten oder vierten Grades mittels einer festen Parabel. Grun. Arch. LVI. S. 110. 1874.

Painvain, Sur la méthode d'élimination de Bézout. Nouv. ann. math. XXXIII. p. 278, 447. 1875.

Hunrath, Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausen's Methode. I. Progr. Glückstadt 1876.

André, Sur l'équation du troisième degré. N. ann. math. XXXIV. 356. 1876.

Katter, Ueber die Resultante zweier algebraischer Gleichungen. Putbus 1876.

Faa de Bruno, Théorie des formes binaires. Turin 1876.

Giordani, I sei cartelli di matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari, coi sei controcartelli in risposta di Nicolo Tartaglia, comprendenti le soluzioni dei quesiti dall' una e dall' altra parte proposti. Repert. von Königsberger und Zeuner I. S. 419. 1877; Histor.-litt. Abtheil. der Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXII. S. 133. 1877.

Biasi, Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche. — Studi analytici. Repert. von Königsberger und Zeuner. I. S. 315. 1877.

Kostka, Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der

Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch deren Coefficienten. Repert. von Königsberger und Zeuner. I. S. 158. 1877; Crelle's Journ. LXXXI. S. 281.

Petersen, Theorie der algebraischen Gleichungen. Aus dem Dänischen übers. von v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1878.

Weichold, Solution of the irreducible case in cubic equations. American Journ. of Mathem. I. Baltimore 1878.

Schlegel, Vict., Gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. In s. Lehrb. der elem. Mathem. I. § 118. Wolfenbüttel 1878.

II. Die arithmetischen Näherungsmethoden der Auflösung der numerischen algebraischen und transcendenten Gleichungen.

Leonardo Fibonacci (filius Bonacci) aus Pisa; deshalb auch Leonardo Pisano genannt, erlernte zu Bugia in der Berberei die arabische Arithmetik und Algebra. Derselbe schrieb: Liber abaci 1202; neu umgearbeitet 1228. Liber abaci di Leonardo Pisano pubblicato da Bald. Boncompagni. Roma 1847. (Vergl. Woepcke, Sur l'introduction etc. pg. 4.) Darin: Quaestiones algebrae et almuchabalae. (Woepcke, Introd. pg. 64.)

— Essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré; par Woepcke. Journ. asiat. 1854. Journ. math. Tom. XIX. pg. 401—406. 1854. Tom. XX. pg. 54—62. 1855.

Fibonacci gab auch die numerische Auflösung der cubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, $x = 1^p\, 22^{\mathrm{I}}\, 7^{\mathrm{II}}\, 42^{\mathrm{III}}\, 33^{\mathrm{IV}}\, 4^{\mathrm{V}}\, 40^{\mathrm{VI}}$. Man vergl. Scritti di Leonardo Pisano, pubbl. da B. Boncompagni. Vol. II. p. 234. Rom 1862.

Tsin Kiu Tschaou (1210—1290), chinesischer Mathematiker, schrieb: Leih tien yuen yih (Algebra der höheren Gleichungen). Hierin ist eine Näherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen (Tien yuen-Regel) mit Anwendung der Lihn-Tafel (Binomialcoefficienten) gelehrt.

Le Yay Jin King (um 1300), Tsih yuen ha king. Ein Werk über Algebra, worin die Tien yuen-Regel angewandt wird.

Vieta, Fr., De numerosa potestatum purarum atque adfectarum resolutione. Paris 1600.

— Opera math. operā atque studio Fr. a. Schooten. IV. Lugd. Batav. 1646. Man vergl. Egen, Algebra § 464.

Newton, De analysi per aequationes numero terminorum infinitas. 1669. Vergl. Commercium epistolicum, Joh. Collins. London 1712.

— Auflösung numerischer Gleichungen. (Brief an Oldenburg. 1676 13. Juni.) Vergl. den Anfang der Methodus fluxionum. Paris 1740.

Collins, Account concerning the resolution of equations in numbres. Phil. Trans. 1669.

Halley, Methodus nova inveniendi radices aequationum quarumcunque generaliter. Phil. Trans. 1694.

