HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

PROFESSOR DR. LUDWIG SCHLESINGER,
PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

IN ZWEI BÄNDEN.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

Vorwort.

Das Handbuch, dessen erster Band hiermit in die Oeffentlichkeit tritt, sucht die älteren und neueren Untersuchungen auf dem Gebiete der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu einem einheitlichen Lehrgebäude zusammenzufassen, um ein möglichst getreues und vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Stande dieser Theorie liefern zu können.

Obwohl schon die Analysten des achtzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe die Integration gewisser specieller linearer Differentialgleichungen geübt hatten, so ist doch die moderne Theorie dieser Differentialgleichungen erst auf den Grundlagen erwachsen, die ihr Herr Fuchs in seiner zuerst im Programm der Berliner Gewerbeschule vom Jahre 1865 veröffentlichten Abhandlung geschaffen hat.

Bei der Bearbeitung einer Disciplin, die so auf eine verhältnissmässig doch nur kurze Zeit der Entwickelung zurücksehen kann, glaubte der Verfasser der Darstellung nicht den beengenden Zwang einer starren Systematik auferlegen zu sollen, sondern dieselbe in der Form möglichst frei, und im Aufbau wesentlich der historischen Entwickelung folgend gestalten zu müssen. Dabei war er stets bemüht, Fragen, die noch ihrer Beantwortung harren, nicht aus dem Wege zu gehen, sondern auf dieselben hinzuweisen und sie nachdrücklich als offene zu bezeichnen.

Man könnte die Resultate der Forschungen über den zu behandelnden Gegenstand in zwei Kategorien sondern.

Die eine würde diejenigen Untersuchungen umfassen, die sich die Ausbildung von Methoden für die Integration einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zum Ziele setzen, in dem Sinne natürlich, wie eben die moderne Wissenschaft das Problem der Integration einer Differentialgleichung zu fassen gelehrt hat. Dahin gehörten also die verschiedenartigen Formen der Darstellung von Integralen, sowohl die allgemein, als auch die nur in beschränkten Bereichen gültigen, und ebenso die Auffindung der wechselseitigen Beziehungen zwischen diesen Darstellungsformen.

In die andere Kategorie wären diejenigen Untersuchungen zu verweisen, die sich auf besondere lineare Differentialgleichungen beziehen, sei es nun, dass man für lineare Differentialgleichungen, deren Coefficienten specielle Eigenschaften haben, die Natur der Integrale zu ergründen sucht, oder dass es sich darum handelt, die Gestalt der Coefficienten zu finden, wenn sich die Lösungen durch gewisse analytische Eigenschaften auszeichnen sollen. Hier wären z. B. die Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit eindeutigen doppeltperiodischen Coefficienten einzureihen, ferner die Theorie derjenigen linearen Differentialgleichungen, die durch bestimmte Integrale, durch eindeutige, algebraische oder sonst irgendwie charakterisirte Functionen befriedigt werden u. s. w.

Eine scharfe Scheidung zwischen diesen beiden Kategorien ist natürlicherweise nicht möglich; im Grossen und Ganzen ist aber der vorliegende erste Band der ersten, der in Vorbereitung begriffene zweite Band der zweiten Kategorie von Untersuchungen gewidmet. Da bei den letzteren wesentlich Methoden in Betracht kommen, die der Theorie der Substitutionsgruppen angehören, so wird auch diese Theorie erst im zweiten Bande Platz finden.

Zur Erleichterung der Uebersicht ist das Werk in Abschnitte und sind diese wieder in Kapitel eingetheilt; im Uebrigen besteht es aus fortlaufend numerirten Artikeln, deren Inhalt immer durch eine kurze Ueberschrift angedeutet wird. Die Litteraturnachweise sind nicht in den Text eingefügt, sondern nach dem Vorbilde des Lacroix'schen „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral“ mit dem Inhaltsverzeichnisse zu einem Nachschlageregister vereinigt worden. Man findet daselbst bei jeder Nummer zuerst, in der Aufeinanderfolge des Inhaltes, diejenigen Schriften genannt, in denen Sätze, Bezeichnungen, Gesichtspunkte, die in der betreffenden Nummer vorkommen, zum ersten Male in völlig präciser und bewusster Weise veröffentlicht sind. Hieran schliessen sich in chronologischer Reihenfolge die späteren Bearbeitungen derselben Gegenstände, soweit sie dem Verfasser als Quellen gedient haben und endlich folgen unter dem Schlagworte „vergl.“ Verweisungen, theils auf Darstellungen bei anderen Autoren (insbesondere ist bei Gegenständen, die auch in der vor kurzem erschienenen „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen“ von Lothar Heffter behandelt sind, fast immer auf die betreffende Stelle dieses Werkes hingedeutet worden), theils auf ältere

Schriften, in denen verwandte Gegenstände oft unter anderen Gesichtspunkten, oft auch in nicht ganz genauer Fassung behandelt oder berührt sind. Diejenigen in der historischen Einleitung erwähnten Schriften, deren Inhalt in späteren Nummern ausführlich dargestellt wird, finden sich erst bei den betreffenden Nummern angegeben. Im Texte selbst werden nur diejenigen Arbeiten genau citirt, in denen der Leser die ausführliche Darlegung einer vom Verfasser nur angedeuteten Deduction zu suchen hat. Vom Verfasser selbstständig geführte und anderweitig noch nicht veröffentlichte Untersuchungen sind als solche nicht besonders gekennzeichnet worden.

Der Verfasser war bemüht die Darstellung so zu geben, dass ein mit den Grundzügen der Functionenlehre vertrauter Leser derselben wohl ohne Schwierigkeit wird folgen können. Die vielfach erforderlichen Hülfsmittel aus der Determinantentheorie und Algebra wurden, soweit dieselben in den gewöhnlichen Lehrbüchern entweder garnicht, oder nicht unmittelbar in der Fassung, wie sie hier zur Verwendung gelangen, enthalten sind, ausführlicher entwickelt; die äussere Form, in welcher das geschehen ist und die Bezeichnungsweise, die dabei zur Anwendung kommt, sind dem Verfasser aus den Vorlesungen Leopold Kronecker's geläufig.

Bei der Revision der Druckbogen hatte sich der Verfasser der freundlichen Unterstützung des Herrn Professor Dr. Franz Meyer in Clausthal und der Beihülfe der Herren stud. Richard Fuchs und cand. W. Koch zu erfreuen; auch von dieser Stelle aus sei den genannten Herren für ihre Bemühungen der wärmste Dank ausgesprochen.

Ich kann diese Vorbemerkung nicht schliessen, ohne des Freundes zu gedenken, mit dem gemeinsam ich den Entschluss zur Herausgabe dieses Handbuches fasste, und durch dessen Hinscheiden mir ein unersetzlicher Mitarbeiter entrissen wurde. Als Paul Günther und ich im Frühjahr 1891 die Voranzeige zu diesem Werke in den „Mittheilungen" der Teubner'schen Verlagsbuchhandlung erliessen, ahnte noch Niemand, dass ein halbes Jahr später der allezeit frische und schaffensfreudige Günther nicht mehr unter den Lebenden weilen werde. Noch zu einer Zeit, wo ihn die tödtliche Krankheit schon mit aller Wucht erfasst hatte, war Günther mit Vorstudien für den ihm zufallenden Theil der Arbeit beschäftigt. Die Aufzeichnungen, die er sich in dieser Zeit gemacht hat und die mir wenige Monate nach seinem Tode durch Herrn Professor Dr. Fuchs übergeben wurden, bestehen aber fast ausschliesslich in Excerpten aus Abhandlungen von Thomé, Frobenius und Appell; ich habe nur bei Abfassung der Nummern 19 und 21 Einiges aus diesen Aufzeichnungen benutzen können. Dagegen war es mir eine wehmüthige Freude, dem Wunsche Günther's, dass ein Theil seiner Habilitationsvorlesung zu einer historischen Einleitung des Werkes verarbeitet werden sollte (vergl. die Fussnote auf S. 1), zu entsprechen. Möchte es mir gelungen sein, die Arbeit in seinem Sinne ausgeführt zu haben!

Berlin, im November 1894.

Ludwig Schlesinger.

Inhaltsverzeichniss und Litteraturnachweis.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Grundlagen der Theorie.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Zweiter Abschnitt.

Formale Theorieen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Fundamentalgleichung.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Vierter Abschnitt.

Die singulären Stellen, an denen sich die Integrale bestimmt verhalten.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 66, S. 138 ff.;
vergl. Heffter, Einleitung etc., S. 198 ff.

Fünfter Abschnitt.

Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Erstes Kapitel.

Poincaré, Acta Mathematica, Band 4, S. 205;
vergl. Puiseux, Liouville's Journal, Bände 15, 16.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 66, S. 139 ff.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 66, S. 149 ff.;
Frobenius, ebenda, Band 76, S. 224 ff.;
Seiffert, Inauguraldissertation (Göttingen 1875);
Heffter, Inauguraldissertation (Berlin 1886); Crelle's Journal, Band 106, S. 269; Band 109, S. 212; Einleitung etc., S. 212 ff.;
vergl. Pochhammer, Crelle's Journal, Band 102, S. 76; Band 108, S. 50; Schafheitlin, ebenda, Band 106, S. 285.

Zweites Kapitel.

Thomé, Crelle's Journal, Band 87, S. 247 ff., 331 ff.; Band 95, S. 97; Band 100, S. 167 ff.;
vergl. Abel, ebenda, Band 1, S. 311 ff.; Dirichlet, ebenda, Band 4, S. 157 ff.; Band 17, S. 54;
Riemann, Abhandlungen der Göttinger Societät, Band 7, Art. 8.

Drittes Kapitel.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 76, S. 183 ff.; Band 66, S. 142, 145, 159.

D'Alembert, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1748, S. 283 ff.;
Euler, Institutiones calculi integralis, Band 2 (1827), S. 317 ff.;
Cauchy, Exercices de Mathémat. (1826),

Viertes Kapitel.

Sechster Abschnitt.

Die Entwickelung der Integrale innerhalb eines Kreisringes.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Siebenter Abschnitt.

Allgemeingültige Darstellungen der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Achter Abschnitt.

Die Berechnung der Fundamentalsubstitutionen für eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Historische Einleitung.*)

1. Problem der Integration einer Differentialgleichung bei den älteren Analysten. Einführung der complexen Grössen.

Seit der Erfindung der Differentialrechnung hat das Problem der Integration von Differentialgleichungen im Vordergrunde des Interesses der Mathematiker gestanden, denn fast alle Aufgaben der angewandten, aber auch eine grosse Zahl solcher der reinen Mathematik führten auf Differentialgleichungen, denen eine zu bestimmende Function zu genügen hatte. Die Geschichte der Mathematik lehrt aber, dass die Auffassung des Problems der Integration einer Differentialgleichung eine lange Reihe von Entwickelungsstadien durchmachen musste, bis man sich zur völligen Klarheit darüber durchgerungen hatte, in wie weit die Aufgabe der Bestimmung einer Function ihrer Lösung näher gebracht ist, wenn es gelingt eine Differentialgleichung, der diese Function genügt, aufzustellen.

Die einfachste Art von Differentialgleichungen, die sich darbot, war diejenige, der der Inhalt eines von der Abscissenachse, einer Curve und zwei Ordinaten derselben begrenzten Flächenstücks, als Function der Bestimmungsstücke eines Punktes dieser Curve genügt, und bald nachdem man eingesehen, dass diese Function nur in den seltensten Fällen in geschlossener Form hergestellt werden kann, gelang es Näherungsmethoden ausfindig zu machen, die eine für die Praxis ausreichende Berechnung dieses Flächeninhalts gestatteten; man nannte diese Methoden, die bis auf Newton zurückreichen (vergl. Roger Cotes: Harmonia mensurarum; de methodo differentiali Newtoniana; 1722) mechanische Quadraturen. Naturgemäss ging das Bestreben der

*) Die historische Einleitung wurde mit Benutzung des schätzenswerthen Materials verfasst, welches sich in der von meinem verstorbenen Freunde Günther bei Gelegenheit seiner Habilitation gehaltenen öffentlichen Probevorlesung „Die geschichtliche Entwickelung der modernen Theorie der Differentialgleichungen" vorfand; dieselbe ist darum als eine gemeinsame Arbeit von Günther und mir anzusehen.

Mathematiker nun dahin, auch für Functionen, die complicirteren Differentialgleichungen genügen, ein ähnliches Berechnungsverfahren zu erlangen, und man versuchte darum, wenn eine Differentialgleichung vorgelegt war, dieselbe auf Quadraturen zurückzuführen.

Abgesehen davon, dass diese Zurückführung nur ausnahmsweise gelang, traten bald noch andere Umstände hervor, die ein Hinausgehen über die Methode der mechanischen Quadratur erforderlich machten. Diese Methode lieferte nämlich zwar mit beliebiger Annäherung den Werth des Flächeninhalts, wenn das Flächenstück zwischen zwei durch feste Punkte der begrenzenden Curve hindurchgelegten Ordinaten genommen wurde, sie liess aber nicht erkennen, wie sich der Werth jenes Flächeninhalts ändert, wenn etwa der eine dieser Punkte veränderlich gedacht wird. Diese Aenderung liess sich nur verfolgen, wenn ein expliciter Ausdruck gefunden war, der das Flächenstück durch den Werth der veränderlichen Abscisse darstellt, und dies war im Allgemeinen nicht zu erreichen, wenn man sich auf die elementaren Functionen, für welche Tafeln vorhanden waren, beschränkte. Während nun hervorragende Mathematiker bestrebt waren, den Kreis der explicite darstellbaren Functionen immer mehr zu erweitern, indem sie wie z. B. Euler, Lagrange und Legendre zu Reihenentwickelungen und anderen Grenzprocessen ihre Zuflucht nahmen und dann auf Grund derselben Tafeln für die so dargestellten Functionen berechneten, quälte sich die Mehrzahl der Analysten mit meist vergeblichen Bemühungen, möglichst viele Quadraturen in den Rahmen der bekannten elementaren Functionen hinein zu zwängen, um dieselben auf diese Weise für die Benutzung der vorhandenen, im Gebrauch befindlichen Tafeln zugänglich zu machen.

Wir bemerken hier eine analoge Erscheinung, wie sie in der Algebra bei der Auflösung der Gleichungen hervortrat. Auch wieder war es Newton, der Näherungsmethoden für die Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung angegeben hatte, aber das allgemeine Bestreben ging dahin, die Auflösung einer vorgelegten Gleichung durch Wurzelgrössen zu bewirken, da deren Berechnung leicht mit Hülfe von Ketten- oder Decimalbrüchen geleistet werden konnte. Allmählich erkannte man, und Ruffini hat es im Jahre 1805 zuerst ausgesprochen, dass eine solche Auflösung im Allgemeinen nicht möglich sei, und je mehr diese Unmöglichkeit sich im Bewusstsein der Mathematiker befestigte, um so dringender sah man sich vor eine Frage gestellt, deren Beantwortung Methoden zeitigte, die auch für das Problem der Integration einer Differentialgleichung von folgenreichster Bedeutung wurden. Es entstand nämlich die Frage: ist denn überhaupt eine jede Gleichung auflösbar, und die Antwort hierauf konnte, wie Gauss zuerst 1799 streng gezeigt hat, im bejahenden Sinne nur dann gegeben werden, wenn man das Grössengebiet durch endgültige Einführung der complexen Zahlen erweiterte. Durch diese Erweiterung des Grössengebietes hatte schon früher Euler viele analytische Fragen in einem neuen Lichte erscheinen lassen. Die unendlich vielen Werthe des Logarithmus, den Zusammenhang der Exponentialfunction mit den trigonometrischen Functionen hatte er entdeckt, aber erst die genialste Anwendung des zu jener Zeit noch mit einem gewissen mystischen Zauber umhüllten i, die Entdeckung der elliptischen Functionen durch Abel und Jacobi im Jahre 1827, die mit einem Schlage nicht nur all' die räthselhaften Erscheinungen erklärte, die Legendre in fünfzigjähriger mühevoller Arbeit an den elliptischen Integralen beobachtet hatte, sondern auch neue, ungeahnte Eigenschaften derselben hervortreten liess, verschaffte den complexen Grössen volles Bürgerrecht in der Mathematik.

2. Begründung der Functionentheorie durch Cauchy. Existenztheorem. Briot und Bouquet.

Eine unbeschreibliche Bewegung erhob sich dadurch auf allen Gebieten der Analysis, und die Entwickelung, zu der diese Wissenschaft und mit ihr auch die Algebra, die Arithmetik, die Geometrie in unserem Jahrhundert gelangt ist, lässt sich gleichsam einem Fortwirken des mächtigen Impulses zuschreiben, den diese Bewegung auf die mathematische Forschung ausübte. Die aus früherer Zeit überkommenen Probleme wurden neu aufgenommen, neue bis dahin unberührt gebliebene wurden formulirt, kühn gemacht durch die glänzenden Ergebnisse der Theorie der elliptischen Integrale ging Abel an die Behandlung der Integrale beliebiger algebraischer Differentiale, und aus den für die Behandlung dieser Probleme nach und nach ausgebildeten Hülfsmitteln erwuchs eine neue Disciplin, die Theorie der Functionen complexer Variabeln.

Ein gewaltiger Geist, A. L. Cauchy, ist der Vater dieser Theorie, und mit Bewunderung liest man in seinen Schriften, wie all' die leitenden Principien, die gegenwärtig die Analysis beherrschen, von ihm in voller Klarheit erkannt und mit höchster Meisterschaft ausgebildet worden sind. Freilich bedurfte es noch langer Jahre, noch grosser geistiger Arbeitsleistung, bis diese Principien so zum Gemeingut der Mathematiker werden konnten, wie es heute der Fall ist, und gerade dies ist ein Umstand, der nur zu oft übersehen wurde und darum nicht eindringlich genug zum Bewusstsein gebracht zu werden verdient.

Nachdem Cauchy den Begriff der monogenen Function einer complexen Variabeln genau formulirt hatte, baute er in dem Mémoire sur les intégrales définies (1825), seine Theorie der Integrale solcher Functionen auf und zeigte mit Hülfe derselben, dass jede monogene Function in der Umgebung einer Stelle, wo sie eindeutig, endlich und stetig ist, nach positiven ganzen Potenzen des Increments entwickelbar und auch auf Grund des Princips der Fortsetzung, durch Angabe einer einzigen solchen, nur in beschränktem Bereiche gültigen Reihenentwickelung, in ihrem ganzen Verlaufe vollkommen bestimmt sei. Damit war ihm aber zugleich die Möglichkeit geboten, die analoge Frage für Differentialgleichungen in Angriff zu nehmen, die Gauss durch seinen Existenzbeweis für die algebraischen Gleichungen erledigt hatte, nämlich die Frage nach der Existenz eines Integrals.

Schon die älteren Analysten hatten, wenn die Integration einer Differentialgleichung in geschlossener Form nicht möglich war, nicht nur für den Fall von Quadraturen, sondern auch in allgemeineren Fällen die sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten angewandt, d. h. in die Differentialgleichung für die unbekannte Function eine Reihe substituirt, die nach positiven ganzen Potenzen der Variabeln fortschreitet und die Coefficienten dieser Reihe durch Recursionsformeln zu berechnen gesucht. Wenn diese Berechnung gelang und noch eine Anzahl erster Coefficienten unbestimmt blieb, so sahen sie diese letzteren als die Constanten der Integration, die Reihe aber als ein Integral der Differentialgleichung an, ohne sich indessen von der Convergenz derselben Rechenschaft zu geben. Wenn trotzdem Mathematiker wie Euler und Lagrange, durch eine glückliche Intuition, Fehler vermieden, so war dies doch bei minder begabten Analysten nicht immer der Fall, und die Anwendung von Reihen, ohne Prüfung ihrer Convergenz, führte oft auf unlösbare Widersprüche, zu deren Beseitigung dann manchmal die abenteuerlichsten Erklärungen versucht wurden. Wie in vielen anderen Gebieten der Mathematik hat Cauchy auch bei diesen Betrachtungen der erforderlichen Strenge Eingang verschafft. In den 1823 veröffentlichten Vorlesungen an der École Polytechnique und später in einer lithographirten Abhandlung aus der Zeit seines Prager Aufenthaltes (1835), (vergl. die Nouveaux Exercices vom Jahre 1840), zeigte Cauchy, dass für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung (und auf ein solches lässt sich ja jedes System von Differentialgleichungen zurückführen) zunächst stets ein System von Potenzreihen aufgestellt werden kann, welches die Differentialgleichungen formell befriedigt, dass sich aber auch mit Hülfe des von ihm begründeten Calcul des limites die Convergenz dieser Potenzreihen erweisen lässt, indem man dieselben mit gewissen geometrischen Progressionen vergleicht. Cauchy mag bei diesen Untersuchungen anfänglich wohl insbesondere die Sicherstellung der legitimen Anwendbarkeit solcher Reihen für die Fälle der Praxis im Auge gehabt haben, er unternimmt es aber bald (namentlich in den Comptes Rendus der Pariser Akademie von 1846 ab) auf die allgemeinen Differentialgleichungen dieselben Principien anzuwenden, auf die er schon lange vorher das Studium der Integrale von Functionen einer complexen Variabeln gegründet hatte.

Ist eine Potenzreihe convergent und so beschaffen, dass sie einer gegebenen Differentialgleichung genügt, so ist sie ein Integral dieser Differentialgleichung und kann dazu dienen, die Werthe der durch dieselbe dargestellten Function und ihrer successiven Ableitungen in irgend einem im Innern ihres Convergenzkreises gelegenen Punkte zu berechnen. Diese Werthe bestimmen dann die Coefficienten einer neuen Potenzreihe, deren Convergenzkreis im Allgemeinen über den der ursprünglichen hinausgreift, und die wieder der Differentialgleichung genügt. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt Cauchy zum Begriff der Fortsetzung eines Integrals auf gegebenem Wege, er unterscheidet geradlinige und krummlinige Integrale, die Gesammtheit aller, durch alle möglichen Fortsetzungen erhaltenen Potenzreihen nennt er das vollständige Integral. Das Vorhandensein von Punkten, für die keine convergente Potenzreihe, die der Differentialgleichung genügt, vorhanden ist — points isolés nennt sie Cauchy, in der gegenwärtig gebräuchlichen Terminologie nennt man sie singuläre Punkte — die also bei der Fortsetzung vermieden werden müssen, bewirkt im Allgemeinen Vieldeutigkeit des Integrals, dagegen sind die Werthe desselben für zwei Wege, die keinen solchen Punkt einschliessen, stets einander gleich. Man kann also eine eindeutige Bestimmung des Integrals für alle der Fortsetzung zugänglichen Punkte erreichen, wenn man festsetzt, es dürften gewisse die points isolés verbindende Linien nicht überschritten werden.

Diese völlig neuen Principien Cauchy's wurden alsbald in Frankreich von mehreren seiner Schüler mit Eifer aufgenommen und mit Erfolg auf die Behandlung von Fragen angewandt, die für die Entwickelung der Theorie der Differentialgleichungen von grundlegender Bedeutung werden sollten. Schon Cauchy selbst hatte sich einen neuen Eingang in die Theorie der elliptischen Functionen zu verschaffen gesucht, indem er von der Differentialgleichung ausging, der die obere Grenze eines elliptischen Integrals erster Gattung als Function des Integralwerthes genügt. Fast gleichzeitig mit Eisenstein, dessen Abhandlung 1845 in französischer Uebersetzung erschien, gelangt Cauchy so zu einer Begründung dieser Theorie mit Hülfe von unendlichen Producten, später zerlegt er jene Differentialgleichung in zwei, denen Zähler und Nenner der elliptischen Function genügen, verwendet also dasselbe Princip, auf welches Herr Weierstrass seine Theorie der elliptischen und in der grossen Abhandlung (Crelle's Journal Bd. 52, 1856) auch die allgemeine Theorie der hyperelliptischen Functionen gegründet hat. Liouville hat die Cauchy'sche Behandlungsweise der elliptischen Functionen in seinen Vorlesungen am Collège de France weiter ausgebaut und dadurch zwei seiner Zuhörer, Briot und Bouquet zu Untersuchungen angeregt, die auf die Beantwortung der Frage hinzielen, wann eine Differentialgleichung der Form

$$f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0,$$

wo f den Algorithmus einer ganzen rationalen Function bedeutet, durch eine eindeutige Function von z befriedigt wird. In ihrer Abhandlung aus dem Jahre 1856 und in dem 1859 erschienenen Buche „Théorie des Fonctions doublement périodiques“ geben diese beiden Mathematiker nebst einer vereinfachten Darstellung des Cauchy'schen Existenztheorems, eine im Allgemeinen erschöpfende Behandlung der gedachten Frage und nehmen auch die von Cauchy bei Seite gelassene Untersuchung des Verhaltens der Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung singulärer Punkte in Angriff. Das Erscheinen des Briot und Bouquet'schen Buches hatte für die Verbreitung der Cauchy'schen Principien eine weittragende Bedeutung, namentlich auch in Deutschland, obwohl hier die neue Functionenlehre schon lange vorher Eingang und bedeutende Förderung gefunden hatte.

3. Entwickelung der Functionentheorie in Deutschland bis 1865, Weierstrass, Riemann. Gauss.

Schon in den vierziger Jahren hatte Herr Weierstrass bei Gelegenheit von Untersuchungen über die von damaligen Mathematikern vielfach behandelte Facultätentheorie wichtige Beiträge zur Functionenlehre geliefert und auch einige Resultate seiner bahnbrechenden Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Integrale und Functionen, namentlich die Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln und die Grundlagen der Theorie der allgemeinen Θ-Function veröffentlicht. Im Jahre 1851 griff Riemann in durchaus origineller und durch die Tiefe seiner Methoden erstaunlicher Weise in die Entwickelung der Functionentheorie ein. Indem er in einer monogenen Function einer complexen Variabeln den realen Theil und den Coefficienten von i gesondert untersuchte, gelang es ihm unter Anwendung eines von

Dirichlet für die Potentialtheorie gegebenen Princips, die zur Bestimmung einer monogenen Function erforderlichen und hinreichenden Angaben aufzufinden und damit die Analysis in ganz neue Bahnen zu lenken. Auf Wunsch von Crelle gab Herr Weierstrass 1855 eine ausführliche Darstellung seiner Theorie der Facultäten und im folgenden Jahre erschien die schon erwähnte grosse Abhandlung über Abel'sche Functionen, der 1857 Riemann's Arbeit über den gleichen Gegenstand folgte. Die glänzenden Resultate, die Riemann in dieser Arbeit mit seinen Methoden für die Abel'schen Transcendenten erzielt hatte, versprachen noch weitere reiche Früchte von der Anwendung derselben. Noch früher als in der Theorie der Abel'schen Functionen hatte Riemann seine Bestimmungsweise einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen für die Untersuchung der durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen nutzbar gemacht, und er bemerkt sogar in der Einleitung zu seiner über diesen Gegenstand 1857 veröffentlichten Abhandlung, dass dieselbe Methode „im Wesentlichen auf jede Function, die einer linearen Differentialgleichung genügt, anwendbar bleibe“. Seine Absicht, eine auf die von ihm aufgestellten Principien gegründete Theorie dieser Functionen zu geben, spricht er auch in der Abhandlung über Abel'sche Functionen (Nr. 25) aus, seine kurze mathematische Laufbahn hat es ihm jedoch nicht gestattet diese Absicht auszuführen, und nur aus einigen später (1876) aus seinem Nachlass veröffentlichten Notizen sind uns die leitenden Gedanken der von ihm geplanten Darstellung der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten bekannt geworden, zu einer Zeit, als diese Theorie schon von anderer Seite her entwickelt vorlag.

Wie aus dem 1869 veröffentlichten Nachlass und dem 1880 veröffentlichten Briefwechsel mit Bessel hervorgeht, scheint auch schon Gauss seinen Zeitgenossen weit voraneilend das Princip der Fortsetzung einer Reihe, die einer Differentialgleichung genügt, erkannt zu haben. In einem Briefe vom 21. November 1811 schreibt er darüber an Bessel: „Eine Reihe, die nicht immer convergirt, kann auch nur innerhalb der Schranken, wo sie convergirt als Definition gelten, und die Frage, was aus der Function werden soll, wenn man das Argument jene Schranken überschreiten lässt, verträgt nur dann erst eine Antwort, wenn ein höheres Princip zur Definition aufgefunden ist, wie bei meiner Reihe die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, nach welcher jedem reellen oder imaginären Werthe des Arguments vermittelst eines stetigen Ueberganges von $x = 0$ ohne $x = 1$ zu berühren (was durch imaginäre Zwischenwerthe geschehen kann) ein, gewöhnlich mehrere, ja unendlich viele Werthe der Function entsprechen.“

Mit fast denselben Worten setzt er dieses Princip auch in der Einleitung zu seiner nachgelassenen Arbeit über die hypergeometrische Reihe auseinander und verwendet es, wenn auch nicht unmittelbar, so doch in deutlich erkennbaren Spuren bei der Untersuchung dieser merkwürdigen schon von Euler gekannten Reihe, die seither für die Entwickelung der Analysis eine so ausserordentliche Wichtigkeit erlangt hat. Aber ebenso wie Gauss' Arbeiten über die elliptischen Functionen blieben auch diese seine Untersuchungen ohne jeden Einfluss auf den Gedankengang seiner Zeitgenossen, weil dieselben zu einer Zeit bekannt wurden, als die Principien, die Gauss nur erst andeutet, längst durch die Arbeiten anderer Mathematiker allgemeine Verbreitung gefunden hatten.

So war denn auch auf deutschem Boden schon ein mächtiger Stamm functionentheoretischer Forschung erwachsen, aber nur schwer fanden die neuen Principien Eingang in weitere, namentlich in die jüngeren mathematischen Kreise des fünften und sechsten Decenniums. Besonders die Arbeiten Riemann's boten, wohl in Folge der durchaus neuen und ungewohnten Denk- und Auffassungsweise, die sich in ihnen kundgab, vielleicht auch wegen der kurzen, jedes überflüssige erklärende Wort vermeidenden Darstellung, die für Riemann so charakteristisch ist, dem Verständnisse bedeutende Schwierigkeiten dar; die Abhandlung über die Gauss'sche Reihe blieb, wie man aus dem Munde von Mathematikern, die jene Zeit mit erlebt haben, immer wieder hören kann, ein Buch mit sieben Siegeln, in dessen Inneres nur Wenige einzudringen vermochten. Mit Eifer wurde darum auch in Deutschland das Werk von Briot und Bouquet aufgenommen und mit seiner klaren, leicht fasslichen Darstellung verbreitete es bald die Kenntniss der Cauchyschen Methoden und ihrer Anwendungen auf die Theorie der elliptischen Functionen und der Differentialgleichungen. Aber die von Cauchy geschaffenen Grundlagen allein vermochten es nicht, der Theorie der Differentialgleichungen denjenigen Impuls zu verleihen, dessen sie bedurfte, um sich den Errungenschaften der modernen Functionentheorie ganz anzupassen; dies konnte nur dadurch geschehen, dass die Integration einer umfassenden Klasse von Differentialgleichungen auf Grund der neueren Methoden wirklich in Angriff genommen wurde, und zwar ohne, wie es Briot und Bouquet für die von ihnen behandelten Differentialgleichungen erster Ordnung gethan hatten, über die Natur der Functionen, die der vorgelegten Differentialgleichung genügen, von vorneherein bestimmte Annahmen zu machen. Dieser Schritt wurde von Herrn Fuchs ausgeführt, der in seiner Programmarbeit (1865) und später im 66. Bande von Crelle's Journal eine Behandlung der linearen Differentialgleichungen auf functionentheoretischer Grundlage gab und damit nicht nur die Theorie dieser besonderen Art von Differentialgleichungen, sondern die Theorie der Differentialgleichungen überhaupt in die Bahnen der neueren Functionenlehre lenkte.

4. Begründung der modernen Theorie der linearen Differentialgleichungen durch Fuchs. Uebersicht über die bisherige Entwickelung dieser Theorie.

„Nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft — so beginnt Herr Fuchs seine Abhandlung — stellt man sich in der Theorie der Differentialgleichungen nicht sowohl die Aufgabe, eine gegebene Differentialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, als vielmehr die, den Verlauf ihrer Integrale, für alle Punkte der Ebene, d. h. für alle Werthe der unbeschränkt Veränderlichen aus der Differentialgleichung selbst abzuleiten.“ In diesen Worten liegt die Formulirung dessen, was man in modernem Sinne unter der Integration einer Differentialgleichung zu verstehen hat; die Fruchtbarkeit dieser Art der Problemstellung hat sich durch eine lange Reihe glänzender Resultate bestätigt, deren Begründung mit der erwähnten Fuchs'schen Arbeit ihren Anfang genommen hat. Bald nach dem Erscheinen dieser und einer kurz auf dieselbe folgenden zweiten Arbeit desselben Verfassers vereinigte sich eine Anzahl deutscher Mathematiker mit Herrn Fuchs in dem Bestreben, die Theorie der linearen Differentialgleichungen, diese „dem mathematischen Königreiche neu hinzugefügte Provinz“ weiter zu durchforschen und auszubauen. Auch nach Frankreich wurde die neue Theorie auf Anregung von Herrn Hermite bald dadurch verpflanzt, dass einige jüngere Mathematiker eine Darstellung der von Herrn Fuchs und seinen deutschen Mitarbeitern Hamburger, Frobenius und Thomé erlangten Resultate in französischer Sprache veröffentlichten. Seither sind unserer Theorie gerade aus Frankreich eine ganze Reihe tiefsinniger und bedeutungsvoller Ergebnisse zugeflossen, und man kann wohl sagen, dass die Theorie der linearen Differentialgleichungen einem grossen und wichtigen Theil der analytischen Forschung der letzten fünfundzwanzig Jahre und der Gegenwart ihr Gepräge aufgedrückt hat.

Bald nachdem die Fundamente der neuen Theorie entwickelt waren, ergaben sich die regsten Wechselbeziehungen zwischen derselben und den anderen Theilen der Analysis, sowie der Algebra, der Zahlentheorie, der Geometrie, indem theils die Theorie der linearen Differentialgleichungen von den Ergebnissen jener Disciplinen Gebrauch machte, theils denselben neue Aufgaben stellte, die dann oft eine wesentliche Förderung der betreffenden Disciplin zur Folge hatten.

Auf die Bedeutung der Theorie der linearen Differentialgleichungen für die Abel'schen Functionen hatte, wie bereits erwähnt, schon Riemann hingewiesen. Herr Fuchs unterwarf diejenigen Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmodulu der Abel'schen Integrale als Functionen der Riemann'schen Classeninvarianten genügen, einer eingehenden Untersuchung und gelangte, indem er namentlich die Legendre'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen die Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung genügen, discutirte, zu einer Reihe von Resultaten, die für die Zahlentheorie und die Theorie der elliptischen Functionen von grösster Wichtigkeit waren. Für die letztere Theorie wurden auch insbesondere diejenigen Untersuchungen fruchtbar, die die Herren Fuchs und Hermite über die sogenannten Lamé'schen Differentialgleichungen anstellten, die Anwendung derselben auf Probleme der Mechanik wie sie Herr Hermite in seinen „Applications" (Paris 1885) gegeben hat, gehören zu den schönsten Bereicherungen, die die moderne Analysis diesem feinsinnigen Mathematiker verdankt.

Die Theorie der Determinanten und der bilinearen Formen war schon bei Entwickelung der Fundamente unserer Theorie in Anwendung gekommen, und indem Herr Fuchs die Frage nach den durch algebraische Functionen integrirbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Angriff nahm — eine Frage die für die specielle Differentialgleichung, der die Gauss'sche Reihe genügt, schon früher von Herrn Schwarz mit Hülfe gewisser aus Kreisbogendreiecken auf der Kugel gebildeten Configurationen behandelt worden war — ergaben sich enge Beziehungen auch zu anderen Theilen der Algebra, namentlich zur Invariantentheorie algebraischer Formen und zur Gruppentheorie. Die Beziehungen zu der letztgenannten Disciplin im Zusammenhang mit den algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung hat namentlich Herr Camille Jordan weiter verfolgt und aus dem Studium der „Gruppe einer linearen Differentialgleichung" entsprang für die Gruppentheorie eine Anzahl wichtiger und interessanter Probleme. Das Problem der algebraischen Integrabilität wurde dann durch Herrn Fuchs auf andere Weise in Angriff genommen, wodurch dasselbe mit bemerkenswerthen Differentialausdrücken invarianter Natur in Verbindung trat, die als Differentialinvarianten von den Herren Laguerre, Brioschi, Halphén u. A. eingehend studirt worden sind.

Eine gewisse formale Analogie der linearen Differentialgleichungen mit den algebraischen Gleichungen hatte schon Lagrange und Libri zu interessanten Untersuchungen veranlasst, diese wurden jetzt durch die Herren Frobenius und Thomé mit Hülfe von gewissen aus der Transformation der linearen Differentialgleichungen hervorgegangenen formalen Ansätzen vertieft, besonders aber auch von Herrn Fuchs bei Gelegenheit von Studien rein functionentheoretischer Natur wieder aufgenommen und weiter ausgebaut, Studien, die sich einerseits auf eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Lösungen linearer Differentialgleichungen, andererseits auf die Frage nach der Vertauschbarkeit von Parameter und Argument bezogen, die Abel und Jacobi von den Integralen algebraischer Differentiale auf die Lösungen beliebiger linearer Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten übertragen hatten.

Ein durchaus neues Gebiet der Functionenlehre erschlossen die von Herrn Fuchs formulirten Umkehrungsfragen, indem dieselben einestheils auf eine Verallgemeinerung der Abel'schen Transcendenten, anderentheils auf diejenigen eindeutigen Functionen einer unabhängigen Variabeln führten, die bei einer Gruppe linearer Substitutionen ungeändert bleiben. Die Theorie dieser letztgenannten Functionen wurde von Herrn Poincaré in grossartigster Weise ausgebaut und ergab die Möglichkeit, abhängige und unabhängige Variable einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten und ebenso zwei durch eine algebraische Gleichung von beliebigem Range verknüpfte Veränderliche als eindeutige Functionen eines Parameters darzustellen, ähnlich wie dies für die Gleichungen vom Range Null mit Hülfe von rationalen, für die Gleichungen vom Range Eins mit Hülfe der elliptischen Functionen schon seit längerer Zeit geschehen war. Diese Arbeiten von Herrn Poincaré über die von ihm sogenannten Fuchs-schen und Klein'schen Functionen liessen Beziehungen zwischen den in Rede stehenden Problemen und gewissen Abbildungsaufgaben hervortreten, die schon früher von Riemann, den Herren Schwarz, Schottky u. A. behandelt worden waren; an dieselben schlossen sich die auf den gleichen Gegenstand bezüglichen Arbeiten des Herrn Klein und die eine Verallgemeinerung auf Functionen von zwei Veränderlichen bezweckenden der Herren Picard und Appell an.

Wenn wir so schon auf eine bedeutsame Entwickelung der verhältnissmässig noch jungen Disciplin der Theorie der linearen Differentialgleichungen zurückblicken können, so bietet dieselbe auf der anderen Seite noch eine Fülle von Aufgaben dar, die ihrer Lösung harren, und es ist zu erwarten, dass die Behandlung derselben nicht nur das Dunkel, welches noch über vielen Theilen unserer Theorie lagert, aufhellen, sondern der Functionentheorie, sowie der Algebra und der Arithmetik auch fernerhin zahlreiche neue Quellen der Erkenntniss erschliessen werde.

Einleitung.

5. Monogene Functionen. Cauchy's Existenztheorem.

Das Problem der Integration einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen wird, wie bereits hervorgehoben, von der modernen Analysis dahin gefasst, den Verlauf der Integrale für alle complexen Werthe der unabhängigen Variabeln zu bestimmen. Als Grundlage hierzu dient der erwähnte Cauchy'sche Satz, der bei gegebenen Anfangsbedingungen die Existenz eines Integrals als monogener analytischer Function feststellt*). Um eine monogene analytische Function von einer oder mehreren complexen Veränderlichen zu determiniren, genügt es bekanntlich, wenn man ein Element derselben, d. h. eine nach positiven ganzen Potenzen von linearen Functionen jeder einzelnen Veränderlichen fortschreitende Reihe, eine gewöhnliche Potenzreihe, kennt, die innerhalb ihres Convergenzbereichs die Function darstellt. Durch Fortsetzung dieser Reihe erhält man successive die Entwickelungen der sämmtlichen Zweige der monogenen Function in der Umgebung derjenigen Stellen, für die eine Entwickelung in eine gewöhnliche Potenzreihe überhaupt möglich ist, d. h. in der Umgebung aller regulären Stellen der Function. Die Berechtigung, den Begriff der monogenen Function gerade in dieser Weise zu fassen, wird durch das folgende, aus der Functionenlehre bekannte Theorem nachgewiesen.

Besteht zwischen einer gewissen Anzahl von Potenzreihen

$$f_1, f_2, \cdots f_n,$$

die nach Potenzen von

$$x_1 - a_1, \quad x_2 - a_2, \quad \cdots \quad x_m - a_m$$

fortschreiten, eine analytische Gleichung

(1) $$G(f_1, f_2, \cdots f_n) = 0,$$

*) Die Fragen nach der Existenz von Integralen, die nur als Functionen von reellen Veränderlichen definirt sind, kommen für unsere Zwecke nicht in Betracht.

so wird derselben innerhalb des Existenzbereiches der Function G auch durch jedes System von Potenzreihen genügt, die aus $f_1, \cdots f_n$ durch analytische Fortsetzung hervorgehen; ist z. B. der Existenzbereich von G ein unbeschränkter, bedeutet etwa G eine ganze rationale Function, so wird die zwischen den Functionselementen $f_1, f_2, \cdots f_n$ bestehende Gleichung (1) durch die aus diesen Elementen entspringenden monogenen Functionen in ihrer ganzen Ausdehnung befriedigt werden.

Wird also z. B. eine gewöhnliche algebraische Differentialgleichung, d. h. eine Gleichung

$$G\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{2}$$

wo G eine ganze rationale Function ihrer Argumente mit noch von x abhängigen Coefficienten bedeutet, durch eine gewöhnliche Potenzreihe

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

befriedigt, so genügt auch die aus dieser Reihe durch Fortsetzung hervorgehende monogene Function dieser selben Differentialgleichung, d. h. diese hat eine monogene Function der complexen Variabeln x zum Integral.

Der von Cauchy aufgestellte Fundamentalsatz lautet nun für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (und ein solches begreift ja offenbar den allgemeinsten Fall eines Systems von Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen in sich) wie folgt:

Sei gegeben das Gleichungssystem:

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = f_\varkappa(x, y_0, y_1, \cdots y_{n-1}), \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1), \tag{3}$$

und seien $f_0, f_1, \cdots f_n$ monogene Functionen ihrer Argumente, die sich in einer gewissen Umgebung der Stelle

$$x = \xi, \quad y_0 = \eta_0, \quad y_1 = \eta_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = \eta_{n-1},$$

nach positiven ganzen Potenzen von

$$x - \xi, \quad y_0 - \eta_0, \quad y_1 - \eta_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} - \eta_{n-1},$$

entwickeln lassen, dann giebt es stets n, nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$ entwickelbare und in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = \xi$ convergirende Reihen, die für $y_0, y_1, \cdots y_{n-1}$ eingesetzt die Gleichungen (3) befriedigen und für $x = \xi$ die Werthe $\eta_0, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ annehmen. Diese Reihen sind durch die angegebenen Forderungen auch unzweideutig bestimmt.

Hieraus folgt also die eindeutig bestimmte Existenz eines Systems monogener Functionen $y_0, y_1, \cdots y_{n-1}$ von x, die Lösungen der Differentialgleichungen (3) darstellen, sich in der Umgebung von $x = \xi$ regulär verhalten und die Bedingungen, für $x = \xi$ die Werthe $\eta_0, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ anzunehmen, erfüllen. Diese letzteren Bedingungen, durch deren Angabe das System von Lösungen erst eindeutig bestimmt wird, nennt man die Anfangsbedingungen, die Werthe $\xi, \eta_0, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ selbst die Anfangswerthe der Variabeln, beziehungsweise des Integralsystems. Wenn die Functionen $f_\varkappa$ noch von gewissen Parametern abhängen, als deren analytische Functionen sie aufgefasst werden können, wenn überdies auch die Anfangswerthe $\xi, \eta_0, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ monogene Functionen dieser Parameter sind, so sind auch die so definirten Lösungen $y_0, y_1, \cdots y_{n-1}$ monogene Functionen jener Parameter.

Um diesen Satz auf die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (2) anwenden zu können, haben wir nur

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dx} = y_1, \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_{n-1},$$

zu setzen, wodurch wir das der Gleichung (3) äquivalente System:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dy_0}{dx} = y_1, \\ &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\vdots \\ &\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ &G\left(y_0, \quad y_1, \quad \cdots \quad y_{n-1}, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

erhalten. Bezeichnet nun $x = \xi$ einen Werth, in dessen Umgebung die Coefficienten der ganzen rationalen Function G in gewöhnliche Potenzreihen von $x - \xi$ entwickelbar sind, besitzt ferner die Gleichung

$$(5) \qquad G(\eta_0, \eta_1, \quad \cdots \quad \eta_{n-1}, \eta) = 0$$

für $x = \xi$ eine einfache Wurzel $\eta = \eta_n$, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung des Systems (4)

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f_{n-1}(x, \quad y_0, \quad y_1, \quad \cdots \quad y_{n-2}, \quad y_{n-1}),$$

wo f_{n-1} eine nach ganzen positiven Potenzen von

$$x - \xi, \quad y_0 - \eta_0, \quad y_1 - \eta_1, \quad \cdots, \quad y_{n-1} - \eta_{n-1}$$

fortschreitende Reihe bedeutet, und wir können somit sagen: die

Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (3) besitzt ein Integral*), welches für $x = \xi$ mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen die Werthe $\eta_0, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ annimmt; dasselbe ist eindeutig bestimmt, wenn auch noch diejenige einfache Wurzel η_n der Gleichung (5) vorgeschrieben wird, die den Werth der n^{ten} Ableitung für $x = \xi$ angeben soll.

6. Singuläre Punkte eines Integrals.

Die Bestimmung einer Function aus einem ihrer Elemente, d. h. aus einer sie in der Umgebung eines gewissen Punktes darstellenden gewöhnlichen Potenzreihe, ist praktisch nur in den seltensten Fällen durchführbar, weil die Berechnung der Coefficienten der durch Fortsetzung entstehenden Potenzreihen gewöhnlich schon beim ersten Schritte unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet. Man wird daher das Theorem von Cauchy nur insofern als Grundlage für die Theorie der Differentialgleichungen anzusehen haben, als es die Existenz der Integrale feststellt, dagegen wird man sich zur wirklichen Ausführung der Integration, d. h. zur Aufsuchung des gesammten Werthvorraths, dessen ein durch Anfangsbedingungen bestimmtes Integral fähig ist, anderer Methoden bedienen müssen. — Die Natur einer Function erscheint wesentlich bestimmt durch diejenigen Stellen, in deren Umgebung sie sich nicht regulär verhält, und durch ihr besonderes Verhalten in der Nähe dieser sogenannten singulären Stellen.

Setzt man ein durch seine Anfangswerthe im Punkte ξ, in der Umgebung von ξ durch eine Potenzreihe definirtes Integral y der Differentialgleichung (2) nach einer Stelle $\bar{x}$ hin fort, wo die Werthe von y und seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen so beschaffen sind, dass durch dieselben als Anfangswerthe nach dem Cauchy'schen Theorem ein in der Umgebung von $x = \bar{x}$ sich regulär verhaltendes Integral bestimmt wird, so stimmt dieses Integral mit y überein, d. h. y verhält sich an jeder solchen Stelle $x = \bar{x}$ regulär. Singuläre Stellen eines Integrals können also nur diejenigen Werthe von x sein, in deren Umgebung sich entweder die Coefficienten der Differentialgleichung nicht regulär verhalten, oder für welche das Integral mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen Werthe erlangt, die nicht als Anfangswerthe eines durch den Cauchy-schen Satz in der Umgebung von $x = \bar{x}$ bestimmten Inte-

*) Es wird hier und im Folgenden stillschweigend darunter verstanden ein Integral, das eine monogene Function der unabhängigen Variabeln ist.

grals genommen werden können. — Die Auffindung dieser singulären Stellen für ein durch Anfangsbedingungen definirtes Integral und die Untersuchung des Verhaltens dieses Integrals in der Nähe derselben wird also als eine wesentliche Aufgabe der Integration einer vorgelegten Differentialgleichung anzusehen sein.

Wir wollen zunächst einige Bezeichnungen für die verschiedenen bei monogenen Functionen einer complexen Variabeln vorkommenden Singularitäten hervorheben, die im Wesentlichen von Herrn Fuchs bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Werthe, welche die Integrale von Differentialgleichungen in singulären Punkten annehmen, eingeführt worden sind.

7. Singularitäten monogener Functionen überhaupt.

Eine Function $f(x)$ heisst an einer Stelle $x = a$ bestimmt, oder $x = a$ ist für diese Function eine Stelle der Bestimmtheit, wenn 1) alle Stellen in einer gewissen Umgebung von a reguläre Stellen der Function sind und wenn 2) für jede gegen die Null convergirende Werthenfolge

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots;\quad \lim_n \delta_n = 0,$$

die so beschaffen ist, dass sich $f(x)$ an den Stellen $a + \delta_n$ regulär verhält, die Folge

$$f(a + \delta_1);\quad f(a + \delta_2),\quad \cdots$$

einem bestimmten, von der besonderen Wahl der Folge δ_1, δ_2, ... unabhängigen, endlichen oder unendlich grossen Grenzwerthe

$$\lim_n f(a + \delta_n) = \lim_{x=a} f(x),$$

zustrebt, vorausgesetzt, dass für die Berechnung der Functionswerthe $f(a + \delta_n)$, nach Fixirung eines bestimmten Ausgangswerths von $f(a + \delta_1)$, nur solche Fortsetzungswege der unabhängig Veränderlichen x benutzt werden, die keine Vermehrung der Amplitude der complexen Grösse $x - a$ um Multipla von 2π bewirken, d. h. die einen von $x = a$ ausgehenden und sich ins Unendliche erstreckenden Schnitt nicht überschreiten. Solche Stellen sind also die von Herrn Weierstrass sogenannten ausserwesentlichen singulären Stellen der eindeutigen Functionen, überhaupt alle Stellen, wo sich eine Function verhält wie eine algebraische, ferner sind z. B. die Functionen:

$$(x - a)^{\varepsilon}\, \varphi(x),\quad (x - a)^{\varepsilon}\, \varphi(x) \log(x - a),$$

ε eine beliebige reale oder complexe Zahl, $\varphi(x)$ eine nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe, die nur eine endliche Anzahl negativer Exponenten enthält, an der Stelle a bestimmt.

Eine Stelle a, in deren jeder Nähe Stellen sich befinden, an welchen die Function $f(x)$ bestimmt ist, die aber selbst nicht zu diesen Stellen gehört, soll eine Stelle oder ein Punkt der Unbestimmtheit genannt werden; für einen solchen existirt also der Grenzwerth

$$\lim_n f(a+\delta_n), \quad \lim_n \delta_n = 0,$$

entweder gar nicht, oder er hat je nach der Wahl der Werthenfolge $\delta_1, \delta_2 \cdots$ immer andere und andere Werthe. Zu diesen Stellen gehören die von Herrn Weierstrass so genannten wesentlichen singulären Stellen der eindeutigen Functionen, ebenso ist $x = a$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die Functionen:

$$(x-a)^\varepsilon \varphi(x), \quad (x-a)^\varepsilon \log(x-a)\varphi(x), \quad \sqrt[m]{e^{\frac{1}{x-a}} - b},$$

wo ε eine beliebige reale oder complexe, m eine positive ganze, b eine beliebige von Null verschiedene Zahl, $\varphi(x)$ eine nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $(x-a)$ fortschreitende Reihe mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Exponenten bedeutet.

Eine Stelle der Unbestimmtheit heisst isolirt, wenn jeder Punkt in einer gewissen Umgebung derselben eine Stelle der Bestimmtheit für die Function ist. Wenn ein geschlossener Weg der unabhängigen Veränderlichen, der eine isolirte Stelle der Unbestimmtheit einschliesst, die Function eine Werthänderung erfahren lässt, so kann diese Stelle der Unbestimmtheit zugleich eine Verzweigungsstelle sein. Wir sagen ein Punkt a sei eine Verzweigungsstelle mit bestimmter Verzweigung, oder eine Verzweigungsstelle schlechthin, wenn die Function sich in allen Punkten in einer gewissen Umgebung von a wie eine rationale Function verhält, und wenn ein ganz in dieser Umgebung verlaufender, den Punkt a einschliessender geschlossener Weg der unabhängigen Veränderlichen eine Werthänderung der Function bewirkt. An einer solchen Stelle a kann die Function bestimmt sein, wie z. B.

$$(x-a)^\varepsilon e^{x-a},$$

sie kann daselbst aber auch unbestimmt werden, wie z. B.

$$(x-a)^\varepsilon e^{\frac{1}{x-a}}, \quad \frac{(x-a)^\varepsilon}{e^{\frac{1}{x-a}} - b},$$

ε irgend eine nicht ganze reale oder complexe Zahl. — Wenn es nicht möglich ist, um eine isolirte Stelle der Unbestimmtheit $x = a$ herum eine Umgebung so abzugrenzen, dass sich die Function an jeder Stelle dieser Umgebung wie eine rationale Function verhält, so heisst diese

Stelle $x = a$ eine Verzweigungsstelle mit unbestimmter Verzweigung; eine solche ist z. B. $x = a$ für die Function:

$$\left\{e^{\frac{1}{x-a}} - b\right\}^{\varepsilon},$$

ε eine nicht ganze aber sonst beliebige reale oder complexe, b irgend eine von Null verschiedene Zahl.

8. Feste und bewegliche Singularitäten der Integrale von Differentialgleichungen. Feste Verzweigungspunkte. Lineare Differentialgleichungen.

Alle diese Singularitäten können für Lösungen algebraischer Differentialgleichungen vorkommen, es zerfallen aber die singulären Stellen solcher Lösungen in zwei wesentlich verschiedene Kategorien. — Die eine Kategorie umfasst diejenigen Stellen, die für jedes Integral, wie auch die Anfangsbedingungen desselben beschaffen sein mögen, singuläre Stellen sind, die also als solche durch die Coefficienten der Differentialgleichung allein bestimmt werden, zur andern gehören diejenigen Singularitäten, deren Lage, ebenso wie die Beschaffenheit eines bestimmten Integrals in ihrer Umgebung, von den Anfangswerthen dieses Integrals abhängt, die also je nach der Wahl dieser Anfangswerthe ihrer Lage nach verschiebbar und ihrer Natur nach veränderlich sind. Das Studium der Singularitäten dieser letzteren Kategorie bietet zur Zeit noch nicht überwundene Schwierigkeiten dar, man wird also zuvörderst diejenigen Classen von Differentialgleichungen zu finden und ihre Lösungen zu untersuchen bemüht sein, für welche Singularitäten dieser Kategorie überhaupt nicht auftreten können. — Herr Fuchs hat diejenigen Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

F eine ganze rationale Function von y und $\frac{dy}{dx}$, mit von x abhängigen Coefficienten, aufgestellt, deren Verzweigungspunkte fest, d. h. nicht mit den Anfangswerthen verschiebbar sind. Die von der Wahl der Anfangswerthe abhängigen singulären Stellen der Lösungen von Differentialgleichungen der Form (1) können nämlich niemals Unbestimmtheitsstellen sondern nur algebraische Singularitäten sein, dagegen kann es sich für Differentialgleichungen der zweiten und höherer Ordnung ereignen, dass die Integrale in solchen singulären Stellen, deren Lage mit den Anfangswerthen verschiebbar ist, unbestimmt werden, auch ohne sich daselbst zu verzweigen. — Die Untersuchungen von Herrn Fuchs, und die an dieselben anknüpfenden von Herrn **Poincaré** haben gelehrt, dass diejenigen Differentialgleichungen erster Ordnung mit algebraischen Coefficienten, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte besitzen, entweder auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung oder auf Transcendenten, die mit den elliptischen Functionen zusammenhängen, oder auf rein algebraische Functionen führen; die analogen, auf Differentialgleichungen höherer Ordnung bezüglichen Fragen haben bis jetzt noch keine Beantwortung gefunden. Dagegen ist man seit dem Jahre 1865 auf eine ausgedehnte Classe von Differentialgleichungen jeder Ordnung aufmerksam geworden, deren Lösungen nur feste, d. h. von der Wahl der Anfangswerthe unabhängige singuläre Stellen besitzen, und zwar wird nicht nur die Lage dieser Stellen, sondern auch das Verhalten der Integrale in ihrer Umgebung durch die Coefficienten der Differentialgleichung allein bestimmt; diese Classe ist die der **linearen Differentialgleichungen**.

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung hat die Form

$$\text{(A)} \qquad p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = p,$$

wo $p_0, p_1, \cdots, p_n, p$ gegebene (monogene) Functionen von x sind; wenn $p = 0$ ist, so heisst die Differentialgleichung insbesondere eine **homogene**. — Ersetzt man eine solche Differentialgleichung durch das ihr gleichwerthige System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = -\dfrac{p_1}{p_0} y_{n-1} - \dfrac{p_2}{p_0} y_{n-2} - \cdots - \dfrac{p_n}{p_0} y - \dfrac{p}{p_0}, \end{cases}$$

so folgt aus dem **Cauchy**'schen Existenztheorem, dass die Differentialgleichung (A) stets ein und nur ein Integral y besitzt, welches für einen vorgeschriebenen endlichen Werth $x = \xi$ mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen die ebenfalls vorgeschriebenen endlichen Werthe

$$y = \eta_0, \quad \frac{dy}{dx} = \eta_1, \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \eta_{n-1}$$

annimmt und sich in der Umgebung des Punktes $x = \xi$ regulär verhält, vorausgesetzt, dass $x = \xi$ eine reguläre Stelle der Functionen

$$\text{(C)} \qquad \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}, \frac{p}{p_0}$$

ist. — Hieraus lernen wir zwar, dass im Allgemeinen diejenigen Stellen $x = a$, in deren Umgebung eine oder mehrere der Functionen (C) aufhören regulär zu sein, auch singuläre Stellen der Integrale sein werden, wir erfahren aber nicht, ob das durch seine Anfangswerthe bestimmte Integral y mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen nicht etwa auch noch in anderen, von den singulären Stellen $x = a$ der Coefficienten (C) verschiedenen Stellen aufhören könnte endlich zu sein. Wäre das der Fall, so würden auch diese Stellen Singularitäten des Integrals y liefern (vergl. Nr. 6). Offenbar bleiben die Werthe von y und seinen successiven Ableitungen sicher so lange endlich, als die nach dem Cauchyschen Theorem für y hergestellte Potenzreihenentwickelung convergirt, über den Radius des Convergenzkreises dieser Entwickelung erfahren wir aber durch das Cauchy'sche Theorem nichts, und es war deshalb von ausserordentlicher Wichtigkeit, dass Herr Fuchs in seiner, zuerst im Oster-Programm von 1865 der städtischen Gewerbeschule zu Berlin und später im 66. Bande des Crelle'schen Journals (S. 121) erschienenen Arbeit, den Existenzbeweis für die linearen Differentialgleichungen in der Weise führte, dass sich auch der Convergenzkreis jener in der Umgebung von $x = \xi$ gültigen Reihenentwickelung genau feststellen und dadurch zugleich die Gesammtheit aller derjenigen Stellen angeben liess, für welche Singularitäten eines Integrals eintreten können. Indem wir nun dazu übergehen an der Hand dieser und der anderen Arbeiten des Herrn Fuchs die Fundamente der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu entwickeln, bemerken wir, dass wir uns auf die Betrachtung homogener Differentialgleichungen, d. h. auf den Fall $p = 0$ beschränken können, da sich, wie im zweiten Abschnitt (Nr. 26) gezeigt werden soll, der allgemeine Fall leicht auf diesen besonderen zurückführen lässt.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Grundlagen der Theorie.

Erstes Kapitel.

9. Existenztheorem für lineare homogene Differentialgleichungen. Méthode des limites. Anfangsbedingungen.

Die gegebene Differentialgleichung

(A) $$y^{(n)} - (p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y) = 0,$$

wo also

$$p_0 = -1, \quad \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = y^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

gesetzt wurde, sei so beschaffen, dass die Functionen $p_1, \cdots p_n$ in der Umgebung des Punktes $x = \xi$ nach positiven ganzen Potenzen von $x = \xi$ entwickelbar sind, und dass diese Entwickelungen sämmtlich innerhalb des kreisförmigen Bereiches:

$$|x - \xi| < r$$

convergiren. Setzen wir für y in die linke Seite der Differentialgleichung eine ebenfalls nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende Reihe ein,

(1) $$y(x) = g_0 + g_1(x - \xi) + \cdots = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} g_\varkappa (x - \xi)^\varkappa,$$

so muss, falls diese Reihe convergirt, jedenfalls

$$g_\varkappa = \frac{1}{\varkappa!} y^{(\varkappa)}(\xi) \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \cdots)$$

sein. Wenn also die Reihe (1) die Differentialgleichung (A) befriedigen soll, so ergiebt sich für die Coefficienten $g_\varkappa$ die Bestimmung:

(2) $$\varkappa!\, g_\varkappa = y^{(\varkappa)}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_{\varkappa i}(\xi)\, y^{(n-i)}(\xi) \qquad (\varkappa = n, n+1, \cdots),$$

wo die $\mathfrak{A}_{\varkappa i}(\xi)$ aus den Werthen der Coefficienten $p_1, \cdots, p_n$ und ihrer successiven Ableitungen für $x = \xi$ durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammengesetzt sind. — Die Reihe (1) wird ein Element eines Integrals der Differentialgleichung (A) darstellen, wenn sich unter Zugrundelegung der Ausdrücke (2) die Convergenz dieser Reihe erweisen lässt; dies kann am einfachsten durch Anwendung der von Cauchy für derartige Untersuchungen eingeführten „Méthode des limites“ geschehen.

Wenn zwei gewöhnliche Potenzreihen von $x - \xi$,

$$\mathfrak{P}(x \mid \xi), \quad \mathfrak{Q}(x \mid \xi),$$

in solcher Beziehung zu einander stehen, dass jeder Coefficient der zweiten Reihe real, positiv und grösser ist, als der absolute Betrag des mit derselben Potenz von $x - \xi$ multiplicirten Coefficienten der ersten Reihe, so wollen wir dies durch das Zeichen

(3) $$\mathfrak{P}(x \mid \xi) \lessdot \mathfrak{Q}(x \mid \xi)$$

andeuten; besteht diese Beziehung zwischen den Entwickelungen der in der Umgebung von $x = \xi$ regulären Functionen u und v, so schreiben wir:

$$u \lessdot v \quad (\mathrm{Arg}\,(x - \xi)).$$

Offenbar folgt aus der Beziehung (3), dass die Reihe $\mathfrak{P}(x \mid \xi)$ innerhalb des Convergenzkreises von $\mathfrak{Q}(x \mid \xi)$ gleichfalls convergirt. Bezeichnet M eine positive Zahl, die der absolute Betrag einer in der Umgebung von $x = \xi$ regulären Function $f(x)$ nicht überschreitet, wenn x innerhalb des Convergenzbereichs

$$|x - \xi| < R$$

der nach Potenzen von $x - \xi$ fortschreitenden Reihenentwickelung von $f(x)$ verbleibt, so ist nach dem Cauchy'schen Integralsatz:

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + Re^{\vartheta i})}{e^{n\vartheta i}}\, d\vartheta,$$

also

$$|f^{(n)}(\xi)| < \frac{n!\,M}{R^n},$$

folglich haben wir, wenn

$$\varphi(x) = \frac{M}{1 - \dfrac{x - \xi}{R}}$$

gesetzt wird, die Beziehung

$$f(x) \lessdot \varphi(x) \quad (\mathrm{Arg}\,(x - \xi)).$$

Sei nun $M_\varkappa$ grösser als der absolute Betrag von $p_\varkappa(x)$, wenn x auf den Bereich

$$|x - \xi| < r$$

beschränkt wird, so ist also

$$(4) \qquad p_\varkappa(x) \ll \varphi_\varkappa(x) \quad (\mathrm{Arg}\,(x-\xi)),$$

wo

$$(5) \qquad \varphi_\varkappa(x) = \frac{M_\varkappa}{1 - \frac{x-\xi}{r}},$$

und $\varkappa$ die Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots n$ durchläuft. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{B}) \qquad u^{(n)} - (\varphi_1(x) u^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n(x) u) = 0$$

wird, wenn wir derselben durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - \xi$,

$$(6) \qquad u(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_\varkappa (x-\xi)^\varkappa$$

zu genügen suchen, für die Coefficienten dieser Reihe die Bestimmung

$$(7) \qquad \varkappa!\,\gamma_\varkappa = u^{(\varkappa)}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_{\varkappa i}(\xi) u^{(n-i)}(\xi) \qquad (\varkappa = n, n+1, \cdots)$$

ergeben, wo die $\mathfrak{B}_{\varkappa i}(\xi)$ aus den Werthen der $\varphi_1, \cdots \varphi_n$ und ihrer successiven Ableitungen für $x = \xi$ genau ebenso zusammengesetzt sind wie die $\mathfrak{A}_{\varkappa i}(\xi)$ der Gleichung (6), aus den entsprechenden Werthen der Functionen $p_1, \cdots p_n$. Die $\mathfrak{B}_{\varkappa i}(\xi)$ sind demnach sämmtlich positiv oder Null, und da eine Beziehung, wie die durch die Formel (4) dargestellte offenbar erhalten bleibt, wenn wir beide Seiten derselben differentiiren und ebenso, wenn wir mehrere solcher Beziehungen zu einander addiren, folgt überdies aus (4)

$$(8) \qquad |\mathfrak{A}_{\varkappa i}(\xi)| < \mathfrak{B}_{\varkappa i}(\xi) \qquad \left\{ \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots n \\ \varkappa = n, n+1, \cdots \end{matrix} \right\}.$$

Die Gleichungen (2) und (7) lassen die n ersten Coefficienten $g_\varkappa$ und $\gamma_\varkappa$ für $\varkappa = 0, 1, \cdots, n-1$ unbestimmt; ertheilen wir den $g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}$ irgendwelche beliebige endliche Werthe und wählen dann die $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ als positive reale Zahlen irgendwie so, dass

$$\gamma_\varkappa \geqq |g_\varkappa| \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \cdots n-1),$$

so folgt aus den Gleichungen (2), (7), (8)

$$\gamma_\varkappa \geqq |g_\varkappa| \qquad (\varkappa = n, n+1, \cdots),$$

d. h.

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} g_\varkappa (x-\xi)^\varkappa \ll \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_\varkappa (x-\xi)^\varkappa,$$

also convergirt die Reihe (1) jedenfalls, sobald die Reihe (5) convergent ist. Der Convergenzbereich dieser letzteren Reihe lässt sich aber leicht feststellen. — Die Differentialgleichung (B) kann nämlich, wenn für einen Augenblick

$$z = \frac{x - \xi}{r}, \quad \bar{\gamma}_\varkappa = \gamma_\varkappa r^\varkappa$$

gesetzt wird, in der Form

$$\text{(B')} \qquad (1 - z)\frac{d^n u}{dz^n} = \sum_{\varkappa=1}^{n} M_\varkappa r^\varkappa \frac{d^{n-\varkappa} u}{dz^{n-\varkappa}}$$

geschrieben werden, und hieraus folgt für die Coefficienten $\bar{\gamma}_\varkappa$ die mit der Gleichung (7) völlig gleichwerthige Recursionsformel

$$\text{(9)} \qquad (n + \varkappa)!\, \bar{\gamma}_{n+\varkappa} - \varkappa(n + \varkappa - 1)!\, \bar{\gamma}_{n+\varkappa-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i r^i (n + \varkappa - i)!\, \bar{\gamma}_{n+\varkappa-i} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots).$$

Bei der für $\gamma_0, \cdots \gamma_{n-1}$ getroffenen Wahl ist demnach

$$\bar{\gamma}_{n+\varkappa} = \frac{\varkappa + M_1 r}{n + \varkappa}\bar{\gamma}_{n+\varkappa-1} + \psi,$$

wo ψ eine positive Zahl bedeutet; nehmen wir also M_1 so gross, dass

$$M_1 r > n,$$

(was ja stets erlaubt ist, da M_1 nur der Bedingung

$$M_1 > |p_1| \quad \text{für} \quad |x - \xi| < r$$

zu genügen braucht), so ist für jedes $\varkappa$

$$\bar{\gamma}_{n+\varkappa} > \bar{\gamma}_{n+\varkappa-1},$$

d. h. der Quotient

$$\frac{\bar{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\beta} < 1, \quad \text{wenn} \quad \alpha < \beta.$$

Folglich ergiebt sich aus der durch Division von Gleichung (9) mit $(n + \varkappa)!\,\bar{\gamma}_{n+\varkappa-1}$ hervorgehenden Gleichung

$$\frac{\bar{\gamma}_{n+\varkappa}}{\bar{\gamma}_{n+\varkappa-1}} = \frac{\varkappa + M_1 r}{n + \varkappa} + \sum_{i=2}^{n} \frac{M_i r^i (n + \varkappa - i)!}{(n + \varkappa)!} \frac{\bar{\gamma}_{n+\varkappa-i}}{\bar{\gamma}_{n+\varkappa-1}},$$

dass für ins Unendliche wachsende Werthe von $\varkappa$

$$\lim_\varkappa \frac{\bar{\gamma}_{n+\varkappa}}{\bar{\gamma}_{n+\varkappa-1}} = 1$$

ist; mithin convergirt die Reihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_\varkappa (x - \xi)^\varkappa = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \bar{\gamma}_\varkappa z^\varkappa$$

für Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins, d. h. für

$$|x - \xi| < r;$$

in diesem Bereiche ist also auch die Reihe (1) convergent und stellt daselbst ein Integral der Differentialgleichung (A) dar. Dieses Integral hat die Eigenschaft, für $x = \xi$ mit seinen $(n - 1)$ ersten Ableitungen die willkürlich fixirten endlichen Werthe

$$y(\xi) = g_0, \quad y'(\xi) = g_1, \quad \cdots \quad y^{(n-1)}(\xi) = \frac{g_{n-1}}{(n-1)!}$$

anzunehmen, und es ist andererseits durch Festlegung dieser Anfangswerthe auch eindeutig bestimmt, da sich die Coefficienten $g_n, g_{n+1}, \cdots$ aus den Gleichungen (2) unzweideutig ergeben. — Wir haben also das Theorem:

Eine homogene lineare Differentialgleichung, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung einen constanten Werth hat, besitzt stets ein und nur ein Integral, welches für einen vorgeschriebenen endlichen Werth der unabhängigen Variabeln, in dessen Umgebung sich die Coefficienten der Differentialgleichung regulär verhalten, mit seinen $(n - 1)$ ersten Ableitungen gleichfalls vorgeschriebene endliche Werthe annimmt, und der Convergenzkreis der dieses Integral in der Umgebung jenes Werthes darstellenden gewöhnlichen Potenzreihe ist jedenfalls nicht kleiner als der grösste Kreis, innerhalb dessen noch die Potenzentwickelungen der Coefficienten in derselben Umgebung sämmtlich convergent sind.

10. Singuläre Stellen linearer Differentialgleichungen. Fortsetzung der Integrale.

Wenn die, eine in der Umgebung von $x = \xi$ reguläre Function $f(x)$ darstellende, nach Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende gewöhnliche Potenzreihe $\mathfrak{P}(x | \xi)$ für alle Werthe von x innerhalb des Kreises

$$| x - \xi | = \varrho$$

convergirt, dagegen für alle Werthe von x ausserhalb dieses Kreises divergirt, so muss bekanntlich auf der Peripherie dieses Convergenzkreises mindestens eine singuläre Stelle von $f(x)$ liegen. Der grösseste um ξ als Mittelpunkt beschriebene Kreis, innerhalb dessen die Entwickelungen sämmtlicher Coefficienten der Differentialgleichung (A) in der Umgebung von $x = \xi$ noch convergent sind, ist also derjenige, der durch den zu $x = \xi$ am nächsten gelegenen singulären Punkt eines der Coefficienten hindurchgeht. Das Innere dieses Kreises wollen wir, wenn es sich um die gegebene Differentialgleichung (A) handelt, als die Umgebung des Punktes $x = \xi$ schlechthin bezeichnen; wenn ein anderer um $x = \xi$ als Mittelpunkt beschriebener Kreis, etwa ein solcher mit noch unbestimmtem aber endlichem Radius in Frage kommt, so sprechen wir von einer gewissen Umgebung des Punktes ξ. Die Potenzreihe, welche ein durch beliebige endliche Anfangswerthe für $x = \xi$ definirtes Integral $y(x)$ von (A) darstellt, convergirt also stets in der Umgebung von $x = \xi$, sie kann folglich nach allen denjenigen, im Endlichen gelegenen Stellen x hin analytisch fortgesetzt werden, nach welchen hin eine analytische Fortsetzung sämmtlicher Coefficienten der Differentialgleichung (A) von $x = \xi$ aus möglich ist. Die Gesammtheit dieser Stellen bildet ein zusammenhängendes, continuirliches Gebiet T, welches durch die singulären Stellen der Coefficienten, denen sich im Allgemeinen noch die Stelle $x = \infty$ zugesellt, begrenzt wird; an allen Stellen von T verhält sich also auch das durch beliebige Anfangsbedingungen bestimmte Integral $y(x)$ regulär, die Singularitäten von $y(x)$ können demnach nur an der Begrenzung von T liegen, sie sind folglich unabhängig von der Wahl der Anfangswerthe, d. h. sie sind für jedes Integral der linearen homogenen Differentialgleichung (A) dieselben (vergl. Nr. 8). Wir nennen die Stellen der Begrenzung von T darum die singulären Stellen der Differentialgleichung.

Das in der Umgebung von $x = \xi$ definirte Integral $y(x)$ kann aber, da der Bereich T ein mehrfach zusammenhängender ist, durch Fortsetzung auf verschiedenen Wegen für jeden Punkt von T verschiedene Werthe annehmen. — Denken wir uns T durch geeignet angebrachte Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\bar{T}$ verwandelt, so ist innerhalb $\bar{T}$ die durch die Potenzreihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} g_\varkappa (x - \xi)^\varkappa \tag{10}$$

determinirte Function $y(x)$ eindeutig bestimmt, d. h. vom Fortsetzungswege unabhängig; wir nennen die Gesammtheit der durch Fortsetzung der Reihe (10) innerhalb $\bar{T}$ entstehenden Werthe des Integrals $y(x)$ einen Zweig desselben und bezeichnen diesen Zweig etwa durch $\bar{y}(x)$. Setzen wir die Reihe (10) auf irgend einem in der unzerschnittenen Fläche T verlaufenden Wege l, der wieder nach $x = \xi$ zurückführt, fort, so erhalten wir eine gleichfalls in der Umgebung von $x = \xi$ convergirende Reihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} g_\varkappa' (x - \xi)^\varkappa, \tag{11}$$

die im Allgemeinen von (10) verschieden ist und uns nunmehr innerhalb T einen neuen Zweig $\bar{\bar{y}}(x)$ der Function $y(x)$ determinirt. Diese Reihe (11) genügt, nach bereits erwähnten analytischen Principien, auch wieder der Differentialgleichung (A), in dem Sinne, dass die Differentialgleichung befriedigt wird, wenn wir für y die Reihe (11) einsetzen und für $p_1, \cdots, p_n$ diejenigen Entwickelungen in der Umgebung von $x = \xi$ nehmen, die aus den ursprünglichen, für die Herstellung der Reihe (10) benutzten, durch Fortsetzung auf dem in T verlaufenden Wege l hervorgehen. Man kann sich jedem so definirten Zweige ein über T ausgebreitetes Blatt zugeordnet denken, welches dieselben Querschnitte trägt wie T, und kann dann diese Blätter längs der Querschnitte so aneinander heften, dass, wenn die unabhängige Variable x in T einen Weg beschreibt, der einen gewissen Querschnitt überschreitet, längs dieses Querschnittes gerade jene Blätter zusammenhängen, deren zugehörige Zweige auf diesem Wege von x in einander übergehen. Auf diese Weise erhält man also eine Riemann'sche Fläche, innerhalb deren die monogene Function $y(x)$ eine eindeutige Function des Ortes ist.

Zweites Kapitel.

11. Particuläre Integrale. Fundamentalsystem. Allgemeines Integral.

Die Coefficienten der Differentialgleichung

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0, \tag{A}$$

wo wir unter p_0 eine von Null verschiedene Constante verstehen wollen, können im Allgemeinen innerhalb des Bereichs T mehrdeutig sein; denken wir uns T durch geeignet angebrachte Querschnitte in einen Bereich E verwandelt, innerhalb dessen $p_1, \cdots p_n$ eindeutig, d. h. vom Wege unabhängig sind und legen wir den folgenden Betrachtungen die Differentialgleichung (A) stets in der Form zu Grunde, dass wir unter $p_1, \cdots p_n$ gewisse innerhalb E eindeutig fixirte Zweige dieser Functionen verstehen. — Der Bereich T geht dann im Allgemeinen aus E hervor, indem E noch weiter durch Querschnitte zerlegt wird. Setzen wir im Punkte $x = \xi$ für ein Integral $y(x)$ und seine $(n-1)$ ersten Ableitungen gewisse Anfangswerthe fest:

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \quad \cdots \quad y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}, \tag{1}$$

so wird durch dieselben eine wohlbestimmte, der in ihren Coefficienten eindeutig gegebenen Differentialgleichung (A) genügende Potenzreihe definirt; setzen wir diese innerhalb T fort, so erhalten wir einen eindeutig bestimmten Integralzweig $y(x)$, den wir als particuläres Integral der Differentialgleichung (A) bezeichnen wollen. Ein solches particuläres Integral ist also in seinem Verlaufe innerhalb T eindeutig bestimmt, wenn seine Anfangswerthe für $x = \xi$ vorgeschrieben sind.

Denken wir uns für diese Anfangswerthe n verschiedene Bestimmungen getroffen, wodurch also n verschiedene particuläre Integrale $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ definirt sein mögen; wir wollen diese n Systeme von Anfangswerthen so wählen (und eine solche Wahl ist ja offenbar stets möglich), dass die Determinante

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}(\xi) & y_1^{(n-2)}(\xi) & \cdots & y_1(\xi) \\ y_2^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \cdots & y_2(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)}(\xi) & y_n^{(n-2)}(\xi) & \cdots & y_n(\xi) \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth erhält. Alsdann liefert das System von n linearen Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta_0 = c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \cdots + c_n y_n(\xi), \\ \eta_1 = c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \cdots + c_n y_n'(\xi), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_{n-1} = c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi), \end{cases}$$

wohlbestimmte endliche Werthe für die n Unbekannten $c_1, c_2, \cdots c_n$; der Ausdruck

$$(3)\qquad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

stellt also eine innerhalb T eindeutig gegebene Function dar, die für $x = \xi$ mit ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen die Werthe $\eta_0, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ annimmt. Da die $c_1, \cdots c_n$ von x unabhängig sind, genügt der Ausdruck (3) offenbar der Differentialgleichung (A), er stellt also ein particuläres Integral derselben dar, welches dieselben Anfangsbedingungen erfüllt wie $y(x)$, es muss folglich mit $y(x)$ identisch sein, d. h. jedes particuläre Integral der Differentialgleichung (A) lässt sich durch particuläre Integrale, für welche die Determinante Δ der Anfangswerthe nicht verschwindet, homogen und linear mit constanten Coefficienten darstellen. Wir nennen den Inbegriff solcher n particulären Integrale ein Fundamentalsystem und $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ die Elemente desselben; den Ausdruck

$$y = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x) + \cdots + u_n y_n(x),$$

worin $u_1, u_2, \cdots, u_n$ willkürliche Constanten bedeuten, und der also durch Specialisirung dieser Constanten jedes beliebige particuläre Integral darzustellen vermag, nennen wir das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A).

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Eigenschaft des Systems der n Integrale $y_1(x), \cdots, y_n(x)$, ein Fundamentalsystem zu sein, unabhängig ist von der Wahl des Anfangspunktes $x = \xi$. Zu dem Ende haben wir nur nachzuweisen, dass die Determinante

$$\Delta(x) = \sum \pm\, y_1^{(n-1)}(x) \quad y_2^{(n-2)}(x) \quad \cdots \quad y_n(x)$$

für alle Punkte des Bereichs T einen von Null verschiedenen Werth hat.

Aus den Gleichungen:

$$p_0 y_\varkappa^{(n)} + p_1 y_\varkappa^{(n-1)} + \cdots + p_n y_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

folgt in der That:

$$(4)\qquad p_0 : p_1 : \cdots : p_n = \Delta(x) : \Delta_1(x) : \cdots : \Delta_n(x)$$

wo $\Delta_\varkappa(x)$ die Determinante aus denjenigen Elementen des rechteckigen Systems

$$(y_\varkappa^{(\lambda)}) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = n, (n-1), \cdots 1, 0 \end{pmatrix}$$

bedeutet, welche übrigbleiben, wenn man die $\varkappa^{\text{te}}$ Verticalreihe weglässt.

Also ist:

$$\Delta_1(x) = \frac{d\Delta(x)}{dx},$$

und folglich, wenn wir $p_0 = 1$ nehmen:

$$p_1 = -\frac{d \log \Delta(x)}{dx},$$

oder

$$\Delta(x) = Ce^{-\int p_1 dx};$$

in dieser Gleichung ist C eine Constante, die wegen

$$\Delta(\xi) \neq 0$$

einen von Null verschiedenen, nur von der Wahl der Anfangswerthe abhängigen Werth besitzt. Für einen Punkt x, in dessen Umgebung sich die Function p_1 regulär verhält, ist demnach $\Delta(x)$ endlich und von Null verschieden, das ist also in allen Punkten des Bereichs T der Fall, wir schliessen hieraus, dass die Eigenschaft particulärer Integrale $y_1(x), \cdots y_n(x)$ ein Fundamentalsystem zu bilden, nicht nur unabhängig ist von der Wahl des Ausgangspunktes ξ, sondern dass diese Eigenschaft auch erhalten bleibt, wenn wir $y_1(x) \cdots y_n(x)$ auf irgend welchen innerhalb T verlaufenden Wegen fortsetzen.

Wenn wir ein particuläres Integral $y(x)$ auf Wegen fortsetzen, die ganz innerhalb des Bereichs E verlaufen, so sind die so entstehenden innerhalb T eindeutig definirten Zweige auch wieder particuläre Integrale der Differentialgleichung (A); bezeichnen wir irgend $(n+1)$ solcher Zweige mit

$$\overset{(1)}{y}(x), \quad \overset{(2)}{y}(x), \cdots \overset{(n+1)}{y}(x),$$

so ist jede dieser Functionen in der Form

$$\overset{(\varkappa)}{y}(x) = \overset{(\varkappa)}{c}_1 y_1(x) + \overset{(\varkappa)}{c}_2 y_2(x) + \cdots + \overset{(\varkappa)}{c}_n y_n(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n+1),$$

wo die $\overset{(\varkappa)}{c}_\lambda$ Constanten bedeuten, darstellbar; hieraus folgt durch Elimination der $y_1(x), \cdots y_n(x)$ eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen jenen $(n+1)$ Zweigen; d. h.:

Zwischen je $(n+1)$ Zweigen, die aus einem Integral $y(x)$ der Differentialgleichung (A) hervorgehen durch Fortsetzung auf Wegen, für welche die Coefficienten der Differentialgleichung eindeutig bleiben, besteht eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten.

12. Andere Definition des Fundamentalsystems. Verhalten bei einem Umlauf. Lineare Substitution.

Die Definition eines Fundamentalsystems lässt sich auch in eine, für manche Untersuchungen besonders geeignete Form bringen, die vor der bisher zu Grunde gelegten den Vorzug hat, dass sie nur von den Integralen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$ $y_n(x)$ selbst, nicht auch von den Ableitungen derselben Gebrauch macht. Wir behaupten nämlich:

Die n particulären Integrale $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\cdots$ $z_n(x)$ bilden dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn sie linear unabhängig, d. h. so beschaffen sind, dass zwischen denselben keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten

$$(5) \qquad c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \cdots + c_n z_n(x) = 0$$

besteht, in der nicht alle Coefficienten c_1, c_2, $\cdots$ c_n gleich Null sind.

Zunächst ist sofort ersichtlich, dass $z_1(x)$, $\cdots$ $z_n(x)$ kein Fundamentalsystem bilden können, wenn eine Gleichung von der Form (5) besteht; denn durch Differentiation von (5) folgt

$$(6) \qquad c_1 z_1^{(\varkappa)}(x) + c_2 z_2^{(\varkappa)}(x) + \cdots + c_n z_n^{(\varkappa)}(x) = 0,$$

wo

$$z_\lambda^{(\varkappa)}(x) = \frac{d^\varkappa z_\lambda(x)}{dx^\varkappa} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \cdots n \\ \varkappa = 0, 1, 2, \cdots\end{pmatrix},$$

und die n Gleichungen, welche aus (6) für $\varkappa = 0, 1, \cdots n - 1$ hervorgehen, lassen sich bekanntlich nur dann durch nicht sämmtlich verschwindende Werthe der c_1, c_2, $\cdots$ c_n befriedigen, wenn die Determinante dieser Gleichungen

$$D(x) = \left| z_\lambda^{(\varkappa)}(x) \right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \cdots n \\ \varkappa = 0, 1, \cdots n-1\end{pmatrix}$$

gleich Null ist; dies kann aber, wie wir (S. 30) bewiesen haben, für keinen Punkt des Bereichs T stattfinden, wenn $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\cdots$ $z_n(x)$ ein Fundamentalsystem bilden.

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass eine Relation von der Form (5) nicht stattfinden könne, dann denken wir uns die Integrale $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\cdots$ $z_n(x)$ durch die Elemente $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$ $y_n(x)$ eines Fundamentalsystems dargestellt, also

$$(7)\qquad \begin{cases} z_1(x) = \alpha_{11} y_1(x) + \alpha_{12} y_2(x) + \cdots + \alpha_{1n} y_n(x), \\ z_2(x) = \alpha_{21} y_1(x) + \alpha_{22} y_2(x) + \cdots + \alpha_{2n} y_n(x), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_n(x) = \alpha_{n1} y_1(x) + \alpha_{n2} y_2(x) + \cdots + \alpha_{nn} y_n(x). \end{cases}$$

Die Determinante

$$|\alpha_{i\lambda}| \qquad (i, \lambda = 1, 2, \cdots n)$$

der constanten Coefficienten in den Gleichungen (7) muss dann von Null verschieden sein, da aus dem Verschwinden dieser Determinante das Bestehen einer homogenen linearen Beziehung zwischen den $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\cdots z_n(x)$ mit constanten Coefficienten folgen würde. Differentiiren wir nunmehr die Gleichungen (7) $(n-1)$-mal nach x, so ergiebt sich aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten die Gleichung

$$(8)\qquad |z_\lambda^{(\varkappa)}(x)| = |\alpha_{i\lambda}| \; |y_\lambda^{(\varkappa)}(x)| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n, \\ \lambda = 1, 2, \cdots n, \\ \varkappa = 0, 1, \cdots n-1 \end{pmatrix},$$

es kann also, da $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots y_n(x)$ ein Fundamentalsystem bilden und folglich

$$|y_\lambda^{(\varkappa)}(x)|$$

für jeden innerhalb T gelegenen Werth von x von Null verschieden ist, auch

$$|z_\lambda^{(\varkappa)}(x)|$$

für keinen Punkt von T verschwinden, d. h. es sind $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\cdots z_n(x)$ die Elemente eines Fundamentalsystems.