Lagny, Méthode nouvelle pour former et résoudre toutes les équations. Mém. Par. pt. I. et II.; Paris 1705 et 1706.

Loubère, Traité de la résolution des équations. Paris 1729.

Kästner, Aequationum speciosarum resolutio Neutoniana per series. Lipsiae 1733.

Nicolo, De radicibus aequationis cubicae in series infinitas evolvendes. Mém. Par. 1738.

Clairaut, Eléments d'algèbre. Paris 1746.

Euler, Regula falsorum in: Introd. in anal. infinit. I. cap. 22. 1748. Auch im III. Bande der Michelsen'schen Uebers. Berlin 1791.

— Von der Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Vollst. Anl. zur Algebra. 2. Theil. § 200. Petersburg 1770.

Segner, Methodus simplex et universalis omnes omnium aequationum radices detegendi. Nov. Comm. Petrop. VII. 1761.

Lagrange, Sur la résolution des équations numériques. Mém. Berl. 1767.

— Addition au Mémoire précédent. Ibid. 1768.

— Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mém. de l'acad. de Berlin 1768; Méc. anal. I. pg. 177.

— Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Chap. III. Paris 1798 et 1808.

Bernoulli, Dan., Anwendung der recurrenten Reihen auf die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung. Comm. Acad. Petrop. III. Vergl. Stern's Abh. in Crelle's Journ. XI. S. 296.

Cassella, Saggio di un tentavio per risolvere l'equazioni di tutti i gradi. Napoli 1788.

— Metodo per trovare le radici numeriche d'ogni equazione. Mem. Soc. Ital. XI. 1804.

Pezzi, Nuovo metodo per le radici prossime delle equazioni numeriche di qualunque grado. Mem. Soc. Ital. VIII. 1799.

Murhard, Ueber Lagrange's Methode Gleichungen durch Näherung mittels Reihen aufzulösen. Göttingen 1796.

Franchini, Sur la résolution des équations numériques d'un degré quelconque. Mem. Torin. VI. 1801.

Valperga, De la résolution des équations numériques de tous les degrés. Mem. Torin. VI. 1801.

— Lettere dell' A. T. V. in qui si propone un metodo per la soluzione delle equazioni numeriche d'ogni ordine.

Ruffini, Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado. Modena 1804. (Gekrönte Preisschrift.)

Prasse, De aequationibus numericis altiorum ordinum commentatio. Lipsiae 1807.

Budan, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque. Paris 1807.

Bauer, H., Ueber die allgemeine Entwickelung aller möglichen Wurzeln der numerischen Gleichungen jeden Grades. Potsdam 1810 und 1825.

Kummer, De aequationibus numericis altiorum ordinum. Lipsiae 1811.

Hoene-Wronski, Résolution générale des équations. Paris 1811. (Vergl. Ruffini hierüber in den Mem. Soc. Ital. XVIII. 1820.)

Corançez, Sur les moyens de distinguer la nombre des racines réelles etc. Moniteur 1811.

— Recherches sur la résolution des équations. Journ. écol. polyt. Nr. XVII. 1815.

Lockhart, A method of approximating towards the roots of cubic equation belonging to the irreducible cases. 1813.

— Resolution of equations by means of inferior and superior limits. London 1842.

— The nature of the roots of numerical equations. London 1850.

Barlow, New mathematical tables. London 1814.

Legendre, Note sur la résolution des équations numériques. Voir: Suppl. à l'essai sur la théorie des nombres. II^me édit. § III. pg. 28. 1816.

Bérard, Méthode nouvelle pour déterminer les racines des équations numériques. Nîmes 1818.

Horner, Auflösung der numerischen Gleichungen. Phil. Trans. London 1819.

Pistor, De solutione aequationum simplici altiorum ope serierum arithmeticarum. Wiesbaden 1821.

Drais von Sauerbronn, Formel für die Auflösung aller numerischen Gleichungen. Mannheim 1821.

Ekelund, De methodo appropinquandi ad verum valorem radicum datae aequationis cujuscunque numericae. Lundae 1821.