Aus dem Gange des Beweises folgt auch sofort, dass die Elemente irgend zweier Fundamentalsysteme durch Gleichungen von der Form (7) mit einander verknüpft sind, für welche die Determinante

$$|\alpha_{i\lambda}|$$

des Coefficientensystems einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Die Umkehrung dieser Bemerkung ist ein besonderer Fall des folgenden Satzes:

Ist $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots y_n(x)$ ein beliebiges Fundamentalsystem, und sind $v_1(x)$, $v_2(x)$, $\cdots v_m(x)$, $(m \leqq n)$, lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten von irgendwelchen m Elementen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots y_m(x)$ desselben:

$$(9)\qquad v_\lambda(x) = \alpha_{\lambda 1} y_1(x) + \alpha_{\lambda 2} y_2(x) + \cdots + \alpha_{\lambda m} y_m(x), \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m)$$

von der Beschaffenheit, dass die Determinante der Coefficienten

$$|\alpha_{\lambda i}| \qquad (i, \lambda = 1, 2, \cdots m),$$

nicht verschwindet, so bilden auch

$$v_1(x), \cdots v_m(x), \quad y_{m+1}(x), \cdots y_n(x)$$

ein Fundamentalsystem.

Bestünde nämlich eine Gleichung von der Form

$$c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + \cdots + c_m v_m(x) + c_{m+1} y_{m+1}(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0, \tag{10}$$

wo die $c_1, c_2, \cdots c_n$ Constanten bedeuten, die nicht sämmtlich gleich Null sind, so würde aus dieser Gleichung, indem man für die $v_1(x), \cdots v_m(x)$ ihre Ausdrücke aus den Gleichungen (9) substituirt, eine homogene lineare Beziehung zwischen den Elementen $y_1(x), \cdots y_n(x)$ des gegebenen Fundamentalsystems folgen, es müssten also die sämmtlichen Coefficienten dieser Beziehung verschwinden, d. h. es müssten die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \alpha_{\lambda \varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m), \tag{11}$$

$$c_{m+1} = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0, \tag{12}$$

bestehen; die Gleichungen (11) könnten aber nur dann durch nicht verschwindende Werthe der $c_1, c_2, \cdots c_m$ befriedigt werden, wenn gegen die Voraussetzung

$$|\alpha_{\lambda i}| \qquad (i, \lambda = 1, 2, \cdots m)$$

gleich Null wäre. Die Bedingung, dass diese Determinante nicht verschwindet, ist offenbar gleichbedeutend damit, dass zwischen den $v_1(x), \cdots v_m(x)$ keine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten stattfindet.

Lassen wir die unabhängige Veränderliche x irgend einen geschlossenen Weg beschreiben, der ganz innerhalb des Bereiches E verläuft, d. h. also einen geschlossenen Weg, auf welchem die Coefficienten der Differentialgleichung zu ihren Ausgangswerthen zurückgeführt werden, so gehen, wie wir (S. 30) gezeigt haben, die Elemente $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ eines Fundamentalsystems in die Elemente $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots \bar{y}_n(x)$ eines anderen Fundamentalsystems über. Es bestehen also (nach S. 30, 31) zwischen den n ursprünglichen Functionen und den n aus ihnen durch den Umlauf hervorgegangenen die Gleichungen

$$\bar{y}_\varkappa(x) = \alpha_{\varkappa 1} y_1(x) + \alpha_{\varkappa 2} y_2(x) + \cdots + \alpha_{\varkappa n} y_n(x) \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n), \tag{13}$$

wo die $\alpha_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten, deren Determinante

$$|\alpha_{\varkappa i}| \qquad (\varkappa, i = 1, 2 \cdots n),$$

nicht verschwindet. Wir bezeichnen die durch die rechten Seiten der Gleichungen (13) dargestellte mit den $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots y_n(x)$ vorzunehmende Rechnungsoperation als eine auf das Functionssystem $y_1(x), \cdots y_n(x)$ ausgeübte lineare Substitution mit den Coefficienten $\alpha_{\varkappa i}$, und die Determinante $|\alpha_{\varkappa i}|$ als die Determinante dieser Substitution; dann können wir also sagen:

Die Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A) erfahren bei einem geschlossenen Umlaufe der unabhängigen Veränderlichen, der die Coefficienten der Differentialgleichung ungeändert lässt, eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante.

Die genauere Untersuchung des Verhaltens eines Fundamentalsystems bei solchen geschlossenen Umläufen der unabhängigen Variabeln wird den Gegenstand des dritten Abschnittes bilden.

Zweiter Abschnitt.

Formale Theorieen.

Erstes Kapitel.

13. Analogie mit den algebraischen Gleichungen.

Wir haben im vorhergehenden Abschnitte erkannt, dass sich das allgemeine Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A), deren Coefficienten in einem Bereiche E eindeutig definirte Functionen von x sind, als Summe der mit willkürlichen Constanten multiplicirten n Elemente eines Fundamentalsystems darstellt, dass also durch Angabe von n, ein Fundamentalsystem constituirenden particulären Integralen die Gesammtheit aller Lösungen der Differentialgleichung (A) als bestimmt angesehen werden kann. — Der Umstand, dass die Anzahl n dieser, die allgemeine Lösung bestimmenden Elemente mit der Ordnung der Differentialgleichung übereinstimmt, bedingt eine gewisse Analogie zwischen den linearen homogenen Differentialgleichungen und den algebraischen Gleichungen, bei denen ja die Anzahl der Lösungen gleich dem Grade der Gleichung ist. Diese Analogie wurde schon sehr früh, zuerst von Lagrange bemerkt, und sie hat wiederholt als Ausgangspunkt für schöne und wichtige Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen gedient. Von den älteren Arbeiten, die in dieser Richtung liegen, seien die Abhandlungen von Lagrange, Libri und Sturm, von den neueren die der Herren E. Brassine, Christoffel, Frobenius, Thomé, Appell genannt.

Ebenso wie die Coefficienten einer algebraischen Gleichung sich als symmetrische Functionen der Wurzeln derselben darstellen lassen, gelingt es, einen Zusammenhang zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems und den Coefficienten der Differentialgleichung herzustellen. Wenn man über die Coefficienten einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades keine näheren Bestimmungen trifft, etwa nur voraussetzt, dass sie Functionen einer Variabeln x sind, die sich in der Umgebung einer Stelle $x = \xi$ regulär verhalten, so bilden ihre n Lösungen ein

System von n ganz beliebigen Functionen, beziehungsweise wenn die Coefficienten schlechthin als Constante angesehen werden, ein System von n ganz beliebigen constanten Grössen. Auf solche bezieht sich also die ganze Theorie der symmetrischen Functionen und sogar derjenige Theil der Galois'schen Untersuchungen, der von der Annahme eines bestimmten Rationalitätsbereiches für die Coefficienten der Gleichung unabhängig ist. Ein grosser Theil der auf die Analogie mit den algebraischen Gleichungen gegründeten Sätze, die sich auf lineare homogene Differentialgleichungen beziehen, über deren Coefficienten keine speciellen Voraussetzungen getroffen sind, kann ebenso auch als für beliebige Systeme von n Functionen geltend aufgefasst werden. Wir werden hier zuerst die der Theorie der symmetrischen Functionen analogen Sätze und dann die der Zerfällung einer ganzen rationalen Function in Linearfactoren entsprechenden Sätze entwickeln, soweit wir dieselben für die späteren functionentheoretischen Untersuchungen nöthig haben. Eine weitere Verfolgung der Analogie zwischen algebraischen Gleichungen und linearen Differentialgleichungen, bei welchen hauptsächlich auch Gesichtspunkte, die den Galois'schen Untersuchungen über die Gruppe einer algebraischen Gleichung nachgebildet sind, in Frage kommen, wird in einen der folgenden Abschnitte aufgenommen werden.

14. Determinante eines Systems von Functionen. Differentialgleichung für ein System von n linear unabhängigen Functionen.

Seien $y_1, y_2, \cdots, y_n$ n Functionen von x, die sich in einer gewissen Umgebung U der Stelle $x = \xi$ regulär verhalten, und für welche die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = | y_\varkappa^{(\lambda-1)} | \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n),$$

die wir als die Determinante des Functionssystems bezeichnen wollen, an keiner Stelle der Umgebung U von $x = \xi$ verschwindet. Dann genügen diese n Functionen offenbar der in y homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad D(y, y_1, y_2 \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y & y' & y^{(2)} & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

die wir, nach den Ableitungen von y geordnet, in der Form:

$$yD_n + y'D_{n-1} + \cdots + y^{(n-1)}D_1 + y^{(n)}D_0 = 0$$

oder

(2) $$P(y) = (-1)^n \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

schreiben, wo also

(3) $$p_\varkappa = (-1)^n \frac{D_\varkappa(y_1, y_2 \cdots y_n)}{D(y_1, y_2 \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n),$$

und $D_\varkappa(y_1, y_2 \cdots y_n)$ die zum Elemente $y^{(n-\varkappa)}$ gehörige Subdeterminante von $D(y, y_1, y_2 \cdots y_n)$ bedeutet. Die Coefficienten $p_1, \cdots p_n$ dieser Differentialgleichung verhalten sich in der Umgebung U der Stelle $x = \xi$ regulär, weil zufolge unserer Voraussetzung

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) \neq 0,$$

und aus eben diesem Grunde constituiren $y_1, y_2 \cdots y_n$ auch ein Fundamentalsystem derselben. Das letztere ist so zu verstehen. Denken wir uns in die Ausdrücke (3) für $y_1, \cdots y_n$ und die successiven Ableitungen dieser Functionen ihre Entwickelungen nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$ eingesetzt, so erhalten wir für $p_1, \cdots p_n$ ein System gewöhnlicher Potenzreihen, aus denen ein System von n wohlbestimmten Functionen entspringt; für diese Functionen mögen die Bereiche T, E, T dieselbe Bedeutung haben wie in den Nrn. 11, 12 (S. 26—28), dann lässt sich, wenn wir unter $p_1, p_2 \cdots p_n$ die aus den ursprünglichen Entwickelungen durch Fortsetzung innerhalb E entstandenen eindeutig determinirten Zweige verstehen, jede innerhalb T eindeutig bestimmte Particularlösung der Differentialgleichung (2) als homogene lineare Function mit constanten Coefficienten der innerhalb T eindeutigen Zweige des Functionssystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ darstellen. — In diesem Sinne sind auch alle folgenden Erörterungen aufzufassen; wir werden dies, wo kein Missverständniss zu befürchten ist, nicht immer besonders hervorheben.

Wenn die Determinante des Functionssystems $y_1 \ldots y_n$ identisch Null ist,

(4) $$D(y_1, \cdots y_n) = 0,$$

und es bedeuten $i_1, i_2, \ldots i_\nu$ irgend welche ν verschiedene der n Zahlen $1, 2, \ldots n$, der Grösse nach geordnet, so muss es eine positive ganze Zahl $m \leq n-1$ geben von der Beschaffenheit, dass von den n_ν Determinanten

(5) $$D(y_{i_1}, y_{i_2} \cdots y_{i_\nu}),$$

für $\nu = m$ wenigstens eine, etwa

(6) $$D(y_1, y_2 \cdots y_m),$$

von Null verschieden ist, während für $\nu > m$ noch sämmtliche n_ν identisch verschwinden. Dann folgt aus den $n - m$ Gleichungen

$$D(y_1, y_2 \cdots y_m, y_{m+\varkappa}) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \overline{n - m}),$$

dass $y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots y_n$ der linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

(7) $$D(y, y_1, y_2 \cdots y_m) = 0$$

genügen, von der $y_1, y_2 \cdots y_m$ ein Fundamentalsystem constituiren, weil

$$D(y_1, y_2, \cdots y_m) \neq 0.$$

Folglich bestehen die Gleichungen

(8) $$y_{m+\varkappa} = c_{\varkappa 1} y_1 + c_{\varkappa 2} y_2 + \cdots + c_{\varkappa m} y_m \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots \overline{n - m}),$$

wo die $c_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten, d. h.:

Wenn die Determinante des Functionssystems $y_1, y_2 \cdots y_n$ identisch verschwindet, so besteht zwischen diesen n Functionen mindestens eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten. Wenn also die n Functionen $y_1, \cdots y_n$ linear unabhängig sind, d. h. keiner homogenen linearen Gleichung mit constanten Coefficienten Genüge leisten, so verschwindet ihre Determinante $D(y_1, \cdots y_n)$ nicht identisch.

Dieser Satz befindet sich in Übereinstimmung mit dem in Nr. 12, (S. 31) bewiesenen Satze, dass n particuläre Integrale der Differentialgleichung (A) ein Fundamentalsystem bilden, wenn sie linear unabhängig sind. Wir können jetzt in der zu Anfang dieser Nummer durchgeführten Betrachtung die Bedingung

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) \neq 0,$$

durch die Forderung der linearen Unabhängigkeit der Functionen $y_1, y_2 \cdots y_n$ ersetzen und sagen:

Die n linear unabhängigen Functionen $y_1 \cdots y_n$ bilden die Elemente eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Coefficienten sich in der Umgebung jeder Stelle $x = \xi$ regulär verhalten, für welche $y_1, y_2 \cdots y_n$ selbst regulär sind und die Determinante dieses Functionssystems von Null verschieden ist.

15. Invariante Functionen einer gegebenen Differentialgleichung. Der Appell'sche Satz.

Gehen wir umgekehrt von einer linearen Differentialgleichung

(A) $$P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

aus, und bedeuten $y_1, y_2 \cdots y_n$ die Elemente eines Fundamentalsystems derselben, so ergeben sich aus den Gleichungen

$$P(y_\varkappa) = y_\varkappa^{(n)} + p_1 y_\varkappa^{(n-1)} + \cdots + p_n y_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

die Ausdrücke (3) für die Coefficienten und die Darstellungen (1), (2) für die linke Seite der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung ist also durch Angabe eines Systems von n linear unabhängigen Lösungen derselben vollkommen bestimmt; d. h. wenn diese Lösungen zugleich noch eine andere lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$Q(y) = q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_n y = 0$$

befriedigen, so muss dieselbe mit (A) identisch sein, also

$$Q(y) = q_0 P(y).$$

Hieraus ergiebt sich sofort der einfache Satz, dass eine lineare homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, die mehr linear unabhängige Integrale besitzt als ihre Ordnungszahl beträgt, identisch verschwinden muss.

Sind $z_1, z_2, \cdots z_n$ die Elemente eines zweiten Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A), also

(9) $$y_\lambda = \alpha_{\lambda 1} z_1 + \alpha_{\lambda 2} z_2 + \cdots + \alpha_{\lambda n} z_n,$$

wo die $\alpha_{\lambda i}$ Constanten bedeuten, für welche

$$|\alpha_{\lambda i}| \neq 0 \qquad (\lambda, i = 1, 2 \cdots n),$$

so ist nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten

(10) $$D_\varkappa(y_1, y_2 \cdots y_n) = |\alpha_{\lambda i}|\, D_\varkappa(z_1, z_2 \cdots z_n) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n),$$

während die Quotienten dieser Determinanten, d. h. die Coefficienten $p_1, \cdots p_n$, beim Uebergange von einem Fundamentalsystem zu einem anderen ganz ungeändert bleiben. — Diese invariante Natur der Determinanten $D_\varkappa$ können wir auch noch in Evidenz setzen, wenn wir beachten, dass, wie bereits früher (S. 30) bewiesen wurde und überdies auch aus den Gleichungen (3) für $\varkappa = 1$ unmittelbar hervorgeht:

(11) $$D(y_1 \cdots y_n) = (-1)^n D_0(y_1 \cdots y_n) = C \cdot e^{-\int p_1 dx},$$

C eine Constante, so dass sich also

(12) $$D_\varkappa(y_1 \cdots y_n) = (-1)^n C \cdot p_\varkappa \cdot e^{-\int p_1 dx}$$

ergiebt. Diese Darstellung der Determinanten $D_\varkappa$, in Verbindung mit der durch die Gleichungen (10) ausgedrückten Invarianteneigenschaft derselben, leitet uns zu dem folgenden allgemeinen, von Herrn Appell aufgestellten Satze, der gleichsam als Analogon des Satzes von den symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung angesehen werden kann:

Jede ganze rationale Function der Elemente $y_1, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems und ihrer Ableitungen, die sich nur mit einem von Null verschiedenen constanten Factor multiplicirt, wenn $y_1, y_2 \cdots y_n$ durch die Elemente $z_1, z_2 \cdots z_n$ eines anderen Fundamentalsystems ersetzt werden, ist gleich einer ganzen rationalen Function der Coefficienten $p_1, p_2 \cdots p_n$ der Differentialgleichung und ihrer Ableitungen, multiplicirt mit einer Potenz der Grösse

$$e^{-\int p_1 dx}.$$

Sei F die gegebene Function, wir wollen sie eine invariante Function nennen, so muss dieselbe zufolge der Voraussetzung bis auf einen constanten Factor ungeändert bleiben, wenn man die $y_1, y_2 \cdots y_n$ irgendwie permutirt; sie enthält folglich die Ableitungen aller $y_1, y_2 \cdots y_n$ bis zu gleich hoher Ordnung. Sei r diese Ordnung, so soll also die Gleichung:

$$(13) \quad F(y_1, \cdots y_1^{(r)}; \cdots; y_n, \cdots y_n^{(r)}) = H \cdot F(z_1, \cdots z_1^{(r)}; \cdots; z_n, \cdots z_n^{(r)})$$

bestehen, wo H eine Constante bedeutet, wenn die $2n$ Functionen $y_1 \cdots y_n, z_1 \cdots z_n$ durch die Gleichungen (9) mit einander verknüpft sind. Die Constante H kann nur von den Coefficienten $\alpha_{\lambda i}$ der linearen Substitution (9) abhängen und ist, da F eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeuten soll, eine ganze rationale Function dieser Coefficienten. H ist von Null verschieden, sobald $z_1, z_2 \cdots z_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, d. h. sobald

$$\delta = |\alpha_{\lambda i}| \neq 0 \qquad (\lambda, i = 1, 2 \cdots n),$$

es kann sich also H, nach bekannten in der Algebra der linearen Transformationen oft gebrauchten Schlüssen, nur durch einen von den $\alpha_{\lambda i}$ unabhängigen numerischen Factor $\varkappa$ von einer Potenz der Substitutionsdeterminante δ unterscheiden, d. h. es ist:

$$H = \varkappa \cdot \delta^m.$$

Um diesen numerischen Factor $\varkappa$ zu bestimmen, wollen wir die $\alpha_{\lambda i}$ specialisiren; wählen wir

$$\alpha_{\lambda i} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq i,$$
$$\alpha_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2 \cdots n),$$

so ergiebt sich $\varkappa = 1$; die für die Function F vorausgesetzte Beziehung (13) reducirt sich also auf die Form:

$$(14)\quad F(y_1, \cdots y_1^{(r)}; \cdots; y_n, \cdots y_n^{(r)}) = \delta^m F(z_1, \cdots z_1^{(r)}; \cdots; z_n, \cdots z_n^{(r)}).$$

Man denke sich nun diejenigen Ableitungen der $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$, deren Ordnungszahl grösser ist als $n - 1$, vermöge der Differentialgleichung durch die Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und die Coefficienten $p_1, p_2 \cdots p_n$ und deren Ableitungen ausgedrückt, dann wird die Gleichung (14) in

$$(15)\quad G(y_1, \cdots y_1^{(n-1)}; \cdots; y_n, \cdots y_n^{(n-1)}) = \delta^m G(z_1, \cdots z_1^{(n-1)}; \cdots; z_n, \cdots z_n^{(n-1)})$$

übergehen, wo jetzt G eine ganze rationale Function ihrer Argumente bedeutet, deren Coefficienten noch von den $p_1, \cdots p_n$ und ihren Ableitungen abhängen.

Nun ist aber nach (10)

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) = \delta \cdot D(z_1, z_2 \cdots z_n),$$

also genügt der Quotient:

$$(16)\quad \frac{G(y_1 \cdots y_1^{(n-1)}; \cdots; y_n \cdots y_n^{(n-1)})}{\{D(y_1 \cdots y_n)\}^m} = \Omega(y_1 \cdots y_1^{(n-1)}; \cdots; y_n \cdots y_n^{(n-1)})$$

der Gleichung

$$(17)\quad \Omega(y_1 \cdots y_1^{(n-1)}; \cdots; y_n \cdots y_n^{(n-1)}) = \Omega(z_1 \cdots z_1^{(n-1)}; \cdots; z_n \cdots z_n^{(n-1)}).$$

Sei nun $x = \xi$ eine Stelle, an der sich die Integrale $y_1, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) regulär verhalten; dann hat $D(y_1, \cdots y_n)$ an dieser Stelle einen von Null verschiedenen, also Ω einen endlichen und bestimmten Werth Ω_0. Da $z_1 \cdots z_n$ ein beliebiges Fundamentalsystem darstellt, können wir die Werthe der $z_1 \cdots z_n$ und ihrer $(n-1)$ ersten Ableitungen im Punkte $x = \xi$ ganz willkürlich vorschreiben (vergl. Nr. 11), wenn nur die Determinante $D(z_1, z_2 \cdots z_n)$ für $x = \xi$ einen nicht verschwindenden Werth erhält; setzen wir also $x = \xi$ in die Gleichung (17) ein, so besagt dieselbe, dass die Function Ω einen unveränderlichen bestimmten Werth Ω_0 annimmt, wenn man ihren Argumenten $z_1 \cdots z_1^{(n-1)}; \cdots; z_n \cdots z_n^{(n-1)}$ ganz willkürliche nur durch eine Ungleichheitsbedingung beschränkte Werthe beilegt. Also muss Ω von seinen Argumenten ganz unabhängig sein, es kann folglich nur von den Coefficienten von G, d. h. von den $p_1 \cdots p_n$ und ihren Ableitungen abhängen und zwar ist es offenbar eine ganze rationale Function K dieser Grössen. Demnach ergiebt sich aus der Gleichung (16)

$$G(y_1 \cdots y_1^{(n-1)}; \cdots; y_n \cdots y_n^{(n-1)}) = \{D(y_1 \cdots y_n)\}^m \cdot K$$

oder

$$F(y_1 \cdots y_1^{(r)}; \cdots; y_n \cdots y_n^{(r)}) = c \cdot K \cdot e^{-m\int p_1 dx},$$

c eine Constante. Wenn $r = n - 1$, so ist K eine Constante, also die

Function F, abgesehen von einem constanten Factor, eine blosse Potenz von

$$e^{-\int p_1 dx};$$

ist dagegen $r < n - 1$, so reducirt sich, wie man leicht einsieht, eine Function F von der verlangten Beschaffenheit auf eine Constante.

16. Gemeinsame Lösungen linearer Differentialgleichungen.

Ebenso wie man in der Theorie der algebraischen Gleichungen auf die Betrachtung der symmetrischen Functionen der Wurzeln eine Theorie der Elimination gründet, lassen sich die analogen Probleme der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Hülfe der invarianten Functionen eines Fundamentalsystems behandeln.

Die Frage nach den gemeinschaftlichen Lösungen zweier algebraischer Gleichungen findet ihr Analogon in der Frage, ob zwei gegebene lineare Differentialgleichungen Integrale mit einander gemein haben.

Es seien also die beiden linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad P(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad P_1(y) = p_{10} y^{(n_1)} + p_{11} y^{(n_1-1)} + \cdots + p_{1 n_1} y = 0$$

vorgelegt, wo wir, da dies für die folgenden Untersuchungen zweckmässig ist, die Coefficienten der höchsten Ableitungen auch als Functionen von x ansehen wollen, und möge, um die Vorstellung zu fixiren,

$$n - n_1 = m_1 \geqq 0$$

vorausgesetzt werden. — Wir fragen nach der nothwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass die beiden Differentialgleichungen (A) und (B) particuläre Integrale mit einander gemein haben. — Seien

$$y_1, y_2, \ldots y_{n_1}$$

die Elemente eines Fundamentalsystems von (B), so ist jedes Integral von (B) in der Form

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n_1} y_{n_1}$$

darstellbar; soll also die Differentialgleichung (A) durch ein Integral von (B) befriedigt werden, so müssen sich die Constanten $c_1, c_2 \ldots c_{n_1}$ so bestimmen lassen, dass

$$(18) \quad P(c_1 y_1 + \cdots + c_{n_1} y_{n_1}) = c_1 P(y_1) + c_2 P(y_2) + \cdots + c_{n_1} P(y_{n_1}) = 0,$$

d. h. die n_1 Functionen

$$P(y_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots n_1)$$

dürfen nicht linear unabhängig sein und dafür ist nach dem Theorem der Nr. 14 (vergl. auch S. 31) nothwendig und hinreichend, dass die Determinante dieses Functionssystems identisch verschwindet, also

(19) $$| P^{(\varkappa-1)}(y_\lambda) | = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n_1),$$

wo

$$P^{(\varkappa-1)}(y) = \frac{d^{\varkappa-1} P(y)}{dx^{\varkappa-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

gesetzt wurde.

Diese Determinante ist aber offenbar eine invariante Function des Fundamentalsystems $y_1, \cdots y_{n_1}$, sie lässt sich also auf Grund des Appellschen Satzes, als rationaler Ausdruck der Coefficienten der Differentialgleichung (B) und ihrer Ableitungen, multiplicirt mit einer Potenz von

$$e^{-\int \frac{p_{11}}{p_{10}} dx}$$

darstellen. Da dieser letztere Ausdruck nicht identisch gleich Null sein kann, werden wir also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichungen (A) und (B) gemeinsame Lösungen haben, in der Form erhalten, dass eine ganze rationale Function der Coefficienten der beiden Differentialgleichungen und ihrer Ableitungen identisch verschwindet. Diese Form lässt sich nun leicht herstellen, wenn man bedenkt, dass, unter y eine Lösung der Differentialgleichung (B) verstanden,

(20) $$P^{(\varkappa)}(y) = B_{\varkappa 0} y + B_{\varkappa 1} y' + \cdots + B_{\varkappa, n_1-1} y^{(n_1-1)}$$

gesetzt werden kann, wo die $B_{\varkappa i}$ sich aus den Coefficienten der Gleichungen (A), (B) und deren Ableitungen rational zusammensetzen. Also folgt aus dem Multiplicationssatze der Determinanten

$$| P^{(\varkappa-1)}(y_\lambda) | = | B_{\varkappa-1, i-1} | \, | y_\lambda^{(i-1)} | \qquad (i, \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n_1),$$

und da

$$| y_\lambda^{(i-1)} | \qquad (i, \lambda = 1, 2, \cdots n_1)$$

als Determinante eines Fundamentalsystems sicher von Null verschieden ist, ergiebt sich die gesuchte nothwendige und hinreichende Bedingung in der Form

$$| B_{\varkappa i} | = 0 \qquad (\varkappa, i = 0, 1, \cdots n_1 - 1).$$

Es lässt sich jedoch auf die Differentialgleichungen (A) und (B) auch ein Verfahren anwenden, welches dem von Euclid zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzen rationalen Functionen angegebenen analog ist. Offenbar kann in dem Ausdrucke

(21) $$P(y) - q_{10} \frac{d^{m_1}}{dx^{m_1}} (P_1(y))$$

durch geeignete Wahl von q_{10} der Coefficient der n^{ten} Ableitung von y zum Verschwinden gebracht werden, so dass also (21) einen Differentialausdruck der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellt; ebenso kann man ferner q_{11} so bestimmen, dass

$$P(y) - q_{10} P_1^{(m_1)}(y) - q_{11} P_1^{(m_1-1)}(y)$$

nur von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist; fährt man so fort, so ist also bei geeigneter Wahl der $q_{10}, q_{11}, \cdots q_{1,m_1}$ die linke Seite der Differentialgleichung (A) in der Form

$$(22)\quad P(y) = q_{10} P_1^{(m_1)}(y) + q_{11} P_1^{(m_1-1)}(y) + \cdots + q_{1,m_1} P_1(y) + P_2(y)$$

darstellbar, wo $P_2(y)$ einen linearen Differentialausdruck von höchstens $(n_1-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet, dessen Coefficienten sich ebenso wie die Grössen $q_{10}, \cdots q_{1,m_1}$ aus den Coefficienten der Differentialgleichungen (A), (B) und deren Ableitungen rational zusammensetzen. Führen wir die Bezeichnung

$$Q_1(y) = q_{10} y^{(m_1)} + q_{11} y^{(m_1-1)} + \cdots + q_{1,m_1} y$$

ein, so lässt sich, wenn wir Q_1 als Operationssymbol benutzen, die Gleichung (22) kurz in der Form schreiben:

$$(23)\qquad P = Q_1(P_1) + P_2,$$

wo wir die abhängige Variable y, auf die sich die Differentiationsprocesse beziehen, unterdrückt haben. Aus dieser Gleichung folgt, dass etwa vorhandene gemeinsame Lösungen der beiden Differentialgleichungen (A) und (B) auch der Gleichung

$$P_2 = 0$$

genügen müssen. Bilden wir nun analog

$$(24)\qquad \left| \begin{array}{l} P_1 \quad\;\; = Q_2(P_2) + P_3, \\ P_2 \quad\;\; = Q_3(P_3) + P_4, \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ P_{m-1} = Q_m(P_m) + P_{m+1}, \end{array} \right.$$

und bedeutet $n_\varkappa$ die Ordnungszahl des Differentialausdruckes $P_\varkappa$, so ist

$$n \geq n_1 > n_2 > n_3 > \cdots,$$

es muss folglich $n_\varkappa$ spätestens für $\varkappa = n_1 + 1$ verschwinden. Wenn

$$n_{m+1} = 0, \quad n_m \neq 0,$$

so ist P_{m+1} entweder von der Form qy, wo q nur von den Coefficienten der beiden Differentialgleichungen abhängt, oder P_{m+1} ist identisch gleich Null. Im ersteren Falle haben die Differentialgleichungen (A) und (B) nur die triviale Lösung $y = 0$ gemein, wir sagen dann, sie hätten keine gemeinschaftliche Lösung; im letzteren Falle werden die gemeinschaftlichen Lösungen der beiden Differentialgleichungen durch die Integrale der Gleichung

$$P_m = 0 \tag{25}$$

gegeben. Die Coefficienten dieser Gleichung lassen sich, wie aus dem Bildungsgesetze des Algorithmus (24) hervorgeht, durch Differentiationen und rationale Operationen aus den Coefficienten von (A) und (B) herstellen; wenn also diese letzteren als innerhalb eines Bereiches E eindeutige Functionen von x vorausgesetzt werden, so gilt das Gleiche von den Coefficienten der Differentialgleichung (25).

17. Zusammensetzung von Differentialausdrücken.

Als besonderer Fall wäre derjenige hervorzuheben, wo alle Integrale der Gleichung (B) auch der Gleichung (A) genügen; dann müsste zufolge von (23) die Differentialgleichung

$$P_2 = 0$$

durch alle Integrale von (B) befriedigt werden, d. h. diese Differentialgleichung, deren Ordnung höchstens gleich $n_1 - 1$ sein kann, die also die Form

$$P_2(y) = p_{20} y^{(n_1-1)} + p_{21} y^{(n_1-2)} + \cdots + p_{2, n_1-1} y = 0$$

haben muss, würde durch die Elemente $y_1, \cdots y_{n_1}$ eines Fundamentalsystems von (B) erfüllt. Da aber

$$\left| y_\lambda^{(i-1)} \right| \neq 0 \qquad (\lambda, i = 1, 2, \cdots n_1),$$

folgt aus den Gleichungen

$$P_2(y_\lambda) = p_{20} y_\lambda^{(n_1-1)} + \cdots + p_{2, n_1-1} y_\lambda = 0,$$

dass alle Coefficienten von P_2 identisch verschwinden müssen (vergl. den Satz S. 39), es ist also in diesem Falle

$$P = Q_1(P_1)$$

oder kürzer

$$P = Q_1 P_1. \tag{26}$$

Wir sagen, der Differentialausdruck $P(y)$ sei aus den Differentialausdrücken P_1 und Q_1 (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzt, d. h. also er geht aus $Q_1(u)$ hervor, indem man u durch den Differentialausdruck $P_1(y)$ ersetzt, oder indem man auf $P_1(y)$ den durch das Symbol Q_1 dargestellten Differentiationsprocess ausübt. Die linke Seite einer Differentialgleichung (A), die durch alle Integrale einer

Differentialgleichung niedrigerer Ordnung (B) befriedigt wird, lässt sich also aus der linken Seite von (B) und aus einem Differentialausdrucke Q_1, dessen Ordnungszahl gleich der Differenz der Ordnungszahlen von (A) und (B) ist, zusammensetzen; wenn die Coefficienten von (A) und (B) innerhalb eines Bereiches E eindeutige Functionen von x sind, so gilt das Gleiche von den Coefficienten von Q_1.

Wenn umgekehrt ein Differentialausdruck P aus den beiden Differentialausdrücken P_1 und Q_1 zusammengesetzt ist, also die Gleichung (26) besteht, so ist die Ordnungszahl von P gleich der Summe der Ordnungszahlen von P_1 und Q_1 und die Differentialgleichung $P = 0$ wird durch alle Lösungen von $P_1 = 0$ befriedigt; überdies ist offenbar der Coefficient der höchsten Ableitung des zusammengesetzten Differentialausdruckes gleich dem Producte aus den Coefficienten der höchsten Ableitungen seiner Theile.

Dieser letztere Satz bleibt auch bestehen, wenn man mehrfach zusammengesetzte Differentialausdrücke betrachtet, also in leicht verständlicher Schreibweise, wenn man hat

$$P = QRST\cdots.$$

Wir sagen von einem Differentialausdrucke er sei identisch Null, wenn jeder seiner Coefficienten verschwindet. Da der Coefficient der höchsten Ableitung des zusammengesetzten Differentialausdruckes gleich dem Producte aus den Coefficienten der höchsten Ableitungen seiner Theile ist, folgt, dass man durch Zusammensetzung mehrerer nicht identisch verschwindender Differentialausdrücke wieder einen nicht identisch verschwindenden Differentialausdruck erhält. Wenn also ein zusammengesetzter Differentialausdruck identisch Null ist, so muss mindestens einer seiner Theile gleich Null sein. Wenn z. B.

$$P = QRS$$

verschwindet, und es sind Q und S nicht gleich Null, so muss $R = 0$ sein. Aus

$$QR = SR,$$

und ebenso aus

$$RQ = RS,$$

folgt, wenn $R \neq 0$, nothwendig

$$Q = S.$$

Zweites Kapitel.

18. Reduction einer Differentialgleichung bei Kenntniss einiger particulärer Integrale.

Wenn man von einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\text{(A)} \qquad P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

wo jetzt der Coefficient der höchsten Ableitung wieder gleich Eins genommen wurde, $\varkappa$ linear unabhängige Integrale

$$y_1, y_2, \cdots y_\varkappa, \qquad \varkappa < n,$$

kennt, so genügen diese, wie wir in Nr. 14 gesehen haben, einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$P_\varkappa(y) = (-1)^\varkappa \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_\varkappa)}{D(y_1, y_2, \cdots y_\varkappa)} = 0,$$

die also alle ihre Integrale mit (A) gemein hat. Es lässt sich folglich die linke Seite von (A) in die Form

$$P = R_\varkappa P_\varkappa$$

setzen, wo $R_\varkappa$ einen Differentialausdruck $(n - \varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Wir wollen untersuchen, wie man diese Zerlegung von P wirklich ausführen und die Kenntniss einiger particulärer Integrale für die Integration der Differentialgleichung (A) verwerthen kann.

Sei v_1 ein willkürliches (nicht identisch verschwindendes) particuläres Integral der Differentialgleichung (A) und setzen wir

$$\text{(1)} \qquad y = v_1 \int z\, dx$$

in (A) ein, so genügt z einer linearen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\text{(2)} \qquad Q_{n-1}(z) = z^{(n-1)} + q_1 z^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} z = 0,$$

wo

$$(3)\quad \begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{v_1}(p_1 v_1 + n v_1') = p_1 + n\dfrac{d \log v_1}{dx}, \\ q_\lambda = \dfrac{1}{v_1}\{n_\lambda v_1^{(\lambda)} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 v_1^{(\lambda-1)} + \cdots \\ \qquad + (n-h)_{\lambda-h} p_h v_1^{(\lambda-h)} + \cdots + p_\lambda v_1\} \\ \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1). \end{cases}$$

Bedeutet nun v_2 ein beliebiges (nicht identisch verschwindendes) particuläres Integral von (2), so ist

$$y_2 = v_1 \int v_2 \, dx$$

ein zweites particuläres Integral von (A), und wenn wir

$$z = v_2 \int u \, dx$$

in die Differentialgleichung (2) einsetzen, ergiebt sich für u eine Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(4)\qquad Q_{n-2}(u) = u^{(n-2)} + r_1 u^{(n-3)} + \cdots + r_{n-2} u = 0.$$

Sei v_3 ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, so ist

$$v_2 \int v_3 \, dx$$

eine Lösung von (2) und

$$y_3 = v_1 \int v_2 \, dx \int v_3 \, dx$$

eine solche von (A); fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$Q_1(w) = \frac{dw}{dx} + sw = 0,$$

und wenn v_n ein (nicht identisch verschwindendes) Integral dieser Differentialgleichung, also einen Werth von

$$e^{-\int s \, dx}$$

darstellt, so liefert der Ausdruck

$$y_n = v_1 \int v_2 \, dx \int v_3 \, dx \cdots \int v_n \, dx$$

ein n^{tes} particuläres Integral von (A). Diese n Integrale

$$y_1 = v_1,\ y_2,\ \cdots y_n$$

bilden nun ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A). Denn bestände eine Relation

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0$$

mit constanten Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_n$, so folgte nach Division durch y_1

$$c_1 + c_2 \int v_2\, dx + \cdots + c_n \int v_2\, dx \int v_3\, dx \cdots \int v_n\, dx = 0,$$

und wenn wir diese Gleichung differentiiren,

$$c_2 v_2 + c_3 v_2 \int v_3\, dx + \cdots + c_n v_2 \int v_3\, dx \cdots \int v_n\, dx = 0,$$

oder nach Division durch v_2 und abermalige Differentiation

$$c_3 v_3 + \cdots + c_n v_3 \int v_4\, dx \cdots \int v_n\, dx = 0;$$

fährt man so fort, so erhält man endlich

$$c_n v_n = 0,$$

also, da $v_n \neq 0$,

$$c_n = 0;$$

es ergiebt sich folglich aus der vorhergehenden Gleichung

$$c_{n-1} + c_n \int v_n\, dx = 0,$$

dass auch

$$c_{n-1} = 0,$$

und ebenso weiter

$$c_{n-2} = 0, \quad \cdots, \quad c_1 = 0$$

sein müsste. — Ebenso bilden die $n - \varkappa$ Ausdrücke

$$(5) \qquad v_{\varkappa+1}, \quad v_{\varkappa+1} \int v_{\varkappa+2}\, dx, \cdots, v_{\varkappa+1} \int v_{\varkappa+2}\, dx \cdots \int v_n\, dx$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $(n - \varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(6) \qquad Q_{n-\varkappa} = 0,$$

welcher $v_{\varkappa+1}$ genügt, und es ist auch umgekehrt leicht einzusehen, dass sich jedes Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung in der Form (5) darstellen lässt, wenn man für $v_{\varkappa+1}$ ein Element desselben, für $v_{\varkappa+\lambda}$ ein geeignet gewähltes Integral der Gleichung

$$Q_{n-\varkappa-\lambda+1} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots n - \varkappa)$$

nimmt und die bei den successive auszuführenden Quadraturen eintretenden Integrationsconstanten passend bestimmt. Wir können also $y_1, y_2, \cdots y_n$ auch als ein willkürliches Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) ansehen.

Zwischen den Determinanten der Fundamentalsysteme der so erhaltenen successiven Differentialgleichungen besteht eine bemerkenswerthe Beziehung. Bezeichnen wir die Determinante des Fundamentalsystems (5) der Differentialgleichung (6) durch $\mathfrak{D}_\varkappa$ und bedeute ferner $\mathfrak{p}_\varkappa$ den Coefficienten der $(n-\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Ableitung in dieser Differentialgleichung (wenn wir uns den Coefficienten der höchsten, $(n-\varkappa)^{\text{ten}}$ Ableitung gleich Eins gemacht denken), so ist bekanntlich

$$\mathfrak{D}_\varkappa = C_\varkappa e^{-\int \mathfrak{p}_\varkappa dx} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

$C_\varkappa$ eine Constante, und zwischen zwei aufeinander folgenden $\mathfrak{p}_\varkappa$, $\mathfrak{p}_{\varkappa+1}$ besteht die der ersten der Gleichungen (3) analoge Beziehung

$$(7) \qquad \mathfrak{p}_{\varkappa+1} = \mathfrak{p}_\varkappa + (n-\varkappa)\frac{d \log v_{\varkappa+1}}{dx} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

$$(\mathfrak{p}_0 = p_1, \quad \mathfrak{p}_1 = q_1, \quad \mathfrak{p}_2 = r_1, \quad \mathfrak{p}_{n-1} = s).$$

Also erhalten wir

$$\mathfrak{D}_{\varkappa+1} = C_{\varkappa+1} e^{-\int \mathfrak{p}_{\varkappa+1} dx} = \frac{C_{\varkappa+1}}{C_\varkappa} v_{\varkappa+1}^{-n+\varkappa} \mathfrak{D}_\varkappa$$

oder

$$\mathfrak{D}_\varkappa = \frac{C_\varkappa}{C_{\varkappa+1}} v_{\varkappa+1}^{n-\varkappa} \mathfrak{D}_{\varkappa+1}.$$

Bilden wir das Product dieser Gleichungen für die Werthe $\varkappa = \lambda$, $\lambda+1, \cdots n-1$, und beachten, dass (vergl. S. 48)

$$v_n = e^{-\int \mathfrak{p}_{n-1} dx}$$

ist, so ergiebt sich

$$(8) \qquad \mathfrak{D}_\lambda = C_\lambda \cdot v_{\lambda+1}^{n-\lambda} v_{\lambda+2}^{n-\lambda-1} \cdots v_n \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n-1),$$

also insbesondere

$$(9) \qquad \mathfrak{D}_0 = D(y_1, y_2, \cdots y_n) = C v_1^n v_2^{n-1} \cdots v_{n-1}^2 v_n,$$

C_λ, C Constanten. Genau ebenso findet man allgemeiner

$$(10) \qquad D(y_1, y_2 \cdots y_\mu) = \left| y_\varkappa^{(i-1)} \right| = C' v_1^\mu v_2^{\mu-1} \cdots v_\mu$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots \mu),$$

wo auch C' eine Constante bedeutet.

19. Zusammensetzung eines Differentialausdruckes aus Differentialausdrücken erster Ordnung.

Setzen wir

$$\eta_1 = v_1, \quad \eta_2 = v_1 v_2, \quad \eta_3 = v_1 v_2 v_3, \; \cdots, \; \eta_n = v_1 v_2 \cdots v_n,$$

so ist also

$$y_1 = v_1 = \eta_1, \; y_2 = \eta_1 \int \frac{\eta_2}{\eta_1} dx, \; \cdots, \; y_n = \eta_1 \int \frac{\eta_2}{\eta_1} dx \int \cdots \int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}} dx,$$

ferner hat man:

(11) $$D(y_1, y_2 \cdots y_n) = C\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n,$$

(12) $$D(y_1 \cdots y_\mu) = C' \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\mu,$$

also bei geeigneter Wahl der Constanten:

(13) $$\eta_\mu = \frac{D(y_1, y_2 \cdots y_\mu)}{D(y_1, y_2 \cdots y_{\mu-1})}.$$

Jedes solche η_μ genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$A_\mu(y) = \eta_\mu \frac{d}{dx} \frac{y}{\eta_\mu} = y' - \frac{\eta_\mu'}{\eta_\mu} y = 0.$$

Die Differentialgleichung (A) wird durch das einzige Integral $y = \eta_1$ der Differentialgleichung

$$A_1(y) = y' - \frac{\eta_1'}{\eta_1} y = 0$$

befriedigt, folglich ist die linke Seite von (A) in der Form

$$P = B_1 A_1$$

darstellbar (vergl. Nr. 17), wo B_1 einen Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Da der Differentialausdruck $A_1(y)$ nur für $y = y_1$ verschwinden kann, ist

$$A_1(y_\varkappa) \neq 0 \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n),$$

folglich muss (vergl. ebenda)

$$B_1(A_1(y_\varkappa)) = 0$$

sein, d. h. die Differentialgleichung

$$B_1(u) = 0$$

besitzt die $(n-1)$ Lösungen:

$$\eta_1 \frac{d}{dx} \frac{y_2}{\eta_1}, \cdots, \eta_1 \frac{d}{dx} \frac{y_n}{\eta_1},$$

oder

$$\eta_2, \quad \eta_2 \int \frac{\eta_3}{\eta_2} dx, \cdots, \eta_2 \int \frac{\eta_3}{\eta_2} dx \int \cdots \int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}} dx.$$

Folglich ist

$$B_1 = B_2 A_2,$$

B_2 ein Differentialausdruck der Ordnung $(n-2)$, und die Gleichung

$$B_2(u) = 0$$

wird durch die $(n-2)$ Ausdrücke:

$$\eta_3, \quad \eta_3 \int \frac{\eta_4}{\eta_3} dx, \cdots, \eta_3 \int \frac{\eta_4}{\eta_3} dx \int \cdots \int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}} dx$$

befriedigt. Also hat man

$$P = B_1 A_1 = B_2 A_2 A_1,$$

und indem man so fortfährt ergiebt sich für die linke Seite der Differentialgleichung (A) die bemerkenswerthe Darstellung

$$P = A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1,$$

oder ausführlicher geschrieben

$$P = \eta_n \frac{d}{dx} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_3}{\eta_4} \frac{d}{dx} \frac{\eta_2}{\eta_3} \frac{d}{dx} \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{\eta_1}. \tag{14}$$

Die Differentialgleichung $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung

$$P_\varkappa(y) = \eta_\varkappa \frac{d}{dx} \frac{\eta_{\varkappa-1}}{\eta_\varkappa} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{\eta_1} = 0$$

besitzt die Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_\varkappa$, die Differentialgleichung $(n - \varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$R_\varkappa(u) = \eta_n \frac{d}{dx} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_{\varkappa+1}}{\eta_{\varkappa+2}} \frac{d}{dx} \frac{u}{\eta_{\varkappa+1}} = 0$$

die Lösungen

$$P_\varkappa(y_{\varkappa+1}),\ P_\varkappa(y_{\varkappa+2}),\ \cdots\ P_\varkappa(y_n);$$

sehen wir also $y_1, y_2, \cdots y_\varkappa$ als die (S. 47) gegebenen $\varkappa$ linear unabhängigen Particularlösungen der Differentialgleichung (A) an, so stellt uns die Gleichung (14) oder

$$P = R_\varkappa P_\varkappa$$

die daselbst als möglich erkannte Zerlegung von P in expliciter Form dar, und wir erkennen zugleich, dass, wenn nebst den $\varkappa$ Integralen $y_1, \cdots y_\varkappa$ von (A) auch noch die sämmtlichen Lösungen der Differentialgleichung

$$R_\varkappa = 0,$$

d. h. also ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung als bekannt vorausgesetzt wird, noch $(n - \varkappa)$ Integrale von (A), die mit $y_1, \cdots y_\varkappa$ zusammen ein Fundamentalsystem constituiren, durch blosse Ausübung von Quadraturen gefunden werden können. Der explicite Ausdruck des allgemeinen Integrals von (A) durch die Integrale von $P_\varkappa$ und $R_\varkappa$ wird an späterer Stelle (Nr. 26) gegeben werden.

Drittes Kapitel.

20. Multiplicatoren. Adjungirte Differentialgleichung. Beziehung von Lagrange.

Die Form (14) (Nr. 19, S. 52), auf welche die linke Seite der Differentialgleichung (A) gebracht werden kann, ist darum von besonderer Wichtigkeit, weil sie unmittelbar die Multiplicatoren dieser Differentialgleichung hervortreten lässt.

Wir definiren einen Multiplicator der Differentialgleichung (A) allgemein in folgender Weise.

Wenn $Z(x)$ in Bezug auf die linke Seite $P(y)$ von (A) die Eigenschaft hat, dass

$$Z(x) \cdot P(y) = \frac{d}{dx} P(y, Z(x)),$$

wo $P(y, Z(x))$ einen linearen Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von y bedeutet, so ist $Z(x)$ ein Multiplicator von (A). — Für einen solchen besteht ein wichtiger von Lagrange entdeckter Satz, den wir jetzt ableiten wollen.

Wir schicken eine bekannte Formel der Integralrechnung voraus. Es seien y und z Functionen von x, deren Ableitungen wir durch obere Accente bezeichnen, dann ist

$$\int z^{(h)} y^{(\varkappa-h)} dx = z^{(h)} y^{(\varkappa-h-1)} - \int z^{(h+1)} y^{(\varkappa-h-1)} dx$$

$$(h = 0, 1, \cdots \varkappa - 1).$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $(-1)^h$ und summiren in Bezug auf h von 0 bis $(\varkappa - 1)$, so kommt:

$$\sum_{h=0}^{\varkappa-1} (-1)^h \int z^{(h)} y^{(\varkappa-h)} dx = \sum_{h=0}^{\varkappa-1} (-1)^h z^{(h)} y^{(\varkappa-h-1)}$$

$$+ \sum_{h=0}^{\varkappa-1} (-1)^{h+1} \int z^{(h+1)} y^{(\varkappa-h-1)} dx$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$\int z y^{(\varkappa)} dx = \sum_{h=0}^{\varkappa-1} (-1)^h z^{(h)} y^{(\varkappa-h-1)} + (-1)^\varkappa \int z^{(\varkappa)} y \, dx.$$

Bilden wir nun

$$\int P(y) z \, dx = \sum_{\varkappa=0}^{n} \int y^{(\varkappa)} p_{n-\varkappa} z \, dx,$$

wo $p_0 = 1$ zu nehmen ist, so ergiebt sich die Identität

$$(1) \quad \int P(y) z \, dx = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{h=0}^{\varkappa-1} (-1)^h y^{(\varkappa-h-1)} \frac{d^h}{dx^h} (p_{n-\varkappa} z) + \int y P'(z) \, dx,$$

wo

$$(2) \quad P'(z) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa} (p_{n-\varkappa} z)$$

gesetzt wurde. — Setzen wir für z einen Multiplicator $Z(x)$ von (A), so muss

$$\int P(y) Z(x) \, dx$$

gleich einem linearen Differentialausdrucke $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in y werden. Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (1) ist ein Ausdruck von der gewünschten Beschaffenheit. Sollte sich auch das zweite Glied

$$\int y P'(Z(x)) \, dx$$

auf einen solchen reduciren, so müsste $y P'(Z(x))$ die Ableitung eines linearen Differentialausdruckes in y sein, dies ist aber offenbar unmöglich, folglich muss für einen Multiplicator $Z(x)$ dieses zweite Glied wegfallen, d. h. es ist:

$$P'(Z(x)) = 0,$$

oder mit anderen Worten, der Multiplicator $Z(x)$ der Differentialgleichung (A) genügt der homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(\mathrm{A}') \quad P'(z) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa} (p_{n-\varkappa} z) = 0,$$

die wir, mit Herrn Fuchs, die adjungirte Differentialgleichung von (A), ihre linke Seite $P'(z)$ den adjungirten Differentialausdruck von $P(y)$ nennen wollen.

Die Differentiation der Identität (1) ergiebt die Gleichung

$$(3) \quad z P(y) - y P'(z) = \frac{d}{dx} P(y, z),$$

wo

$$\text{(B)} \qquad P(y, z) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h y^{(\varkappa-h-1)} \frac{d^h}{dx^h} (p_{n-\varkappa} z)$$

gesetzt wurde; es ist die Lagrange'sche Beziehung zwischen einem Differentialausdrucke $P(y)$ und seinem adjungirten $P'(z)$.

Der Ausdruck $P(y, z)$ ist ein linearer Differentialausdruck in y, dessen Coefficienten lineare Differentialausdrücke von z sind. Man nennt allgemein einen linearen Differentialausdruck einer unbestimmten Function u von x, dessen Coefficienten lineare Differentialausdrücke einer anderen Function v von x sind, einen in u und v bilinearen Differentialausdruck, ein solcher ist also von der Form

$$A(u, v) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{h=0}^{m} a_{i\varkappa} v^{(i)} u^{(\varkappa)},$$

und man sagt, er sei in u von der n^{ten}, in v von der m^{ten} Ordnung. Die Gleichung (3) besagt also: wenn $P'(z)$ der adjungirte Differentialausdruck von $P(y)$ ist, so ist für die beliebigen Functionen y und z von x

$$zP(y) - yP'(z)$$

die Ableitung eines in y und z bilinearen Differentialausdruckes $P(y, z)$, der in beiden Functionen von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Setzt man insbesondere für z einen Multiplicator $Z(x)$ der Differentialgleichung (A), so wird

$$\text{(4)} \qquad Z(x) \cdot P(y) = \frac{d}{dx} P(y, Z(x)),$$

d. h. dieses Product ist nicht nur die Ableitung eines in y linearen, sondern die eines in y und dem Multiplicator selbst bilinearen Differentialausdruckes $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

21. Der einem zusammengesetzten Differentialausdrucke adjungirte. Reciprocitätssatz.

Die durch die Gleichung (3) ausgedrückte Eigenschaft des zu $P(y)$ adjungirten Differentialausdruckes ist für diesen zugleich charakteristisch. Man kann in der That, nach Herrn Frobenius, den zu $P(y)$ adjungirten Differentialausdruck $P'(z)$ geradezu durch die Forderung definiren, dass

$$zP(y) - yP'(z)$$

die Ableitung eines in y und z bilinearen Differentialausdruckes $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein soll; wir werden den Nachweis hierfür an späterer Stelle erbringen und an der Hand desselben den Zusammenhang der eben erörterten Begriffe mit den im vorhergehenden Kapitel (Nr. 19) angestellten Untersuchungen darlegen. Wir nehmen jetzt diese Untersuchungen wieder auf und setzen unter Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen

$$M_n = \frac{1}{\eta_n},$$

$$\cdots\cdots$$

$$M_h = \frac{1}{\eta_n}\int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}}\,dx\int\cdots\frac{\eta_{h+2}}{\eta_{h+1}}\,dx\int\frac{\eta_{h+1}}{\eta_h}\,dx$$

$$(h = 2, 3, \cdots n-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_1 = \frac{1}{\eta_n}\int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}}\,dx\int\cdots\frac{\eta_3}{\eta_2}\,dx\int\frac{\eta_2}{\eta_1}\,dx.$$

Dann ist nach Gleichung (14) (S. 52)

$$(5)\quad \begin{cases} M_h P(y) = \dfrac{1}{\eta_n}\displaystyle\int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}}\,dx\int\cdots\int\frac{\eta_{h+1}}{\eta_h}\,dx\cdot\eta_n\frac{d}{dx}\frac{1}{\eta_n}P_1(y) \\ \qquad = \dfrac{d}{dx}(M_h P_1) - M_{h1}P_1, \end{cases}$$

wo

$$P_1(y) = P_1 = \eta_{n-1}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{n-2}}{\eta_{n-1}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{\eta_1},$$

$$M_{h1} = \frac{1}{\eta_{n-1}}\int\frac{\eta_{n-1}}{\eta_{n-2}}\,dx\int\cdots\int\frac{\eta_{h+1}}{\eta_h}\,dx$$

gesetzt wurde. Sei allgemein:

$$M_{h\lambda} = \frac{1}{\eta_{n-\lambda}}\int\frac{\eta_{n-\lambda}}{\eta_{n-\lambda-1}}\,dx\int\cdots\int\frac{\eta_{h+1}}{\eta_h}\,dx$$

$$\lambda = 0, 1, \cdots (n-h); \qquad M_{h0} = M_h,$$

$$P_\lambda = \eta_{n-\lambda}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{n-\lambda-1}}{\eta_{n-\lambda}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{\eta_1}$$

$$\lambda = 1, 2, \cdots (n-h+1),$$

so bestehen die der Gleichung (5) analogen Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} M_{h1}P_1 = \dfrac{d}{dx}M_{h1}P_2 - M_{h2}P_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{h,n-h-1}P_{n-h-1} = \dfrac{d}{dx}M_{h,n-h-1}P_{n-h} - M_{h,n-h}P_{n-h}, \\ M_{h,n-h}P_{n-h} = \dfrac{d}{dx}M_{h,n-h}P_{n-h+1}, \end{cases}$$

und durch Addition dieser Gleichung zur Gleichung (5) folgt

$$(7) \qquad M_h P(y) = \frac{d}{dx} \sum_{\lambda=0}^{n-h} M_{h\lambda} P_{\lambda+1} \qquad (h = 1, 2, \cdots n).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die Ableitung eines in y linearen Differentialausdruckes $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die $M_1, M_2, \cdots M_n$ sind also im Sinne der Definition (S. 53) Multiplicatoren von (A); beachtet man, dass

$$M_{h\lambda} = \frac{1}{\eta_{n-\lambda+1}} \frac{d}{dx} \frac{\eta_{n-\lambda+1}}{\eta_{n-\lambda+2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \frac{d}{dx} \eta_n M_h,$$

so erscheinen die Coefficienten dieses Differentialausdruckes auch in ihrem Charakter als lineare Differentialausdrücke des Multiplicators (vergl. den Schluss der Nr. 20).

Die Vergleichung der Ausdrücke dieser Multiplicatoren

$$M_h = \frac{1}{\eta_n} \int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}} dx \int \cdots \int \frac{\eta_{h+1}}{\eta_h} dx$$

mit den Ausdrücken (Nr. 19)

$$y_{n-h} = \eta_1 \int \frac{\eta_2}{\eta_1} dx \int \cdots \int \frac{\eta_{n-h}}{\eta_{n-h-1}} dx$$

lässt unmittelbar erkennen, dass die $M_1, M_2, \cdots M_n$ aus den $y_n, y_{n-1}, \cdots y_1$ hervorgehen, indem man die

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$$

der Reihe nach durch

$$\eta_1' = \frac{1}{\eta_n}, \quad \eta_2' = \frac{1}{\eta_{n-1}}, \cdots \eta_n' = \frac{1}{\eta_1}$$

ersetzt. Ebenso wie $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) d. h. (S. 52, Gl. 14) der Differentialgleichung

$$(8) \qquad P(y) = \eta_n \frac{d}{dx} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{\eta_1} = 0$$

bilden, constituiren folglich die Multiplicatoren $M_1, M_2, \cdots M_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(-1)^n \eta_n' \frac{d}{dx} \frac{\eta_{n-1}'}{\eta_n'} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_1'}{\eta_2'} \frac{d}{dx} \frac{z}{\eta_1'} = 0.$$

Die Differentialgleichung (A′) (S. 54), die wir als die zu (A) adjungirte Differentialgleichung bezeichnet haben, wird durch jeden Multiplicator von (A), also auch durch die $M_1, M_2, \cdots M_n$ befriedigt, sie muss folglich (vergl. S. 39) mit der eben erhaltenen Differentialgleichung identisch sein, und da in beiden der Coefficient der höchsten Ableitung gleich $(-1)^n$ ist, müssen auch die linken Seiten dieser beiden Differentialgleichungen übereinstimmen; es ist also, wenn wir für die $\eta_1', \cdots \eta_n'$ ihre Werthe setzen:

$$(9) \qquad P'(z) = (-1)^n \frac{1}{\eta_1} \frac{d}{dx} \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \frac{d}{dx} \eta_n z = 0$$

die zu (A) adjungirte Differentialgleichung, ihre linke Seite, der zu $P(y)$ adjungirte Differentialausdruck. Wir werden die Identität der Gleichung (9) mit der Gleichung (A') im Folgenden auch noch direct nachweisen, und machen darum vorläufig von derselben keinen Gebrauch. Wir definiren sogar geradezu durch die Gleichung (9) den zu $P(y)$ adjungirten Differentialausdruck, und sagen also:

Der zu $P(y)$ adjungirte Differentialausdruck wird erhalten, indem wir die zur Zusammensetzung von $P(y)$ nach Gleichung (8) erforderlichen $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ durch ihre in umgekehrter Reihenfolge genommenen reciproken Werthe ersetzen und das ganze Resultat mit $(-1)^n$ multipliciren.

Der dem Differentialausdruck erster Ordnung (S. 51)

$$A_\mu(y) = \eta_\mu \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\eta_\mu}\right)$$

adjungirte Differentialausdruck wird also entstehen, indem man das einzige hier auftretende η_μ durch seinen reciproken Werth ersetzt und mit (-1) multiplicirt, d. h.

$$A_\mu'(z) = -\frac{1}{\eta_\mu} \frac{d}{dx}(\eta_\mu z)$$

ist der zu A_μ adjungirte Differentialausdruck.

Mit Hülfe dieser Ausdrücke lässt sich nun $P'(z)$ in die Form setzen

$$(10) \qquad P'(z) = A_1' A_2' \cdots A_{n-1}' A_n',$$

die der Form

$$(11) \qquad P(y) = A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1$$

analog ist. Hieraus erhellt die Reciprocität der Beziehung eines Differentialausdruckes zu seinem adjungirten. Denn da A_μ aus A_μ' ebenso hervorgeht wie dieser Ausdruck aus jenem, ist auch A_μ der adjungirte Differentialausdruck von A_μ' und ebenso $P(y)$ der adjungirte Differentialausdruck von $P'(z)$.

Ferner ergiebt sich sofort der sogenannte Reciprocitätssatz der Herren Thomé und Frobenius als Verallgemeinerung der durch die Gleichungen (10), (11) dargestellten Beziehung.

Ist ein Differentialausdruck aus mehreren zusammengesetzt, so ist der adjungirte aus den adjungirten in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt.

Sei nämlich

$$P = QR \cdots S,$$

und

$$Q = A_n A_{n-1} \cdots A_{\alpha+1},$$
$$R = A_\alpha A_{\alpha-1} \cdots A_{\beta+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S = A_\mu A_{\mu-1} \cdots A_1,$$

dann sind die adjungirten dieser Differentialausdrücke:

$$Q' = A'_{\alpha+1} \cdots A'_{n-1} A'_n,$$
$$R' = A'_{\beta+1} \cdots A'_{\alpha-1} A'_\alpha,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S' = A'_1 \quad \cdots A'_{\mu-1} A'_\mu,$$

und der adjungirte Differentialausdruck von P ist:

$$P' = A'_1 A'_2 \cdots A'_n,$$

also folgt in der That

$$P' = S' \cdots R' Q'.$$

Da $M_1, M_2 \cdots M_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (9) constituiren, lässt sich jedes Integral dieser Differentialgleichung in der Form

$$Z = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \cdots + c_n M_n$$

darstellen, wo $c_1, c_2 \cdots c_n$ Constanten sind. Es ergiebt sich folglich aus den Gleichungen (7) und aus der Definition des Multiplicators, dass jede Lösung der adjungirten Differentialgleichung einen Multiplicator der ursprünglichen darstellt, und aus der Reciprocität der zwischen adjungirten Differentialausdrücken bestehenden Beziehung folgt, dass auch umgekehrt jedes Integral der ursprünglichen Differentialgleichung ein Multiplicator der adjungirten ist. Wenn wir von der Identität der beiden durch die Gleichungen (9) und (A′) gegebenen Definitionen des adjungirten Differentialausdruckes Gebrauch machen, d. h. wenn wir als bekannt voraussetzen, dass jeder Multiplicator einer linearen Differentialgleichung der adjungirten Differentialgleichung genügen muss, so können wir also sagen:

Die sämmtlichen Multiplicatoren der Differentialgleichung (A) werden durch die Lösungen der adjungirten Differentialgleichung (A′) dargestellt, und diese Beziehung zwischen den beiden Differentialgleichungen ist eine gegenseitige.

22. Sätze über die Determinanten eines Systems von Functionen. Neue Form der Multiplicatoren.

Um nun den directen Nachweis für die Identität der Gleichungen (9) und (A') zu führen, wollen wir die Multiplicatoren $M_1, \cdots M_n$ auf eine etwas andere Form bringen, und schicken zu diesem Ende einige Hülfsbetrachtungen über die Determinante eines Systems von Functionen voraus.

Für die Determinante des Functionssystems $y_1, y_2 \cdots y_n$ besteht offenbar die Gleichung

$$D(cy_1, cy_2, \cdots cy_n) = c^n D(y_1, y_2 \cdots y_n),$$

wenn c eine von x unabhängige Grösse bedeutet; dieselbe Gleichung gilt aber auch noch, wenn für c irgend eine Function $f(x)$ von x genommen wird. In der That, multipliciren wir $D(y_1, y_2 \cdots y_n)$ mit der Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} f & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f' & f & 0 & \cdots & 0 \\ f^{(2)} & 2f' & f & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(n-1)} & (n-1)_1 f^{(n-2)} & (n-1)_2 f^{(n-3)} & \cdots & f \end{vmatrix} = f^n$$

(die oberen Accente bezeichnen wie gewöhnlich Ableitungen nach x), indem wir die Zeilen von $D(y_1, y_2 \cdots y_n)$ mit den Reihen von $\varDelta$ zusammensetzen, so gelangen wir zu der Gleichung

$$(12) \qquad D(fy_1, fy_2, \cdots fy_n) = f^n D(y_1, y_2 \cdots y_n).$$

Für $f = \frac{1}{y_1}$ reducirt sich die Determinante auf der linken Seite dieser Gleichung auf die Determinante der $(n-1)$ Functionen

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = \frac{D(y_1, y_2)}{y_1^2}, \quad \cdots, \quad \frac{d}{dx}\frac{y_n}{y_1} = \frac{D(y_1, y_n)}{y_1^2};$$

setzen wir also

$$D(y_1, y_\lambda) = \bar{y}_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

so kommt

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) = \frac{1}{y_1^{n-2}} D(\bar{y}_2, \cdots \bar{y}_n).$$

Hieraus folgt

$$D(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_1} D(\bar{y}_2, \bar{y}_3),$$

$$D(y_1, y_2, y_4) = \frac{1}{y_1} D(\bar{y}_2, \bar{y}_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$D(y_1, y_2, y_n) = \frac{1}{y_1} D(\bar{y}_2, \bar{y}_n),$$

und ferner

$$D(\bar{y}_2, \bar{y}_3, \cdots \bar{y}_n) = \frac{1}{y_2^{n-3}} D(D(\bar{y}_2, \bar{y}_3), D(\bar{y}_2, y_4), \cdots D(\bar{y}_2, \bar{y}_n)).$$

Durch Combination dieser Formeln erhalten wir

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) = \frac{1}{D(y_1, y_2)^{n-3}} D(D(y_1, y_2, y_3), D(y_1, y_2, y_4), \cdots D(y_1, y_2, y_n)),$$

und indem wir diese Schlussweise fortsetzen, ergiebt sich der Satz:

Sind $u_1, \cdots u_\mu, v_1, \cdots v_\nu$ $\mu + \nu$ Functionen von x, und setzt man

$$w_\lambda = D(u_1, \cdots u_\mu, v_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \nu),$$

so ist

$$(13) \qquad D(u_1, \cdots u_\mu, v_1, \cdots v_\nu) = \frac{D(w_1, w_2, \ldots w_\nu)}{D(u_1, u_2, \ldots u_\mu)^{\nu-1}}.$$

Nehmen wir $\mu = \lambda - 1$, $\nu = 2$, ferner für $u_1, u_2, \cdots u_{\lambda-1}, v_1, v_2$ der Reihe nach die Functionen

$$y_1, y_2 \cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \cdots y_\lambda, y_\varkappa, y_{\lambda+1},$$

so ergiebt sich aus (13) die Gleichung

$$D(y_1, \cdots y_{\lambda+1})\, D(y_1, \cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1} \cdots y_\lambda)$$
$$= D(D(y_1, \cdots y_\lambda), D(y_1, \cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \cdots y_{\lambda+1})),$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$(14) \qquad \frac{D(y_1 \cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1} \cdots y_\lambda)\, D(y_1 \cdots y_{\lambda+1})}{D(y_1 \cdots y_\lambda)^2}$$
$$= \frac{d}{dx} \frac{D(y_1 \cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1} \cdots y_{\lambda+1})}{D(y_1 \cdots y_\lambda)}.$$

Setzen wir in den Ausdruck von M_α (S. 56) für die daselbst auftretenden Grössen η_μ die in der Nr. 19, Gleichung (13) gefundenen Werthe

$$\eta_\mu = \frac{D(y_1, y_2 \cdots y_\mu)}{D(y_1, y_2 \cdots y_{\mu-1})}$$

ein, so erhalten wir

$$M_\alpha = \frac{1}{\eta_n} \int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}} dx \int \cdots \int \frac{\eta_{\alpha+2}}{\eta_{\alpha+1}} dx \int \frac{D(y_1 \cdots y_{\alpha+1})\, D(y_1 \cdots y_{\alpha-1})}{D(y_1 \cdots y_\alpha)^2} dx,$$

also nach Anwendung der Gleichung (14)

$$M_\alpha = \frac{1}{\eta_n} \int \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}} dx \int \cdots \int \frac{\eta_{\alpha+3}}{\eta_{\alpha+2}} dx \int \frac{D(y_1 \cdots y_{\alpha+2})\, D(y_1 \cdots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1})}{D(y_1, \cdots y_{\alpha+1})^2} dx,$$

und durch Fortsetzung dieser Reduction endlich

$$M_\alpha = \frac{D(y_1 \cdots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1} \cdots y_n)}{D(y_1, y_2 \cdots y_n)} \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots n).$$

Es ist zweckmässiger im Folgenden an Stelle der Multiplicatoren $M_1, M_2 \cdots M_n$ die nachstehenden zu benutzen:

$$(15) \qquad z_\alpha = (-1)^{n+\alpha} \frac{D(y_1 \cdots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1} \cdots y_n)}{D(y_1, y_2 \cdots y_n)}.$$

Beachtet man dann, dass (vergl. Nr. 14)

$$P(y) = (-1)^n \frac{D(y, y_1 \cdots y_n)}{D(y_1, y_2 \cdots y_n)}$$

ist, so folgt aus der Gleichung (14), wenn man daselbst $\varkappa = \alpha$, $\lambda = n$, $y_{\lambda+1} = y$ setzt,

$$(16) \qquad z_\alpha P(y) = \frac{d}{dx} P(y, z_\alpha),$$

wo

$$P(y, z_\alpha) = (-1)^{\alpha-1} \frac{D(y, y_1 \cdots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1} \cdots y_n)}{D(y_1, y_2 \cdots y_n)}.$$

Die Gleichung (16) ist also mit der Gleichung (7) (S. 57) im Wesentlichen identisch, sie ist diejenige Gleichung, durch welche die Multiplicatoreigenschaft von z_α ausgedrückt wird. Aus den durch die Gleichungen (15) gegebenen Ausdrücken der Multiplicatoren z_α folgen nun zahlreiche Beziehungen zwischen diesen und den $y_1 \ldots y_n$, deren einige wir hier zu entwickeln haben.

23. Beziehungen zwischen adjungirten Fundamentalsystemen. Verhalten bei Umläufen. Reciproke Substitutionen.

Die Determinante

$$\Delta_\alpha = \left| y_\lambda^{(\varkappa)} \right| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2 \cdots n \\ \varkappa = 0, 1 \cdots (n-2), \alpha \end{pmatrix}$$

hat den Werth Null für $\alpha < n - 1$, sie ist gleich

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n)$$

für $\alpha = n - 1$. Entwickeln wir Δ_α nach den Elementen der dem Werthe $\varkappa = \alpha$ entsprechenden Reihe, so erhalten wir die Gleichungen

$$(17) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^{(\varkappa)} z_\alpha = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-2), \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^{(n-1)} z_\alpha = 1, \end{cases}$$

oder, wenn

$$s_{\lambda\varkappa} = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^{(\lambda)} z_\alpha^{(\varkappa)}$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$s_{00} = s_{10} = \cdots = s_{n-2,\,0} = 0,$$
$$s_{n-1,\,0} = 1.$$

Nun ist aber

$$\frac{ds_{\lambda-1,\,0}}{dx} = s_{\lambda 0} + s_{\lambda-1,\,1},$$

$$\frac{d^2 s_{\lambda-2,\,0}}{dx^2} = s_{\lambda 0} + 2s_{\lambda-1,\,1} + s_{\lambda-2,\,2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^\lambda s_{00}}{dx^\lambda} = s_{\lambda 0} + \lambda s_{\lambda-1,\,1} + \lambda_2 s_{\lambda-2,\,2} + \cdots + s_{0\lambda}.$$

Wenn $\lambda < n-1$, so folgt hieraus

$$s_{\lambda\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad \lambda + \varkappa < n - 1,$$

dagegen finden wir für $\lambda = n-1$, da

$$1 - \mu + \mu_2 - \mu_3 + \cdots + (-1)^\mu = (1-1)^\mu = 0,$$

für $s_{n-1,\,0},\ s_{n-2,\,1},\ s_{n-3,\,2}, \cdots$ abwechselnd die Werthe $+1$ oder -1; ebenso ergiebt sich für $\lambda = n$

$$s_{n0} = -s_{n-1,\,1} = s_{n-2,\,2} = \cdots = (-1)^n s_{0n},$$

es ist also allgemein

$$(18) \qquad \begin{cases} s_{\lambda\varkappa} = 0, & \text{für} \quad \lambda + \varkappa < n-1, \\ s_{\lambda\varkappa} = (-1)^\varkappa, & \text{für} \quad \lambda + \varkappa = n-1. \end{cases}$$

Für $\lambda = 0$ geben diese Relationen die den Gleichungen (17) analogen Gleichungen

$$(19) \qquad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha^{(\varkappa)} y_\alpha = 0 \qquad \varkappa = 0, 1, \cdots (n-1), \\ \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha^{(n-1)} y_\alpha = (-1)^{n-1}, \end{cases}$$

welche die vollständige Reciprocität zwischen den $y_1, \cdots y_n$ und den $z_1, \cdots z_n$ hervortreten lassen. Auch lehren diese Gleichungen, dass die Determinante

$$D(z_1, z_2 \cdots z_n)$$

von Null verschieden sein muss, da sich sonst $s_{0,\,n-1} = 0$ ergäbe, während $s_{0,\,n-1} = (-1)^{n-1}$ gefunden wurde; dies geht übrigens auch schon aus der Thatsache hervor, dass $M_1, \cdots M_n$ und folglich auch

$z_1, \cdots z_n$ ein Fundamentalsystem der adjungirten Differentialgleichung (9) constituiren. Wir können aber auch leicht den genauen Werth der Determinante des Functionssystems $z_1, \cdots z_n$ ermitteln. Aus dem Multiplicationssatze der Determinanten folgt nämlich die Gleichung

$$\left| y_\lambda^{(\varkappa-1)} \right| \left| z_\lambda^{(\varkappa-1)} \right| = \left| s_{\lambda-1,\varkappa-1} \right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

und da zufolge der Relationen (18)

$$\left| s_{\lambda-1,\varkappa-1} \right| = 1 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n)$$

ist, erhalten wir die wichtige Beziehung

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) \cdot D(z_1, z_2 \cdots z_n) = 1. \tag{20}$$

Bezeichnen wir das durch die Gleichungen (15) definirte Fundamentalsystem $z_1, \cdots z_n$ der adjungirten Differentialgleichung als das zu $y_1, \cdots y_n$ adjungirte Fundamentalsystem, so können wir also sagen:

Das Product aus den Determinanten adjungirter Fundamentalsysteme hat den Werth Eins.

Ebenso wie die Gleichungen (15) eine unmittelbare Folge der Gleichungen (17) sind, gehen aus den Gleichungen (19) durch Ausrechnung von $y_1, y_2 \cdots y_n$ die Ausdrücke

$$y_\alpha = (-1)^{\alpha-1} \frac{D(z_1, \cdots z_{\alpha-1}, z_{\alpha+1} \cdots z_n)}{D(z_1, z_2 \cdots z_n)} \tag{21}$$

hervor. Wenn wir nun noch die adjungirte Differentialgleichung (9) nach der in der Nr. 14 dargelegten Methode durch das Fundamentalsystem $z_1, z_2 \cdots z_n$ derselben darstellen (wobei zu beachten ist, dass nach Gleichung (9) der Coefficient der n^{ten} Ableitung von z in $P'(z)$ den Werth $(-1)^n$ hat), so kommt

$$P'(z) = \frac{D(z, z_1, z_2, \cdots z_n)}{D(z_1, z_2, \cdots z_n)}, \tag{22}$$

und an dieser Form lässt sich jetzt, auf Grund des Theorems von Appell (Nr. 15), leicht zeigen, dass die Coefficienten von $P'(z)$ ganze rationale Functionen der Coefficienten von $P(y)$ und ihrer Ableitungen sind.

Untersuchen wir zu dem Ende, wie sich die $z_1, \cdots z_n$ verändern, wenn wir an Stelle von $y_1, \cdots y_n$ ein anderes Fundamentalsystem $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ der Differentialgleichung (A) treten lassen, welches mit $y_1, \cdots y_n$ durch die Gleichungen:

$$\xi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n) \tag{23}$$

verbunden ist, wo

$$A = |\alpha_{\varkappa\lambda}| \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n).$$

Die Werthe $\zeta_1, \zeta_2 \cdots \zeta_n$, in welche $z_1, z_2 \cdots z_n$ übergehen, werden sich am einfachsten ergeben, wenn wir beachten, dass die Gleichungen (17) zur vollständigen Bestimmung der Grössen $z_1, \cdots z_n$ ausreichen; hieraus folgt nämlich, dass die $\zeta_1, \zeta_2 \cdots \zeta_n$ mit den $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ durch dieselben Gleichungen (17) verknüpft sind, dass also:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \zeta_\varkappa \xi_\varkappa^{(i)} = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots n-2),$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \zeta_\varkappa \xi_\varkappa^{(n-1)} = 1.$$

Setzen wir hierin für die $\xi_\varkappa$ und die Ableitungen dieser Functionen, die sich aus den Gleichungen (23) unmittelbar und durch Differentation ergebenden Werthe ein, so erhalten wir:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\varkappa} \zeta_\lambda = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots n-2),$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa^{(n-1)} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\varkappa} \zeta_\lambda = 1.$$

Hieraus folgt durch Vergleichung mit (17)

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\varkappa} \zeta_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

oder wenn wir

$$A_{\lambda\varkappa} = \frac{\partial A}{\partial \alpha_{\lambda\varkappa}} \cdot \frac{1}{A}$$

setzen, durch Auflösung nach den ζ_λ

$$\zeta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} z_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n) \tag{24}$$

und nach bekannten Sätzen über Determinanten ist

$$|A_{\varkappa\lambda}| = \frac{1}{A} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n).$$

Die Multiplicatoren $z_1, z_2 \cdots z_n$ gehen also, wenn man $y_1 \cdots y_n$ durch $\xi_1 \cdots \xi_n$ ersetzt, in lineare homogene Functionen $\zeta_1, \zeta_2 \cdots \zeta_n$ ihrer selbst über, oder mit anderen Worten, wenn man auf die Elemente $y_1, y_2 \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A) die lineare Substitution (23) mit nicht verschwindender Determinante ausübt, so erfahren die Elemente $z_1 \cdots z_n$ des adjungirten Fundamentalsystems auch eine lineare

Substitution (24) mit nicht verschwindender Determinante, und zwar stehen diese beiden linearen Substitutionen in der Beziehung zu einander, dass die eine die reciproke der anderen ist. In der That folgt aus bekannten Determinantensätzen, dass ebenso wie $\mathsf{A}_{\varkappa\lambda}$ gleich der zum Elemente $\alpha_{\varkappa\lambda}$ der Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}|$ gehörigen Subdeterminante dividirt durch die Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}|$ selbst ist, auch umgekehrt $\alpha_{\varkappa\lambda}$, als der Quotient der zum Elemente $\mathsf{A}_{\varkappa\lambda}$ gehörigen Subdeterminante der Determinante $|\mathsf{A}_{\varkappa\lambda}|$ durch diese Determinante selbst aufgefasst werden kann.

In der Invariantentheorie der algebraischen Formen nennt man zwei Systeme von Grössen

$$y_1, y_2 \cdots y_n$$
$$z_1, z_2 \cdots z_n,$$

die in der angegebenen Weise transformirt werden, contragrediente Systeme; wir können also kurz sagen, ein Fundamentalsystem von (A) und sein adjungirtes Fundamentalsystem sind contragredient.

24. **Explicite Darstellung des adjungirten und des begleitenden bilinearen Differentialausdruckes. Sätze von Frobenius und Hesse.**

Betrachten wir nun den Ausdruck (22)

$$P'(z) = \frac{D(z, z_1 \cdots z_n)}{D(z_1 \cdots z_n)},$$

beziehungsweise, wenn wir uns die Zählerdeterminante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt denken, wodurch

$$P'(z) = (-1)^n z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \cdots + q_n z$$

wird, die Coefficienten $q_1, q_2 \cdots q_n$ der einzelnen Ableitungen von z. Ersetzen wir $y_1 \cdots y_n$ durch $\xi_1 \cdots \xi_n$, so verwandeln sich $z_1, z_2 \cdots z_n$ in $\zeta_1, \zeta_2 \cdots \zeta_n$, die Coefficienten $q_1, q_2 \cdots q_n$ bleiben also ungeändert. Wie aber aus der Darstellung (15) der Grössen z_α durch die $y_1 \cdots y_n$ und aus der Gleichung (20) unmittelbar hervorgeht, sind diese Coefficienten $q_1, q_2 \cdots q_n$ Brüche, deren Zähler ganze rationale Functionen der $y_1 \cdots y_n$ und ihrer Ableitungen sind, während der allen gemeinschaftliche Nenner eine ganzzahlige Potenz von

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n) = e^{-\int p_1 dx}$$

ist. Dieser Nenner multiplicirt sich beim Uebergange von den $y_1 \cdots y_n$ zu den $\xi_1 \cdots \xi_n$ mit einer bestimmten etwa der μ^{ten} Potenz der

Determinante A; da die Brüche selbst ungeändert bleiben müssen, multipliciren sich also die Zähler ebenfalls mit A″. Sie sind folglich nach dem Satze von **Appell**, abgesehen von dem Factor

$$D(y_1, y_2 \cdots y_n)^\mu,$$

ganze rationale Functionen der Coefficienten $p_1 \cdots p_n$ von (A) und deren Ableitungen, dieser Factor hebt sich aber genau gegen den Nenner weg, so dass sich schliesslich die $q_1, q_2 \cdots q_n$ als ganze rationale Functionen der $p_1, p_2 \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen ergeben.

Um zu der wirklichen Darstellung der Coefficienten von $P'(z)$ zu gelangen, greifen wir auf die Gleichung (16) (S. 62) und insbesondere auf die daselbst definirten Ausdrücke

$$P(y, z_\alpha) = (-1)^{\alpha - 1} \frac{D(y, y_1 \cdots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1}, \cdots y_n)}{D(y_1 \cdots y_n)}$$

zurück, die sich unmittelbar als Differentialausdrücke $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in y darstellen. Wir fragen nach einem in y und z bilinearen Differentialausdrucke $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $P(y, z)$, der sich für $z = z_\alpha$ auf $P(y, z_\alpha)$ reducirt, für $\alpha = 1, 2 \cdots n$.

Sei der gesuchte Ausdruck

$$P(y, z) = T_0 z + T_1 z' + \cdots + T_{n-1} z^{(n-1)},$$

so sollen also die Gleichungen

$$P(y, z_\alpha) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} T_\varkappa z_\alpha^{(\varkappa)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

erfüllt werden; diese bestimmen aber die Coefficienten $T_0, T_1 \ldots T_{n-1}$ und damit den Ausdruck $P(y, z)$ vollständig und eindeutig, da die Determinante

$$\left| z_\alpha^{(\varkappa-1)} \right| = D(z_1 \cdots z_n) \qquad (\alpha, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

von Null verschieden ist. Es kann also nur *einen* Ausdruck $P(y, z)$ von der geforderten Beschaffenheit geben, ein solcher ist aber

$$(26) \qquad P(y, z) = \sum_{\alpha=1}^{n} P(y_\alpha, z)\, P(y, z_\alpha),$$

wo

$$(27) \qquad P(y_\alpha, z) = (-1)^{\alpha-1} \frac{D(z, z_1 \cdots z_{\alpha-1}, z_{\alpha+1} \cdots z_n)}{D(z_1 \cdots z_n)}$$

gesetzt wurde. In der That ist dieser Ausdruck bilinear in y, z und ihren Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und er reducirt sich offenbar für $z = z_\alpha$ auf $P(y, z_\alpha)$; überdies sehen wir auch, dass er für $y = y_\alpha$ dem mit $P(y_\alpha, z)$ bezeichneten Ausdrucke gleich wird, wodurch für diesen letzteren die gewählte Bezeichnung gerechtfertigt erscheint. Aus den Gleichungen (21), (22) und (27) folgt durch Anwendung der Determinantenrelation (14) (S. 61) die der Gleichung (16) (S. 62) analoge Beziehung

$$(28)\qquad y_\alpha P'(z) = -\frac{d}{dx} P(y_\alpha, z),$$

die uns die Integrale y_α der Differentialgleichung (A) in ihrer Eigenschaft als Multiplicatoren der adjungirten Differentialgleichung erkennen lässt (vergl. Nr. 21, Schluss).

Differentiiren wir den Ausdruck $P(y, z)$ nach x, so folgt aus den Gleichungen (16), (26), (28):

$$(29)\qquad \frac{d}{dx} P(y, z) = \sum_{\alpha=1}^{n} \{ P(y_\alpha, z) z_\alpha P(y) - P(y, z_\alpha) y_\alpha P'(z) \}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\begin{vmatrix} y & y' & \cdots & y^{(n-1)} & y^{(h)} \\ y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(h)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(h)} \end{vmatrix} = 0, \qquad (h < n),$$

also folgt, wenn wir nach der letzten Reihe ordnen und durch $D(y_1 \cdots y_n)$ dividiren, mit Rücksicht auf die Gleichungen (25),

$$(\mathrm{C})\qquad y^{(h)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} y_\alpha^{(h)} P(y, z_\alpha), \qquad (h < n),$$

und analog findet man

$$z^{(h)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha^{(h)} P(y_\alpha, z), \qquad (h < n).$$

Benutzt man diese Gleichungen für $h = 0$ zur Umformung der linken Seite von (29), so ergiebt sich

$$(30)\qquad \frac{d}{dx} P(y, z) = z P(y) - y P'(z).$$

Wir haben also von dem durch die Gleichung (9) (S. 58) definirten Ausdrucke $P'(z)$ direct nachgewiesen, dass er die Eigenschaft hat, die Differenz

$$z P(y) - y P'(z)$$

zur Ableitung eines in y, z bilinearen Differentialausdruckes zu machen; hieraus lässt sich nun, — und wir kommen damit zu dem oben erwähnten Satze des Herrn Frobenius — sehr leicht die Identität dieses Ausdruckes $P'(z)$ mit dem durch die Gleichung (A′) erklärten und zugleich die des in Gleichung (30) vorkommenden bilinearen Differentialausdruckes $P(y, z)$ mit dem ebenso bezeichneten, durch die Gleichung (B) (S. 55) erklärten, nachweisen. Subtrahiren wir nämlich die oben hergeleitete Lagrange'sche Identität (Nr. 20)

$$(31)\qquad \frac{d}{dx}\sum_{\varkappa=0}^{n}\sum_{h=0}^{\varkappa-1}(-1)^h y^{(\varkappa-h-1)}\frac{d^h}{dx^h}(p_{n-\varkappa}z) = zP(y) - y\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^\varkappa\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}(p_{n-\varkappa}z)$$

von der Gleichung (30) und denken uns für z eine bestimmte Function von x gesetzt, so haben wir auf der linken Seite der so entstehenden Gleichung die Ableitung eines linearen Differentialausdruckes von y, während auf der rechten Seite eine mit y multiplicirte Function von x steht; ein solches Product kann aber unmöglich die Ableitung eines linearen Differentialausdruckes von y sein, dieser muss also identisch verschwinden, d. h. es ist in der That

$$(32)\qquad \begin{cases} P'(z) = \sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^\varkappa\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}(p_{n-\varkappa}z), \\ P(y, z) = \sum_{\varkappa=0}^{n}\sum_{h=0}^{\varkappa-1}(-1)^h y^{(\varkappa-h-1)}\frac{d^h}{dx^h}(p_{n-\varkappa}z), \end{cases}$$

woraus sich zugleich die Darstellung der Coefficienten $q_1, q_2 \cdots q_n$ von $P'(z)$ und auch die der Coefficienten von $P(y, z)$ als ganzer rationaler Functionen der Coefficienten $p_1, p_2 \cdots p_n$ von $P(y)$ und deren Ableitungen ergiebt. Man nennt $P(y, z)$ den den Differentialausdruck $P(y)$ begleitenden bilinearen Differentialausdruck. Stellt man für den Differentialausdruck

$$P'(z) = (-1)^n z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \cdots + q_n z$$

die Identität von Lagrange auf und subtrahirt dieselbe von der Gleichung (30), so ergeben sich für $P(y)$ und $P(y, z)$ Ausdrücke, deren Coefficienten sich rational aus den $q_1, q_2 \cdots q_n$ und ihren Ableitungen zusammensetzen. Ferner ergiebt sich unmittelbar der von Hesse herrührende Satz:

Der adjungirte und der begleitende bilineare Differentialausdruck einer Summe ist gleich der Summe aus den adjungirten und den begleitenden bilinearen Ausdrücken der einzelnen Summanden.

In den obigen Formeln ist überall $p_0 = 1$ zu nehmen; um auch den Fall eines Differentialausdruckes, in welchem der Coefficient der höchsten Ableitung eine beliebige Function a von x ist, in unsere Betrachtung einzuordnen, setzen wir fest, dass der Ausdruck az als der adjungirte des Differentialausdruckes nullter Ordnung ay anzusehen sei. Dann ergiebt sich aus dem Reciprocitätssatze (Nr. 21), dass der adjungirte Differentialausdruck von $a\ P(y)$ gleich $P'(az)$ ist, so dass also die Ausdrücke (32) auch in dem Falle, wo in

$$P(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y$$

p_0 als beliebige Function von x genommen wird, den adjungirten, beziehungsweise den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $P(y)$ darstellen.

25. Differentialgleichungen, die ihren adjungirten gleich oder entgegengesetzt gleich sind. Sätze von Jacobi und Darboux.

Wenn eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $P(y) = 0$ mit ihrer adjungirten $P'(z) = 0$ alle Integrale gemein hat, so muss (S. 39)

$$P(y) = \varrho \cdot P'(y)$$

sein, wo ϱ einen von y unabhängigen Factor bedeutet. Da aber der Coefficient der höchsten Ableitung in P' sich von dem Coefficienten der höchsten Ableitung in P nur durch den Factor $(-1)^n$ unterscheidet, so folgt, dass

$$P(y) = (-1)^n P'(y)$$

sein muss. Demzufolge ist alsdann jede Lösung der Differentialgleichung auch zugleich ein Multiplicator. Wenn die Ordnung n der Differentialgleichung eine gerade Zahl, $n = 2m$ ist, haben wir

$$P(y) = P'(y),$$

in diesem Falle ist also der Differentialausdruck $P(y)$ mit seinem adjungirten identisch; diese Art von Differentialgleichungen spielt in der Variationsrechnung eine wichtige Rolle (vergl. Jacobi, Crelle's Journal, Bd. 17, S. 66). Ist dagegen n eine ungerade Zahl, $n = 2m - 1$, so ist:

$$P(y) = -P'(y),$$

d. h. der Differentialausdruck ist seinem adjungirten entgegengesetzt gleich.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall, $n = 2m$, $P(y) = P'(y)$; dann lautet also die Lagrange'sche Identität (30)

$$z P(y) - y P(z) = \frac{d}{dx} P(y, z),$$

es ist demnach

$$\frac{d}{dx} P(y, z) = - \frac{d}{dx} P(z, y)$$

und folglich, da $P(y, z)$ homogen ist,

$$P(y, z) = - P(z, y);$$

man nennt einen bilinearen Differentialausdruck, der diese Eigenschaft hat, einen alternirenden, und man hat für einen solchen offenbar:

$$P(y, y) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich sofort ein wichtiger Satz von Jacobi.

Sei nämlich w_1 ein beliebiges Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$, so ist also, wenn wir in (30) $z = w_1$ einsetzen,

$$w_1 P(y) = \frac{d}{dx} P(y, w_1), \tag{33}$$

da aber

$$P(w_1, w_1) = 0,$$

so lässt sich (Nrn. 17, 19) der in y lineare Differentialausdruck $(2m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung $P(y, w_1)$ in die Form setzen:

$$P(y, w_1) = P_1 \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1},$$

wo P_1 einen linearen Differentialausdruck $(2m - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Also ist nach (33)

$$P(y) = \frac{1}{w_1} \frac{d}{dx} P_1 \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1}; \tag{34}$$

bilden wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den adjungirten Differentialausdruck, indem wir auf der rechten Seite den Reciprocitätssatz (Nr. 21) anwenden, so kommt

$$P'(y) = P(y) = \frac{1}{w_1} \frac{d}{dx} P_1' \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1},$$

also erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{w_1} \frac{d}{dx} P_1 \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1} = \frac{1}{w_1} \frac{d}{dx} P_1' \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1},$$

woraus nach der in Nr. 17 für zusammengesetzte Differentialausdrücke abgeleiteten Regel

$$P_1 = P_1'$$

folgt, d. h. der Differentialausdruck P_1 stimmt ebenso wie P mit seinem adjungirten überein.

Sei nun w_2 ein Integral von $P_1 = 0$, so folgt nach Analogie mit der Gleichung (34)

$$P_1 = \frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}P_2\frac{d}{dx}\frac{y}{w_2},$$

P_2 ein Differentialausdruck $(2m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, der auch wieder seinem adjungirten gleich ist; also haben wir

$$P = \frac{1}{w_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}P_2\frac{d}{dx}\frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}\frac{1}{w_1},$$

und, indem wir so weiter schliessen, erhalten wir endlich P in der Form:

$$P(y) = \frac{1}{w_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{w_{m-1}}\frac{d}{dx}P_m\frac{d}{dx}\frac{1}{w_{m-1}}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}\frac{1}{w_1},$$

wo w_{m-1} ein Integral der mit ihrer adjungirten gleichen Differentialgleichung zweiter Ordnung $P_{m-1}=0$ und $P_m(y)$ einen Differentialausdruck nullter Ordnung, also P_m eine blosse Function von x bedeutet. Sei p_0 der Coefficient der höchsten Ableitung in $P(y)$, dann ist, da (nach Nr. 17) der Coefficient der höchsten Ableitung eines zusammengesetzten Differentialausdruckes gleich ist dem Producte aus den Coefficienten der höchsten Ableitungen der einzelnen Theile,

$$p_0 = P_m\cdot\left(\frac{1}{w_1}\cdots\frac{1}{w_{m-1}}\right)^2.$$

Setzen wir nunmehr

$$P_m = (-1)^m a\frac{1}{w_m^2},$$

a eine beliebige Function von x, und

$$Q(y) = \frac{1}{w_m}\frac{d}{dx}\frac{1}{w_{m-1}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{w_1},$$

so ist $Q(y)$ ein Differentialausdruck m^{ter} Ordnung, und für seinen adjungirten erhalten wir nach dem Reprocitätssatze

$$Q'(y) = (-1)^m\frac{1}{w_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{w_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{w_{m-1}}\frac{d}{dx}\frac{y}{w_m},$$

also lässt sich $P(y)$ in die Form setzen

$$(35)\qquad P(y) = Q'aQ(y),$$

wo z. B. $a=1$ genommen werden kann. Da offenbar auch für jeden beliebigen Differentialausdruck $Q(y)$ der Ausdruck $Q'aQ(y)$ mit seinem adjungirten identisch ist, so ist die Form (35), auf welche sich der seinem adjungirten gleiche Differentialausdruck $P(y)$ bringen lässt, für einen solchen Differentialausdruck charakteristisch. Dies ist der Jacobi'sche Satz. Jacobi hat aber auch noch eine andere charakteristische Form für die sich selbst adjungirten Differentialausdrücke aufgestellt, die wir hier ebenfalls entwickeln wollen. Wenn

$$P(y) = P'(y) = p_0 y^{(2m)} + \cdots,$$

so ist

$$P_1(y) = P(y) - \frac{d^m}{dx^m}\, p_0\, \frac{d^m}{dx^m}\, y$$

ein Differentialausdruck, dessen Ordnungszahl höchstens gleich $2m - 1$ sein kann; da aber offenbar

$$P_1'(y) = P_1(y),$$

muss $P_1(y)$ von gerader Ordnung, also von der Ordnung $2m - 2$ sein. Setzen wir

$$P_1(y) = P_1'(y) = p_1 y^{(2m-2)} + \cdots,$$

so ist

$$P_2(y) = P_1(y) - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\, p_1\, \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\, y$$

ein Differentialausdruck, dessen Ordnungszahl höchstens gleich $2m - 3$ ist und da wieder

$$P_2'(y) = P_2(y),$$

so ist $P_2(y)$ von $(2m - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man schliesslich für $P(y)$ die Gestalt:

$$(36)\quad P(y) = \frac{d^m}{dx^m}(p_0 y^{(m)}) + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(p_1 y^{(m-1)}) + \cdots + \frac{d}{dx}(p_{m-1} y') + p_m y,$$

wo $p_0, p_1, \cdots p_m$ blosse Functionen von x bedeuten. Umgekehrt stimmt auch, wie man direct einsieht, jeder Differentialausdruck, der sich in diese Form setzen lässt, mit seinem adjungirten überein.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des zweiten Falles, wo

$$n = 2m - 1, \quad P(y) = -P'(y)$$

ist. Die Lagrange'sche Identität lautet dann

$$zP(y) + yP(z) = \frac{d}{dx}\, P(y, z),$$

also folgt für den begleitenden bilinearen Differentialausdruck

$$P(y, z) = P(z, y);$$

man nennt einen bilinearen Differentialausdruck, der diese Eigenschaft hat, einen symmetrischen. Wenn

$$P(y, z) = \sum_{\varkappa} \sum_{\iota} a_{\iota\varkappa}\, y^{(\iota)} z^{(\varkappa)},$$

so muss also $a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$ sein. Setzen wir $y = z$, so folgt:

$$(37) \qquad yP(y) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}P(y, y) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_{\varkappa}\sum_{i} a_{i\varkappa}y^{(i)}y^{(\varkappa)},$$

d. h. durch Multiplication mit y wird $P(y)$ die Ableitung eines in y homogenen quadratischen Differentialausdruckes; derselbe reducirt sich, wenn für y eine Lösung der Differentialgleichung $P(y) = 0$ genommen wird, auf eine Constante. Diese durch die Gleichung (37) dargestellte Eigenschaft ist zugleich für die hier betrachteten Differentialausdrücke charakteristisch. Denn sei für den Differentialausdruck $P(y)$

$$yP(y) = \frac{d}{dx}R(y),$$

wo $R(y)$ einen homogenen Differentialausdruck zweiten Grades in y bedeutet, also

$$R(y) = \sum_{\varkappa}\sum_{i} b_{i\varkappa}y^{(i)}y^{(\varkappa)}, \quad b_{i\varkappa} = b_{\varkappa i},$$

so folgt, wenn wir an die Stelle von y setzen $y + \lambda z$, λ ein von x unabhängiger Parameter,

$$(y + \lambda z)P(y + \lambda z) = \frac{d}{dx}R(y + \lambda z),$$

und indem wir auf beiden Seiten die Coefficienten von λ vergleichen:

$$zP(y) + yP(z) = 2\frac{d}{dx}\sum_{\varkappa}\sum_{i} b_{i\varkappa}y^{(i)}z^{(\varkappa)}.$$

Hieraus schliessen wir aber nach dem Satze von Herrn Frobenius (Nr. 24), dass in der That $-P(z)$ der adjungirte Ausdruck von $P(y)$ sein muss. Durch ein Verfahren, das dem für die sich selbst adjungirten Differentialausdrücke angewandten analog ist, können wir auch eine charakteristische Form für die ihren adjungirten entgegengesetzt gleichen Differentialausdrücke herstellen. Sei

$$-P'(y) = P(y) = 2p_0 y^{(2m-1)} + \cdots,$$

dann ist

$$P_1(y) = P(y) - \left(\frac{d^m}{dx^m}p_0\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}y + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}p_0\frac{d^m}{dx^m}\right)$$

ein Differentialausdruck von höchstens $(2m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung; da er aber, wie durch Anwendung des Satzes von Hesse (S. 69) und des Reprocitätssatzes unmittelbar ersichtlich ist, seinem adjungirten $P_1'(y)$ entgegengesetzt gleich ist, kann er nur von der Ordnung $2m-3$ sein. Schliessen wir so weiter, so folgt für $P(y)$ die Darstellung

$$(38)\qquad P(y) = \frac{d^m}{dx^m}\,p_0 y^{(m-1)} + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\,p_0 y^{(m)} + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\,p_1 y^{(m-2)}$$
$$+ \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\,p_1 y^{(m-1)} + \cdots + \frac{d}{dx}\,p_m y + p_m y',$$

wo $p_0, p_1, \cdots p_m$ blosse Functionen von x bedeuten.

Stellt $Q(y)$ einen beliebigen linearen Differentialausdruck dar, $Q'(z)$ seinen adjungirten, so ist der Differentialausdruck

$$(39)\qquad Q'\frac{d}{dx}\,Q(y)$$

zufolge des Reciprocitätssatzes seinem adjungirten gleich und entgegengesetzt; umgekehrt kann auch jeder so beschaffene Differentialausdruck auf die Form (39) gebracht werden. Für den Beweis dieser Behauptung verweisen wir auf die „Leçons sur la Théorie générale des Surfaces“ des Herrn Darboux, Band 2, S. 121.

Viertes Kapitel.

26. Integration der nichthomogenen Differentialgleichung. Hauptintegral. Anwendung auf die Reduction von Differentialgleichungen, vergl. Nr. 18.

Die Multiplicatoren $z_1, \cdots z_n$ (S. 62) der Differentialgleichung (A) finden eine wichtige Anwendung bei der Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1) \qquad P(y) = p(x),$$

wo $p(x)$ eine beliebige Function von x bedeutet. Aus der Gleichung (C) (S. 68) folgt nämlich für $h = 0$ die Identität:

$$(2) \qquad y = \sum_{\alpha=1}^{n-1} y_\alpha P(y, z_\alpha);$$

nun ist aber zufolge der Multiplicatoreigenschaft von z_α (Gleichung (16) Nr. 22, S. 62)

$$z_\alpha P(y) = \frac{d}{dx} P(y, z_\alpha),$$

also

$$P(y, z_\alpha) = \int z_\alpha P(y)\, dx,$$

und wenn y eine Lösung der Differentialgleichung (1) bedeutet:

$$P(y, z_\alpha) = \int p(x) z_\alpha dx;$$

dies in Gleichung (2) eingesetzt, giebt den Ausdruck

$$(3) \qquad y = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \int p(x) z_\alpha dx$$

für die Lösung der Differentialgleichung (1).

Derselbe Ausdruck ergiebt sich auch mit Hülfe der sogenannten Methode der Variation der Constanten von Lagrange. Diese geht von der Erwägung aus, ob es nicht möglich ist in dem Ausdrucke

$$(4) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

der für constante Werthe der $c_1, c_2, \cdots c_n$ eine Lösung der homogenen Gleichung (A) — man nennt diese wohl auch die zur completten Gleichung (1) gehörige reducirte Gleichung — darstellt, die $c_1, c_2, \cdots c_n$ derart als Functionen von x zu bestimmen, dass dieser Ausdruck der completten Gleichung (1) Genüge leistet. Dies ist offenbar stets möglich, man könnte sogar für $(n-1)$ der c_α beliebige Functionen von x nehmen, und erhielte dann für die n^{te} dieser Grössen eine Differentialgleichung. Lagrange sucht nun aber die c_α so zu wählen, dass sie sich in ihren Eigenschaften so weit als möglich den Eigenschaften von Constanten anschliessen. Wir bestimmen die $c_1, c_2, \cdots c_n$ aus den n Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{dc_\alpha}{dx}\, y_\alpha^{(\lambda)} = 0 & (\lambda = 0, 1, \cdots n-2), \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{dc_\alpha}{dx}\, y_\alpha^{(n-1)} = p(x); \end{cases}$$

dann ist offenbar

$$y^{(\lambda)} = c_1 y_1^{(\lambda)} + c_2 y_2^{(\lambda)} + \cdots + c_n y_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n-1),$$

d. h. bei $(n-1)$-maliger Differentiation des Ausdruckes (4) verhalten sich die c_α als ob sie Constanten wären, dagegen ist

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + p(x).$$

Hieraus erhellt unmittelbar, dass der Ausdruck (4) in der That die Differentialgleichung (1) befriedigt, wenn wir die c_α den Gleichungen (5) gemäss bestimmen; dividiren wir aber diese letzteren Gleichungen durch $p(x)$ und vergleichen dieselben mit den zur vollständigen Bestimmung der z_α dienenden Gleichungen (17) der Nr. 23 (S. 62), so kommt:

$$\frac{1}{p(x)} \frac{dc_\alpha}{dx} = z_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

und indem wir die hieraus berechneten

$$c_\alpha = \int p(x) z_\alpha \, dx$$

in (4) einsetzen, finden wir den Ausdruck (3) für die Lösung der Gleichung (1) wieder.

Wenn wir in (3) über die bei den n auszuführenden Quadraturen auftretenden willkürlichen Constanten disponiren, indem wir etwa die unteren Grenzen der Integrale festsetzen, so erhalten wir eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1). Bedeutet $\bar{y}$ eine solche particuläre Lösung und y eine beliebige Lösung von (1), so genügt offenbar $y - \bar{y}$ der reducirten Differentialgleichung (A); es ist folglich

$$y - \bar{y} = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ Constante; in der Form

$$y = \bar{y} + \gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_n y_n$$

ist folglich jede Lösung von (1) darstellbar. Die Hinzufügung einer solchen homogenen linearen Function mit constanten Coefficienten der $y_1, y_2, \cdots y_n$ zu einem bestimmten $\bar{y}$ kommt aber offenbar auf eine Abänderung der unteren Grenzen der Integrale in dem Ausdrucke (3) hinaus, wenn wir also unter $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ willkürliche Constanten verstehen, so ist jede Lösung von (1) in der Form

$$y = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \int_{\xi_\alpha}^{x} p(x) z_\alpha \, dx$$

enthalten, wir nennen diesen Ausdruck darum das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1).

Sei ξ ein nicht singulärer Werth, d. h. also ein Werth, für den die Coefficienten der Differentialgleichung (1) sich regulär verhalten, und für den, wenn der Coefficient p_0 von $y^{(n)}$ keine Constante ist, dieser Coefficient nicht verschwindet; nehmen wir dann

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = \xi,$$

so erhalten wir die Lösung

$$\bar{y} = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \int_{\xi}^{x} p(x) z_\alpha \, dx, \tag{6}$$

die wir das zu $x = \xi$ gehörige Hauptintegral der Differentialgleichung (1) nennen wollen. Da zufolge der Relationen (17) Nr. 23 (S. 62) die Gleichungen

$$\bar{y}^{(\lambda)} = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^{(\lambda)} \int_{\xi}^{x} p(x) z_\alpha \, dx \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1)$$

gelten, besitzt dieses Hauptintegral die Eigenschaft, mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = \xi$ zu verschwinden. Durch diese Eigenschaft ist es umgekehrt auch eindeutig bestimmt. In der That lässt sich leicht zeigen, dass das zu $x = \xi$ gehörige Hauptintegral unabhängig ist von der Wahl des bei seiner Bildung zu Grunde gelegten Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ der reducirten Differentialgleichung (A). Sei nämlich ein anderes Fundamentalsystem von (A)

$$\eta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \tag{7}$$

$$| \alpha_{\varkappa\lambda} | \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

so stellt sich das zu $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ adjungirte Fundamentalsystem (Nr. 23) $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ durch die zu (7) reciproke Substitution

$$\zeta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \mathsf{A}_{\lambda\varkappa} z_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

dar, woraus umgekehrt

$$z_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} \zeta_\varkappa \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n) \tag{8}$$

hervorgeht. Bilden wir mit Hülfe des Fundamentalsystems $\eta_1 \cdots \eta_n$ das zu $x = \xi$ gehörige Hauptintegral von (1), so lautet dasselbe

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \eta_\varkappa \int_\xi^x p(x) \zeta_\varkappa dx,$$

oder wenn wir für die $\eta_\varkappa$ ihre Werthe aus den Gleichungen (7) setzen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} y_\lambda \int_\xi^x p(x) \zeta_\varkappa dx,$$

oder noch anders geschrieben:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \int_\xi^x p(x) \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} \zeta_\varkappa dx,$$

und dies ist offenbar, vermöge der Gleichungen (8), mit dem durch die Gleichung (6) definirten Hauptintegrale identisch. Nunmehr können wir auch zeigen, dass sich stets eine Lösung der Differentialgleichung (1) herstellen lässt, die für $x = \xi$ beliebig vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügt, d. h. eine Lösung y, die mit ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = \xi$ die beliebig vorgeschriebenen endlichen Werthe $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ annimmt, und dass dieselbe durch die Angabe der Anfangsbedingungen auch eindeutig bestimmt ist. Da nämlich, zu Folge der über ξ getroffenen Voraussetzungen, dieser Werth auch kein singulärer Punkt der reducirten Differentialgleichung (A) sein kann (Nr. 10), lassen sich stets n Constanten $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ auf eine einzige Weise so bestimmen, dass die Lösung

$$u = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n$$

der reducirten Differentialgleichung mit ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen im Punkte $x = \xi$ die Werthe $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ annimmt (Nr. 9); dann ist aber, da das Hauptintegral $\bar{y}$ mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = \xi$ verschwindet,

$$\bar{y} + u$$

das gesuchte Integral der completten Differentialgleichung (1).

Die Integration der completten Differentialgleichung (1) lässt sich auch direct auf die Integration zweier homogener Differentialgleichungen zurückführen. Durch Integration der homogenen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$P\frac{dp}{dx} - p\frac{dP}{dx} = 0 \tag{9}$$

folgt nämlich, dass jede Lösung y derselben der nicht homogenen Gleichung

$$P(y) = C \cdot p(x)$$

genügt, wo C eine Constante bedeutet; umgekehrt ist jede Lösung der reducirten Differentialgleichung (A) eine solche Lösung von (9), für welche C den Werth Null, und jede Lösung von (1) eine solche Lösung von (9), für die C den Werth Eins hat. Die Lösungen von (9) sind also entweder Lösungen der reducirten Differentialgleichung (A) oder bis auf constante Factoren Lösungen der completten Differentialgleichung (1).

Nachdem wir so die allgemeine Theorie der Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen auf die der homogenen zurückgeführt haben, können wir nunmehr die in den Nrn. 18, 19 angestellten Betrachtungen über die gemeinsamen Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen in einigen Punkten vervollständigen.

Wenn die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $P = 0$ durch alle Integrale der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $Q = 0$, $(m < n)$, befriedigt wird, so lässt sich, wie (Nr. 17) gezeigt wurde, die linke Seite der ersten Differentialgleichung in die Form setzen:

$$P = RQ,$$

wo R einen Differentialausdruck $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Wenn die Coefficienten der Differentialausdrücke P, Q eindeutige Functionen von x innerhalb eines Bereiches E sind, so gilt das Gleiche auch von den Coefficienten von R, da diese aus den Coefficienten von P und Q durch Differentiationen und rationale Operationen zusammengesetzt sind. Sei $y_1, y_2, \cdots y_m$ ein Fundamentalsystem von $Q = 0$, y_{m+1} ein Integral von $P = 0$, welches nicht auch der Differentialgleichung $Q = 0$ genügt, dann ist (Nr. 17)

$$Q(y_{m+1}) = w_1$$

ein Integral der Differentialgleichung $R = 0$, und umgekehrt, wenn w ein beliebiges Integral dieser letzteren Differentialgleichung bedeutet, so befriedigt jede Lösung der nicht homogenen Gleichung

$$Q(y) = w$$

die Gleichung $P = 0$. — Sei $w_{m+1}, w_{m+2}, \cdots w_n$ ein Fundamentalsystem von $R = 0$, also

$$w = c_{m+1} w_{m+1} + c_{m+2} w_{m+2} + \cdots + c_n w_n,$$

$c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots c_n$ willkürliche Constanten, das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung, dann ist jede Lösung der Gleichung

$$Q(y) = w \tag{10}$$

eine Lösung von $P = 0$, und jede Lösung von $P = 0$ ist unter dem allgemeinen Integral der Gleichung (10) enthalten. Bedeutet also $z_1, z_2, \cdots z_m$ das zu $y_1, \cdots y_m$ adjungirte Fundamentalsystem der zu $Q(y) = 0$ adjungirten Differentialgleichung $Q'(z) = 0$, so lautet nach S. 76 das allgemeine Integral von (10) und somit auch das allgemeine Integral von $P = 0$:

$$y = \sum_{\varkappa = m+1}^{n} c_\varkappa \sum_{\alpha = 1}^{m} y_\alpha \int_{c_\alpha}^{x} z_\alpha w_\varkappa \, dx,$$

wo $c_1, c_2, \cdots c_n$ willkürliche Constanten bedeuten; dies ist der oben (Nr. 19, S. 52) erwähnte explicite Ausdruck des allgemeinen Integrals von $P = 0$.

27. Begriff der Irreductibilität linearer Differentialgleichungen. Sätze von Frobenius.

Wenn man über die Natur der Coefficienten keine besonderen Voraussetzungen macht, kann man jedes Integral $y_\varkappa$ der linearen homogenen Differentialgleichung

$$P(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

als Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung (vergl. Nr. 19)

$$y' - \frac{y_\varkappa'}{y_\varkappa} y = 0$$

auffassen und dementsprechend nach dem oben (Nr. 19, S. 52) dargelegten Verfahren die linke Seite $P(y)$ von (A) aus n linearen Differentialausdrücken erster Ordnung zusammensetzen. Diese Darstellung von $P(y)$ ist der Zerlegung einer ganzen rationalen Function einer Variabeln in Linearfactoren zu vergleichen; man hat dieselbe darum wohl auch als die „Zerlegung eines Differentialausdruckes in symbolische Factoren ersten Grades" bezeichnet. Für das analytische Studium der Functionen, die durch algebraische Gleichungen definirt werden, hat jedoch die Zerlegung der linken Seite einer solchen Gleichung in Linearfactoren nur geringe Bedeutung, wesentlich ist es dagegen, den Begriff der algebraischen Gleichung so zu beschränken, dass ihr gesammter Inhalt durch eine einzige monogene Function gegeben wird. Wenn wir z. B. eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades in y in's Auge fassen, deren Coefficienten innerhalb eines gewissen Bereiches E eindeutige Functionen von x sind, so handelt es sich also darum zu untersuchen, unter welchen Umständen alle dieser Gleichung genügenden Functionselemente (Potenzreihen) aus einem beliebigen unter ihnen durch analytische Fortsetzung innerhalb E erzeugt werden können. Der Puiseux'sche Satz lehrt, dass dies stets dann und nur dann der Fall sei, wenn die algebraische Gleichung irreductibel ist, d. h. wenn sie mit keiner Gleichung von niedrigerem Grade, deren Coefficienten auch innerhalb E eindeutige Functionen sind, eine Lösung gemein hat. Da nun jede einer reductibeln algebraischen Gleichung genügende Function auch eine irreductible Gleichung befriedigt, so kann man sich also, wenn es sich um die Untersuchung der durch algebraische Gleichungen definirten Functionen handelt, auf irreductible Gleichungen beschränken. Man erreicht durch diese Beschränkung den Vortheil, jeder algebraischen Gleichung eine monogene Function zuordnen zu können, der alle Lösungen der algebraischen Gleichung angehören, und die auch umgekehrt so beschaffen ist, dass alle Zweige dieser monogenen Function, die durch Fortsetzung innerhalb des Eindeutigkeitsbereiches der Coefficienten der Gleichung entstehen, der Gleichung genügen. — Um für das Studium der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung einen analogen Vortheil erzielen zu können, hat Herr Frobenius in die Theorie dieser Differentialgleichungen auch den Begriff der Irreductibilität eingeführt und wir wollen jetzt dazu übergehen diesen Begriff zu erörtern.

Dabei erweist es sich vor Allem als nöthig, über die Natur der Coefficienten der Differentialgleichung besondere Voraussetzungen zu machen. — Nehmen wir z. B. an, dass die Coefficienten der zu betrachtenden Differentialgleichung innerhalb eines gewissen Bereiches E

eindeutige Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, so nennen wir eine homogene lineare Differentialgleichung irreductibel, wenn sie mit keiner homogenen linearen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten ebenfalls innerhalb E eindeutige Functionen sind, eine Lösung gemein hat; im entgegengesetzten Falle soll die Differentialgleichung reductibel genannt werden.

Der so gefasste Begriff der Irreductibilität ist ein relativer, indem er wesentlich von den über die Natur der Coefficienten der Differentialgleichung getroffenen Annahmen abhängig ist. In der That erweist es sich je nach der gerade auszuführenden Untersuchung als zweckmässig, diese Annahmen über die Natur der Coefficienten und damit also auch den Irreductibilitätsbegriff zu modificiren. Man wird nur immer dafür zu sorgen haben, dass die vorausgesetzte Beschaffenheit der Coefficienten erhalten bleibt, wenn man mit diesen Coefficienten irgendwelche aus Differentiationen und rationalen Rechnungsprocessen zusammengesetzte Operationen vornimmt; die Nothwendigkeit dieser Beschränkung wird sich aus den nachfolgenden Betrachtungen ergeben. — Die Eindeutigkeit innerhalb eines Bereiches E genügt offenbar dieser Forderung, das Gleiche gilt z. B. von der Voraussetzung, die Coefficienten sollen sich innerhalb eines Bereiches E wie rationale Functionen verhalten. Um unseren Untersuchungen die erforderliche Allgemeinheit zu belassen, wollen wir die Natur der Coefficienten der zu betrachtenden Differentialgleichung nicht näher präcisiren, wir nehmen an dieselben besässen gewisse Eigenschaften, die bei den Operationen der Differentiation und bei Vornahme rationaler Rechnungsprocesse erhalten bleiben, und sagen die Coefficienten einer anderen Differentialgleichung seien von derselben Beschaffenheit wie die der gegebenen oder auch kurz: die Differentialgleichung selbst sei von derselben Beschaffenheit wie die gegebene, wenn für ihre Coefficienten dieselben Eigenschaften bestehen.

In diesem Sinne stellen wir also den Begriff der Irreductibilität wie folgt auf: Eine gegebene Differentialgleichung*) heisst irreductibel, wenn sie mit keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten von derselben Beschaffenheit sind wie die der gegebenen, eine Lösung gemein hat; im entgegengesetzten Falle heisst sie reductibel. — Eine Differentialgleichung erster Ordnung wird stets als irreductibel angesehen.

*) Unter einer Differentialgleichung schlechthin wird stets eine homogene lineare Differentialgleichung verstanden.

Wir stellen nun eine Anzahl von Sätzen auf, die den für irreductible algebraische Gleichungen bestehenden Sätzen analog sind.

Wenn die Differentialgleichung (A) mit einer irreductibeln Differentialgleichung $Q = 0$ von derselben Beschaffenheit Integrale gemein hat, so kann man nach dem oben in der Nr. 16 (S. 44, 45) dargelegten Verfahren die linke Seite von (A) in die Form setzen

$$P = RQ + S,$$

wo S einen Differentialausdruck bedeutet, der von niedrigerer Ordnung ist als Q, der durch die gemeinsamen Lösungen von $P = 0$ und $Q = 0$ annullirt wird und dessen Coefficienten aus den Coefficienten von P und Q durch Differentiationen und rationale Operationen erhalten werden. Da $Q = 0$ als irreductible Differentialgleichung mit keiner Differentialgleichung $S = 0$, niedrigerer Ordnung und von derselben Beschaffenheit, eine Lösung gemein haben kann, so muss S identisch verschwinden, d. h. es ist

$$P = RQ,$$

und hieraus folgt nach Nr. 17 (S. 46), dass $P = 0$ durch sämmtliche Integrale von $Q = 0$ befriedigt wird.

Wenn also eine Differentialgleichung mit einer irreductibeln Differentialgleichung von derselben Beschaffenheit überhaupt Integrale gemein hat, so wird sie durch alle Lösungen der irreductibeln Differentialgleichung befriedigt.

Für die Gültigkeit dieses Theorems ist, wie aus der Herleitung desselben ersichtlich, die Forderung wesentlich, dass die Eigenschaften der Coefficienten, die der Definition der Irreductibilität zu Grunde liegen, bei Differentiations- und rationalen Rechnungsprocessen erhalten bleiben; hierdurch erscheint also diese Forderung gerechtfertigt.

Wenn die Differentialgleichung reductibel ist, so giebt es also eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung von derselben Beschaffenheit, die durch Integrale von (A) befriedigt wird, dann lässt sich aber mit Hülfe des in der Nr. 16 (S. 44, 45) dargelegten, dem Euclid'schen Algorithmus analogen Verfahrens eine Differentialgleichung $P_m = 0$ herstellen, deren sämmtliche Integrale auch der Differentialgleichung (A) genügen. Diese Differentialgleichung $P_m = 0$ ist, wie aus ihrer Bildungsweise hervorgeht, von derselben Beschaffenheit wie (A); ist sie auch wieder reductibel, so liefert dasselbe Verfahren eine Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung und von derselben Beschaffenheit, deren sämmtliche Integrale der Gleichung $P_m = 0$ und folglich auch der Differentialgleichung (A) genügen; fährt man so fort, so muss man endlich zu einer irreductiblen Differentialgleichung $Q_1 = 0$ von derselben Beschaffenheit wie (A) gelangen, die alle ihre Integrale mit (A) gemein hat. Wenn also die Differentialgleichung (A) reductibel ist, so giebt es stets eine oder mehrere irreductible Differentialgleichungen, die ihre sämmtlichen Lösungen mit (A) gemeinsam haben.

Da die Gleichung (A) durch alle Integrale der irreductibeln Differentialgleichung $Q_1 = 0$ befriedigt wird, so ist:

$$P = R_1 Q_1,$$

R_1 ein Differentialausdruck von derselben Beschaffenheit wie P; ist die Gleichung $R_1 = 0$ wieder reductibel und bedeutet $Q_2 = 0$ eine irreductible Differentialgleichung, deren Integrale R_1 zu Null machen, so ist:

$$R_1 = R_2 Q_2,$$

wo R_2 auch ein Differentialausdruck von derselben Beschaffenheit wie P ist; sollte $R_2 = 0$ abermals reductibel sein, so hätte man so fortzufahren; schliesslich erhält man für die linke Seite der Differentialgleichung (A) die Form

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \cdots Q_2 Q_1,$$

wo die sämmtlichen Differentialgleichungen

$$Q_\mu(y) = 0$$

irreductibel, und die Summe der Ordnungszahlen der Differentialausdrücke $Q_1, Q_2 \cdots Q_\lambda$ gleich der Ordnungszahl n von (A) ist.

Aus der in der Nr. 24 (S. 69, Gleichung (32)) aufgestellten Form der adjungirten Differentialgleichung folgt, dass eine gegebene Differentialgleichung und ihre adjungirte von derselben Beschaffenheit sind. Da ferner nach dem Reciprocitätssatze der adjungirte Differentialausdruck P' von $P = RQ$ von der Form

$$P' = Q'R'$$

ist, schliessen wir:

Eine Differentialgleichung ist zugleich mit ihrer adjungirten irreductibel oder nicht. Hat die gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer irreductibeln Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein oder mehrere Integrale gemein, so wird die adjungirte Differentialgleichung durch sämmtliche Integrale einer Differentialgleichung $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung befriedigt.

28. Begriff der Irreductibilität im Falle eindeutiger Coefficienten.

Betrachten wir nunmehr den Fall, wo die Coefficienten der Differentialgleichung (A) innerhalb eines Bereiches E eindeutige Functionen von x sind und beschäftigen uns genauer mit dem auf diese Voraussetzung gegründeten Begriffe der Irreductibilität (S. 83, oben).

Der Bereich E sei so beschaffen, dass innerhalb desselben kein singulärer Punkt der Differentialgleichung liegt, d. h. also, wenn wir den Coefficienten p_0 der höchsten Ableitung in der Differentialgleichung als constant voraussetzen, so mögen sich die Coefficienten $p_1, p_2 \cdots p_n$ in der Umgebung jeder Stelle, die innerhalb E liegt, regulär verhalten. Dann verhält sich (vergl. Nr. 10, S. 26) auch jedes particuläre Integral der Differentialgleichung in der Umgebung jeder innerhalb E gelegenen Stelle regulär. Im Allgemeinen ist der Bereich E ein mehrfach zusammenhängender, d. h. es lassen sich ganz innerhalb E verlaufende, geschlossene Wege angeben, die nicht die vollständige Begrenzung eines Theiles von E bilden. (Man sagt bekanntlich, eine Curve begrenze einen Theil von E vollständig, wenn es nicht möglich ist von einem Punkte dieses Theiles zu einem Punkte der Begrenzung von E zu gelangen, ohne jene Curve zu durchschneiden.) Diese geschlossenen Wege lassen sich auch kurz dahin charakterisiren, dass es nicht möglich ist, dieselben durch stetige Deformation innerhalb E auf unendlich kleine einen regulären Punkt der Differentialgleichung umgebende Contouren zusammenzuziehen. Lassen wir die unabhängige Variable x einen solchen Weg beschreiben, und sei y_1 ein beliebiges particuläres Integral von (A), setzen wir also dieses particuläre Integral auf einem solchen geschlossenen Wege fort, so wird y_1 im Allgemeinen eine Werthänderung erleiden, d. h. in einen anderen Zweig, der auch wieder ein particuläres Integral ist, übergehen. — Jedenfalls müssen sich (zufolge des Theorems am Schlusse der Nr. 11) die sämmtlichen Zweige, in die sich y_1 durch Fortsetzungen innerhalb E verwandeln kann, durch n unter ihnen $y_1, y_2, \cdots y_n$ homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lassen; es kann sich jedoch ereignen, dass hierzu nicht n, sondern nur $m < n$ solcher Zweige erforderlich sind. Möge jeder durch Fortsetzung innerhalb E entstehende Zweig von y_1 als homogene lineare Function mit constanten Coefficienten der m Zweige $y_1, y_2, \cdots y_m$ dargestellt werden können, während zwischen diesen m Zweigen keine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten besteht. Dann werden bei einem beliebigen innerhalb E verlaufenden geschlossenen Wege von x die m

Zweige $y_1, y_2, \cdots y_m$ in homogene lineare Functionen $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_m$ ihrer selbst mit constanten Coefficienten übergehen, und diese $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_m$ werden auch wieder linear unabhängig sein, da ja eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten

$$c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \cdots + c_m\bar{y}_m = 0,$$

bei beliebiger Fortsetzung der $\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_m$ bestehen bleiben und also auch zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_m$ stattfinden müsste. Die $y_1, \cdots y_m$ erfahren demnach bei beliebigen innerhalb E vollzogenen geschlossenen Umläufen der Variabeln x eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante (vergl. Nr. 12). Bilden wir also die homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$Q(y) = (-1)^m \frac{D(y, y_1, y_2 \cdots y_m)}{D(y_1, y_2 \cdots y_m)} = 0,$$

der (Nr. 14) die m Functionen $y_1, y_2, \cdots y_m$ genügen, so bleiben (Nr. 15) die Coefficienten dieser Differentialgleichung bei allen innerhalb E verlaufenden geschlossenen Wegen von x ungeändert, sie sind folglich innerhalb E eindeutige Functionen. Wenn also $m < n$, so ist die Differentialgleichung (A) reductibel, da sie alsdann mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung und von derselben Beschaffenheit $Q = 0$ Integrale gemeinsam hat. Wir erhalten somit den wichtigen Satz:

Die Anzahl der linear unabhängigen Zweige eines jeden particulären Integrals einer irreductibeln Differentialgleichung ist genau gleich der Ordnung der Differentialgleichung.

Wenn die Differentialgleichung (A) reductibel ist, so besitzt sie also jedenfalls ein Integral y_1, welches einer Differentialgleichung niedrigerer (m^{ter}) Ordnung $Q = 0$ von derselben Beschaffenheit wie (A) genügt; dann wird aber (vergl. Nr. 5), da die Coefficienten von $Q = 0$ innerhalb E eindeutige Functionen sind, auch jeder Zweig von y_1, der durch Fortsetzung auf innerhalb E verlaufenden Wegen entsteht, dieser Differentialgleichung genügen müssen; es lassen sich also alle diese Zweige von y (nach dem Theorem am Schlusse der Nr. 11) durch höchstens m unter ihnen homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen; wir können demgemäss sagen:

Unter den particulären Integralen einer reductibeln Differentialgleichung befinden sich stets solche, für die die Anzahl der linear unabhängigen Zweige kleiner ist als die Ordnung der Differentialgleichung.

29. Analytische Bedeutung des Irreductibilitätsbegriffes für Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten.

Auf Grund dieser Sätze lässt sich nun die analytische Bedeutung des besonderen Irreductibilitätsbegriffes, auf den sich die letzten Betrachtungen beziehen, klarlegen. Wenn die Differentialgleichung (A), deren Coefficienten innerhalb des Bereiches E eindeutige Functionen sind, irreductibel ist, und wir fassen ein beliebiges zu einem Punkte $x = \xi$ von E gehöriges und der Differentialgleichung genügendes Functionselement, d. h. also eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}_1(x | \xi)$ in's Auge, so definirt diese ein wohlbestimmtes particuläres Integral von (A). Es müssen sich dann, zufolge des vorhin bewiesenen Satzes, $n - 1$ innerhalb E verlaufende, von ξ ausgehende und zu diesem Punkt zurückkehrende geschlossene Wege legen lassen, die so beschaffen sind, dass wenn wir $\mathfrak{P}_1(x | \xi)$ auf diesen Wegen analytisch fortsetzen, $(n - 1)$ andere Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_2(x | \xi), \cdots, \mathfrak{P}_n(x | \xi)$$

entstehen, die mit $\mathfrak{P}_1(x | \xi)$ zusammen keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten erfüllen. Jede dieser $(n - 1)$ Potenzreihen definirt ein neues particuläres Integral von (A). Bedeutet nun $\mathfrak{P}(x | \xi)$ eine beliebige in einer gewissen Umgebung von $x = \xi$ convergente und der Differentialgleichung (A) genügende Potenzreihe, so muss $\mathfrak{P}(x | \xi)$ in der Form

$$\mathfrak{P}(x | \xi) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \mathfrak{P}_\alpha(x | \xi)$$

darstellbar sein, wo die c_α $(\alpha = 1, 2 \cdots n)$ Constanten bedeuten. Hieraus folgt, dass für jeden beliebigen innerhalb E gelegenen Werth $x = \eta$ jede nach Potenzen von $x - \eta$ fortschreitende, in einer gewissen Umgebung von $x = \eta$ convergente und der Differentialgleichung (A) genügende gewöhnliche Potenzreihe, als homogene lineare Function mit constanten Coefficienten von n Reihen dargestellt werden kann, die aus den $\mathfrak{P}_\alpha(x | \xi)$ hervorgehen, wenn wir dieselben auf einem beliebigen, ganz innerhalb E verlaufenden Wege nach $x = \eta$ hin fortsetzen. Die linearen homogenen Combinationen der aus $\mathfrak{P}_1(x | \xi)$ durch alle möglichen Fortsetzungen innerhalb E entstehenden Reihen erschöpfen also die Gesammtheit aller die Differentialgleichung (A) befriedigenden, zu den Punkten von E gehörigen Functionselemente, wir können also sagen: der Gesammtinhalt der irreductiblen Differentialgleichung findet sich in jedem einzelnen ihr genügenden

Functionselemente zusammengefasst. Wenn eine Differentialgleichung reductibel ist, so können sich unter ihren Integralen zwar auch solche befinden, für die die Anzahl der durch Fortsetzung innerhalb E entstehenden Zweige genau gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist, ein Functionselement eines solchen Integrals erschöpft also dann auch, durch die linearen Combinationen seiner sämmtlichen Fortsetzungen innerhalb E, den Gesammtinhalt unserer Differentialgleichung, dies ist aber nicht für jedes der reductibeln Differentialgleichung genügende Functionselement der Fall.

Begrifflich erscheinen hiernach die irreductibeln Differentialgleichungen immerhin einfacher als die reductibeln, aber wenn wir bedenken, dass nicht nothwendig jedes Integral einer reductibeln Differentialgleichung einer irreductibeln niedrigerer Ordnung und von derselben Beschaffenheit genügen muss, und dass überdies das Verfahren der analytischen Fortsetzung eines Functionselementes, seiner praktischen Undurchführbarkeit wegen, für die Integration einer linearen Differentialgleichung nur principielle Bedeutung hat, so übersehen wir leicht, dass den irreductibeln Differentialgleichungen in unserer Theorie eine wesentlich andere Rolle zufällt, wie den irreductibeln Gleichungen in der Theorie der algebraischen Functionen. Die Bedeutung des Begriffes der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen liegt ganz ausschliesslich darin, dass reductible Differentialgleichungen gewisse Integrale besitzen, die einfacher sind als das allgemeine, indem die Anzahl ihrer linear unabhängigen Zweige kleiner ist als die Ordnung der Differentialgleichung. Da man durch die Kenntniss einer Anzahl von particulären Integralen das Problem der Integration vereinfachen kann, so wird es also auch für die Untersuchung des allgemeinen Integrals von Wichtigkeit sein, festzustellen, ob eine gegebene Differentialgleichung reductibel ist, und wenn das der Fall ist, diejenigen ihrer Integrale auszusondern, welche Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung und von derselben Beschaffenheit genügen. — Natürlich hängt die Lösung dieser Aufgabe wesentlich von der Beschaffenheit des Bereiches E ab, innerhalb dessen die Coefficienten der Differentialgleichung als eindeutige Functionen vorausgesetzt werden; wenn z. B. E ein einfach zusammenhängender Bereich ist, so kehrt jedes Integral bei jedem ganz innerhalb E verlaufenden geschlossenen Wege der unabhängigen Variabeln zu seinem Ausgangswerthe zurück, d. h. jedes Integral ist selbst eindeutig innerhalb E, die Differentialgleichung ist also in dem Sinne reductibel, dass sie mit so vielen Differentialgleichungen erster Ordnung von derselben Beschaffenheit, als ihre Ordnungszahl beträgt, Integrale gemein hat. (Man könnte in diesem Falle sogar sagen, mit ebenso vielen Differentialgleichungen nullter Ordnung.) Der nächst einfachste Fall wäre der eines zweifach zusammenhängenden Bereiches E; in einem solchen lässt sich ein geschlossener Weg U, der keinen Theil von E vollständig begrenzt, legen, in den jeder andere geschlossene Weg, der eine Werthänderung der Integrale verursachen könnte, d. h. der sich nicht auf einen regulären Punkt zusammenziehen lässt, stetig deformirt werden kann; kennt man also das Verhalten eines Integrals y, wenn x den Weg U beschreibt, so kennt man damit das Verhalten von y bei allen innerhalb E verlaufenden Wegen. Ein solcher Bereich wäre z. B. ein durch eine geschlossene Curve begrenztes Ebenenstück, das einen einzigen singulären Punkt der Differentialgleichung, bei dessen Umkreisung die Coefficienten der Differentialgleichung ungeändert bleiben, in sich schliesst, allgemeiner irgend ein von zwei geschlossenen Curven begrenzter ringförmiger Theil der Ebene, innerhalb dessen kein singulärer Punkt der Differentialgleichung liegt und innerhalb dessen sich die Coefficienten der Differentialgleichung eindeutig verhalten. — Für einen solchen zweifach zusammenhängenden Bereich E gilt der für die ganze Theorie grundlegende Satz von Herrn Fuchs, dass eine Differentialgleichung, deren Coefficienten innerhalb E eindeutige Functionen sind, stets reductibel ist und dass sie mit einer Differentialgleichung erster Ordnung von derselben Beschaffenheit ein Integral gemein hat.

Wir wenden uns jetzt zum Beweise dieses Satzes und im Anschluss hieran überhaupt zu dem Studium der Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten innerhalb eines zweifach zusammenhängenden Bereiches. Hierauf werden wir dann die Untersuchung eines Bereiches von beliebiger endlicher Zusammenhangszahl gründen und damit zu specielleren Problemen, wie sie die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen oder rationalen Coefficienten darbietet, übergehen können.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Fundamentalgleichung.

Erstes Kapitel.

30. Lineare Substitutionen von n Grössen. Composition und Determinantenbeziehungen.

Wir wollen zunächst einige Bezeichnungen hervorheben, deren wir uns im Folgenden zu bedienen haben.

Beschreibt die unabhängige Variable x der Differentialgleichung (A) einen geschlossenen Umlauf U, der ganz innerhalb E verläuft, also die Coefficienten der Differentialgleichung zu ihren Ausgangswerthen zurückführt, so erleiden die Elemente $y_1, y_2 \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems, wie wir am Schlusse des ersten Abschnittes (S. 34) gesehen haben, die lineare Substitution:

(1) $$\bar{y}_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1} y_1 + \alpha_{\varkappa 2} y_2 + \cdots + \alpha_{\varkappa n} y_n \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

mit nicht verschwindender Determinante. Wir bezeichnen das System der n Functionen $y_1, y_2 \cdots y_n$ durch

$$[y_1, y_2 \cdots y_n] = [y_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

die durch die Gleichungen (1) dargestellte lineare Substitution durch die Symbole

$$A = (\alpha_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n),$$

beziehungsweise

$$[\bar{y}_\varkappa] = (\alpha_{\varkappa\lambda})[y_\varkappa] = A\,[y_\varkappa] \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n),$$

je nachdem nur die Coefficienten der Substitution oder auch die dieselbe erleidenden Elemente $y_\varkappa$ und die aus den $y_\varkappa$ durch die Substitution entstehenden Elemente $\bar{y}_\varkappa$ hervorgehoben werden sollen. Von den Coefficienten $\alpha_{\varkappa\lambda}$ einer linearen Substitution oder, wie wir uns zuweilen auch ausdrücken wollen, von den Elementen eines Systems von n^2 Grössen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ sagen wir, es gehörten die mit einem und demselben ersten Index $\varkappa$ versehenen zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile, die mit demselben zweiten Index λ versehenen zur λ^{ten} Reihe; durch Angabe beider Indices wird die Stelle eines Coefficienten der Substitution markirt. Die Determinante der Substitution A bezeichnen wir kurz durch das Zeichen:

$$|A| = |\alpha_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n).$$

Seien

$$A = (\alpha_{i\varkappa}), \quad B = (\beta_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

zwei lineare Substitutionen, und

$$[u_\varkappa], \quad [y_\varkappa], \quad [z_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

drei Systeme von je n Functionen, die durch die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} [u_\varkappa] = A\,[y_\varkappa] \\ [y_\varkappa] = B\,[z_\varkappa] \end{array}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

mit einander verknüpft sind. Dann entsteht auch das Functionssystem $[u_\varkappa]$ aus $[z_\varkappa]$ durch eine lineare Substitution

$$C = (\gamma_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

so dass also

$$[u_\varkappa] = C\,[z_\varkappa].$$

Man nennt C die aus den Substitutionen A, B (in dieser Reihenfolge) componirte Substitution und bezeichnet diese Beziehung zwischen jenen drei Substitutionen durch die symbolische Gleichung

$$C = AB. \tag{2}$$

Die Coefficienten $\gamma_{i\varkappa}$ der componirten Substitution setzen sich aus den Coefficienten der Componenten A, B in der Weise zusammen, dass

$$\gamma_{i\varkappa} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\beta_{h\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n), \tag{3}$$

und man hat also die symbolische Gleichung (2) einfach als eine abkürzende Bezeichnung für diese n^2 Gleichungen anzusehen.

Nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten ist:

$$|\gamma_{i\varkappa}| = \left|\sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\beta_{h\varkappa}\right| = |\alpha_{i\varkappa}| \cdot |\beta_{i\varkappa}|,$$

oder

$$|C| = |A| \cdot |B|, \tag{4}$$

d. h. die Determinante der componirten Substitution ist gleich dem Producte der Determinanten der Componenten.

Ferner besteht nach dem Laplace'schen Determinantensatze die wichtige Beziehung

$$(5)\qquad |\gamma_{i\varkappa}| = \sum_{(h_1, h_2, \cdots h_\nu)} |\alpha_{ih}|\,|\beta_{h\varkappa}|, \quad \begin{Bmatrix} i = i_1, i_2 \cdots i_\nu, \\ \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu, \\ h = h_1, h_2 \cdots h_\nu, \end{Bmatrix}$$

wo wir durch die drei Systeme von ν Indices

$$i_1, i_2 \cdots i_\nu$$

$$\varkappa_1, \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu$$

$$h_1, h_2 \cdots h_\nu$$

irgendwelche Combinationen von je ν der Zahlen 1, 2, $\cdots$ n bezeichnen, und die durch das Zeichen

$$\sum_{(h_1, h_2 \cdots h_\nu)}$$

angedeutete Summation sich auf alle

$$n_\nu = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots \nu}$$

möglichen dieser Combinationen bezieht.

Zwei Substitutionen heissen einander gleich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl von Coefficienten gebildet sind, und wenn in beiden an jeder Stelle derselbe Coefficient steht. Componirt man eine Substitution A mit einer ihr gleichen Substitution, oder wie man auch sagt, mit sich selbst, so bezeichnet man die so entstehende Substitution AA durch A^2, ebenso setzt man

$$A^3 = A^2 A = A A^2,$$

allgemein

$$A^\varkappa = A^{\alpha_1} A^{\alpha_2} \cdots A^{\alpha_\varkappa},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_\varkappa$ positive ganze Zahlen bedeuten, deren Summe gleich $\varkappa$ ist. Man nennt dann $A^\varkappa$ wohl auch die $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz der Substitution A. Allgemein ist einleuchtend, dass für die hintereinander ausgeführte Composition mehrerer Substitutionen $A_1, A_2 \cdots A_\lambda$ in der diese Composition darstellenden symbolischen Bezeichnung

$$A_1 A_2 \cdots A_\lambda$$

zwar das associative, nicht aber (wenigstens im Allgemeinen nicht) das commutative Gesetz der Multiplication gültig ist.

Die einfachste Substitution, die ein Functionssystem $[y_\varkappa]$ erleiden kann, ist die, wo jedes Element desselben mit einer und derselben Constanten a multiplicirt wird; wir bezeichnen eine solche Substitution kurz durch a, und schreiben also

$$[a y_\varkappa] = a [y_\varkappa].$$

Der besondere Fall $a = 1$ giebt die sogenannte identische Substitution, die also durch 1 zu bezeichnen sein wird, es ist dann

$$1 = (\delta_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \ldots n),$$

wo wir, wie auch häufig im Folgenden,

$$\delta_{i\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq \varkappa,$$
$$\delta_{i\varkappa} = 1 \quad \text{für} \quad i = \varkappa$$

gesetzt haben.

Wir fragen nach einer Substitution

$$A' = (\alpha'_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \ldots n),$$

die mit A componirt die identische Substitution 1 ergiebt. Nach Gleichung (3) muss dann sein

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih} \alpha'_{h\varkappa} = \delta_{i\varkappa},$$

hieraus ergeben sich, da die Determinante $|A|$ als von Null verschieden vorausgesetzt wurde, die Coefficienten der gesuchten Substitution A' in der Form

(6) $$\alpha'_{h\varkappa} = \frac{\mathsf{A}_{\varkappa h}}{|A|},$$

wo $\mathsf{A}_{\varkappa h}$ die zum Element $\alpha_{\varkappa h}$ gehörige Subdeterminante von $|A|$ bedeutet, d. h.

$$\mathsf{A}_{\varkappa h} = \frac{\partial |A|}{\partial \alpha_{\varkappa h}}.$$

Es giebt also zu jeder Substitution A mit nicht verschwindender Determinante eine Substitution A' von der Beschaffenheit, dass

(7) $$A A' = 1;$$

wir nennen A' die zu A inverse Substitution und bezeichnen sie der Beziehung (7) entsprechend durch

(8) $$A' = A^{-1};$$

die Coefficienten der inversen Substitution von A werden durch die Gleichungen (6) gegeben. Nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie ist:

$$|A'| = |\alpha'_{h\varkappa}| = \frac{1}{|A|},$$

und in nicht misszuverstehender Bezeichnungsweise:

$$\alpha_{h\varkappa} = \frac{1}{|A'|} \frac{\partial |A'|}{\partial \alpha'_{\varkappa h}}.$$

Hieraus folgt, dass auch umgekehrt A die zu A' inverse Substitution darstellt; die symbolische Gleichung (8) kann also auch in der Form

$$A'^{-1} = A$$

geschrieben werden.

Ist eine Substitution C aus den beiden Substitutionen A und B componirt

$$C = AB,$$

so ist, wenn die Determinanten von A und B von Null verschieden vorausgesetzt werden, die zu C inverse Substitution C' durch die Gleichung

$$CC' = 1$$

definirt. Nun ist aber, wenn A', B' die zu A, B inversen Substitutionen bedeuten, offenbar

$$ABB'A' = CB'A' = 1,$$

folglich haben wir

$$C' = B'A',$$

d. h. die inverse Substitution einer aus zweien componirten Substitution ist aus den inversen der Componenten in umgekehrter Reihenfolge componirt. Dies gilt offenbar auch für Substitutionen, die aus beliebig vielen Substitutionen (mit nicht verschwindender Determinante) componirt sind.

Wir heben hier gleich die Beziehung der inversen Substitution zu der oben (Nr. 23, S. 65, 66) definirten reciproken Substitution hervor. Die letztere wird (vergl. Gleichung (24) S. 65) in unserer jetzigen Bezeichnung in der Form

$$\left(\alpha'_{\varkappa h}\right) \qquad (\varkappa, h = 1, 2 \ldots n)$$

dargestellt werden können, sie geht also aus der inversen Substitution hervor, indem man in dieser die Reihen zu Zeilen und die Zeilen zu Reihen macht, d. h. indem man die inverse Substitution transponirt. Bilden wir die inverse Substitution der reciproken, so ist:

$$\left(\alpha'_{\varkappa h}\right)^{-1} = \left(\alpha_{\varkappa h}\right)$$

d. h. die inverse Substitution der reciproken ist die transponirte ursprüngliche Substitution.

Wenden wir die Bezeichnungen der componirten und inversen Substitutionen auf ein Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ an, so können wir sagen: Erleidet $[y_\varkappa]$ bei einem innerhalb E verlaufenden geschlossenen Umlaufe U die Substitution A, bei einem anderen ebenfalls innerhalb E verlaufenden geschlossenen Umlaufe V die Substitution B, so erleidet dieses Fundamentalsystem, wenn man erst U und dann V ausführt, die componirte Substitution AB. Ebenso verhält es sich, wenn mehr als zwei Umläufe hintereinander ausgeführt werden. Wird der Umlauf U λmal hintereinander vollzogen, so erfährt $[y_\varkappa]$ die Substitution A^λ.

Geht $[y_\varkappa]$ durch den Umlauf U über in

$$[\bar{y}_\varkappa] = A[y_\varkappa],$$

so wird, wenn wir dann den Umlauf U wieder im entgegengesetzten Sinne ausführen, $[\bar{y}_\varkappa]$ übergehen müssen in $[y_\varkappa]$, also muss bei dem im entgegengesetzten Sinne vollzogenen Umlaufe U — wir bezeichnen denselben wohl auch durch U^{-1} — das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ eine Substitution erfahren, die mit A componirt 1 ergiebt; d. h. es entspricht dem im entgegengesetzten Sinne beschriebenen Umlaufe U die zu A inverse Substitution $A' = A^{-1}$. Setzen wir also fest, dass wir unter dem $-\lambda$mal vollzogenen Umlaufe U den λmal im entgegengesetzten Sinne beschriebenen Umlauf verstehen wollen, so können wir sagen, wenn die unabhängige Variable den Umlauf U $r$mal vollzieht, so erleidet $[y_\varkappa]$ die Substitution A^r, r eine positive oder negative ganze Zahl.

31. Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung in einem zweifach zusammenhängenden Bereiche. Satz von Fuchs. Fundamentalgleichung. Fall ungleicher Wurzeln.

Es sei nun E ein zweifach zusammenhängender Bereich, U ein innerhalb E verlaufender einfacher geschlossener Weg, der keinen Theil von E vollständig begrenzt, der aber so beschaffen ist, dass jeder andere innerhalb E verlaufende einfache geschlossene Weg entweder für sich oder mit U zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines Flächenstückes von E bildet. Möge ferner beim Umlaufe U das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ die Substitution

$$(1)\qquad \begin{cases} [\bar{y}_\varkappa] = A[y_\varkappa], \\ A = (a_{i\varkappa}), \quad |A| \neq 0 \end{cases}$$

erleiden, dann wird dieses Fundamentalsystem bei jedem innerhalb E verbleibenden geschlossenen Wege entweder ungeändert bleiben oder eine (positive oder negative) Potenz der Substitution A erfahren. Sei v ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung (A), also

$$(2)\qquad v = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa y_\varkappa,$$

$x_1 \cdots x_n$ Constanten, und bezeichnen wir das, was aus einer Function $f(x)$ von x wird, wenn x den Umlauf U λmal vollzieht, durch

$$\Theta^\lambda f(x),$$

wo also

$$\Theta^1 f(x) = \Theta f(x), \quad \Theta^0 f(x) = f(x),$$

so wird, da

$$(3) \qquad \Theta y_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

ist, das Integral v durch den Umlauf U übergehen in

$$(4) \qquad \Theta v = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} y_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} x'_\varkappa y_\varkappa,$$

wobei

$$x'_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa} x_i$$

gesetzt wurde. — Allgemein ist:

$$(5) \qquad \Theta^\lambda v = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa^{(\lambda)} y_\varkappa,$$

wenn

$$(6) \qquad x_\varkappa^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa} x_i^{(\lambda-1)}, \quad x_i^{(0)} = x_i,$$

für $\lambda = 1, 2, 3 \cdots$ gesetzt wird. Bezeichnen wir die Coefficienten der λ^{ten} Potenz von A durch $a_{i\varkappa}^{(\lambda)}$, also

$$(7) \qquad A^\lambda = (a_{i\varkappa}^{(\lambda)}) \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \cdots),$$

so bestehen die Gleichungen

$$(8) \qquad a_{i\varkappa}^{(\lambda)} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(\lambda-1)} a_{h\varkappa} \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \cdots),$$

wenn wir

$$a_{ih}^{(0)} = \delta_{ih}$$

setzen. Dann ist auch

$$A^0 = (\delta_{ih}) = 1,$$

und die Gleichungen (7), (8) behalten demnach auch für negative Werthe von λ ihre Gültigkeit. Mit Benutzung dieser Zeichen ist also

$$(9) \qquad \Theta^\lambda y_\varkappa = \sum_h a_{\varkappa h}^{(\lambda)} y_\varkappa,$$

ferner

$$(10) \qquad x_\varkappa^{(\lambda)} = \sum_i a_{i\varkappa}^{(\lambda)} x_i$$

und

(11) $$\Theta^\lambda v = \sum_\varkappa y_\varkappa \sum_h a_{h\varkappa}^{(\lambda)} x_h .$$

In dieser Form sind, zufolge der über die Natur des Bereiches E gemachten Voraussetzungen, alle Zweige von v, die durch Fortsetzung innerhalb E entstehen können, enthalten. Im Allgemeinen besteht also zwischen je $n+1$ dieser Zweige eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten. Betrachten wir insbesondere die n Zweige

$$v, \ \Theta v, \ \Theta^2 v, \ \cdots, \ \Theta^{n-1} v,$$

so wird, wenn diese linear unabhängig sind, zufolge des Theorems der Nr. 15 S. 39, das Integral v keiner Differentialgleichung von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung und von derselben Beschaffenheit wie (A), d. h. mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten genügen; besteht umgekehrt schon zwischen den $\mu+1$ ersten dieser Zweige

$$v, \ \Theta v, \ \cdots, \ \Theta^\mu v$$

eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten, so dass also

(12) $$g_\mu \Theta^\mu v + g_{\mu-1} \Theta^{\mu-1} v + \cdots + g_0 v = 0,$$
$$g_\mu \neq 0,$$

$g_\mu, g_{\mu-1}, \cdots, g_0$ Constante, so bleibt diese Beziehung auch bei beliebigen Umläufen bestehen, und man erkennt demnach, dass zwischen je $\mu+1$ aufeinander folgenden der $\Theta^\lambda v$, also auch zwischen irgend $\mu+1$ dieser Zweige eine lineare Abhängigkeit herrscht. In diesem Falle genügt also v einer linearen homogenen Differentialgleichung von höchstens μ^{ter} Ordnung mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten, d. h. die Differentialgleichung (A) ist reductibel. Der einfachste Fall wäre der, wo schon zwischen v und Θv eine lineare Beziehung bestände, d. h. wo

(13) $$\Theta v = \omega v,$$

ω eine Constante, wäre. Dann müsste also

(14) $$\omega \sum_\varkappa x_\varkappa y_\varkappa = \sum_\varkappa y_\varkappa \sum_h a_{h\varkappa} x_h$$

sein; da aber die $y_1 \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, muss sich die Gleichung (14) auf eine Identität reduciren, d. h. es müssen die Coefficienten der einzelnen $y_\varkappa$ für sich verschwinden, wir erhalten also

$$\omega x_\varkappa = \sum_h a_{h\varkappa} x_h \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

oder

$$(15) \qquad \sum_{h=1}^{n} (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega) x_h = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Diese n homogenen linearen Gleichungen lassen sich dann und nur dann durch nicht sämmtlich verschwindende Werthe der x_h befriedigen, wenn die Determinante

$$F(\omega) = |a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega| \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

verschwindet, d. h. bedeutet ω_α eine Wurzel der Gleichung

$$(16) \qquad F(\omega) = |a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega| = 0,$$

und bedeutet ferner $x_1, x_2 \cdots x_n$ ein Lösungssystem der Gleichungen

$$(17) \qquad \sum_{h=1}^{n} (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha) x_h = 0,$$

so ist das Integral

$$u_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa y_\varkappa$$

so beschaffen, dass

$$\Theta u_\alpha = \omega_\alpha u_\alpha$$

ist, und es genügt also u_α einer Differentialgleichung erster Ordnung von derselben Beschaffenheit wie (A). Dies ist das am Schlusse des zweiten Abschnittes angekündigte, für die ganze weitere Entwickelung grundlegende Theorem des Herrn Fuchs. Die Gleichung (16) wird die zum Umlaufe U oder zum Bereiche E gehörige Fundamentalgleichung genannt; diese Bezeichnung wird sich dadurch rechtfertigen, dass, wie wir sehen werden, die gedachte Gleichung nur von der Natur des Bereiches E, nicht aber von der Wahl des Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ abhängt. Da die Determinante

$$A = |a_{h\varkappa}|$$

von Null verschieden ist, so sind die Wurzeln der Fundamentalgleichung stets von Null verschieden, es giebt also stets mindestens so viele Integrale u_α, als von einander verschiedene Wurzeln der Fundamentalgleichung vorhanden sind; denn entsprechend jeder Wurzel ω_α liefern die Gleichungen (17) mindestens ein System nicht verschwindender Grössen $x_1, x_2 \cdots x_n$. Um die Bedeutung der so bestimmten Integrale u_α hervortreten zu lassen, behandeln wir zunächst den besonderen Fall etwas genauer, wo die Fundamentalgleichung n von einander verschiedene Wurzeln $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_n$ besitzt. Sei

$$x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2},\ \cdots\ x_{\alpha n}$$

ein Lösungssystem der Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n} (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha)\, x_h = 0,$$

setzen wir ferner

(18) $$u_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_{\alpha\varkappa} y_\varkappa \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots n),$$

so ist:

$$\Theta u_\alpha = \omega_\alpha u_\alpha$$

und allgemein

(19) $$\Theta^\lambda u_\alpha = \omega_\alpha^\lambda u_\alpha.$$

Die n Integrale u_α bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A); denn bestünde eine Relation

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha u_\alpha = 0$$

mit constanten $c_1, c_2 \cdots c_n$, so bliebe dieselbe auch nach λ-maliger Vollziehung des Umlaufes U bestehen, d. h. es wäre zufolge der Gleichungen (19)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \omega_\alpha^\lambda u_\alpha = 0.$$

Betrachten wir diese Gleichung für $\lambda = 0, 1, \cdots (n-1)$, so erhalten wir für $c_1, c_2 \cdots c_n$ ein System von homogenen linearen Gleichungen, die durch nicht verschwindende Werthe der c_α nur dann befriedigt werden könnten, wenn die Determinante

$$|\omega_\alpha^{\lambda-1} u_\alpha| = u_1\, u_2 \cdots u_n\, |\omega_\alpha^{\lambda-1}| \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2 \cdots n)$$

gleich Null wäre. Diese Determinante ist aber, abgesehen von dem jedenfalls nicht identisch verschwindenden Factor $u_1\, u_2 \cdots u_n$, die Discriminante der Fundamentalgleichung, diese könnte aber nur verschwinden, wenn zwei Wurzeln einander gleich würden wider die Voraussetzung; also sind die c_α sämmtlich gleich Null und die u_α bilden ein Fundamentalsystem. Hieraus folgt nun sofort (vergl. Nr. 12), dass in den Gleichungen (18), die die Beziehung zwischen den Elementen der beiden Fundamentalsysteme $[u_\varkappa]$, $[y_\varkappa]$ darstellen, die Determinante der Coefficienten

$$|x_{\alpha\varkappa}| = X$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Fassen wir die Gleichungen (18) als eine auf $[y_\varkappa]$ ausgeübte lineare Substitution

$$(x_{\alpha\varkappa}) = X$$

auf und bezeichnen die zu dieser Substitution inverse Substitution mit

$$(x'_{\alpha\varkappa}) = X' = X^{-1},$$

so ist also

(20) $$[y_\varkappa] = X'[u_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Vollziehen wir den Umlauf U und bezeichnen die Substitution, die das Fundamentalsystem $[u_\varkappa]$ erleidet, durch Ω, also

(21) $$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix},$$

so folgt aus den Gleichungen (20) mit Rücksicht auf (3)

$$A[y_\varkappa] = X'\Omega[u_\varkappa],$$

also mit Benutzung von (18)

$$A[y_\varkappa] = X'\Omega X[y_\varkappa],$$

d. h. die zum Umlaufe U gehörige Substitution A des Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ stellt sich in der Form dar:

(22) $$A = X^{-1}\Omega X.$$

Wir sagen von einer Substitution

$$C = (c_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

sie gehe aus der Substitution A durch Transformation mit einer Substitution

$$B = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n), \qquad |B| \neq 0,$$

hervor, wenn

(23) $$C = BAB^{-1}.$$

Also geht zu Folge der Gleichung (22) die Substitution A aus Ω durch Transformation mit X' hervor.

32. Transformation linearer Substitutionen. Determinantenbeziehungen. Invarianz der Fundamentalgleichung. Canonisches Fundamentalsystem im Falle ungleicher Wurzeln.

Um die Wichtigkeit dieses Ergebnisses darlegen zu können, haben wir an einige Eigenschaften transformirter Substitutionen zu erinnern. Zunächst folgt aus (23) auf Grund der Sätze der Nr. 30, dass

$$A = B^{-1}CB,$$

d. h. wenn C aus A durch Transformation mit B hervorgeht, so geht A aus C durch Transformation mit $B' = B^{-1}$ hervor; die Beziehung zwischen transformirten Substitutionen ist also eine gegenseitige, und offenbar ist, da $|B| \neq 0$ vorausgesetzt wurde,

$$|C| = |A|.$$

Wir nennen zwei Substitutionen, die durch Transformation mittels einer Substitution von nicht verschwindender Determinante aus einander hervorgehen, ähnliche Substitutionen; die Determinanten ähnlicher Substitutionen sind also einander gleich. Setzen wir:

$$BA = CB = D = (d_{i\varkappa}),$$

so ist

$$d_{i\varkappa} = \sum_{h=1}^{n} b_{ih} a_{h\varkappa} = \sum_{g=1}^{n} c_{ig} b_{g\varkappa},$$

also wenn

$$B^{-1} = (b'_{i\varkappa}),$$

so ergeben sich für die Coefficienten der transformirten Substitution C die Ausdrücke:

(23a) $$c_{ig} = \sum_{h} \sum_{\varkappa} b_{ih} a_{h\varkappa} b'_{\varkappa g}.$$

Allgemeiner folgt aus dem durch die Gleichungen (5) der Nr. 31 dargestellten Satze über die Subdeterminanten componirter Substitutionen:

(24) $$|d_{i\varkappa}| = \sum_{(h_1, h_2 \cdots h_\nu)} |b_{ih}|\,|a_{h\varkappa}| = \sum_{(g_1, g_2 \cdots g_\nu)} |c_{ig}|\,|b_{g\varkappa}|,$$

$$\begin{Bmatrix} i = i_1, i_2 \cdots i_\nu \\ \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu \\ h = h_1, h_2 \cdots h_\nu \\ g = g_1, g_2 \cdots g_\nu \end{Bmatrix}$$

wo $i_1, \cdots i_\nu$; $\varkappa_1, \cdots \varkappa_\nu$; $h_1, \cdots h_\nu$; $g_1, \cdots g_\nu$ je ν der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bedeuten und die beiden Summationen über alle n_ν Systeme der $h_1, h_2 \cdots h_\nu$

beziehungsweise der $y_1, y_2 \cdots y_\nu$ zu erstrecken sind. Die Gleichungen (24) repräsentiren also für einen bestimmten Werth von ν genau n_ν Doppelgleichungen. Beachtet man, dass die aus den $(n_\nu)^2$ Subdeterminanten

$$|b_{ih}| \qquad \binom{i = i_1, i_2 \cdots i_\nu}{h = h_1, h_2 \cdots h_\nu}$$

gebildete Determinante, nach einem bekannten Satze gleich einer Potenz der Determinante $|B|$, also sicher von Null verschieden ist, so ergeben sich aus den Gleichungen (24) die n_ν Subdeterminanten ν^{ter} Ordnung von $|C|$ als homogene lineare Functionen der n_ν Subdeterminanten ν^{ter} Ordnung von $|A|$ mit Coefficienten, die nur von der transformirenden Substitution B abhängen, und umgekehrt. Wir wollen von einer Determinante ν^{ter} Ordnung sagen, sie sei aus dem Coefficientensystem einer Substitution A gebildet, wenn ihre ν^2 Elemente aus den $a_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$ durch Weglassung von $n - \nu$ Zeilen und $n - \nu$ Reihen entstehen. Dann können wir also den folgenden Satz aussprechen: Jede aus dem Coefficientensystem einer Substitution gebildete Determinante ν^{ter} Ordnung ist durch die aus dem Coefficientensystem einer ähnlichen Substitution gebildeten n_ν Determinanten derselben Ordnung homogen linear darstellbar mit Coefficienten, die nur von der transformirenden Substitution abhängen.

Endlich bemerken wir, dass aus

$$C = BAB^{-1}$$

durch wiederholte Composition beider Seiten mit sich selbst die Beziehung

$$C^\lambda = BA^\lambda B^{-1} \qquad (\lambda > 0)$$

hervorgeht, also sind die Potenzen ähnlicher Substitutionen auch ähnlich und gehen aus einander durch Transformation mit derselben Substitution hervor wie die ersten Potenzen.

Sei nun $[z_\varkappa]$ ein von $[y_\varkappa]$ verschiedenes Fundamentalsystem und

$$(25) \qquad [z_\varkappa] = B[y_\varkappa], \qquad |B| \neq 0,$$

bedeute ferner C die Substitution, welche $[z_\varkappa]$ erfährt, wenn die unabhängige Variable den Umlauf U beschreibt, also

$$[\Theta z_\varkappa] = C[z_\varkappa],$$

so folgt aus (25) unmittelbar

$$C[z_\varkappa] = BA[y_\varkappa],$$

also erhalten wir, da

$$[y_\varkappa] = B^{-1}[z_\varkappa]$$

ist, die Gleichung

$$(26) \qquad C = BAB^{-1},$$

d. h. die Substitutionen, die verschiedene Fundamentalsysteme erleiden, wenn die unabhängige Variable einen bestimmten Umlauf U vollzieht, sind einander ähnlich. Ein specieller Fall dieses Theorems ist das durch die Gleichung (22) dargestellte Resultat.

Bilden wir nun unter Zugrundelegung des Fundamentalsystems $[z_\varkappa]$ die zum Umlaufe U gehörige Fundamentalgleichung, so lautet dieselbe:

$$G(\omega) = |c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n);$$

nun ist aber zu Folge von (26) und (23a)

$$c_{ig} = \sum_h \sum_\varkappa b_{ih} a_{h\varkappa} b'_{\varkappa g},$$

also

$$c_{ig} - \delta_{ig}\omega = \sum_h \sum_\varkappa b_{ih} a_{h\varkappa} b'_{\varkappa g} - \delta_{ig}\omega.$$

Andererseits haben wir:

$$\sum_h \sum_\varkappa b_{ih}(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega) b'_{\varkappa g} = \sum_h \sum_\varkappa b_{ih} a_{h\varkappa} b'_{\varkappa g} - \omega \sum_h \sum_\varkappa b_{ih} b'_{\varkappa g} \delta_{h\varkappa},$$

also, da zu Folge der Definition der inversen Substitution (Nr. 30), und da $\delta_{h\varkappa} = 0$ für $h \neq \varkappa$,

$$\sum_h \sum_\varkappa b_{ih} b'_{\varkappa g} \delta_{h\varkappa} = \sum_h b_{ih} b'_{hg} = \delta_{ig}$$

ist, so ergiebt sich:

$$c_{ig} - \delta_{ig}\omega = \sum_h \sum_\varkappa b_{ih}(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega) b'_{\varkappa g};$$

das ist aber nach (23a) die Beziehung, die zwischen den Coefficienten zweier durch Transformation mittels B aus einander entstandenen Substitutionen besteht. Wir finden also als nothwendige Folge der Gleichung (26)

$$(27) \qquad (c_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega) = B(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega) B^{-1},$$
$$(h, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

und folglich

$$c_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega \;=\; a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

d. h. die Fundamentalgleichung ist dieselbe, ob wir zu ihrer Bildung das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ oder $[z_\varkappa]$ benutzen, sie ist also unabhängig von der Wahl des zu ihrer Bildung benutzten Fundamentalsystems und hängt lediglich von der Natur des Umlaufes U beziehungsweise des Bereiches E ab.

Fassen wir nun wieder insbesondere den Fall ins Auge, wo die n Wurzeln der Fundamentalgleichung sämmtlich von einander verschieden sind, dann wird, wenn wir durch

$$\xi_{\alpha 1}, \xi_{\alpha 2}, \cdots \xi_{\alpha n}$$

ein geeignet gewähltes Lösungssystem der Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n} (c_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha)\,\xi_h = 0 \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots n)$$

bezeichnen, und das System von n^2 Grössen

$$(\xi_{\alpha\varkappa}) = \Xi$$

setzen, zu Folge der Gleichung (27) die Beziehung bestehen:

$$X = \Xi B.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$\Xi[z_\varkappa] = \Xi B[y_\varkappa] = X[y_\varkappa] = [u_\varkappa],$$

und folglich

$$C = \Xi^{-1}\Omega\Xi; \tag{28}$$

es ist also in diesem Falle nicht nur die Fundamentalgleichung, sondern auch das Fundamentalsystem $[u_\varkappa]$ selbst unabhängig von der Wahl des Ausgangssystems $[y_\varkappa]$ bez. $[z_\varkappa]$; wir können demnach sagen: **Wenn die zum Umlaufe U gehörige Fundamentalgleichung n verschiedene Wurzeln hat, so giebt es ein nur von der Natur des Umlaufes U abhängiges Fundamentalsystem $[u_\varkappa]$, welches die Substitution Ω erfährt, wenn die unabhängige Variable den Umlauf U vollzieht, und die zu eben diesem Umlaufe gehörige Substitution eines beliebigen Fundamentalsystems geht durch Transformation mit derjenigen Substitution, die dieses Fundamentalsystem mit $[u_\varkappa]$ verknüpft, in Ω über.**

Wir nennen $[u_\varkappa]$ das zum Umlaufe U gehörige **canonische Fundamentalsystem**, Ω die **canonische Form** der sämmtlichen untereinander ähnlichen Substitutionen, die ein beliebiges Fundamentalsystem beim Umlaufe U erleidet, oder auch kurz die zu U gehörige canonische Substitution. Das Verhalten eines beliebigen Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ beim Umlaufe U, d. h. also innerhalb des zweifach zusammenhängenden Gebietes E, ist folglich auf die Bestimmung des Zusammenhanges zwischen $[y_\varkappa]$ und dem canonischen Fundamentalsystem $[u_\varkappa]$ und auf die Herstellung der Fundamentalgleichung zurückgeführt, wenn diese letztere Gleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzt. Um auch in dem Falle, wo mehrere Wurzeln der zu E gehörigen Fundamentalgleichung einander gleich werden, ein analoges Ergebniss zu erzielen, wollen wir zunächst eine andere Bedeutung der Fundamentalgleichung hervorheben.

Zweites Kapitel.

33. Andere Bedeutung der Fundamentalgleichung. Beziehungen zwischen den Fundamentalgleichungen von Differentialgleichungen, die Integrale mit einander gemein haben.

Seien $x_1, x_2, \cdots x_n$ unbestimmte (willkürliche) Constanten, so ist:

$$v = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa y_\varkappa$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A) (vergl. Nr. 11). Bilden wir die $n+1$ Integrale

$$v, \; \Theta v, \; \Theta^2 v, \; \cdots \; \Theta^n v,$$

so folgt aus der Gleichung (5) der Nr. 31 (S. 97), wenn wir daselbst $\lambda = 0, 1, \cdots n$ nehmen, dass die Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} v & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \Theta v & x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Theta^n v & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = V$$

identisch verschwinden muss. Denken wir uns dieselbe nach den Elementen der ersten Reihe geordnet, so ist

$$\text{(2)} \qquad V = c_n \Theta^n v + c_{n-1} \Theta^{n-1} v + \cdots + c_0 v = 0,$$

und dies ist die zwischen den $(n+1)$ Integralen $v, \Theta v, \cdots \Theta^n v$ bestehende homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten. Die $c_n, c_{n-1}, \cdots c_0$ sind durch die Gleichung

$$c_n \omega^n + c_{n-1} \omega^{n-1} + \cdots + c_0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \omega & x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \omega^2 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega^n & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

definirt, wo ω eine unbestimmte Variable bedeutet. Die rechter Hand stehende Determinante lässt sich auf die Form bringen

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1' - \omega x_1 & \cdots & x_n' - \omega x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_1^{(n)} - \omega x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n)} - \omega x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \left| x_\varkappa^{(\lambda)} - \omega x_\varkappa^{(\lambda-1)} \right|, \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n)$$

oder, da zufolge der Gleichungen (6) der Nr. 31 (S. 97)

$$\sum_{h=1}^{n} (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega) x_h^{(\lambda-1)} = x_\varkappa^{(\lambda)} - \omega x_\varkappa^{(\lambda-1)}$$

ist, auf die Form

$$\left| x_\varkappa^{(\lambda)} - \omega x_\varkappa^{(\lambda-1)} \right| = \left| x_i^{(\lambda-1)} \right| \left| a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega \right|,$$
$$(\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots n) \qquad (\lambda, i, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

also ist nach Gleichung (16), Nr. 31 (S. 99):

$$(3) \qquad c_n \omega^n + c_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + c_0 = \left| x_i^{(\lambda-1)} \right| F(\omega),$$

d. h. da die $x_1, \cdots x_n$ unbestimmt sind, also

$$\left| x_i^{(\lambda-1)} \right| \neq 0$$

ist, so stimmen die Coefficienten der homogenen linearen Beziehung (2), die zwischen dem allgemeinen Integral v und seinen durch n-malige Wiederholung des Umlaufes U entstehenden Zweigen $\Theta v, \cdots \Theta^n v$ besteht, abgesehen von einem gemeinsamen Factor, mit den Coefficienten der zu diesem Umlaufe gehörigen Fundamentalgleichung überein.

Bezeichnen wir jetzt durch $c_n, c_{n-1} \cdots c_0$ direct die Coefficienten der Fundamentalgleichung, so wird also die Gleichung (2) durch alle Integrale v bei willkürlicher Wahl der $x_1, x_2 \cdots x_n$ erfüllt; setzen wir in (2) für $\Theta^\lambda v$ ($\lambda = 0, 1 \cdots n$) die Ausdrücke aus den Gleichungen (11) der Nr. 31 (S. 98) ein, so ergeben sich, da $y_1, y_2 \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem bilden, die Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n} x_h \left(c_n a_{h\varkappa}^{(n)} + c_{n-1} a_{h\varkappa}^{(n-1)} + \cdots + c_0 \delta_{h\varkappa} \right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Diese müssen für willkürliche $x_1, \cdots x_n$ bestehen, es müssen also die sämmtlichen Coefficienten verschwinden, d. h. es ist:

$$c_n a_{h\varkappa}^{(n)} + c_{n-1} a_{h\varkappa}^{(n-1)} + \cdots + c_0 \delta_{h\varkappa} = 0 \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung (2), wenn $c_n, \cdots c_0$ die Coefficienten der Fundamentalgleichung bedeuten, auch durch jedes specielle Integral v der Differentialgleichung (A) befriedigt wird.

Für specielle Werthe der $x_1, \cdots x_n$ kann $v = \sum_n x_\varkappa y_\varkappa$ schon einer Differentialgleichung niedrigerer, etwa μ^{ter} Ordnung,

$$Q(z) = 0, \qquad \mu < n,$$

mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten genügen (in der That haben wir ja gezeigt, dass es stets Integrale giebt, die Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen). Sei dann

$$G(\omega) = g_\mu \omega^\mu + g_{\mu-1}\omega^{\mu-1} + \cdots + g_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $Q = 0$, so wird das allgemeine Integral z von $Q = 0$ die Gleichung

$$g_\mu \Theta^\mu z + g_{\mu-1}\Theta^{\mu-1} z + \cdots + g_0 z = 0$$

erfüllen. Da v der Differentialgleichung $Q = 0$ genügt, wird auch für v die Gleichung

(4) $$g_\mu \Theta^\mu v + g_{\mu-1}\Theta^{\mu-1} v + \cdots + g_0 v = 0$$

bestehen; wir fragen allgemein: wie müssen die Coefficienten einer Relation (4) beschaffen sein, wenn dieselbe durch Integrale v der Differentialgleichung (A) (die nicht identisch verschwinden) soll erfüllt werden können.