— De expressionibus radicum aequationis cubicae in casu irreductibili ope serierum apte convergentium, inveniendis. Lundae 1824.

Paletti, Nuovo metodo per determinare le radici immaginarie delle equazioni numeriche. Torino 1824.

Eytelwein, Berechnung der irrationalen Wurzeln einer numerischen Gleichung mittels der regula falsi. Grundlehren der höhern Analysis. I. § 130. Berlin 1824.

— Anweisung zur Auflösung der höheren numerischen Gleichungen. Berlin 1837.

Dandelin, Sur la résolution des équations numériques. Mém. Brux. III. 1826.

Kramp, Les équations des nombres. 1820.

Hill, Om quadrattabellernes bruk till numeriska Equationers lösning. Lund 1853 et 1854.

— Om numeriska Equationers lösning genom convergenta operationer. Ibid. 1853.

Friedrich, De ratione aequationes numericas solvendi Krampiana. Onoldi 1829.

Egen, Ueber die Methoden, Zahlengleichungen durch Näherung aufzulösen. Elberfeld 1829.

Cauchy, Mémoire sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination. Paris 1829.

— Résolution des équations d'un degré quelconque. Compt. rend. Paris 1837.

— Mémoire sur une méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes présentée à l'acad. 1837.

— Sur la résolution numérique des équations algébriques et transcendentes. Compt. rend. Paris 1840.

Könitzer, Die Auflösung höherer Gleichungen mit Hülfe arithmetischer Reihen. Ruppin 1830.

Ley, Ueber die Auflösung der höheren Gleichungen durch Reihen. Köln 1831.

Fourier, Analyse des équations déterminées. Publ. par Navier. Paris 1831.

Sarrus, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques. Strassbourg 1833.

— Sur la résolution des équations numériques à une ou plusieurs inconnues et de forme quelconque. Journ. math. par Liouville VI. 1841.

Sturm, Mémoire sur la résolution des équations numériques. Mém. sav. étrang. VI. 1835; Extrait du mémoire précédent dans: Férussac, Bull. des scienc. math. XI. 1829.

— Sur la résolution des équations numériques. Paris 1835.

de Mauroff, Nouvelle théorie sur la résolution des équations numériques de tous les degrés. Petersbourg 1833.

Vincent, Sur la résolution des équations numériques. Paris 1834.

— Sur la résolution des équations numériques. Lille 1835.

— Sur la résolution des équations numériques. Journ. math. par Liouville. I. 1836. III. 1838.

Brizard, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. Paris 1834.

Drobisch, M. W., Grundzüge der Lehre von den numerischen Gleichungen. Leipzig 1834.

Crelle, Bemerkungen zu den Mitteln, algebraische Gleichungen näherungsweise zu lösen. Abh. der Berl. Akad. 1835.

Murphy, On the roots of equations. Phil. Mag. Ser. III. Vol. II. 1833. XI. 1837.

— On the resolution of equations in finite differences. Trans. Cambr. Phil. Soc. VI. pt. I. 1836.

— Analysis of the roots of equations. Phil. Trans. pt. I. 1837.

— On an error of Fourier in his „Analyse des équations". Phil. Mag. XI. 1837.

Dirksen, Ueber die Trennung der Wurzeln einer numerischen Gleichung. Abh. der Berl. Acad. 1835.

Gräffe, Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen. Zürich 1837. Man vergl. Encke, Berl. astron. Jahrb. 1841, und Crelle's Journ. XXII. S. 193.

Gräffe, Zusätze zu seiner Methode. Progr. Zürich 1839.

Francoeur, Résolution des équations numériques. Cours compl. des mathém. pures. IVme édit. II. prop. 586. Paris 1837. (Iière édit. Paris 1809.)

Libri, Sur la détermination approchée des racines des équations algébriques. Compt. rend. IV. 1837.

— Sur la résolution d'une classe d'équations numériques. Ibid. XVII. 1843.

Mozhnik, Theorie der numerischen Gleichungen nach Cauchy. Wien 1839.

Stern, Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen. (Gekrönte Preisschrift.) Crelle's Journ. XXII. Berlin 1841.