Setzen wir in (4) für $\Theta^\lambda v$ ($\lambda = 0, 1, \cdots \mu$) die Ausdrücke aus den Gleichungen (11) der Nr. 31 (S. 98) ein, so folgt, da $y_1, y_2 \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, das System von n Gleichungen

(5) $$\sum_{h=1}^{n} (g_\mu a_{h\varkappa}^{(\mu)} + g_{\mu-1} a_{h\varkappa}^{(\mu-1)} + \cdots + g_0 \delta_{h\varkappa}) x_h = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

für die $x_1 \cdots x_n$. Diese Gleichungen können aber nur dann durch nicht sämmtlich verschwindende Werthe der $x_1 \cdots x_n$ befriedigt werden, wenn die Determinante

(6) $$\left| g_\mu a_{h\varkappa}^{(\mu)} + \cdots + g_0 \delta_{h\varkappa} \right| = 0 \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

ist. Diese Gleichung stellt eine Bedingungsgleichung für die Coefficienten $g_\mu, g_{\mu-1}, \cdots g_0$ der Relation (4) dar, ist diese erfüllt, so ergeben die Gleichungen (5) Lösungssysteme $x_1 \cdots x_n$, mit Hülfe deren sich also stets ein oder mehrere Integrale

$$v = \sum x_\varkappa y_\varkappa$$

herstellen lassen, die der Gleichung (4) Genüge leisten. Um diese Bedingungsgleichung (6) in eine übersichtlichere Form zu setzen, denken wir uns die ganze rationale Function μ^{ten} Grades von ω

$$(7) \qquad g_\mu \omega^\mu + g_{\mu-1}\omega^{\mu-1} + \cdots + g_0 = G(\omega)$$

in zwei Factoren zerfällt:

$$(8) \quad g_\mu \omega^\mu + \cdots + g_0 = (l_\lambda \omega^\lambda + l_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1} + \cdots + l_0)(m_{\mu-\lambda}\omega^{\mu-\lambda} + m_{\mu-\lambda-1}\omega^{\mu-\lambda-1} + \cdots + m_0),$$
$$\lambda < \mu.$$

Setzen wir:

$$(9) \qquad \xi_\varkappa = \sum_{h=1}^{n} \{ m_{\mu-\lambda} a_{h\varkappa}^{(\mu-\lambda)} + m_{\mu-\lambda-1} a_{h\varkappa}^{(\mu-\lambda-1)} + \cdots + m_1 a_{h\varkappa} + m_0 \delta_{h\varkappa} \} x_h$$
$$(\varkappa = 1, 2 \ldots n),$$

so genügt das Integral

$$(10) \qquad u = \sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa y_\varkappa = m_{\mu-\lambda}\Theta^{\mu-\lambda} v + \cdots + m_0 v$$

der Gleichung

$$l_\lambda \Theta^\lambda u + l_{\lambda-1}\Theta^{\lambda-1} u + \cdots + l_0 u = 0.$$

Die $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ müssen sich folglich aus den Gleichungen

$$(11) \qquad \sum_{h=1}^{n} (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{h\varkappa})\xi_h = 0$$

bestimmen lassen, und diese Gleichungen sind vermöge der Beziehungen (9) mit den Gleichungen (6) äquivalent. Hieraus folgern wir die auch direct zu verificirenden Gleichungen:

$$g_\mu a_{h\varkappa}^{(\mu)} + \cdots + g_0 \delta_{h\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} (m_{\mu-\lambda} a_{hi}^{(\mu-\lambda)} + \cdots + m_0 \delta_{hi}) \cdot (l_\lambda a_{i\varkappa}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{i\varkappa})$$
$$(h, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

die sich, wenn wir die in denselben auftretenden dreimal n^2 Grössen als Coefficienten dreier Substitutionen oder dreier Systeme von je n^2 Elementen auffassen, (nach den Gleichungen (2), (3), der Nr. 30) in die eine Compositionsgleichung

$$(12) \quad (g_\mu a_{h\varkappa}^{(\mu)} + \cdots + g_0 \delta_{h\varkappa}) = (m_{\mu-\lambda} a_{h\varkappa}^{(\mu-\lambda)} + \cdots + m_0 \delta_{h\varkappa}) \cdot (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{h\varkappa})$$
$$(h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

zusammenfassen lassen. Der Zerlegung (8) der ganzen Function $G(\omega)$ entspricht also die Zerlegung (12) des aus den Coefficienten der Gleichungen (5) gebildeten Systems.

Denken wir uns die ganze Function $G(\omega)$ in ihre linearen Factoren zerfällt:

$$g_\mu \omega^\mu + g_{\mu-1}\omega^{\mu-1} + \cdots + g_0 = g_\mu(\omega - c_\mu)(\omega - c_{\mu-1}) \cdots (\omega - c_1),$$

so folgt durch wiederholte Anwendung der Zerlegung (12) die Compositionsgleichung:

$$(13) \quad (g_\mu a_{hx}^{(\mu)} + \cdots + g_0 \delta_{hx}) = g_\mu^\mu (a_{hx} - \delta_{hx} c_\mu)(a_{hx} - \delta_{hx} c_{\mu-1}) \cdots \\ \cdots (a_{hx} - \delta_{hx} c_1) \qquad (h, x = 1, 2 \cdots n),$$

wo g_μ^μ als wirklicher Factor aufzufassen ist. — Nach dem Satze über die Determinante eines componirten Systems (S. 92) ergiebt sich nun

$$(14) \qquad | g_\mu a_{hx}^{(\mu)} + \cdots + g_0 \delta_{hx} | = g_\mu^\mu F(c_\mu) F(c_{\mu-1}) \cdots F(c_1).$$

Die Bedingungsgleichung (6) erfordert also das Verschwinden eines oder mehrerer der auf der rechten Seite der Gleichung (14) stehenden Factoren, d. h.:

Damit es nicht identisch verschwindende Integrale v gebe, die die Relation (4) erfüllen, muss die Gleichung

$$(15) \qquad g_\mu \omega^\mu + g_\mu \omega^{\mu-1} + \cdots + g_0 = G(\omega) = 0$$

durch eine Wurzel der Fundamentalgleichung $F(\omega) = 0$ befriedigt werden. — Lassen wir $G(\omega) = 0$ wieder die Fundamentalgleichung der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung $Q = 0$ bedeuten, die mit (A) Integrale v gemein hat, so können wir sagen: Wenn zwei Differentialgleichungen $P = 0$, $Q = 0$ von derselben Beschaffenheit Integrale gemein haben, so haben die linken Seiten ihrer Fundamentalgleichungen einen gemeinsamen Theiler.

Ein besonderer Fall dieses Satzes (für $\mu = 1$) ist das in der Nr. 31 (S. 99) gefundene auf die Integrale u_α bezügliche Resultat.

Bedeuten $g_\mu, g_{\mu-1}, \cdots g_0$ irgendwelche gegebene Grössen, die der oben ausgesprochenen Forderung oder, was dasselbe heisst, der Gleichung (6) genügen, und bezeichnet $x_1 \cdots x_n$ das allgemeinste Lösungssystem der Gleichungen (5), so stellt

$$v = \sum x_x y_x$$

das allgemeinste Integral der Differentialgleichung (A) dar, welches der mit den gegebenen $g_\mu, \cdots g_0$ gebildeten Relation (4)

Genüge leistet. — Wenn $\mu = n$ und die Gleichung (15) mit der Fundamentalgleichung vollständig identisch ist, so sind (vergl. S. 108) die $x_1, \cdots x_n$ ganz willkürlich: dies giebt sich dadurch kund, dass in diesem Falle in den Gleichungen (5) alle Coefficienten verschwinden. — Um im allgemeinen Falle beliebig gegebener $g_\mu, \cdots g_0$, die der Bedingung (6) Genüge leisten, eine Uebersicht über die verschiedenen Integrale x, die die Gleichung (4) erfüllen, zu erlangen, erinnern wir an einige einfache Sätze aus der Theorie der linearen Gleichungen.

34. Sätze über Systeme linearer Gleichungen. Rang. Anwendung auf die Fundamentalgleichung.

Man sagt ein System von $n \cdot m$, in n Zeilen und m Reihen geordneten Grössen oder Elementen:

$$(a_{i\varkappa}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \cdots n \\ \varkappa = 1, 2 \cdots m \end{pmatrix}$$

sei vom Range ϱ schlechthin, beziehungsweise, wenn die $a_{i\varkappa}$ ganze rationale Functionen einer Variabeln ω bedeuten, vom Range ϱ, modulo eines Linearfactors

$$\omega - \omega_\alpha,$$

wenn noch die sämmtlichen in dem System enthaltenen Determinanten $(\varrho + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, beziehungsweise durch $\omega - \omega_\alpha$ theilbar sind, dagegen wenigstens eine der Determinanten ϱ^{ter} Ordnung von Null verschieden, beziehungsweise durch $\omega - \omega_\alpha$ nicht theilbar ist. (Unter einer in dem System enthaltenen Determinante r^{ter} Ordnung verstehen wir eine aus r^2 Elementen

$$(a_{i\varkappa}) \qquad \begin{pmatrix} i = i_1, i_2 \cdots i_r \\ \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2 \cdots \varkappa_r \end{pmatrix}$$

gebildeten Determinante, wo $i_1, i_2 \cdots i_r$ irgend r der Zahlen $1, 2 \cdots n$, $\varkappa_1, \varkappa_2 \cdots \varkappa_r$ irgend r der Zahlen $1, 2 \cdots m$ bedeuten.)

Wir übertragen den Begriff des Ranges auf das System von n homogenen linearen Gleichungen (oder Congruenzen modulo $\omega - \omega_\alpha$) mit m Unbekannten $x_1, \cdots x_m$,

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{m} a_{i\varkappa} x_\varkappa = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n),$$

indem ein solches Gleichungssystem (wir beschränken uns auf Gleichungen, da für Congruenzen modulo $\omega - \omega_\alpha$ wörtlich dieselben Schlüsse gültig bleiben) vom Range ϱ sein soll, wenn das System seiner Coefficienten vom Range ϱ ist. — Ist das Gleichungssystem (I) vom Range $\varrho < m$, so sind bekanntlich nur ϱ von den n Gleichungen des Systems von einander unabhängig, so dass die allgemeine Lösung der Gleichungen (I) noch $m - \varrho$ willkürlich wählbare Grössen enthält. Dieser Satz lässt sich auch noch in einer für unsere Zwecke geeigneteren Form aussprechen. Seien

(II) $$x_{\lambda 1},\ x_{\lambda 2},\ \cdots\ x_{\lambda m} \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots \nu),$$

ν Systeme von je m Grössen, $\nu \leq m$, so sagen wir diese ν Systeme seien linear unabhängig, wenn wenigstens eine der in dem System

$$(x_{\lambda i}) \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2 \cdots \nu \\ i = 1, 2 \cdots m\end{pmatrix}$$

enthaltenen Determinanten ν^{ter} Ordnung von Null verschieden ist. Bedeutet dann

(III) $$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_m$$

irgend ein $(\nu+1)^{\text{tes}}$ System von m Grössen, welches mit den Systemen (II) zusammen nicht $(\nu + 1)$ linear unabhängige Systeme bildet, so lassen sich, wie leicht einzusehen, ν Grössen $c_1, \cdots c_\nu$ stets so finden, dass

$$x_\varkappa = c_1 x_{1\varkappa} + c_2 x_{2\varkappa} + \cdots + c_\nu x_{\nu\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots m).$$

Das System (III) heisst dann von den Systemen (II) linear abhängig. Sind die ν Systeme (II) linear unabhängig und bedeuten $y_1, y_2 \cdots y_m$ unbestimmte Variable oder etwa Functionen einer Variabeln x, von der die $x_{\lambda i}$ nicht abhängen, so besteht zwischen den ν Ausdrücken

(IV) $$\sum_{\varkappa=1}^{m} x_{\lambda\varkappa} y_\varkappa, \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots \nu),$$

keine homogene lineare Beziehung mit von den $y_\varkappa$, beziehungsweise von x unabhängigen Coefficienten, und umgekehrt lässt sich jeder mit den Grössen (III) gebildete Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} x_\varkappa y_\varkappa$$

als homogene lineare Function der ν Ausdrücke (IV) mit von den $y_1, \cdots y_m$, beziehungsweise x unabhängigen Coefficienten darstellen. — Der erwähnte Satz aus der Theorie der linearen Gleichungen (beziehungsweise Congruenzen) besagt nun:

Wenn das Gleichungssystem (I) vom Range $\varrho < m$ ist, so besitzt dasselbe $m - \varrho$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$x_{\lambda 1},\ x_{\lambda 2},\ \cdots\ x_{\lambda m} \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots m - \varrho)$$

und jedes andere Lösungssystem ist von diesen $m - \varrho$ linear abhängig, und umgekehrt, wenn ein Gleichungssystem (I) genau $\tau < m$ linear unabhängige Lösungssysteme besitzt, so ist es vom Range $m - \tau$. (Die triviale Lösung $x_1 = 0, \cdots, x_m = 0$ ist ausgeschlossen.)

Wenn $m = n$ ist, so heisst das System

$$\left(a_{i\varkappa}\right) \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

ein quadratisches oder eine Substitution; für solche Systeme gelten also die Begriffe der Composition, Transformation und Aehnlichkeit, wie sie oben festgelegt wurden.

Componirt man eine Substitution oder ein quadratisches System A von n^2 Elementen mit einem ebensolchen Systeme B, und ist die Determinante von B von Null verschieden, so folgt aus den Gleichungen (5) der Nr. 31 (S. 93), die zwischen den Subdeterminanten componirter Systeme bestehen und aus dem Begriffe des Ranges, dass der Rang des componirten Systems BA mit dem Range von A genau übereinstimmt. Hieraus oder auch aus dem Theorem (Nr. 32, S. 103) über die aus ähnlichen Substitutionen gebildeten Determinanten ergiebt sich dann sofort die wichtige Folgerung: ähnliche (quadratische) Systeme sind stets vom selben Range.

Die Frage nach der Gesammtheit der Integrale

$$v = \sum_{\varkappa} x_{\varkappa} y_{\varkappa},$$

die der Gleichung (4) (S. 109) genügen, wenn wir den $g_\mu, g_{\mu-1}, \cdots g_0$ feste, der Bedingung (6) genügende Werthe beilegen, lässt sich nun sofort beantworten. Sei das System

$$(16) \qquad \left(g_\mu a_{h\varkappa}^{(\mu)} + \cdots + g_0 \delta_{h\varkappa}\right) \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

oder, was dasselbe heisst, das Gleichungssystem (5) vom Range $n - \tau$, wo zufolge der Bedingung (6) $\tau \geq 1$, dann giebt es also genau τ linear unabhängige Lösungssysteme

$$x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \cdots x_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots \tau)$$

der Gleichungen (5), folglich genau τ linear unabhängige Integrale

$$v_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_{\alpha\varkappa} y_\varkappa \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots \tau),$$

die die Relation (4) befriedigen, und jedes andere dieser Relation genügende Integral ist gemäss den Sätzen der Nr. 33 und nach den obigen Bemerkungen durch $v_1, \cdots v_\tau$ homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar.

Dass der Rang des Systems (16) unabhängig ist von der Wahl des der Betrachtung zu Grunde gelegten Fundamentalsystems $y_1, y_2 \cdots y_n$, ist unmittelbar zu übersehen, wenn man bedenkt, dass beim Uebergange von $[y_\varkappa]$ zu einem anderen Fundamentalsysteme

$$[z_\varkappa] = B[y_\varkappa],$$

das System

$$\left(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega\right) \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

zufolge der Gleichung (27) (Nr. 32, S. 104), für beliebiges ω in

$$B\left(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega\right)B^{-1}$$

übergeht. Aus der Zerlegung (13) (S. 111) des Systems (16) folgt also, dass dieses System selbst in das ähnliche System

$$B\left(g_\mu a_{h\varkappa}^{(\mu)} + \cdots + g_0\delta_{h\varkappa}\right)B^{-1} \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

übergeht, und der Rang ähnlicher Systeme ist ja derselbe. Hieraus schliesst man auch ähnlich wie oben (Nr. 32) für die u_α, dass die linear unabhängigen $v_1, v_2, \cdots v_\tau$ selbst, die sich mit Hülfe des Gleichungssystems (5) bestimmen, unabhängig sind von der Wahl des Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$.

35. Weitere Untersuchung der Beziehung zwischen den Fundamentalgleichungen von Differentialgleichungen mit gemeinsamen Integralen.

Bedeutet $G(\omega)$ wieder die linke Seite der Fundamentalgleichung der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung $Q(z) = 0$, so ist also die Anzahl der linear unabhängigen Integrale v, die den beiden Differentialgleichungen $Q(z) = 0$ und (A) gemeinsam sind, genau gleich τ, wenn das Gleichungssystem (5) vom Range $n - \tau$ ist. Denken wir uns die Zerlegung (8) von $G(\omega)$ so ausgeführt, dass

$$L(\omega) = l_\lambda \omega^\lambda + \cdots + l_0$$

den grössten gemeinsamen Theiler von $G(\omega)$ und der linken Seite $F(\omega)$ der Fundamentalgleichung von (A) bedeutet, dann verschwindet also

$$m_{\mu-\lambda}\omega^{\mu-\lambda} + \cdots + m_0$$

für keine Wurzel von $F(\omega) = 0$, folglich ist die Determinante

$$\left| m_{\mu-\lambda} a_{h\varkappa}^{(\mu-\lambda)} + \cdots + m_0\delta_{h\varkappa} \right| \neq 0 \qquad (h, \varkappa = 1, 1 \cdots n),$$

und demnach folgt aus der Compositionsgleichung (2) und aus der über den Rang componirter Systeme gemachten Bemerkung (S. 114), dass der Rang des Gleichungssystems (5) mit dem des Gleichungssystems (11) übereinstimmt. Man hat also, um die Anzahl τ der linear unabhängigen Integrale von (A) zu bestimmen, die der Gleichung $Q(z) = 0$ genügen, nur den Rang des zum grössten gemeinsamen Theiler $L(\omega)$ der linken Seiten der Fundamentalgleichungen von $Q = 0$ und (A) gehörigen Gleichungssystems (11) zu untersuchen. Sei $R = 0$ die Differentialgleichung, der die sämmtlichen Integrale, welche (A) mit $Q = 0$ gemein hat, genügen und die, wie sich aus der in der Nr. 16 (S. 43, 44) dargelegten Methode für ihre Herstellung ergiebt, von derselben Beschaffenheit wie (A) ist, dann ist $R = 0$ von der τ^{ten} Ordnung und $v_1, v_2, \cdots v_\tau$ bilden ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung. Ferner lässt sich (vergl. Nr. 17) die linke Seite P der Differentialgleichung (A) in die Form setzen:

$$P = SR,$$

wo S einen linearen Differentialausdruck $(n - \tau)^{\text{ter}}$ Ordnung mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten bedeutet. Seien $y_{\tau+1}, \cdots y_n$ $n - \tau$ linear unabhängige Integrale von (A), die mit $v_1, v_2, \cdots v_\tau$ zusammengenommen ein Fundamentalsystem von (A) constituiren (vergl. S. 32), so constituiren (vergl. Nr. 17 und Nr. 27, S. 81) die $n - \tau$ Functionen

$$z_\varkappa = R(y_\varkappa) \qquad (\varkappa = \tau + 1, \cdots n)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$S(z) = 0.$$

Bedeutet also

$$H(\omega) = h_\tau \omega^\tau + \cdots + h_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $R = 0$,

$$K(\omega) = k_{n-\tau} \omega^{n-\tau} + \cdots + k_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $S = 0$, so ist (vergl. Nr. 33)

$$(17) \qquad h_\tau \Theta^\tau v_i + h_{\tau-1} \Theta^{\tau-1} v_i + \cdots + h_0 v_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots \tau)$$

und

$$(18) \qquad k_{n-\tau} \Theta^{n-\tau} z_i + k_{n-\tau-1} \Theta^{n-\tau-1} z_i + \cdots + k_0 z_i = 0$$
$$(i = \tau + 1, \tau + 2, \cdots n).$$

Nun ist aber, da sich die Coefficienten von R innerhalb E eindeutig verhalten,

$$R(k_{n-\tau} \Theta^{n-\tau} y_i + \cdots + k_0 y_i) = k_{n-\tau} \Theta^{n-\tau} z_i + \cdots + k_0 z_i$$
$$(i = \tau + 1, \cdots n),$$

also verschwinden, zufolge der Gleichung (18), auch die Ausdrücke auf den linken Seiten dieser Gleichungen; folglich sind

$$k_{n-\tau} \Theta^{n-\tau} y_i + \cdots + k_0 y_i = v_i \qquad (i = \tau + 1, \cdots n)$$

Integrale von $R = 0$, genügen also der Gleichung (17). Setzen wir nun

$$H(\omega)K(\omega) = \gamma_n \omega^n + \cdots + \gamma_0,$$

so wird die Gleichung

(19) $$\gamma_n \Theta^n y + \gamma_{n-1} \Theta^{n-1} y + \cdots + \gamma_0 y = 0$$

befriedigt durch $y_{\tau+1}, \cdots y_n$ und ausserdem durch $v_1, \cdots v_\tau$, und folglich durch das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A); also stimmen die Coefficienten $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \cdots \gamma_0$ mit den Coefficienten der Fundamentalgleichung von (A) überein, d. h. es ist

$$F = HK.$$

Wird also die Differentialgleichung (A) durch alle Integrale der Differentialgleichung $R = 0$ befriedigt, so ist die linke Seite der Fundamentalgleichung von (A) durch die linke Seite der Fundamentalgleichung von $R = 0$ theilbar.

Eine Reihe von einfachen Sätzen über die Fundamentalgleichung einer Differentialgleichung, deren linke Seite aus mehreren Differentialausdrücken zusammengesetzt ist, ergiebt sich unmittelbar; wir begnügen uns mit diesem Hinweise auf dieselben.

Bedeutet wie oben $R = 0$ die Differentialgleichung, der sämmtliche gemeinsame Integrale von $P = 0$ und $Q = 0$ genügen, so ist $H(\omega)$ auch ein Factor der linken Seite $G(\omega)$ der Fundamentalgleichung von $Q = 0$; wir wollen nun zeigen, dass H den grössten gemeinschaftlichen Theiler von F und G darstellt.

Sei allgemein

$$L(\omega) = l_\lambda \omega^\lambda + \cdots + l_0$$

irgend ein Factor von $F(\omega)$; suchen wir die Integrale

$$v = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa y_\varkappa$$

von (A), die der Relation:

(20) $$l_\lambda \Theta^\lambda v + l_{\lambda-1} \Theta^{\lambda-1} v + \cdots + l_0 v = 0$$

Genüge leisten, so haben wir das Gleichungssystem

(21) $$\sum_{h=1}^{n} (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{h\varkappa}) x_h = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

aufzulösen; erweist sich dasselbe vom Range $n - \tau$, so besitzt es genau τ linear unabhängige Lösungssysteme, also giebt es τ linear unabhängige Integrale

$$v_1, v_2, \cdots v_\tau$$

von (A), die der Gleichung (20) genügen, und umgekehrt ist jedes Integral von (A), für welches die Relation (20) besteht, durch $v_1, v_2, \cdots v_\tau$ homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar. Da Θv_i für $i = 1, 2, \cdots \tau$ ebenfalls der Differentialgleichung (A), sowohl wie der Gleichung (20) genügen muss, haben wir

$$\Theta v_i = b_{i1} v_1 + b_{i2} v_2 + \cdots + b_{i\tau} v_\tau \qquad (i = 1, 2 \cdots \tau),$$

wo die $b_{i\varkappa}$ Constanten bedeuten; die $v_1, v_2, \cdots v_\tau$ bilden folglich ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$R(v) = (-1)^\tau \frac{D(v, v_1, v_2, \cdots v_\tau)}{D(v_1, v_2, \cdots v_\tau)} = 0,$$

deren Coefficienten (vergl. Nr. 14) innerhalb E eindeutige Functionen sind und die alle ihre Integrale mit (A) gemein hat. Folglich ist

$$P = SR,$$

S ein Differentialausdruck von der Ordnung $n - \tau$ mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten. Sei

$$H(\omega) = h_\tau \omega^\tau + \cdots + h_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $R = 0$,

$$K(\omega) = k_{n-\tau} \omega^{n-\tau} + \cdots + k_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $S = 0$, so ist also

(22) $$F(\omega) = H(\omega) K(\omega),$$

und die Gleichung

$$h_\tau \Theta^\tau v + \cdots + h_0 v = 0$$

wird durch das allgemeine Integral von $R = 0$, und folglich durch alle Integrale von (A), die der Gleichung (20) Genüge leisten, befriedigt. Es sind nun die drei Möglichkeiten

$$\tau > \lambda$$
$$\tau = \lambda$$
$$\tau < \lambda$$

in's Auge zu fassen. Suchen wir den grössten gemeinschaftlichen Theiler

$$B(\omega) = b_\sigma \omega^\sigma + \cdots + b_0$$

von $H(\omega)$ und $L(\omega)$ auf, so lässt sich derselbe in der Form

$$B(\omega) = H_1 H + L_1 L$$

darstellen, wo H_1, L_1 ganze Functionen von ω bedeuten; hieraus ersehen wir, dass die Gleichung

(23) $$b_\sigma \Theta^\sigma v + b_{\sigma-1} \Theta^{\sigma-1} v + \cdots + b_0 v = 0$$

durch alle Integrale von $R = 0$, also durch alle Integrale von (A), die der Gleichung (20) genügen, befriedigt wird. Wäre nun $\tau < \lambda$, so müsste $L(\omega)$ einen Linearfactor $\omega - \omega_\alpha$ enthalten, der in $H(\omega)$ entweder gar nicht, oder doch in geringerer Vielfachheit wie in $L(\omega)$ enthalten ist, es wäre also jedenfalls auch noch

$$(\omega - \omega_\alpha) B(\omega)$$

ein Theiler von $L(\omega)$, und da $L(\omega)$ ein Theiler von $F(\omega)$ ist, müsste zufolge der Gleichung (22) der Factor $\omega - \omega_\alpha$ auch in $K(\omega)$ enthalten sein. Dann giebt es nach dem Fuchs'schen Theorem (Nr. 31) ein Integral z_α von $S = 0$, welches sich bei dem Umlaufe U der unabhängigen Variabeln mit der Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung von $S = 0$ multiplicirt, d. h. für welches

(24) $$\Theta z_\alpha = \omega_\alpha z_\alpha.$$

Bedeuten dann $y_{\tau+1}, \cdots y_n$ $n - \tau$ Integrale von (A), die mit $r_1, r_2, \cdots r_\tau$ zusammen ein Fundamentalsystem von (A) constituiren, so sind die Ausdrücke

$$R(y_i) = z_i \qquad (i = \tau + 1, \cdots n)$$

die Elemente eines Fundamentalsystems von $S = 0$, also

$$z_\alpha = \sum_{i=\tau+1}^{n} c_i z_i,$$

wo $c_{\tau+1}, \cdots c_n$ Constanten bedeuten; folglich ist, wenn

$$y_\alpha = \sum_{i=\tau+1}^{n} c_i y_i$$

gesetzt wird, nach Gleichung (24),

$$R(\Theta y_\alpha - \omega_\alpha y_\alpha) = 0.$$

Also ist

$$\Theta y_\alpha - \omega_\alpha y_\alpha$$

ein Integral von $R = 0$ und befriedigt demnach die Gleichung (23), also befriedigt das Integral y_α von (A) die Gleichung (20), weil $(\omega - \omega_\alpha) B(\omega)$ ein Theiler von $L(\omega)$ ist. Es wäre also unter der gemachten Annahme $\tau < \lambda$, y_α selbst ein Integral von $R = 0$, was aber der Voraussetzung, dass

$$r_1, \cdots r_\tau, \quad y_{\tau+1}, \cdots y_n$$

ein Fundamentalsystem von (A) constituiren, widerspricht. Es muss folglich $\tau \geq \lambda$ sein, d. h.:

Wenn $L(\omega)$ einen Factor λ^{ten} Grades der linken Seite $F(\omega)$ der Fundamentalgleichung von (A) bedeutet, so ist der Rang des Gleichungssystems (21) höchstens gleich $n - \lambda$.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass jeder lineare Factor von $H(\omega)$ in $L(\omega)$ enthalten sein muss. Denn sei $\omega - \omega_{\beta}$ ein Factor von $H(\omega)$, also ω_{β} eine Wurzel der Fundamentalgleichung von $R = 0$, so giebt es ein Integral r_{β} dieser Differentialgleichung, für welches

$$\Theta r_{\beta} = \omega_{\beta} r_{\beta}$$

ist (Theorem von Fuchs, Nr. 31); dieses r_{β} genügt aber auch der Gleichung (20), es muss folglich, da r_{β} nicht identisch Null ist, $L(\omega)$ durch $\omega - \omega_{\beta}$ theilbar sein. Da überdies $H(\omega)$ ein Theiler von $F(\omega)$ ist, gewinnen wir als Ergänzung zu dem obigen Satze das Resultat:

Der Rang $n - \tau$ des Gleichungssystems (21) kann nur dann kleiner sein als $n - \lambda$, wenn ein Linearfactor von $L(\omega)$ in $F(\omega)$ zu einer höheren Potenz erhoben auftritt, wie in $L(\omega)$ selbst.

Die oben (S. 117) aufgestellte Behauptung, dass $H(\omega)$ der grösste gemeinsame Theiler von $F(\omega)$ und $G(\omega)$ ist, wenn $R = 0$ die Differentialgleichung τ^{ter} Ordnung darstellt, der alle gemeinschaftlichen Integrale von (A) und $Q = 0$ genügen, lässt sich nun sofort erweisen. Sei nämlich $L(\omega)$ der grösste gemeinsame Theiler von $F(\omega)$ und $G(\omega)$, so ist, da $H(\omega)$ sowohl in $F(\omega)$ als auch in $G(\omega)$ enthalten sein muss, $H(\omega)$ auch in $L(\omega)$ enthalten. Die Anzahl τ der linear unabhängigen Integrale von (A), die der Differentialgleichung $Q = 0$ genügen, giebt, zufolge des Satzes am Anfang dieser Nummer (S. 116), von n abgezogen, den Rang des zu $L(\omega)$ gehörigen Gleichungssystems (21), es kann also $n - \tau$ nicht grösser sein als $n - \lambda$, also ist nothwendig $\tau = \lambda$ und folglich $H(\omega)$ mit $L(\omega)$ identisch.

Drittes Kapitel.

36. Canonisches Fundamentalsystem im Falle mehrfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung.

Nunmehr sind wir im Besitze der Hülfsmittel, deren es bedarf, um im allgemeinen Falle für die Differentialgleichung (A) ein zum Umlaufe U gehöriges canonisches Fundamentalsystem herstellen zu können, was uns oben (Nrn. 31, 32) nur für den Fall, wo die Fundamentalgleichung n verschiedene Wurzeln hatte, gelungen war. — Sei ω_α eine λ-fache Wurzel der Fundamentalgleichung $F(\omega) = 0$, so betrachten wir den Factor

$$(1) \qquad L(\omega) = (\omega - \omega_\alpha)^\lambda$$

von $F(\omega)$, und suchen diejenigen Integrale

$$u_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa y_\varkappa$$

der Differentialgleichung (A) zu bestimmen, die der zu $L(\omega)$ gehörigen Relation

$$(2) \quad \Theta^\lambda u_\alpha - \lambda \omega_\alpha \Theta^{\lambda-1} u_\alpha + \lambda_2 \omega_\alpha^2 \Theta^{\lambda-2} u_\alpha - \cdots + (-1)^\lambda \omega_\alpha^\lambda u_\alpha = 0$$

Genüge leisten. Dann haben die $\xi_1, \cdots \xi_n$ die Gleichungen:

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{n} \left(a_{h\varkappa}^{(\lambda)} - \lambda \omega_\alpha a_{h\varkappa}^{(\lambda-1)} + \cdots + (-1)^\lambda \omega_\alpha^\lambda \delta_{h\varkappa} \right) \xi_h = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

zu befriedigen. Der Rang dieses Gleichungssystems oder, was dasselbe ist, der des Systems seiner n^2 Coefficienten, ist, da λ genau die Potenz angiebt, zu welcher $\omega - \omega_\alpha$ in $F(\omega)$ auftritt, zu Folge des Theorems am Schlusse der Nr. 35, genau gleich $n - \lambda$, wir erhalten also λ linear unabhängige Lösungssysteme $\xi_1, \cdots \xi_n$ und entsprechend λ linear unabhängige Integrale u_α der Differentialgleichung (A), die der Gleichung (2) Genüge leisten. Es gehört also zu jeder Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung eine Gruppe von genau so vielen linear unabhängigen Integralen u_α, wie der Grad λ der Vielfachheit dieser Wurzel angiebt. Bezeichnen wir durch

$$\omega_\alpha,\ \omega_\beta,\ \omega_\gamma,\ \cdots\ \omega_\delta$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung, durch λ, μ, ν, $\cdots$ ϱ die Grade ihrer Vielfachheit, so dass also

$$\lambda + \mu + \nu + \cdots + \varrho = n,$$

ferner durch

$$(4)\qquad \begin{cases} u_{\alpha 1}, & u_{\alpha 2}, & \cdots & u_{\alpha \lambda}, \\ u_{\beta 1}, & u_{\beta 2}, & \cdots & u_{\beta \mu}, \\ u_{\gamma 1}, & u_{\gamma 2}, & \cdots & u_{\gamma \nu}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{\delta 1}, & u_{\delta 2}, & \cdots & u_{\delta \varrho}, \end{cases}$$

die zu diesen Wurzeln gehörigen Integrale, so ist die Anzahl derselben gleich n, und die in einer Zeile des Schemas (4) stehenden Integrale sind linear unabhängig. Wir wollen beweisen, dass auch zwischen diesen n Integralen überhaupt keine lineare homogene Beziehung mit constanten Coefficienten stattfinden kann.

Nach den im vorigen Kapitel bewiesenen Sätzen bilden die λ Integrale $u_{\alpha i}$ ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung λ^{ter} Ordnung

$$R_\alpha = 0,$$

deren Fundamentalgleichung durch

$$(\omega - \omega_\alpha)^\lambda = 0$$

gegeben wird; ebenso bilden die $u_{\beta i}$ ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

$$R_\beta = 0$$

mit der Fundamentalgleichung

$$(\omega - \omega_\beta)^\mu = 0,$$

die $u_{\gamma i}$ ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$R_\gamma = 0$$

mit der Fundamentalgleichung

$$(\omega - \omega_\gamma)^\nu = 0,$$

u. s. w.; die Coefficienten dieser Differentialgleichungen sind innerhalb E eindeutige Functionen. Bestünde zwischen den

$$(5) \qquad \begin{cases} u_{\alpha i} & (i = 1, 2 \cdots \lambda) \\ u_{\beta i} & (i = 1, 2 \cdots \mu) \end{cases}$$

eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten, so würden die Differentialgleichungen

$$R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0$$

Integrale gemein haben; die linken Seiten ihrer Fundamentalgleichungen müssten folglich einen gemeinsamen Theiler besitzen, was, da $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$ sein sollte, ausgeschlossen ist. Also sind die $\lambda + \mu$ Integrale (5) linear unabhängig; sie bilden folglich ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung $(\lambda + \mu)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$R_{\alpha\beta} = 0,$$

deren Fundamentalgleichung lautet

$$(\omega - \omega_\alpha)^\lambda (\omega - \omega_\beta)^\mu = 0.$$

Bestünde zwischen den Integralen (5) und

$$u_{\gamma i} \qquad (i = 1, 2 \cdots \nu)$$

eine lineare homogene Beziehung, so würden die Differentialgleichungen

$$R_{\alpha\beta} = 0, \qquad R_\gamma = 0$$

Integrale, ihre Fundamentalgleichungen folglich Wurzeln gemein haben, und dies ist, da ω_γ von ω_α und ω_β verschieden vorausgesetzt wurde, ebenfalls ausgeschlossen. — Indem man so weiter schliesst, sieht man, dass die n Integrale (4) linear unabhängig sind, dass sie also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) constituiren.

Dieses Fundamentalsystem ist eigentlich schon das zum Umlaufe U gehörige canonische, in der Form wie Herr Fuchs dasselbe zuerst aufgestellt hat; wir wollen nur noch die zu einer bestimmten der Wurzeln $\omega_\alpha, \omega_\beta, \cdots \omega_\delta$ gehörigen linear unabhängigen Integrale in geeigneter Weise auswählen. Betrachten wir die Gesammtheit der zur Wurzel ω_α gehörigen Integrale u_α, dann gehört offenbar auch jedes Θu_α zu dieser Gesammtheit, da es ja der Gleichung (2) Genüge leistet. Die λ Integrale

$$u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2}, \cdots u_{\alpha\lambda}$$

sind also so beschaffen, dass sie bei dem Umlaufe U in lineare homogene Functionen ihrer selbst übergehen. Dies ist die charakteristische Eigenschaft der durch die Zeilen des Schemas angedeuteten Anordnung des Fundamentalsystems (4) in Gruppen. Es lässt sich nun, wie Herr Hamburger gezeigt hat, durch passende Wahl der einzelnen

Elemente, jede solche Gruppe wieder in eine Reihe von Untergruppen zerfällen, die ihrerseits wieder die Eigenschaft zeigen, dass die Elemente einer solchen Untergruppe nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst übergehen.

37. Die Hamburger'schen Untergruppen. Canonische Form der zu einem Umlaufe gehörigen linearen Substitution.

Wir betrachten die Theiler

$$L_i(\omega) = (\omega - \omega_\alpha)^i \qquad (i = 1, 2, \cdots \lambda)$$

von $F(\omega)$ und suchen diejenigen Integrale $u_{\alpha i}$, die zu $L_i(\omega)$ gehören, d. h. die der Gleichung

$$(6) \qquad \Theta^i u_{\alpha i} - i\omega_\alpha \Theta^{i-1} u_{\alpha i} + \cdots + (-1)^i \omega_\alpha^i u_{\alpha i} = 0$$

genügen. Die Anzahl $\tau_{\alpha i}$ der linear unabhängigen $u_{\alpha i}$ wird durch den Rang $n - \tau_{\alpha i}$ des Gleichungssystems

$$(6\mathrm{a}) \qquad \sum_{h=1}^{n} \left(a_{h\varkappa}^{(i)} - i\omega_\alpha a_{h\varkappa}^{(i-1)} + \cdots + (-1)^i \omega_\alpha^i \delta_{h\varkappa}\right) \xi_h = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

oder des Systems der Coefficienten

$$(7) \qquad \left(a_{h\varkappa}^{(i)} - i\omega_\alpha a_{h\varkappa}^{(i-1)} + \cdots + (-1)^i \omega_\alpha^i \delta_{h\varkappa}\right)$$
$$(h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

gegeben. Dieses System ist, nach der durch die Gleichung (13) der Nr. 31 (S. 111) dargestellten Zerlegung, gleich

$$(8) \qquad (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha)^i.$$

Nun sind aber offenbar die $u_{\alpha, i-1}$ unter den $u_{\alpha i}$ enthalten, ebenso wie die sämmtlichen $u_{\alpha i}$ für $i = 1, 2, \cdots \lambda - 1$ unter den u_α enthalten sind, wir haben folglich

$$\lambda \geqq \tau_{\alpha i} \geqq \tau_{\alpha, i-1} \qquad (i = 2, 3, \cdots \lambda - 1),$$

andererseits ist zufolge des Theorems am Schlusse der Nr. 35 (S. 119) der Rang des Systems (8) höchstens gleich $n - i$, also

$$\tau_{\alpha i} \geqq i \qquad (i = 1, 2, \cdots \lambda - 1).$$

Folglich ist die Anzahl der linear unabhängigen $u_{\alpha i}$, die nicht schon zu den $u_{\alpha, i-1}$ gehören, gleich

$$\tau_{\alpha i} - \tau_{\alpha, i-1} = \varrho_{\alpha i} \geqq 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots \lambda). \qquad \tau_{\alpha\lambda} = \lambda.$$

Setzen wir noch der Gleichmässigkeit wegen

$$\tau_{\alpha 1} = \varrho_{\alpha 1},$$

so geben uns also die Zahlen der Reihe

$$\varrho_{\alpha 1}, \varrho_{\alpha 2}, \cdots, \varrho_{\alpha \lambda}$$

die Anzahlen derjenigen linear unabhängigen Integrale $u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2}, \cdots, u_{\alpha \lambda}$, die nicht schon unter jenen mit kleinerem zweiten Index enthalten sind, und es ist

$$\varrho_{\alpha 1} + \varrho_{\alpha 2} + \cdots + \varrho_{\alpha \lambda} = \lambda.$$

Für ein solches $u_{\alpha i}$, welches nicht schon unter den $u_{\alpha, i-1}$ enthalten ist, wird offenbar

(9) $$\Theta u_{\alpha i} - \omega_{\alpha} u_{\alpha i}$$

gleich einem $u_{\alpha, i-1}$ sein, welches nicht schon unter den $u_{\alpha, i-2}$ vorkommt. Bilden wir also den Ausdruck (9) für alle $\varrho_{\alpha i}$ linear unabhängigen wirklichen $u_{\alpha i}$, so erhalten wir ebenso viele linear unabhängige wirkliche $u_{\alpha, i-1}$, es ist folglich

$$\varrho_{\alpha, i-1} \geqq \varrho_{\alpha i} \qquad (i = 2, 3 \cdots \lambda).$$

Wir verfahren nun folgendermassen. Sei $\varrho_{\alpha l}$ die letzte in der Reihe der Zahlen

$$\varrho_{\alpha 1}, \varrho_{\alpha 2}, \cdots, \varrho_{\alpha \lambda},$$

die nicht gleich Null ist, so dass also alle

$$\varrho_{\alpha i} = 0, \qquad i > l;$$

dann sind die Systeme

$$(a_{h \varkappa} - \delta_{h \varkappa} \omega_{\alpha})^{i}$$

für $i \geqq l$ vom Range $n - \lambda$, und da

$$\tau_{\alpha \lambda} = \tau_{\alpha, \lambda - 1} = \cdots = \tau_{\alpha l} = \lambda,$$

so haben wir

$$\varrho_{\alpha 1} + \varrho_{\alpha 2} + \cdots + \varrho_{\alpha l} = \lambda.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen wirklichen $u_{\alpha l}$ ist gleich $\varrho_{\alpha l}$, diese denken wir uns ganz willkürlich gewählt. Bilden wir dann die $\varrho_{\alpha l}$ Ausdrücke

$$\Theta u_{\alpha l} - \omega_{\alpha} u_{\alpha l},$$

so liefern uns diese ebenso viele linear unabhängige wirkliche $u_{\alpha, l-1}$, diesen fügen wir noch $\varrho_{\alpha, l-1} - \varrho_{\alpha, l}$ beliebig zu wählende wirkliche $u_{\alpha, l-1}$ hinzu, die mit ihnen zusammengenommen ein System von $\varrho_{\alpha, l-1}$ linear unabhängigen wirklichen $u_{\alpha, l-1}$ bilden. Die $\varrho_{\alpha, l-1}$ Ausdrücke

$$\Theta u_{\alpha, l-1} - \omega_{\alpha} u_{\alpha, l-1}$$

liefern dann $\varrho_{\alpha, l-1}$ linear unabhängige wirkliche $u_{\alpha, l-2}$, denen wir dann noch $\varrho_{\alpha, l-2} - \varrho_{\alpha, l-1}$ andere wirkliche $u_{\alpha, l-2}$ hinzufügen, um im ganzen $\varrho_{\alpha, l-2}$ linear unabhängige wirkliche $u_{\alpha, l-2}$ zu erhalten. Mit diesen bilden wir wieder die Ausdrücke

$$\Theta u_{\alpha, l-2} - \omega_\alpha u_{\alpha, l-2}$$

und fahren so fort, bis wir endlich $\varrho_{\alpha 2}$ von den $\varrho_{\alpha 1}$ linear unabhängigen $u_{\alpha 1}$ durch die Formeln

$$\Theta u_{\alpha 2} - \omega_\alpha u_{\alpha 2}$$

bestimmt und diese dann durch noch $\varrho_{\alpha 1} - \varrho_{\alpha 2}$ andere zu einem vollen Systeme linear unabhängiger $u_{\alpha 1}$ ergänzt haben. — Wir erhalten auf diese Weise genau λ linear unabhängige Integrale, die uns das System der λ zur Wurzel ω_α gehörigen u_α darstellen. Diese Integrale sind jetzt in Untergruppen gesondert, und zwar haben wir

$\varrho_{\alpha l}$ Gruppen von je l Elementen,

$\varrho_{\alpha, l-1} - \varrho_{\alpha l}$ Gruppen von je $l - 1$ Elementen,

. . . .

$\varrho_{\alpha 1} - \varrho_{\alpha 2}$ Gruppen von je einem Elemente.

Bedeuten $u_1, u_2, \cdots u_m$ die eine solche Gruppe von m Elementen bildenden Integrale, so ist eines dieser Integrale, etwa u_1, ein $u_{\alpha 1}$, eines, etwa u_2, ein wirkliches $u_{\alpha 2}$, $\cdots$ endlich eines, etwa u_m, ein wirkliches $u_{\alpha m}$, und die Veränderungen, die diese Integrale beim Umlaufe U erleiden, werden durch die Formeln:

$$(10)\qquad \begin{cases} \Theta u_1 = \omega_\alpha u_1 \\ \Theta u_2 = \omega_\alpha u_2 + u_1 \\ \Theta u_3 = \omega_\alpha u_3 + u_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Theta u_m = \omega_\alpha u_m + u_{m-1} \end{cases}$$

dargestellt. Als besondere Fälle heben wir hervor:

$$\varrho_{\alpha 1} = \lambda, \quad \text{also} \quad \tau_{\alpha 1} = \lambda;$$

in diesem Falle ist $l = 1$, und wir erhalten λ Gruppen von je einem Elemente, d. h. λ linear unabhängige Integrale u_α, die sich beim Umlaufe U mit ω_α multipliciren, hierunter ordnet sich der Fall $\lambda = 1$ ein. Das andere Extrem wäre

$$\varrho_{\alpha 1} = 1, \quad \text{also auch} \quad \varrho_{\alpha 2} = \varrho_{\alpha 3} = \cdots = \varrho_{\alpha \lambda} = 1,$$

also $l = \lambda$, und wir erhielten eine einzige Gruppe von λ Elementen. — Es ergiebt sich somit allgemein die folgende Regel:

Man bestimme die verschiedenen Wurzeln $\omega_\alpha, \omega_\beta, \cdots \omega_\delta$ der Fundamentalgleichung

$$| a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega | = 0 \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n);$$

ist die Wurzel ω_α eine λfache, so bestimme man die Rangzahlen der Systeme

$$(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha), \quad (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha)^2, \quad \cdots, \quad (a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha)^\lambda,$$

oder, was dasselbe ist, die Rangzahlen der successiven Potenzen des Systems

$$(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega)$$

modulo $\omega - \omega_\alpha$. Diese Rangzahlen bilden eine nicht abnehmende Reihe, die Reihe der Differenzen je zweier aufeinander folgender dieser Zahlen eine nicht zunehmende Reihe; diese Differenzen sind die Zahlen

$$\varrho_{\alpha 1}, \ \varrho_{\alpha 2}, \ \cdots, \ \varrho_{\alpha l};$$

die Reihe ihrer Differenzen bestimmt unmittelbar die Anzahl und durch den zweiten Index des Subtrahendus die Elementenzahl der Untergruppen, in die die Gruppe der λ zu ω_α gehörigen Integrale u_α zerfällt*).

Auf diese Weise erhalten wir, entsprechend den verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung, ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (A), welches wir als das zum Umlaufe U gehörige canonische Fundamentalsystem bezeichnen. Die Substitution Ω, die dieses Fundamentalsystem beim Umlaufe U erfährt, nennen wir die zu U gehörige canonische Substitution; sie ist nach einer in der Nr. 34 gemachten Bemerkung, ebensowohl wie die Elemente des canonischen Fundamentalsystems selbst, unabhängig von der Wahl des zum Ausgangspunkte genommenen Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$.

Die Ausdrücke der Elemente des canonischen Fundamentalsystems durch $[y_\varkappa]$ ergeben sich durch Auflösung der linearen Gleichungssysteme (6a) und der analogen für die anderen Wurzeln $\omega_\beta, \omega_\gamma, \cdots \omega_\delta$ gebildeten, bei geeigneter Wahl der einem solchen Gleichungsysteme genügenden linear unabhängigen Lösungssysteme $\xi_1, \cdots \xi_n$. — Im ganzen erhalten wir n Systeme

---

*) Die Differenzen

$$\varrho_{\alpha 1} - \varrho_{\alpha 2}, \quad \varrho_{\alpha 2} - \varrho_{\alpha 3}, \quad \cdots, \quad \varrho_{\alpha l}$$

geben die Anzahl und durch den zweiten Index des Subtrahendus den Grad der von Herrn Weierstrass in die Theorie der bilinearen Formen eingeführten Elementartheiler, in die der Theiler $(\omega - \omega_\alpha)^\lambda$ der Determinante

$$| a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega | \qquad (h, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

zerfällt.

$$\xi_{\varkappa 1}, \cdots \xi_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

und es sind dann

$$u_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \xi_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

die Elemente des canonischen Fundamentalsystems $[u_\varkappa]$. Hieraus folgt a posteriori, dass die Determinante

$$|\xi_{\varkappa i}| = |X| \qquad (\varkappa, i = 1, 2 \cdots n)$$

des Systems $(\xi_{\varkappa i}) = X$ von Null verschieden sein muss, ein Ergebniss, welches sich auch leicht direct verificiren lässt. Die Substitution A, welche das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ beim Umlaufe U erleidet, stellt sich in der Form dar (vergl. Nr. 31, S. 101):

$$A = X^{-1} \Omega X,$$

d. h. sie geht durch Transformation aus der canonischen Substitution Ω hervor. Dies gilt offenbar auch für die zum Umlaufe U gehörige Substitution C eines beliebigen Fundamentalsystems $[z_\varkappa]$; denn wenn

$$[z_\varkappa] = B[y_\varkappa], \qquad |B| \neq 0,$$

so ist:

$$C = BAB^{-1},$$

also

$$C = BX^{-1}\Omega XB^{-1},$$

und nach den Sätzen der Nr. 30 ist

$$XB^{-1} = (BX^{-1})^{-1}.$$

Wir nennen darum Ω auch die canonische Form der zum Umlaufe U gehörigen Substitutionen, da sich die Substitution, die ein beliebiges Fundamentalsystem beim Umlaufe U erfährt, aus Ω durch Transformation ergiebt, also auch umgekehrt durch Transformation (mittels einer Substitution von nicht verschwindender Determinante) in Ω übergeführt werden kann.

Viertes Kapitel.

38. Analytische Form des canonischen Fundamentalsystems.

Wir wollen nun die analytische Form der das canonische Fundamentalsystem bildenden Integrale innerhalb des zweifach zusammenhängenden Bereiches E zu ermitteln suchen, und fassen zu dem Ende die Elemente

$$u_1, u_2, \cdots u_m$$

einer zur Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung gehörigen m-elementigen Untergruppe ins Auge. Denken wir uns diese in geeigneter Weise angeordnet, so wird nach Vollzug des Umlaufes U (vergl. S. 126)

$$\Theta u_1 = \omega_\alpha u_1$$

$$\Theta u_i = \omega_\alpha u_i + u_{i-1} \qquad (i = 2, 3 \cdots m),$$

oder, wenn wir einen Ausdruck von der Form

$$\Theta v - \omega v$$

kurz durch

$$(\Theta - \omega) v$$

bezeichnen, so haben wir

$$(1) \qquad \begin{cases} (\Theta - \omega_\alpha) u_1 = 0, \\ (\Theta - \omega_\alpha) u_i = u_{i-1} \qquad (i = 2, 3 \cdots m). \end{cases}$$

Da sich die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) in der Umgebung jeder Stelle von E regulär verhalten, so gilt das Gleiche von den Integralen von (A). Es sei nun t eine Function von x, die auch in der Umgebung jedes Punktes von E regulär und überdies so beschaffen ist, dass sie sich um Eins vermehrt, wenn x den Umlauf U vollzieht; dann multiplicirt sich die Function

$$\omega_\alpha^t$$

beim Umlaufe U mit ω_α, es ist also

$$(2) \qquad \Theta t = t + 1,$$

$$(3) \qquad \Theta \omega_\alpha^t = \omega_\alpha \omega_\alpha^t.$$

Setzen wir

$$\frac{u_1}{\omega_\alpha^t} = \varphi_1,$$

so ist demnach

$$\Theta\varphi_1 = \varphi_1,$$

d. h. φ_1 innerhalb E eindeutig; da sich überdies die Functionen u_1 und ω_α^t in der Umgebung jeder Stelle von E regulär verhalten und

$$\omega_\alpha^t = e^{t \log \omega_\alpha}$$

innerhalb E nicht verschwinden kann, so ist φ_1 auch in der Umgebung jeder Stelle von E regulär. Es ergiebt sich somit für u_1 die Darstellung

(4) $$u_1 = \omega_\alpha^t \varphi_1.$$

Um für $u_2, u_3, \cdots u_m$ analoge Darstellungsformeln zu erhalten, verfahren wir folgendermassen.

Es werde

(5) $$t^{(n)} = t(t-1) \cdots (t-n+1)$$

gesetzt, dann ist nach Gleichung (2)

$$\Theta t^{(n)} = (t+1)\, t^{(n-1)},$$

also

$$\Theta \omega_\alpha^t t^{(n)} = \omega_\alpha^{t+1} (t+1) t^{(n-1)}$$

und

$$(\Theta - \omega_\alpha)\, \omega_\alpha^t t^{(n)} = n\, \omega_\alpha^{t+1} t^{(n-1)}.$$

Sei nun

$$\mathfrak{F} = \varphi_0 t^{(n)} + \varphi_1 t^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n,$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n$ innerhalb E eindeutige Functionen von x bedeuten, so ist also

$$(\Theta - \omega_\alpha)\, \omega_\alpha^t \mathfrak{F} = \omega_\alpha^{t+1} \left\{ n\varphi_0 t^{(n-1)} + (n-1)\varphi_1 t^{(n-2)} + \cdots + \varphi_{n-1} \right\}.$$

Diese Gleichung kann im Sinne der Differenzenrechnung als Differentiationsformel angesehen werden; wenn dann umgekehrt eine solche Differenzengleichung

$$(\Theta - \omega_\alpha)\, \mathfrak{B} = \omega_\alpha^{t+1} \left\{ n\varphi_0 t^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n-1} \right\}$$

vorgelegt wird, so kann man sich die Aufgabe stellen, dieselbe zu integriren, d. h. einen Ausdruck $\mathfrak{B}$ zu finden, der ihr genügt. Beachten wir zu dem Ende, dass aus den beiden obigen Gleichungen

$$\Theta(\omega_\alpha^t \mathfrak{F} - \mathfrak{B}) = \omega_\alpha (\omega_\alpha^t \mathfrak{F} - \mathfrak{B})$$

folgt, oder, wie wir auch schreiben können,

$$\Theta\omega_\alpha^t\left(\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{B}}{\omega_\alpha^t}\right) = \omega_\alpha^{t+1}\left(\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{B}}{\omega_\alpha^t}\right),$$

so erkennen wir, dass

$$\Theta\left(\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{B}}{\omega_\alpha^t}\right) = \mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{B}}{\omega_\alpha^t};$$

es ist folglich

$$\Phi = \mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{B}}{\omega_\alpha^t}$$

eine innerhalb E eindeutige Function von x und

$$\mathfrak{B} = \omega_\alpha^t(\varphi_0 t^{(n)} + \varphi_1 t^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n + \Phi)$$

der gesuchte Ausdruck, wo also Φ, gleichsam die Integrationsconstante, noch eine beliebige innerhalb E eindeutige Function darstellt. Das Integral der Differenzengleichung

$$(\Theta - \omega_\alpha)\,\mathfrak{W} = \omega_\alpha^t(\psi_0 t^{(n)} + \psi_1 t^{(n-1)} + \cdots + \psi_n),$$

$\psi_0, \psi_1, \cdots \psi_n$ eindeutige Functionen innerhalb E, lautet demnach:

$$\mathfrak{W} = \frac{\omega_\alpha^t}{\omega_\alpha}\left\{\frac{\psi_0}{n+1}\,t^{(n+1)} + \frac{\psi_1}{n}\,t^{(n)} + \cdots + \psi_n t + \psi\right\},$$

wo ψ eine willkürliche innerhalb E eindeutige Function bedeutet.

Für das zweite Integral u_2 unserer Untergruppe besteht die Gleichung

$$(\Theta - \omega_\alpha)\,u_2 = u_1,$$

also nach den Gleichungen (3) und (4)

$$(\Theta - \omega_\alpha)\,u_2 = \omega_\alpha^t\varphi_1;$$

zufolge der eben entwickelten Formel ist demnach

$$u_2 = \omega_\alpha^t\left\{\frac{\varphi_1}{\omega_\alpha}\,t + \frac{\varphi_2}{\omega_\alpha}\right\},$$

wo φ_2 eine innerhalb E eindeutige Function bedeutet, die sich aber, da u_2, φ_1, t in der Umgebung jeder Stelle von E regulär sind, auch in der Umgebung jeder Stelle von E regulär verhält.

Für u_3 erhalten wir:

$$(\Theta - \omega_\alpha)\,u_3 = u_2 = \omega_\alpha^t\left(\frac{\varphi_1}{\omega_\alpha}\,t + \frac{\varphi_2}{\omega_\alpha}\right),$$

folglich ist

$$u_3 = \omega_\alpha^t\left\{\frac{\varphi_1}{2\omega_\alpha^2}\,t^{(2)} + \frac{\varphi_2}{\omega_\alpha^2}\,t + \frac{\varphi_3}{\omega_\alpha^2}\right\},$$

φ_3 eine innerhalb E eindeutige und in der Umgebung jeder Stelle von E reguläre Function. Allgemein findet man durch Schluss von $(\varkappa - 1)$ auf $\varkappa$:

$$u_\varkappa = \frac{\omega_\alpha^t}{\omega_\alpha^\varkappa}\left\{\frac{\varphi_1}{(\varkappa-1)!}t^{(\varkappa-1)} + \frac{\varphi_2}{(\varkappa-2)!}t^{(\varkappa-2)} + \cdots + \frac{\varphi_{\varkappa-1}}{1!}t + \varphi_\varkappa\right\},$$

also endlich

$$u_m = \frac{\omega_\alpha^t}{\omega_\alpha^m}\left\{\frac{\varphi_1}{(m-1)!}t^{(m-1)} + \cdots + \frac{\varphi_{m-1}}{1!}t + \varphi_m\right\},$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ innerhalb E eindeutige und an jeder Stelle von E reguläre Functionen bedeuten.

Setzen wir

$$(6)\quad f(t) = \frac{1}{\omega_\alpha^m}\left\{\varphi_m + \frac{\varphi_{m-1}}{1!}t + \frac{\varphi_{m-2}}{2!}t^{(2)} + \cdots + \frac{\varphi_1}{(m-1)!}t^{(m-1)}\right\},$$

ferner nach der in der Differenzenrechnung üblichen Weise:

$$\begin{aligned} f(t+1) - {} & f(t) = \Delta f(t), \\ \Delta f(t+1) - {} & \Delta f(t) = \Delta^2 f(t), \\ & \cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{m-2} f(t+1) - {} & \Delta^{m-2} f(t) = \Delta^{m-1} f(t), \end{aligned}$$

und beachten, dass

$$(t+1)^{(\varkappa)} = t^{(\varkappa)} + \varkappa t^{(\varkappa-1)},$$

so ergeben sich die eleganten Ausdrücke

$$(7)\quad \begin{cases} u_m = \omega_\alpha^t f(t), \\ u_{m-1} = \omega_\alpha^t \omega_\alpha \Delta f(t), \\ u_{m-2} = \omega_\alpha^t \omega_\alpha^2 \Delta^2 f(t), \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_1 = \omega_\alpha^t \omega_\alpha^{m-1} \Delta^{m-1} f(t). \end{cases}$$

Die Bestimmung der zur Herstellung dieser Ausdrücke erforderlichen Function t hängt wesentlich von der Beschaffenheit des zweifach zusammenhängenden Bereiches E ab.

39. Natur der Singularität der Integrale in der Umgebung einer Stelle, wo sich die Coefficienten wie rationale oder wie algebraische Functionen verhalten.

Wir wollen insbesondere zwei, für unsere Theorie vorzüglich wichtige Fälle ins Auge fassen, in denen die Herstellung der Function t keinerlei Schwierigkeiten darbietet.

Es sei $x = a$ eine Stelle von der Beschaffenheit, dass sich die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) an allen Stellen einer gewissen endlichen Umgebung von a regulär verhalten und dass entweder ein einfacher Umlauf um diese Stelle die Functionen $p_1, p_2, \cdots p_n$ ungeändert lässt, oder dass diese Functionen nach einem ϱ-maligen Umlaufe um $x = a$ zu ihren Ausgangswerthen zurückkehren.

Wenn dann überdies $x = a$ eine Stelle ist, an der sich $p_1, p_2, \cdots p_n$ bestimmt verhalten (vergl. Nr. 7, S. 16), so haben diese Functionen in $x = a$ den Charakter von algebraischen Functionen, d. h. sie verhalten sich im Punkte a regulär, oder a ist für diese Functionen ein ϱ-facher Windungspunkt, oder endlich $x = a$ ist eine algebraische Unendlichkeitsstelle. Wenn die $p_1, p_2, \cdots p_n$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes $x = \infty$ den Charakter algebraischer Functionen besitzen, so soll a auch den unendlich fernen Punkt bedeuten können.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo $p_1, p_2, \cdots p_n$ bei einem einfachen Umlaufe um $x = a$ ungeändert bleiben, dann verhalten sich also die Coefficienten der Differentialgleichung (A) in diesem Punkte wie rationale Functionen. Ist a ein endlicher Werth und haben die $p_1, p_2, \cdots p_n$ in $x = a$ auch endliche Werthe, so sind sie in der Umgebung von $x = a$ regulär, also sind auch die Integrale von (A) regulär; dieser Fall ist bereits durch den Fundamentalsatz (Nr. 9, S. 25) erledigt. Bedeutet dagegen a den unendlich fernen Punkt, oder einen im Endlichen gelegenen Punkt, für welchen einer oder mehrere der Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ unendlich werden, so denken wir uns um a als Mittelpunkt einen Kreis K beschrieben, innerhalb dessen kein singulärer Punkt der Differentialgleichung (Nr. 10, S. 26) ausser $x = a$ gelegen ist; falls $x = a$ den unendlich fernen Punkt bedeutet, ist K ein um $x = 0$ als Mittelpunkt beschriebener Kreis, der alle im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Differentialgleichung einschliesst. Schneiden wir aus der Kreisfläche K den Punkt a, durch eine diesen Punkt umgebende, unendlich kleine Curve aus, so ist die so entstehende Fläche E eine zweifach zusammenhängende, an deren jeder Stelle sich die $p_1, p_2, \cdots p_n$ regulär verhalten, für die also die Betrachtungen dieses Abschnittes gültig bleiben. Als Umlauf U kann dann jeder, ganz innerhalb E verlaufende geschlossene Weg, der den Punkt a einschliesst, genommen werden. Wir sagen in diesem Falle von den zu E beziehungsweise U gehörigen Substitutionen eines beliebigen Fundamentalsystems, ebenso wie von dem zu E gehörigen canonischen Fundamentalsysteme und der zu E gehörigen Fundamentalgleichung, dass sie zu dem singulären Punkte $x = a$ der Differentialgleichung gehören. Eine Function t, die der Gleichung (2) genügt und sich an jeder Stelle von E regulär verhält, ist dann z. B.

$$t = \frac{\log(x-a)}{2\pi i},$$

wo hier und im Folgenden, falls a den unendlich fernen Punkt bedeutet, an Stelle von $x-a$ der Ausdruck

$$\frac{1}{x}$$

zu nehmen ist. Bezeichnet dann r_α einen der um ganze Zahlen von einander verschiedenen Werthe, für die

$$\omega_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha},$$

so ist

$$\omega_\alpha^t = (x-a)^{r_\alpha},$$

und die Ausdrücke (7) nehmen die Form an

$$(8)\quad \begin{cases} u_1 = (x-a)^{r_\alpha}\psi_{11}(x), \\ u_2 = (x-a)^{r_\alpha}\{\psi_{21}(x) + \psi_{22}(x)\log(x-a)\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = (x-a)^{r_\alpha}\{\psi_{m1}(x) + \psi_{m2}(x)\log(x-a) + \cdots \\ \qquad + \psi_{mm}(x)\log^{m-1}(x-a)\}, \end{cases}$$

wo also $\psi_{11}(x)$, $\psi_{21}(x)$, $\cdots$ $\psi_{mm}(x)$ Functionen bedeuten, die innerhalb E eindeutig sind und sich in der Umgebung jeder Stelle von E regulär verhalten. Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen (7) unmittelbar, dass jede der Functionen

$$\psi_{i\varkappa}(x) \qquad (i=1,2,\cdots m;\ \varkappa=1,2,\cdots i)$$

durch

$$\psi_{11}(x),\ \psi_{21}(x),\ \cdots\ \psi_{m1}(x)$$

homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar ist. Zufolge des Laurent'schen Satzes lassen sich diese Functionen $\psi_{i\varkappa}(x)$ innerhalb E in Reihen entwickeln, die nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreiten und die im Allgemeinen unendlich viele positive und negative Potenzen enthalten. Denken wir uns diese Darstellung für alle Untergruppen des zu E oder zum singulären Punkte $x=a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems gemacht, so ist durch dieselbe das Verhalten dieses Fundamentalsystems bei einem Umlaufe um den Punkt $x=a$ in Evidenz gesetzt. Ein beliebiges Integral y der Differentialgleichung (A) lässt sich als homogene lineare Function der Elemente des canonischen Fundamentalsystems mit constanten Coefficienten darstellen, es ist also auch das Verhalten eines solchen innerhalb E, oder wie wir sagen können, in der Umgebung des singulären Punktes $x = a$ vollkommen festgelegt. Aus der Form der Darstellung (8) ist ersichtlich, dass $x = a$ der einzige innerhalb des Kreises K gelegene singuläre Punkt eines beliebigen Integrals der Differentialgleichung (A) ist, dieser Punkt kann aber, wenn die Entwickelungen der $\psi_{i\varkappa}(x)$ unendlich viele negative Potenzen von $x - a$ enthalten, noch eine Stelle der Unbestimmtheit (Nr. 7, S. 17) für die Integrale sein. Jedenfalls ist aber $x = a$ eine isolirte Unbestimmtheitsstelle, und zwar eine solche mit bestimmter Verzweigung. Wir haben also das wichtige Theorem:

Eine singuläre Stelle $x = a$ der Differentialgleichung (A) (der unendlich ferne Punkt $x = \infty$ eingeschlossen), an welcher die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ sich wie rationale Functionen verhalten, ist für die Integrale von (A) im Allgemeinen eine isolirte Unbestimmtheitsstelle mit bestimmter Verzweigung; die Art der Verzweigung eines Integrals wird gegeben durch die Darstellung dieses Integrals als homogener linearer Function der Elemente des zu $x = a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems und durch die zu $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung.

Es sei nun $x = a$ ein algebraischer ϱ-facher Windungspunkt für die Functionen $p_1, p_2, \cdots p_n$; wir denken uns durch $x = a$ einen Verzweigungsschnitt gelegt und construiren eine aus ϱ übereinander gelegten Blättern bestehende Windungsfläche, auf welcher die $p_1, p_2, \cdots p_n$ als eindeutige Functionen des Ortes angesehen werden können. Beschreiben wir dann in dieser Windungsfläche um a als Mittelpunkt einen ϱ-fach gewundenen Kreis K, der ausser $x = a$ keinen singulären Punkt der Differentialgleichung einschliesst, und schneiden aus der von K begrenzten Fläche den Punkt a durch eine diesen Punkt umgebende ϱ-fach gewundene unendlich kleine Curve aus, so erhalten wir einen zweifach zusammenhängenden Bereich E, innerhalb dessen $p_1, p_2, \cdots p_n$ eindeutig und an jeder Stelle von E regulär sind. Als Umlauf U kann jeder ganz innerhalb E verlaufende geschlossene und ϱ-fach gewundene Weg genommen werden. Wir sprechen auch in diesem Falle von der zum singulären Punkte a gehörigen Substitution, Fundamentalgleichung, dem canonischen Fundamentalsystem u. s. w. — Eine Function t, die sich an jeder Stelle von E regulär verhält und der Gleichung (2) genügt, ist jetzt:

$$t = \frac{\log(x - a)}{2\varrho\pi i},$$

also wenn wieder

$$\omega_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha}$$

gesetzt wird, so ist

$$\omega'_\alpha = (x-a)^{\frac{r_\alpha}{\varrho}}.$$

Die Ausdrücke (7) nehmen daher die Gestalt an

$$(9) \qquad u_\varkappa = (x-a)^{\frac{r_\alpha}{\varrho}} \sum_{i=0}^{\varkappa-1} \psi_{\varkappa i}(x) \log^i (x-a) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m),$$

wo jetzt die $\psi_{\varkappa i}(x)$ innerhalb E eindeutige und in der Umgebung jeder Stelle von E reguläre Functionen bedeuten. — Bilden wir den Bereich E durch die Function

$$\xi = (x-a)^{\frac{1}{\varrho}}$$

auf die ξ-Ebene ab, so entspricht ihm eine um $\xi = 0$ als Mittelpunkt beschriebene einfache Kreisfläche, aus welcher der Punkt $\xi = 0$ durch eine unendlich kleine Curve ausgeschnitten ist. Innerhalb dieses Bereiches $\mathfrak{E}$ der ξ-Ebene sind also die $\psi_{i\varkappa}(x)$ als Functionen von ξ ebenfalls eindeutig und verhalten sich in der Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{E}$ regulär; sie sind folglich nach ganzen Potenzen von ξ entwickelbar, d. h. die $\psi_{i\varkappa}(x)$ lassen sich innerhalb E nach ganzen Potenzen von

$$(x-a)^{\frac{1}{\varrho}}$$

entwickeln; diese Entwickelungen können aber im Allgemeinen eine unendliche Anzahl von Potenzen mit negativen Exponenten enthalten. Die Ausdrücke (9) bestimmen also, wenn wir uns dieselben für alle Untergruppen des zu a gehörigen canonischen Fundamentalsystems aufgestellt denken, das Verhalten dieses Fundamentalsystems und damit das Verhalten eines beliebigen Integrals in der Umgebung von $x = a$. Man übersieht auch leicht, wie diese Betrachtungen zu modificiren sind, wenn für die $p_1, \cdots p_n$ der unendlich ferne Punkt ein algebraischer ϱ-facher Windungspunkt ist, und $a = \infty$ genommen wird. Wir können also das oben (S. 135) ausgesprochene Theorem dahin verallgemeinern, dass wir sagen:

Eine singuläre Stelle $x = a$ der Differentialgleichung (A) (der unendlich ferne Punkt $x = \infty$ eingeschlossen), an welcher die Coefficienten $p_1, \ldots p_n$ den Charakter von algebraischen Functionen haben, ist für die Integrale im Allgemeinen eine Stelle der Unbestimmtheit mit bestimmter Verzweigung. Die Natur der Verzweigung wird bestimmt durch das Verhalten der Coefficienten $p_1, \cdots p_n$ in der Umgebung von $x = a$ und durch die zu diesem Punkte gehörige Fundamentalgleichung.

Die Auffindung der Fundamentalgleichung bietet im Allgemeinen erhebliche Schwierigkeiten dar, weil die Coefficienten derselben in transcendenter Weise von den in den $p_1, p_2, \cdots p_n$ auftretenden constanten Parametern abhängen können; wir kommen an späterer Stelle auf diese Frage in ihrer vollen Allgemeinheit zurück, jetzt wollen wir uns der Untersuchung eines besonderen Falles zuwenden, in welchem es gelingt, die Darstellung des canonischen Fundamentalsystems auch ohne die Kenntniss der Fundamentalgleichung zu finden, und zwar, wie wir noch besonders hervorheben, nicht nur die Form dieser Darstellung, sondern auch die Coefficienten der Reihenentwickelungen für die Functionen $\psi_{i\varkappa}(x)$.

Vierter Abschnitt.

Die singulären Stellen, an denen sich die Integrale bestimmt verhalten.

Erstes Kapitel.

40. Formulirung der Aufgabe nach Fuchs. Der Exponent, zu dem ein sich bestimmt verhaltendes Integral gehört.

Im Allgemeinen ist, wie wir gesehen haben, ein singulärer Punkt $x = a$ der Differentialgleichung (A), in welchem sich die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ wie algebraische Functionen verhalten, für die Integrale ein Punkt der Unbestimmtheit. Schon in seiner ersten grundlegenden Arbeit hat Herr Fuchs den besonderen Fall zum Gegenstande einer eingehenden Untersuchung gemacht, wo sich die Integrale der Differentialgleichung (A) in dem singulären Punkte a bestimmt verhalten, oder, wie sich Herr Fuchs damals ausdrückte, wo jedes Integral mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x - a$ multiplicirt für $x = a$ nicht mehr unendlich wird. — Eine Reihe von Fragen, die im Allgemeinen auf die Bestimmung transcendenter Grössen führen, liess sich in diesem Falle durch rein algebraische Processe erledigen, auch führte derselbe auf eine umfassende besondere Classe von linearen Differentialgleichungen — der nach ihrem Entdecker so genannten Fuchs'schen Classe, die im fünften Abschnitte behandelt werden soll — für welche sich das Studium der Integrale bis zu einer ähnlichen Stufe der Vollkommenheit bringen liess, wie es für die algebraischen Functionen einer Variabeln durch die Arbeiten von Puiseux und Riemann geschehen war. Für diese besondere Classe beherrscht man nämlich nicht nur — auf Grund der Arbeiten des Herrn Fuchs — das Verhalten der Integrale für alle Werthe der unabhängigen Veränderlichen, sondern es ist Herrn Poincaré auch gelungen, indem er ein von Herrn Fuchs aufgestelltes Princip zum Ausgangspunkte nahm, für die Lösungen dieser Classe von linearen Differentialgleichungen eine ähnliche Darstellung zu finden, wie sie für die algebraischen Functionen einer Variabeln mit Hülfe der Abel'schen Functionen durch Herrn Weierstrass und Riemann gegeben worden ist.

So ist also die Eingangs erwähnte Frage nach denjenigen Fällen, in denen sich die Integrale der Differentialgleichung (A) in dem singulären Punkte $x = a$, wo die Coefficienten den Charakter von algebraischen Functionen haben, bestimmt verhalten, für die ganze Entwickelung unserer Theorie entscheidend geworden; es wird demnach gerechtfertigt sein, wenn wir uns im gegenwärtigen Abschnitte mit der ausführlichen Beantwortung dieser Frage beschäftigen, und insbesondere die Gestalt der Coefficienten in der Umgebung eines solchen Punktes $x = a$ festzustellen suchen.

Es wird sich für $x = a$ jedes Integral von (A) bestimmt verhalten, wenn dies für die Elemente eines Fundamentalsystems, z. B. für die des zu $x = a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems der Fall ist. Wir nehmen an, dass der singuläre Punkt $x = a$ der Nullpunkt der Zahlenebene, und dass dieser für die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung kein Verzweigungspunkt sei; die $p_1, p_2, \cdots p_n$ sollen also für $x = 0$ von einer endlichen ganzzahligen Ordnung unendlich werden; die Untersuchung eines beliebigen endlichen singulären oder des unendlich fernen Punktes, wo die $p_1, p_2, \cdots p_n$ den Charakter algebraischer Functionen zeigen, lässt sich, wie wir später sehen werden, stets auf diesen Fall zurückführen.

Jedes Element des zu $x = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems hat dann die Gestalt:

$$u = x^r(\psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_m \log^m x), \tag{1}$$

wo die $\psi_0, \psi_1, \cdots \psi_m$ in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ in der Form

$$\psi_i = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \gamma_{i\varkappa} x^\varkappa \qquad (i = 0, 1, \cdots m) \tag{2}$$

darstellbare Functionen bedeuten. Soll sich u an der Stelle $x = 0$ bestimmt verhalten, so ist offenbar erforderlich, dass auch für keine der Functionen ψ_i der Punkt $x = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit sei, es dürfen also die Entwickelungen dieser Functionen nach Potenzen von x nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Umgekehrt ist dies auch hinreichend, da ja

$$x^r \text{ und } \log x$$

Functionen sind, die sich für $x = 0$ bestimmt verhalten (vergl. Nr. 7, S. 16). Enthalten die Entwickelungen der ψ_i negative Potenzen nur in endlicher Anzahl, so lässt sich eine bestimmte endliche Potenz von

x angeben, mit welcher multiplicirt das Integral u im Punkte $x = 0$ nur endliche Werthe annimmt, und umgekehrt, wenn es eine solche Potenz von x giebt, so verhalten sich die ψ_i, also auch u, für $x = 0$ bestimmt. Wir fragen also:

Wie müssen die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$, die im Nullpunkte den Charakter von rationalen Functionen haben, in der Umgebung dieses Punktes beschaffen sein, damit jedes Element des zu $x = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems mit einer bestimmten endlichen Potenz von x multiplicirt nicht mehr unendlich wird.

Bezeichnen wir mit $u_1, u_2, \cdots u_n$ die Elemente des zu $x = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, dann ist also

$$u_i = x^{\varrho_i}\{\psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_{m_i} \log^{m_i} x\} \qquad (i = 1, 2, \cdots n);$$

die Exponenten ϱ_i sind nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt (vergl. Nr. 39) und die Entwickelungen der $\psi_0, \psi_1, \cdots \psi_{m_i}$ nach Potenzen von x sollen — dies setzen wir jetzt voraus — negative Potenzen nur in endlicher Anzahl enthalten. — Dann lässt sich für jedes u_i ein von ϱ_i nur um eine ganze Zahl verschiedenes r_i so wählen, dass das Product

$$u_i x^{-r_i}$$

für $x = 0$ von Null verschieden ist und nur so unendlich wird, wie ein Ausdruck

$$L = \alpha + \beta \log x + \gamma \log^2 x + \cdots + \mu \log^m x, \tag{3}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu$ endliche Constanten bedeuten. Es ist dann

$$u_i = x^{r_i}(\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \cdots + \varphi_{m_i} \log^{m_i} x), \tag{4}$$

wo jetzt die Entwickelungen der $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{m_i}$ nur positive Potenzen von x enthalten, und wenigstens eine dieser Functionen für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Wir sagen, das Integral u_i gehöre zu dem so fixirten Exponenten r_i. — Offenbar können sich die Exponenten, zu welchen die λ Integrale der einer λfachen Wurzel der Fundamentalgleichung entsprechenden Gruppe gehören, nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Wir sagen allgemein, eine Function $F(x)$ gehöre zum Exponenten r, wenn

$$F(x) = x^r(f_0 + f_1 \log x + \cdots + f_m \log^m x), \tag{5}$$

wo $f_0, f_1, \cdots f_m$ in der Umgebung von x reguläre Functionen sind, die für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden; eine solche Function

$F(x)$ verhält sich im Punkte $x = 0$ allemal bestimmt. Wir heben nun zunächst einige einfache Theoreme über solche Functionen hervor.

1. Gehören die Functionen $F(x)$, $F_1(x)$ beziehungsweise zu den Exponenten r und r_1, so gehört ihr Product $F(x) \cdot F_1(x)$ zum Exponenten $r + r_1$.

2. Gehört $F(x)$ zum Exponenten r, so gehört die Ableitung von $F(x)$ stets zum Exponenten $r - 1$, ausgenommen wenn $r = 0$, und $F(x)$ für $x = 0$ nicht unendlich ist. Denn differentiiren wir den Ausdruck (5), so kommt

$$\frac{dF}{dx} = x^{r-1} \sum_{\lambda=0}^{m} \left(r f_\lambda + (\lambda + 1) f_{\lambda+1} + x \frac{d f_\lambda}{dx} \right) \log^\lambda x, \tag{6}$$

hierin ist $f_{m+1} = 0$ zu nehmen. Es gehört also die Ableitung von $F(x)$ zum Exponenten $r - 1$, wenn nicht in der Gleichung (6) alle Coefficienten von $\log^\lambda x$, für $\lambda = 0, 1, \cdots m$, im Punkte $x = 0$ verschwinden. Hierzu wäre aber erforderlich

$$\begin{cases} r f_0 + f_1 = 0, \\ r f_1 + 2 f_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r f_{m-1} + m f_m = 0, \\ r f_m = 0, \end{cases} \tag{7}$$

für $x = 0$, also würden für eben diesen Werth

$$f_0 = 0, \; f_1 = 0, \; \cdots \; f_m = 0$$

sein, wider die Voraussetzung. Nur in dem Falle, wo $r = 0$, folgt aus dem Gleichungssysteme (7) zwar

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \cdots \; f_m = 0,$$

nicht aber $f_0 = 0$ für $x = 0$, also wenn $r = 0$, und f_0 für $x = 0$ von Null verschieden, dagegen alle $f_1, f_2, \cdots f_m$ für $x = 0$ gleich Null sind, kann der Ausnahmefall eintreten, dass $\frac{dF}{dx}$ nicht zum Exponenten $r - 1$ gehört.

3. Bei geeigneter Wahl der Integrationsconstanten, gehört

$$\int F(x) dx$$

zum Exponenten $r + 1$. In der That folgt aus (5)

$$\int F(x) dx = \sum_{\lambda=0}^{m} \int x^r f_\lambda \log^\lambda x \, dx; \tag{8}$$

integriren wir partiell, so kommt

$$\int x^r f_\lambda \log^\lambda x\, dx = \log^\lambda x \int x^r f_\lambda\, dx - \int \frac{\lambda \log^{\lambda-1} x}{x} dx \int x^r f_\lambda\, dx.$$

Nun ist aber, wenn wir die Integrationsconstante gleich Null nehmen,

$$\int x^r f_\lambda\, dx = x^{r+1} f_{\lambda 1} + c_\lambda \log x,$$

hier bedeutet $f_{\lambda 1}$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Function, c_λ eine Constante, die nur dann von Null verschieden sein kann, wenn r eine negative ganze Zahl ist. Folglich erhalten wir:

$$\int x^r f_\lambda \log^\lambda x\, dx = \frac{c_\lambda}{\lambda+1} \log^{\lambda+1} x + x^{r+1} f_{\lambda 1} . - \int \lambda x^r f_{\lambda 1} \log^{\lambda-1} x\, dx;$$

wendet man auf das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Integral dasselbe Verfahren an und fährt so fort, indem man die Integrationsconstanten immer gleich Null annimmt, so ergiebt sich endlich

$$\int F(x)\, dx = x^{r+1}(g_0 + g_1 \log x + \cdots + g_m \log^m x) + c \log^{m+1} x,$$

hier bedeuten $g_0, g_1, \cdots g_m$ Functionen, die sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhalten, c eine Constante, die nur dann, wenn r eine negative ganze Zahl ist, von Null verschieden sein kann. Wenn $r + 1$ nicht gleich Null ist, so fügen wir keine Integrationsconstante hinzu, und es ist dann aus der Herleitung zu ersehen, dass wenigstens eine der Functionen $g_0, g_1, \cdots g_m$ im Punkte $x = 0$ nicht verschwindet; ist dagegen $r + 1 = 0$, so ist es möglich, dass alle $g_0, g_1, \cdots g_m$ für $x = 0$ verschwinden, dann ist aber stets c von Null verschieden, es gehört also das Integral von $F(x)$ in jedem Falle zum Exponenten $r + 1$, wenn wir die Integrationsconstante geeignet wählen.

41. Charakter der Coefficienten einer Differentialgleichung in einem Punkte, wo sich die Integrale bestimmt verhalten.

Da wir noch nicht nachgewiesen haben, dass es wirklich Differentialgleichungen (A) giebt, deren sämmtliche Integrale sich im singulären Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, so wollen wir ausgehen von einem System von n linear unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, die in der Umgebung eines jeden innerhalb eines Bereiches E gelegenen Punktes regulär sind — E bedeutet einen den Punkt $x = 0$ umschliessenden Bereich, der alle Stellen einer gewissen Umgebung von $x = 0$, diesen Punkt selbst aber nicht enthält — und die so beschaffen sind, dass sie sich bei einem innerhalb E verlaufenden geschlossenen

Wege U, der den Punkt $x = 0$ umgiebt, in lineare homogene Functionen ihrer selbst:

$$\Theta y_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \qquad |a_{\varkappa i}| \neq 0,$$

verwandeln. Diese Functionen $[y_\varkappa]$ genügen dann der linearen homogenen Differentialgleichung (vergl. Nr. 14, S. 37)

$$\text{(A)} \quad P(y) = (-1)^n \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

wo unter Festhaltung der a. a. O. eingeführten Bezeichnungen:

$$p_\varkappa = (-1)^n \frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Nun ist offenbar (vergl. Nr. 15)

$$\begin{aligned} \Theta D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n) &= D_\varkappa(\Theta y_1, \Theta y_2, \cdots \Theta y_n) \\ &= |a_{\lambda i}| \, D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n) \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \cdots n), \end{aligned}$$

also, wenn

$$g = \frac{\log |a_{\varkappa i}|}{2\pi i} \qquad (\varkappa, i = 1, 2 \cdots n)$$

gesetzt wird, so haben wir

$$D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n) = x^g \overline{\psi}_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n),$$

wo $\overline{\psi}_\varkappa(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Functionen bedeuten, die sich in der Nähe jeder Stelle von E regulär verhalten. Die Coefficienten $p_1, p_2 \cdots p_n$ sind also innerhalb E eindeutig und verhalten sich in der Umgebung jeder Stelle von E regulär, wir können also auf die Differentialgleichung (A) die Theorie der Fundamentalgleichung anwenden. Die zu $x = 0$ gehörige Fundamentalgleichung lautet

$$|a_{i\varkappa} - \omega \delta_{i\varkappa}| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n);$$

mit Hülfe der Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ derselben bilden wir uns das in Untergruppen zerlegte canonische Fundamentalsystem

$$[u_\varkappa] = X[y_\varkappa],$$

welches in der Umgebung von $x = 0$ die Form (8), Nr. 39 besitzt, und beim Umlaufe U die canonische Substitution

$$\Omega = (\gamma_{\varkappa i}) = X(a_{\varkappa i}) X^{-1} \qquad (\varkappa, i = 1, 2 \cdots n)$$

erfährt. Dann können wir der Bildung von $P(y)$ das System $[u_\varkappa]$ zu Grunde legen und erhalten auf diese Weise

$$\text{(A)} \qquad P(y) = (-1)^n \frac{D(y, u_1, \cdots u_n)}{D(u_1, \cdots u_n)},$$

$$(9) \qquad p_\varkappa = (-1)^n \frac{D_\varkappa(u_1, \cdots u_n)}{D(u_1, \cdots u_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

$$(10) \qquad \Theta D_\varkappa(u_1, \cdots u_n) = |\gamma_{\varkappa i}| \, D_\varkappa(u_1, \cdots u_n) \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Da nun

$$|\gamma_{\lambda i}| = |a_{\lambda i}| \qquad (\lambda, i = 1, 2 \cdots n)$$

ist, so haben wir

$$(11) \qquad g = \frac{\log |\gamma_{\lambda i}|}{2\pi i} = \frac{\log |a_{\lambda i}|}{2\pi i}$$

und folglich

$$(12) \qquad D_\varkappa(u_1, u_2, \cdots u_n) = x^g \psi_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n),$$

wo $\psi_\varkappa(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Functionen bedeuten, die sich von den $\overline{\psi}_\varkappa(x)$ nur durch den constanten Factor $|X|$ unterscheiden. Die Fundamentalgleichung kann dann auch in der Form

$$(13) \qquad |\gamma_{i\varkappa} - \omega \delta_{i\varkappa}| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

geschrieben werden. Denken wir uns nun in die $D_\varkappa(u_1, \cdots u_n)$ für $u_1, \cdots u_n$ und ihre Ableitungen die in der Umgebung von $x = 0$ gültigen Entwickelungen eingesetzt, und dann nach Potenzen von $\log x$ geordnet, so sind die Coefficienten von $\log x$, $\log^2 x, \cdots$ zufolge der Gleichungen (12) gleich Null, und wir schliessen daher, dass die $\psi_\varkappa(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ nach ganzen Potenzen von x entwickelbar sind.