— Elementarer Beweis eines Fundamentalgesetzes aus der Theorie der Gleichungen. Crelle's Journ. XXIII. 1842.

— Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transcendente Gleichungen. Crelle's Journ. XXXIII. 1846.

König, Discussion der Gleichung vom vierten Grade in Bezug auf den Sturm'schen Satz. Königsberg 1841.

Schulz von Strassnicky, Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen. Wien 1842.

Wathieux, Resolucion de todas las ecuaciones numericas. Zaragosa 1842.

Clausen, Die Wurzel einer kubischen Gleichung in einen Kettenbruch zu verwandeln. Astron. Nachr. Nr. 446. Grun. Arch. II. S. 446. 1842; XXXIX. S. 235. 1862.

Young, the general theory and solution of equations of the higher orders. London 1842.

Tulindberg, Theoremata de radicibus aequationum numericarum I. Helsingfors 1842.

Kulik, Lehrbuch der höhern Arithmetik nebst den wichtigsten Lehren der höheren Analysis nach Gräffe, Budan, Sturm, Fourier, Horner, Stern betr. die Auflösung numerischer Gleichungen. Prag 1843.

Weddle, A new simple and general method of solving numerical equations of all orders. London 1843. Man vergl. Popper, Beitr. in d. Abh. der Böhm. Ges. XI. 5. Folge.

Lobatto, Recherches sur la distinction des racines réelles et imaginaires dans les équations numériques, précédées d'une nouvelle démonstration du théorème de Mr. Sturm. Amsterd. et la Haye. 1843.

— Lessen over de hoogere Algebra. Amsterdam 1845.

Vallas, Beiträge zur Auflösung der höheren Gleichungen. Wien 1843.

Jahn, Leichte Methode, die höheren numerischen Gleichungen zu berechnen. Leipzig 1844 u. 1850.

Bouquet, Nouvelle méthode d'approximation pour obtenir la valeur d'une racine dans une équation numérique. Châlons 1844.

Vogel, Discovery of a general resolutiou of all equations of every numerical form. Leipzig 1845. London 1846.

Brandis, Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen. Progr. Altona 1845.

Clark, Elements of algebra, together with an appendix containing the most approved methods of resolving the higher equations. London 1846.

Weissenborn, De spectatissimis quibus aequationes altioris gradus numericae solvuntur methodis. Berolini 1847.

Grebe, Ueber die Verwandlung quadratischer Gleichungen in Kettenbrüche. Cassel 1847.

Herrmann, Sur la résolution des équations du troisième degré. Nouv. ann. math. VI. 1847.

Agardh, K. A., Sur une méthode élémentaire de résoudre les équations numériques. Carlstadt 1847.

Osthoff, Neue Art, höhere Gleichungen aufzulösen. Westhofen 1848.

Moth, Begründung eines eigenthümlichen Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen mit numerischen Coefficienten. Sitzungsber. der Wiener Acad. I. 1848.

Spitzer, Auffindung der reellen und imaginären Wurzel einer Zahlengleichung höheren Grades. Wien 1849 u. 1851.

— Berechnung der imaginären Wurzeln einer Gleichung mittels der Horner'schen Methode. Wien 1849.

— Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Wien 1851.

Rutherford, Die vollständige Lösung numerischer Gleichungen. Uebers. von Wiegand. Halle 1849.

Westphal, Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas. Göttingen 1850.

Heis, Auflösung der Gleichungen durch Theilbruchreihen. Samml. von Aufg. aus der Arithmetik und Algebra. § 102. Cöln 1850.

Kerz, Die allgemeine Umkehrung der Reihen nebst Anwendung auf die Auflösung numerischer Gleichungen. Darmstadt und Giessen. 2 Thle. 1850 u. 1861.

Bellavitis, Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebraiche. Venezia 1850.

Schnuse, Theorie und Auflösung der höheren algebraischen und transcendenten Gleichungen. Braunschweig 1850.

Heny, Méthode pour la résolution des équations numériques. Rouen 1852.

Möbius, Beiträge zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen. Ber. der sächs. Ges. der Wiss. Math.-phys. Classe. 1852.