Es mögen sich nun die $y_1, y_2, \cdots y_n$ im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, dann gilt das Gleiche von den $u_1, u_2, \cdots u_n$. Bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \cdots r_n$ die Exponenten, zu denen die Functionen $u_1, u_2, \cdots u_n$ beziehungsweise gehören, so ist also

$$(14) \qquad u_i = x^{r_i} F_i(x) \qquad (i = 1, 2 \cdots n),$$

wo $F_i(x)$ eine ganze Function von $\log x$ mit in der Umgebung von $x = 0$ regulären und für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwindenden Coefficienten bedeutet; dann sind die $r_1, r_2, \cdots r_n$ die durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen der $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$, und es unterscheiden sich folglich die einer bestimmten Gruppe der $u_1, u_2, \cdots u_n$ entsprechenden Exponenten r_i nur um ganze Zahlen. Bilden wir die successiven Ableitungen der Ausdrücke (14), so lassen sich dieselben nach dem Satze 2, S. 141 in die Form setzen:

$$(15) \qquad \frac{d^\mu u_i}{d x^\mu} = u_i^{(\mu)} = x^{r_i - \mu} F_{i\mu}(x),$$

wo jedes $F_{i\mu}$ ebenfalls eine ganze Function von $\log x$ bedeutet, deren Coefficienten sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhalten und für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden, wenn nicht der im Satze 2 hervorgehobene Ausnahmefall eintritt. Jedenfalls verhalten sich aber die sämmtlichen Ableitungen der $u_1, \cdots u_n$ im Punkte $x = 0$ bestimmt, das Gleiche gilt folglich auch von den Ausdrücken

$$D_\varkappa(u_1, u_2, \cdots u_n) \qquad (\varkappa = 0, 1 \cdots n), \tag{16}$$

d. h. die in den Gleichungen (12) auftretenden Functionen $\psi_\varkappa(x)$ können, nach Potenzen von x entwickelt, nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten; es lässt sich folglich für jeden Werth von $\varkappa$ eine von g nur um eine ganze Zahl verschiedene Grösse $\varrho_\varkappa$ so angeben, dass

$$D_\varkappa(u_1, u_2, \cdots u_n) = x^{\varrho_\varkappa} \Phi_\varkappa(x) \tag{17}$$

ist, wo nun $\Phi_\varkappa(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre und für $x = 0$ nicht verschwindende Function bedeutet.

Von diesen Exponenten $\varrho_\varkappa$, zu denen die $D_\varkappa(u_1, \cdots u_n)$ gehören, lässt sich nun zunächst Folgendes feststellen. Zufolge der Gleichung (13), deren Wurzeln durch $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ bezeichnet wurden, ist:

$$|\gamma_{i\varkappa}| = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n, \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

also nach (11)

$$g = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^{n} \log \omega_\alpha,$$

und da die $r_1, r_2, \cdots r_n$ gleich den durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen der $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ sind, und sich die $\varrho_\varkappa$ von g nur um ganze Zahlen unterscheiden können, so haben wir

$$\varrho_\varkappa = \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha - g_\varkappa, \tag{18}$$

wo $g_\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet.

Bilden wir die Ausdrücke (9) der Coefficienten von (A), so ergeben sich, da (vergl. Nr. 15)

$$D_0(u_1, u_2, \cdots u_n) = (-1)^n D(u_1, u_2, \cdots u_n)$$

ist, für die $p_\varkappa$ die Darstellungen

$$p_\varkappa = (-1)^n x^{\varrho_\varkappa - \varrho_0} \frac{\Phi_\varkappa(x)}{\Phi_0(x)} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n),$$

oder da

$$\Phi_\varkappa(0) \neq 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n)$$

ist, mit Rücksicht auf Gleichung (18),

$$p_\varkappa = x^{g_0 - g_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(x), \tag{19}$$

wo $\mathfrak{P}_\varkappa(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre und für $x = 0$ nicht verschwindende Function bedeutet. Die $p_1, p_2, \cdots p_n$ haben also, wenn sich die $y_1, y_2, \cdots y_n$ im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, in diesem Punkte den Charakter von rationalen Functionen, und die Ordnungen, von denen diese Functionen für $x = 0$ unendlich werden oder verschwinden, sind vollkommen bestimmt, wenn die ganzen Zahlen $g_0, g_1, \cdots g_n$ bekannt sind. — Damit ist zunächst die Existenz von Differentialgleichungen (A), deren Coefficienten im Punkte $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen besitzen und deren sämmtliche Integrale sich in diesem Punkte bestimmt verhalten, erwiesen; wir wollen nun, um die Beschaffenheit der Coefficienten einer solchen Differentialgleichung genauer zu ergründen, die ganzen Zahlen $g_0, g_1, \cdots g_n$ (Gleichung (18)) zu bestimmen suchen.

42. Fortsetzung der Untersuchung. Ein Hülfssatz über die mit Logarithmen behafteten Integrale.

Die Producte

$$u_\alpha x^{-r_\alpha}, \quad u_\alpha^{(\mu)} x^{-r_\alpha + \mu} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2 \cdots n \\ \mu = 1, 2 \cdots \end{pmatrix} \tag{20}$$

sind (vergl. die Gleichungen (14), (15) S. 144) ganze Functionen von $\log x$, die für $x = 0$ entweder endlich bleiben oder so unendlich werden wie ein Ausdruck L (vergl. S. 140, Gleichung (3)). Hieraus folgt, dass die Producte

$$D(u_1, u_2, \cdots u_n) x^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{n} r_\alpha + \frac{n(n-1)}{2}}, \tag{21}$$

$$D_\varkappa(u_1, u_2, \cdots u_n) x^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{n} r_\alpha + \frac{n(n-1)}{2} + \varkappa} \tag{22}$$

$$(\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

die gleiche Eigenschaft besitzen, und da überdies, zufolge der Darstellung (17), diese Producte nach ganzen Potenzen von x entwickelbar sein müssen, sind sie für $x = 0$ endlich, wobei aber nicht ausgeschlossen ist, dass sie für $x = 0$ verschwinden. — Wir können also nur schliessen, dass die mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Exponenten der in den Producten (21), (22) auftretenden Potenzen von x jedenfalls nicht grösser sind als die Exponenten ϱ_0 beziehungsweise $\varrho_\varkappa$, zu denen die Ausdrücke

$$D(u_1, \cdots u_n) \text{ beziehungsweise } D_\varkappa(u_1, \cdots u_n)$$

gehören, d. h. es ist zufolge der Gleichung (18),

$$(23) \qquad g_0 \leq \frac{n(n-1)}{2},$$

$$(24) \qquad g_\varkappa \leq \frac{n(n-1)}{2} + \varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Es kann sich nun ereignen, dass in diesen Beziehungen das Ungleichheitszeichen gültig ist, wir wollen aber nachweisen, dass sich durch geeignete Wahl der $u_1, u_2, \cdots u_n$ stets erreichen lässt, dass wenigstens in (23) das Gleichheitszeichen gilt, d. h. dass der Ausdruck (21) für $x = 0$ auch einen von Null verschiedenen Werth erhält.

Gehen wir nämlich von einer Differentialgleichung (A) aus, deren Coefficienten in $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben, und deren Integrale sich in diesem Punkte bestimmt verhalten, so sind die Exponenten $r_1, r_2, \cdots r_n$ vorläufig nur dadurch charakterisirt, dass sie die durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen der Wurzeln der Fundamentalgleichung sind, und dass es Integrale $u_1, u_2, \cdots u_n$ giebt, die zu ihnen gehören. Dadurch sind aber diese Exponenten und die zu ihnen gehörigen Integrale noch nicht eindeutig bestimmt, d. h. es kann im Allgemeinen mehrere Exponentensysteme (deren entsprechende Elemente sich natürlich nur um ganze Zahlen unterscheiden können) geben, die diese Eigenschaften zeigen. Ist dies der Fall, so kann der zu erweisende Satz offenbar nur für eines dieser Exponentensysteme richtig sein; denn die Determinante $D(u_1, u_2, \cdots u_n)$ ist, wie in der Nr. 15 (S. 39) gezeigt wurde, abgesehen von einem constanten Factor, unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems, also eine wohlbestimmte Function von x; eine solche kann aber nur zu einem bestimmten Exponenten gehören. — Es ist nicht überflüssig, an einem einfachen Beispiele zu zeigen, dass dieser Fall wirklich eintreten kann.

Betrachten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - \frac{x-4}{2x(x-2)}\,y' + \frac{x-3}{2x^2(x-2)}\,y = 0,$$

so besitzt dieselbe das Fundamentalsystem

$$u_1 = \sqrt{x}, \quad u_2 = \sqrt{x^2 - 2x},$$

welches im Punkte $x = 0$ zu den Exponenten

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2},$$

und das Fundamentalsystem

$$v_1 = \sqrt{x}, \quad v_2 = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{-2x},$$

welches zu den Exponenten

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{3}{2}$$

gehört; die Determinanten $D(u_1, u_2)$ beziehungsweise $D(v_1, v_2)$ haben (vergl. Nr. 15), abgesehen von einem constanten Factor, den Werth

$$e^{-\int p_1 dx} = \frac{x}{\sqrt{x-2}},$$

es ist also

$$\varrho_0 = 1$$

der Exponent, zu welchem dieselben gehören. Nun ist

$$r_1 + r_2 - \frac{n(n-1)}{2} = 0,$$

dagegen

$$s_1 + s_2 - \frac{n(n-1)}{2} = 1,$$

d. h. der zu beweisende Satz ist richtig für das Fundamentalsystem v_1, v_2, nicht aber für das Fundamentalsystem u_1, u_2.

Um im allgemeinen Falle das zu dem richtigen Exponentensysteme gehörige Fundamentalsystem $u_1, u_2, \cdots u_n$ zu finden, schlagen wir ein Verfahren ein, welches auf der in der Nr. 18 (S. 47 ff.) dargelegten Reduction der Differentialgleichung (A) und auf dem folgenden auch für anderweitige Untersuchungen nützlichen Hülfssatze beruht.

Bedeutet

$$v = \sum_{h=0}^{m} v_h \log^h x,$$

wo die $v_0, v_1, \cdots v_m$, abgesehen von einem allen diesen Grössen gemeinsamen Factor x^r, in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Functionen sind, ein Integral der Differentialgleichung (A), so sind auch die Ausdrücke, die man erhält, indem man v formal nach $\log x$ differentiirt, Integrale von (A).

Setzt man nämlich v in die linke Seite $P(y)$ von (A) ein und ordnet nach Potenzen von $\log x$, so erhält man

$$(25) \qquad P(v) = V_0 + V_1 \log x + \cdots + V_m \log^m x,$$

und die $V_0, V_1, \cdots V_m$ sind, abgesehen von dem allen gemeinsamen Factor x^r, in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Functionen, da ja die Coefficienten von $P(y)$ solche Functionen sind. Der Ausdruck (25) muss identisch verschwinden, dies ist aber für einen Ausdruck von dieser Form nur so möglich, dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log x$ verschwinden. Denn lässt man x beliebig oft, etwa $\varkappa$-mal den Umlauf U um $x = 0$ vollziehen, so ist auch

$$\Theta^\varkappa P(v) = 0,$$

man erhält also, da

$$\Theta^\varkappa V_h = e^{2\varkappa\pi i r} V_h \qquad (h = 0, 1, \cdots m)$$

ist, die Gleichungen

$$V_0 + V_1(\log x + 2\varkappa\pi i) + \cdots + V_m(\log x + 2\varkappa\pi i)^m = 0$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots);$$

für jeden bestimmten Werth von x besitzt also die Gleichung

$$V_0 + V_1 z + \cdots + V_m z^m = 0$$

unendlich viele Wurzeln, es muss folglich identisch

$$V_0 = 0, \ V_1 = 0, \ \cdots \ V_m = 0$$

sein. — Bedeutet nun t eine Unbestimmte, so folgt hieraus, dass auch der Ausdruck

$$v_t = \sum_{h=0}^{m} v_h (t + \log x)^h,$$

und folglich, wie leicht einzusehen ist, auch

$$(26) \qquad \frac{\partial^\lambda v_t}{\partial t^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots)$$

der Differentialgleichung (A) genügen muss. Nun ist aber dasjenige, was man aus (26) erhält, wenn man $t = 0$ setzt, nichts anderes als die formal gebildete λ^{te} Ableitung von v nach $\log x$, diese ist also, wie behauptet wurde, auch ein Integral von (A).

Aus einem Integrale v ergeben sich also durch formales Differentiiren nach $\log x$ noch $(m - 1)$ Integrale, die den Logarithmus zur $(m-1)^{\text{ten}}$, $(m-2)^{\text{ten}}$, $\cdots$ 0^{ten} Potenz enthalten, insbesondere ist der Coefficient der höchsten Potenz des Logarithmus in v selbst ein Integral der Differentialgleichung (A).

43. Nothwendige Form der Coefficienten in der Umgebung einer singulären Stelle, wo sich die Integrale bestimmt verhalten.

Ist v ein Integral, welches sich für $x = 0$ bestimmt verhält und zu dem Exponenten r gehört, so schliessen wir aus dem eben bewiesenen Satze, dass die Differentialgleichung (A) auch ein sich in $x = 0$ bestimmt verhaltendes Integral von der Form

$$x^s \varphi(x)$$

besitzen muss, wo $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre und für $x = 0$ nicht verschwindende Function bedeutet; der Exponent s, zu welchem dieses Integral gehört, ist eine von r um eine ganze Zahl verschiedene Grösse, die nicht kleiner als r sein kann. Dieses Resultat, welches wir für unseren gegenwärtigen Zweck anzuwenden haben werden, hätte übrigens auch aus der Form (7), Nr. 39 (S. 132) der Elemente einer Untergruppe des canonischen Fundamentalsystems erschlossen werden können.

Wir wählen nun das Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A), mit Hülfe dessen wir die Berechnung des Exponenten ϱ_0, zu welchem $D(u_1, u_2, \cdots u_n)$ gehört, vornehmen wollen, in folgender Weise. Da sich die Integrale von (A) für $x = 0$ bestimmt verhalten, giebt es jedenfalls ein Integral u_1 von der Form

$$u_1 = x^{r_1} \varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Function, die für $x = 0$ nicht verschwindet. Wir setzen, wie in der Nr. 18,

$$y = u_1 \int z\, dx$$

in die Differentialgleichung (A) ein, dann genügt z einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$Q_{n-1}(z) = 0,$$

deren Coefficienten, wie aus den a. a. O. (Gleichung (3)) für dieselben angegebenen Ausdrücken ersichtlich ist, in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben. Jedes Integral von $Q_{n-1} = 0$ ist in der Form

$$z = \frac{d}{dx} \frac{y}{u_1}$$

darstellbar, es verhalten sich folglich die sämmtlichen Integrale dieser Differentialgleichung im Punkte $x = 0$ bestimmt. Zufolge unseres

Hülfssatzes giebt es also ein Integral von $Q_{n-1} = 0$, welches die Form hat

$$v_2 = x^{\sigma_2} \varphi_2(x),$$

$\varphi_2(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre und für $x = 0$ nicht verschwindende Function. Dann ist

$$u_2 = u_1 \int v_2 \, dx$$

ein Integral von (A), welches zufolge der Sätze 3 und 1 in Nr. 40 zum Exponenten

$$r_2 = r_1 + \sigma_2 + 1$$

gehört. Wir setzen nun, wie in der Nr. 18, wieder

$$z = v_2 \int u \, dx$$

und fahren auf die daselbst angegebene Weise fort. Die sich successive ergebenden Differentialgleichungen

$$Q_{n-2} = 0, \quad Q_{n-3} = 0, \cdots, Q_1 = 0,$$

haben dann stets Coefficienten, die sich in der Umgebung von $x = 0$ wie rationale Functionen verhalten und ihre sämmtlichen Integrale sind in $x = 0$ bestimmt, wenn wir die zu den aufeinanderfolgenden Reductionen benutzten Integrale $v_3, v_4, \cdots v_n$ stets so wählen, dass sie die Form haben

$$v_\varkappa = x^{\sigma_\varkappa} \varphi_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 3, 4, \cdots n),$$

$\varphi_\varkappa(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre und für $x = 0$ nicht verschwindende Function. Setzen wir dann

$$u_3 = u_1 \int v_2 \, dx \int v_3 \, dx = u_2 \int v_3 \, dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = u_1 \int v_2 \, dx \int v_3 \, dx \cdots \int v_n \, dx = u_{n-1} \int v_n \, dx,$$

so gehört u_3 zum Exponenten

$$r_3 = r_2 + \sigma_3 + 1,$$

allgemein u_α zum Exponenten

$$(27) \qquad r_\alpha = r_{\alpha-1} + \sigma_\alpha + 1 = \sum_{\lambda=1}^{\alpha} \sigma_\lambda + \alpha - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

und die Integrale $u_1, u_2, \cdots u_n$ bilden (Nr. 18, S. 48) ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A). Die Determinante dieses Fundamentalsystems lässt sich (Nr. 18, S. 50, Gleichung (9)) in der Form darstellen

$$D(u_1, u_2, \cdots u_n) = C u_1^n v_2^{n-1} \cdots v_{n-1}^2 v_n,$$

oder

$$D(u_1, u_2, \cdots u_n) = C u_1 (u_1 v_2)(u_1 v_2 v_3) \cdots (u_1 v_2 v_3 \cdots v_{n-1})(u_1 v_2 v_3 \cdots v_n),$$

wo C eine Constante bedeutet. Folglich gehört, nach dem Satze 2, S. 141, $D(u_1, \cdots u_n)$ zum Exponenten

$$r_1 + (r_1 + \sigma_2) + (r_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \cdots + (r_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n),$$

d. h. zum Exponenten

$$\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha - \frac{n(n-1)}{2},$$

es ist also bei der getroffenen Wahl des Fundamentalsystems $u_1, u_2 \cdots u_n$ in der That, wie oben (Nr. 42, S. 147) behauptet wurde,

$$g_0 = \frac{n(n-1)}{2},$$

und folglich nach (24)

$$g_\varkappa - g_0 < \varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n).$$

Wir schliessen hieraus und aus der Gleichung (19), (S. 145), dass

(D) $$p_\varkappa = \frac{P_{n-\varkappa}}{x^\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

sein muss, wo die $P_{n-1}, P_{n-2}, \cdots P_0$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen bedeuten (die aber natürlich für $x = 0$ noch verschwinden können). Wir erhalten also das Theorem:

Wenn die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (A) sich im Punkte $x = 0$, für den die Coefficienten von (A) den Charakter rationaler Functionen besitzen, bestimmt verhalten, so ist der Coefficient der $(n - \varkappa)^{\text{ten}}$ Ableitung, mit $x^\varkappa$ multiplicirt, eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Function, vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins genommen wird. Hierzu ist noch zu bemerken, dass wenn von den Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ nur vorausgesetzt wird, sie seien in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig, aus der Forderung, dass sich die sämmtlichen Integrale von (A) im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten sollen, schon gefolgert werden kann, dass diese Coefficienten in $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben. Denn aus der Eindeutigkeit der $p_1, p_2, \cdots p_n$ folgt, dass ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) bei einem Umlaufe der Variabeln x um den Punkt $x = 0$ eine lineare Substitution erleidet, und für ein so beschaffenes Fundamentalsystem, welches sich überdies in $x = 0$ bestimmt verhält, gilt das am Schlusse der Nr. 41 erlangte Ergebniss.

Das gefundene Theorem kann also auch so gefasst werden, dass die $p_1, p_2, \cdots p_n$ nur als in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Functionen angenommen werden.

Dieses Theorem ist nun darum besonders bemerkenswerth, weil es eine Umkehrung zulässt; es lässt sich nämlich zeigen, dass die als nothwendig erkannte Form (D) der Coefficienten zugleich hinreichend dafür sei, dass alle Integrale von (A) sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten. Dies nachzuweisen, ist das Ziel der Untersuchung der wir uns jetzt zuwenden, dieselbe wird uns zugleich mit den wichtigsten Eigenschaften der Differentialgleichungen von der angegebenen Beschaffenheit bekannt machen.

Zweites Kapitel.

44. Normalform der Differentialgleichung in der Umgebung einer Stelle, wo die Coefficienten den Charakter rationaler Functionen besitzen. Charakteristische Function.

Wenn die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) die Form (D) haben, so erhält die Differentialgleichung, nach Multiplication mit x^n, die Gestalt:

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0 y = 0.$$

Allgemein lässt sich jede Differentialgleichung, deren Coefficienten im Punkte $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben, in die Form setzen

$$\text{(E)} \qquad x^n P_n(x) y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = 0,$$

wo $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen bedeuten, die für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden; diese Form wollen wir nach Herrn Frobenius als die Normalform der Differentialgleichung bezeichnen. Ist insbesondere

$$(1) \qquad P_n(0) \neq 0,$$

so sind auch die Quotienten

$$\frac{P_{n-1}}{P_n}, \quad \frac{P_{n-2}}{P_n}, \quad \cdots \quad \frac{P_0}{P_n}$$

in der Umgebung von $x = 0$ regulär, die Coefficienten der Differentialgleichung haben also in diesem Falle, nach Division durch $x^n P_n(x)$, die Form (D); dies tritt z. B. stets ein, wenn der Punkt $x = 0$ ein nicht singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, d. h. wenn die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$, die nach Division durch den Coefficienten der höchsten Ableitung auftreten, in der Umgebung von $x = 0$ regulär sind, denn alsdann muss die Entwickelung von $P_{n-\varkappa}(x)$ in (E) mit $x^\varkappa$ beginnen, also muss, da nicht alle $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ für $x = 0$ gleichzeitig verschwinden sollen,

$$P_n(0) \neq 0$$

sein. Allgemeiner folgt aus dem Theorem am Schlusse der vorigen Nummer (S. 152), dass die Ungleichung (1) stets erfüllt ist, wenn $x = 0$ ein singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, für den sich alle Integrale bestimmt verhalten, und in der That ist auch andererseits leicht einzusehen, dass dies den Fall, wo $x = 0$ ein regulärer Punkt der Differentialgleichung ist, mit umfasst, denn zufolge des Existenztheorems (Nr. 9, S. 25) ist dann jedes Integral der Differentialgleichung in der Umgebung von $x = 0$ regulär, verhält sich also jedenfalls bestimmt. — Wenn die Ungleichung (1) erfüllt ist, können wir uns die Differentialgleichung (E) durch $P_n(x)$ dividirt denken, d. h. wir können annehmen, dass die Differentialgleichung in der Normalform einfach x^n als Coefficienten der höchsten Ableitung besitzt, es soll deshalb in diesem Falle stets

$$P_n(x) = 1$$

vorausgesetzt werden. Das heisst also, wenn die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) die Form (D) haben, so ist in der Normalform (E)

$$P_n(x) = 1,$$

und umgekehrt.

Wir bezeichnen im Folgenden stets die linke Seite der auf die Normalform (E) gebrachten Differentialgleichung durch $P(y)$, also

$$P(y) = \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda P_\lambda(x) y^{(\lambda)}.$$

Wenn sich alle Integrale der Differentialgleichung im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, so ergab sich aus der Theorie der Fundamentalgleichung die Existenz eines canonischen Fundamentalsystems $u_1, u_2, \cdots u_n$, dessen Elemente zu gewissen Exponenten $r_1, r_2, \cdots r_n$ gehören. Unter diesen Integralen finden sich stets solche von der Form

$$x^r \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre, für $x = 0$ nicht verschwindende Function bedeutet; denken wir uns diese Function nach Potenzen von x entwickelt, so lässt sich also ein solches Integral in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ in der Gestalt

$$g(x, r) = x^r \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu$$

darstellen, wo $g_0, g_1, g_2, \cdots$ Constanten, r eine Grösse bedeutet, die gleich dem durch $2\pi i$ dividirten Logarithmus einer Wurzel der Fundamentalgleichung ist. Wir wollen nunmehr in eine genauere Untersuchung solcher der Differentialgleichung genügender Reihen eintreten und setzen zu dem Ende ganz allgemein in die linke Seite $P(y)$ der auf die Normalform (E) gebrachten Differentialgleichung

$$y = g(x, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{r+\nu}$$

ein, ohne über die Coefficienten von $P(y)$ oder über die Natur der Integrale der Differentialgleichung (E) irgendwelche besonderen Voraussetzungen zu machen. Wir nehmen also nur an, dass die $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen seien und denken uns diese Functionen in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelt. Dann ist offenbar

$$(2) \qquad P(g(x, r)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu P(x^{r+\nu});$$

wir nennen nach Herrn Frobenius den Ausdruck $P(x^\varrho)$, wo ϱ eine beliebige Constante bedeutet, die charakteristische Function des Differentialausdruckes $P(y)$. Da

$$\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}(x^\varrho) = \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)x^{\varrho-\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \cdots)$$

ist (für $\varkappa = 0$ ist hier und im Folgenden $\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1) = 1$ zu nehmen), so ergiebt sich

$$(3) \qquad P(x^\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} x^\varkappa P_\varkappa(x)\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)x^{\varrho-\varkappa}$$

$$= x^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x)\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1).$$

Setzt man

$$(4) \qquad f(x, \varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x)\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1),$$

so ist also $f(x, \varrho)$ in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelbar und verschwindet für $x = 0$ nicht identisch. Sei

$$f(x, \varrho) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\varrho)x^\lambda,$$

dann ist die charakteristische Function

$$(5) \qquad P(x^\varrho) = x^\varrho f(x, \varrho) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\varrho)x^{\varrho+\lambda}.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass durch Angabe der charakteristischen Function der Differentialausdruck $P(y)$ vollkommen bestimmt ist. — In der That ist die charakteristische Function von $P(y)$ ein Ausdruck von der Form

$$x^\varrho g(\varrho), \qquad g(\varrho) = f(x, \varrho),$$

wo $g(\varrho)$ eine ganze Function von ϱ bedeutet, deren Coefficienten nach positiven ganzen Potenzen von x, d. h. in gewöhnliche Potenzreihen von x entwickelbar sind. Setzt man

$$\begin{aligned} \varDelta g(\varrho) &= \qquad g(\varrho+1) - \qquad g(\varrho), \\ \varDelta^2 g(\varrho) &= \quad \varDelta g(\varrho+1) - \quad \varDelta g(\varrho), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varDelta^\varkappa g(\varrho) &= \varDelta^{\varkappa-1} g(\varrho+1) - \varDelta^{\varkappa-1} g(\varrho), \end{aligned}$$

so lässt sich nach den Principien der Differenzenrechnung die ganze Function $g(\varrho)$ nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$g(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \left[\frac{\varDelta^\varkappa g(\varrho)}{\varkappa\,!}\right]_{\varrho=0} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1),$$

es ist also nach Gleichung (4)

$$P_\varkappa(x) = \left[\frac{\varDelta^\varkappa f(x, \varrho)}{\varkappa\,!}\right]_{\varrho=0}.$$

Ist nun umgekehrt $g(\varrho)$ eine gegebene ganze Function von ϱ, deren Coefficienten in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ in gewöhnliche Potenzreihen von x entwickelbar sind und die für $x = 0$ nicht identisch (d. h. für jeden Werth von ϱ) verschwindet, so stellt die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} \left[\frac{\varDelta^\varkappa g(\varrho)}{\varkappa\,!}\right]_{\varrho=0} x^\varkappa \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung in der Normalform dar, deren charakteristische Function durch

$$x^\varrho g(\varrho)$$

gegeben wird. Die charakteristische Function eines auf die Normalform gebrachten Differentialausdruckes ist also, abgesehen von dem Factor x^ϱ, eine ganze Function von ϱ, deren Coefficienten gewöhnliche, für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwindende Potenzreihen von x sind, und umgekehrt kann jeder so beschaffene Ausdruck

$$x^\varrho g(\varrho)$$

als die charakteristische Function eines wohlbestimmten Differentialausdruckes $P(y)$, der die Normalform hat, aufgefasst werden.

45. Recursionsformel für die der Differentialgleichung genügenden Potenzreihen. Die determinirende Fundamentalgleichung.

Bilden wir die charakteristische Function $P(x^\varrho)$ für $\varrho = r + \nu$,

$$P(x^{r+\nu}) = x^{r+\nu} f(x, r+\nu),$$

setzen diese Ausdrücke in die Gleichung (2) ein und ordnen sie nach Potenzen von x, so erhalten wir

$$P(g(x,r)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (f_0(r+\nu) g_\nu + f_1(r+\nu-1) g_{\nu-1} + \cdots$$
$$+ g_0 f_\nu(r)) x^{r+\nu}.$$

Soll $g(x, r)$ ein Integral der Differentialgleichung (E) sein, so muss dieser Ausdruck identisch verschwinden, d. h. es müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x gleich Null sein; wir erhalten also die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} g_0 f_0(r) = 0, \\ g_0 f_1(r) + g_1 f_0(r+1) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_0 f_\nu(r) + g_1 f_{\nu-1}(r+1) + \cdots + g_\nu f_0(r+\nu) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

die für die Coefficienten der Reihenentwickelung $g(x, r)$ erfüllt sein müssen. Wenn $g(x, r)$ die Entwickelung eines Integrals, welches zum Exponenten r gehört, in der Umgebung von $x = 0$ darstellt, so ist

$$g_0 \neq 0,$$

es muss also in diesem Falle, zufolge der ersten Gleichung des Systems (6), r eine Wurzel der Gleichung

$$(7) \qquad f_0(\varrho) = 0$$

sein. Der Ausdruck

$$(8) \qquad f_0(\varrho) = f(0, \varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(0)\, \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)$$

ist der Factor von x^ϱ in der charakteristischen Function, man nennt denselben die determinirende Function, die Gleichung (7) die determinirende Gleichung oder die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (E). Diese letztere Bezeichnung, die den Zusammenhang der wichtigen Gleichung (7) mit der Fundamentalgleichung andeutet, wird sich als berechtigt erweisen, wenn wir nunmehr dazu übergehen, die Bedeutung dieser, zuerst von Herrn Fuchs aufgestellten Gleichung in dem Falle, wo sich sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (E) im Punkte $x=0$ bestimmt verhalten, zu erörtern.

In diesem Falle, wo also die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) die Form (D) haben, kann, wie oben bemerkt wurde, in der Normalform (E)

$$P_n(x) = 1$$

genommen werden; die determinirende Function $f_0(\varrho)$ ist also eine ganze Function n^{ten} Grades von ϱ, die Gleichung (7) eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades. Die Exponenten r, zu denen diejenigen Elemente des canonischen Fundamentalsystems gehören, die in der Umgebung von $x=0$ durch Potenzreihen darstellbar sind, d. h. diejenigen Elemente, die keine Logarithmen enthalten, genügen, wie wir gesehen haben, dieser Gleichung (7). Wir wollen allgemein zeigen, dass, wenn

$$u = x^r(\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \cdots + \varphi_m \log^m x)$$

ein beliebiges zum Exponenten r gehöriges Integral der Differentialgleichung darstellt, dieser Exponent r ebenfalls eine Wurzel der Gleichung (7) sein muss. Die $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_m$ sind in der Umgebung von $x=0$ reguläre Functionen, also in gewöhnliche Potenzreihen von x entwickelbar; sei

$$\varphi_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\lambda\nu} x^\nu \qquad (\lambda = 0, 1, 2 \cdots m).$$

und setzen wir den Ausdruck u in die linke Seite $P(y)$ der Differentialgleichung (E) ein, so erhalten wir

$$P(u) = P\left(x^r \sum_{\nu=0}^{\infty} (g_{0\nu} + g_{1\nu}\log x + \cdots + g_{m\nu}\log^m x)\, x^\nu\right),$$

oder

(9) $$P(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\{g_{0\nu}P(x^{r+\nu}) + g_{1\nu}P(x^{r+\nu}\log x) + \cdots + g_{m\nu}P(x^{r+\nu}\log^m x)\}.$$

Differentiiren wir die Identität (5) $\varkappa$-mal nach ϱ, so kommt

$$\frac{d^\varkappa}{d\varrho^\varkappa}P(x^\varrho) = P(x^\varrho \log^\varkappa x) = \frac{d^\varkappa}{d\varrho^\varkappa}(x^\varrho f(x, \varrho)),$$

oder, wenn wir die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung einer Function $F(\varrho)$ von ϱ nach ϱ durch

$$\frac{d^\varkappa F(\varrho)}{d\varrho^\varkappa} = F^{(\varkappa)}(\varrho)$$

bezeichnen,

(10) $P(x^\varrho \log^\varkappa x)$

$$= x^\varrho \log^\varkappa x f(x, \varrho) + \varkappa_1 x^\varrho \log^{\varkappa-1} x f'(x, \varrho) + \cdots + x^\varrho f^{(\varkappa)}(x, \varrho).$$

Setzen wir diese Ausdrücke für

$$\varrho = r + \nu, \qquad \varkappa = 0, 1, \cdots m$$

in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir

$$P(u) = \sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\lambda\nu} P(x^{r+\nu} \log^\lambda x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{i=0}^{\lambda} g_{\lambda\nu} \lambda_i x^{r+\nu} f^{(\lambda-i)}(x, r+\nu) \log^i x,$$

oder, wenn wir nach Potenzen von $\log x$ ordnen,

$$P(u) = \sum_{\varkappa=0}^{m} \log^\varkappa x \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=\varkappa}^{m} g_{\lambda\nu} \lambda_\varkappa x^{r+\nu} f^{(\lambda-\varkappa)}(x, r+\nu).$$

Wenn u ein Integral der Differentialgleichung (E) sein soll, so muss dieser Ausdruck identisch verschwinden, hierzu ist aber nach einer oben (Nr. 42, S. 149) gemachten Bemerkung erforderlich, dass die einzelnen Coefficienten der Potenzen von $\log x$ verschwinden; es ist also

$$(11)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^{r+\nu} \sum\limits_{\lambda=0}^{m} g_{\lambda\nu} f^{(\lambda)}(x, r+\nu) = 0 \\ \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^{r+\nu} \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \lambda g_{\lambda\nu} f^{(\lambda-1)}(x, r+\nu) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^{r+\nu} g_{m\nu} f(x, r+\nu) = 0. \end{cases}$$

Die successiven Ableitungen der ganzen Function $f(x, \varrho)$ von ϱ nach ϱ können, da (S. 156)

$$f(x, \varrho) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(\varrho) x^h$$

ist, in der Form

$$f^{(\varkappa)}(x, \varrho) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h^{(\varkappa)}(\varrho) x^h$$

geschrieben werden, jede der Gleichungen (11) stellt also nach Division durch x^r eine gleich Null gesetzte gewöhnliche Potenzreihe von x dar. Es müssen folglich die einzelnen Coefficienten der Potenzen von x verschwinden, und wir erhalten somit ein System von Gleichungen, denen die Coefficienten $g_{\lambda\nu}$ der in der Entwickelung von u auftretenden Reihen genügen müssen. Durch Vergleichung der von x unabhängigen Glieder mit Null finden wir insbesondere

$$(12)\begin{cases} g_{00}f_0(r) \quad + g_{10}f_0'(r) \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots + g_{m0}f_0^{(m)}(r) = 0, \\ g_{10}f_0(r) \quad + 2g_{20}f_0'(r) + \cdots + mg_{m0}f^{(m-1)}(r) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ g_{m-1,0}f_0(r) + mg_{m0}f_0'(r) = 0, \\ g_{m0}f_0(r) \quad = 0. \end{cases}$$

Da das Integral u zum Exponenten r gehören sollte, so muss wenigstens eine der Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_m$ für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth besitzen, es muss also das Gleichungssystem (12) durch Werthe der

$$g_{00}, g_{10}, \cdots g_{m0}$$

befriedigt werden können, die nicht sämmtlich gleich Null sind; hieraus folgt, dass die Determinante des Gleichungssystems verschwinden muss. Diese Determinante hat aber den Werth

$$f_0(r)^m,$$

also ist

$$f_0(r) = 0,$$

d. h. es muss, wie behauptet wurde, r eine Wurzel der Gleichung (7) sein.

46. Formale Bildung einer Reihe, die der Differentialgleichung genügt.

Verhalten sich alle Integrale der Differentialgleichung (E) im Punkte $x = 0$ bestimmt, und bedeuten $r_1, r_2, \cdots r_n$ die Exponenten, zu denen die Elemente $u_1, u_2, \cdots u_n$ eines canonischen Fundamentalsystems gehören, so sind also diese n Grössen $r_1, r_2, \cdots r_n$ Wurzeln der Gleichung (7). Diese Gleichung ist, wie bereits bemerkt wurde (S. 159), im vorliegenden Falle vom n^{ten} Grade; sind also alle $r_1, r_2, \cdots r_n$ von einander verschieden, so stellen diese n Grössen auch die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (7) dar; wenn aber einige der Integrale

$u_1, u_2, \cdots u_n$ zum selben Exponenten gehören, so kann es sich ereignen, dass die Gleichung (7) noch Wurzeln besitzt, die in der Reihe der Grössen $r_1, r_2, \cdots r_n$ nicht enthalten sind. Dass dieser Fall wirklich eintreten kann, lehrt das in der Nr. 42 (S. 147 ff.) behandelte Beispiel. Für dieses lautet nämlich die Gleichung (7)

$$\varrho(\varrho-1)-\varrho+\frac{3}{4}=0,$$

ihre Wurzeln sind also $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$, während die Elemente des daselbst durch u_1, u_2 bezeichneten Fundamentalsystems beide zum Exponenten $\frac{1}{2}$ gehören. Dagegen gehören die Elemente des Fundamentalsystems v_1, v_2 wirklich zu den beiden Wurzeln der Gleichung (7). Wir wollen nun allgemein zeigen, dass sich stets ein Fundamentalsystem so angeben lässt, dass seine Elemente genau zu den n Wurzeln der Gleichung (7) gehören, und zwar wird sich ergeben, dass das Fundamentalsystem, welches wir oben (Nr. 43, S. 150 ff.) durch Anwendung des Reductionsverfahrens hergestellt haben, diese Eigenschaft besitzt. Dadurch wird dann bewiesen sein, dass im Falle, wo sich alle Integrale der Differentialgleichung (E) im Punkte $x=0$ bestimmt verhalten, die Gleichung (7) dasselbe leistet wie im allgemeinen Falle die zu $x=0$ gehörige Fundamentalgleichung; und während die letztere durch die mit $2\pi i$ dividirten Logarithmen ihrer Wurzeln nur die Exponenten derjenigen Potenzen von x bestimmt, die von den Elementen des canonischen Fundamentalsystems abgesondert werden müssen, damit sich dieselben als ganze Functionen von $\log x$ mit in der Umgebung von $x=0$ eindeutigen Coefficienten darstellen, also Exponenten, denen noch beliebige ganze Zahlen hinzugefügt werden können; so bestimmt die Gleichung (7) diejenigen Exponenten, zu denen die Elemente eines geeignet gewählten canonischen Fundamentalsystems gehören, vollständig, und eben dieser Umstand rechtfertigt die von Herrn Fuchs eingeführte Bezeichnung der Gleichung (7) als determinirende Fundamentalgleichung.

Wir werden den in Rede stehenden Nachweis so führen, dass sich dabei zugleich der am Schlusse der Nr. 43 (S. 153) angekündigte Satz, dass die Form (D) der Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ für die Bestimmtheit der sämmtlichen Integrale im Punkte $x=0$ nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend sei, ergeben wird. Wir werden nämlich von einer Differentialgleichung ausgehen, die in der Normalform (E) so gestaltet ist, dass

$$P_n(x)=1;$$

dann ist die Gleichung (7) für dieselbe vom Grade n, und wir werden zeigen, dass stets n linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung hergestellt werden können, die sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten und die zu den n Wurzeln der Gleichung (7) als Exponenten gehören.

Versuchen wir der Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form

$$g(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho)\, x^{\varrho+\nu}$$

zu genügen, so ergeben sich, wie oben ausgeführt wurde, für die Coefficienten $g_0(\varrho)$, $g_1(\varrho)$, $\cdots$ die den Gleichungen (6) analogen Gleichungen

(13) $$a_{\nu 0}(\varrho) g_0(\varrho) + a_{\nu 1}(\varrho) g_1(\varrho) + \cdots + a_{\nu\nu}(\varrho) g_\nu(\varrho) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2 \cdots),$$

wo

$$a_{i\varkappa}(\varrho) = f_{i-\varkappa}(\varrho + \varkappa) \qquad (\varkappa = 0, 1 \cdots i),$$

also insbesondere

$$a_{\nu\nu}(\varrho) = f_0(\varrho + \nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2 \cdots)$$

zu nehmen ist; $f_0(\varrho)$ ist die determinirende Function, also in unserem Falle, wo $P_n(x) = 1$, eine ganze Function n^{ten} Grades von ϱ. Die erste der Gleichungen (13) bestimmt, wenn $g_0(\varrho)$ von Null verschieden vorausgesetzt wird, den Exponenten ϱ als Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung

(7) $$f_0(\varrho) = 0;$$

es ist aber zweckmässig, vorläufig von dieser Gleichung abzusehen, und nach dem Vorgange von Herrn Frobenius ϱ als unbestimmt zu betrachten. Denkt man sich dann $g_0(\varrho)$ als Function von ϱ gegeben und die übrigen Coefficienten $g_1(\varrho)$, $g_2(\varrho)$, $\cdots$ der Reihe $g(x, \varrho)$ durch die Gleichungen (13), in denen der Index ν die Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ durchläuft, bestimmt, so genügt die Reihe $g(x, \varrho)$ formal der nicht homogenen Differentialgleichung

(14) $$P(z) = g_0(\varrho) f_0(\varrho)\, x^\varrho.$$

Wenn sich aus den Gleichungen (13) für $\nu = 1, 2, 3 \cdots$ bestimmte endliche Werthe der $g_1(\varrho)$, $g_2(\varrho)$, $\cdots$ ergeben, und wenn die mit den so berechneten Coefficienten gebildete Reihe $g(x, \varrho)$ für Werthe von x in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ convergirt, so stellt der Ausdruck

$$z = g(x, \varrho)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (14) dar. Setzt man dann für ϱ

eine Wurzel der Gleichung (7), so geht z in eine Reihe über, die der Differentialgleichung (E) genügt und also für diejenigen Werthe von x, für die sie convergirt, ein Integral dieser Differentialgleichung liefert, welches sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhält.

Beschränken wir ϱ auf solche Werthe, deren absoluter Betrag eine bestimmte endliche Grenze nicht überschreitet, so wird, da die Wurzeln der Gleichung (7) endliche Werthe haben, eine positive ganze Zahl N stets so gefunden werden können, dass für die in Betracht kommenden Werthe von ϱ

$$a_{\nu\nu}(\varrho) = f_0(\varrho + \nu) \neq 0, \qquad \nu > N.$$

Wir werden später ausführlich zeigen, dass sich durch geeignete Wahl von $g_0(\varrho)$ stets erreichen lässt, dass die Gleichungen (13) für $\nu = 1, 2, \cdots N$ solche Werthe der $g_1(\varrho), \cdots g_N(\varrho)$ ergeben, die für alle in Betracht kommenden Werthe von ϱ endlich sind; wir wollen annehmen, es sei

$$g_0(\varrho),\ g_1(\varrho),\ \cdots\ g_N(\varrho)$$

ein so bestimmtes System von Functionen. Diese Functionen sollen also die Gleichungen (13) für $\nu = 1, 2, \cdots N$ befriedigen und für alle in Betracht kommenden Werthe von ϱ endlich sein. Dann ist zunächst aus der Form

$$(15) \qquad g_\nu(\varrho) = \frac{-1}{a_{\nu\nu}(\varrho)} \{a_{\nu,\nu-1}(\varrho) g_{\nu-1}(\varrho) + \cdots + a_{\nu 0}(\varrho) g_0(\varrho)\}$$

der Gleichungen (13) ersichtlich, dass sich auch für die $g_\nu(\varrho)$, $\nu > N$, endliche und bestimmte Werthe ergeben; es soll nunmehr gezeigt werden, dass die mit den so berechneten Coefficienten $g_\nu(\varrho)$ gebildete Reihe $g(x, \varrho)$ in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ convergirt.

47. Der Frobenius'sche Convergenzbeweis.

Es sei R der Radius eines um den Punkt $x = 0$ beschriebenen Kreises, innerhalb dessen die Entwickelungen der Functionen

$$P_{n-1}(x), \quad P_{n-2}(x), \quad \cdots \quad P_0(x)$$

nach positiven ganzen Potenzen von x noch sämmtlich convergiren, und zwar sei R der Radius des grössten Kreises, für den dies noch der Fall ist. Dann ist also R der Radius des Convergenzkreises der Entwickelung

$$(16) \qquad f(x, \varrho) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\varrho) x^\lambda$$

der von dem Factor x^ϱ befreiten charakteristischen Function nach positiven ganzen Potenzen von x. Differentiiren wir diese Gleichung nach x, so erhalten wir

(17) $$\frac{\partial f(x,\varrho)}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+1) f_{\lambda+1}(\varrho) x^{\lambda},$$

und dieser Ausdruck ist, da $P_n(x) = 1$, eine ganze Function vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade von ϱ; der Radius des Convergenzkreises der Entwickelung nach Potenzen von x ist wieder gleich R.

Hat man eine gewöhnliche Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu,$$

und bedeutet $\mathfrak{r}$ eine positive Grösse, die um ein Angebbares kleiner ist als der Radius des Convergenzkreises von $\mathfrak{P}(x)$, so hat der absolute Betrag von $\mathfrak{P}(x)$ für alle Werthe von x, die der Gleichung

$$|x| = \mathfrak{r}$$

genügen, einen endlichen Werth; sei

$$|\mathfrak{P}(x)| \leqq \gamma \quad \text{für} \quad |x| = \mathfrak{r}.$$

Dann ergiebt sich aus der Darstellung von $\mathfrak{P}(x)$ durch das Cauchy-sche Integral die Gleichung

$$A_\nu = \mathfrak{r}^{-\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}(\mathfrak{r} e^{\varphi i}) e^{-\nu\varphi i} d\varphi,$$

und es ist folglich

$$|A_\nu| < \gamma \mathfrak{r}^{-\nu}.$$

Wenn also $\mathfrak{r}$ um ein Angebbares kleiner ist als R, und

$$\left|\frac{\partial f(x,\varrho)}{\partial \varrho}\right| \leqq M(\varrho) \quad \text{für} \quad |x| = \mathfrak{r},$$

so folgt hiernach aus der Gleichung (17)

$$|f_{\lambda+1}(\varrho)| < \frac{1}{\lambda+1} M(\varrho) \mathfrak{r}^{-\lambda} < M(\varrho)\mathfrak{r}^{-\lambda}.$$

Setzen wir in (15) $\nu+1$ an die Stelle von ν und nehmen auf beiden Seiten die absoluten Beträge, so ist

$$|g_{\nu+1}(\varrho)| \leqq \frac{1}{|a_{\nu+1,\nu+1}(\varrho)|} \{|a_{\nu+1,\nu}(\varrho)|\,|g_\nu(\varrho)| + \cdots + |a_{\nu+1,0}(\varrho)|\,|g_0(\varrho)|\},$$

also erhalten wir, da

$$a_{\nu+1,\varkappa}(\varrho) = f_{\nu+1-\varkappa}(\varrho+\varkappa) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \nu+1),$$

und für $\nu \geqq N$

$$f_0(\varrho+\nu+1) \neq 0$$

ist, die Ungleichungen

$$(18) \qquad |g_{\nu+1}(\varrho)| < a_{\nu+1}, \qquad \nu \geqq N,$$

wo

$$(19) \quad a_{\nu+1} = \frac{1}{|f_0(\varrho+\nu+1)|}\{M(\varrho+\nu)\,|g_\nu(\varrho)| + M(\varrho+\nu-1)\mathfrak{r}^{-1}\,|g_{\nu-1}(\varrho)| + \cdots + M(\varrho)\mathfrak{r}^{-\nu}\,|g_0(\varrho)|\}$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung (19) liefert die Recursionsformel

$$a_{\nu+1} = \frac{|g_\nu(\varrho)|\,M(\varrho+\nu)}{|f_0(\varrho+\nu+1)|} + \frac{a_\nu\,|f_0(\varrho+\nu)|}{\mathfrak{r}\,|f_0(\varrho+\nu+1)|},$$

und da nach (18)

$$|g_\nu(\varrho)| < a_\nu$$

ist, so ergiebt sich hieraus

$$a_{\nu+1} < a_\nu \left\{ \frac{M(\varrho+\nu)}{|f_0(\varrho+\nu+1)|} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\left|\frac{f_0(\varrho+\nu)}{f_0(\varrho+\nu+1)}\right| \right\}.$$

Setzen wir also

$$(20) \quad b_{\nu+1} = b_\nu \left\{ \frac{M(\varrho+\nu)}{|f_0(\varrho+\nu+1)|} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\left|\frac{f_0(\varrho+\nu)}{f_0(\varrho+\nu+1)}\right| \right\}, \qquad \nu > N,$$

so ist, wenn wir b_N passend wählen,

$$(21) \qquad |g_\nu(\varrho)| < a_\nu < b_\nu, \qquad \nu \geqq N.$$

Hieraus könnte schon die Convergenz der Reihe $g(x, \varrho)$ erschlossen werden, es ist aber für unsere Zwecke wichtig den Beweis so zu wenden, dass sich auch die für alle in Betracht kommenden Werthe von ϱ gleichmässige Convergenz der Reihe ergiebt. Zu diesem Ende bilden wir die Ableitung der Gleichung (4) (S. 156) nach x:

$$(22) \qquad \frac{\partial f(x, \varrho)}{\partial x} = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa'(x)\,\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1);$$

wenn dann

$$|P_\varkappa'(x)| < M_\varkappa \quad \text{für} \quad |x| = \mathfrak{r},$$

wo also, wegen

$$P_n(x) = 1, \qquad M_n = 0$$

ist, so ergiebt sich aus (22)

$$(23) \qquad M(\varrho) \leqq \psi(|\varrho|),$$

wenn wir

$$\psi(\sigma) = \sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+n-2)M_{n-1} + \cdots + M_0$$

setzen. Ferner folgt aus

$$f_0(\varrho) = \varrho^n + f_0(\varrho) - \varrho^n,$$

da der absolute Betrag einer Summe nicht kleiner ist als die Differenz der absoluten Beträge der Summanden,

$$|f_0(\varrho)| \geqq |\varrho|^n - |f_0(\varrho) - \varrho^n|.$$

Sei nun

$$|P_\varkappa(0)| < m_\varkappa, \qquad m_n = 1,$$

und werde

$$\varphi(\sigma) = \sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+n-1) + \sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+n-2)m_{n-1} + \cdots + m_0 - \sigma^n$$

gesetzt, dann ist nach Gleichung (8)

$$|f_0(\varrho) - \varrho^n| < \varphi(|\varrho|).$$

Also erhalten wir

$$(24) \qquad |f_0(\varrho+\nu+1)| > |\varrho+\nu+1|^n - \varphi(|\varrho+\nu+1|),$$

vorausgesetzt, dass die ganze positive Zahl ν so gross gewählt wird, dass

$$|\varrho+\nu+1|^n > \varphi(|\varrho+\nu+1|);$$

dies ist aber, da $\varphi(\sigma)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von σ bedeutet, stets zu erreichen. Aus den Ungleichungen (23), (24) folgt nunmehr

$$(25) \qquad \frac{M(|\varrho+\nu|)}{|f_0(\varrho+\nu+1)|} < \frac{\psi(|\varrho+\nu|)}{|\varrho+\nu+1|^n - \varphi(|\varrho+\nu+1|)},$$

für hinreichend grosse Werthe von ν. Auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist aber der Zähler eine ganze Function höheren Grades als der Nenner; lassen wir also die positive ganze Zahl ν in's Unendliche wachsen, so ist

$$\lim_\nu \frac{M(|\varrho+\nu|)}{|f_0(\varrho+\nu+1)|} = 0.$$

Hieraus folgt zunächst mit Rücksicht auf die Gleichung (20), dass

$$\lim_\nu \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = \frac{1}{\mathfrak{r}},$$

da ja offenbar

$$\lim_\nu \frac{|f_0(\varrho+\nu)|}{|f_0(\varrho+\nu+1)|} = 1$$

ist; folglich ist die Reihe

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

convergent für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $\mathfrak{r}$. Die Ungleichung (21) lehrt alsdann, dass auch die Reihe

$$x^{-\varrho} g(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^\nu$$

für $|x| < \mathfrak{r}$ convergirt, und da $\mathfrak{r}$ nur der Beschränkung unterlag, um ein Angebbares kleiner zu sein wie R, so ist hiermit erwiesen, dass die Reihe $g(x, \varrho)x^{-\varrho}$ innerhalb eines um den Punkt $x = 0$ beschriebenen Kreises, der die Gesammtheit der x Werthe einschliesst, für die die Potenzreihenentwickelungen der Functionen

$$P_{n-1}(x),\ P_{n-2}(x),\ \cdots\ P_0(x)$$

noch sämmtlich convergiren, ebenfalls convergent ist, vorausgesetzt, dass sich für die in Betracht kommenden Werthe von ϱ endlich bleibende $g_0(\varrho)$, $g_1(\varrho)$, $\cdots$ bestimmen lassen, die den Gleichungen (13) für $\nu = 1, 2, \cdots$ genügen.

48. Die gleichmässige Convergenz.

Es sollte ϱ auf solche Werthe beschränkt bleiben, die dem absoluten Betrage nach unterhalb einer bestimmten endlichen Grösse bleiben; sei

$$|\varrho| < \tau,$$

dann ist

$$|\nu + \varrho| < \tau + \nu,$$

und für hinreichend grosse Werthe von ν

$$|\varrho + \nu + 1| > \nu - \tau.$$

Die ganzen Functionen

$$\psi(\sigma), \quad \sigma^n - \varphi(\sigma)$$

haben reale positive Coefficienten, sie nehmen folglich, wenn σ eine gewisse Grenze überschreitet, gleichzeitig mit σ zu. Also folgt aus der Ungleichung (25) für hinreichend grosse Werthe von ν

$$(26) \qquad \frac{M(\varrho + \nu)}{|f_0(\varrho + \nu + 1)|} < \frac{\psi(\nu + \tau)}{(\nu - \tau)^n - \varphi(\nu - \tau)};$$

da ferner

$$|f_0(\varrho)| < |\varrho|^n + \varphi(|\varrho|),$$

also

$$|f_0(\varrho + \nu)| < (\nu + \tau)^n + \varphi(\nu + \tau)$$

ist, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (24),

$$(27) \qquad \left|\frac{f_0(\varrho + \nu)}{f_0(\varrho + \nu + 1)}\right| < \frac{(\nu + \tau)^n + \varphi(\nu + \tau)}{(\nu - \tau)^n - \varphi(\nu - \tau)},$$

für hinreichend grosse ν. Mögen die Ungleichungen (26), (27) für

$$\nu \geqq \mu \geqq N$$

gültig sein, dann ist, wenn wir

$$c_{\nu+1} = c_\nu \left\{ \frac{\psi(\nu+\tau)}{(\nu-\tau)^n - \varphi(\nu-\tau)} + \frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{(\nu+\tau)^n + \varphi(\nu+\tau)}{(\nu-\tau)^n - \varphi(\nu-\tau)} \right\}, \quad \nu \geqq \mu,$$

setzen und

$$c_\mu > b_\mu$$

wählen, zufolge der Gleichungen (20),

$$b_\nu < c_\nu, \quad \nu \geqq \mu.$$

Da offenbar

$$\lim_\nu \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = \frac{1}{\mathfrak{r}}$$

ist, so convergirt die Reihe

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} c_\nu s^\nu \quad \text{für} \quad 0 < s < \mathfrak{r};$$

wenn also δ eine beliebig vorgeschriebene kleine positive Grösse bedeutet, so kann eine positive ganze Zahl k' stets so gefunden werden, dass

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu s^\nu < \delta, \text{ wenn } k > k'.$$

Also haben wir, da

$$k > \mu \geqq N,$$

und für $|x| < s < \mathfrak{r}$,

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^\nu \right| < \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} b_\nu x^\nu \right| < \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu s^\nu$$

ist, die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^\nu \right| < \delta, \qquad k > k'.$$

Die Reihe

$$x^{-\varrho} g(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^\nu$$

convergirt also gleichmässig für $|x| < R$, $|\varrho| < \tau$.

Nun sind die $g_\nu(\varrho)$, abgesehen von einem eventuell allen gemeinsamen Factor, rationale Functionen von ϱ (vergl. den in der folgenden Nummer berechneten Ausdruck von $g_\nu(\varrho)$). Eine aus rationalen Functionen gebildete Reihe, die innerhalb eines continuirlichen Bereiches gleichmässig convergirt, stellt nach einem bekannten Satze von Herrn Weierstrass innerhalb dieses Bereiches einen eindeutigen Zweig einer monogenen Function dar, sie besitzt folglich an jeder Stelle dieses

Bereiches Ableitungen jeder beliebigen Ordnung, und diese werden erhalten, indem man die gegebene Reihe gliedweise differentiirt; die so entstehenden Reihen convergiren dann wieder gleichmässig. Wir können folglich die Ableitungen der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^\nu$$

nach ϱ bilden, indem wir gliedweise nach ϱ differentiiren. Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^\varkappa g(x, \varrho)}{\partial \varrho^\varkappa} &= g^{(\varkappa)}(x, \varrho) \\ \frac{d^\varkappa g_\nu(\varrho)}{d\varrho^\varkappa} &= g_\nu^{(\varkappa)}(\varrho) \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots),$$

so ist demgemäss

$$(28) \qquad \frac{\partial^\varkappa}{\partial \varrho^\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^{(\varkappa)}(\varrho) x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots),$$

und diese Potenzreihen sind auch innerhalb des um $x = 0$ mit dem Radius R beschriebenen Kreises convergent. Für $g^{(\varkappa)}(x, \varrho)$ ergiebt sich folglich

$$(29) \qquad \begin{aligned} g^{(\varkappa)}(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ g_\nu^{(\varkappa)}(\varrho) + \varkappa_1 g_\nu^{(\varkappa-1)}(\varrho) \log x \\ + \cdots + g_\nu(\varrho) \log^\varkappa x \} x^{\varrho+\nu} \end{aligned}$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots).$$

Unter den Bedingungen, die bei dem obigen Convergenzbeweise festgehalten werden mussten, stellt die Reihe

$$z = g(x, \varrho)$$

für Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als R, eine Lösung der Differentialgleichung (14), der sie formal Genüge leistet, dar, es besteht also die Identität

$$P(g(x, \varrho)) = g_0(\varrho) f_0(\varrho) x^\varrho;$$

differentiiren wir dieselbe $\varkappa$-mal nach ϱ, so erkennen wir, dass der Ausdruck (29), für $|x| < R$, eine Lösung der Differentialgleichung

$$(30) \qquad P(z) = \frac{\partial^\varkappa}{\partial \varrho^\varkappa} g_0(\varrho) f_0(\varrho) x^\varrho$$

darstellt. — Ehe wir aus diesen Ergebnissen weitere Consequenzen ziehen, wollen wir in die Erörterung der noch zu beantwortenden Frage eintreten, unter welchen Bedingungen es möglich ist, die Gleichungen (13) für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ durch stets endlich bleibende $g_0(\varrho), g_1(\varrho), \cdots$ zu befriedigen.

49. Untersuchung der Recursionsformel. Wurzelgruppen der determinirenden Fundamentalgleichung und zugehörige Integrale.

Es werde

$$\begin{vmatrix} a_{10}(\varrho) & a_{11}(\varrho) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{20}(\varrho) & a_{21}(\varrho) & a_{22}(\varrho) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu-1,0}(\varrho) & a_{\nu-1,1}(\varrho) & a_{\nu-1,2}(\varrho) & \cdots & \cdots & a_{\nu-1,\nu-1}(\varrho) \\ a_{\nu 0}(\varrho) & a_{\nu 1}(\varrho) & a_{\nu 2}(\varrho) & \cdots & \cdots & a_{\nu,\nu-1}(\varrho) \end{vmatrix} = h_\nu(\varrho)$$

gesetzt, dann ergiebt sich aus dem Gleichungssystem (13), wenn darin für ν die Werthe $1, 2, \cdots \nu$ genommen werden,

$$g_\nu(\varrho) = \frac{(-1)^\nu g_0(\varrho)\, h_\nu(\varrho)}{a_{11}(\varrho)\, a_{22}(\varrho) \cdots a_{\nu\nu}(\varrho)}. \tag{31}$$

Bedeutet also N diejenige positive ganze Zahl, für welche

$$a_{\nu\nu}(\varrho) = f_0(\varrho + \nu)$$

für keinen der in Betracht kommenden Werthe von ϱ verschwinden kann, wenn $\nu > N$, so genügt es

$$g_0(\varrho) = a_{11}(\varrho)\, a_{22}(\varrho) \cdots a_{NN}(\varrho) \cdot C(\varrho) \tag{32}$$

zu nehmen, wo $C(\varrho)$ eine willkürliche stets endlich bleibende Function von ϱ bedeutet, um ein Unendlichwerden sämmtlicher $g_\nu(\varrho)$ zu verhüten. Da es uns wesentlich darauf ankommt, die Berechnung der $g(\varrho)$ für solche Werthe von ϱ vorzunehmen, die Wurzeln der Gleichung (7) sind, so wollen wir uns um jede dieser Wurzeln eine gewisse Umgebung abgegrenzt denken, und beschränken die Variabilität von ϱ auf diese Umgebungen. Wählen wir die letzteren hinreichend klein, so wird

$$f_0(\varrho + \nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

nur für Wurzeln der Gleichung (7) verschwinden können. Befindet sich also ϱ in der Umgebung einer bestimmten Wurzel r dieser Gleichung, so kann ein Verschwinden der $a_{\nu\nu}(\varrho)$ dann und nur dann erfolgen, wenn die Gleichung (7) Wurzeln besitzt, die um positive ganze Zahlen grösser sind als r. Wir denken uns nunmehr die Wurzeln von (7) in Gruppen geordnet, indem wir diejenigen Wurzeln in eine Gruppe zusammenfassen, die sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden; sei $r_0, r_1, \cdots r_\mu$ eine solche Wurzelgruppe, und

$$r_\varkappa = r_\mu + q_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \mu),$$

wo also die $q_\varkappa$ ganze Zahlen bedeuten. Die Reihenfolge dieser Wurzeln sei ferner so gewählt, dass

$$0 = q_\mu < q_{\mu-1} < \cdots < q_0,$$

und es möge $\lambda_\varkappa$ den Grad der Vielfachheit der Wurzel $r_\varkappa$ bedeuten, so dass also

$$f_0(r_\varkappa) = 0, \quad f_0'(r_\varkappa) = 0, \quad \cdots \quad f_0^{(\lambda_\varkappa - 1)}(r_\varkappa) = 0,$$

dagegen

$$f_0^{(\lambda_\varkappa)}(r_\varkappa) \neq 0.$$

Bestimmen wir nun das Maximum der Differenz zweier Wurzeln irgend einer dieser Gruppen und nehmen die Zahl N gleich diesem Maximum, so ist unter Festhaltung der angegebenen Beschränkung für die Variabilität von ϱ

$$a_{\nu\nu}(\varrho) \neq 0, \text{ wenn } \nu > N;$$

wenn also für $g_0(\varrho)$ der durch die Gleichung (32) dargestellte Ausdruck gesetzt wird, so ergeben die Formeln (31) stets endlich bleibende Werthe der $g_\nu(\varrho)$. Mit Hülfe derselben bilden wir nun die Reihe $g(x, \varrho)$ und deren successive Ableitungen nach ϱ, dann stellen uns dieselben, wie oben auseinandergesetzt wurde, Lösungen der Differentialgleichungen (30) dar. Betrachten wir die Wurzelgruppe $r_0, r_1, r_2, \cdots r_\mu$, so enthält $g_0(\varrho)$ den Factor

$$(\varrho - r_\varkappa)^{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}}, \tag{33}$$

$f_0(\varrho)$ den Factor

$$(\varrho - r_\varkappa)^{\lambda_\varkappa},$$

also verschwindet

$$\frac{d^i}{d\varrho^i}\left\{f_0(\varrho) g_0(\varrho) x^\varrho\right\},$$

für $i = 0, 1, \cdots (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\varkappa - 1)$. Die Ausdrücke

$$g^{(i)}(x, r_\varkappa) \qquad [i = 0, 1, \cdots (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\varkappa - 1)]$$

liefern folglich Lösungen der Differentialgleichung (E), und zwar Lösungen, die sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten und die Form der Elemente eines zu diesem Punkte gehörigen canonischen Fundamentalsystems haben. Das von $\log x$ freie Glied in $g^{(i)}(x, r_\varkappa)$ lautet nach Gleichung (29)

$$x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^{(i)}(r_\varkappa) x^\nu,$$

die mit $x^{r_\varkappa}$ multiplicirte gewöhnliche Potenzreihe ist also, wenn

$$i \geqq \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}$$

genommen wird, im Punkte $x = 0$ von Null verschieden, denn $g_0(\varrho)$ enthält nur den Factor (33), es ist also für diese Werthe von i,

$$g_0^{(i)}(r_\varkappa) \neq 0.$$

Wir erhalten demnach für

$$i - (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}) = 0, 1, \cdots (\lambda_\varkappa - 1),$$

Integrale, die zum Exponenten $r_\varkappa$ gehören, und zwar ist die Anzahl derselben gleich dem Grade $\lambda_\varkappa$ der Vielfachheit der Wurzel $r_\varkappa$; wir bezeichnen diese Integrale der Reihe nach durch $v_{\varkappa 0}, v_{\varkappa 1}, \cdots v_{\varkappa, \lambda_\varkappa - 1}$, so dass also

$$v_{\varkappa\alpha} = g^{(i)}(x, r_\varkappa), \qquad i = (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}) + \alpha.$$

Sei $\tau_\varkappa$ die höchste Potenz von $\log x$, die in dem ersten dieser $\lambda_\varkappa$ Integrale, $v_{\varkappa 0}$, wirklich auftritt, d. h. die höchste Potenz von $\log x$, deren Factor

$$x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} i_{\tau_\varkappa} g_\nu^{(i-\tau_\varkappa)}(r_\varkappa) x^\nu, \qquad i = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1},$$

nicht identisch verschwindet, dann ist in den folgenden Integralen:

$$v_{\varkappa l} = g^{(i+l)}(x, r_\varkappa), \qquad i = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}, \quad (l = 1, 2, \cdots (\lambda_\varkappa - 1)),$$

die Reihe

$$x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} (i+l)_{\tau_\varkappa + l} \, g_\nu^{(i-\tau_\varkappa)}(r_\varkappa) x^\nu$$

mit der $(\tau_\varkappa + l)^{\text{ten}}$ Potenz von $\log x$ multiplicirt, es sind folglich in diesen $\lambda_\varkappa$ zur Wurzel $r_\varkappa$ gehörigen Integralen die höchsten in ihnen vorkommenden Potenzen von $\log x$ von einander verschieden. Da aber eine ganze Function von $\log x$, deren Coefficienten in der Umgebung von x eindeutige Functionen sind, nach einer oben (Nr. 42, S. 149) gemachten Bemerkung nur dann identisch verschwinden kann, wenn die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log x$ gleich Null sind, so folgt hieraus, dass zwischen den $\lambda_\varkappa$ Integralen $v_{\varkappa 0}, v_{\varkappa 1}, \cdots v_{\varkappa, \lambda_\varkappa - 1}$ keine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten stattfinden kann, d. h. diese $\lambda_\varkappa$ zur Wurzel $r_\varkappa$ gehörigen Integrale sind linear unabhängig von einander.

50. Nachweis, dass die in Nr. 43 gefundene Gestalt der Coefficienten auch hinreichend dafür ist, dass sich die Integrale bestimmt verhalten.

Wir erhalten auf diese Weise für $\varkappa = 0, 1, \cdots \mu$ die Integrale

(34) $$v_{\alpha\beta} \qquad [\alpha = 0, 1, \cdots \mu;\ \beta = 0, 1, \cdots (\lambda_\alpha - 1)],$$

entsprechend der, $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$ Wurzeln der Gleichung (7) repräsentirenden Wurzelgruppe $r_0, r_1, \cdots r_\mu$. Unter den zu der Wurzel r_0 (deren realer Theil von dem keiner andern Wurzel um eine ganze Zahl übertroffen wird, und die wir darum kurz die grösste Wurzel der Gruppe nennen wollen) gehörigen Integralen befindet sich eines, nämlich v_{00}, welches von Logarithmen frei, d. h. in der Form

$$v_{00} = x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_0) x^\nu, \qquad g_0(r_0) \neq 0$$

darstellbar ist, die übrigen Integrale $v_{\alpha\beta}$ enthalten im Allgemeinen Logarithmen. Wenn die Wurzel r_α eine mehrfache, d. h. $\lambda_\alpha > 1$ ist, so enthalten die Integrale $v_{\alpha 1}, \cdots v_{\alpha, \lambda_\alpha - 1}$ jedenfalls Logarithmen, und zwar ist die höchste in $v_{\alpha, \lambda_\alpha - 1}$ auftretende Potenz des Logarithmus mindestens die $(\lambda_\alpha - 1)^{\text{te}}$. Sind dagegen die sämmtlichen Wurzeln $r_0, r_1, \cdots r_\mu$ der Gruppe von einander verschieden, so erhalten wir zu jeder Wurzel nur ein Integral, welches zu derselben als Exponenten gehört, und in diesem Integrale ist der vom Logarithmus freie Theil von Null verschieden und gehört zu demselben Exponenten wie das Integral selbst.

Wir wollen nun nachweisen, dass die sämmtlichen Integrale (34) linear unabhängig sind. Zu dem Ende bemerken wir zuvörderst, dass eine beliebige lineare Combination der $v_{\varkappa 0}, v_{\varkappa 1}, \cdots v_{\varkappa, \lambda_\varkappa - 1}$ auch stets genau zum Exponenten $r_\varkappa$ gehören muss. In der That kann eine solche Combination

(35) $$c_0 v_{\varkappa 0} + c_1 v_{\varkappa 1} + \cdots + c_{\lambda_\varkappa - 1} v_{\varkappa, \lambda_\varkappa - 1}$$

offenbar nur zu einem Exponenten gehören, der sich von $r_\varkappa$ um eine ganze Zahl unterscheidet, also muss dieser Exponent, da er zufolge des Satzes der Nr. 45 (S. 159—161) eine Wurzel der Gleichung (7) sein muss, mit einer der Zahlen $r_0, r_1, \cdots r_\mu$ übereinstimmen. Da sein realer Theil aber keinesfalls kleiner sein kann als der reale Theil von $r_\varkappa$, so ist nur die Möglichkeit, dass er eine der grösseren Wurzeln $r_0, r_1, \cdots r_{\varkappa - 1}$ sein könnte, zu untersuchen. Sollte diese

Möglichkeit eintreten, so müsste in dem Ausdrucke (35) nach Absonderung des Factors $x^{r_\varkappa}$ das von x freie Glied verschwinden. Da $g_0(\varrho)$ den Factor (33) enthält, so ist

$$g_0^{(i)}(r_\varkappa)=0, \qquad i<\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{\varkappa-1};$$

setzen wir für einen Augenblick

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{\varkappa-1}=l,$$

so lautet das mit $x^{r_\varkappa}$ multiplicirte Glied von $v_{\varkappa\beta}$:

$$g_0^{(l+\beta)}(r_\varkappa)+(l+\beta)g_0^{(l+\beta-1)}(r_\varkappa)\log x+\cdots+(l+\beta)_\beta g_0^{(l)}(r_\varkappa)\log^\beta x,$$

also der Factor von $x^{r_\varkappa}$ in dem Ausdrucke (35):

$$\sum_{\beta=0}^{\lambda_\varkappa-1} c_\beta(g_0^{(l+\beta)}(r_\varkappa)+\cdots+(l+\beta)_\beta g_0^{(l)}(r_\varkappa)\log^\beta x).$$

Sollte dieser verschwinden, so müssten die $c_0, c_1, \cdots c_{\lambda_\varkappa-1}$ den Gleichungen

$$\begin{aligned}
c_0 g_0^{(l)}(r_\varkappa)+c_1 g_0^{(l+1)}(r_\varkappa)+\cdots+c_{\lambda_\varkappa-1}g_0^{(l+\lambda_\varkappa-1)}(r_\varkappa)&=0,\\
c_1 g_0^{(l)}(r_\varkappa)\quad+\cdots+c_{\lambda_\varkappa-1}g_0^{(l+\lambda_\varkappa-2)}(r_\varkappa)&=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
c_{\lambda_\varkappa-1}g_0^{(l)}(r_\varkappa)\qquad&=0
\end{aligned}$$

genügen; die Determinante dieses Gleichungssystems ist aber

$$(g_0^{(l)}(r_\varkappa))^{\lambda_\varkappa-1}\neq 0,$$

also müssten die c_β sämmtlich gleich Null sein.

Beiläufig bemerken wir, dass in dem mit $x^{r_\varkappa}$ multiplicirten Gliede von $v_{\varkappa\beta}$ die Coefficienten der β ersten Potenzen von $\log x$ von Null verschieden, dagegen die der höheren Potenzen von $\log x$ sämmtlich gleich Null sind, d. h. in $v_{\varkappa\beta}$ gehört der Factor von $\log^\beta x$ noch zum Exponenten $r_\varkappa$, die Factoren der höheren Potenzen von $\log x$, wenn solche überhaupt auftreten, gehören zu Exponenten, die in ihrem realen Theile grösser sind als $r_\varkappa$. Addiren wir nunmehr zu dem Ausdrucke (35) eine lineare homogene Function der

$$v_{\alpha\beta} \qquad [\alpha<\varkappa;\ \beta=0,1,\cdots(\lambda_\alpha-1)],$$

hinzu, so erhalten wir offenbar wieder ein Integral, welches zum Exponenten $r_\varkappa$ gehört; bestünde also zwischen den sämmtlichen Integralen (34) eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten, und wäre $r_\varkappa$ der in seinem realen Theile grösste Exponent zu dem ein in dieser

Beziehung wirklich auftretendes Integral gehört, so würde eine lineare Combination der

$$v_{\varkappa 0},\ v_{\varkappa 1},\ \cdots\ v_{\varkappa, \lambda_\varkappa - 1}$$

einer linearen Combination der

$$v_{\alpha\beta}, \qquad [\alpha < \varkappa;\ \beta = 0, 1, \cdots (\lambda_\alpha - 1)]$$

gleich sein, also zu einer der Grössen $r_0, r_1, \cdots r_{\varkappa-1}$ als Exponenten gehören müssen, was nicht möglich ist. Die $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$ Integrale (34) sind also linear unabhängig von einander.

Denken wir uns nun die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (7) auf die oben angegebene Weise in Gruppen vertheilt und zu jeder dieser Gruppen die zugehörigen Integrale bestimmt, so erhalten wir ein System von n Integralen; die zu den Wurzeln einer und derselben Gruppe gehörigen dieser Integrale sind, wie oben gezeigt wurde, linear unabhängig; offenbar kann aber zwischen Functionen, die zu Exponenten gehören, die sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden, keine lineare homogene Beziehung mit constanten Coefficienten bestehen. Es wird genügen den Beweis dieser Behauptung für den Fall anzudeuten, wo die betreffenden Functionen die Gestalt

$$x^r \varphi(x),\ x^s \psi(x),\ \cdots\ x^t \chi(x)$$

haben, wenn $\varphi(x), \psi(x), \cdots \chi(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig und die Exponenten $r, s, \cdots t$ so beschaffen sind, dass ihre Differenzen nicht durch ganze Zahlen gegeben werden. Bestünde nämlich eine Beziehung

$$c_1 x^r \varphi(x) + c_2 x^s \psi(x) + \cdots + c_h x^t \chi(x) = 0,$$

mit constanten $c_1, c_2, \cdots c_h$, so bliebe dieselbe auch bei beliebig oft wiederholten Umläufen um den Punkt $x = 0$ erhalten, d. h. es wäre auch

$$c_1 e^{2\varkappa\pi i r} x^r \varphi(x) + c_2 e^{2\varkappa\pi i s} x^s \psi(x) + \cdots + c_h e^{2\varkappa\pi i t} x^t \chi(x) = 0,$$

$\varkappa$ irgend eine ganze Zahl. Hieraus folgt aber, dass die $c_1, c_2, \cdots c_h$ sämmtlich verschwinden müssen, wenn nicht (vergl. Nr. 31, S. 100) irgend zwei der Grössen

$$e^{2\pi i r},\ e^{2\pi i s},\ \cdots\ e^{2\pi i t}$$

einander gleich werden, und dies ist ausgeschlossen, weil die $r, s, \cdots t$ sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden.

Die n Integrale, die den verschiedenen Wurzelgruppen der Gleichung (7) entsprechen, sind also linear unabhängig von einander, d. h. sie bilden ein Fundamentalsystem. Da sie sich im Punkte

$x = 0$ bestimmt verhalten, so ist damit bewiesen, dass sich die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung, die auf die Normalform (E) gebracht, zum Coefficienten der höchsten Ableitung x^n hat, d. h. für welche

$$P_n(x) = 1$$

ist, im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, d. h. es ist in der That, wie am Schlusse des ersten Kapitels (Nr. 43, S. 153) ausgesprochen wurde, die Form (D) der Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) nothwendig und hinreichend dafür, dass der singuläre Punkt $x = 0$ ein Punkt der Bestimmtheit für die Integrale dieser Differentialgleichung sei.

Drittes Kapitel.

51. Zusammenhang zwischen determinirender Fundamentalgleichung und Fundamentalgleichung. Canonisches Fundamentalsystem im Falle der Bestimmtheit.

Das im vorhergehenden Kapitel entwickelte Beweisverfahren hat uns aber auch noch eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Differentialgleichungen mit in $x = 0$ durchaus sich bestimmt verhaltenden Integralen enthüllt, wir wollen nun dazu übergehen, diese in übersichtlicher Form zusammenzustellen. Wir fanden entsprechend jeder Wurzel r der determinirenden Fundamentalgleichung (7) Integrale, die zu dieser Wurzel als Exponenten gehören und zwar genau λ linear unabhängige solcher Integrale, wenn r eine λ-fache Wurzel ist. Bedeutete

(R) $$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\mu$$

eine Wurzelgruppe der Gleichung (7), so gehörte zur grössten Wurzel r_0 dieser Gruppe das von Logarithmen freie Integral

$$v_{00} = x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_0) x^\nu = g(x, r_0).$$

Sei nun v ein beliebiges in der Form

$$v = x^r(\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\log x + \cdots + \varphi_m(x)\log^m x)$$

darstellbares Integral, wo $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_m(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen bedeuten, und möge v zu einem Exponenten $r_\varkappa$ gehören, der unter den Zahlen (R) enthalten ist. Dann ist v eine homogene lineare Function der n Elemente des durch unser Verfahren erlangten Fundamentalsystems, und da zwischen Functionen, die zu Exponenten gehören, welche nicht um ganze Zahlen von einander verschieden sind, keine lineare Beziehung stattfinden kann und der Exponent, zu dem eine lineare Combination der $v_{\alpha\beta}$ gehört, mit dem in seinem realen Theile kleinsten derjenigen Exponenten übereinstimmt, zu welchem eines dieser $v_{\alpha\beta}$ gehört, so muss v als lineare homogene Function der

$$v_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots \varkappa;\ \beta = 0, 1, \cdots \lambda_\alpha - 1)$$

darstellbar sein. Eine lineare Combination dieser

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\varkappa$$

Integrale mit willkürlichen constanten Coefficienten liefert folglich das allgemeinste zur Wurzel $r_\varkappa$ gehörige Integral der Differentialgleichung; dieses enthält also genau

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\varkappa$$

willkürliche Constanten. Nun war in $g_0(\varrho)$ noch der eine willkürlich zu wählende Function von ϱ repräsentirende Factor $C(\varrho)$ enthalten; dieser kann z. B. als ganze Function von ϱ so gewählt werden, dass dieselbe mit ihren $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\varkappa - 1$ ersten Ableitungen nach ϱ

$$C(\varrho),\ C'(\varrho),\ \cdots\ C^{(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_\varkappa-1)}(\varrho),$$

für $\varrho = r_\varkappa$ die willkürlich vorgeschriebenen constanten Werthe

$$c_0,\ c_1,\ \cdots\ c_{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_\varkappa-1}$$

annimmt. Dann hängt das zu $r_\varkappa$ gehörige Integral

$$v_{\varkappa,\lambda_\varkappa-1} = g^{(\iota)}(x, r_\varkappa), \qquad \iota = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_\varkappa-1,$$

von diesen $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\varkappa$ willkürlichen Constanten ab, es ist folglich das allgemeinste zu $r_\varkappa$ gehörige Integral der Differentialgleichung. Denken wir uns $C(\varrho)$ in bestimmter Weise gewählt, und die zur Wurzelgruppe (R) gehörigen Integrale $v_{\alpha\beta}$ gebildet, dann wird sich das so gebildete v_{00} von dem zu einem willkürlichen $C(\varrho)$ gehörigen v_{00} nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Ein Integral der Differentialgleichung (E) ist also bis auf einen constanten Factor vollkommen bestimmt durch die Forderungen, dass es zu einer Wurzel der Gleichung (7) gehören soll, deren realer Theil von dem keiner anderen Wurzel dieser Gleichung um eine ganze Zahl übertroffen wird, und dass seine Entwickelung in der Umgebung von $x = 0$ keine Logarithmen enthält.

Wenn die unabhängige Variable x den einfachen Umlauf U um den Punkt $x = 0$ vollzieht, so verwandelt sich das Integral $v_{\iota\varkappa}$ in $\Theta v_{\iota\varkappa}$ und aus der Form von $v_{\iota\varkappa}$ ist sofort zu übersehen, dass $\Theta v_{\iota\varkappa}$ zum selben Exponenten r_ι gehören und dieselbe höchste Potenz von $\log x$ enthalten wird, wie $v_{\iota\varkappa}$ selbst. Folglich lässt sich $\Theta v_{\iota\varkappa}$ als homogene lineare Function der

$$v_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots \iota;\ \beta = 0, 1, \cdots \lambda_\alpha - 1)$$

darstellen. Beachten wir aber ferner, dass in $\Theta v_{\iota\varkappa}$, ebenso wie in $v_{\iota\varkappa}$

12*

selbst, die Coefficienten der auf die $\varkappa^{\text{te}}$ folgenden Potenzen von $\log x$ zu Exponenten gehören, deren realer Theil grösser ist als r_ι, dass dagegen in den

$$r_{\iota, \varkappa+1}, \ldots r_{\iota, \lambda_\iota - 1}$$

auch noch der Coefficient von $\log^{\varkappa+1} x$ zum Exponenten r_ι gehört, so erkennen wir, dass in der Darstellung von $\Theta r_{\iota\varkappa}$ nur diejenigen $v_{\iota\beta}$ wirklich auftreten können, deren zweiter Index β nicht grösser ist als $\varkappa$. Nun ist $r_{\iota\varkappa}$ abgesehen von dem Factor x^{r_ι} eine ganze rationale Function von $\log x$ mit in der Umgebung von x regulären Coefficienten und

$$\Theta x^{r_\iota} = e^{2\pi i r_\iota} x^{r_\iota},$$

folglich hat der Ausdruck von $\Theta v_{\iota\varkappa}$ die Form

$$\Theta v_{\iota\varkappa} = \sum_{\alpha=0}^{\iota-1} \sum_{\beta=0}^{\lambda_\alpha - 1} c_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=0}^{\varkappa-1} c_{\iota\beta} v_{\iota\beta} + e^{2\pi i r_\iota} v_{\iota\varkappa},$$

wo die c Constanten bedeuten. Bilden wir also die Substitution

$$A = (a_{\iota\varkappa}), \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

welche die zu den verschiedenen Wurzelgruppen der Gleichung (7) gehörigen n linear unabhängigen Integrale bei dem Umlaufe U erfahren, und beachten, dass für die Wurzeln einer Gruppe (R)

$$e^{2\pi i r_0} = e^{2\pi i r_1} = \cdots = e^{2\pi i r_\mu}$$

ist, so erkennen wir, dass

$$a_{\iota\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad \varkappa > \iota \qquad (\iota = 1, 2, \cdots n),$$

und, dass $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$ der $a_{\varkappa\varkappa}$ den Werth

$$\omega_0 = e^{2\pi i r_0}$$

haben. Die zum Punkte $x = 0$ gehörige Fundamentalgleichung

$$|a_{\varkappa\iota} - \delta_{\varkappa\iota}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, \iota = 1, 2, \cdots n)$$

besitzt also die genau $(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu)$-fache Wurzel ω_0 und wir haben somit den Satz:

Die mit $2\pi i$ multiplicirten Wurzeln der Gleichung (7) sind die Logarithmen der Wurzeln der zum Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (E) und umgekehrt genügt das $\frac{1}{2\pi i}$ fache des Logarithmus jeder Wurzel der Fundamentalgleichung bis auf additive ganze Zahlen der Gleichung (7). Einer Wurzelgruppe (R) der Gleichung (7), die l Wurzeln dieser Gleichung repräsentirt, entspricht eine l-fache Wurzel der Fundamentalgleichung und umgekehrt entspricht einer solchen l-fachen Wurzel eine Gruppe von l Wurzeln der Gleichung (7), die theils einander gleich, theils um ganze Zahlen von einander verschieden sind.

Aus der Form der für die Integrale unseres aus den verschiedenen $v_{\alpha\beta}$ zusammengesetzten Fundamentalsystems gefundenen Substitution (A), und aus der Form dieser Integrale selbst ist ersichtlich, dass dieses Fundamentalsystem ein zum Punkte $x = 0$ gehöriges canonisches Fundamentalsystem ist. Die der Wurzelgruppe (R) entsprechenden Integrale $v_{\alpha\beta}$ bilden eine zu der $(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu)$-fachen Wurzel ω_0 der Fundamentalgleichung gehörige Integralgruppe, wir haben also in dem Falle, wo sich alle Integrale der Differentialgleichung im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, ein Mittel gefunden, welches uns gestattet die Elemente eines zu $x = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, d. h. die Exponenten, zu denen dieselben gehören, die Coefficienten ihrer in der Umgebung von $x = 0$ gültigen Reihenentwickelungen und endlich die Coefficienten der Substitution, welche dieses Fundamentalsystem erfährt, zu berechnen. Und zwar bedarf es zu dieser Rechnung nur der Kenntniss der Entwickelung der charakteristischen Function $f(x, \varrho)$, und die Coefficienten dieser Entwickelung setzen sich aus den Coefficienten der Entwickelungen der

$$P_{n-1}(x),\ P_{n-2}(x),\ \cdots,\ P_0(x),$$

d. h. aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern algebraisch zusammen. Insbesondere sind die Exponenten, zu denen die Elemente des canonischen Fundamentalsystems gehören, Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades (7), deren Coefficienten sich als rationale und ganzzahlige Functionen jener Parameter bestimmen, und die Coefficienten der in der Umgebung von $x = 0$ gültigen Entwickelungen der Integrale sind wieder aus diesen Wurzeln und den Parametern rational und ganzzahlig bestimmbar, denn es bedarf ja zu ihrer Auffindung nur der Auflösung des linearen Gleichungssystems (13).