Exner, Auflösung der numerischen Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Hirschberg 1853.

— Auflösung der Gleichungen aller Grade. Hirschberg 1859 und 1866.

Hanegraf, Méthode pour la résolution générale des équations par leur décomposition successive en facteurs. Bruxelles 1854.

Theremin, Recherches sur la résolution des équations de tous les degrés. Crelle's Journ. 1854.

Valz, Résolution des équations numériques par l'abaissement des puissances des racines. Compt. rend. XLI. 1855.

— Essai de la résolution des équations par les séries et les logarithmes. Compt. rend. XLIX. 705. 1859.

— Résolution du cas irreductible sans recourir aux séries. Compt. rend. LVIII. pg. 1186. 1864.

Focke, De aequationibus numericis superioris ordinis. Monast. 1856.

Bellavitis, Sulla risoluzione numerica delle equazioni. Mem. Istit. Venet. Venezia 1857.

— Appendice che mena alla risoluzione del equazioni. Venezia 1860.

Desnos, Méthode générale des résolutions des équations complètes de degrés quelconques. Paris 1857.

Montucci, Sur quelques moyens propres à abréger certains calculs dans la solution numérique des équations. Compt. rend. XLVII. pg. 655. 1858.

Castragiovanni, Résolution numérique des équations du troisième degré. Compt. rend. XLVI. pg. 668. 1858.

Krause, Zur Auflösung numerischer Gleichungen. Crone 1858.

Grunert, Ueber die Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Grun. Arch. XXX. S. 54 u. 135. 1858.

Prouhet, Sur la rectification de la méthode d'approximation de Newton. Nouv. ann. mathém. XVIII. 1859.

Horner, Jos., Approximation to the roots of algebraical equations in a series of aliquot parts. Quart. Journ. III. 251. 1859.

Kiesler, Ueber numerische Gleichungen. Küstrin 1859.

Mossbrugger, Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade. Aarau 1859.

Scheffler, Die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen. Braunschweig 1859.

Fürstenau, Darstellung der reellen Wurzeln algebr. Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Marburg 1860. Man vergleiche Günther, Lehrb. der Determinantentheorie. Kap. IV. § 6. Erlangen 1877.

Rottok, Von den Kettenbrüchen und ihrer Anwendung auf die Auflösung bestimmter und unbestimmter Gleichungen zweiten Grades. Rendsburg 1860.

Heegmann, Essai d'une nouvelle méthode de résolution des équations algébriques. I[er] mémoire. Paris 1861.

Dubois, De la résolution générale des équations. Compt. rend. LII. pg. 1218. 1861.

Maleyx, Sur la résolution numérique des équations. Paris 1861.

Maulbon d'Arbaumont, Méthode pratique pour la résolution des équations numériques du troisième degré. Paris 1861.

Saint-Loup, De la résolution des équations numériques. Paris 1861.

Matthiessen, Ludwig, Anwendung der oscillirenden Kettenbrüche zur gleichzeitigen Bestimmung zweier Wurzelwerthe einer Gleichung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VI. S. 51. 1861.

— Auflösung numerischer Gleichungen mittels der Gleichung der Berührungscurve zweiter Ordnung. Schlüssel zur Aufgabensamml. von Heis. § 106. Cöln 1873.

— Näherungsmethode der cubischen Gleichungen. Ibid. § 105. Nr. 25.

Peissl, Die symmetrischen Functionen in ihrem Zusammenhange mit der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen. Amberg 1861.

Lemonnier, Sur la méthode d'approximation de Newton. Nouv. ann. mathém. XXI. pg. 188. 1862.

Beyer, Auflösung der numerischen gemischten Gleichungen. Neustett. 1863.

Popper, Beiträge zu Weddle's Methode der Auflösung numerischer Gleichungen. Abh. der k. böhm. Ges. der Wiss. Folge V. Bd. XI., und Zeitschr. f. Math. u. Phys. VII. S. 384. Leipzig 1862. Man vergl. auch VIII. S. 240. 1863.

Pratt, Solution of the cubic and biquadratic equations. Liverpool 1866.