Es erscheint nun noch wünschenswerth, auch die in der Theorie der Fundamentalgleichung kennen gelehrte Eintheilung einer zu gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung gehörigen Integralgruppe in die Hamburger'schen Untergruppen mit den jetzt entwickelten Hülfsmitteln auszuführen. Zu diesem Ende wollen wir etwas genauer auf die Betrachtung der zur Wurzelgruppe (R) gehörigen Integrale $v_{\alpha\beta}$ eingehen. Wenn wir eine lineare Function der

$$v_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots \varkappa;\ \beta = 0, 1, \cdots \lambda_\varkappa - 1)$$

mit willkürlichen constanten Coefficienten bildeten, so erhielten wir das allgemeinste zur Wurzel $r_\varkappa$ gehörige Integral. Dasselbe war eine ganze Function des $\log x$ vom $(\tau_\varkappa + \lambda_\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Grade, enthielt also den Logarithmus mindestens zur $(\lambda_\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Potenz. Es kann sich jedoch ereignen, dass bei besonderer Wahl der constanten Coefficienten ein zum Exponenten $r_\varkappa$ gehöriges Integral gefunden wird, welches den Logarithmus zu einer noch niedrigeren als der $\tau_\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz enthält, d. h. dass auch $v_{\varkappa 0}$ nicht das einfachste zu $r_\varkappa$ gehörige Integral darstellt. Für die Frage der Zerfällung der Integralgruppe $v_{\alpha\beta}$ in Untergruppen ist vornehmlich der Fall zu untersuchen, wo ein zum Exponenten $r_\varkappa$ gehöriges Integral existirt, welches von Logarithmen frei ist, denn alsdann beginnt eine Untergruppe mit eben diesem Integral. Es handelt sich also darum, zu entscheiden, wann eine Reihe

$$g(x, r_\varkappa) = x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\varkappa) x^\nu$$

existirt, die zum Exponenten $r_\varkappa$ gehört, d. h. wann das Gleichungssystem (13) für $\varrho = r_\varkappa$ eine Auflösung durch endliche Werthe der $g_\nu(r_\varkappa)$ gestattet, bei der insbesondere

$$g_0(r_\varkappa) \neq 0;$$

ist nämlich eine solche Auflösung vorhanden, so convergirt die mit den so bestimmten $g_\nu(r_\varkappa)$ gebildete Reihe für $|x| < R$ und stellt also in der Umgebung von $x = 0$ ein zum Exponenten $r_\varkappa$ gehöriges und von Logarithmen freies Integral dar.

52. Ein Satz aus der Theorie der Systeme linearer Gleichungen.

Wir betrachten allgemein das Gleichungssystem

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} a_{i\varkappa} g_\varkappa = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu),$$

welches wir kurz durch

$$(a_{i\varkappa})_g$$

bezeichnen wollen und fragen nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass dieses Gleichungssystem durch Werthe $g_0, g_1, \cdots g_\nu$ befriedigt werden könne, wo

$$g_l \neq 0.$$

Sei $\nu - \tau$ der Rang des gegebenen Gleichungssystems, so besitzt dasselbe $(\tau + 1)$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$g_0^{(\lambda)}, g_1^{(\lambda)}, \cdots g_\nu^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \tau + 1),$$

durch welche jedes andere Lösungssystem homogen und linear darstellbar ist (vergl. den Anfang der Nr. 34, S. 113). Sei wenigstens eine der Grössen $g_l^{(\lambda)}$ von Null verschieden, etwa

$$g_l^{(\mu)} \neq 0,$$

setzen wir dann

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_p^{(\mu)} &= g_p^{(\mu)}, \\ \bar{g}_p^{(\lambda)} &= g_p^{(\lambda)} g_l^{(\mu)} - g_p^{(\mu)} g_l^{(\lambda)}, \quad \lambda \neq \mu \end{aligned}\right\} \quad (p = 0, 1, \cdots \nu),$$

so befriedigen die $(\tau + 1)$ Systeme

$$\bar{g}_0^{(\lambda)}, \bar{g}_1^{(\lambda)}, \cdots \bar{g}_\nu^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \tau + 1)$$

das gegebene Gleichungssystem und sind auch linear unabhängig von einander. Es ist aber

$$\bar{g}_l^{(\lambda)} = 0, \quad \text{wenn} \quad \lambda \neq \mu.$$

Bezeichnen wir also durch (l) das quadratische System, welches aus $(a_{i\varkappa})$ entsteht, wenn man in diesem letzteren Systeme die Reihe a_{il}, $(i = 1, 2, \cdots \nu)$, weglässt und durch $(l)_u$ ein Gleichungssystem für die ν Unbekannten $u_1, u_2, \cdots u_\nu$, dessen Coefficientensystem durch (l) dargestellt wird, so liefern die Systeme

$$\bar{g}_p^{(\lambda)} \qquad (\lambda \neq \mu, \quad p \neq l),$$

τ Lösungssysteme der Gleichungen $(l)_u$, und man übersieht auch sofort, dass diese τ Systeme linear unabhängig sind. Es ist aber auch jedes beliebige Lösungssystem

$$\bar{g}_p \qquad (p \neq l)$$

der Gleichungen $(l)_u$ durch diese τ Systeme linear und homogen darstellbar. Denn setzen wir

$$\bar{g}_l = 0,$$

so haben wir in

$$\bar{g}_0, \bar{g}_1, \cdots \bar{g}_\nu$$

ein Lösungssystem des gegebenen Gleichungssystems $(a_{i\varkappa})_g$, also lassen sich Constanten $c_1, c_2, \cdots c_{\tau+1}$ so bestimmen, dass

$$\bar{g}_p = \sum_{\alpha=1}^{\tau+1} c_\alpha \bar{g}_p^{(\alpha)} \qquad (p = 0, 1, \cdots \nu);$$

für $p = l$ ist aber hiernach

$$0 = c_\mu \bar{g}_l^{(\mu)}$$

und folglich

$$c_\mu = 0, \quad \text{da} \quad \bar{g}_l^{(\mu)} = g_l^{(\mu)} \neq 0;$$

d. h. wir erhalten für $p \neq l$

$$\bar{g}_p = c_1 \bar{g}_p^{(1)} + \cdots + c_{\mu-1} \bar{g}_p^{(\mu-1)} + c_{\mu+1} \bar{g}_p^{(\mu+1)} + \cdots + c_{\tau+1} \bar{g}_p^{(\tau+1)},$$

was zu beweisen war. Damit also wenigstens eines der $g_l^{(\lambda)}$ von Null verschieden sei, ist nothwendig, dass der Rang des quadratischen Systems (l) mit dem Range des ganzen Systems $(a_{i\varkappa})$ übereinstimmt. Andererseits ist sofort ersichtlich, dass diese nothwendige Bedingung auch hinreichend ist, denn würde in sämmtlichen $\tau + 1$ linear unabhängigen Lösungssystemen von $(a_{i\varkappa})_g$

$$g_l^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \tau + 1)$$

sein, so wären diese Systeme schon selbst $(\tau + 1)$ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen $(l)_u$, es wäre also der Rang des quadratischen Systems (l) höchstens gleich $\nu - \tau - 1$. D. h. damit das Gleichungssystem $(a_{i\varkappa})_g$ durch ein Werthsystem $g_0, g_1, \cdots g_\nu$ befriedigt werden könne, worin g_l von Null verschieden ist, ist nothwendig und hinreichend, dass der Rang des Systems (l) mit dem Range des Systems $(a_{i\varkappa})$ genau übereinstimmt.

53. Kriterium für die Existenz eines in Reihenform darstellbaren Integrals, welches zu einer bestimmten Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung als Exponenten gehört.

Die Coefficienten der der Differentialgleichung genügenden Reihe

$$g(x, r_\varkappa) = x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\varkappa) x^\nu$$

bestimmen sich aus den Gleichungen

$$(36) \qquad a_{\nu 0}(r_\varkappa) g_0(r_\varkappa) + a_{\nu 1}(r_\varkappa) g_1(r_\varkappa) + \cdots + a_{\nu\nu}(r_\varkappa) g_\nu(r_\varkappa) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, 3 \cdots),$$

die aus den Gleichungen (13) dadurch hervorgehen, dass ϱ gleich der Wurzel $r_\varkappa$ der Gleichung (7) gesetzt wird. In diesem Gleichungssystem sind die

$$a_{\nu\nu}(r_\varkappa) \neq 0, \quad \text{wenn} \quad \nu > r_0 - r_\varkappa,$$

während

$$a_{\nu\nu}(r_\varkappa) = 0 \quad \text{ist, für} \quad \nu = r_{\varkappa-1} - r_\varkappa,\ r_{\varkappa-2} - r_\varkappa, \cdots r_0 - r_\varkappa.$$

Zur Entscheidung der Frage, ob $g_0(r_\varkappa)$ von Null verschieden ist, genügt es also, die Gleichungen (36) für

$$\nu = 1, 2, \cdots (r_0 - r_\varkappa)$$

zu betrachten; denn haben wir die

$$g_0(r_\varkappa),\ g_1(r_\varkappa),\ \cdots\ g_{r_0 - r_\varkappa}(r_\varkappa)$$

diesen $(r_0 - r_\varkappa)$ Gleichungen gemäss bestimmt, so ergeben die folgenden Gleichungen für $\nu > r_0 - r_\varkappa$ eindeutig bestimmte Werthe der $g_\nu(r_\varkappa)$. Es wird also eine Reihe $g(x, r_\varkappa)$ mit von Null verschiedenem $g_0(r_\varkappa)$, d. h. eine zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörige Reihe, dann und nur dann existiren, wenn der Rang des Systems

$$(37) \qquad (a_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \cdots (r_0 - r_\varkappa) \\ \beta = 0, 1, 2, \cdots (r_0 - r_\varkappa) \end{pmatrix}$$

mit dem Range des Systems

$$(0) = (a_{\alpha\beta}) \qquad [\alpha, \beta = 1, 2, \cdots (r_0 - r_\varkappa)]$$

übereinstimmt, wo jetzt das Argument $r_\varkappa$ weggelassen und

$$a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{zu nehmen ist, wenn} \quad \beta > \alpha.$$

Es soll nun diese Bedingung in expliciter Form angegeben werden wir führen zu dem Ende einige Bezeichnungen ein. Sei

$$r_0 - r_\varkappa = s_0, \quad r_1 - r_\varkappa = s_1, \quad \cdots \quad r_{\varkappa-1} - r_\varkappa = s_{\varkappa-1},$$

also

$$s_0 > s_1 > \cdots > s_{\varkappa-1},$$

ferner werde diejenige aus den Elementen des Systems (37) gebildete Determinante, die die Reihen $i_0, i_1, \cdots i_{\nu-1}$ und die Zeilen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{\nu-1}$ nicht enthält, durch

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \cdots & i_{\nu-1} \\ & \varkappa_1 & \cdots & \varkappa_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

diejenige Determinante, die aus den in den Reihen $i_0, i_1, \cdots i_\nu$ und den Zeilen $\varkappa_0, \varkappa_1, \cdots \varkappa_\nu$ stehenden Elementen gebildet ist, durch

$$\begin{Bmatrix} i_0 & i_1 & \cdots & i_\nu \\ \varkappa_0 & \varkappa_1 & \cdots & \varkappa_\nu \end{Bmatrix}$$

bezeichnet. In Uebereinstimmung mit der in der Nr. 49 (S. 171) eingeführten Bezeichnung ist dann

$$h_\nu(r_\varkappa) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \nu - 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \nu \end{Bmatrix}.$$

Das System (36) besitzt die besondere Beschaffenheit, dass

$$a_{\alpha\beta} = 0, \qquad \beta > \alpha$$

und ferner

$$a_{s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-1}} = 0, \quad a_{s_{\varkappa-2}, s_{\varkappa-2}} = 0, \quad \cdots \quad a_{s_0, s_0} = 0;$$

diese bewirkt das Bestehen der folgenden identischen Gleichung:

$$(38)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & s_i - 1 & s_0 \\ & 1 & 2 & \cdots \quad \cdots & s_i \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i & \cdots & s_0 - 1 \\ s_i + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} s_i & \cdots & s_{i-1} - 1 \\ s_i + 1 & \cdots & s_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{i-1} & \cdots & s_{i-2} - 1 \\ s_{i-1} + 1 & \cdots & s_{i-2} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} s_1 & \cdots & s_0 - 1 \\ s_1 + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} s_i & \cdots & s_{i-1} - 1 \\ s_i + 1 & \cdots & s_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{i-1} & \cdots & s_0 - 1 \\ s_{i-1} + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots \varkappa),$$

wo $s_\varkappa = 0$ ist. Das System (0) ist mindestens vom Range $s_0 - \varkappa$, da

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varkappa-1} \\ & s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varkappa-1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

es kann aber auch von höherem Range sein. Die aus den Elementen des Systems (0) gebildete Determinante s_0^{ter} Ordnung, die selbst durch (0) zu bezeichnen sein wird, ist jedenfalls gleich Null; unter ihren Subdeterminanten $(s_0 - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung kann nur

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 \\ & s_{\varkappa-1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{s_{\varkappa-1}-1,\, s_{\varkappa-1}-1} \begin{Bmatrix} s_{\varkappa-1} & \cdots & s_0 - 1 \\ s_{\varkappa-1} + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix}$$

von Null verschieden sein. Ist dies der Fall, d. h. ist

$$\begin{Bmatrix} s_{\varkappa-1} & \cdots & s_0 - 1 \\ s_{\varkappa-1} + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix} \neq 0,$$

so ist (0) vom Range $s_0 - 1$; damit dann $g_0(r_\varkappa)$ von Null verschieden sei, ist also nothwendig und hinreichend, dass sämmtliche Determinanten s_0^{ter} Ordnung des Systems (37) verschwinden. Unter diesen letzteren könnte nur

$$(s_0) = h_{s_{\varkappa-1}}(r_\varkappa) \begin{Bmatrix} s_{\varkappa-1} & \cdots & s_0 - 1 \\ s_{\varkappa-1} + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix}$$

von Null verschieden sein; soll auch diese Determinante verschwinden, so muss demnach

$$h_{s_{\varkappa-1}}(r_\varkappa) = 0$$

sein, diese letztere Bedingung ist also, falls (0) vom Range $s_0 - 1$ ist, nothwendig und hinreichend dafür, dass $g_0(r_\varkappa) \neq 0$ sei. Ist

$$\begin{Bmatrix} s_{\varkappa-1} & \cdots & s_0 - 1 \\ s_{\varkappa-1} + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix} = 0,$$

so sind alle Subdeterminanten $(s_0 - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von (0) gleich Null, dieses System wird also vom Range $s_0 - 2$ sein, wenn die darin enthaltene Determinante $(s_0 - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 & s_{\varkappa-1} \\ & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet. Setzen wir

$$A_i = a_{s_{\varkappa-i}+1, s_{\varkappa-i}+1} \cdots a_{s_{\varkappa-i-1}-1, s_{\varkappa-i-1}-1} \qquad (i = 0, 1, \cdots \varkappa - 1),$$

$$\Sigma_i = \begin{vmatrix} s_{\varkappa-i} & \cdots & s_0 - 1 \\ s_{\varkappa-i} + 1 & \cdots & s_0 \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots \varkappa - 1),$$

so lässt sich jene Determinante $(s_0 - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung in der Form

$$A_0 A_1 \Sigma_2$$

darstellen, und es ist also (0) vom Range $s_0 - 2$, wenn

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 \neq 0$$

ist. Damit dann das ganze System (37) vom selben Range sei, müssen alle Subdeterminanten $(s_0 - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinanten (1), (2), $\cdots (s_0)$ verschwinden. Also ist hierzu nothwendig

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{\varkappa-1} \\ & s_{\varkappa-2} \end{pmatrix} = A_1 h_{s_{\varkappa-1}}(r_\varkappa) \Sigma_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{\varkappa-1} \\ & s_{\varkappa-1} \end{pmatrix} = h_{s_{\varkappa-2}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}} \Sigma_2 = 0,$$

wo $h_{s_{\varkappa-2}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}}$ die Determinante bedeutet, die aus $h_{s_{\varkappa-2}}(r_\varkappa)$ entsteht, indem man Zeile und Reihe $s_{\varkappa-1}$ weglässt; d. h. aber, da A_1, Σ_2 nicht verschwinden, es ist nothwendig

$$h_{s_{\varkappa-1}}(r_\varkappa) = 0, \quad h_{s_{\varkappa-2}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}} = 0.$$

Aus der Form des Systems (37) ist nunmehr leicht zu übersehen, dass diese beiden Bedingungen auch hinreichend sind; dieselben sind also, wenn (0) vom Range $s_0 - 2$ ist, nothwendig und hinreichend dafür, dass $g_0(r_\varkappa)$ von Null verschieden sei.

Sei allgemein

$$(\alpha) \qquad \Sigma_{i-1} = 0, \quad \Sigma_i \neq 0 \qquad (i > 2),$$

so folgt aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 & s_{\varkappa-1} & \cdots & s_{\varkappa-i+1} \\ & s_{\varkappa-1} & \cdots & s_{\varkappa-i+1} & s_{\varkappa-i} \end{pmatrix} = A_0 A_1 \cdots A_{i-1} \Sigma_i,$$

dass der Rang des Systems (0) mindestens gleich $s_0 - i$ sein muss. Es handelt sich dann noch um die Aufstellung von Bedingungen dafür, dass der Rang des ganzen Systems (37) mit dem Range des Systems (0) übereinstimmt. Aus den Gleichungen

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} & \cdots & s_{\varkappa-i+1} \\ & s_{\varkappa-2} & s_{\varkappa-3} & \cdots & s_{\varkappa-i} \end{pmatrix} = A_1 \cdots A_{i-1} h_{s_{\varkappa-1}}(r_\varkappa) \Sigma_i,$$

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} & \cdots & s_{\varkappa-i+1} \\ & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-3} & \cdots & s_{\varkappa-i} \end{pmatrix} = A_2 \cdots A_{i-1} h_{s_{\varkappa-2}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}} \Sigma_i,$$

. . . .

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} & \cdots & s_{\varkappa-i+1} \\ & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} & \cdots & s_{\varkappa-i+1} \end{pmatrix} = h_{s_{\varkappa-i}}(r)_{s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-i+1}} \Sigma_i,$$

wo $h_\nu(r_\varkappa)_{\alpha, \beta, \cdots \gamma}$ diejenige Determinante bedeutet, die entsteht, wenn man in $h_\nu(r_\varkappa)$ die Reihen und Zeilen $\alpha, \beta, \cdots \gamma$ weglässt, folgt, dass, wenn die sämmtlichen Determinanten $(s_0 - i + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems (s_0) verschwinden sollen, jedenfalls die Determinanten

$$(\beta) \qquad h_{s_{\varkappa-1}}(r_\varkappa),\ h_{s_{\varkappa-2}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}}, \cdots h_{s_{\varkappa-i}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-i+1}}$$

gleich Null sein müssen. Andererseits ist leicht einzusehen, dass, unter Festhaltung der Voraussetzungen (α), das Verschwinden der Determinanten (β) stets hinreichend ist dafür, dass das System (37) vom selben Range sei wie das System (0); wenn also insbesondere das System (0) vom Range $s_0 - i$ ist, so sind diese hinreichenden Bedingungen zugleich nothwendig.

Die Voraussetzungen (α) lassen sich aber noch etwas anders darstellen, wenn wir beachten, dass wir in unserem Gleichungssysteme für die Coefficienten die Ausdrücke

$$a_{\alpha, \beta}(\varrho) = f_{\alpha-\beta}(\varrho + \beta) \qquad (\beta = 0, 1, 2, \cdots \alpha)$$

und folglich die Beziehungen

$$a_{\alpha,\beta}(\varrho+\lambda) = f_{\alpha-\beta}(\varrho+\lambda+\beta) = a_{\alpha+\lambda,\beta+\lambda}(\varrho)$$

haben. Hiernach ist nämlich

$$\begin{Bmatrix} s_i & \cdots & s_0 - 1 \\ s_i + 1 & \cdots & s_0 \end{Bmatrix} = h_{s_0 - s_i}(r_\varkappa + s_i),$$

$$\begin{Bmatrix} s_i & \cdots & s_{i-1} - 1 \\ s_i + 1 & \cdots & s_{i-1} \end{Bmatrix} = h_{s_{i-1} - s_i}(r_\varkappa + s_i).$$

Es ergiebt sich also das folgende Kriterium dafür, dass $g_0(r_\varkappa)$ einen von Null verschiedenen Werth habe.

Man bilde die Reihe der Determinanten

$$h_{r_0 - r_{\varkappa-1}}(r_{\varkappa-1}),\quad h_{r_0 - r_{\varkappa-2}}(r_{\varkappa-2}),\quad \cdots,\quad h_{r_0-r_2}(r_2),\quad h_{r_0-r_1}(r_1);$$

hat unter diesen

$$h_{r_0 - r_{\varkappa-i}}(r_{\varkappa-i})$$

als erste einen von Null verschiedenen Werth, während

$$h_{r_0 - r_{\varkappa-i+1}}(r_{\varkappa-i+1}) = 0$$

ist, so ist das System (0) vom Range $r_0 - r_\varkappa - i$; insbesondere ist (0) vom Range $r_0 - r_\varkappa - 1$, wenn

$$h_{r_0 - r_{\varkappa-1}}(r_{\varkappa-1}) \neq 0.$$

Ergiebt sich, dass (0) vom Range $r_0 - r_\varkappa - i$ ist, so ist für die Existenz einer zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörigen Reihe $g(x, r_\varkappa)$, d. h. für $g_0(r_\varkappa) \neq 0$, nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten

$$h_{r_{\varkappa-1}-r_\varkappa}(r_\varkappa),\quad h_{r_{\varkappa-2}-r_\varkappa}(r_\varkappa)_{r_{\varkappa-1}-r_\varkappa},\quad \cdots,$$
$$h_{r_{\varkappa-i}-r_\varkappa}(r_\varkappa)_{r_{\varkappa-1}-r_\varkappa,\, r_{\varkappa-2}-r_\varkappa,\, \cdots,\, r_{\varkappa-i+1}-r_\varkappa}$$

sämmtlich verschwinden.

Wenn

$$h_{r_0 - r_\varkappa}(r_\varkappa) \neq 0$$

ist, so beachten wir die Gleichung

$$h_{r_0 - r_\varkappa}(\varrho) = h_{r_{\varkappa-1}-r_\varkappa}(\varrho)\, h_{r_0 - r_{\varkappa-1}}(\varrho + r_{\varkappa-1} - r_\varkappa);$$

folglich ist in diesem Falle einerseits

$$h_{r_0 - r_{\varkappa-1}}(\varrho + r_{\varkappa-1} - r_\varkappa) \neq 0,$$

also das System (0) vom Range $r_0 - r_\varkappa - 1$, und da andererseits auch

$$h_{r_{\varkappa-1}-r_\varkappa}(r_\varkappa) \neq 0,$$

so ist dann jedenfalls

$$g_0(r_\varkappa) = 0,$$

d. h. es kann keine zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörige Reihe geben.

54. Aufstellung der Hamburger'schen Untergruppen im Falle der Bestimmtheit.

Wenn das angegebene Kriterium die Existenz einer zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörigen Reihe $g(x, r_\varkappa)$ erkennen lässt, so stellt dieselbe für $|x| < R$ ein Integral

$$u_{\varkappa 0} = g(x, r_\varkappa) = x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\varkappa) x^\nu$$

unserer Differentialgleichung dar. Dieses Integral muss, da es zum Exponenten $r_\varkappa$ gehört, durch die

$$v_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots \varkappa; \ \beta = 0, 1, \cdots \lambda_\alpha - 1),$$

homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar sein; da aber in den

$$v_{\varkappa 1}, v_{\varkappa 2}, \cdots v_{\varkappa, \lambda_\varkappa - 1}$$

der Coefficient von $\log x$ nach einer oben (S. 175) gemachten Bemerkung zum Exponenten $r_\varkappa$ gehört, so ist $u_{\varkappa 0}$ eine homogene lineare Function der Integrale

$$v_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots \varkappa - 1; \ \beta = 0, 1, \cdots \lambda_\alpha - 1),$$

$$v_{\varkappa 0},$$

mit constanten Coefficienten, es kann folglich in dem Systeme der zur Wurzelgruppe (R) gehörigen Integrale $v_{\alpha\beta}$, $u_{\varkappa 0}$ an die Stelle von $v_{\varkappa 0}$ gesetzt werden. — Zu der grössten Wurzel r_0 der Gruppe (R) gehört allemal eine Reihe; um die Anzahl der in Reihenform darstellbaren Integrale zu finden, die zu Wurzeln dieser Gruppe als Exponenten gehören, kann man das der kleinsten Wurzel r_μ entsprechende Gleichungssystem

$$(39) \qquad a_{\nu 0}(r_\mu) g_0(r_\mu) + a_{\nu 1}(r_\mu) g_1(r_\mu) + \cdots + a_{\nu\nu}(r_\mu) g_\nu(r_\mu) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots g_0)$$

betrachten. Es muss dann nämlich jede zu einer der Zahlen $r_0, r_1, \cdots r_\mu$ als Exponenten gehörige Reihe in der Form

$$x^{r_\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\mu) x^\nu$$

darstellbar sein, und umgekehrt gehört offenbar jede in dieser Form darstellbare Reihe zu einer Wurzel der Gruppe (R) als Exponenten. Bedeutet also

$$q_0 - \tau = r_0 - r_\mu - \tau$$

den Rang des Gleichungssystems (39), d. h. den Rang des Systems

$$\left(a_{i\varkappa}(r_\mu)\right) \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \cdots q_0, \\ \varkappa = 0, 1, 2, \cdots q_0 \end{matrix}\right),$$

so besitzt das Gleichungssystem (39) genau $\tau + 1$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$g_0(r_\mu), \quad g_1(r_\mu), \quad \ldots \quad g_{q_0}(r_\mu).$$

Eines dieser Systeme ist wegen

$$a_{q_0 q_0}(r_\mu) = f_0(r_\mu + q_0) = 0$$

von der Form

$$g_0(r_\mu) = g_1(r_\mu) = \cdots = g_{q_0 - 1}(r_\mu) = 0, \quad g_{q_0}(r_\mu) = c,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet, dasselbe liefert die zum Exponenten r_0 gehörige Reihe. Den $\tau + 1$ linear unabhängigen Systemen

$$g_0(r_\mu), \quad g_1(r_\mu), \quad \cdots \quad g_{q_0}(r_\mu)$$

entsprechend liefern die Gleichungen (39) für $\nu > q_0$ $\tau + 1$ Werthsysteme der $g_\nu(r_\mu)$, wir erhalten also auf diese Weise genau $\tau + 1$ in Reihenform darstellbare Integrale, und diese sind nothwendig linear unabhängig, da ihre $q_0 + 1$ ersten Coefficienten linear unabhängige Systeme bilden. Wenn nicht alle Wurzeln der Gruppe (R) einfache Wurzeln der Gleichung (7) sind, so muss

$$(40) \qquad \tau + 1 < \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$$

sein, da ja das allgemeinste zu einer λ-fachen Wurzel gehörige Integral den $\log x$ mindestens zur $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält. In diesem Falle, wie auch überhaupt, wenn die Ungleichung (40) besteht, muss es also noch Integrale von der Form

$$x^{r_\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} (g_{0\nu} + g_{1\nu} \log x) x^\nu$$

geben, die Anzahl $\tau_1 + 1$ der linear unabhängigen unter denselben, sowie die Exponenten, zu denen sie gehören, findet man durch Discussion der sich aus den Gleichungen (11) (S. 160) für $m = 1$ ergebenden Gleichungssysteme, denen die Coefficienten

$$g_{0\nu}, \quad g_1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

genügen müssen. Ist

$$\tau + 1 + \tau_1 + 1 < \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu,$$

was jedenfalls stattfinden muss, wenn eine der Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_\mu$ grösser als Zwei ist, so giebt es auch noch Integrale von der Form

$$x^{r_\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} (g_{0\nu} + g_{1\nu} \log x + g_{2\nu} \log^2 x) x^\nu.$$

Die Gleichungen, denen die Coefficienten derselben zu genügen haben, folgen aus den Gleichungen (11) für $m = 2$, ihre Discussion, die auf Grund des Satzes über lineare Gleichungssysteme (Nr. 52) ohne Schwierigkeit durchgeführt werden kann, lehrt uns die Anzahl $\tau_2 + 1$ der linear unabhängigen Integrale dieser Form sowie die Exponenten kennen, zu denen sie gehören. Ist auch noch

$$\tau + 1 + \tau_1 + 1 + \tau_2 + 1 < \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu,$$

so giebt es Integrale von der Form

$$x^{r_\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} (g_{0\nu} + g_{1\nu} \log x + g_{2\nu} \log^2 x + g_{3\nu} \log^3 x) x^\nu,$$

und auf diese Weise hat man fortzufahren, bis man endlich zu Integralen

$$x^{r_\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} g_{i\nu} \log^i x \right) x^\nu \tag{41}$$

kommt, für welche, wenn $\tau_m + 1$ die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen bezeichnet,

$$\tau + 1 + \tau_1 + 1 + \tau_2 + 1 + \cdots + \tau_m + 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$$

ist. Die so erhaltenen $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$ Integrale sind auch sämmtlich linear unabhängig von einander, da ja eine lineare Beziehung zwischen Integralen, die den $\log x$ zu verschiedenen Potenzen enthalten, nicht möglich ist; wir finden also auf diese Weise ein System von genau so vielen linear unabhängigen und zu den Wurzeln der Gruppe (R) als Exponenten gehörigen Integralen, als die Gruppe (R) Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung (7) repräsentirt. Diese Integrale können an Stelle der oben aufgestellten $v_{\alpha\beta}$ als die zur Wurzelgruppe (R), d. h. zur $(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu)$-fachen Wurzel ω_0 der Fundamentalgleichung gehörige Integralgruppe angesehen werden. Bemerken wir dann, dass nach dem in der Nr. 42 (S. 148) aufgestellten Hülfssatze die Ausdrücke, die sich durch formale Differentiation der Integrale (41) nach $\log x$ ergeben, auch wieder Integrale der Differentialgleichung sind, so erkennen wir, dass

$$\tau_m + 1 \leq \tau_{m-1} + 1$$

sein muss, und die gleiche Ueberlegung lehrt, dass allgemein

$$\tau_\alpha \leqq \tau_\beta \leqq \tau \text{ ist,} \quad \text{wenn} \quad \alpha > \beta.$$

Damit ist die Eintheilung der zur Wurzelgruppe (R) gehörigen Integralgruppe in Untergruppen vollzogen; wir erhalten nämlich

$$\tau - \tau_1, \quad \tau_1 - \tau_2, \quad \cdots \quad \tau_m + 1$$

Untergruppen von je einem, zwei, $\cdots$ beziehungsweise $(m+1)$ Elementen. Eine aus l Elementen bestehende Untergruppe enthält je ein Integral, in welchem der Logarithmus bis zur nullten, ersten, zweiten, $\cdots (l-1)^{\text{ten}}$ Potenz ansteigt, und wenn

$$u_l = x^{r_\mu}\left(\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\log x + \cdots + \varphi_{l-1}(x)\log^{l-1}(x)\right)$$

das die höchste Potenz von $\log x$ enthaltende Integral dieser Untergruppe bedeutet, wo $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{l-1}$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen sind, so können wir

$$\begin{aligned} u_{l-1} &= \frac{\partial u_l}{\partial(\log x)} \\ &= x^{r_\mu}\left(\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x)\log x + \cdots + (l-1)\varphi_{l-1}(x)\log^{l-2}x\right), \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_0 = \frac{\partial^{l-1} u_l}{\partial(\log x)^{l-1}} = (l-1)(l-2)\cdots 2\cdot 1\, x^{r_\mu}\varphi_{l-1}(x)$$

als die übrigen dieser Untergruppe angehörigen Integrale nehmen. Lassen wir die unabhängige Variable x den einfachen Umlauf U um den Punkt $x = 0$ vollziehen, so ist:

$$\begin{aligned} \Theta u_0 &= \omega_0 u_0, \\ \Theta u_1 &= \alpha_{10} u_0 + \omega_0 u_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Theta u_l &= \alpha_{l0} u_0 + \alpha_{l1} u_1 + \cdots + \omega_0 u_l; \end{aligned}$$

die constanten Coefficienten α_{iz} sind auf Grund der gefundenen Form der Integrale leicht explicite angebbar. Bildet man entsprechend den verschiedenen Wurzelgruppen der determinirenden Fundamentalgleichung diese in Untergruppen gesonderten Integralgruppen und bestimmt die Coefficienten der Substitution, die das so entstehende Fundamentalsystem beim Umlaufe U erfährt, so erkennt man, dass die Zahlen

$$\tau + 1, \quad \tau_1 + 1, \quad \cdots \quad \tau_m + 1$$

mit den in der Theorie der Fundamentalgleichung gefundenen Zahlen

$$\varrho_{01}, \; \varrho_{02}, \; \cdots \; \varrho_{0\lambda},$$

die der $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu$-fachen Wurzel ω_0 der Fundamentalgleichung entsprechen, identisch sind. Wir finden also ein zum Punkte

$x = 0$ gehöriges canonisches Fundamentalsystem, dessen einzelne Elemente zu den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung als Exponenten gehören (wir werden dasselbe, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, als das zu dem Punkte $x = 0$, wo sich alle Integrale bestimmt verhalten, gehörige canonische Fundamentalsystem schlechtweg bezeichnen). Und damit ist in der That, wie wir behauptet hatten, in dem Falle, wo sich sämmtliche Integrale der Differentialgleichung im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, alles das, was im allgemeinen Falle mit Hülfe der Fundamentalgleichung beziehungsweise der zum Umlaufe U gehörigen Substitution geleistet werden kann, durch die aus den Coefficienten der Differentialgleichung in algebraischer Weise zu bildenden Gleichungssysteme, die aus den Gleichungen (11) hervorgehen, d. h. wie wir kurz sagen können, durch die für die Reihenentwickelungen der Integrale in der Umgebung von $x = 0$ bestehenden Recursionsformeln und durch die determinirende Fundamentalgleichung geleistet.

Viertes Kapitel.

55. Das allgemeinste zu einer Wurzelgruppe gehörige Integral ist logarithmenfrei. Scheinbare und ausserwesentliche singuläre Stellen.

Von besonderer Wichtigkeit ist es nun noch, den Fall zu betrachten, wo das allgemeinste zu einer Wurzel $r_\varkappa$ der Gruppe (R) als Exponenten gehörige Integral von Logarithmen frei, d. h. in Reihenform darstellbar wird. Hierzu ist offenbar erforderlich, dass die Wurzeln

$$r_0, \; r_1, \; \cdots \; r_{\varkappa-1}, \; r_\varkappa$$

einfache Wurzeln der Gleichung (7) seien, und wenn dies der Fall ist, hinreichend, dass zu jeder dieser Wurzeln als Exponenten ein in Reihenform darstellbares Integral gehöre. Da jedes solche Integral in der Form

$$x^{r_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\varkappa)\, x^\nu$$

enthalten sein muss, so wird also in diesem Falle das Gleichungssystem (36) für $\nu = 1, 2, \cdots (r_0 - r_\varkappa)$ oder, was dasselbe ist, das System (37) (Nr. 53, S. 185) vom Range

$$r_0 - r_\varkappa - \varkappa$$

sein, folglich ist dann auch das System (0) von diesem Range. Das Kriterium der Nr. 53 liefert also als nothwendige und hinreichende Bedingungen für das Eintreten dieses Falles die $\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}$ Gleichungen, die durch das Verschwinden der Determinanten

$$(42) \qquad \begin{cases} h_{r_{\alpha-1}-r_\alpha}(r_\alpha), \quad h_{r_{\alpha-2}-r_\alpha}(r_\alpha)_{r_{\alpha-1}-r_\alpha}, \quad \cdots \\ h_{r_0-r_\alpha}(r_\alpha)_{r_{\alpha-1}-r_\alpha,\, r_{\alpha-2}-r_\alpha,\, \cdots\, r_1-r_\alpha} \end{cases}$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots \varkappa)$$

dargestellt werden. In dieser Form hat zuerst Herr Heffter diese Bedingungen aufgestellt, und ihre Identität mit den von Herrn Frobenius gegebenen Bedingungen

$$h_{r_{\alpha-1}-r_\alpha}(r_\alpha) = 0, \quad h'_{r_{\alpha-2}-r_\alpha}(r_\alpha) = 0, \quad \cdots \quad h^{(\alpha-1)}_{r_0-r_\alpha}(r_\alpha) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots \varkappa),$$

wo

$$h_i^{(\lambda)}(\varrho) = \frac{d^\lambda h_i(\varrho)}{d\varrho^\lambda}$$

gesetzt wurde, nachgewiesen.

Wenn insbesondere alle $\mu + 1$ Wurzeln der Gruppe (R) einfache Wurzeln von (7), und die $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ Bedingungen (42) für $\alpha = 1, 2, \cdots \mu$ erfüllt sind, so sind die sämmtlichen Integrale, die der Wurzelgruppe (R) entsprechen, von Logarithmen frei, also in Reihenform darstellbar, und umgekehrt sind diese $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ Bedingungen hierfür auch nothwendig. Dieselben stimmen dann bis auf die Bezeichnung mit den Bedingungen überein, die Herr Fuchs für das Eintreten dieses Falles in der zweiten seiner grundlegenden Arbeiten aufgestellt hat.

Von besonderem Interesse ist noch der Fall, wo die sämmtlichen n Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung (7) eine einzige Gruppe bilden, d. h. sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, ohne dass aber irgend zwei dieser Wurzeln einander gleich wären. Seien diese Wurzeln der Grösse ihrer realen Theile nach geordnet

$$r_0, \; r_1, \; \cdots \; r_{n-1},$$

so sind, damit die sämmtlichen zu denselben als Exponenten gehörigen Integrale von Logarithmen frei seien, die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen erforderlich und hinreichend, die durch die Gleichungen (42) für $\alpha = 1, 2, \cdots n - 1$ dargestellt werden. Sind diese erfüllt, so hat das zum Punkte $x = 0$ gehörige canonische Fundamentalsystem, dessen Elemente zu den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung gehören, die Gestalt:

$$u_\varkappa = x^{r_{n-1}} \varphi_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\varphi_\varkappa(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist, die mit der $(r_{\varkappa-1} - r_{n-1})^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnt. Die Quotienten

$$\frac{u_1}{u_n}, \quad \frac{u_2}{u_n}, \quad \cdots \quad \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

verhalten sich also in der Umgebung von $x = 0$ regulär; man nennt in diesem Falle den Punkt $x = 0$ einen scheinbar singulären Punkt der Differentialgleichung, weil es bei manchen Untersuchungen weniger auf die Integrale selbst, als auf die Quotienten derselben ankommt. Damit der Punkt $x = 0$ ein scheinbar singulärer Punkt sei, ist also erforderlich und hinreichend, dass

1) die n Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, das giebt $(n-1)$ Bedingungen,

2) dass die $\frac{(n-1)n}{2}$ Bedingungen erfüllt sind, die das Auftreten von Logarithmen verhindern;

im Ganzen sind also

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Bedingungen vorhanden.

Ist insbesondere noch r_{n-1} eine nicht negative ganze Zahl, so verhalten sich die n Integrale $u_1, u_2, \cdots u_n$ selbst und folglich alle Integrale der Differentialgleichung in der Umgebung von $x = 0$ regulär; in diesem Falle sagt man mit Herrn Weierstrass, der Punkt $x = 0$ sei ein ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung, wenn er kein regulärer Punkt derselben ist. Im Gegensatze hierzu bezeichnet man einen singulären Punkt der Differentialgleichung, der für die Integrale ein wirklicher Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt ist, als einen wesentlichen singulären Punkt.

56. Exponenten, zu denen die Elemente des durch das Reductionsverfahren erhaltenen Fundamentalsystems gehören.

Um die Fälle, wo der Punkt $x = 0$ wesentlich oder ausserwesentlich singulärer oder regulärer Punkt der Differentialgleichung ist, genau von einander scheiden zu können, wollen wir auf die bereits in der Nr. 46 (S. 162) berührte, aber noch nicht erledigte Frage, nach der Beziehung der Exponenten, zu denen die Elemente des durch das Substitutionsverfahren in der Nr. 43 (S. 150 ff.) erlangten Fundamentalsystems gehören, zu den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung eingehen.

Es seien

$$r_1, r_2, \cdots r_n$$

die der Grösse ihrer realen Theile nach geordneten Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung (7) der gegebenen Differentialgleichung (E). Zu der ihrem realen Theile nach grössten Wurzel r_1 als Exponenten gehört dann jedenfalls ein in Reihenform darstellbares Integral

$$u_1 = x^{r_1}\varphi_1(x), \qquad \varphi_1(0) \neq 0,$$

$\varphi_1(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Function. Setzen wir

$$y = u_1 \int z\,dx$$

in die Differentialgleichung (E) ein, so genügt z der linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$Q(z) = 0,$$

deren Coefficienten sich in der Umgebung von $x = 0$ wie rationale Functionen und deren sämmtliche Integrale sich in diesem Punkte bestimmt verhalten. Denken wir uns $Q(z) = 0$ auf die Normalform gebracht, also

$$Q(z) = x^{n-1}z^{(n-1)} + x^{n-2}Q_{n-2}(x)\,z^{(n-2)} + \cdots + Q_0(x)\,z,$$

so ist (vergl. Nr. 18, S. 48)

$$Q_{n-2}(x) = nx\frac{u_1'}{u_1} + P_{n-1}(x),$$

$$Q_{n-3}(x) = n_2 x^2\frac{u_1''}{u_1} + (n-1)\,x\frac{u_1'}{u_1}P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x),$$

. . . .

$$Q_0(x) \quad = n_{n-1}x^{n-1}\frac{u_1^{(n-1)}}{u_1} + (n-1)_{n-2}\,x^{n-2}\frac{u_1^{(n-2)}}{u_1}P_{n-1}(x) + \cdots$$
$$+ P_1(x).$$

Die determinirende Function von $Q = 0$ lautet

$$\varphi_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=1}^{n-1} Q_\varkappa(0)\,\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1) + Q_0(0), \quad Q_{n-1} = 1,$$

und wie eine leichte Rechnung ergiebt, ist

$$(\varrho+1)\,\varphi_0(\varrho) = f_0(\varrho + r_1 + 1).$$

Folglich sind

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \quad \cdots \quad r_n - r_1 - 1$$

die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung

$$\varphi_0(\varrho) = 0$$

der Differentialgleichung $Q = 0$, und zwar sind sie in der angegebenen Reihenfolge schon so geordnet, dass der reale Theil jeder folgenden nicht grösser ist als der reale Theil irgend einer vorhergehenden. Es gehört folglich zum Exponenten $r_2 - r_1 - 1$ ein in der Umgebung von $x = 0$ in Reihenform darstellbares Integral

$$v_2 = x^{r_2 - r_1 - 1}\varphi_2(x), \qquad \varphi_2(0) \neq 0.$$

Setzen wir wieder

$$z = v_2 \int u\, dx$$

in die Differentialgleichung $Q = 0$ ein, so ergiebt sich für u eine Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, $R(u) = 0$, die aus $Q = 0$ ebenso hervorgeht, wie diese aus (E); es verhalten sich also alle Integrale von $R = 0$ im Punkte $x = 0$ bestimmt, und die Coefficienten dieser Differentialgleichung in eben diesem Punkte wie rationale Functionen. Die determinirende Function von $R = 0$ hat die Form

$$\psi_0(\varrho) = \frac{1}{\varrho + 1}\varphi_0(\varrho + r_2 - r_1 + 2),$$

die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung

$$\psi_0(\varrho) = 0$$

sind also, der Grösse ihrer realen Theile nach geordnet,

$$r_3 - r_2 - 1, \quad r_4 - r_2 - 1, \quad \cdots \quad r_n - r_2 - 1.$$

Folglich gehört ein in der Umgebung von $x = 0$ von Logarithmen freies Integral von $R = 0$ zum Exponenten $r_3 - r_2 - 1$. Sei dieses

$$v_3 = x^{r_3 - r_2 - 1}\varphi_3(x), \qquad \varphi_3(0) \neq 0,$$

dann machen wir in $R = 0$ wieder die Substitution

$$u = v_3 \int t\, dx$$

und fahren so fort, indem wir die $v_\varkappa$ immer als die zu der in ihrem realen Theile grössten Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichungen der successive gebildeten Differentialgleichungen $(n - \varkappa + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung als Exponenten gehörigen von Logarithmen freien Integrale wählen. Dann gehört, wie man leicht übersieht, $v_\varkappa$ zum Exponenten $r_\varkappa - r_{\varkappa-1} - 1$ für $\varkappa = 2, 3, \cdots n$, und wenn wir die Integrale

$$u_\varkappa = u_1 \int v_2\, dx \int v_3\, dx \cdots \int v_\varkappa\, dx \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

der Differentialgleichung (E) bilden, so gehört $u_\varkappa$ zufolge der Sätze 3 und 1 der Nr. 40 (vergl. Nr. 43, S. 151) zum Exponenten $r_\varkappa$, d. h. wir erhalten durch unser Substitutionsverfahren in der That ein Fundamentalsystem $u_1, u_2, \cdots u_n$ der gegebenen Differentialgleichung (E), dessen Elemente zu den n Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung gehören. Die Determinante

$$D(u_1, u_2, \cdots u_n) = C \cdot e^{-\int \frac{P_{n-1}(x)}{x} dx},$$

C eine Constante, gehört folglich, wie in der Nr. 43 (S. 152) gezeigt wurde, zum Exponenten

$$\sum_{\alpha=0}^{n} r_\alpha - \frac{n(n-1)}{2},$$

wo also jetzt $r_1, r_2, \cdots r_n$ die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung bedeuten. Dieses Resultat ergiebt sich auch direct, wenn wir beachten, dass der Coefficient von ϱ^{n-1} in der determinirenden Fundamentalgleichung (7) den Werth

$$-\frac{n(n-1)}{2} + P_{n-1}(0)$$

besitzt.

57. Kriterien für die ausserwesentlichen singulären Stellen. Die Differentialgleichung, der die Ableitungen der Integrale einer gegebenen Differentialgleichung genügen.

Es sei nun $x = 0$ ein Punkt, in dessen Umgebung sich sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (A) regulär verhalten, dann verhalten sich dieselben also in $x = 0$ bestimmt, und wenn $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem bedeutet, so erkennt man aus der Form

$$\frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = 0,$$

in die sich (A) setzen lässt, dass die Coefficienten $p_1, p_2 \cdots p_n$ von (A) in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen besitzen. Folglich ist $x = 0$ für diese Differentialgleichung entweder ausserwesentlich singulärer oder regulärer Punkt, je nachdem nämlich die $p_1, p_2, \cdots p_n$ für $x = 0$ unendlich werden oder nicht. Da aber (vergl. S. 52)

$$p_\varkappa = (-1)^n \frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, und zufolge der über die Integrale von (A) gemachten Voraussetzung die Functionen

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n), \quad D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhalten, so können einige der $p_\varkappa$ nur dann unendlich werden, wenn die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

für $x = 0$ verschwindet; umgekehrt, wenn diese Determinante für $x = 0$ verschwindet, so ist jedenfalls

$$p_1 = (-1)^n \frac{d \log D(y_1, y_2, \cdots y_n)}{dx}$$

für $x = 0$ unendlich, d. h. wenn $x = 0$ ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, so verschwindet die Determinante jedes Fundamentalsystems für $x = 0$.

Dies macht den charakteristischen Unterschied zwischen einem ausserwesentlich singulären und einem regulären Punkte der Differentialgleichung aus, denn in einem regulären Punkte kann ja bekanntlich die Determinante eines Fundamentalsystems niemals verschwinden. Dieser Unterschied lässt sich aber auf Grund des vorhin gefundenen Satzes über den Exponenten, zu dem die Determinante eines Fundamentalsystems gehört, noch etwas anders darstellen. Unter der gemachten Voraussetzung haben die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ die Form (D), und die determinirende Fundamentalgleichung hat n verschiedene, ganzzahlige nicht negative Wurzeln; seien diese der Grösse nach geordnet

$$r_1, r_2, \cdots r_n,$$

dann ist also

$$r_n \geqq 0, \quad r_\varkappa \geqq n - \varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1).$$

Da $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ zum Exponenten

$$\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha - \frac{n(n-1)}{2}$$

gehört, so wird diese Determinante dann und nur dann für $x = 0$ verschwinden, wenn

$$\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha > \frac{n(n-1)}{2};$$

soll also $x = 0$ ein regulärer Punkt der Differentialgleichung sein, so muss

$$r_1 = n - 1, \quad r_2 = n - 2, \cdots, r_n = 0$$

sein. Umgekehrt ist dies auch stets der Fall, wenn $x = 0$ ein regulärer Punkt der Differentialgleichung ist, da alsdann für die Normalform (E) die Entwickelung von

$$P_{n-\varkappa}(x)$$

nach Potenzen von x mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ oder einer noch höheren Potenz beginnen muss, so dass also die determinirende Fundamentalgleichung, wenn $x = 0$ ein regulärer Punkt ist, die Form hat

$$\varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - n + 1) = 0.$$

Also dann und nur dann, wenn unter der über die Integrale der Differentialgleichung (A) gemachten Voraussetzung die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung mit den Zahlen $0, 1, \cdots n - 1$ übereinstimmen, ist $x = 0$ ein regulärer

Punkt von (A); anderenfalls ist es ein ausserwesentlich singulärer Punkt, und dann ist stets für die Normalform (E):

$$P_{n-1}(0) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha < 0.$$

Daraus dass, wenn $x = 0$ ein ausserwesentlicher singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, in demselben die Determinante jedes Fundamentalsystems verschwinden muss, folgt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist ein Integral y der Differentialgleichung zu finden, welches mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen im Punkte $x = 0$ die willkürlich vorgeschriebenen Werthe $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}$ annimmt. Denn bedeutet

$$[y_\varkappa(x)] \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ein Fundamentalsystem, so sind in

$$y = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

die Constanten $c_1, \cdots c_n$ so zu bestimmen, dass

$$b_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda y_\lambda^{(\varkappa)}(0) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n).$$

Wenn $x = 0$ ein regulärer Punkt ist, so lassen sich diese n Gleichungen für willkürliche $b_0, b_1, \cdots b_{n-1}$ durch ein wohlbestimmtes System endlicher Werthe der $c_1, \cdots c_n$ befriedigen, da in diesem Falle die Determinante

$$|\, y_\lambda^{(\varkappa)}(0) \,| = [D(y_1, y_2, \cdots y_n)]_{x=0} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, \cdots (n-1), \\ \lambda = 1, 2, \cdots n, \end{pmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth hat; ist dagegen $x = 0$ ausserwesentlich singulärer Punkt, so ist diese Determinante gleich Null. Damit also die angegebenen Gleichungen eine Auflösung zulassen, d. h. damit die $b_0, b_1, \cdots b_n$ die Werthe eines Integrals und seiner $(n-1)$ ersten Ableitungen im ausserwesentlich singulären Punkte $x = 0$ darstellen können, müssen die $b_0, b_1, \cdots b_n$ eine lineare homogene Relation erfüllen.

Wir bemerken, dass wir im Folgenden oft auch von dem zu einem regulären Punkte $x = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme, welches zu den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung gehört, sprechen werden. Darunter ist dann einfach ein System von n gewöhnlichen Potenzreihen von x zu verstehen, die der Differentialgleichung genügen, und beziehungsweise mit der $0^{\text{ten}}, 1^{\text{ten}}, \cdots (n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnen. Die Anfangsbedingungen dieses Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$, d. h. also die Werthe der $y_\varkappa$ und ihre $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = 0$, bilden dann das Schema

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2, \cdots c_n$ willkürliche von Null verschiedene Constanten.

Die Kriterien dafür, dass $x = 0$ ausserwesentlich singulärer Punkt ist, können wir nunmehr wie folgt zusammenfassen: es muss

1. in der Normalform (E) $P_n(x) = 1$ und $P_{n-1}(0)$ eine negative ganze Zahl sein,

2. die Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_n$ der determinirenden Fundamentalgleichung (7) müssen von einander verschiedene nicht negative ganze Zahlen sein,

3. es müssen die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$h_{r_\beta - r_\alpha}(r_\alpha)_{r_{\alpha-1}-r_\alpha, \cdots, r_{\beta+1}-r_\alpha} \qquad (\beta < \alpha;\quad \alpha = 2, 3, \cdots n)$$

erfüllt sein, die das Auftreten von Logarithmen in den Entwickelungen der Integrale verhindern.

Diese sub 3 angeführten Bedingungen lassen sich durch andere ersetzen, die in manchen Fällen brauchbarer sind als jene. Nehmen wir an, die Bedingungen 1 und 2 seien erfüllt, dann können in den Entwickelungen des zu $x = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems noch Logarithmen auftreten. Bedeutet r_1 die grösste Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung, so gehören die Ableitungen spätestens der $(r_1 + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, eines mit Logarithmen behafteten Elementes dieses canonischen Fundamentalsystems zu negativen Exponenten, während die sämmtlichen Ableitungen eines von Logarithmen freien Elementes stets zu positiven Exponenten gehören. Bildet man also diejenige Differentialgleichung, der die s^{ten} Ableitungen der sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (E) und nur diese genügen, so verhalten sich alle Integrale dieser Differentialgleichung im Punkte $x = 0$ bestimmt, dieselbe hat also die Gestalt

$$(\mathrm{E}_s) \qquad x^m z^{(m)} + Q_{m-1}(x) x^{m-1} z^{(m-1)} + \cdots + Q_0(x) z = 0;$$

wählt man $s = r_1 + 1$, so sind Integrale der Differentialgleichung (E) mit Logarithmen behaftet oder nicht, d. h. der Punkt $x = 0$ ist wesentliche oder ausserwesentliche singuläre Stelle dieser Differentialgleichung, je nachdem die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (E_s) negative Wurzeln enthält oder nicht.

Es ist also nur noch ein Verfahren anzugeben, welches lehrt, wie man diejenige Differentialgleichung finden kann, der die s^{ten} Ableitungen der Integrale einer Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

und nur diese genügen.

Differentiirt man die Gleichung (A) s-mal nach x und eliminirt aus den so entstehenden Gleichungen und (A) die Grössen

$$y, y', \cdots y^{(s-1)},$$

so erhält man eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für

$$z = y^{(s)},$$

die durch die s^{ten} Ableitungen der Integrale von (A) befriedigt wird. Bedeutet $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A), so genügen

$$(43) \qquad y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \cdots y_n^{(s)}$$

jener Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für z, sind diese n Ausdrücke linear unabhängig, so bilden sie ein Fundamentalsystem der genannten Differentialgleichung und in diesem Falle wird dieselbe auch nur durch die s^{ten} Ableitungen der Integrale von (A) befriedigt. Dies ist aber nicht immer der Fall, denn wenn z. B.

$$f(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

eine Lösung von (A) darstellt, die eine ganze rationale Function von x von niedrigerem als dem s^{ten} Grade ist, so wäre

$$c_1 y_1^{(s)} + c_2 y_2^{(s)} + \cdots + c_n y_n^{(s)} = 0,$$

d. h. es bestünde zwischen den Ausdrücken (43) eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten.

Um die Differentialgleichung (E_s), der die s^{ten} Ableitungen der Integrale von (A) und nur diese genügen, herzustellen, verfährt man nun folgendermassen. Es sei unter den Coefficienten von (A) $p_{n-\lambda}$ der letzte der nicht identisch verschwindet, so dass also alle folgenden Coefficienten (wenn $\lambda > 0$) $p_{n-\lambda+1}, \cdots p_n$ identisch Null sind. Setzt man dann

$$y^{(\lambda)} = u,$$

so genügt u der Differentialgleichung

$$(44) \qquad p_0 u^{(n-\lambda)} + p_1 u^{(n-\lambda-1)} + \cdots + p_{n-\lambda} u = 0;$$

sei $u_1, u_2, \cdots u_{n-\lambda}$ ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung. Die Ausdrücke

$$\int^{(\lambda)} u_\alpha dx^\lambda \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n - \lambda)$$

die durch λ-mal wiederholte Integration aus den u_α hervorgehen, genügen der Differentialgleichung (A), es lassen sich folglich die u_α selbst durch

$$y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)}, \cdots y_n^{(\lambda)}$$

linear homogen mit constanten Coefficienten darstellen, d. h. der Differentialgleichung (44) genügen die λ^{ten} Ableitungen der Integrale von (A) und nur diese.

Dividirt man (44) durch $p_{n-\lambda}$, differentiirt und setzt

$$v = u',$$

so erhält man eine Differentialgleichung

$$q_0 v^{(n-\lambda)} + q_1 v^{(n-\lambda-1)} + \cdots + q_{n-\lambda} v = 0, \tag{45}$$

die durch

$$v_\alpha = u_\alpha' \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n - \lambda)$$

befriedigt wird. Diese $n - \lambda$ Integrale sind aber auch linear unabhängig, denn aus einer Relation

$$c_1 v_1 + \cdots + c_{n-\lambda} v_{n-\lambda} = 0$$

mit constanten $c_1, \cdots c_{n-\lambda}$ würde durch Integration folgen

$$c_1 u_1 + \cdots + c_{n-\lambda} u_{n-\lambda} = C,$$

wo C eine Constante bedeutet, die von Null verschieden sein muss, da $u_1, \cdots u_{n-\lambda}$ ein Fundamentalsystem von (44) bilden. Diese letztere Gleichung besässe also ein nicht verschwindendes constantes Integral, was wegen

$$p_{n-\lambda} \neq 0$$

ausgeschlossen ist; der Gleichung (45) genügen somit die ersten Ableitungen der Integrale von (44), d. h. die $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Ableitungen der Integrale von (A) und nur diese.

Dividirt man also die gegebene Differentialgleichung (A) durch den Coefficienten der niedrigsten in ihr wirklich auftretenden Ableitung, differentiirt die so erhaltene Gleichung, wendet auf diese dasselbe Verfahren an, und setzt dies so lange fort bis man eine Differentialgleichung erhält, in der die niedrigste der wirklich in ihr vorkommenden Ableitungen von gleicher oder höherer Ordnung ist wie $y^{(s)}$, so ist diese Differentialgleichung die gesuchte (E_s).

Fünftes Kapitel.

58. Die nicht homogene Differentialgleichung in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit.

Es werde nunmehr noch der Fall einer nicht homogenen Differentialgleichung

$$(1) \qquad P(y) = p(x)$$

betrachtet, unter der Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung

$$(\mathrm{E}) \qquad P(y) = x^n P_n(x) y^{(n)} + \cdots + P_0(x) y = 0$$

die Normalform besitzt, und dass sich $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$ regulär verhalten. Wir sagen dann, dass auch die nicht homogene Differentialgleichung die Normalform habe, und bemerken, dass sich eine nicht homogene Differentialgleichung

$$(\mathrm{I}) \qquad y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = \bar{p}(x),$$

in der $p_1(x), \cdots p_n(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben, stets auf diese Form bringen lässt, indem man dieselbe mit einer in der Umgebung von $x = 0$ regulären Function und mit einer geeigneten Potenz von x multiplicirt. Damit die sämmtlichen Integrale von (E) im Punkte $x = 0$ bestimmt seien, ist nothwendig und hinreichend, dass

$$P_n(0) \neq 0.$$

Dies möge der Fall sein, wir fragen nach der Beschaffenheit von $p(x)$, wenn sich auch sämmtliche Lösungen von (1) im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten sollen. Die Integrale der homogenen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(2) \qquad P \frac{dp}{dx} - p \frac{dP}{dx} = 0$$

sind, wie in der Nr. 26 (S. 80) gezeigt wurde, entweder Lösungen von (E) oder, abgesehen von constanten Factoren, Lösungen von (1); sollen also die sämmtlichen Lösungen von (1) und (E) im Punkte $x = 0$

bestimmt sein, so muss das Gleiche von den Lösungen der Differentialgleichung (2) gelten. Diese Differentialgleichung lässt sich durch Multiplication mit

$$-x\frac{1}{p(x)}$$

in die Form setzen

(3) $$R(y)=\sum_{\varkappa=0}^{n+1}x^{\varkappa}R_{\varkappa}(x)y^{(\varkappa)},$$

wo

(4) $$\begin{cases} R_{\varkappa}(x)=P_{\varkappa-1}(x)+\varkappa P_{\varkappa}(x)+xP_{\varkappa}'(x)-xP_{\varkappa}(x)\dfrac{d\log p(x)}{dx} \\ \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n), \\ R_{n+1}(x)=P_n(x),\quad R_0(x)=x\left(P_0'(x)-P_0(x)\dfrac{d\log p(x)}{dx}\right), \\ \qquad P_{\varkappa}'(x)=\dfrac{dP_{\varkappa}(x)}{dx}. \end{cases}$$

Die Integrale von (3) werden also im Punkte $x=0$ bestimmt sein, wenn sich $R_n(x)$, $R_{n-1}(x)$, $\cdots$ $R_0(x)$ in der Umgebung von $x=0$ regulär verhalten. Für $\varkappa=n$ ergiebt sich unter dieser Annahme aus (4)

$$\frac{d\log p(x)}{dx}=\frac{R_n-P_{n-1}-nP_n-xP_n'}{xP_n},$$

also haben wir, da $P_n(0)\neq 0$ ist, wenn wir nach x entwickeln,

$$\frac{d\log p}{dx}=\frac{1}{x}(\mu+\delta_1 x+\cdots),$$

und folglich

(5) $$p(x)=x^{\mu}\cdot\pi(x),\quad \pi(0)\neq 0,$$

wo μ eine Constante, $\pi(x)$ eine in der Umgebung von $x=0$ reguläre Function bedeutet. Hat umgekehrt $p(x)$ diese Form, so sind die Coefficienten $R_{\varkappa}$ der Differentialgleichung (3) in der Umgebung von $x=0$ regulär. Wir haben also den folgenden Satz:

Wenn in der nicht homogenen Differentialgleichung (I) die Coefficienten der reducirten Gleichung und die logarithmische Ableitung des von y unabhängigen Gliedes in der Umgebung von $x=0$ den Charakter rationaler Functionen haben, und es sollen sich sowohl die Integrale der reducirten Differentialgleichung, wie auch die der completten im Punkte $x=0$ bestimmt verhalten, so muss in der Normalform $P_n(0)\neq 0$ und $p(x)$ von der Form (5) sein, oder wenn der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gemacht wird, so müssen $p_1(x)$, $\cdots$ $p_n(x)$ die Form (D), $p(x)$ die Form (5) haben. Diese Bedingungen sind zugleich hinreichend.

Wir machen von diesem Satze gleich eine Anwendung auf die nicht homogene Differentialgleichung (14), Nr. 46 (S. 163), der die Reihe $g(x, \varrho)$ für unbestimmtes ϱ genügt, wenn die Coefficienten derselben gemäss den Gleichungen (13) (ebenda) bestimmt werden. In diesem Falle ist

$$p(x) = f_0(\varrho) g_0(\varrho) x^\varrho,$$

also von der Form (5), d. h. die Integrale jener nicht homogenen Differentialgleichung sind im Punkte $x = 0$ bestimmt. Bilden wir die der Gleichung (3) analoge homogene Gleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= P_n(x) = 1, \\
R_\varkappa(x) &= P_{\varkappa-1}(x) + \varkappa P_\varkappa(x) + x P_\varkappa'(x) - P_\varkappa(x)\varrho \\
&\qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \\
R_0(x) &= x P_0'(x) - \varrho P_0(x),
\end{aligned}$$

folglich lautet die determinirende Fundamentalgleichung von (3)

$$\sum_{\varkappa=0}^{n+1} R_\varkappa(0)\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-\varkappa+1) = 0,$$

oder nach leichter Umformung

$$(\sigma-\varrho)\sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(0)\,\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-\varkappa+1) = (\sigma-\varrho) f_0(\sigma) = 0.$$

Die zur Differentialgleichung

$$(\text{E}) \qquad x\frac{dP(y)}{dx} - \varrho P(y) = 0$$

gehörige determinirende Fundamentalgleichung besitzt also neben der Wurzel ϱ die sämmtlichen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von (E) zu Wurzeln.

Mit Hülfe dieser, der Gleichung (E) durch die Substitution

$$y = g(x, \varrho)$$

zugeordneten Gleichung $(\bar{\text{E}})$ hat Herr Fuchs eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür entwickelt, dass die zu einer Wurzelgruppe der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ gehörige Integralgruppe von (E) mit Logarithmen behaftet ist oder nicht.

59. Die Integrale einer homogenen Differentialgleichung in der Umgebung des unendlich fernen Punktes und eines algebraischen Windungspunktes.

Nachdem auf diese Weise der Fall, wo sich die Integrale der Differentialgleichung (A) im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, unter der Voraussetzung erledigt ist, dass die Coefficienten von (A) in der

Umgebung von $x = 0$ den Charakter von rationalen Functionen besitzen, wollen wir die analoge Frage für einen beliebigen im Endlichen gelegenen Punkt und für den Punkt $x = \infty$ behandeln, in dessen Umgebung die Coefficienten der Differentialgleichung den Charakter von algebraischen Functionen besitzen mögen. Bedeutet $x = a$ einen beliebigen endlichen Punkt, so lässt sich durch die einfache Substitution

$$x - a = x'$$

die Differentialgleichung (A) auf eine ebenfalls homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit der unabhängigen Variabeln x' zurückführen, deren Coefficienten in der Umgebung von $x' = 0$ dieselbe Beschaffenheit zeigen, wie die der ursprünglichen in der Umgebung von $x = a$. Wir können uns demgemäss nach wie vor auf die Untersuchung des Nullpunktes beschränken, nur wollen wir jetzt nicht wie bisher annehmen, dass die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ in der Umgebung von $x = 0$ als Quotienten gewöhnlicher nach Potenzen von x fortschreitender Reihen darstellbar sind, sondern allgemeiner voraussetzen, diese Coefficienten seien Quotienten von convergenten Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\lambda}}$ fortschreiten. Bedeutet dann λ eine positive ganze Zahl, so verhalten sich $p_1, p_2, \cdots p_n$ in der Umgebung von $x = 0$ wie algebraische Functionen, für die $x = 0$ ein λ-facher Windungspunkt ist, wenn dagegen λ eine negative ganze Zahl ist, so zeigen die Coefficienten der Differentialgleichung das analoge Verhalten für $x = \infty$; der Fall $\lambda = -1$ wird insbesondere der Annahme entsprechen, dass $p_1, p_2, \cdots p_n$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes den Charakter von rationalen Functionen besitzen.

Es sei also die Differentialgleichung gegeben

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{P}_x(y) = \frac{d^n y}{d x^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + p_n(x) y = 0,$$

oder in der Normalform

$$\text{(E)} \quad P_x(y) = x^n P_n(x) \frac{d^n y}{d x^n} + x^{n-1} P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_0(x) y = 0,$$

wo wir jetzt, um die unabhängige Veränderliche hervortreten zu lassen, den Zeichen $\mathfrak{P}(y)$, $P(y)$ für die Differentialausdrücke das x als Index angehängt haben. Setzen wir

$$x = \xi^\lambda$$

in (A) beziehungsweise (E) ein, so verwandeln sich, wenn man die Ableitungen nach x durch solche nach ξ ausdrückt, die linken Seiten von (A) und (E) in

$$\mathfrak{P}_x(y) = q(\xi)\mathfrak{Q}_\xi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n y,$$

$$P_x(y) = \quad Q_\xi(y) = \xi^n Q_n(\xi)\frac{d^n y}{dx^n} + \xi^{n-1} Q_{n-1}(\xi)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + Q_0(\xi) y,$$

wo

$$q(\xi) = \frac{\xi^{n-n\lambda}}{\lambda^n}, \quad Q_n(\xi) = \frac{1}{\lambda^n} P_n(x)$$

gesetzt wurde, so dass wir also für y als Function von ξ die ebenfalls homogenen linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung

(A′) $$\mathfrak{Q}_\xi(y) = 0,$$

(E′) $$Q_\xi(y) = 0$$

erhalten, von denen die letztere auch bereits die Normalform hat. Die Beziehungen zwischen den Coefficienten dieser Differentialgleichungen und denen der ursprünglichen (A) und (E), ergeben sich am übersichtlichsten, wenn wir die charakteristischen Functionen bilden. Es ist

$$P_x(x^\varrho) = x^n P_n(x)\mathfrak{P}_x(x^\varrho) = x^\varrho f(x, \varrho)$$

die charakteristische Function von (A) und (E), also

(1) $$Q_\xi(\xi^\varrho) = \xi^n Q_n(\xi)\mathfrak{Q}_\xi(\xi^\varrho) = P_x\left(x^{\frac{\varrho}{\lambda}}\right) = \xi^\varrho f\left(\xi^\lambda, \frac{\varrho}{\lambda}\right)$$

die charakteristische Function von (A′) und (E′). Da nun (vergl. Nr. 44, S. 156, Gl. (3))

$$P_x(x^\varrho) = x^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x)\,\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1),$$

$$Q_\xi(\xi^\varrho) = \xi^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{n} Q_\varkappa(\xi)\,\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)$$

gefunden wird, so erhalten wir die für jedes ϱ gültigen Identitäten

(2) $$\begin{cases} \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x)\,\frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda}-1\right)\cdots\left(\frac{\varrho}{\lambda}-\varkappa+1\right) \\ \qquad = \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} Q_\varkappa(\xi)\,\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1), \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} p_{n-\varkappa}(x)\,x^{n-\varkappa}\,\frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda}-1\right)\cdots\left(\frac{\varrho}{\lambda}-\varkappa+1\right) \\ \qquad = \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} q_{n-\varkappa}(\xi)\,\xi^{n-\varkappa}\,\frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)}{\lambda^n}, \end{cases}$$

wo

$$p_0(x) = q_0(x) = 1$$

zu nehmen ist.

Es bedeute nun E einen sich um $x = 0$, wenn $\lambda > 0$, um $x = \infty$, wenn $\lambda < 0$ ist, $|\lambda|$-fach windenden Bereich der x-Ebene, der durch einen um $x = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen, $|\lambda|$-fach gewundenen Kreis K begrenzt wird, und mögen sich die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ innerhalb E eindeutig und in der Umgebung jeder von $x = 0$ beziehungsweise $x = \infty$ verschiedenen Stelle von E regulär verhalten; dann wird E durch die Beziehung

$$x = \xi^{\lambda}$$

auf das Innere einer um $\xi = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen schlichten Kreisfläche $\mathfrak{E}$ der ξ-Ebene abgebildet, und die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ sind als Functionen von ξ innerhalb $\mathfrak{E}$ eindeutig und verhalten sich in der Umgebung jeder von $\xi = 0$ verschiedenen Stelle von $\mathfrak{E}$ regulär. Die Identität (3) lehrt, dass sich in diesem Falle auch die Coefficienten $q_1, q_2, \cdots q_n$ innerhalb $\mathfrak{E}$ eindeutig und an jeder von $\xi = 0$ verschiedenen Stelle von $\mathfrak{E}$ regulär verhalten. Sollen die Integrale der Differentialgleichung (A) im Punkte $x = 0$, wenn $\lambda > 0$, im Punkte $x = \infty$, wenn $\lambda < 0$ ist, bestimmt sein, so muss für dieselben, also auch für die Integrale von (A′), der Punkt $\xi = 0$ ein Punkt der Bestimmtheit sein. Hierfür ist aber nach den Resultaten der Nummern 43, 50 nothwendig und hinreichend, dass in der Normalform (E′) die Coefficienten $Q_{n-1}, Q_{n-2}, \cdots Q_0$ in der Umgebung von $\xi = 0$ regulär sind und $Q_n = 1$ ist, d. h. aber zufolge der Identität (2) nichts anderes, als es müssen in der Normalform (E) der gegebenen Differentialgleichung die Coefficienten $P_{n-1}, P_{n-2}, \cdots P_0$ nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\lambda}}$ entwickelbar und P_n eine von x unabhängige Grösse sein.

Die zu $\xi = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (A′) und (E′) lautet

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} Q_{\varkappa}(0)\, \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1) = 0,$$

oder

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} \overline{P}_{\varkappa} \cdot \frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda} - 1\right) \cdots \left(\frac{\varrho}{\lambda} - \varkappa + 1\right) = 0, \tag{4}$$

wo $\overline{P}_{\varkappa}$ das Anfangsglied der nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\lambda}}$ fortschreitenden Entwickelung von $P_{\varkappa}(x)$ bedeutet, also insbesondere

$$\overline{P}_n = P_n(x) = \text{const.}$$

ist. Für $\lambda > 0$ ist

$$P_\varkappa = P_\varkappa(0),$$

für $\lambda < 0$ haben wir dagegen

$$P_\varkappa = P_\varkappa(\infty).$$

Aus der Form der Elemente des zu $\xi = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A′) ergiebt sich unmittelbar die Entwickelung der zu $x = 0$ beziehungsweise $x = \infty$ gehörigen canonischen Integrale der Differentialgleichung in der Umgebung des betreffenden Punktes. Wir nennen die Gleichung (4) die zum Punkte $x = 0$, beziehungsweise $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A) und übertragen auch alle im Sinne der vorigen Kapitel für die Differentialgleichung (A′) geltenden Bezeichnungen unmittelbar auf (A). So wird also z. B., wenn $\lambda = -1$, d. h. der Punkt $x = \infty$ so beschaffen ist, dass sich die Coefficienten von (A) in seiner Umgebung wie rationale Functionen verhalten, und die Integrale von (A) daselbst bestimmt sind,

$$p_\varkappa(x) = \frac{P_{n-\varkappa}}{x^\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sein, d. h. $p_\varkappa(x)$ muss in diesem Falle für $x = \infty$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden. Wir ersehen hieraus, dass der Punkt $x = \infty$ für eine lineare homogene Differentialgleichung eine wesentlich andere Rolle spielt, wie irgend ein im Endlichen gelegener Punkt, er ist nämlich im Allgemeinen singulärer Punkt der Integrale, auch wenn sich die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung in seiner Umgebung regulär verhalten, d. h. nach fallenden Potenzen von x, also nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelbar sind.

60. Windungspunkt der Coefficienten, wo dieselben nicht unendlich werden.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo für ein positives λ die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\lambda}}$ entwickelbar sind, wo also der Punkt $x = 0$ für die Coefficienten der Differentialgleichung zwar ein algebraischer Windungspunkt, aber keine Unendlichkeitsstelle ist. Sei also

$$p_\varkappa(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\varkappa\nu}\xi^\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

und demnach in der Normalform (E)

$$(5)\qquad P_n = 1,\quad P_\varkappa(x) = \xi^{\lambda(n-\varkappa)} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n-\varkappa,\,\nu}\,\xi^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

dann ist aus den Identitäten (2), (3) unmittelbar ersichtlich, dass $\xi = 0$ im Allgemeinen ein singulärer Punkt der Differentialgleichungen (A'), (E') sein wird. Die determinirende Fundamentalgleichung lautet, da

$$P_\varkappa(0) = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots (n-1))$$

ist, einfach

$$\frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda} - 1\right) \cdots \left(\frac{\varrho}{\lambda} - n + 1\right) = 0,$$

ihre sämmtlichen Wurzeln

$$0,\ \lambda,\ 2\lambda,\ \cdots (n-1)\lambda$$

bilden also eine einzige Gruppe. Zufolge unserer allgemeinen Theorie giebt es jedenfalls ein zum Exponenten $(n-1)\lambda$ gehöriges Integral von der Form

$$\xi^{(n-1)\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \xi^\nu; \qquad \gamma_0 \neq 0,$$

die zu den anderen Wurzeln gehörigen canonischen Integrale könnten aber noch Logarithmen enthalten. Wir wollen zeigen, dass dies nicht der Fall, d. h. dass der Punkt $\xi = 0$ ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (A') bez. (E') ist.

Zu dem Ende entwickeln wir die vom Factor ξ^ϱ befreite charakteristische Function (E') nach Potenzen von ξ:

$$f\left(\xi^\lambda, \frac{\varrho}{\lambda}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) \xi^\nu;$$

dann ist zufolge der Gleichungen (5)

$$f_0\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) = \frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda} - 1\right) \cdots \left(\frac{\varrho}{\lambda} - n + 1\right),\quad f_1\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) = 0, \cdots f_{\lambda-1}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) = 0,$$

ferner enthalten die Coefficienten

$$f_{\varkappa\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right),\quad f_{\varkappa\lambda+1}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right), \cdots f_{(\varkappa+1)\lambda-1}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)$$

den Factor

$$\frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda} - 1\right) \cdots \left(\frac{\varrho}{\lambda} - n + \varkappa + 1\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots (n-1)).$$

Die Recursionsformel für die Coefficienten einer Reihe

$$g(\xi, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho)\, \xi^{\varrho+\nu},$$

die der Differentialgleichung (E′) genügen soll, lautet zufolge der allgemeinen Theorie

$$a_{\nu 0}(\varrho)g_0(\varrho) + a_{\nu 1}(\varrho)g_1(\varrho) + \cdots + a_{\nu\nu}(\varrho)g_\nu(\varrho) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo

$$a_{\alpha\beta}(\varrho) = f_{\alpha-\beta}\left(\frac{\varrho+\beta}{\lambda}\right)$$

zu nehmen ist. Denken wir uns für ϱ gleich die kleinste Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung gesetzt, also $\varrho = 0$, und schreiben die Werthe der $a_{\alpha\beta}(\varrho)$, $g_\nu(\varrho)$ für diesen Werth von ϱ, indem wir das Argument ϱ weglassen, so erkennen wir zunächst, dass in der für die Reihe

$$g(\xi, 0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \xi^\nu$$

gültigen Recursionsformel

$$a_{\nu\nu} = f_0\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{ist, für} \quad \nu = 0, \lambda, \cdots (n-1)\lambda,$$

dass dagegen

$$a_{\nu\nu} \neq 0,$$

wenn $\nu < n\lambda$ aber kein Multiplum von λ und wenn $\nu \geqq n\lambda$ ist. Es werden sich also jedenfalls die

$$g_\nu, \qquad \nu \geqq n\lambda$$

durch die $g_0, g_1, \cdots g_{n\lambda-1}$, die den Gleichungen

$$(6) \qquad a_{\nu 0}g_0 + a_{\nu 1}g_1 + \cdots + a_{\nu\nu}g_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots (n\lambda - 1))$$

gemäss zu bestimmen sind, eindeutig darstellen lassen, wir haben folglich nur dieses Gleichungssystem genauer zu untersuchen. Hier bemerken wir, dass

$$a_{\nu, \varkappa\lambda} = f_{\nu-\varkappa\lambda}(\varkappa) = 0$$

ist, für

$$\varkappa = 0, 1, \cdots n-1,$$
$$\nu = \varkappa\lambda, \varkappa\lambda + 1, \cdots n\lambda - 1;$$

die Coefficienten

$$g_0, g_\lambda, \cdots g_{(n-1)\lambda}$$

kommen demnach in dem Gleichungssysteme überhaupt nicht vor, sie bleiben also willkürlich. Da ferner

$$a_{\nu\nu} \neq 0$$

ist, wenn ν mit keiner der Zahlen $0, \lambda, \cdots (n-1)\lambda$ übereinstimmt, so liefern die Gleichungen (6) für alle

$$g_\nu, \quad \nu < n\lambda,$$

deren Index ν kein Vielfaches von λ ist, den Werth Null, die Reihe $g(\xi, 0)$ hat also die Form

$$g(\xi, 0) = g_0 + g_\lambda \xi^\lambda + \cdots + g_{(n-1)\lambda} \xi^{(n-1)\lambda} + \sum_{\nu=n\lambda}^{\infty} g_\nu \xi^\nu;$$

die n ersten Coefficienten $g_0, g_\lambda, \cdots g_{(n-1)\lambda}$ bleiben willkürlich, die folgenden bestimmen sich eindeutig als lineare homogene Ausdrücke dieser willkürlichen $g_0, g_1, \cdots g_{(n-1)\lambda}$. Wählen wir nun für diese letzteren die n Werthsysteme

$$\begin{array}{l} g_0 = 1, \; g_\lambda = 0, \; \cdots \; g_{(n-1)\lambda} = 0, \\ g_0 = 0, \; g_\lambda = 1, \; \cdots \; g_{(n-1)\lambda} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_0 = 0, \; g_\lambda = 0, \; \cdots \; g_{(n-1)\lambda} = 1, \end{array}$$

so erhalten wir n linear unabhängige nach positiven ganzen Potenzen von ξ fortschreitende Reihen, die beziehungsweise zu den Exponenten

$$0, \; \lambda, \; 2\lambda, \; \cdots \; (n-1)\lambda$$

gehören und die also das zu $\xi = 0$ gehörige canonische Fundamentalsystem der Differentialgleichung (E′) darstellen. Die Reihe $g(\xi, 0)$ mit den willkürlichen $g_0, g_\lambda, \cdots g_{(n-1)\lambda}$ liefert das allgemeine Integral von (E′). Es ergiebt sich somit das folgende Theorem, welches als Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Nr. 9 (S. 25) angesehen werden kann:

Wenn in der Differentialgleichung (A) die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\lambda}}$, λ eine positive ganze Zahl, entwickelbar sind, so ist das allgemeine Integral von (A) auch nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\lambda}}$ entwickelbar und diese Entwickelung hat die Form

$$g_0 + g_\lambda x + g_{2\lambda} x^2 + \cdots + g_{(n-1)\lambda} x^{n-1} + \sum_{\nu=n\lambda}^{\infty} g_\nu x^{\frac{\nu}{\lambda}},$$

wo $g_0, g_\lambda, \cdots g_{(n-1)\lambda}$ willkürlich zu wählende Constante bedeuten. Es lässt sich also stets ein Integral finden, welches mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen nach x im Punkte $x = 0$ willkürlich vorgeschriebene Werthe annimmt.

Damit wäre denn der Fall, wo sich die Integrale einer Differentialgleichung an einer beliebigen Stelle x, die für die Coefficienten entweder eine Eindeutigkeitsstelle oder ein Windungspunkt ist, bestimmt verhalten, erledigt. Wir haben gefunden, dass die Coefficienten an einer solchen Stelle stets den Charakter von algebraischen Functionen haben müssen, und wir haben auch die nothwendige und hinreichende Form der Entwickelung dieser Coefficienten in der Umgebung dieser Stelle angegeben. Das canonische Fundamentalsystem, welches zu einer solchen Stelle gehört, kann stets durch rein algebraische Processe hergestellt und sein Verhalten bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln um diese Stelle aus seinen Entwickelungen unmittelbar entnommen werden. Wir bemerken aber gleich hier, dass damit die Frage, wie sich ein beliebiges, etwa durch seine Anfangswerthe bei einer regulären Stelle definirtes Fundamentalsystem verändert, wenn x einen Umlauf um einen singulären Punkt $x = a$ vollzieht, auch in dem Falle, wo die Coefficienten in $x = a$ den Charakter algebraischer Functionen haben und alle Integrale in diesem Punkte bestimmt sind, nicht berührt ist; denn um diese Frage zu beantworten müsste man im Stande sein, die Coefficienten der linearen Beziehungen, die das gegebene Fundamentalsystem mit dem zu $x = a$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme verknüpfen, anzugeben. Diese Aufgabe soll in einem der folgenden Abschnitte gelöst werden; ist dieselbe aber gelöst, so sind wir nach den vorhergegangenen Erörterungen auch wirklich im Stande die Substitution anzugeben, die jenes Fundamentalsystem bei einem Umlaufe um $x = a$ erfährt, wenn sich die Integrale der Differentialgleichung in diesem Punkte bestimmt verhalten, und zwar bedarf es hierzu, wie wir wiederholt betonen, nur rein algebraischer Operationen mit den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern.

Fünfter Abschnitt.

Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Erstes Kapitel.

61. Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

Wir haben in unseren bisherigen Betrachtungen nur über die Beschaffenheit der Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ in der Umgebung einer gewissen Stelle besondere Voraussetzungen gemacht und demgemäss auch nur das Verhalten der Integrale in dieser Umgebung untersucht. Wenn es sich um das Studium der Integrale für alle Werthe der complexen Variabeln x handeln soll, so muss das Verhalten der Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ in der ganzen Ebene als bekannt vorausgesetzt werden.

Von besonderer Wichtigkeit und einer eingehenderen Erforschung bisher allein zugänglich ist der Fall, wo die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung (A) entweder in der ganzen Ebene oder auf einer über der x-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche T, die zu einem algebraischen Gebilde

$$F(x, s) = 0 \tag{1}$$

gehört, eindeutig sind und sich in der Umgebung jeder Stelle, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl solcher, regulär verhalten. Setzen wir dann überdies voraus, dass die sämmtlichen Integrale der gegebenen Differentialgleichung (A) an jeder Stelle der Riemann'schen Fläche T bestimmt sind, so folgt hieraus, dass die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ auch in denjenigen Punkten x, wo sie sich nicht regulär verhalten, den Charakter von algebraischen Functionen besitzen müssen, dass sie also selbst algebraische Functionen von x sind. Da dieselben ferner eindeutige Functionen des Ortes in der Fläche T sein sollten, so schliessen wir, dass die $p_1, p_2, \cdots p_n$ als rationale Functionen der beiden durch die Gleichung (1) verknüpften Variabeln x, s darstellbar sein müssen; wir deuten dies an, indem wir sie in der Form

$$p_\varkappa(x, s) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

schreiben, wo also $p_\varkappa$ den Algorithmus einer rationalen Function bezeichnet. Wir wollen nun zuvörderst zeigen, dass sich die Untersuchung einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A), deren Coefficienten rationale Functionen von s und x sind, stets auf die einer ebenfalls homogenen und linearen Differentialgleichung mit in x allein rationalen Coefficienten zurückführen lässt.

In der That sei die Gleichung (1) eine irreductible algebraische Gleichung m^{ten} Grades für s, und mögen einem willkürlichen Werthe von x die m Werthe

$$s_1,\ s_2,\ \cdots\ s_m$$

entsprechen. Dann lassen sich, nach dem Puiseux'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln, in der x-Ebene $m-1$ geschlossene Wege $C_2, \cdots C_m$ so angeben, dass, wenn x den Weg $C_\varkappa$ durchläuft, der Zweig s_1 in $s_\varkappa$ übergeht.

Bedeute nun

$$y_{11},\ y_{12},\ \cdots\ y_{1n}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}_1) \qquad y^{(n)} + p_1(x, s_1)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x, s_1)\, y = 0,$$

und mögen die Elemente dieses Fundamentalsystems, wenn x den Weg $C_\varkappa$ beschreibt, in

$$y_{\varkappa 1},\ y_{\varkappa 2},\ \cdots\ y_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 2, 3 \cdots m)$$

übergehen, dann bilden diese n Functionen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}_\varkappa) \qquad y^{(n)} + p_1(x, s_\varkappa)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x, s_\varkappa)\, y = 0.$$

Bildet man aus den $m \cdot n$ Functionen

$$(2) \qquad y_{\varkappa i} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m;\ i = 1, 2, \cdots n)$$

und der unbestimmten Function y den Determinantenquotienten

$$\frac{D(y, y_{11}, \cdots y_{1n}, \cdots, y_{m1}, \cdots y_{mn})}{D(y_{11}, \cdots y_{1n}, \cdots, y_{m1}, \cdots y_{mn})} = \Pi(y),$$

so stellt derselbe einen Differentialausdruck $m \cdot n^{\text{ter}}$ Ordnung in y dar, und die Functionen $y_{\varkappa i}$ bilden, wie leicht einzusehen ist, ein System linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung

$$(3) \qquad \Pi(y) = 0.$$

Zufolge des Appell'schen Satzes (Nr. 15, S. 40) sind die Coefficienten von $\Pi(y)$ rational zusammengesetzt aus den Coefficienten der Differentialgleichungen $(\mathrm{A}_1), \cdots (\mathrm{A}_m)$ und deren Ableitungen, sie sind folglich rational in x und den $s_1, s_2, \cdots s_m$. Da aber bei irgend einem

Umlaufe von x, der die algebraische Function s zu ihrem Ausgangswerthe zurückführt, die Functionen

$$y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

in lineare Functionen ihrer selbst, bei einem Umlaufe von x dagegen, der den Zweig $s_\varkappa$ in $s_{i_\varkappa}$ verwandelt, in eine lineare homogene Function der

$$y_{i_\varkappa 1}, y_{i_\varkappa 2}, \cdots y_{i_\varkappa n}$$

übergehen, so sind die Coefficienten von $\Pi(y)$ überdies symmetrische Functionen der $s_1, s_2, \cdots s_m$, also rationale Functionen von x selbst. Die Differentialgleichung $m \cdot n^{\text{ter}}$ Ordnung (2) mit in x rationalen Coefficienten kann also an Stelle der Differentialgleichung (A) der Untersuchung zu Grunde gelegt werden; wir wollen darum von vorneherein annehmen, es sei eine Differentialgleichung (A) vorgelegt, deren Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ rationale Functionen von x sind.

62. Differentialgleichungen, deren Integrale überall bestimmt sind. Die Fuchs'sche Classe.

Wenn wir voraussetzen, dass die Coefficienten von (A) in der ganzen x-Ebene eindeutig und nur in der Umgebung einer endlichen Anzahl von Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nicht regulär sind, dass sich ferner die Integrale dieser Differentialgleichung für alle Werthe von x bestimmt verhalten, so sind die Coefficienten von (A) rationale Functionen von x, denn sie haben in der Umgebung jeder Stelle den Charakter von rationalen Functionen. Die Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ sind dann Unendlichkeitsstellen der Coefficienten, wo dieselben von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich werden, diese Stellen und der Punkt $x = \infty$ machen die einzigen singulären Stellen der Differentialgleichung aus.

Betrachten wir die im Endlichen gelegene singuläre Stelle $x = a_i$, so muss, da die Integrale von (A) an dieser Stelle bestimmt sein sollen,

$$p_\varkappa(x) = \frac{\mathfrak{P}_{n-\varkappa}(x \mid a_i)}{(x - a_i)^\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sein, wo $\mathfrak{P}_{n-\varkappa}(x \mid a_i)$ eine in der Umgebung von $x = a_i$ reguläre Function bedeutet. Setzen wir also

$$(4) \qquad (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_\sigma) = \psi(x),$$

so müssen sich die Producte

$$\psi^\varkappa(x) \cdot p_\varkappa(x) = \mathfrak{P}_{n-\varkappa}(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

in der Umgebung jeder endlichen Stelle x regulär verhalten. Da aber die Integrale auch für $x = \infty$ bestimmt sein sollen, so müssen die Producte

$$x^{\varkappa} p_{\varkappa}(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

für hinreichend grosse Werthe von x nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelbar und also die Ausdrücke

$$\frac{\mathfrak{P}_{n-\varkappa}(x)}{x^{\varkappa(\sigma-1)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

für $x = \infty$ endlich sein. Die $\mathfrak{P}_{n-\varkappa}(x)$ sind ganze rationale Functionen von x, denn sie sind in der Umgebung jedes endlichen x-Werthes regulär, und die $p_{\varkappa}(x)$ waren rationale Functionen, folglich ist

$$\mathfrak{P}_{n-\varkappa}(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine ganze rationale Function vom höchstens $\varkappa(\sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grade von x; eine Differentialgleichung (A), deren Coefficienten rational und deren Integrale allenthalben bestimmt sind, hat also die Form

$$\text{(F)} \quad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{F_{\sigma-1}(x)}{\psi(x)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{F_{2(\sigma-1)}(x)}{\psi^2(x)} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$+ \frac{F_{(n-1)(\sigma-1)}(x)}{\psi^{n-1}(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{F_{n(\sigma-1)}}{\psi^n(x)} y = 0,$$

wenn $F_{\alpha}(x)$ eine ganze rationale Function vom höchstens α^{ten} Grade in x, $\psi(x)$ eine ganze rationale Function σ^{ten} Grades in x, die für σ verschiedene Stellen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma}$ verschwindet, darstellt. Diese Form ist nothwendig und nach den Resultaten der Nummern 43, 50 auch hinreichend dafür, dass sich sämmtliche Integrale einer Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten allenthalben bestimmt verhalten. Dies ist die Classe von Differentialgleichungen, die wir am Eingange des vierten Abschnittes (S. 138) erwähnt und als diejenige bezeichnet haben, an welche fast alle tieferen Untersuchungen unserer Theorie anknüpfen; sie wurde von Herrn Fuchs zum ersten Male aufgestellt und eingehend studirt, wir wollen sie deshalb die Fuchs'sche Classe linearer homogener Differentialgleichungen nennen.

Betrachten wir die nicht homogene Differentialgleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = p(x),$$

worin $p_1(x), \cdots p_n(x)$ und $\frac{d \log p(x)}{dx}$ in der ganzen Ebene eindeutig und mit Ausnahme der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma}$ in der Umgebung jeder im Endlichen gelegenen Stelle regulär sind. Sollen sich die sämmtlichen Integrale dieser Differentialgleichung ebensowohl wie die der zugehörigen reducirten überall bestimmt verhalten, so muss (vergl. Nr. 58) das gleiche von den Integralen der Differentialgleichung

$$\mathfrak{R}(y) = \frac{d\,\mathfrak{P}(y)}{dx} - \frac{d \log p(x)}{dx}\,\mathfrak{P}(y) = 0$$

gelten, d. h. es müssen die beiden Differentialgleichungen

$$\mathfrak{P}(y) = 0, \qquad \mathfrak{R}(y) = 0$$

der Fuchs'schen Classe angehören. Hieraus ergiebt sich als nothwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten dieses Falles, dass $\mathfrak{P}(y)$ die Form der linken Seite von (F) und $p(x)$ die Form

$$p(x) = C(x - a_1)^{\mu_1}(x - a_2)^{\mu_2} \cdots (x - a_\varrho)^{\mu_\varrho}$$

habe, wo C, μ_1, μ_2, $\cdots$ μ_ϱ Constanten bedeuten.

63. Recursionsformel für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Eine homogene Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten lässt sich durch Multiplication mit einer ganzen rationalen Function von x stets auf die Form bringen

$$\varphi_n(x) y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_0(x) y = 0, \tag{5}$$

wo $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$, $\cdots$ $\varphi_0(x)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten; die singulären Punkte der Differentialgleichung sind dann die Lösungen der Gleichung

$$\varphi_n(x) = 0,$$

denen im Allgemeinen noch der Punkt $x = \infty$ hinzuzufügen ist. Diese Form einer Differentialgleichung ist besonders zweckmässig, wenn es sich um die Berechnung der Coefficienten der Entwickelungen eines zu einem Punkte $x = a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems aus den Recursionsformeln handelt, und falls dieser Punkt so beschaffen ist, dass sich in demselben alle Integrale der Differentialgleichung bestimmt verhalten. Denken wir uns nämlich für einen solchen Punkt die Differentialgleichung (5) auf die Normalform gebracht, d. h. in der Form

$$(x - a)^n \psi_n(x) y^{(n)} + (x - a)^{n-1} \psi_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + \psi_0(x) y = 0 \tag{6}$$

geschrieben, was, falls $\varphi_n(x)$ den Factor $x - a$ zu einer niedrigeren als der n^{ten} Potenz enthält, durch Multiplication mit einer Potenz von $x - a$ stets geschehen kann. Dann muss, damit sich alle Integrale in $x = a$ bestimmt verhalten, nach den Ergebnissen der Nummern 43, 44,

$$\psi_n(a) \neq 0$$

sein, wie man sofort übersieht, wenn man sich

$$x - a = x'$$

als neue unabhängige Variable in die Differentialgleichung eingeführt denkt. Enthält $\varphi_n(x)$ den Factor $x - a$ überhaupt nicht, so ist $x = a$ ein regulärer Punkt der Differentialgleichung und es ist in diesem Falle

$$\psi_{n-\varkappa}(x) = (x - a)^{\varkappa} \varphi_{n-\varkappa}(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n).$$

Die charakteristische Function der Differentialgleichung (6) wird erhalten, indem wir in die linke Seite derselben $(x - a)^{\varrho}$ an die Stelle von y setzen; sei das Ergebniss dieser Substitution

$$(7) \quad (x-a)^{\varrho} f(x-a, \varrho) = (x-a)^{\varrho} \sum_{\varkappa=0}^{n} \psi_{\varkappa}(x)\, \varrho(\varrho-1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1),$$

dann sehen wir also, dass in diesem Falle $f(x - a, \varrho)$ eine ganze rationale Function von x wird, deren Grad mit dem höchsten der Grade der ganzen Functionen $\psi_n(x)$, $\psi_{n-1}(x)$, $\cdots$ $\psi_0(x)$ übereinstimmt. Sei dieser höchste Grad der m^{te}, dann ist also nach Potenzen von $x - a$ entwickelt

$$f(x - a, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{m} f_{\nu}(\varrho)\,(x - a)^{\nu}.$$

Für die Coefficienten einer der Differentialgleichung formal genügenden Reihe

$$g(x - a, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_0(\varrho)\,(x - a)^{\nu+\varrho}$$

ergiebt sich hiernach die Recursionsformel

$$(8) \quad a_{\nu\nu}(\varrho) g_{\nu}(\varrho) + a_{\nu,\nu-1}(\varrho) g_{\nu-1}(\varrho) + \cdots + a_{\nu,\nu-m}(\varrho) g_{\nu-m}(\varrho) = 0$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo

$$a_{\alpha\beta}(\varrho) = f_{\alpha-\beta}(\varrho + \beta) \qquad (\beta \leqq \alpha)$$

ist; wir haben also

$$a_{\alpha\beta}(\varrho) = 0, \quad \text{für} \quad \alpha - \beta \geqq m,$$

was in der Formel (8) schon dadurch zum Ausdrucke gebracht ist, dass wir die verschwindenden $a_{\alpha\beta}(\varrho)$ weggelassen haben. Die Recursionsformel ist also in diesem Falle so beschaffen, dass sie, wie gross auch ν sein mag, stets nur $m + 1$ Glieder enthält, sie ist, wie wir kurz sagen wollen, eine $(m + 1)$-gliedrige, und dieser Umstand erleichtert natürlich die Coefficientenberechnung nicht unwesentlich. Allerdings stimmt diese Gestalt der Recursionsformel nicht vollständig mit derjenigen überein, auf die wir im vierten Abschnitte die Untersuchung der Möglichkeit einer Coefficientenberechnung und den Convergenzbeweis gegründet haben. Wir hatten nämlich daselbst vorausgesetzt, dass in der Normalform (E) der Coefficient $P_n(x)$ den Werth Eins habe, wir müssten also, um vollständige Uebereinstimmung zu erzielen, die Differentialgleichung (6) durch $\psi_n(x)$ dividiren. Dann ergäbe sich für die charakteristische Function der Ausdruck

$$(x-a)^{\varrho} \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\psi_\varkappa(x)}{\psi_n(x)} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1),$$

die Entwickelung des Factors von $(x-a)^{\varrho}$ nach Potenzen von $x-a$ enthielte also unendlich viele Potenzen und wäre nur innerhalb eines Kreises, der um $x=a$ als Mittelpunkt beschrieben ist und bis zur nächsten Nullstelle von $\psi_n(x)$ reicht, convergent. Die Nullstellen von $\psi_n(x)$ sind mit denen von $\varphi_n(x)$ identisch, wenn $x=a$ ein regulärer Punkt, d. h. $\varphi_n(a) \neq 0$ ist, sie sind die sämmtlichen von $x=a$ verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_n(x) = 0,$$

d. h. die sämmtlichen von a verschiedenen singulären Punkte der Differentialgleichung (5), wenn a selbst zu den singulären Punkten gehört. Bezeichnen wir also durch R_a den absoluten Betrag der von Null verschiedenen und dem absoluten Betrage nach kleinsten Wurzel der Gleichung

$$\varphi_n(x+a) = 0,$$

so ist R_a der Radius des Convergenzkreises der Entwickelung von

$$\bar{f}(x-a, \varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\psi_\varkappa(x)}{\psi_n(x)} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{f}_\nu(\varrho)(x-a)^\nu$$

nach Potenzen von $x-a$, und entspricht also der Grösse, die wir in der Nr. 47 (S. 164) durch R bezeichnet hatten. Innerhalb dieses selben Kreises, d. h. für

$$|x-a| < R_a,$$

convergirt dann zufolge des Satzes der Nr. 47 (vergl. Nr. 48) die Reihe

$$g(x-a, \varrho),$$

wenn wir ihre Coefficienten gemäss den Gleichungen

(9) $$\bar{a}_{\nu\nu}(\varrho) g_\nu(\varrho) + \cdots + \bar{a}_{\nu 0}(\varrho) g_0(\varrho) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

wo jetzt

$$\bar{a}_{\alpha\beta}(\varrho) = \bar{f}_{\alpha-\beta}(\varrho+\beta) \qquad (\alpha \geqq \beta)$$

ist, bestimmen mit ihren sämmtlichen nach ϱ genommenen Ableitungen, und stellt, wenn für ϱ eine Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung

$$\bar{f}_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\psi_\varkappa(a)}{\psi_n(a)} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1) = 0$$

genommen wird, entweder selbst oder bei geeigneter Wahl von $g_0(\varrho)$ (vergl. Nr. 49, Gl. 32) durch ihre Ableitungen nach ϱ ein Integral der Differentialgleichung dar. Nun ist aber:

$$\bar{f}(x-a, \varrho) = \frac{f(x-a, \varrho)}{\psi_n(x)};$$

wenn also

$$\psi_n(x) = \alpha_m + \alpha_{m-1}(x-a) + \cdots + \alpha_0(x-a)^m, \qquad \alpha_m \neq 0,$$

gesetzt wird, so haben wir nach dem Multiplicationstheorem der unendlichen Reihen

$$f_\nu(\varrho) = \alpha_m \bar{f}_\nu(\varrho) + \alpha_{m-1}\bar{f}_{\nu-1}(\varrho) + \cdots + \alpha_0 \bar{f}_{\nu-m}(\varrho)$$

und folglich

$$(10) \qquad a_{i\varkappa}(\varrho) = \sum_{h=\varkappa}^{i} \alpha_{m-i+h}\bar{a}_{h\varkappa}(\varrho).$$

Diese Gleichungen lehren, dass das Coefficientensystem der Gleichungen (8) mit dem Coefficientensysteme der Gleichungen (9), wenn ν alle Werthe von Null bis zu einer bestimmten positiven ganzen Zahl μ durchläuft, durch die Compositionsgleichung

$$(a_{i\varkappa}) = (\alpha_{m-i+\varkappa})(\bar{a}_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \cdots \mu)$$

verbunden ist. Die Determinante des Systems $(\alpha_{m-i+\varkappa})$ hat, da

$$\alpha_{m-i+\varkappa} = 0 \quad \text{ist, für} \quad \varkappa > i,$$

den Werth

$$\alpha_m^{\mu+1},$$

sie ist also von Null verschieden, und es sind folglich die Gleichungssysteme (8) und (9), wie weit man in denselben ν auch gehen lässt, aequivalent, d. h. wir können ohne Weiteres das bequemere Gleichungssystem (8) zur Berechnung der Coefficienten von $g(x-a, \varrho)$ benutzen. Für $\nu = 0$ liefert das Gleichungssystem (8) die Gleichung

$$(11) \qquad f_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \psi_\varkappa(a)\, \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1) = 0$$

für ϱ, dies ist also die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (5) oder (6), wie aus (10) für $i = \varkappa$ auch unmittelbar erhellt. Setzen wir für ϱ in die Gleichungen (8) eine Wurzel $r_\varkappa$ dieser determinirenden Fundamentalgleichung ein, zu der, nach den Kriterien der Nr. 53 (S. 189), ein von Logarithmen freies Integral gehört, so genügen also die Coefficienten der zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörigen Reihe

$$g(x-a, r_\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu (x-a)^{\nu + r_\varkappa}$$

der Recursionsformel

$$(12) \qquad a_{\nu\nu} g_\nu + a_{\nu,\nu-1} g_{\nu-1} + \cdots + a_{\nu,\nu-m} g_{\nu-m} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3 \cdots),$$

wo

$$a_{\alpha\beta} = f_{\alpha-\beta}(r_\varkappa + \beta), \qquad \beta \leq \alpha, \qquad \alpha - \beta > m,$$

also $a_{\nu,\nu-i}$ eine ganze Function n^{ten} Grades des zweiten Index $(\nu - i)$ ist, und g_0 eine noch willkürlich zu wählende Constante bedeutet.

64. Reihenalgorithmus für einen im Endlichen gelegenen und für den unendlich fernen Punkt.

Zur Bildung der Gleichung (8) trägt nur das endliche Stück

$$g_{\nu-m}(\varrho)(x-a)^{\nu-m+\varrho} + g_{\nu-m+1}(\varrho)(x-a)^{\nu-m+1+\varrho} + \cdots + g_\nu(\varrho)(x-a)^{\nu+\varrho}$$

der Reihe $g(x-a, \varrho)$ bei; wir würden also dieselbe Recursionsformel erhalten, wenn wir der Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form

$$g(x-a, \varrho) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu(\varrho)(x-a)^{\nu+\varrho}$$

zu genügen suchten. Falls nun der Punkt $x = \infty$ so beschaffen ist, dass sich in demselben die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (6) bestimmt verhalten, so muss es in der That Reihen von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{-\nu}(\varrho)(x-a)^{-\nu+\varrho}$$

geben, die zu Wurzeln der $x = \infty$ entsprechenden determinirenden Fundamentalgleichung gehören, d. h. Reihen, die, wenn für $-\varrho$ eine Wurzel dieser Gleichung genommen wird, zu der ein von Logarithmen freies Integral gehört, der Differentialgleichung genügen und ausserhalb eines gewissen um $x = a$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises convergent sind. Der Radius dieses Kreises bestimmt sich, wie auf Grund der

Resultate des vorigen Abschnittes sofort zu übersehen ist, wenn man die Substitution

$$x - a = x' \tag{13}$$

in die Differentialgleichung macht, im Allgemeinen gleich dem grössten unter den absoluten Beträgen der Wurzeln der Gleichung

$$\psi_n(x + a) = 0.$$

Damit die Integrale von (6) im Punkte $x = \infty$ sämmtlich bestimmt sind, ist nothwendig und hinreichend, dass $\psi_n(x)$ in x von nicht niedrigerem Grade sei wie $\psi_{n-1}(x), \cdots \psi_0(x)$, d. h. dass der Grad von $\psi_n(x)$ genau gleich m ist; es muss also in diesem Falle $\alpha_0 \neq 0$ sein, denn alsdann hat die Differentialgleichung (6) nach Division durch $\psi_n(x)$ und nach Ausführung der Substitution (13) die in dem Satze der Nr. 59 (S. 211) angegebene Gestalt. Die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung lautet (vergl. S. 211, Gl. (4)):

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} \overline{\psi}_\varkappa(-\varrho)(-\varrho - 1) \cdots (-\varrho - \varkappa + 1) = 0, \tag{14}$$

wo

$$\overline{\psi}_\varkappa = \lim_{x=\infty} \frac{\psi_\varkappa(x)}{(x-a)^m}, \qquad \overline{\psi}_n = \alpha_0 \neq 0$$

ist, und wenn jetzt $s_\varkappa$ eine Wurzel dieser Gleichung bedeutet, zu der ein von Logarithmen freies Integral gehört, so liefert die Gleichung (8), wenn in derselben $-\varrho = s_\varkappa$ gesetzt und für ν die Werthe $0, -1, -2, \cdots$ genommen werden, die Recursionsformel für die dieses Integral in der Umgebung von $x = \infty$ darstellende Reihe.

In der Gleichung (8) ist

$$a_{\nu, \nu - m}(\varrho) = f_m(\varrho + \nu - m);$$

da $f_m(\varrho)$ den Coefficienten von $(x-a)^m$ in $f(x - a, \varrho)$ bedeutet, so ist

$$f_m(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \overline{\psi}_\varkappa\, \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1)$$

und folglich

$$f_m(-\varrho) = 0$$

nichts anderes als die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung (14). Denken wir uns also die $a_{\nu, \nu - i}(\varrho)$ als ganze Functionen von $\varrho + \nu - i$ in Linearfactoren zerlegt:

$$a_{\nu, \nu - i}(\varrho) = \mathfrak{a}_i(\varrho + \nu - i - \tau_{i1})(\varrho + \nu - i - \tau_{i2}) \cdots (\varrho + \nu - i - \tau_{in})$$
$$(i = 0, 1, \cdots m),$$

so stimmen die

$$\tau_{01},\ \tau_{02},\ \cdots\ \tau_{0n}$$

mit den Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen, die

$$\tau_{m1},\ \tau_{m2},\ \cdots\ \tau_{mn}$$

mit den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung überein. Die Coefficienten einer nach steigenden oder fallenden Potenzen von $x - a$ fortschreitenden Reihe $g(x - a, \varrho)$, deren Coefficienten aus der Recursionsformel (8) bestimmt werden, hängen allein von den Grössen

$$\mathfrak{a}_i, \qquad \varrho - \tau_{i\lambda} \qquad\qquad (i = 0, 1, \cdots m;\ \lambda = 1, 2, \cdots n)$$

ab, aus denen sie in leicht angebbarer Weise zu bilden sind. Wir können folglich die nach steigenden Potenzen fortschreitende Reihe $g(x - a, \varrho)$ durch einen Algorithmus von der Form

(15) $$(x - a)^{\varrho}\, \Phi\, \{\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_1,\ \cdots\ \mathfrak{a}_m;\ \varrho - \tau_{i\lambda};\ x - a\},$$

und alsdann die nach fallenden Potenzen fortschreitende Reihe durch den Algorithmus

(16) $$(x - a)^{\varrho}\, \Phi \left\{\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{a}_{m-1},\ \cdots\ \mathfrak{a}_0;\ -\varrho + \tau_{m-i,\lambda};\ \frac{1}{x-a}\right\}$$

darstellen. Bilden wir diese Algorithmen für unbestimmtes ϱ mit Hülfe der Gleichungen (8), so stellen sie selbst oder durch ihre Ableitungen nach ϱ, wenn man in (15) für ϱ die Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen, in (16) für $-\varrho$ die Wurzeln der $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung einsetzt, die Elemente des zu $x = a$, beziehungsweise die des zu $x = \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems dar. Um insbesondere das zur Wurzel $r_\varkappa$ von (11), beziehungsweise das zur Wurzel $s_\varkappa$ von (14) gehörige von Logarithmen freie Integral zu erhalten, hat man in der Recursionsformel (8) von vorneherein $\varrho = r_\varkappa$, beziehungsweise $-\varrho = s_\varkappa$ zu setzen und dann mit Hülfe dieses Gleichungssystems die Algorithmen (15), beziehungsweise (16) herzustellen.

Zweites Kapitel.

65. **Convergenz von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. Satz von Thomé.**

Die Ergebnisse des vorigen Kapitels liefern im Falle, wo die vorgelegte Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört, auf diese Weise ein einheitliches Bildungsgesetz für die Elemente des zu einem beliebigen regulären oder singulären, im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen Punkte gehörigen canonischen Fundamentalsystems. Die in den Entwickelungen auftretenden Potenzreihen convergiren jedenfalls, wenn es sich um einen im Endlichen gelegenen Punkt handelt, innerhalb eines um diesen Punkt beschriebenen Kreises, der sich bis zum nächsten singulären Punkte ausdehnt, wenn es sich um $x = \infty$ handelt und die Entwickelungen nach Potenzen von $(x - a)^{-1}$ vorgenommen werden, ausserhalb eines um $x = a$ beschriebenen Kreises, auf dessen Peripherie der von a am weitesten abstehende singuläre Punkt gelegen ist.

Während sich im Allgemeinen über die Convergenz oder Divergenz einer Reihe, die in der Entwickelung eines Integrals einer homogenen linearen Differentialgleichung auftritt, für die Punkte ihres Convergenzkreises nichts Bestimmtes aussagen lässt, so können für den Fall, wo die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört, genaue Kriterien für diese Convergenzfrage aufgestellt werden. Dies ist die erste ausgezeichnete Eigenschaft der Differentialgleichungen dieser Classe, der wir begegnen; die fundamentale Wichtigkeit dieser Eigenschaft wird später, wenn wir die am Schlusse der Nr. 60 (S. 216) formulirte Aufgabe zu lösen haben werden, deutlich hervortreten.

Ist eine gewöhnliche Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$ von $(x - a)$ gegeben, die innerhalb eines Kreises

$$|x - a| = R$$

convergirt, ausserhalb desselben divergirt, so hängt die Convergenz oder Divergenz von $\mathfrak{P}(x - a)$ auf der Peripherie des Convergenzkreises von dem analytischen Charakter der durch die Potenzreihe definirten monogenen Function $f(x)$ in der Umgebung der Stellen dieser Kreisperipherie ab. Allgemein gilt der von Abel herrührende Satz, dass, wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$ an einer Stelle $x = b$ ihres Convergenzkreises noch convergirt, der Werth $\mathfrak{P}(b|a)$ mit dem Grenzwerthe übereinstimmt, dem sich $\mathfrak{P}(x|a)$ annähert, wenn x aus dem Innern des Convergenzkreises kommend in den Punkt b einrückt. Bedeutet also $b_1, b_2, \cdots$ eine beliebige Werthenfolge, für welche

$$|b_\varkappa| < R, \quad \lim_\varkappa b_\varkappa = b$$

ist, so hat man, wenn $\mathfrak{P}(x|a)$ in $x = b$ convergirt,

$$\mathfrak{P}(b|a) = \lim_\varkappa \mathfrak{P}(b_\varkappa|a).$$

Wenn sich die Function $f(x)$ im Punkte $x = b$ bestimmt verhält, und $f(x)$ eben denjenigen Zweig dieser Function bezeichnet, der für $|x - a| < R$ mit $\mathfrak{P}(x|a)$ übereinstimmt, so heisst dies nichts anderes als

$$\mathfrak{P}(b|a) = f(b).$$

Wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe genügt, so verhält sich das durch $\mathfrak{P}(x|a)$ definirte particuläre Integral $y(x)$ überall bestimmt. Auf dem Convergenzkreise

$$|x - a| = R_a$$

dieser Potenzreihe liegt einer oder liegen mehrere singuläre Punkte der Differentialgleichung; seien dieselben

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau.$$

Dann verhält sich $y(x)$ an allen von diesen τ Stellen verschiedenen Stellen der Peripherie des Convergenzkreises regulär und ist in der Umgebung von $b_\varkappa$ als homogene lineare Function der Elemente des zu $b_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems $u_{\varkappa 1}, u_{\varkappa 2}, \cdots u_{\varkappa n}$ darstellbar. Also ist $y(x)$ eine homogene lineare Function von Ausdrücken der Form

$$(17) \quad (x - b_\varkappa)^r (\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \log(x - b_\varkappa) + \cdots + \varphi_m(x) \log^m (x - b_\varkappa)),$$

in denen die Exponenten r als die von einander nicht nur um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln der zu $x = b_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung angesehen werden können, und wo $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_m$ in der Umgebung von $x = b_\varkappa$ reguläre Functionen bedeuten.

Wenn eine Function in der Umgebung einer Stelle $x = b_\varkappa$ als homogene lineare Function mit constanten Coefficienten von Ausdrücken der Form (17) dargestellt werden kann, so wollen wir kurz sagen: **sie habe im Punkte $b_\varkappa$ den Charakter eines sich bestimmt verhaltenden Integrals einer linearen Differentialgleichung.**

Möge nun allgemein $\mathfrak{P}(x|a)$ eine Potenzeihe sein, für welche der durch dieselbe definirte Functionszweig $y(x)$ in den Punkten $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ des Convergenzkreises, wo derselbe nicht regulär ist, den Charakter eines sich bestimmt verhaltenden Integrals einer linearen Differentialgleichung besitzt; dann gilt von einer so beschaffenen Potenzreihe der folgende Thomé'sche Convergenzsatz:

Wenn die realen Theile aller Exponenten r, die in den Entwickelungen von $y(x)$ in der Umgebung der auf dem Convergenzkreise gelegenen singulären Punkte $b_\varkappa$, $(\varkappa=1,2,\cdots\tau)$, auftreten, im algebraischen Sinne grösser sind als -1, so convergirt die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$ in allen Punkten des Convergenzkreises, in deren Umgebung sich $y(x)$ regulär verhält, und in denjenigen der Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ in denen der für $|x-a|<R$ durch $\mathfrak{P}(x|a)$ dargestellte Functionszweig $y(x)$ einen endlichen Werth besitzt.

Beim Beweise dieses Satzes können wir $a=0$ voraussetzen, und schreiben dann

$$\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu, \qquad R_0=R;$$

es ist also

$$y(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu, \quad \text{für} \quad |x|<R.$$

Hieraus folgt

$$g_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=R'} \frac{y(x)}{x^{\nu+1}}\,dx, \quad R'<R, \tag{18}$$

oder wenn

$$x=\varrho e^{\Theta i}, \quad \varrho=|x|$$

gesetzt wird,

$$g_\nu=\frac{1}{2\pi R'^{\nu}}\int_0^{2\pi} y(R'e^{\Theta i})\,e^{-\nu i\Theta}\,d\Theta. \tag{19}$$

Denken wir uns nun, unter den angegebenen Voraussetzungen, das Integral

$$\int \frac{y(x)}{x^{\nu+1}}\,dx$$

in der Umgebung einer der Stellen $x=b_\varkappa$, $(\varkappa=1,2,\cdots\tau)$, entwickelt, so stellt sich dasselbe zufolge des Satzes 3 der Nr. 40 (S. 141) als eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von Ausdrücken von der Form (17) dar, in denen die Exponenten r positive reale Theile haben, wenn wir die bei Ausführung der Integration hinzutretende willkürliche Constante gleich Null nehmen. — Setzen wir also

$$b_\varkappa = Re^{\Theta_\varkappa i} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \tau),$$

so folgt hieraus und aus der Stetigkeit der Function $y(x)$ in der Umgebung solcher Punkte, wo sich dieselbe regulär verhält, dass wir an die Stelle der Gleichung (19) auch schreiben können

$$(20) \qquad g_\nu = \lim_{\substack{\varepsilon_\varkappa = 0 \\ \delta_{\varkappa+1}=0}} \sum_\varkappa \frac{1}{2\pi R^\nu} \int\limits_{\Theta_\varkappa + \varepsilon_\varkappa}^{\Theta_{\varkappa+1} - \delta_{\varkappa+1}} y(Re^{\Theta i}) e^{-\nu i \Theta} d\Theta,$$

wo $\varkappa$ die Werthe 0, 1, 2, $\cdots \tau$ durchläuft und $\varepsilon_\varkappa$, $\delta_\varkappa$ real positiv,

$$\Theta_0 = \varepsilon_0 = 0, \quad \Theta_{\tau+1} = 2\pi, \quad \delta_{\tau+1} = 0$$

zu nehmen ist. Die rechte Seite der Gleichung (20) bezeichnen wir auch kurz durch

$$(21) \qquad \frac{1}{2\pi R^\nu} \int\limits_0^{2\pi} y(Re^{\Theta i}) e^{-\nu i \Theta} d\Theta.$$

Denken wir uns $y(x)$ in seinen realen und imaginären Theil zerlegt,

$$y(x) = u(\varrho, \Theta) + iv(\varrho, \Theta),$$

so lässt sich, wenn wir x auf die Peripherie eines Kreises,

$$|x| = R'$$

beschränken, die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ in die Summe zweier Fourier'schen Reihen, die nach cos und sin der Vielfachen des Argumentes von x fortschreiten, umformen. Es ist nämlich

$$(22) \qquad \int\limits_{|x|=R'} y(x) x^{\nu-1} dx = 0, \quad R' < R \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

oder, wenn wir realen Theil und Coefficienten von i trennen,

$$\int\limits_0^{2\pi} \big(u(R', \Theta) \cos \nu\Theta - v(R', \Theta) \sin \nu\Theta\big) d\Theta = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \big(u(R', \Theta) \sin \nu\Theta + v(R', \Theta) \cos \nu\Theta\big) d\Theta = 0.$$

Hieraus und aus der mit (18), (19) identischen Gleichung

$$g_\nu = \frac{1}{2\pi R'^\nu}\left\{\int_0^{2\pi}\big(u(R',\Theta)\cos\nu\Theta + v(R',\Theta)\sin\nu\Theta\big)d\Theta\right.$$
$$\left. - i\int_0^{2\pi}\big(u(R',\Theta)\sin\nu\Theta - v(R',\Theta)\cos\nu\Theta\big)d\Theta\right\}$$

ergiebt sich, wenn λ eine reale Grösse bedeutet,

$$(23)\quad \begin{cases} g_\nu R'^\nu e^{\nu\lambda i} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R',\Theta)\cos\nu(\lambda-\Theta)d\Theta \\ \qquad + i\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(R',\Theta)\cos\nu(\lambda-\Theta)d\Theta \qquad (\nu=1,2,\cdots), \\ g_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R',\Theta)d\Theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R',\Theta)d\Theta. \end{cases}$$

In der Gleichung (22) können wir genau ebenso wie wir es in (18) gethan haben, den Grenzübergang zu $R'=R$ vornehmen. Beachten wir dann, dass für ein reales positives δ und beliebiges ganzzahliges n

$$\lim_{x=b_\varkappa}(x-b_\varkappa)^\delta \log^n(x-b_\varkappa)\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu(x-b_\varkappa)^\nu = 0$$

ist, so erkennen wir, dass in der Nähe der Stelle $x=b_\varkappa$

$$|y(x)| < t_\varkappa |x-b_\varkappa|^{\alpha_\varkappa-1} \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\tau),$$

wo $t_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$ positive reale Constanten bedeuten. Wir erhalten folglich für hinreichend kleine Werthe von $|\Theta-\Theta_\varkappa|$

$$(24)\quad \begin{cases} |u(R,\Theta)| < t_\varkappa |\Theta-\Theta_\varkappa|^{\alpha_\varkappa-1}, \\ |v(R,\Theta)| < t_\varkappa |\Theta-\Theta_\varkappa|^{\alpha_\varkappa-1}, \end{cases}$$

und hiernach ergeben sich durch analoge Rechnung wie die, welche wir zur Herstellung von (23) ausgeführt haben, die Gleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} g_\nu R^\nu e^{\nu\lambda i} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{u(R,\Theta)+iv(R,\Theta)\}\cos\nu(\lambda-\Theta)d\Theta \quad (\nu=1,2,\cdots), \\ g_0 \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(R,\Theta)+iv(R,\Theta)\}d\Theta, \end{cases}$$

wo die Integrale zwischen den Grenzen 0 und 2π in ähnlicher Weise zu verstehen sind, wie das Integral (21). Auf diese Weise findet sich also die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ für die Punkte ihres Convergenzkreises

$$x = R$$

als die Summe zweier Fourier'scher Reihen dargestellt, von denen die eine den realen Theil $u(R, \lambda)$, die andere den imaginären Theil $iv(R, \lambda)$ liefert.

66. Gesonderte Untersuchung der regulären und der singulären Stellen des Convergenzkreises.

Betrachten wir nun zuvörderst eine Strecke des Kreises

$$|x| = R,$$

auf der kein singulärer Punkt $b_\varkappa$ gelegen ist, dann verhält sich $y(x)$ in der Umgebung aller Stellen

$$x = Re^{i\Theta_0},$$

die auf dieser Strecke liegen, regulär und lässt sich also, wenn

$$\xi = \frac{x}{R} = \eta + i\zeta, \quad \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$e^{i\Theta_0} = \eta_0 + i\zeta_0$$

gesetzt wird, nach Potenzen von $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ entwickeln. Hieraus folgt, dass die Functionen $u(R, \Theta)$, $v(R, \Theta)$ in der Nähe von $\Theta = \Theta_0$ entweder wachsen oder abnehmen oder constant bleiben, d. h. dass dieselben, wie man zu sagen pflegt, monoton sind, wenn man Θ hinreichend nahe an Θ_0 annimmt. Bedeutet also $\varphi(\Theta)$ eine beliebige der beiden Functionen $u(R, \Theta)$, $v(R, \Theta)$, so lässt sich eine Strecke des Kreises

$$|x| = R,$$

die keinen der Punkte $b_\varkappa$ enthält, in eine endliche Anzahl von Theilstrecken zerlegen, innerhalb deren $\varphi(\Theta)$ monoton bleibt; auf einer solchen Strecke erfüllt also $\varphi(\Theta)$ die Dirichlet'sche Bedingung für die Convergenz der diese Function darstellenden Fourier'schen Reihe. Die Convergenz der beiden Fourier'schen Reihen, durch die

$$\mathfrak{P}(Re^{\lambda i})$$

gemäss den Gleichungen (25) dargestellt erscheint, lässt sich nun für $\lambda = \Theta_0$ nach dem Dirichlet'schen Verfahren erweisen.

Man hat zu dem Ende nur jeden der den singulären Stellen $b_\varkappa$ entsprechenden Werthe $\Theta_\varkappa$ in ein Intervall

$$(26) \qquad \Theta_\varkappa - \vartheta_\varkappa \leqq \Theta \leqq \Theta_\varkappa + \vartheta_\varkappa,$$

von denen keines den Werth Θ_0 enthält, einzuschliessen und in jenen Fourier'schen Reihen an die Stelle von $\varphi(\Theta)$ eine Function zu substituiren, die ausserhalb der Intervalle (26) mit $\varphi(\Theta)$ übereinstimmt und innerhalb derselben gleich Null ist. Dann convergiren die so entstehenden Fourier'schen Reihen für $\Theta = \Theta_0$ und stellen den Werth $\varphi(\Theta_0)$ dar. Dann ist nur noch zu beweisen, dass die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Theta_\varkappa-\vartheta_\varkappa}^{\Theta_\varkappa+\vartheta_\varkappa} \varphi(\Theta)\,\frac{\sin(2\nu+1)\dfrac{\Theta-\Theta_0}{2}}{2\sin\dfrac{\Theta-\Theta_0}{2}}\,d\Theta,$$

die die Summe der $(\nu+1)$ ersten Glieder der ursprünglichen Fourier'schen Reihen für die Intervalle (26) darstellen, und wo auch wieder

$$\int\limits_{\Theta_\varkappa-\vartheta_\varkappa}^{\Theta_\varkappa+\vartheta_\varkappa} = \lim_{\substack{\delta_\varkappa=0\\ \varepsilon_\varkappa=0}}\left\{\int\limits_{\Theta_\varkappa-\vartheta_\varkappa}^{\Theta_\varkappa-\delta_\varkappa} + \int\limits_{\Theta_\varkappa+\varepsilon_\varkappa}^{\Theta_\varkappa+\vartheta_\varkappa}\right\}$$

gesetzt wurde, mit abnehmendem $\vartheta_\varkappa$ unabhängig von ν beliebig klein werden. Dies folgt aber unmittelbar aus den Ungleichungen (24). Damit ist also die Convergenz der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ für solche Punkte des Convergenzkreises $|x| = R$, die von den singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ verschieden sind, erwiesen.

Es sei nun b' eine dieser singulären Stellen, in der $y(x)$ einen endlichen Werth besitzt, d. h. also eine Stelle in deren Umgebung die Entwickelung von $y(x)$ so beschaffen ist, dass nach Absonderung des von x unabhängigen Gliedes nur solche Potenzen von $(x-b')$ vorkommen, deren Exponenten wesentlich positive reale Theile haben. Setzen wir

$$b' = Re^{\Theta' i}$$

und schliessen den Werth Θ' in ein Intervall

(27) $$\Theta' - t \leqq \Theta \leqq \Theta' + t$$

ein, innerhalb dessen keiner der von Θ' verschiedenen Werthe $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_\tau$ liegt, dann lässt sich im Allgemeinen kein endlicher von Null verschiedener Werth von t angeben, für den die Functionen $u(R, \Theta)$, $v(R, \Theta)$ innerhalb des Intervalles (27) monoton bleiben. Die Convergenz der mit $\varphi(\Theta)$ gebildeten Fourier'schen Reihe kann also mit Hülfe des Dirichlet'schen Kriteriums für $\lambda = \Theta'$ nicht erwiesen werden, wir schlagen darum einen directen Weg ein. Setzen wir in diese Fourier'sche Reihe an die Stelle von $\varphi(\Theta)$ eine Function ein, die innerhalb des Intervalles (27) verschwindet und ausserhalb desselben mit $\varphi(\Theta)$ übereinstimmt, so convergirt diese Reihe, zufolge des für nicht singuläre Stellen des Convergenzkreises erlangten Resultates, für $\lambda = \Theta'$ und stellt den Werth Null dar. Untersuchen wir nun den Grenzwerth

$$\lim_{\nu} (J_1 + J_2),$$

wo

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\Theta' - t}^{\Theta'} \varphi(\Theta) \frac{\sin(2\nu + 1)\frac{\Theta - \Theta'}{2}}{2 \sin \frac{\Theta - \Theta'}{2}} d\Theta,$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\Theta'}^{\Theta' + t} \varphi(\Theta) \frac{\sin(2\nu + 1)\frac{\Theta - \Theta'}{2}}{2 \sin \frac{\Theta - \Theta'}{2}} d\Theta$$

ist und den man jener abgeänderten Fourier'schen Reihe hinzufügen muss, um daraus die ursprüngliche für $\lambda = \Theta'$ zu erhalten. Setzt man in J_1

$$\frac{\Theta - \Theta'}{2} = -\beta$$

und in J_2

$$\frac{\Theta - \Theta'}{2} = \beta,$$

so ergiebt sich

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{t}{2}} \varphi(\Theta' - 2\beta) \frac{\sin(2\nu + 1)\beta}{\sin \beta} d\beta,$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{t}{2}} \varphi(\Theta' + 2\beta) \frac{\sin(2\nu + 1)\beta}{\sin \beta} d\beta.$$

Setzen wir wie üblich

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varphi(\Theta' + \varepsilon) = \varphi(\Theta' + 0),$$

wenn ε als positive Grösse verschwindet,

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varphi(\Theta' + \varepsilon) = \varphi(\Theta' - 0),$$

wenn ε als negative Grösse verschwindet, und betrachten zunächst den ersten Ausdruck. Dann lässt sich, wenn wir uns

$$\frac{t}{2} = b \leq \frac{\pi}{2}$$

genommen denken, für ein fest gewähltes positives ε, welches kleiner ist als b, das Intervall

$$0 < \varepsilon < \beta < b \leq \frac{\pi}{2}$$

in eine endliche Anzahl von Theilintervallen zerlegen, innerhalb deren die Function

$$\varphi(\Theta' + 2\beta) - \varphi(\Theta' + 0)$$

monoton ist; folglich ist, nach dem Dirichlet'schen Integralsatze,

$$(28) \qquad \lim_{\nu} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{b} \{\varphi(\Theta' + 2\beta) - \varphi(\Theta' + 0)\} \frac{\sin(2\nu + 1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta = 0.$$

Ferner folgt aus der Beschaffenheit von $y(x)$ in der Nähe von $x = b'$, analog den Gleichungen (24), für hinreichend kleines γ

$$|\varphi(\Theta' + \gamma) - \varphi(\Theta' + 0)| \leq k \cdot \gamma^{\alpha},$$

wo α, k positive reale Constanten bedeuten; folglich ist, wenn $C \leq b$ genommen wird,

$$\lim_{\delta = 0} \int_{\delta}^{C} |\varphi(\Theta' + \gamma) - \varphi(\Theta + 0)| \frac{d\gamma}{\gamma}$$

und demgemäss auch

$$\lim_{\delta = 0} \int_{\delta}^{C} |\varphi(\Theta' + 2\beta) - \varphi(\Theta' + 0)| \frac{d\beta}{\sin\beta}$$

endlich. Hieraus schliessen wir aber, dass das Integral

$$(29) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\varepsilon} \{\varphi(\Theta' + 2\beta) - \varphi(\Theta' + 0)\} \frac{\sin(2\nu + 1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

unabhängig von ν durch hinreichende Verkleinerung von ε beliebig klein gemacht werden kann. Bedeutet nun $\varkappa$ eine beliebig kleine vorgeschriebene positive Zahl, so kann man also ε so wählen, dass das Integral (29) für beliebiges ν dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\frac{\varkappa}{2}$; wählt man ferner eine positive ganze Zahl ν so gross, dass der absolute Betrag des Integrals

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{b} [\varphi(\Theta' + 2\beta) - \varphi(\Theta' + 0)] \frac{\sin(2\nu + 1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta,$$

dessen Grenzwerth für $\nu = \infty$ zufolge der Gleichung (28) verschwindet, für $\nu > \bar{\nu}$ ebenfalls kleiner wird als $\frac{\varkappa}{2}$, so ist

$$(30) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^b \{\varphi(\Theta' + 2\beta) - \varphi(\Theta' + 0)\} \frac{\sin(2\nu+1)\beta}{\sin\beta} d\beta$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als $\varkappa$, wenn $\nu > \bar{\nu}$ ist, d. h. der Grenzwerth des Integrals (30) für $\nu = \infty$ ist gleich Null. Wendet man jetzt noch die bekannte Gleichung

$$\lim_{\nu} \frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(\Theta' + 0) \frac{\sin(2\nu+1)\beta}{\sin\beta} d\beta = \frac{1}{2}\varphi(\Theta' + 0)$$

an, so folgt aus dem Verschwinden des Grenzwerthes von (30):

$$\lim_{\nu} J_2 = \frac{1}{2}\varphi(\Theta' + 0),$$

und analog ergiebt sich

$$\lim_{\nu} J_1 = \frac{1}{2}\varphi(\Theta' - 0).$$

Also haben wir, da $y(x)$ im Punkte $x = b'$ bestimmt, und folglich

$$\varphi(\Theta' + 0) = \varphi(\Theta' - 0) = \varphi(\Theta')$$

ist, die Gleichung

$$\lim_{\nu}(J_1 + J_2) = \varphi(\Theta'),$$

d. h. die ursprüngliche mit $\varphi(\Theta)$ gebildete Fourier'sche Reihe, convergirt für $\lambda = \Theta'$ und stellt den Werth $\varphi(\Theta')$ dar. Damit ist auch die Convergenz der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ im Punkte $x = b'$ erwiesen.

67. Anwendung auf die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Es sei nun (F) eine Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe und mögen die zu den im Endlichen gelegenen singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen so beschaffen sein, dass die realen Theile ihrer sämmtlichen Wurzeln im algebraischen Sinne grösser sind als -1; bedeute ferner $x = a$ irgend einen endlichen regulären Punkt, und $\mathfrak{P}(x \mid a)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe, die der Differentialgleichung genügt; dann ist der Radius R_a des Convergenzkreises dieser Reihe im Allgemeinen der kleinste unter den absoluten Beträgen der Wurzeln der Gleichung

$$\psi(x + a) = 0.$$

Die Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ convergirt aber zufolge des eben bewiesenen Thomé-schen Satzes auch in allen nicht singulären Punkten der Peripherie des Convergenzkreises

$$|x-a| = R_a$$

und in denjenigen singulären, wo das durch $\mathfrak{P}(x|a)$ definirte particuläre Integral einen endlichen Werth besitzt. Aehnliches gilt für die gewöhnlichen Potenzreihen, welche in der Entwickelung eines Elementes des zu einem singulären Punkte einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe gehörigen canonischen Fundamentalsystems auftreten, wenn nur die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen den erforderlichen Beschränkungen unterliegen. Um dies nachzuweisen haben wir zu zeigen, dass jede solche Potenzreihe einen Functionszweig definirt, der in der Umgebung jedes Punktes des Convergenzkreises, wo er sich nicht regulär verhält, den Charakter eines sich bestimmt verhaltenden Integrals einer linearen Differentialgleichung besitzt. Sei $x=a$ ein beliebiger singulärer Punkt, so hat (nach Nr. 54 S. 193) eine Untergruppe des zu $x=a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems die Gestalt

$$\begin{aligned}
u_m &= (x-a)^r\{\varphi_0(x) - m\varphi_1(x)\log(x-a) + m_2\varphi_2(x)\log^2(x-a) \\
&\qquad + \cdots + (-1)^m\varphi_m(x)\log^m(x-a)\}, \\
u_{m-1} &= \frac{1}{m}\frac{\partial u_m}{\partial[\log(x-a)]} = -(x-a)^r\{\varphi_1(x) - (m-1)\varphi_2(x)\log(x-a) \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{m-1}\varphi_m(x)\log^{m-1}(x-a)\}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial u_2}{\partial\log(x-a)} = (-1)^{m-1}(x-a)^r\{\varphi_{m-1}(x) - \varphi_m(x)\log(x-a)\}, \\
u_0 &= (-1)^m(x-a)^r\varphi_m(x),
\end{aligned}$$

wo r eine Wurzel der zu $x=a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ in der Umgebung von $x=a$ reguläre Functionen bedeuten. Setzen wir

$$(31) \qquad \bar{u}_\varkappa = (-1)^{m-\varkappa}\frac{u_\varkappa}{(x-a)^r} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots m),$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
(32) \quad \varphi_{m-\varkappa}(x) &= \bar{u}_\varkappa + \varkappa\bar{u}_{\varkappa-1}\log(x-a) + \varkappa_2\bar{u}_{\varkappa-2}\log^2(x-a) \\
&\qquad + \cdots + \bar{u}_0\log^\varkappa(x-a) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots m).
\end{aligned}$$

Es bedeute nun $x=b$ einen von a verschiedenen singulären Punkt, und denken wir uns $u_0, u_1, \cdots u_m$ als homogene lineare Functionen der

Elemente des zu $x = b$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems dargestellt. Setzen wir dann diese Darstellungen in die Gleichungen (31), (32) ein, so erhalten die $\bar{u}_\varkappa$ und folglich auch die $\varphi_{m-\varkappa}(x)$ in der Umgebung von $x = b$ die Gestalt eines sich bestimmt verhaltenden Integrals einer linearen Differentialgleichung, da ja

$$(x-a)^r, \quad \log(x-a)$$

nach positiven ganzen Potenzen von $x - b$ entwickelbar sind. Wenn die realen Theile der sämmtlichen Wurzeln der zu den singulären Punkten der gegebenen Differentialgleichung gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen im algebraischen Sinne grösser sind als -1, so gilt das Gleiche von den Exponenten der Potenzen von $x - b$, die in den Entwickelungen der $\varphi_{m-\varkappa}(x)$ in der Umgebung von $x = b$ auftreten; es convergiren folglich die Potenzreihen, welche die $\varphi_{m-\varkappa}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ darstellen, in allen denjenigen Punkten des Convergenzkreises, die nicht zu den singulären Stellen der Differentialgleichung gehören, und in denjenigen auf dem Convergenzkreise befindlichen singulären Punkten, wo die betreffende Function $\varphi_{m-\varkappa}(x)$ einen endlichen Werth besitzt.

Drittes Kapitel.

68. Herstellung einer Differentialgleichung, deren determinirende Gleichungen vorgeschriebene Wurzeln haben.

Die Coefficienten einer Differentialgleichung (F) der Fuchs'schen Classe hängen ausser von den die Lage der singulären Punkte bestimmenden Grössen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ noch von den constanten Coefficienten der ganzen Functionen $F_{\sigma-1}, F_{2(\sigma-1)}, \cdots F_{n(\sigma-1)}$ ab; die Anzahl dieser constanten Coefficienten ist offenbar gleich

$$(n, \sigma) = \frac{n(n+1)}{2}\sigma - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Denken wir uns die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ fest, so hängen also die Integrale von (F) von diesen (n, σ) constanten Parametern ab. Indem wir uns vorbehalten auf die analytische Natur dieser Abhängigkeit später ausführlich einzugehen, wollen wir jetzt nur den Zusammenhang jener (n, σ) Parameter mit den in den Darstellungen der Integrale auftretenden Constanten, insbesondere mit den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen erörtern. Wir haben im Ganzen $(\sigma + 1)$ determinirende Gleichungen, nämlich die zu den σ Punkten a_λ gehörigen, die sich, da

$$\lim_{x=a_\lambda} \frac{F_{(n-\varkappa)(\sigma-1)}(x)}{\psi(x)^{n-\varkappa}}(x-a_\lambda)^{n-\varkappa} = \frac{F_{(n-\varkappa)(\sigma-1)}(a_\lambda)}{[\psi'(a_\lambda)]^{n-\varkappa}}$$

ist, in der Form

$$(1) \quad \sum_{\varkappa=0}^{n} F_{(n-\varkappa)(\sigma-1)}(a_\lambda)[\psi'(a_\lambda)]^\varkappa \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \sigma)$$

darstellen lassen und die zu $x = \infty$ gehörige, die, wenn

$$(2) \qquad \lim_{x=\infty} x^{n-\varkappa} \frac{F_{(n-\varkappa)(\sigma-1)}(x)}{\psi(x)^{n-\varkappa}} = \pi_\varkappa \qquad [\varkappa = 0, 1, 2, \cdots (n-1)]$$

gesetzt wird, in der Gestalt

$$(3)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n} \pi_\varkappa(-\varrho)(-\varrho-1)\cdots(-\varrho-\varkappa+1)=0, \qquad \pi_n = 1,$$

geschrieben werden kann. Seien

$$r_{\lambda 1},\ r_{\lambda 2},\ \cdots\ r_{\lambda n}$$

die Wurzeln von (1),

$$r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_n$$

die von (3), dann ist also

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_{\lambda i} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{F_{\sigma-1}(a_\lambda)}{\psi'(a_\lambda)}, \\ \sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{n(n-1)}{2} + \pi_{n-1}. \end{cases}$$

Denken wir uns

$$p_1 = \frac{F_{\sigma-1}(x)}{\psi(x)}$$

in Partialbrüche zerlegt:

$$p_1 = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{\alpha_\lambda}{x-a_\lambda},$$

so ist

$$\alpha_\lambda = \frac{F_{\sigma-1}(a_\lambda)}{\psi'(a_\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \sigma)$$

und

$$\lim_{x=\infty} (x p_1) = \pi_{n-1} = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \alpha_\lambda;$$

also ergiebt sich durch Addition der Gleichungen (4) die Beziehung

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{\lambda=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} r_{\lambda i} = (\sigma-1)\frac{n(n-1)}{2}$$

zwischen den $(\sigma+1)n$ Wurzeln der sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen, wir wollen dieselbe als die Fuchs'sche Beziehung bezeichnen.

Es seien nun für die $n(\sigma+1)$ Grössen $r_{\lambda i}$, r_i willkürliche Werthe vorgeschrieben, die der Fuchs'schen Beziehung (5) Genüge leisten; wir stellen uns die Aufgabe, die Coefficienten der Differentialgleichung (F) so zu bestimmen, dass die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die singulären Punkte von (F) sind und die Wurzeln der zu diesen Punkten, beziehungsweise zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen mit den für die $r_{\lambda i}$, beziehungsweise r_i vorgeschriebenen Werthen übereinstimmen. Setzen wir zu diesem Ende die ganzen Functionen

$$(\varrho - r_{\lambda 1})(\varrho - r_{\lambda 2}) \cdots (\varrho - r_{\lambda n})$$

nach den Regeln der Differenzenrechnung (vergl. S. 157) in die Form:

$$\prod_{i=1}^{n} (\varrho - r_{\lambda i}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} e_{\varkappa\lambda}\, \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1), \qquad e_{n\lambda} = 1,$$

so ist

$$F_{(n-\varkappa)(\sigma-1)}(a_\lambda) = e_{\varkappa\lambda}\,[\psi'(a_\lambda)]^{n-\varkappa} \qquad [\varkappa = 0, 1, \cdots (n-1)],$$

d. h. wir können, da $\psi(x)$ gegeben ist, die Werthe

$$F_{(n-\varkappa)(\sigma-1)}(a_\lambda) = \varepsilon_{n-\varkappa,\lambda} \qquad [\varkappa = 0, 1, \cdots (n-1)]$$

als bekannt ansehen. Mit Hülfe der Lagrange'schen Interpolationsformel finden wir dann

$$(6) \qquad F_{\varkappa(\sigma-1)}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{\varepsilon_{\varkappa\lambda}}{\psi'(a_\lambda)} \frac{\psi(x)}{x - a_\lambda} + \psi(x)\, E_\varkappa(x)$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo $E_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $\varkappa(\sigma - 1) - \sigma$ bedeutet. Wir setzen $\sigma > 1$ voraus, dann ist

$$\varkappa(\sigma - 1) - \sigma \geqq 0, \quad \text{für} \quad \varkappa > 1,$$

für $\varkappa = 1$ ist

$$E_1(x) = 0$$

zu nehmen. Für $\varkappa > 1$ ist (vergl. (3)) nach (6)

$$\lim_{x=\infty} \frac{E_\varkappa(x)}{x^{\varkappa(\sigma-1)-\sigma}} = \lim_{x=\infty} x^\varkappa \frac{F_{\varkappa(\sigma-1)}(x)}{\psi(x)^\varkappa} = \pi_{n-\varkappa}.$$

Die $\pi_{n-\varkappa}$ werden bestimmt, indem man die ganze Function

$$(\varrho + r_1)(\varrho + r_2) \cdots (\varrho + r_n)$$

in die Form setzt

$$\prod_{i=1}^{n} (\varrho + r_i) = \sum_{\varkappa=0}^{n} e_\varkappa\, \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1), \qquad e_n = 1;$$

dann ist nämlich zufolge der Fuchs'schen Beziehung (5), die zwischen den $r_{\lambda i}$, r_i besteht,

$$e_{n-1} = \pi_{n-1},$$

und für $\varkappa > 1$ haben wir

$$e_{n-\varkappa} = \pi_{n-\varkappa}$$

zu nehmen. Dann bleiben noch die

$$\sum_{\varkappa=2}^{n} (\varkappa(\sigma - 1) - \sigma) = \sigma \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - n(\sigma + 1) + 1$$

übrigen Coefficienten der ganzen Functionen $E_\varkappa(x)$ willkürlich, d. h. wir haben den Satz:

Man kann die in den Coefficienten einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe mit den vorgeschriebenen σ singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$, $\sigma > 1$, auftretenden (n, σ) Constanten stets so bestimmen, dass die zu diesen σ Punkten und zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen vorgeschriebene Wurzeln haben, zwischen denen nur die Fuchs'sche Beziehung bestehen muss, und es bleiben dann noch

$$(n, \sigma) - n(\sigma + 1) + 1 = [n, \sigma]$$

dieser Constanten willkürlich.

69. Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe mit einem singulären Punkte. Differentialgleichung mit constanten Coefficienten.

Nebst dem oben ausgeschlossenen Falle $\sigma = 1$ wollen wir die besonderen Fälle betrachten, wo die Anzahl der willkürlich bleibenden Constanten gleich Null ist, d. h. wo durch Angabe der Ordnungszahl n, der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ und der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen die Coefficienten der Differentialgleichung (F) vollkommen bestimmt sind. Dies findet zunächst stets statt für $n = 1$, d. h. für Differentialgleichungen erster Ordnung, und überdies nur noch für

$$n = 2, \qquad \sigma = 2.$$

Der Fall $\sigma = 1$, wo also nur ein einziger im Endlichen befindlicher singulärer Punkt $x = a$ vorhanden ist, bedingt für die Differentialgleichung die Form

$$\text{(I)} \qquad y^{(n)} + \frac{c_1}{x-a} y^{(n-1)} + \frac{c_2}{(x-a)^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{c_n}{(x-a)^n} y = 0,$$

wo $c_1, c_2, \cdots c_n$ Constanten bedeuten. Setzt man in die auf die Normalform gebrachte linke Seite

$$\mathfrak{P}(y) = (x-a)^n \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{c_\varkappa}{(x-a)^\varkappa} y^{(n-\varkappa)}, \qquad c_0 = 1,$$

dieser Differentialgleichung

$$y = (x-a)^\varrho$$

ein, so ergiebt sich die charakteristische Function

$$\mathfrak{P}\left((x-a)^\varrho\right) = (x-a)^\varrho f(\varrho), \tag{7}$$

wo

$$f(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} c_{n-\varkappa}\, \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1).$$

Es stellt also $(x-a)^\varrho$ ein Integral von (I) dar, wenn ϱ gleich einer Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung

$$f(\varrho) = 0 \tag{8}$$

genommen wird. Sind die n Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_n$ dieser Gleichung sämmtlich von einander verschieden, so constituiren die Ausdrücke

$$(x-a)^{r_1}, \quad (x-a)^{r_2}, \quad \cdots \quad (x-a)^{r_n} \tag{9}$$

ein Fundamentalsystem von (I); die Integration dieser Differentialgleichung ist also in diesem Falle vollzogen. Besitzt dagegen die Gleichung (8) mehrfache Wurzeln und ist z. B. r_1 eine λ-fache Wurzel derselben, so folgt durch $(\lambda-1)$-malige Differentiation der Identität (7) nach ϱ, dass

$$\mathfrak{P}\left((x-a)^{r_1}\log^\iota(x-a)\right) = 0 \qquad (\iota = 0, 1, \cdots \lambda-1)$$

ist; d. h. zur λ-fachen Wurzel r_1 der Gleichung (8) gehören die λ linear unabhängigen Integrale

$$(x-a)^{r_1}, \quad (x-a)^{r_1}\log(x-a), \quad \cdots \quad (x-a)^{r_1}\log^{\lambda-1}(x-a), \tag{10}$$

so dass wir also in jedem Falle im Stande sind, das allgemeine Integral von (I) in expliciter Form anzugeben.

Durch die Substitution

$$z = \log(x-a)$$

geht die Differentialgleichung (I) in die Differentialgleichung

$$\mathfrak{P}(y) = \mathfrak{Q}_z(y) = q_0\frac{d^n y}{dz^n} + q_0\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \cdots + q_n y = 0$$

über, deren Coefficienten auf einfache Weise gefunden werden können, wenn man beachtet, dass

$$\mathfrak{P}\left((x-a)^\varrho\right) = \mathfrak{Q}_z(e^{\varrho z}),$$

also:

$$f(\varrho) = q_0\varrho^n + q_1\varrho^{n-1} + \cdots + q_n, \qquad q_0 = 1,$$

ist. Die Differentialgleichung

$$\mathfrak{Q}_z(y) = 0 \tag{II}$$

hat demnach constante Coefficienten, und kann offenbar als die allgemeinste homogene lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten angesehen werden. Ihre Integration ist sofort geleistet, wenn man in die Ausdrücke (9), (10) die unabhängige Variable z einführt. Die Gleichung (8) oder

$$\varphi(\varrho) = \varrho^n + q_1 \varrho^{n-1} + \cdots + q_n = 0$$

wird nach Cauchy die zu (II) gehörige charakteristische Gleichung genannt. Besitzt dieselbe die n verschiedenen Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_n$, so bilden die Ausdrücke

$$e^{r_1 z}, \quad e^{r_2 z}, \quad \cdots \quad e^{r_n z}$$

ein Fundamentalsystem von (2), sind mehrfache Wurzeln vorhanden, so entsprechen der λ-fachen Wurzel r_1 die λ Integrale

$$e^{r_1 z}, \quad z e^{r_1 z}, \quad \cdots \quad z^{\lambda-1} e^{r_1 z}.$$

Cauchy hat für die Integration der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten ein elegantes Verfahren angegeben, welches wir hier darlegen wollen, weil es die Bestimmung eines durch seine Anfangswerthe definirten Integrals in äusserst übersichtlicher Weise ermöglicht. Bezeichnen wir durch $\psi(\varrho)$ eine ganze rationale Function von ϱ mit unbestimmten Coefficienten und bilden das Integral

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} e^{\varrho z} d\varrho = y(z),$$

erstreckt über die Begrenzung eines Gebietes G der ϱ-Ebene, welches einige der Nullstellen von $\varphi(\varrho)$ einschliesst. Differentiiren wir dasselbe $\varkappa$ mal nach z, so kommt

$$\frac{d^\varkappa y}{d z^\varkappa} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} \varrho^\varkappa e^{\varrho z} d\varrho \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots),$$

und wenn wir dies in die linke Seite $\mathfrak{Q}_z(y)$ der Differentialgleichung (II) einsetzen, so erhalten wir

$$\mathfrak{Q}_z(y(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} \sum_{\varkappa=0}^{n} q_\varkappa \varrho^{n-\varkappa} e^{\varrho z} d\varrho$$

oder

$$\mathfrak{Q}_z(y(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(G)} \psi(\varrho) e^{\varrho z} d\varrho;$$

dieser Ausdruck ist aber gleich Null, weil

$$\psi(\varrho) e^{\varrho z}$$

innerhalb G eindeutig, endlich und stetig ist, und der Ausdruck (α) stellt demnach eine Lösung der Differentialgleichung (II) dar. Offenbar können wir uns bei der Wahl von $\psi(\varrho)$ auf Functionen von niedrigerem als dem n^{ten} Grade beschränken; denn wäre $\psi(\varrho)$ von höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, so könnten wir setzen

$$\psi(\varrho) = \chi(\varrho)\,\varphi(\varrho) + \bar{\psi}(\varrho),$$

wo $\bar{\psi}(\varrho)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, und erhielten

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}\, e^{\varrho z}\, d\varrho = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(G)} \frac{\bar{\psi}(\varrho)}{\varphi(\varrho)}\, e^{\varrho z}\, d\varrho.$$

Sei nun die linke Seite der charakteristischen Gleichung

$$\varphi(\varrho) = (\varrho - r_1)^{\lambda_1}(\varrho - r_2)^{\lambda_2}\cdots(\varrho - r_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}, \qquad r_\alpha \neq r_\beta,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa = n,$$

und mögen innerhalb G die Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_\tau$ der charakteristischen Gleichung liegen. Bezeichnen wir dann durch

$$\operatorname{Res}_a f(x)$$

das Cauchy'sche Résidu einer Function $f(x)$ im Punkte $x = a$, so haben wir, wenn in der Umgebung von r_ι die Entwickelung

$$\frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} = \frac{A_{\iota,\lambda_\iota}}{(\varrho - r_\iota)^{\lambda_\iota}} + \frac{A_{\iota,\lambda_\iota - 1}}{(\varrho - r_\iota)^{\lambda_\iota - 1}} + \cdots + \frac{A_{\iota,1}}{\varrho - r_\iota} + \mathfrak{P}_\iota(\varrho \mid r_\iota),$$

wo $\mathfrak{P}_\iota(\varrho \mid r_\iota)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, gilt, die Gleichung

$$\operatorname{Res}_{r_\iota}\left(\frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}\, e^{\varrho z}\right) = \sum_{h=1}^{\lambda_\iota} \frac{A_{\iota,h}}{(h-1)!}\, z^{h-1} e^{r_\iota z}.$$

Da nun bekanntlich

$$y(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}\, e^{\varrho z}\, d\varrho = \sum_{\iota=1}^{\tau} \operatorname{Res}_{r_\iota} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}\, e^{\varrho z}$$

ist, so erhalten wir die Darstellung

$$y(z) = \sum_{\iota=1}^{\tau}\sum_{h=1}^{\lambda_\iota} \frac{A_{\iota h}}{(h-1)!}\, z^{h-1} e^{r_\iota z}$$

und hierin bedeuten, wegen der Willkürlichkeit von $\psi(\varrho)$, die $A_{\iota h}$ willkürliche Constanten.

Wenn wir den Bereich G soweit ausdehnen, dass er alle $r_1, r_2, \cdots r_\varkappa$ in sich fasst, so stellt der Ausdruck (α) offenbar das allgemeine Integral der Differentialgleichung (II) dar; wir stellen uns dann die Aufgabe, die ganze Function $\psi(\varrho)$ so zu bestimmen, dass das Integral

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} e^{(z-\xi)\varrho} d\varrho$$

der Differentialgleichung (II), vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügt, d. h. für $z = \xi$ mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen die Werthe

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$$

annimmt. Es sollen also die Gleichungen

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} \varrho^\lambda d\varrho = \eta_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n-1)$$

befriedigt werden.

Denken wir uns die für $\varrho = \infty$ verschwindende Function

$$\frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}$$

nach fallenden Potenzen von ϱ entwickelt, so gilt diese Entwickelung

$$(\gamma) \qquad \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} = \varepsilon_0 \frac{1}{\varrho} + \varepsilon_1 \frac{1}{\varrho^2} + \cdots$$

ausserhalb eines um den Nullpunkt der ϱ-Ebene beschriebenen Kreises K, der alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung einschliesst; wählen wir den Bereich G so gross, dass der Kreis K noch innerhalb G liegt, so können wir in die linke Seite der Gleichungen (β) die Entwickelung (γ) einsetzen und gliedweise integriren. Dann ist aber

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(G)} \frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)} \varrho^\lambda d\varrho = \varepsilon_\lambda,$$

weil die Integration über alle Potenzen von ϱ, deren Exponent von -1 verschieden ist, Null giebt. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\varepsilon_\lambda = \eta_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n-1),$$

d. h.

$$\psi(\varrho) = \varphi(\varrho)\left\{\frac{\eta_0}{\varrho} + \frac{\eta_1}{\varrho^2} + \cdots + \frac{\eta_{n-1}}{\varrho^n} + \cdots\right\},$$

und da $\psi(\varrho)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sein sollte, so ergiebt sich der gesuchte Ausdruck in der Form

$$\psi(\varrho) = \sum_{\iota=1}^{n}\sum_{h=0}^{n-\iota} \eta_h q_{n-\iota-h} \varrho^{\iota-1}, \qquad q_0 = 1.$$

Denkt man sich in der Entwickelung von

$$\frac{\varphi(\varrho)-\varphi(\eta)}{\varrho-\eta} = \sum_{\iota=0}^{n} q_\iota \frac{\varrho^{n-\iota}-\eta^{n-\iota}}{\varrho-\eta}$$

die Exponenten von η durch untere Indices ersetzt, so stimmt der so entstehende Ausdruck offenbar mit dem für $\psi(\varrho)$ gefundenen Ausdrucke überein.

Bemerken wir noch, dass die Differentialgleichung (II) mit constanten Coefficienten nicht zur Fuchs'schen Classe gehört; in der That hat das allgemeine Integral in $z = \infty$ einen Punkt der Unbestimmtheit.

70. Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Riemann'sche Differentialgleichung.

Die allgemeinste Differentialgleichung erster Ordnung der Fuchsschen Classe mit den σ singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ lautet

$$\text{(III)} \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{F_{\sigma-1}(x)}{\psi(x)}\, y = 0 .$$

Sei in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{F_{\sigma-1}(x)}{\psi(x)} = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{\alpha_\lambda}{x - a_\lambda},$$

so sind $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots -\alpha_n$ die Wurzeln der zu den Punkten $x = a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ gehörigen und

$$\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \alpha_\lambda$$

die Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung. In der That ergiebt sich durch Quadratur das allgemeine Integral in der Form

$$c(x - a_1)^{-\alpha_1}(x - a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x - a_\sigma)^{-\alpha_\sigma},$$

c eine willkürliche Constante.

Weitaus bedeutungsvoller als die eben behandelten Specialfälle ist die der Wahl

$$n = 2, \qquad \sigma = 2$$

entsprechende Differentialgleichung, d. h. die Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe mit zwei singulären Punkten a_1, a_2; dieselbe ist, wie wir sahen, die einzige Differentialgleichung höherer als erster Ordnung, die durch Angabe der a_1, a_2, und der Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen bestimmt ist. Ehe wir auf das Studium dieser ausgezeichneten von Euler, Gauss, Kummer und Riemann behandelten Differentialgleichung eingehen, soll eine, von Herrn Fuchs herrührende, Transformation der Form einer beliebigen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe angegeben werden, die für diese Ordnung charakteristisch ist.

Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Classe mit den σ singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ hat die Gestalt:

$$\text{(IV)} \qquad y'' + \frac{F_{\sigma-1}(x)}{\psi(x)} y' + \frac{F_{2(\sigma-1)}(x)}{\psi(x)^2} y = 0,$$

die zum singulären Punkte $x = a_\lambda$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung lautet

$$\text{(11)} \qquad \varrho(\varrho - 1) + \frac{F_{\sigma-1}(a_\lambda)}{\psi'(a_\lambda)} \varrho + \frac{F_{2(\sigma-1)}(a_\lambda)}{[\psi'(a_\lambda)]^2} = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots \sigma).$$

Würde diese Gleichung für alle in Betracht kommenden Werthe von λ die Wurzel $\varrho = 0$ besitzen, so müsste

$$F_{2(\sigma-1)}(a_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \sigma)$$

sein, d. h. $F_{2(\sigma-1)}(x)$ wäre durch $\psi(x)$ theilbar. Setzten wir dann

$$\text{(12)} \qquad F_{2(\sigma-1)}(x) = \psi(x) \cdot F_{\sigma-2}(x),$$

wo $F_{\sigma-2}(x)$ eine ganze Function vom höchstens $(\sigma - 2)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, so erhielte die Differentialgleichung (IV) die Gestalt:

$$\text{(IVa)} \qquad \psi(x) y'' + F_{\sigma-1}(x) y' + F_{\sigma-2}(x) y = 0.$$

Auf diese Gestalt lässt sich nun eine beliebige Differentialgleichung (IV) stets bringen, auch wenn eine Gleichung von der Form (12) nicht besteht. Man hat zu dem Ende nur an die Stelle von y eine neue Variable durch die Gleichung

$$\text{(13)} \qquad y = (x - a_1)^{r_1} (x - a_2)^{r_2} \cdots (x - a_\sigma)^{r_\sigma} z$$

einzuführen, wo r_λ eine Wurzel der zu $x = a_\lambda$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung (11) bedeutet, die, falls

$$F_{2(\sigma-1)}(a_\lambda) = 0$$

sein sollte, gleich Null zu nehmen ist. Setzt man nämlich den Werth (13) für y in die Differentialgleichung (IV) ein, so ergiebt sich für z die Gleichung

$$\text{(V)} \qquad \psi(x) z'' + \left\{ 2\psi(x) \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{r_\lambda}{x - a_\lambda} + F_{\sigma-1}(x) \right\} z'$$
$$+ \left\{ \psi(x) \left(\sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{r_\lambda(r_\lambda - 1)}{(x - a_\lambda)^2} + \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \sum_{\mu=1}^{\sigma} \frac{r_\lambda r_\mu}{(x - a_\lambda)(x - a_\mu)} \right) \right.$$
$$\left. + F_{\sigma-1}(x) \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{r_\lambda}{x - a_\lambda} + \frac{F_{2(\sigma-1)}(x)}{\psi(x)} \right\} z = 0.$$

Diese Gleichung hat auch wieder rationale Coefficienten, sie gehört auch zur Fuchs'schen Classe, und die zu den singulären Punkten a_λ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen derselben haben jede die Wurzel $\varrho = 0$. Hieraus folgt, dass auch der Coefficient von z eine ganze Function von x, und zwar eine solche vom höchstens $(\sigma - 2)^{\text{ten}}$ Grade sein muss, die Gleichung (V) hat also in der That die Form (IV a).

Es sei nun $\sigma = 2$, und es mögen die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen, die zu den Punkten a_1, a_2, ∞ gehören, beziehungsweise durch

$$\lambda, \lambda'; \quad \nu, \nu'; \quad \mu, \mu'$$

bezeichnet werden, dann ist zufolge der Fuchs'schen Beziehung

$$\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1 \tag{14}$$

und die Differentialgleichung hat die Form

$$y'' + \frac{F_1(x)}{(x - a_1)(x - a_2)} y' + \frac{F_2(x)}{(x - a_1)^2 (x - a_2)^2} y = 0. \tag{VI}$$

Man kann von dieser Differentialgleichung zu einer noch etwas allgemeineren übergehen, indem man an Stelle von x eine neue Variable ξ durch die Gleichung

$$\frac{b - c}{b - a} \, \frac{\xi - a}{\xi - c} = \frac{x - a_1}{x - a_2}$$

einführt, wo a, b, c beliebige von einander verschiedene endliche Grössen bedeuten. Dann geht nämlich (VI) in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten für y als Function von ξ über, die auch der Fuchs'schen Classe angehört. Die singulären Punkte dieser Differentialgleichung sind die den $x = a_1$, ∞, a_2 entsprechenden Werthe $\xi = a$, b, c, dagegen ist $\xi = \infty$ kein singulärer Punkt, da er dem regulären Werthe

$$x = \frac{a_2 - a_1}{1 - \dfrac{b - c}{b - a}}$$

von x entspricht. Die Wurzeln der zu $\xi = a$, b, c gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sind beziehungsweise durch die Grössen

$$\lambda, \lambda'; \quad \mu, \mu'; \quad \nu, \nu'$$

gegeben, wie man sofort übersehen kann, wenn man beachtet, dass

$$x - a_1 = (\xi - a)\,\mathfrak{P}_1(\xi \mid a),$$
$$x - a_2 = (\xi - c)\,\mathfrak{P}_2(\xi \mid c),$$
$$\frac{1}{x} = (\xi - b)\,\mathfrak{P}_3(\xi \mid b)$$

ist, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, die für $\xi = a$ beziehungsweise $\xi = c$, $\xi = b$ nicht verschwinden. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung in ξ bezeichnet Riemann durch

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & \xi \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{Bmatrix};$$

die Abhandlung, welche Riemann der Untersuchung dieser Function gewidmet hat, ist die in der historischen Einleitung (Nr. 3) erwähnte. Wir werden im Folgenden die wesentlichsten Resultate dieser Abhandlung mit Hülfe der allgemein für die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe entwickelten Methoden herzuleiten haben. Es soll aber dabei die Form (VI) der Differentialgleichung zu Grunde gelegt, ja in dieser noch eine weitere Specialisirung vorgenommen werden.

Führen wir nämlich in (VI) an die Stelle von x eine neue unabhängige Variable ξ durch die Gleichung

$$\xi = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

ein, so erhalten wir eine ebenso wie (VI) beschaffene Differentialgleichung für y als Function von ξ, deren singuläre Punkte durch die Werthe

$$\xi = 0,\ 1,\ \infty,$$

die den $x = a_1$, a_2, ∞ entsprechen, dargestellt werden. Wir denken uns diese Abänderung von vorneherein vollzogen und setzen also im Folgenden

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

voraus; dann wird das allgemeine Integral von (VI) durch

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda & \mu & \nu & x \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{pmatrix}$$

oder kürzer durch

$$P\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu & \\ & & & x \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{pmatrix}$$

zu bezeichnen sein. Die Differentialgleichung (VI) selbst erhält die Form

$$\text{(VII)} \qquad y'' + \frac{f_0 + f_1 x}{x(x-1)}\, y' + \frac{g_0 + g_1 x + g_2 x^2}{x^2(x-1)^2}\, y = 0,$$

und es sind die constanten Coefficienten f_0, f_1, g_0, g_1, g_2 dadurch bestimmt, dass die Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho(\varrho-1) - \qquad f_0\varrho + g_0 = (\varrho-\lambda)(\varrho-\lambda'), \\ \varrho(\varrho-1) + (f_0+f_1)\varrho + g_0 + g_1 + g_2 = (\varrho-\nu)(\varrho-\nu'), \\ \varrho(\varrho-1) + \ (2-f_1)\varrho + g_2 = (\varrho-\mu)(\varrho-\mu') \end{cases}$$

bestehen müssen, deren linke Seiten die zu $x=0,\ 1,\ \infty$ gehörigen determinirenden Functionen der Differentialgleichung (VII) darstellen. Es ist also

$$f_0 + 1 = \lambda + \lambda', \quad g_0 = \lambda\lambda', \quad f_1 - 1 = \mu + \mu', \quad g_2 = \mu\mu',$$
$$g_1 = \nu\nu' - \lambda\lambda' - \mu\mu'$$

und die Differentialgleichung (VII) lautet

$$\text{(VII a)} \qquad y'' + \frac{(\mu+\mu'+1)x + (\lambda+\lambda'-1)}{x(x-1)}\,y'$$
$$+ \frac{\mu\mu' x^2 + (\nu\nu' - \lambda\lambda' - \mu\mu')x + \lambda\lambda'}{x^2(x^2-2x+1)}\,y = 0.$$

Wenden wir nun auf diese Differentialgleichung die oben angegebene Transformation an, setzen also etwa

$$y = x^{\lambda}(1-x)^{\nu} z,$$

so erhalten wir für z eine Differentialgleichung von der Form (VIIa), in welcher die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen

bei	$x=0$	die Werthe	$0,\ \lambda'-\lambda,$
"	$x=1$	" "	$0,\ \nu'-\nu,$
"	$x=\infty$	" "	$\mu+\lambda+\nu,\ \mu'+\lambda+\nu$

haben, d. h. also die Differentialgleichung

$$z'' + \frac{(\mu+\mu'+2\lambda+2\nu+1)x + \lambda' - \lambda - 1}{x(x-1)}\,z'$$
$$+ \frac{(\mu+\lambda+\nu)(\mu'+\lambda+\nu)}{x(x-1)}\,z = 0,$$

oder wenn wir noch

$$\lambda+\mu+\nu = \alpha, \quad \lambda+\mu'+\nu = \beta, \quad \lambda-\lambda'+1 = \gamma$$

setzen, die Differentialgleichung

$$\text{(G)} \qquad x(1-x)z'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]z' - \alpha\beta z = 0,$$

die wir als die Gauss'sche Differentialgleichung bezeichnen und der folgenden Untersuchung zu Grunde legen wollen.

Viertes Kapitel.

71. Gauss'sche Differentialgleichung. Fundamentalsystem für $x = 0$ und für $x = \infty$.

Wir wenden uns nun zur Behandlung der Differentialgleichung (G) und suchen zuvörderst die Wurzeln der zu den Punkten 0, 1, ∞ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen auf. Für dieselben ergeben sich nach dem Vorhergehenden

bei $x = 0$, die Werthe $0,\ 1-\gamma$,
„ $x = 1$, „ „ $0,\ \gamma - \alpha - \beta$,
„ $x = \infty$, „ „ $\alpha,\ \beta$.

Bringen wir die Differentialgleichung (G) bei $x = 0$ durch Multiplication mit x auf die Normalform, so erhalten wir die charakteristische Function

$$x^\varrho f(x, \varrho) = \left[(1-x)\varrho(\varrho-1) + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\varrho - \alpha\beta x\right] x^\varrho;$$

also ist

$$f_0(\varrho) = \quad \varrho(\varrho-1) + \gamma\varrho,$$
$$f_1(\varrho) = -\varrho(\varrho-1) - (\alpha+\beta+1)\varrho - \alpha\beta,$$

und die Recursionsformel für eine (G) befriedigende Reihe

$$g(x, \varrho) = \sum_\nu g_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu}$$

lautet demnach

$$(15) \qquad a_{\nu\nu}(\varrho) g_\nu(\varrho) + a_{\nu,\nu-1}(\varrho) g_{\nu-1}(\varrho) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots),$$

wo

$$a_{\nu\nu}(\varrho) = (\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1+\gamma),$$
$$a_{\nu,\nu-1}(\varrho) = -[(\varrho+\nu-1)(\varrho+\nu-2) + (\alpha+\beta+1)(\varrho+\nu-1) + \alpha\beta].$$

Die Grössen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, τ_{01}, τ_{02}, τ_{11}, τ_{12} (Nr. 64, S. 226) haben die Werthe

$$\mathfrak{a}_0 = 1, \qquad \tau_{01} = 0, \qquad \tau_{02} = 1 - \gamma,$$
$$\mathfrak{a}_1 = -1, \quad \tau_{11} = -\alpha, \quad \tau_{12} = -\beta,$$

und wir erhalten aus der Recursionsformel für unbestimmtes ϱ:

$$\frac{g_{\nu+1}(\varrho)}{g_\nu(\varrho)} = \frac{(\varrho+\nu+\alpha)(\varrho+\nu+\beta)}{(\varrho+\nu+1)(\varrho+\nu+\gamma)},$$

oder

$$(16)\quad g_{\nu+1}(\varrho) = \frac{(\varrho+\alpha)\cdots(\varrho+\alpha+\nu)(\varrho+\beta)\cdots(\varrho+\beta+\nu)}{(\varrho+1)\cdots(\varrho+1+\nu)(\varrho+\gamma)\cdots(\varrho+\gamma+\nu)}\, g_0(\varrho).$$

Der Algorithmus für die Reihe $g(x, \varrho)$ lautet demnach

$$(17)\quad x^\varrho\, \Phi\left(1,\, -1;\; \begin{matrix} \varrho-0,\ \varrho-1+\gamma \\ \varrho+\alpha,\ \varrho+\beta \end{matrix};\; x\right)$$

$$= g_0(\varrho)\, x^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\varrho+\alpha)\cdots(\varrho+\alpha+\nu-1)(\varrho+\beta)\cdots(\varrho+\beta+\nu-1)}{(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu)(\varrho+\gamma)\cdots(\varrho+\gamma+\nu-1)}\, x^\nu,$$

und der für die nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{-\nu}(\varrho)\, x^{\varrho-\nu}$$

ergiebt sich hieraus nach Nr. 64 (S. 227) in der Form

$$(18)\quad x^\varrho\, \Phi\left(-1,\, 1;\; \begin{matrix} -\varrho-\alpha,\ -\varrho-\beta \\ -\varrho+0,\ -\varrho+1-\gamma \end{matrix};\; \frac{1}{x}\right)$$

$$= g_0(\varrho)\, x^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\varrho)\cdots(-\varrho+\nu-1)(-\varrho+1-\gamma)\cdots(-\varrho+1-\gamma+\nu-1)}{(-\varrho-\alpha+1)\cdots(-\varrho-\alpha+\nu)(-\varrho-\beta+1)\cdots(-\varrho-\beta+\nu)}\, x^{-\nu}.$$

Wenn sich die Wurzeln der zu $x = 0$ und zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nicht um ganze Zahlen unterscheiden, d. h. wenn

$$1-\gamma,\quad \alpha-\beta$$

nicht ganzzahlig sind, so stellen die Algorithmen (17), (18) unmittelbar die zu $x = 0$, beziehungsweise $x = \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme dar, wenn man in (17) für ϱ die Wurzeln 0, $1-\gamma$, in (18) für $-\varrho$ die Wurzeln α, β der betreffenden determinirenden Fundamentalgleichungen einsetzt. Wählen wir noch

$$g_0(\varrho) = 1$$

und bezeichnen mit Gauss die Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}\, x^2 + \cdots$$

durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

so erhalten wir unter der gemachten Voraussetzung für das zu $x = 0$ gehörige Fundamentalsystem u_{01}, u_{02} die Darstellungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \end{cases}$$

und für das zu $x = \infty$ gehörige:

$$(20) \qquad \begin{cases} u_{\infty 1} = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right), \\ u_{\infty 2} = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Die Reihen (19) convergiren für

$$|x| < 1, \text{ divergiren für } |x| > 1,$$

die Reihen (20) convergiren für

$$|x| > 1, \text{ divergiren für } |x| < 1.$$

Wenn $1 - \gamma$ bez. $\alpha - \beta$ ganze Zahlen sind, so können die Elemente der zu $x = 0$ bez. $x = \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme Logarithmen enthalten. Betrachten wir zunächst den Punkt $x = 0$ und sei

$$1 - \gamma = q$$

eine ganze Zahl. Dann sind noch die beiden Fälle zu unterscheiden, wo q positiv oder negativ ist.