Dienger, Theorie und Auflösung der höheren Gleichungen. Stuttgart 1866.

Sivering, Sur les équations algébriques du troisième degré. N. ann. math. XXV. pg. 356. 1866.

Lill, Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue. Compt. rend. LXV. 854. — Nouv. ann. mathém. XXVI. 359. 1866.

Rheinauer, Ueber Auflösung der Zahlengleichungen durch arithmetische Reihen. Freiberg 1866.

Leesekamp, Ueber die Theorie der algebraischen Gleichungen mit complexen Wurzeln. Hannover 1867.

Schröder, Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. von Clebsch. Leipzig 1869.

Reidt, Ueber die Auflösung irreductibler cubischer Gleichungen. Ztschft. f. Math. u. Phys. XVII. 1872.

Matzka, Horner's eigentliche Auflösungsmethode algebraischer Zifferngleichungen. Prag 1872.

Brocard, Sur la méthode d'approximation de Cardan. Nouv. corresp. math. par Catalan. II. 176. 1876.

Lalanne, Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. Compt. rend. LXXXI. 1186, 1243. 1876.

Günther, S., Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche. Math. Ann. VII., 262. 1875.

Malet, A general formula for the equation whose roots are the products in pairs of the roots of any algebraic equation. Quart. Journ. math. XIII., 30. 1875.

Poncini, Le equazioni numeriche, intere e razionali ad una incognita. Milano 1877.

Biasi, Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche studi analytici. Repert. von Königsberger uud Zeuner. Bd. I. 1877.

Giesen, Ueber zwei einfache Methoden der Auflösung numerischer Gleichungen. Zeitschr. für Math. und Phys. XXIII. S. 35. Leipzig 1878.

III. Die Auflösung der algebraischen Gleichungen mittels goniometrischer und elliptischer Functionen.

Girard, Invention nouvelle en algèbre. Amsterdam 1629.

Vieta, Theoremata ad sectiones angulares, publ. ab Alex. Anderson. Paris 1615. Opera math. edit. a Franc. van Schooten. Lugd. Bat. 1646.

Schooten, App. de cubicarum aequationum resolutione. O. c. p. 345.

Cataldi, Algebra triangularis. Bologna 1620.

Colson, The Method of fluxions, transl. form the original (I. Newton) with a perpetual comment. pg. 308. 1736.

Nicole, Sur la trisection de l'angle. Mém. Par. 1740.

Moivre, Aequationum quarundam potestatis tertiae etc. resolutio analytica. Phil. Trans. 1707.

— De sectione anguli. Phil. Trans. 1722.

Baermann, De solutione cubicarum aliorumque aequationum ope sinuum. Viteb. 1751.

Kästner, Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere ostendit prop. VII. Göttingen 1757.

Mollweide, Allgemeine Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen durch die Goniometrie. Zach's monatl. Corr. XXII. 1810.

Eytelwein, Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade durch Anwendung der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Grundl. d. höh. Analysis. I. § 175. Berlin 1824.

Fisch, Goniometrische Behandlung der Gleichungen vom vermischt cubischen Grade. Arnsberg 1836.

Förstemann, Ueber die Auflösung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen mittels goniometrischer Functionen. Danzig 1836.

Rehaag, Auflösung numerischer Gleichungen durch goniometrische Formeln. Conitz 1839.

Grunert, Neue Auflösung der quadratischen Gleichungen durch goniometrische Functionen. Grun. Arch. I. S. 12. 1841.

— Auflösung der cubischen Gleichungen durch trigonom. Functionen. Ibid. V. S. 422. 1844.

— Grundzüge der Theorie der hyperbolischen Functionen zur Auflösung der Gleichungen. Ibid. XXXVIII. S. 48. 1862.

Heydenreich, Anwendung der Trigonometrie auf die Auflösung der Gleichungen bis zum vierten Grade. Tilsit 1842.

Björling, Goniometriska expressioner för rötterna till tredje og fierde gradens equationer. Acad. Förhandl. 1850. Grun. Arch. XIX. 299.

Bette, Neue Auflösung der cubischen, biquadratischen und der Moivre'schen Gleichungen des fünften Grades. Progr. Halberstadt 1854.

Ludowieg, Anwendung goniometrischer Functionen auf die Auflösung cubischer Gleichungen. Stade 1855.

Fischer, Ueber die goniometrische Behandlung der quadratischen und cubischen Gleichungen. Elberfeld 1856.

Lebesgue, Sur la résolution de l'équation du quatrième degré par les fontions elliptiques. Journ. math. XXIII. pg. 391. 1858.

Demongeot, Sur la résolution des équations du troisième degré au moyen des tables trigonométriques. N. ann. math. XX. pg. 143. 1861.

Terquem, Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré. Ibid. pg. 421. Astron. Nachr. Nr. 1016. S. 118.

Matzka, Beiträge zur Auflösung kubischer Gleichungen mittels cyklometrischer und hyperbolischer Functionen. Grun. Arch. XXXVII. S. 399. 1861.

Gronau, Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel. Danzig 1861.

Heis, Anwendung der Goniometrie zur Auflösung der Gleichungen des zweiten und dritten Grades. Lehrb. der ebenen und sphär. Trigonometrie. Cap. VIII. 4. Absch. Köln 1867. Aufgabensammlung § 69.

De Virieu, Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré. N. ann. math. XXVI. 444. 1867.

A. de Saint-Germain, Sur la résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré. N. ann. math. XXX. pg. 63. 1871.

Krause, Goniometrische Auflösung der numerischen Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade. Progr. Marburg 1872.

Scherling, Zur trigonometr. Auflösung quadratischer Gleichungen. Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht von J. C. V. Hoffmann. Jahrg. V. S. 52. 1874.

Stoll, Zur Lösung der kubischen Gleichungen. S. 7—13 der mathem.-physikal. Miscellen im Programm von Bensheim 1876.

IV. Die Gleichungen fünften Grades.

Euler, De resolutione aequationum cujusvis gradus. Nov. Comm. Acad. Petrop. IX. 1764.

Bring, Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum. Lundae 1786. Man vergl. Grun. Arch. XLI. 105. 1864.

Lejonmarck, Ett sätt att finna quadratiska och cubiska factorer i equationer af femte graden. Vetensk. Acad. Handl. 1795.

Jerrard, Mathematical researches. 1834. (Hamilton, Report of the sixt meeting of the british Association.)

— On the algebraic resolution of equations of the fifth degree. Phil. Mag. XIX. 272; XXIII. 146. 196. 469; XXIV. 193. 457. Man vergl.:

Tschirnhaus's und Jerrard's Transformation und Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Zeitschr. für Math. und Phys. IV. 77. 1859; Grun. Arch. XL. 214.

Luther, De criteriis, quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit. Regiomontani 1847. Crelle's Journ. XXXIV.

Blomstrand, De methodis praecipuis universales aequationum algebraicarum solutiones inveniendi commentatio. Lundae 1847.

Müller, Die algebraischen Gleichungen des fünften und sechsten Grades. Stuttgart 1848.

Granlund, Dissertatio de aequatione quinti gradus quousque licet reducenda. Lundae 1852.

Salmon, Ueber die Discriminante der Form fünften Grades. Cambr. Math. Journ. V. pg. 154. 1850.

— Die binäre Form fünften Grades. 20ste Vorlesung über Algebra der linearen Transformationen.

Plana, Mémoire sur la formation de l'équation du 4me degré, et celle du 6me degré, des quelles dépend la solution littérale de l'équation générale du 5me degré, suivant la méthode proposée par Lagrange en 1771. Mem. Torino Sér. II. T. XVI. 1857.

Kronecker, Sur la résolution de l'équation du Vme degré. Compt. rend. XLVI. p. 1150. 1858; LIX. pg. 306. 1861.

— Ueber die Gleichungen fünften Grades. Crelle's Journ. LIX. 306. Berlin 1861.

Hermite, Sur la résolution de l'équation du Vme degré. Compt. rend. XLVI. p. 508. 1858; ibid. 1865, 1866. Man vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys. IV. S. 77, 1859; Grun. Arch. XL. 214. 1863; Crelle's Journ. LIX. S. 304. 1861; Cambr. and Dubl. math. Journ. IX. pg. 172. 1854.

Brioschi, La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado. Ann. di Mat. Ser. II. T. I. 175. 222. 256. 1858.

— Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado. Istit. Lombard. 1858.

— Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado. Ann. di Mat. V. 233. 1864. Grun. Arch. XLV. 1866.

— Sur une classe de résolventes de l'équation du Vme degré. Compt. rend. LXIII. 685. 785.

— Sur l'équation du cinquième degré. Compt. rend. LXXIII. pg. 1470. 1872.

— Sur l'équation du cinquième degré. Compt. rend. LXXX. pg. 753. 815. 1876.

— Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Math. Ann. XIII. Leipzig 1878.

Cayley, On Mr. Jerrard's researches on the equation of the fifth order. Phil. Mag. XXI. 210; XXIII. 195; XXIV. 290.

— Eight and ninth Memoir on quantics. Phil. Trans. 1867 and 1870.

Lavagna, Sulla determinazione dei coefficienti della trasformata di Tschirnhaus: applicazioni alla ridotta di Jerrard dell'equazione generale di quinto grado. Ann. di Mat. I. 238. 1858.

Joubert, Note sur la résolution de l'équation du V^{me} degré. Compt. rend. XLVIII. pg. 290.

Cockle, Observations on the theory of equations of the fifth degree. Phil. Mag. XVII. 356; XVIII. 50. 342. 508; XIX. 197. 331; XXIV. 289.

Fergola, Sur la résolution des équations du V^{me} degré. Compt. rend. XLIV. 267.

Roberts, Mich., Sur les équations du cinquième degré. Ann. di Mat. Sér. II. T. I. 135. 1858; VII. pg. 257.

Sievers, Umformung der allgemeinen Gleichung des fünften Grades mittels Tschirnhausen's Substitution. Astron. Nachr. LXX. 355.

Schulenburg, Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Halle 1861.

Harley, A contribution to the history of the problem of the reduction of the general equation of the Vth degree to a trinomial form. Quart. Journ. VI. pg. 38. 1864.

Clebsch, Das Fünfeck und die Gleichung fünften Grades. Math. Ann. IV. S. 284—345. 1872.

Gordan, Ueber Gleichungen fünften Grades. Sitzungsber. der 50. Vers. deutscher Naturf. u. Aerzte in München 1877.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	37	Zeile	10 v. u.	lies: $a^2 + b$ statt: $a^2 - b$.
„	257	„	1 v. o.	hinzuzufügen: $= C_{3,2}(z_1) : C_{3,2}(z_2)$.
„	264	„	14 „ „	lies: $= 0$ statt: $- 0$.
„	267	„	12 v. u.	„ almokabalâ st. almokabâ.
„	„	„	20 „ „	„ ax st. αx.
„	276	„	2 v. o.	„ Talkhys st. Talkys.
„	277	„	2 „ „	„ bilanx st. balanx.
„	293	„	3 v. u.	„ Theoreme st. Theorie.
„	296	„	11 „ „	„ erkennet st. erkennnt.
„	329	„	3 v. o.	voranzusetzen: I, III.
„	„	„	5 „ „	„ II, III.
„	355	„	16 v. o.	lies: die linke Seite dieser st. diese.
„	388	„	1 v. u.	„ $\sqrt{x^2 - \frac{4}{3} p}$ st. $\sqrt[3]{x^2 - \frac{4}{3} p}$.
„	522	„	12 v. o.	„ $\overline{D_3}$ st. $\overline{D_2}$.
„	618	„	8 v. o.	„ λ_2 st. λ^2, und füge rechts den Factor z^6 hinzu.
„	732	„	5 „ „	„ $- ae$ st. $+ ae$.
„	803	„	4, 5, 6 v. o.	lies z_0, z_1, z_2 st. z_1, z_2, z_3.
„	873	„	7 v. o.	lies (3) st. (2).
„	875	„	18 „ „	„ kann st. können.
„	142	„	1	A st. N