1) Sei $q \leq 0$, dann gehört zur Wurzel 0 der determinirenden Fundamentalgleichung jedenfalls ein in Reihenform darstellbares Integral, und zwar ist

$$u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Wenn $q < 0$, so kann auch zum Exponenten q ein von Logarithmen freies Integral gehören, hierzu ist nach dem Kriterium der Nr. 53 (S. 189) nothwendig und hinreichend

$$h_{0-q}(q) = 0.$$

Aber zufolge der Recursionsformel (15) ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$h_\nu(\varrho) = a_{\nu, \nu-1}(\varrho) a_{\nu-1, \nu-2}(\varrho) \cdots a_{10}(\varrho),$$

also

$$h_{-q}(q) = f_1(-1) f_1(-2), \cdots f_1(q),$$

und da

$$f_1(\varrho) = -(\varrho + \alpha)(\varrho + \beta)$$

ist, so erhalten wir

$$(21) \quad h_{-q}(q) = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha - 2)(\beta - 2) \cdots (\alpha + q)(\beta + q).$$

Dieses Product verschwindet dann und nur dann, wenn α oder β mit einer der Zahlen $1, 2, \cdots (-q)$ übereinstimmt. Ist dies der Fall, so können wir das zum Exponenten q gehörige Integral auch durch die Reihe

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

darstellen, wenn wir festsetzen, dass in den Coefficienten dieser Reihe die verschwindenden Factoren im Zähler und Nenner wegzulassen sind. Wenn für $q<0$ das Product (21) von Null verschieden und wenn $q=0$ ist, so hat das zum Exponenten $1-\gamma$ gehörige Integral u_{02} die Form

$$u_{02}=x^{1-\gamma}(\varphi_0(x)+\varphi_1(x)\log x),$$

wo φ_0, φ_1 in der Umgebung von $x=0$ reguläre Functionen bedeuten, die für $x=0$ nicht beide verschwinden. In diesem Falle finden wir u_{01}, u_{02}, indem wir (vergl. Nr. 49) in dem Algorithmus (17) für $g_0(\varrho)$ den Werth

$$g_0(\varrho)=a_{11}(\varrho)a_{22}(\varrho)\cdots a_{\gamma-1,\gamma-1}(\varrho)\cdot C(\varrho)$$

einsetzen, wo $C(\varrho)$ eine für $\varrho=q$ endlich bleibende aber sonst willkürliche Function bedeutet; wir wählen, um einfache Formeln zu erhalten,

$$C(\varrho)=\frac{1}{(\varrho+\alpha)\cdots(\varrho+\alpha-q-1)(\varrho+\beta)\cdots(\varrho+\beta-q-1)},$$

was gestattet ist, weil α, β mit keiner der Zahlen $1, 2, \cdots(-q)$ übereinstimmen sollten. Dann ist wegen

$$a_{\nu\nu}(\varrho)=f_0(\varrho+\nu)=(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-q)$$

$$g_0(\varrho)=\frac{(\varrho+1)\cdots(\varrho-q)(\varrho-q+1)\cdots(\varrho-2q)}{(\varrho+\alpha)\cdots(\varrho+\alpha-q-1)(\varrho+\beta)\cdots(\varrho+\beta-q-1)},$$

und zufolge der allgemeinen Theorie erhalten wir das canonische Fundamentalsystem in der Form

$$u_{01}=g(x,q)=\left\{g_0(\varrho)x^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(\varrho)x^\nu\right\}_{\varrho=q},$$

$$u_{02}=\left[\frac{\partial g(x,\varrho)}{\partial\varrho}\right]_{\varrho=q},$$

wo

$$c_\nu(\varrho)=\frac{(\varrho+\alpha)\cdots(\varrho+\alpha+\nu-1)(\varrho+\beta)\cdots(\varrho+\beta+\nu-1)}{(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu)(\varrho+\gamma)\cdots(\varrho+\gamma+\nu-1)},\qquad c_0=1$$

gesetzt wurde. Nun ist aber

$$c_{-q+\nu}(\varrho)\cdot g_0(\varrho)=c_\nu(\varrho-q)\qquad(\nu=0,1,\cdots),$$

wir haben folglich

$$g(x,\varrho)=g_0(\varrho)x^\varrho\sum_{\nu=0}^{-q-1}c_\nu(\varrho)x^\nu+x^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(\varrho-q)x^{\nu-q},$$

$$\frac{\partial g(x,\varrho)}{\partial\varrho}=g'(x,\varrho)=g(x,\varrho)\log x+g_0(\varrho)x^\varrho\sum_{\nu=0}^{-q-1}c_\nu'(\varrho)x^\nu$$
$$+g_0'(\varrho)x^\varrho\sum_{\nu=0}^{-q-1}c_\nu(\varrho)x^\nu+x^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu'(\varrho-q)x^{\nu-q},$$

wo

$$c_\nu'(\varrho) = \frac{\partial c_\nu(\varrho)}{\partial \varrho}$$

zu nehmen ist. Setzen wir nun hierin $\varrho = q$, so ergiebt sich

$$u_{01} = g(x, q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(0) x^\nu = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

wie auch von anderer Seite gefunden wurde, und ferner

$$u_{02} = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x,$$

wo

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = g_0'(q)\{x^{1-\gamma} + c_1(q)x^{2-\gamma} + \cdots + c_{\gamma-2}(q)x^{-1}\}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu'(0) x^\nu$$

ist. Man findet

$$g_0'(q) = \lim_{\varrho=q} g_0(\varrho)(\varrho - q) = \frac{(-1)^\gamma (\gamma-1)!\,(\gamma-2)!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-\gamma+1)(\beta+1)\cdots(\beta-\gamma+1)},$$

$$c_\nu'(0) = c_\nu(0)\Big\{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha+\nu-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{\beta+\nu-1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma+1}$$
$$- \cdots - \frac{1}{\gamma+\nu-1}\Big\},$$

hierdurch ist der Reihenalgorithmus $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vollkommen determinirt; im Falle $q = 0$ ist $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe.

2) Sei $q > 0$, dann gehört jedenfalls zum Exponenten $1-\gamma$ ein in Reihenform darstellbares Integral, nämlich

$$x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x).$$

Ein zweites Integral findet man durch ähnliche Betrachtungen wie im Falle 1) oder einfacher, indem man die Substitution

$$z = x^{1-\gamma} u$$

in die Differentialgleichung (G) macht, wodurch dieselbe in eine Gauss'sche Differentialgleichung für u übergeht, in der die Grössen

$$\alpha+1-\gamma, \quad \beta+1-\gamma, \quad 2-\gamma$$

an die Stelle von α, β, γ getreten sind, für die also dann der Fall 1) stattfindet. Es ergiebt sich, dass zum Exponenten $\varrho = 0$ das von Logarithmen freie Integral

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

gehört, wo im Zähler und Nenner der einzelnen Coefficienten die verschwindenden Glieder wegzulassen sind, wenn α oder β mit einer der Zahlen $0, -1, -2, \cdots \gamma$ übereinstimmt, dass dagegen, wenn dies nicht der Fall ist, der Wurzel $\varrho = 0$ der determinirenden Fundamentalgleichung das Integral

$$x^{1-\gamma}[F_1(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ + F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)\log x]$$

entspricht.

Die analoge Discussion für den Punkt $x = \infty$ gestaltet sich am einfachsten, wenn man in (G) die Substitutionen

$$(22) \qquad x = \frac{1}{\xi}, \quad z = \xi^\alpha u$$

ausführt, wodurch sich für u als Function von ξ eine Gauss'sche Differentialgleichung ergiebt, worin die Zahlen

$$\alpha, \alpha-\gamma+1, -\beta+\alpha+1$$

die Rolle der α, β, γ spielen. Die Reihen (20) behalten also ihre Bedeutung, auch wenn $\alpha - \beta$ eine ganze Zahl ist, zu beiden Wurzeln α, β aber ein von Logarithmen freies Integral gehört. Ist das nicht der Fall so haben wir

1) wenn $\alpha - \beta$ eine negative ganze Zahl oder Null ist, die beiden Integrale

$$x^{-\beta}F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right),$$

$$x^{-\beta}\left[F_1\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right) \right. \\ \left. + F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\right];$$

2) wenn $\alpha - \beta$ eine positive ganze Zahl ist, die beiden Integrale

$$x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right),$$

$$x^{-\alpha}\left[F_1\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right) \right. \\ \left. + F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\right].$$

72. Reihen die nach Potenzen von $1-x$ fortschreiten. Das Kummer'sche Princip.

Um die nach Potenzen von $x - 1$ fortschreitenden Reihenentwickelungen und damit das zu $x = 1$ gehörige canonische Fundamentalsystem zu erhalten, ist es am zweckmässigsten in (G) zu setzen

(23) $$1 - x = \xi,$$

wodurch für z als Function von ξ eine Gauss'sche Differentialgleichung hervorgeht, worin

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta - \gamma + 1$$

an die Stelle der α, β, γ getreten sind. Unterscheiden sich die beiden Wurzeln der zu $x = 1$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung nicht um eine ganze Zahl, d. h. ist $\gamma - \alpha - \beta$ nicht ganzzahlig, so erhalten wir

$$u_{11} = F(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma,\ 1 - x),$$

$$u_{12} = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ 1 - x),$$

und dieselben Integrale behalten ihre Bedeutung, wenn $\gamma - \alpha - \beta$ ganzzahlig ist, aber trotzdem zu beiden Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung ein von Logarithmen freies Integral gehört. Ist dies nicht der Fall, so haben wir

1) wenn $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$ ist, die Integrale

$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta - \gamma + 1,\ 1 - x),$$

$$F_1(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta - \gamma + 1,\ 1 - x) + F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1,\ 1 - x) \log(1 - x);$$

2) wenn $\gamma - \alpha - \beta > 0$ ist, die Integrale

$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ 1 - x),$$

$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} \{F_1(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ 1 - x)$$
$$+ F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ 1 - x) \log(1 - x)\}.$$

Die hier auftretenden Reihen convergiren für

$$|x - 1| < 1,$$

divergiren für

$$|x - 1| > 1.$$

Wir können auch Reihen herstellen, die nach fallenden Potenzen von $1 - x$ fortschreiten, also ein zu $x = \infty$ gehöriges canonisches Fundamentalsystem darstellen, beschränken uns dabei aber auf den Fall, wo $\alpha - \beta$ keine ganze Zahl ist. Diese Reihen gehen aus u_{11}, u_{12} ebenso hervor, wie $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ aus u_{01}, u_{02}; wir finden demgemäss

$$\bar{u}_{\infty 1} = (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma - \beta,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$\bar{u}_{\infty 2} = (1 - x)^{-\beta} F\left(\beta,\ \gamma - \alpha,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{1 - x}\right),$$

und der Convergenzbezirk dieser Reihen umfasst die Werthe, für die

$$|1 - x| > 1.$$

Diese Reihen definiren ebensowohl wie die Reihen (20) wohlbestimmte Functionszweige, die der Differentialgleichung (G) genügen, wenn wir uns die als Factoren auftretenden mehrdeutigen Potenzen fixirt denken. Es lässt sich nun zeigen, dass je zwei dieser Functionszweige identisch sind. Das geschieht mit Hülfe des folgenden Kummerschen Princips. Seien die α, β, γ willkürliche von einander unabhängige Grössen, dann können sich zwei Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung, die beide nach ganzen aufsteigenden Potenzen von x entwickelbar sind, nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Die Richtigkeit dieses Princips erhellt aus der einfachen Bemerkung, dass ein nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbares Integral von (G) nothwendig in der Form

$$c_1 u_{01} + c_2 u_{02}$$

darstellbar sein muss, wo c_1, c_2 Constanten bedeuten, und dass bei willkürlichen α, β, γ, wo also $1-\gamma$ keine ganze Zahl ist, c_2 verschwindet. Das Princip gilt natürlich ebenso für zwei nach ganzen aufsteigenden Potenzen von $1-x$ entwickelbare Integrale von (G), auch übersieht man sofort, wie dasselbe auf eine beliebige Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Integrale sich im Punkte $x=0$ bestimmt verhalten, übertragen werden kann (vergl. Nr. 51, S. 179).

Macht man in die Differentialgleichung (G) die Substitution (22), so besitzt die für u als Function von ξ resultirende Gauss'sche Differentialgleichung die beiden Integrale

$$v = \xi^{-\alpha} u_{\infty 1} = F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \xi),$$
$$\bar{v} = \xi^{-\alpha} \bar{u}_{\infty 1} = (\xi-1)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{\xi}{\xi-1}\right).$$

Die Reihe für v convergirt, wenn $|\xi|<1$, die Reihe für $\bar{v}$, wenn

$$|\xi| < |\xi - 1|$$

ist; denken wir uns also in der ξ-Ebene im Punkte $\xi=\frac{1}{2}$ eine Senkrechte zur realen ξ-Axe errichtet, so convergiren beide Reihen innerhalb desjenigen durch diese Senkrechte von dem um $\xi=0$ mit dem Radius Eins beschriebenen Kreise abgeschnittenen Segments, das den Punkt $\xi=0$ enthält, gleichzeitig. Wir können also die Entwickelung von $\bar{v}$ in der Umgebung von $\xi=0$ einfach dadurch herstellen, dass wir

$$(\xi-1)^{-\alpha}, \quad \frac{\xi}{\xi-1}$$

nach Potenzen von ξ entwickeln, diese Entwickelungen in die Reihe für $\bar{v}$ einsetzen und nach Potenzen von ξ ordnen; dann schreitet die Entwickelung von $\bar{v}$ nach ganzen positiven Potenzen von ξ fort und beginnt mit dem constanten Gliede $(-1)^{-\alpha}$. Hieraus folgt auf Grund des Kummer'schen Princips, dass

$$(-1)^{-\alpha} v = \bar{v},$$

d. h. also

$$u_{\infty 1} = (-1)^{\alpha} \bar{u}_{\infty 1}$$

ist, und durch Vertauschung von α mit β ergiebt sich hieraus sofort

$$u_{\infty 2} = (-1)^{\beta} \bar{u}_{\infty 2}.$$

Diese Gleichungen gelten für die Reihen, welche die auf beiden Seiten einer Gleichung stehenden Functionen darstellen, innerhalb des gemeinsamen Convergenzbezirks, hieraus folgt aber, dass sie bestehen bleiben, wenn man die beiden Functionen $u_{\infty 1}$, $(-1)^{\alpha}\bar{u}_{\infty 1}$, beziehungsweise $u_{\infty 2}$, $(-1)^{\beta}\bar{u}_{\infty 2}$ auf denselben Wegen fortsetzt. Sie lehren also, dass die Elemente des zu $x = \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems zweier verschiedener Entwickelungen fähig sind, ein Umstand, der auch in praktischer Hinsicht nicht ohne Bedeutung ist, da für verschiedene Werthe von x bald die eine bald die andere Entwickelung rascher convergirt. Diese beiden Entwickelungen sind aber nicht die einzigen, die für $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ aufgestellt werden können, auch ist es nicht für diese Integrale allein, sondern, wie wir nunmehr zeigen werden, ebenso für die u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12} möglich, zu verschiedenen Reihenentwickelungen zu gelangen.

73. Transformation der Gauss'schen Differentialgleichung.

Wir hatten schon wiederholt Gelegenheit Substitutionen anzugeben (z. B. (22), (23)), durch welche die Differentialgleichung (G) wieder in eine Gauss'sche Differentialgleichung überging, und zwar waren in der letzteren allemal an die Stelle der α, β, γ lineare Functionen dieser Grössen mit numerischen Coefficienten getreten. Wir fragen nun allgemein, durch welche Transformationen von der Form

$$(24) \qquad \begin{cases} z = w \cdot \zeta, \\ \xi = f(x), \end{cases}$$

wo w und ξ Functionen von x bedeuten, geht die Differentialgleichung (G) in eine ebenfalls Gauss'sche Differentialgleichung

$$(\Gamma) \qquad \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \frac{\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)\xi}{\xi(1-\xi)} \frac{d\zeta}{d\xi} - \frac{\alpha'\beta'}{\xi(1-\xi)} \zeta = 0$$

über, wo die α', β', γ' mit den α, β, γ durch die linearen Beziehungen

$$\begin{cases} \alpha' = \lambda_0\alpha + \lambda_1\beta + \lambda_2\gamma + \lambda_3, \\ \beta' = \mu_0\alpha + \mu_1\beta + \mu_2\gamma + \mu_3, \\ \gamma' = \nu_0\alpha + \nu_1\beta + \nu_2\gamma + \nu_3 \end{cases}$$

verknüpft sind. Die besondere Form der Transformation (24) wird durch die Betrachtungen eines späteren Abschnittes motivirt werden; daselbst kann auch erst die tiefere Bedeutung der hier behandelten Frage zur Darlegung kommen. Wir fügen noch die Voraussetzungen hinzu, dass α, β, γ als von einander unabhängige, unbestimmte Grössen gewählt seien, und dass die Function ξ von x von den α, β, γ unabhängig angenommen werde.

Bilden wir aus (24), durch Differentiation nach x,

$$z' = w'\zeta + \frac{d\zeta}{d\xi}\xi' w,$$

$$z'' = w''\zeta + 2w'\frac{d\zeta}{d\xi}\xi' + w\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\xi'' + \xi'^2\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right),$$

wo die Accente Ableitungen nach x bedeuten, und setzen diese Ausdrücke in (G) ein, so entsteht eine lineare homogene Differentialgleichung für ζ als Function von ξ, die mit (Γ) übereinstimmen muss; die Vergleichung der Coefficienten ergiebt:

$$(25)\quad 2w'\xi' + w\xi'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)} w\xi' = \frac{\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)\xi}{\xi(1-\xi)} w\cdot\xi'^2,$$

$$(26)\quad w'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)} w' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} w = -\frac{\alpha'\beta'}{\xi(1-\xi)} w\cdot\xi'^2.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch $w\cdot\xi'$ und integrirt, so erhält man

$$w^2 = C\cdot e^{-\int\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}dx}\, e^{\int\frac{\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)\xi}{\xi(1-\xi)}d\xi}\,\frac{dx}{d\xi},$$

oder

$$(27)\qquad w^2 = Cx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-(\alpha+\beta+1)}\xi^{\gamma'}(1-\xi)^{-\gamma'+\alpha'+\beta'+1}\frac{dx}{d\xi},$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Indem man nun diesen Ausdruck in (26) einsetzt oder nach Differentiation von (25) direct w, w', w'' eliminirt, ergiebt sich die zwischen x und ξ bestehende Differentialgleichung

$$(28)\qquad \varDelta\binom{\xi}{x} + \frac{A'\xi^2 + B'\xi + C'}{4\xi^2(1-\xi)^2}\xi'^2 = \frac{Ax^2 + Bx + C}{4x^2(1-x)^2},$$

wo

$$\varDelta\binom{\xi}{x} = \frac{3\xi''^2 - 2\xi'\xi^{(3)}}{4\xi'^2}$$

der sogenannte Schwarz'sche Differentialausdruck ist, und

$$
\begin{aligned}
A &= (\alpha - \beta)^2 - 1, & A' &= (\alpha' - \beta')^2 - 1, \\
B &= 4\alpha\beta - 2\gamma(\alpha + \beta - 1), & B' &= 4\alpha'\beta' - 2\gamma'(\alpha' + \beta' - 1), \\
C &= \gamma(\gamma - 2), & C' &= \gamma'(\gamma' - 2)
\end{aligned}
$$

gesetzt wurde. Die Gleichung (28) muss für willkürliche Werthe der α, β, γ bestehen; setzt man also für α', β', γ' ihre Ausdrücke als lineare Functionen der α, β, γ ein und ordnet nach Potenzen dieser letzteren Grössen, so ergeben sich zehn Gleichungen, indem die Coefficienten von α^2, β^2, γ^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, α, β, γ für sich verschwinden müssen. Es ist nun

$$
\begin{aligned}
Ax^2 + Bx + C = x^2\alpha^2 + x^2\beta^2 + \gamma^2 - 2x(x-2)\alpha\beta - 2x\alpha\gamma \\
- 2(1-x)\gamma - x^2,
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
A'\xi^2 + B'\xi + C' = h\alpha^2 + k\beta^2 + l\gamma^2 + m\alpha\beta + n\gamma\beta + p\alpha\gamma \\
+ q\alpha + r\beta + s\gamma + t,
\end{aligned}
$$

wo die h, k, $\cdots$ s, t sämmtlich Ausdrücke von der Form

$$a\xi^2 + b\xi + c$$

sind. Vergleicht man auf beiden Seiten der Gleichung (28) die Coefficienten von γ, β^2, γ^2, so erhält man

$$\frac{-2(1-x)}{x^2(1-x)^2} = \frac{a\xi^2 + b\xi + c}{\xi^2(1-\xi)^2}\,\xi'^2, \tag{29}$$

$$\frac{x^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1}{\xi^2(1-\xi)^2}\,\xi'^2, \tag{30}$$

$$\frac{1}{x^2(1-x)^2} = \frac{a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2}{\xi^2(1-\xi)^2}\,\xi'^2, \tag{31}$$

wo

$$
\begin{aligned}
s &= a\xi^2 + b\xi + c, \\
k &= a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1, \\
l &= a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2
\end{aligned}
$$

gesetzt wurde. Durch Division der Gleichungen (30), (31) und (29), (31) folgt nun

$$x^2 = \frac{a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1}{a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2},$$

$$2x - 2 = \frac{a\xi^2 + b\xi + c}{a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2},$$

so dass also

$$(32) \qquad \xi = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho}$$

sein muss, wo λ, μ, ν, ϱ Constanten bedeuten. Für diesen Werth von ξ ist aber offenbar

$$\Delta\left(\frac{\xi}{x}\right) = 0,$$

die Gleichung (28) erhält also die Form

$$(33) \quad \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(1-x)^2} = (\lambda\varrho-\mu\nu)^2 \frac{A'(\lambda x+\mu)^2+B'(\lambda x+\mu)(\nu x+\varrho)+C'(\nu x+\varrho)^2}{(\lambda x+\mu)^2(\nu x+\varrho)^2[(\nu-\lambda)x+\varrho-\mu]^2},$$

und hieraus folgt wegen der Willkürlichkeit der α, β, γ

$$L\cdot x^2(1-x)^2 = (\lambda x+\mu)^2(\nu x+\varrho)^2[(\nu-\lambda)x+\varrho-\mu]^2,$$

wo L einen constanten Factor bedeutet. Diese Gleichung liefert nun sechs verschiedene Werthsysteme der L, λ, μ, ν, ϱ, denen entsprechend die Gleichung (32) die sechs Werthe

$$(34) \quad \begin{cases} \xi = x, & \xi = 1-x, & \xi = \dfrac{1}{x}, \\ \xi = \dfrac{1}{1-x}, & \xi = \dfrac{x}{x-1}, & \xi = \dfrac{x-1}{x} \end{cases}$$

ergiebt. Die zugehörigen Werthe der α', β', γ' finden wir dann aus der Gleichung (33); z. B. muss für $\xi = x$ sein

$$Ax^2 + Bx + C = A'x^2 + B'x + C',$$

also

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C',$$

woraus nach der Bedeutung dieser sechs Grössen

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha'-\beta')^2, \quad 4\alpha\beta - 2\gamma(\alpha+\beta-1) = 4\alpha'\beta' - 2\gamma'(\alpha'+\beta'-1),$$
$$\gamma(\gamma-2) = \gamma'(\gamma'-2)$$

folgt. Wir erhalten demgemäss für $\xi = x$ die vier Lösungssysteme

$\alpha' =$	$\beta' =$	$\gamma' =$	$w =$
α	β	γ	c
$\gamma-\alpha$	$\gamma-\beta$	γ	$c(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$
$\alpha-\gamma+1$	$\beta-\gamma+1$	$2-\gamma$	$cx^{1-\gamma}$
$1-\alpha$	$1-\beta$	$1-\gamma$	$cx^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$,

c eine Constante, und entsprechend vier Gauss'sche Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln x, für

$$z, \quad (1-x)^{-\gamma+\alpha+\beta}z, \quad x^{-1+\gamma}z, \quad x^{-1+\gamma}(1-x)^{-\gamma+\alpha+\beta}z.$$

Setzt man in der Gleichung (28)

$$1 - \xi \text{ an Stelle von } \xi,$$
$$\alpha' + \beta' + 1 - \gamma' \text{ an Stelle von } \gamma',$$

so bleibt dieselbe ungeändert, dann bleibt nach (27) auch w ungeändert. Setzt man ferner in (28)

$$\frac{\xi}{\xi - 1} \text{ an Stelle von } \xi,$$
$$\gamma' - \beta' \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \beta',$$

so bleibt diese Gleichung auch ungeändert und w verwandelt sich in

$$(1 - \xi)^{-\alpha'} w.$$

Auf Grund dieser einfachen Bemerkungen lassen sich jetzt die den fünf anderen Werthen von x entsprechenden α', β', γ' aus den für $\xi = x$ gefundenen ablesen, denn die Ausdrücke (34) reproduciren sich immer wieder, wenn man die durch dieselben angedeuteten Operationen beliebig oft hintereinander auf irgend einen von ihnen anwendet. Diese merkwürdige Eigenschaft der sechs Ausdrücke (34) wird uns später in allgemeinerer Fassung wieder begegnen, es ist die sogenannte Gruppeneigenschaft, die seit Galois in der ganzen modernen Mathematik eine fundamentale Bedeutung gewonnen hat. Die Ausdrücke (34) stimmen mit den sechs verschiedenen Werthen überein, die das Doppelverhältniss von vier Punkten bei allen vierundzwanzig möglichen Permutationen dieser Punkte anzunehmen vermag, wenn x den Werth des Doppelverhältnisses bei einer bestimmten Anordnung darstellt.

74. Die vierundzwanzig Integrale. Convergenz auf dem Convergenzkreise.

Wir erhalten durch die sechs Werthe von ξ und die jedem derselben entsprechenden vier Werthsysteme der α', β', γ', w' im Ganzen vierundzwanzig Gauss'sche Differentialgleichungen (G'); nehmen wir für jede derselben das Integral

$$F(\alpha', \beta', \gamma', \xi),$$

so finden wir durch die Transformation (24) die folgenden vierundzwanzig Integrale von (G):

$$\text{I} \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$\text{II} \quad (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x),$$
$$\text{III} \quad x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$
$$\text{IV} \quad x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x),$$

$$\text{V}\quad F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x),$$

$$\text{VI}\quad x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x),$$

$$\text{VII}\quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$

$$\text{VIII}\quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$

$$\text{IX}\quad (-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$\text{X}\quad (-x)^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$\text{XI}\quad (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,\ \gamma-\alpha,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$\text{XII}\quad (-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-\alpha}F\left(1-\beta,\ \gamma-\beta,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$\text{XIII}\quad (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{1-x}\right),$$

$$\text{XIV}\quad (1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\ \gamma-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{1-x}\right),$$

$$\text{XV}\quad (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha+1-\gamma,\ 1-\beta,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{1-x}\right),$$

$$\text{XVI}\quad (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta+1-\gamma,\ 1-\alpha,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1}{1-x}\right),$$

$$\text{XVII}\quad (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{x}{x-1}\right),$$

$$\text{XVIII}\quad (1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma,\ \frac{x}{x-1}\right),$$

$$\text{XIX}\quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha+1-\gamma,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ \frac{x}{x-1}\right),$$

$$\text{XX}\quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta+1-\gamma,\ 1-\alpha,\ 2-\gamma,\ \frac{x}{x-1}\right),$$

$$\text{XXI}\quad x^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right),$$

$$\text{XXII}\quad x^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right),$$

$$\text{XXIII}\quad x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ \frac{x-1}{x}\right),$$

$$\text{XXIV}\quad x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ \frac{x-1}{x}\right).$$

Diese vierundzwanzig Reihen convergiren, wenn ihr viertes Element, d. h. also x in $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, dem absoluten Betrage nach kleiner ist als Eins, hieraus folgt, dass für jeden beliebigen Werth von x stets zwölf von diesen vierundzwanzig Reihen convergent sind.

Aehnlich wie wir die Gleichungen $u_{x1} = (-1)^{\alpha} \bar{u}_{x1}$, $u_{x2} = (-1)^{\beta} \bar{u}_{x2}$ hergeleitet hatten, zeigt man nun auf Grund des Kummer'schen Princips, dass je vier dieser vierundzwanzig Integrale mit einem der sechs Integrale u_{01}, u_{02}, u_{x1}, u_{x2}, u_{11}, u_{12} identisch sind, es besteht nämlich Identität zwischen:

u_{01} oder I und II, XVII, XVIII,

u_{02} oder III und IV, XIX, XX,

$(-1)^{-\alpha} u_{x1}$ oder IX und XII, XIII, XV,

$(-1)^{-\beta} u_{x2}$ oder X und XI, XIV, XVI,

u_{11} oder V und VI, XXI, XXII,

u_{12} oder VII und VIII, XXIII, XXIV.

Diese Identitäten bestehen zwischen je zweien dieser Reihen selbst innerhalb des gemeinsamen Theiles der Convergenzkreise, oder für die aus den Reihen entspringenden particulären Integrale, wenn man dieselben von einem Punkte des gemeinsamen Convergenzkreises der beiden Reihen aus auf denselben Wegen fortsetzt. Ueberdies müssen auch noch zwischen irgend welchen dreien der durch die vierundzwanzig aufgestellten Reihen definirten particulären Integrale homogene lineare Relationen mit constanten Coefficienten bestehen; auf diese kommen wir im achten Abschnitte zurück.

Wir fanden, dass die Integration der Gauss'schen Differentialgleichung (G) auf die Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

zurückgeführt ist, wenn die α, β, γ als unbestimmte Grössen angesehen werden; für specielle Werthe der α, β, γ, wo gewisse aus denselben gebildete Differenzen ganze Zahlen sind, tritt noch die Reihe

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

hinzu, die, wie wir sahen, durch einen Grenzübergang aus $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ erhalten werden kann. Es soll nun diese letztere Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, die gewöhnlich die Gauss'sche oder auch hypergeometrische Reihe genannt wird, noch etwas genauer untersucht werden; insbesondere erörtern wir die Frage ihrer Convergenz auf dem Convergenzkreise.

Die durch die Gauss'sche Reihe definirte Function u_{01} verhält sich in der Umgebung jeder Stelle des Convergenzkreises $|x| = 1$ regulär, mit Ausnahme der Stelle $x = 1$. In der Umgebung von $x = 1$ ist u_{01} homogen linear mit constanten Coefficienten durch u_{11}, u_{12} darstellbar, der Thomé'sche Convergenzsatz ergiebt demgemäss das folgende Kriterium:

Wenn der reale Theil von $\gamma - \alpha - \beta$ im algebraischen Sinne grösser ist als -1, so convergirt die Gauss'sche Reihe für alle von $x = 1$ verschiedenen Werthe von x, deren absoluter Betrag gleich Eins ist, sie convergirt auch noch für $x = 1$, wenn der reale Theil von $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist.

Den letzten Theil dieses Satzes hat Gauss für den Fall realer Werthe der α, β, γ durch directe Methoden bewiesen, die Verallgemeinerung des Gauss'schen Verfahrens auf den Fall beliebiger complexer α, β, γ hat Herr Weierstrass gegeben. Gauss hat aber ferner gezeigt, wie sich der Werth $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$, falls die Reihe für $x = 1$ convergent ist, mit Hülfe einer einfachen Transcendenten, die von den α, β, γ abhängt, darstellen lässt. Er hat zu dem Ende den Begriff der contiguen Functionen eingeführt, ein Begriff, der von verschiedenen Mathematikern auch auf Reihen, die Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe mit mehr als zwei singulären Punkten genügen, ausgedehnt worden ist, für diese aber noch nicht zu ähnlichen Ergebnissen geführt hat, wie sie für die Gauss'sche Differentialgleichung bestehen.

75. Contigue Functionen. Die Π-Function.

Unter einer zu $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ contiguen Function oder Reihe versteht Gauss eine Reihe $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$, wo zwei der α', β', γ' mit den entsprechenden der α, β, γ übereinstimmen, das dritte dagegen sich von dem entsprechenden der α, β, γ um die positive oder negative Einheit unterscheidet. Es giebt demnach sechs verschiedene zu $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ contigue Functionen; zwischen je zweien derselben und der ursprünglichen Reihe besteht, wie Gauss gezeigt hat, eine lineare homogene Beziehung; wir wollen von diesen fünfzehn Beziehungen die für unsere Zwecke erforderlichen herleiten.

Setzen wir

$$M_\nu = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\nu-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-2)}{1\cdot 2\cdots\nu\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\nu-1)},$$

so lautet der Coefficient von x^ν

$$\begin{aligned}
&\text{in } F(\alpha, \beta, \gamma, x) && \cdots \alpha(\beta+\nu-1)\, M_\nu,\\
&\text{in } F(\alpha, \beta-1, \gamma, x) && \cdots \alpha(\beta-1)\, M_\nu,\\
&\text{in } F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) && \cdots (\alpha+\nu)(\beta+\nu-1)\, M_\nu,\\
&\text{in } F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) && \cdots \frac{\alpha(\beta+\nu-1)(\gamma+\nu-1)}{\gamma-1} M_\nu,\\
&\text{in } xF(\alpha+1, \beta, \gamma, x) && \cdots \nu(\gamma+\nu-1)\, M_\nu.
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich sofort die Gleichungen

$$(35)\qquad \begin{aligned}(\gamma-\alpha-1)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)\\ + (1-\gamma)\,F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = 0,\end{aligned}$$

$$(36)\qquad \begin{aligned}(\gamma-\alpha-\beta)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \alpha(1-x)\,F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)\\ + (\beta-\gamma)\,F(\alpha, \beta-1, \gamma, x) = 0;\end{aligned}$$

vertauscht man hierin α mit β und combinirt die so entstehenden Gleichungen, so ergiebt sich

$$(37)\qquad \begin{aligned}[\alpha-1-(\gamma-\beta-1)x]\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma-\alpha)\,F(\alpha-1, \beta, \gamma, x)\\ + (1-\gamma)(1-x)\,F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = 0.\end{aligned}$$

Verwandelt man in (35), α in $\alpha-1$, γ in $\gamma-1$ und zieht von der so entstehenden Gleichung diejenige ab, die aus (37) hervorgeht, wenn man darin $\gamma+1$ an die Stelle von γ setzt, so erhält man

$$(38)\qquad \begin{aligned}\gamma(1-x)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \gamma F(\alpha-1, \beta, \gamma, x)\\ + (\gamma-\beta)\,xF(\alpha, \beta, \gamma+1, x) = 0.\end{aligned}$$

Aus (37), (38) folgt nun

$$(39)\qquad \begin{aligned}\gamma(\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)\\ + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\,F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)\\ - \gamma(\gamma-1)(1-x)\,F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = 0.\end{aligned}$$

Von den drei in dieser Formel auftretenden Gauss'schen Reihen sind

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)$$

für $x = 1$ convergent, wenn der reale Theil

$$\Re(\gamma-\alpha-\beta)$$

von $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist, die dritte Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma-1, x)$$

ist jedoch unter dieser Voraussetzung für $x = 1$ nicht nothwendig convergent, da

$$\Re(\gamma-\alpha-\beta-1)$$

zwar algebraisch grösser als -1, aber doch negativ sein kann. Jedenfalls convergirt aber

$$F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x) \quad \text{für} \quad |x| = 1, \quad x \neq 1;$$

hieraus folgt nun, dass der absolute Betrag des ν^{ten} Gliedes dieser Reihe für $|x| = 1$ mit wachsendem ν beliebig klein wird, es wird also der absolute Betrag des Coefficienten von x^ν in $F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x)$ mit wachsendem ν beliebig klein. Hat man nun eine Potenzreihe

$$S = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

für welche

$$\lim_\nu a_\nu = 0$$

ist, so ist die Reihe

$$(1 - x) S = 1 + (a_1 - 1) x + (a_2 - a_1) x^2 + (a_3 - a_2) x^3 + \cdots$$

convergent für $x = 1$ und hat die Summe Null, auch wenn S für $x = 1$ divergirt; es ist also

$$\lim_{x=1} (x - 1) F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x) = 0,$$

wenn

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$$

ist. Unter dieser Voraussetzung folgt also aus (39):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1),$$

und hiernach für jede positive ganze Zahl $\varkappa$:

$$(40) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\varkappa, \gamma - 1)\, \Pi(\varkappa, \gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\varkappa, \gamma - \alpha - 1)\, \Pi(\varkappa, \gamma - \beta - 1)} F(\alpha, \beta, \gamma + \varkappa, 1),$$

wo

$$(41) \qquad \Pi(\varkappa, u) = \frac{\varkappa!}{(u + 1)(u + 2) \cdots (u + \varkappa)} \varkappa^u$$

gesetzt wurde. Nun ist aber offenbar für unendlich wachsendes $\varkappa$

$$\lim_\varkappa F(\alpha, \beta, \gamma + \varkappa, 1) = 1,$$

also folgt aus (40)

$$(42) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \lim_\varkappa \frac{\Pi(\varkappa, \gamma - 1)\, \Pi(\varkappa, \gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\varkappa, \gamma - \alpha - 1)\, \Pi(\varkappa, \gamma - \beta - 1)}.$$

Aus einfachen Sätzen über die unendlichen Producte folgt, dass

$$\lim_\varkappa \Pi(\varkappa, u) = \Pi(u)$$

stets existirt und eine für jedes u, welches keine negative ganze Zahl ist, eindeutige und endliche monogene Function darstellt, die der Functionalgleichung

$$\Pi(u + 1) = (u + 1)\, \Pi(u)$$

genügt. Wir erhalten also aus (42) die Darstellung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}, \tag{43}$$

und diese Darstellung hat jedenfalls einen Sinn, wenn keine der Grössen

$$\gamma - 1, \quad \gamma - \alpha - \beta - 1, \quad \gamma - \alpha - 1, \quad \gamma - \beta - 1$$

gleich einer negativen ganzen Zahl und

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$$

ist. Inwieweit diese Voraussetzungen auch nothwendig sind, wird im achten Abschnitte, wo wir eine wichtige Anwendung dieser Formel zu geben haben, genauer erörtert werden.

Sechster Abschnitt.

Die Entwickelungen der Integrale innerhalb eines Kreisringes.

Erstes Kapitel.

76. Recursionsformel für die innerhalb eines Kreisringes gültigen Reihenentwickelungen.

Wenn sich die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (A), deren Coefficienten in der Umgebung einer Stelle $x = a$ (als die wir wieder den Nullpunkt $x = 0$ wählen wollen) eindeutig sind, an dieser Stelle bestimmt verhalten, woraus folgt (vergl. Nr. 43), dass die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ die Form (D) haben müssen, so wollen wir sagen, jene Stelle sei eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung oder auch für den die linke Seite von (A) darstellenden Differentialausdruck. Das Studium dieses Falles ist in dem vorhergehenden Abschnitte ausführlich erledigt, es soll nunmehr der Fall untersucht werden, wo die Stelle $x = 0$ keine Bestimmtheitsstelle der Differentialgleichung (A) ist. — Wir halten dabei die Voraussetzung fest, dass die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ bei einem Umlaufe um $x = 0$ zu ihren Ausgangswerthen zurückkehren, schliessen aber nicht aus, dass $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit für diese Coefficienten ist.

Es möge genauer und allgemeiner die folgende Voraussetzung gemacht werden. Sei E ein von zwei concentrischen Kreisen K, K', die mit den Radien R, R' um $x = 0$ beschrieben sind, begrenzter zweifach zusammenhängender Bereich, innerhalb dessen die $p_1, p_2, \cdots p_n$ eindeutig und in der Umgebung jeder einzelnen Stelle von E regulär sein mögen, dann sind nach dem Laurent'schen Satze $p_1, p_2, \cdots p_n$ innerhalb E nach ganzen Potenzen von x entwickelbar, also

$$p_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} c_{\varkappa\lambda} x^\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Denken wir uns dann die Differentialgleichung durch Multiplication mit x^n auf die Form gebracht:

(A) $$P(y) = x^n y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = 0,$$

so ist also innerhalb E

(1) $$P_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{\varkappa\lambda} x^\lambda \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1);$$

der Gleichmässigkeit wegen werde auch noch

$$P_n(x) = 1$$

gesetzt. Da in diesem Falle die Function

$$t = \frac{\log x}{2\pi i}$$

die in der Theorie der Fundamentalgleichung geforderten Bedingungen (S. 129) erfüllt, so besitzen die Elemente des zu E gehörigen canonischen Fundamentalsystems auch hier die Form (8) (Nr. 39, S. 134), wo jetzt die $\psi_{i\varkappa}(x)$ innerhalb des Kreisringes E nach ganzen Potenzen von x entwickelbare Functionen bedeuten. Wir stellen uns die Aufgabe, die Coefficienten dieser Entwickelungen, ebensowohl wie die Zahlen $r_1, r_2, \cdots$ zu bestimmen; hierdurch ist dann auch die zu E gehörige Fundamentalgleichung, und damit das Verhalten der canonischen Integrale innerhalb E festgelegt.

Setzen wir also in (A) für y eine Reihe von der Form

(2) $$g(x, \varrho) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu}$$

ein, ordnen nach Potenzen von x und vergleichen die Coefficienten der einzelnen x-Potenzen mit Null. Zu diesem Ende bilden wir, wie im vierten Abschnitte (Nr. 44, S. 156), zunächst die charakteristische Function

$$P(x^\varrho) = x^\varrho f(x, \varrho);$$

dann ist

(3) $$f(x, \varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x)\, \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1),$$

und nach Potenzen von x entwickelt, innerhalb E,

(4) $$f(x, \varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} f_\lambda(\varrho) x^\lambda,$$

wo also

$$(5)\qquad \begin{cases} f_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \alpha_{\varkappa 0}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1), & \alpha_{n0}=1, \\ f_\lambda(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \alpha_{\varkappa\lambda}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1), & \lambda \neq 0, \end{cases}$$

gefunden wird. Es ergiebt sich demnach

$$P(y\,x, \varrho) = x^\varrho \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu(\varrho)x^\nu \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} f_\lambda(\varrho+\nu)x^\lambda,$$

und wenn wir

$$(6)\qquad f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = a_{\nu\lambda}(\varrho),$$

$$(7)\qquad F_\nu(\varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\lambda}(\varrho)g_\lambda(\varrho)$$

setzen, so ist

$$(8)\qquad P(y\,x, \varrho) = x^\varrho \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F_\nu(\varrho)x^\nu,$$

so dass wir für die Coefficienten $g_\nu(\varrho)$ und für den Exponenten ϱ das System

$$(9)\qquad F_\nu(\varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\lambda}(\varrho)g_\lambda(\varrho) = 0 \qquad (\nu=-\infty,\cdots+\infty)$$

von Gleichungen erhalten. — Diese unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten lassen mit algebraischen Hülfsmitteln keine Auflösung zu, man kann aber gewisse Schlüsse auf die Beschaffenheit der denselben genügenden Grössen ϱ, $g_\nu(\varrho)$ ziehen, wenn man sich des von den Herren Hill und Poincaré in die Analysis eingeführten Begriffes der unendlichen Determinanten bedient. Herr Helge von Koch hat diesen Begriff zum ersten Male auf das in Rede stehende Problem angewandt; wir wollen zuvörderst das Nöthigste aus der Theorie der unendlichen Determinanten entwickeln.

77. Begriff der unendlichen Determinante. Normalform. Convergenz.

Sei ein System von doppelt unendlich vielen Elementen

$$A = (a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

gegeben, wir fragen nach dem Grenzwerthe der Determinanten

$$D_m = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -m, \cdots +m)$$

für unendlich wachsendes m*). Falls ein solcher Grenzwerth existirt, so bezeichnen wir denselben durch

$$D = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

nennen ihn die aus dem Systeme A gebildete unendliche Determinante und sagen diese Determinante sei convergent. — Die Bedingung für die Convergenz lautet also nach den Regeln der Analysis wie folgt: nach Vorschrift einer beliebig kleinen Grösse δ muss es möglich sein, eine ganze positive Zahl ν so anzugeben, dass

$$|D_{m+\lambda} - D_m| < \delta,$$

für jedes ganzzahlige positive λ, wenn $m > \nu$. — Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sagen wir, die unendliche Determinante D sei divergent.

Die Gesammtheit der Elemente

$$a_{\varkappa\varkappa} \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

heisst die Hauptdiagonale, das Element

$$a_{00}$$

das Anfangsglied der unendlichen Determinante; ein Element $a_{i\varkappa}$ gehört der Diagonale an oder nicht, jenachdem $i = \varkappa$, oder $i \neq \varkappa$ ist, die Gesammtheit der Elemente

$$a_{i\varkappa} \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

bildet die i^{te} Zeile, die Gesammtheit der Elemente

$$a_{i\varkappa} \qquad (i = -\infty, \cdots +\infty)$$

die $\varkappa^{\text{te}}$ Reihe der unendlichen Determinante. — Das Fundamentaltheorem lautet nun:

Die unendliche Determinante ist convergent, wenn das Product der Diagonalglieder und die Summe der nicht der Diagonale angehörigen Glieder unbedingt convergent sind.

---

*) Wir wählen hier vorübergehend für die Bezeichnung einer aus den Elementen $a_{i\varkappa}$ gebildeten Determinante das Zeichen

$$[a_{i\varkappa}],$$

um eine Verwechslung mit dem für den absoluten Betrag von $a_{i\varkappa}$ gebräuchlichen Zeichen

$$|a_{i\varkappa}|$$

zu vermeiden. Sobald eine solche Verwechslung nicht mehr zu befürchten sein wird, wollen wir wieder die gewohnte Bezeichnungsweise für die Determinanten aufnehmen.

Setzen wir nämlich

$$a_{i\varkappa} = \alpha_{i\varkappa}, \quad i \neq \varkappa,$$
$$a_{\varkappa\varkappa} = 1 + \alpha_{\varkappa\varkappa},$$

so folgt aus der unbedingten Convergenz der Reihe

$$\sum_{i \neq \varkappa}\sum a_{i\varkappa} = \sum_{i \neq \varkappa}\sum \alpha_{i\varkappa}$$

und des Productes

$$\prod_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}(1 + \alpha_{\varkappa\varkappa}),$$

dass die Reihe

$$\sum_i\sum_\varkappa |\alpha_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

ebensowohl wie das Product

$$P = \prod_i \Big(1 + \sum_\varkappa |\alpha_{i\varkappa}|\Big) \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

convergent sind. Setzt man nun

$$P_m = \prod_{i=-m}^{+m}\left(1 + \sum_{\varkappa=-m}^{+m} |\alpha_{i\varkappa}|\right),$$

so ergiebt sich aus dem formalen Bildungsgesetze der Determinanten

$$|D_{m+\lambda} - D_m| \leqq P_{m+\lambda} - P_m,$$

und da zufolge der Convergenz von P bei unendlich wachsendem m

$$\lim_m (P_{m+\lambda} - P_m) = 0$$

ist für jedes positive ganzzahlige λ, so ist auch

$$\lim_m |D_{m+\lambda} - D_m| = 0,$$

woraus der zu beweisende Satz folgt. — Von einer unendlichen Determinante D, die die in dem Satze vorausgesetzte Beschaffenheit zeigt, sagen wir mit Herrn von Koch, sie habe die Normalform. Für eine solche Determinante D lässt sich die Definition derselben:

(I) $$D = \lim_m D_m$$

noch etwas verallgemeinern. Setzen wir nämlich

$$D_{mn} = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -n, \cdots +m), \quad n \gtreqless m,$$

$$P_{mn} = \prod_{i=-n}^{+m}\left(1 + \sum_{\varkappa=-n}^{+m} |\alpha_{i\varkappa}|\right),$$

$$D_{\lambda\lambda} = D_\lambda, \qquad P_{\lambda\lambda} = P_\lambda,$$

so ist offenbar jedes Glied von D_{mn} in der Determinante D_λ, und jedes Glied von P_{mn} in der Entwickelung von P_λ enthalten, wenn λ die grössere der beiden Zahlen m, n bedeutet. Folglich ist

$$|D_{\lambda\lambda} - D_{mn}| < P_\lambda - P_{mn},$$

und da offenbar

$$\lim_{m,n} P_{mn} = \lim_\lambda P_\lambda = P$$

ist, so haben wir auch

$$\lim_{m,n} D_{mn} = \lim_\lambda D_\lambda = D.$$

Insbesondere ist also

$$\lim_\lambda D_\lambda = \lim_\lambda D_{m+\lambda,\, m-\lambda} = D.$$

Da nun

$$\lim_\lambda D_\lambda = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

$$\lim_\lambda D_{m+\lambda,\, m-\lambda} = [a_{i+\lambda,\, \varkappa+\lambda}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

ist, so erkennen wir, dass in einer unendlichen Determinante, die die Normalform hat, jedes beliebige Diagonalglied als Anfangsglied genommen werden kann, ohne dass sich dadurch der Werth der Determinante verändert.

78. Sätze über unendliche Determinanten. Subdeterminanten. Multiplicationstheorem. Verallgemeinerung.

Ersetzt man in D die Elemente einer beliebigen Zeile λ durch Grössen

$$\mu_\varkappa \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

deren absoluter Betrag eine gewisse positive Grösse μ nicht überschreitet und bezeichnet die so entstehende unendliche Determinante durch D', so folgt aus dem beim Convergenzbeweise für D angewandten Verfahren, dass auch D' convergent bleibt, und zwar ist

$$|D'| < \mu P',$$

wenn P' ein Product bedeutet, welches aus P dadurch hervorgeht, dass der auf den Index $i = \lambda$ bezügliche Factor weggelassen wird.

Aus der Definition von D und den bekannten Eigenschaften endlicher Determinanten folgt, dass D sein Vorzeichen ändert, wenn man zwei beliebige Zeilen oder zwei beliebige Reihen mit einander vertauscht; wenn also in einer unendlichen Determinante, die die Normalform hat, die Elemente zweier Zeilen oder zweier Reihen übereinstimmen, so ist der Werth dieser Determinante gleich Null.

Setzen wir

$$\Delta_{2r+1} = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -r, \cdots +r),$$

$$\Delta_{2r} = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -(r-1), \cdots +r),$$

$$\Pi_{2r+1} = \prod_{i=-r}^{+r}\left(1 + \sum_{\varkappa=-r}^{+r} |\alpha_{i\varkappa}|\right),$$

$$\Pi_{2r} = \prod_{i=-r+1}^{r}\left(1 + \sum_{\varkappa=-r+1}^{r} |\alpha_{i\varkappa}|\right),$$

$$\nabla_{2r+1} = \Delta_{2r+1} - \Delta_{2r},$$

$$\nabla_{2r} = \Delta_{2r} - \Delta_{2r-1},$$

so folgt aus der Identität

$$\Delta_{2r+1} = \nabla_1 + \nabla_2 + \cdots + \nabla_{2r+1},$$

indem man r ins Unendliche wachsen lässt,

$$\text{(II)} \qquad D = \nabla_1 + \nabla_2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \nabla_m,$$

und diese Reihe ist unbedingt convergent (d. h. die Reihe der absoluten Beträge convergirt ebenfalls), da die Glieder ∇_m derselben dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die entsprechenden Glieder der aus lauter positiven Elementen bestehenden Reihe

$$P = \Pi_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (\Pi_m - \Pi_{m-1}).$$

Denkt man sich nun die Determinante ∇_m in gewohnter Weise entwickelt, d. h. als Aggregat von $m!$ Gliedern geschrieben:

$$\nabla_m = \sum_{\varkappa=1}^{m!} \nabla_{m\varkappa},$$

so ist

$$D = \sum_m \sum_\varkappa \nabla_{m\varkappa},$$

und auch diese Doppelreihe ist unbedingt convergent. Durch geeignete Anordnung ihrer Glieder folgt demnach für D die Darstellung

$$\text{(III)} \qquad D = \sum \pm \prod_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda\lambda},$$

wo die Summation über alle Producte zu erstrecken ist, die aus

$$\prod_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda\lambda}$$

hervorgehen, indem man die ersten oder die zweiten Indices auf jede mögliche Weise permutirt und dem Producte das positive oder negative Zeichen beilegt, jenachdem die betreffende Permutation aus der gewöhnlichen Zahlenfolge

$$\cdots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \cdots$$

durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Inversionen hervorgegangen ist. — Aus dieser Darstellung (III) folgt, dass die unendliche Determinante D eine „lineare Function" der Elemente einer Zeile oder Reihe ist; der Coefficient des Elementes $a_{i\varkappa}$ ergiebt sich, wie in der Theorie der endlichen Determinanten, indem man aus D die Zeile i und die Reihe $\varkappa$ weglässt und das Resultat mit $(-1)^{i-\varkappa}$ multiplicirt, in Form einer unendlichen Determinante:

$$\binom{i}{\varkappa} = A_{i\varkappa},$$

so dass also z. B.

$$D = \sum_{\varkappa} a_{i\varkappa} A_{i\varkappa}$$

ist. Wir nennen entsprechend der gewöhnlichen Determinantentheorie $A_{i\varkappa}$ die zu $a_{i\varkappa}$ gehörige Subdeterminante von D und bezeichnen die $A_{i\varkappa}$ überhaupt als die ersten Subdeterminanten von D. Aus dem Satze über die Vertauschung zweier Reihen oder Zeilen folgt dann genau so wie in der gewöhnlichen Theorie, dass die ersten Subdeterminanten die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa} A_{\lambda\varkappa} a_{i\varkappa} = 0, \qquad \lambda \neq i,$$

befriedigen. Die analogen Gleichungen

$$D = \sum_{i} a_{i\varkappa} A_{i\varkappa},$$

$$0 = \sum_{i} a_{i\lambda} A_{i\varkappa}, \qquad \lambda \neq \varkappa,$$

gelten in Bezug auf die Reihen von D. Offenbar ist auch formal

$$A_{i\varkappa} = \binom{i}{\varkappa} = \frac{\partial D}{\partial a_{i\varkappa}}.$$

Ebenso kann man nun die zweiten, dritten u. s. w. Subdeterminanten von D einführen; ersetzt man z. B. in D die Elemente

$$a_{i_1\varkappa_1},\quad a_{i_2\varkappa_2},\quad \cdots\quad a_{i_r\varkappa_r}$$

durch Eins, die übrigen in den Zeilen $i_1, i_2, \cdots i_r$ und in den Reihen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_r$ stehenden Elemente durch Null, so erhält man die r^{te} Subdeterminante

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_r \end{pmatrix};$$

sie entsteht auch aus D, indem man die Zeilen $i_1, i_2, \cdots i_r$ und die Reihen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_r$ weglässt und das Resultat mit

$$(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{r}(i_\lambda - \varkappa_\lambda)}$$

multiplicirt. Analog dem Laplace'schen Determinantensatze ergiebt sich dadurch ein entsprechender Satz für unendliche Determinanten von der Normalform. Aus der Darstellung (III) ergiebt sich auch sofort, dass der Werth von D nicht geändert wird, wenn man Zeilen und Reihen beliebig mit einander vertauscht, vorausgesetzt, dass dabei jedes in der Hauptdiagonale befindliche Glied wieder in die Hauptdiagonale zu stehen kommt, und jedes nicht der Diagonale angehörige Glied wieder ausserhalb der Diagonale verbleibt. Man kann aus diesem Grunde sagen, eine in der Normalform geschriebene unendliche Determinante sei unbedingt convergent. Diese Eigenschaft geht auch aus der folgenden Darstellung einer unendlichen Determinante sehr anschaulich hervor. Man hat nämlich

$$\text{(IV)} \quad D = 1 + \sum_{\varkappa_1 < \varkappa_2} \begin{vmatrix} \alpha_{\varkappa_1\varkappa_1} & \alpha_{\varkappa_1\varkappa_2} \\ \alpha_{\varkappa_2\varkappa_1} & \alpha_{\varkappa_2\varkappa_2} \end{vmatrix} + \sum_{\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3} \begin{vmatrix} \alpha_{\varkappa_1\varkappa_1} & \alpha_{\varkappa_1\varkappa_2} & \alpha_{\varkappa_1\varkappa_3} \\ \alpha_{\varkappa_2\varkappa_1} & \alpha_{\varkappa_2\varkappa_2} & \alpha_{\varkappa_2\varkappa_3} \\ \alpha_{\varkappa_3\varkappa_1} & \alpha_{\varkappa_3\varkappa_2} & \alpha_{\varkappa_3\varkappa_3} \end{vmatrix} + \cdots,$$

wenn man $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \cdots$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen lässt, die den Ungleichungen

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots$$

genügen. Diese Formel ergiebt sich unmittelbar, wenn man die analoge für endliche Determinanten gültige auf D_λ anwendet und dann λ ins Unendliche wachsen lässt.

Nunmehr lassen sich auch die Sätze über die Addition und Multiplication der gewöhnlichen Determinanten auf die unendlichen Determinanten von der Normalform übertragen. Das Multiplicationstheorem lautet z. B. wie folgt:

Seien

$$D = [a_{i\varkappa}], \qquad E = [b_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

zwei unendliche Determinanten von der Normalform, und werde

$$c_{i\varkappa} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_{ih} b_{h\varkappa}$$

gesetzt, so ist die Determinante

$$[c_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

auch von der Normalform, und man hat

$$[c_{i\varkappa}] = [a_{i\varkappa}]\,[b_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty).$$

Ebenso ergiebt sich die Beziehung

$$\underset{\left(\substack{i = i_1, i_2, \cdots i_r \\ \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_r}\right)}{[A_{i\varkappa}]} = D^{r-1} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_r \end{pmatrix}.$$

Diese nur für den Fall, wo D die Normalform hat, skizzirten Sätze lassen sich aber leicht auf eine etwas allgemeinere Gattung unendlicher Determinanten übertragen. Sei nämlich

$$D = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

eine Determinante von folgender Beschaffenheit. Das Product

$$\prod_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda\lambda}$$

der Diagonalglieder sei unbedingt convergent, ferner sei es möglich, eine unendliche Folge von Grössen

$$x_\varkappa \qquad (\varkappa = -\infty \cdots +\infty)$$

so anzugeben, dass die Reihe

$$\sum_{i \neq \varkappa}\sum a_{i\varkappa} \frac{x_i}{x_\varkappa}$$

unbedingt convergire. Dann convergirt die Determinante D, und es gelten für sie dieselben Sätze, wie für die Normalform. In der That, setzen wir

$$\bar{a}_{i\varkappa} = a_{i\varkappa} \frac{x_i}{x_\varkappa},$$

so hat die unendliche Determinante

$$\bar{D} = [\bar{a}_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

die Normalform. Haben also $\bar{\nabla}_m$, $\bar{\nabla}_{m\varkappa}$ für die $\bar{a}_{i\varkappa}$ dieselbe Bedeutung wie die oben eingeführten ∇_m, $\nabla_{m\varkappa}$ für die $a_{i\varkappa}$, so ist nach Gleichung (II)

$$\bar{D} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\nabla}_m = \sum_m \sum_\varkappa \bar{\nabla}_{m\varkappa}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\nabla_m = \overline{\nabla}_m, \qquad \nabla_{m\varkappa} = \overline{\nabla}_{m\varkappa},$$

wir haben folglich

$$D = \overline{D},$$

und

$$D = \sum_{m=1}^{\infty} \nabla_m = \sum_m \sum_\varkappa \nabla_{m\varkappa},$$

woraus sich die Mehrzahl der für die Normalform hergeleiteten Sätze unmittelbar ergiebt. Das Theorem von der Ersetzbarkeit der Elemente einer Zeile λ durch Grössen $\mu_\varkappa$, deren absoluter Betrag unterhalb einer gewissen Grenze μ bleibt, bedarf jedoch für den jetzt betrachteten Fall einer Modification; wir können es wie folgt aussprechen:

Wenn die Determinante D den jetzt vorausgesetzten Bedingungen genügt, und man ersetzt die Elemente der Zeile λ durch Grössen $\mu_\varkappa$, für welche

$$\left|\mu_\varkappa \frac{x_\lambda}{x_\varkappa}\right| < \mu \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

so ist die so entstehende Determinante D' convergent, und es ist offenbar

$$D' = \sum_\varkappa \mu_\varkappa \frac{\partial D}{\partial a_{\lambda\varkappa}}.$$

Wenn z. B. für einen gewissen Werthbereich von x die Reihe

$$\sum_{i \mp \varkappa} \sum a_{i\varkappa} x^{i-\varkappa}$$

unbedingt convergirt, so kann man $x_\varkappa = x^\varkappa$ nehmen und erhält dann, wenn man in D die Elemente der Zeile λ durch

$$\mu_\varkappa = x^\varkappa$$

ersetzt, eine Determinante D', die als Potenzreihe von x dargestellt werden kann und deren Coefficienten die zu den Elementen der Zeile λ gehörigen ersten Subdeterminanten von D sind.

79. Gleichmässige Convergenz einer unendlichen Determinante. Differentiation.

Es seien nun die Elemente $a_{i\varkappa}$ Functionen einer complexen Variabeln ϱ, die innerhalb eines gewissen Bereiches T der ϱ-Ebene eindeutig sind und sich in der Umgebung jeder Stelle dieses Bereiches regulär verhalten; dann kann man den für Grenzprocesse, die mit Functionen einer Veränderlichen vorgenommen werden, bestehenden Begriff der gleichmässigen Convergenz auf die aus den Elementen $a_{i\varkappa}(\varrho)$ (wo wir jetzt das Argument ϱ in die Bezeichnungen einfügen) gebildete unendliche Determinante

$$D(\varrho) = [a_{i\varkappa}(\varrho)] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

anwenden. Diese Determinante wird also innerhalb T gleichmässig convergiren, wenn es nach Vorschrift einer beliebig kleinen positiven Grösse δ möglich ist, eine ganze Zahl ν so anzugeben, dass

$$| D_{m+\lambda}(\varrho) - D_m(\varrho) | < \delta$$

ist für jedes ganzzahlige positive λ, sobald ϱ einen Werth des Bereiches T, und m eine ganze Zahl, die grösser ist als ν, bedeutet. — Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt aus den Elementen der Theorie der Grenzwerthe, dass alsdann $D(\varrho)$ eine innerhalb T eindeutige und an jeder Stelle von T reguläre Function von ϱ darstellt.

Sei nun die Determinante $D(\varrho)$ so beschaffen, dass die Reihe

$$\text{(V)} \qquad \sum_i \sum_\varkappa | a_{i\varkappa}(\varrho) |$$

innerhalb T gleichmässig convergirt; dann ist zunächst klar, dass $D(\varrho)$ die Normalform hat, aber $D(\varrho)$ convergirt auch gleichmässig innerhalb T. In der That ergiebt sich dies sofort, wenn man auf die Darstellung (II) zurückgreift und beachtet, dass unter der jetzt gemachten Voraussetzung die Reihe für P (S. 278) innerhalb T gleichmässig convergirt; daraus folgt dann unmittelbar die gleichmässige Convergenz der Reihe (II) und somit auch die von $D(\varrho)$. Ebenso sind die Entwickelungen

$$D(\varrho) = \sum_\varkappa a_{i\varkappa}(\varrho) A_{i\varkappa}(\varrho),$$

$$D(\varrho) = \sum \pm \prod_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda\lambda}(\varrho)$$

und (IV) in diesem Falle innerhalb T gleichmässig convergent.

Aehnliche Schlüsse gelten, wenn die Determinante $D(\varrho)$ so beschaffen ist, dass sich Grössen

$$x_\varkappa \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

finden lassen, die die Reihe

$$\sum_i \sum_\varkappa \left| a_{i\varkappa}(\varrho) \frac{x_i}{x_\varkappa} \right|$$

zu einer gleichmässig convergenten machen; ersetzt man dann in $D(\varrho)$ die Elemente der Zeile λ durch Grössen $\mu_\varkappa$, für welche

$$\left| \mu_\varkappa \frac{x_\lambda}{x_\varkappa} \right| < \mu \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

so ist auch die Reihe

$$\sum_\varkappa \mu_\varkappa A_{\lambda\varkappa}(\varrho),$$

die alsdann den Werth der so transformirten Determinante darstellt, innerhalb T gleichmässig convergent.

Aus den bekannten Sätzen für die Differentiation einer endlichen Determinante ergiebt sich schliesslich, dass in dem Falle, wo die Reihe (V) innerhalb T gleichmässig convergirt, die Ableitung von $D(\varrho)$ nach ϱ durch die Formel

$$\frac{dD(\varrho)}{d\varrho} = \sum_i \sum_\varkappa A_{i\varkappa}(\varrho) \frac{da_{i\varkappa}(\varrho)}{d\varrho}$$

dargestellt werden kann.

80. Die Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Sei nun ein Gleichungssystem vorgelegt von der Form

$$\text{(VI)} \qquad G_i = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{i\varkappa} g_\varkappa = 0 \qquad (i = -\infty, \cdots +\infty),$$

für welches die unendliche Determinante

$$D = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

die Normalform besitzt. Suchen wir diejenigen Werthsysteme der $g_\varkappa$, die das Gleichungssystem (VI) befriedigen, und die der Ungleichung

$$\text{(VII)} \qquad |g_\varkappa| < g \qquad (\varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

genügen, wo g eine angebbare endliche Grösse bedeutet.

Für Werthe $g_\varkappa$, die der Ungleichung (VII) genügen, ist

$$\sum_\varkappa |a_{i\varkappa}| \, |g_\varkappa| \qquad (i = -\infty, \cdots +\infty)$$

kleiner als eine positive angebbare Grösse; folglich ist die Reihe

$$S = \sum_i \sum_\lambda \binom{i}{\varkappa} a_{i\lambda} g_\lambda$$

unbedingt convergent, und daher

$$S = \sum_i \binom{i}{\varkappa} G_i = \sum_\lambda g_\lambda \sum_i \binom{i}{\varkappa} a_{i\lambda},$$

woraus

$$g_\varkappa D = \sum_i \binom{i}{\varkappa} G_i = 0$$

folgt. — Wenn also D von Null verschieden ist, so müssen alle $g_\varkappa$ verschwinden, d. h. damit die Gleichungen (VI) ein nicht verschwindendes Lösungssystem zulassen, welches den Ungleichungen (VII) genügt, muss

$$D = 0$$

sein.

Sei nun $D = 0$ vorausgesetzt, und bilden wir die Subdeterminanten

$$\binom{-m \cdots + m}{-m \cdots + m} = (m),$$

so können diese nicht für jeden noch so grossen Werth von m verschwinden. In der That bezeichne $[m]$ das, was von dem Producte

$$P = \prod_i \left(1 + \sum_\varkappa |\alpha_{i\varkappa}|\right) \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots + \infty)$$

übrig bleibt, wenn wir die auf $i = -m, \cdots + m$ bezüglichen Factoren weglassen, so ist

$$\lim_m [m] = 1.$$

Nun ist aber offenbar

$$|(m) - 1| \leq [m] - 1,$$

und folglich für hinreichend grosses m die Subdeterminante (m) sicher von Null verschieden. Es giebt folglich, wenn $D = 0$ ist, jedenfalls eine endliche ganze Zahl r von der Beschaffenheit, dass nicht alle r^{ten} Subdeterminanten von D verschwinden. Sei z. B.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_r \end{pmatrix} \neq 0,$$

während, wenn $r > 1$ ist, alle ersten, zweiten, $\cdots (r-1)^{\text{ten}}$ Subdeterminanten verschwinden; dann ist leicht einzusehen, dass die Gleichungen

$$G_{i_1} = 0, \quad G_{i_2} = 0, \quad \cdots \quad G_{i_r} = 0$$

eine Folge der übrigen sind, und dass zwischen den Unbekannten $g_\varkappa$ die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_r \end{pmatrix} g_\varkappa = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \varkappa & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_r \end{pmatrix} g_{\varkappa_1} + \cdots + \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-1} & i_r \\ \varkappa_1 & \cdots & \varkappa_{r-1} & \varkappa \end{pmatrix} g_{\varkappa_r}$$

stattfinden müssen, während den $g_{\varkappa_1}, g_{\varkappa_2}, \cdots g_{\varkappa_r}$ willkürliche Werthe beigelegt werden können.

Zweites Kapitel.

81. Transformation der gegebenen Differentialgleichung.

Ehe wir nun dazu übergehen, die im vorhergehenden Kapitel durchgeführten Betrachtungen auf das Studium des Gleichungssystems (9) anzuwenden, wollen wir die gegebene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

einer Transformation unterwerfen, die eine formale Vereinfachung bewirkt, deren tiefere Bedeutung aber allerdings erst an späterer Stelle hervortreten wird. Diese Transformation ist derjenigen analog, mit Hülfe deren man in der Algebra den Coefficienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Unbekannten in einer Gleichung n^{ten} Grades zum Verschwinden bringt; sie bezweckt auch hier den Coefficienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung zum Wegfall zu bringen. Setzen wir

$$y = uz,$$

wo u, z noch zu bestimmende Functionen von x bedeuten, in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich, da

$$y^{(\lambda)} = z^{(\lambda)} u + \lambda_1 z^{(\lambda-1)} u' + \cdots + z u^{(\lambda)}$$

ist, für z die Differentialgleichung

$$z^{(n)} + z^{(n-1)}\left(p_1 + n\frac{u'}{u}\right) + z^{(n-2)}\left(p_2 + (n-1)p_1\frac{u'}{u} + n_2\frac{u''}{u}\right) + \cdots$$
$$+ z\left(p_n + p_{n-1}\frac{u'}{u} + \cdots + \frac{u^{(n)}}{u}\right) = 0.$$

Soll hierin

$$p_1 + n\frac{u'}{u} = 0$$

sein, so haben wir

$$u = e^{-\frac{1}{n}\int p_1\,dx}$$

zu wählen. Alsdann sind aber die

$$\frac{u'}{u},\quad \frac{u''}{u},\quad \ldots\quad \frac{u^{(n)}}{u}$$

ganze Functionen von p_1 und dessen successiven Ableitungen, so dass die Differentialgleichung in z

$$z^{(n)} + z^{(n-2)}\left(p_2 + \frac{n-1}{2n} p_1^2 - \frac{n-1}{2} p_1'\right) + \cdots = 0$$

in Bezug auf ihre Coefficienten dieselbe Beschaffenheit zeigt, wie die ursprüngliche Differentialgleichung. Sind z. B. die Coefficienten der letzteren innerhalb E nach Laurent'schen Reihen entwickelbar, so gilt das Gleiche von den Coefficienten der Differentialgleichung in z. Wir können also, unbeschadet der Allgemeinheit, von vorneherein voraussetzen, dass in der gegebenen Differentialgleichung der Coefficient p_1 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von y verschwindet.

Bedeutet dann $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung, so ist

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = Ce^{-\int p_1 dx} = C,$$

C eine Constante. Lassen wir die unabhängige Variable x einen geschlossenen Umlauf U vollziehen, der die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ zu ihren Ausgangswerthen zurückführt, so erfahren die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine lineare Substitution

$$\Theta y_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{\varkappa i} y_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

und es ist:

$$\Theta D(y_1, y_2, \cdots y_n) = D(\Theta y_1, \Theta y_2, \cdots \Theta y_n) = \underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}{\left|\gamma_{i\varkappa}\right|} D(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

folglich muss, da $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ eine Constante, also beim Umlaufe U jedenfalls unveränderlich ist,

$$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}{\left|\gamma_{i\varkappa}\right|} = 1$$

sein. D. h. wenn in einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung zum Verschwinden gebracht ist, so ist die Determinante jeder Substitution, die ein Fundamentalsystem erleidet, wenn die unabhängige Variable x einen geschlossenen Umlauf vollzieht, der die Coefficienten der Differentialgleichung ungeändert lässt, gleich Eins.

Man nennt eine solche Substitution oft eine unimodulare.

82. Transformation der Recursionsformel. Convergenz und Eigenschaften der aus den Coefficienten derselben gebildeten unendlichen Determinante.

Unter der Voraussetzung $p_1 = 0$ ist also in (A) auch

$$P_{n-1} = 0,$$

und folglich in den Formeln (1), (3), (5) (Nr. 76, S. 273) allenthalben

(10) $$a_{n-1, \lambda} = 0 \qquad (\lambda = -\infty, \cdots +\infty)$$

zu setzen. Um gleich den allgemeinsten Fall mit umfassen zu können, denken wir uns $f_0(\varrho)$ in seine linearen Factoren zerlegt,

$$f_0(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n),$$

und multipliciren in den Gleichungen (9) die dem Index ν entsprechende Gleichung mit dem Factor

(11) $$\begin{cases} h_\nu(\varrho) = \dfrac{1}{\nu^n} \prod\limits_{\varkappa=1}^{n} e^{-\frac{\varrho - \varrho_\varkappa}{\nu}}, & \nu \gtrless 0, \\ h_0(\varrho) = 1. \end{cases}$$

Setzen wir dann

(12) $$h_\nu(\varrho) a_{\nu\lambda}(\varrho) = \chi_{\nu\lambda}(\varrho),$$

so erhalten diese Gleichungen die Form

(13) $$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \chi_{\nu\lambda}(\varrho) g_\lambda(\varrho) = 0.$$

Die unendliche Determinante dieses Gleichungssystems

$$D(\varrho) = [\chi_{i\varkappa}(\varrho)] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

hat nun die Normalform, wenn ϱ auf einen beliebigen endlichen Bereich beschränkt wird. In der That lässt sich zunächst eine positive endliche Grösse h so angeben, dass

$$|\nu^n h_\nu(\varrho)| < h, \qquad \nu \gtrless 0,$$

für jedes endliche ϱ; dann ist aber nach (12)

(14) $$|\chi_{\nu\lambda}(\varrho)| < h \left| \frac{a_{\nu\lambda}(\varrho)}{\nu^n} \right|, \qquad \nu \gtrless 0.$$

Setzen wir

$$(\varrho + \nu - \lambda)(\varrho + \nu - \lambda - 1) \cdots (\varrho + \nu - \lambda - n + \varkappa + 1)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-\varkappa} (\varrho + \nu)^{n-\varkappa-i} l_i^{(\varkappa)}(\lambda),$$

wo

$$l_0^{(\varkappa)}(\lambda) = 1,$$

und $l_i^{(\varkappa)}(\lambda)$ eine ganze Function i^{ten} Grades von λ bedeutet, so ist nach (5) und (10)

$$f_\lambda(\varrho + \nu - \lambda) = \sum_{i=2}^{n} (\varrho + \nu)^{n-i} H_i(\lambda),$$

wenn die Gleichungen

$$H_2(\lambda) = \alpha_{n-2,\lambda}, \quad H_3(\lambda) = \alpha_{n-2,\lambda} l_1^{(2)}(\lambda) + \alpha_{n-3,\lambda}, \quad \cdots$$

$$H_n(\lambda) = \alpha_{n-2,\lambda} l_{n-2}^{(2)}(\lambda) + \cdots + \alpha_{0,\lambda}$$

bestehen; folglich haben wir nach (6)

$$|\alpha_{\nu,\nu-\lambda}(\varrho)| \leq \sum_{i=2}^{n} |\varrho + \nu|^{n-i} |H_i(\lambda)|.$$

Es werde nun die Voraussetzung gemacht (die sich nachher als unwesentlich herausstellen wird), dass sich der Punkt $x = 1$ innerhalb des Kreisringes E befindet, also wenn z. B. $R < R'$ ist, so sei

$$R < 1 < R';$$

dann convergiren die Reihen (1) für $x = 1$, und zwar unbedingt, es sind daher in diesem Falle auch die Reihen

$$S_i = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} |H_i(\lambda)| \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

convergent. Folglich ist, wenn wir $\nu - \lambda = \mu$ setzen, die Reihe

$$\sum\sum_{\nu \neq \mu} \left|\frac{\alpha_{\nu\mu}(\varrho)}{\nu^n}\right| < \sum_{i=2}^{n} S_i \sum_{\nu} \frac{|\varrho + \nu|^{n-i}}{\nu^n}, \qquad \nu \neq 0,$$

für alle endlichen Werthe von ϱ gleichmässig convergent, und da das Gleiche offenbar auch für die Reihe

$$\sum_{\mu} |\alpha_{0\mu}(\varrho)|$$

gilt, so convergirt zufolge der Ungleichung (14) die Reihe

$$\sum\sum_{\nu \neq \mu} \chi_{\nu\mu}(\varrho) \tag{15}$$

für alle endlichen Werthe von ϱ unbedingt und gleichmässig.

Ferner ist die Reihe

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} |\chi_{\mu\mu}(\varrho) - 1|$$

für alle endlichen Werthe von ϱ gleichmässig convergent, wie aus der Form von $\chi_{\mu\mu}(\varrho)$

$$\chi_{\mu\mu}(\varrho) = h_{\mu}(\varrho) f_0(\varrho + \mu) = \prod_{\varkappa=1}^{n} \left(1 + \frac{\varrho - \varrho_\varkappa}{\mu}\right) e^{-\frac{\varrho - \varrho_\varkappa}{\mu}}$$

unmittelbar hervorgeht; die unendliche Determinante $D(\varrho)$ besitzt also die Normalform und convergirt für alle endlichen Werthe von ϱ gleichmässig; sie stellt folglich eine ganze transcendente Function von ϱ dar.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich aus der Convergenz der Reihen S_i, dass die unendliche Determinante

$$\Omega(\varrho) = \left[\frac{a_{i\varkappa}(\varrho)}{f_0(\varrho + i)}\right] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

innerhalb eines jeden Bereiches von ϱ, der keine Wurzel der Gleichungen

$$f_0(\varrho + i) = 0 \qquad (i = -\infty, \cdots +\infty)$$

enthält, unbedingt und gleichmässig convergent ist. Multipliciren wir jede Zeile i dieser Determinante mit

$$\chi_{ii}(\varrho),$$

wodurch $\Omega(\varrho)$ mit dem Factor

$$(16) \qquad \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \chi_{ii}(\varrho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \pi (\varrho - \varrho_\nu)}{\pi} = \Pi(\varrho)$$

multiplicirt wird, so geht $\Omega(\varrho)$ in $D(\varrho)$ über, und es ist folglich

$$(17) \qquad D(\varrho) = \Pi(\varrho)\,\Omega(\varrho).$$

Aus der Gleichung (6) folgt

$$(18) \qquad a_{\nu\lambda}(\varrho + 1) = a_{\nu+1, \lambda+1}(\varrho);$$

wir können aber, wenn

$$(19) \qquad \frac{a_{\nu\lambda}(\varrho)}{f_0(\varrho + \nu)} = b_{\nu\lambda}(\varrho)$$

gesetzt wird,

$$\Omega(\varrho) = [b_{i\varkappa}(\varrho)] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

auch in der Form

$$\Omega(\varrho) = [b_{i+1, \varkappa+1}(\varrho)] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

schreiben, da auf diese Weise nur das Element $b_{11}(\varrho)$ der Hauptdiagonale als Anfangselement genommen wird. Da nun

$$\Omega(\varrho + 1) = [b_{i\varkappa}(\varrho + 1)] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

ist, so folgt aus (19)

$$\Omega(\varrho + 1) = \Omega(\varrho), \tag{20}$$

und folglich haben wir nach (16) und (17)

$$D(\varrho + 1) = (-1)^n D(\varrho). \tag{21}$$

Es sind also $\Omega(\varrho)$, $D(\varrho)$ periodische Functionen von ϱ, die erstere mit der Periode Eins, die letztere mit der Periode Zwei oder Eins, jenachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Beschränken wir ϱ auf eine hinreichend kleine Umgebung einer Wurzel $\varrho_\varkappa$ von $f_0(\varrho) = 0$ und seien

$$\varrho_\varkappa + i_1, \quad \varrho_\varkappa + i_2, \quad \cdots \quad \varrho_\varkappa + i_\tau$$

diejenigen von $\varrho_\varkappa$ und von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung, die sich von $\varrho_\varkappa$ um ganze Zahlen unterscheiden, so ist

$$f_0(\varrho + i) \neq 0,$$

wenn i eine von $0, i_1, i_2, \cdots i_\tau$ verschiedene ganze Zahl bedeutet; es wird folglich für diese Werthe von ϱ das Product

$$f_0(\varrho) f_0(\varrho + i_1) \cdots f_0(\varrho + i_\tau) \Omega(\varrho)$$

endlich und nach positiven ganzen Potenzen von $\varrho - \varrho_\varkappa$ entwickelbar sein. Sei $s_\varkappa$ die Summe derjenigen Zahlen, die die Vielfachheit der Wurzeln $\varrho_\varkappa, \varrho_\varkappa + i_1, \cdots \varrho_\varkappa + i_\tau$ der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ angeben, so ist $\varrho = \varrho_\varkappa$ eine Unendlichkeitsstelle höchstens $s_\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung von $\Omega(\varrho)$; wir haben also in einer gewissen Umgebung von $\varrho = \varrho_\varkappa$

$$\Omega(\varrho) = \mathfrak{P}(\varrho \mid \varrho_\varkappa) + \frac{M_\varkappa}{\varrho - \varrho_\varkappa} + \sum_{i=1}^{s_\varkappa - 1} M_{\varkappa i} \frac{d^i}{d\varrho^i} \left(\frac{1}{\varrho - \varrho_\varkappa} \right),$$

wo $\mathfrak{P}(\varrho \mid \varrho_\varkappa)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $\varrho - \varrho_\varkappa$, die $M_\varkappa$, $M_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten. Analoge Entwickelungen gelten wegen der Periodicität von $\Omega(\varrho)$ in der Umgebung eines Punktes

$$\varrho = \varrho_\varkappa + i \qquad (i = -\infty, \cdots + \infty).$$

Die Function $\Omega(\varrho)$ besitzt also für alle endlichen Werthe von ϱ den Charakter einer rationalen Function; ihre Unendlichkeitsstellen werden im Allgemeinen durch die Wurzeln der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ und die von denselben um ganze Zahlen verschiedenen Werthe gegeben. Seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_m$ die sämmtlichen, nicht um ganze Zahlen oder Null von einander verschiedenen Wurzeln von $f_0(\varrho) = 0$, so dass also

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = n,$$

dann lässt sich nach einem bekannten Satze der Analysis [den man für den Fall einer Function, welche die Periode 2π besitzt, z. B. in Herrn Hermite's „Cours professé à la Faculté des Sciences" (3. Auflage, Paris 1887, S. 106) auseinandergesetzt findet], die periodische Function $\Omega(\varrho)$ in die Form setzen

$$\Omega(\varrho) = M + \sum_{\varkappa=1}^{m} \Big\{ M_\varkappa \pi \operatorname{cotg} \pi(\varrho - \varrho_\varkappa)$$

$$+ \sum_{i=1}^{s_\varkappa - 1} M_{\varkappa i} \frac{d^i}{d\varrho^i} (\pi \operatorname{cotg} \pi(\varrho - \varrho_\varkappa)) \Big\},$$

wo M eine Constante bedeutet. Denkt man sich einen Bereich, innerhalb dessen keiner der Werthe

$$\varrho_\varkappa + \lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m;\ \lambda = -\infty, \cdots +\infty)$$

liegt, so ist $\Omega(\varrho)$ in der Umgebung jeder Stelle ϱ dieses Bereiches regulär; als solcher Bereich kann z. B. ein unendlicher, durch zwei zur lateralen Axe der ϱ-Ebene parallele Geraden begrenzter Streifen, der keinen der Punkte $\varrho_\varkappa + \lambda$ enthält, genommen werden. Setzt man dann

$$\varrho = u + vi, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

und lässt ϱ eine Werthenfolge durchlaufen, die ganz innerhalb jenes Streifens verbleibt und in welcher v in positiver oder negativer Richtung ins Unendliche rückt, so ist

$$\lim_{v=\pm\infty} b_{\lambda\varkappa}(\varrho) = 0, \qquad \lambda \neq \varkappa,$$

und da

$$b_{\lambda\lambda}(\varrho) = 1 \qquad (\lambda = -\infty, \cdots +\infty)$$

ist, so erhält man

(22) $$\lim_{v=\pm\infty} \Omega(\varrho) = 1.$$

Rückt v in positiver Richtung ins Unendliche, so folgt hiernach aus der obigen Darstellung von $\Omega(\varrho)$

$$1 = M - \pi i \sum_{\varkappa=1}^{m} M_\varkappa,$$

rückt es dagegen in negativer Richtung ins Unendliche, so folgt

$$1 = M + \pi i \sum_{\varkappa=1}^{m} M_\varkappa;$$

hieraus ergiebt sich

(23) $$M = 1, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{m} M_\varkappa = 0.$$

Innerhalb eines Periodenstreifens ω, den wir uns etwa durch die beiden Geraden

$$u = 0, \qquad u = 1$$

begrenzt denken können, wird die Function $\Omega(\varrho)$ an höchstens m Stellen und an diesen höchstens von den Ordnungen $s_1, s_2, \cdots s_m$ unendlich, sie besitzt also, wie wir sagen können, höchstens n einfache Unendlichkeitsstellen innerhalb ω. Da zufolge der Gleichung (22) das über die Begrenzung von ω erstreckte Integral

$$\int d \log \Omega(\varrho) = 0$$

wird, so stimmt die Anzahl der einfachen Nullstellen von $\Omega(\varrho)$ innerhalb ω mit der Anzahl der einfachen Unendlichkeitsstellen überein. Für diejenigen Stellen

$$\varrho_\varkappa + \lambda \qquad (\lambda = -\infty, \cdots +\infty),$$

wo $\Omega(\varrho)$ von niedrigerer als der $s_\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird, verschwindet das Product

$$\Pi(\varrho)\,\Omega(\varrho)$$

genau von derjenigen Ordnung, um die $s_\varkappa$ die Ordnungszahl des Unendlichwerdens von $\Omega(\varrho)$ für $\varrho = \varrho_\varkappa$ übertrifft, es verschwindet folglich dieses Product, d. h. $D(\varrho)$ innerhalb des Periodenstreifens ω genau an n Stellen von der ersten Ordnung. Bezeichnen wir diese n Nullstellen von $D(\varrho)$ (von denen einige auch zusammenfallen können) durch

$$\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots \bar{r}_n,$$

so lässt sich die ganze transcendente Function $D(\varrho)$ in die Form setzen

$$D(\varrho) = C \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{\sin(\varrho - \bar{r}_\varkappa)\pi}{\pi},$$

wo C eine Constante bedeutet. Aus den Gleichungen (16), (17), (22) ergiebt sich aber

$$C e^{\pm \pi i \left(\sum \bar{r}_\varkappa - \sum \varrho_\varkappa\right)} = 1,$$

und es muss folglich die Differenz

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \bar{r}_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{n} \varrho_\varkappa$$

nothwendig gleich einer ganzen Zahl sein. Wählen wir an Stelle der $\bar{r}_\varkappa$ solche von diesen um ganze Zahlen verschiedene $r_\varkappa$, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varrho_\varkappa$$

ist, so haben wir

$$(24) \qquad D(\varrho) = \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{\sin(\varrho - r_\varkappa)\pi}{\pi},$$

und da der Coefficient von ϱ^{n-1} in $f_0'(\varrho)$, zufolge der Gleichungen (10), den Werth

$$-\frac{n(n-1)}{2}$$

besitzt, so ist für die so gewählten $r_\varkappa$

$$(25) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa = \frac{n(n-1)}{2}.$$

83. **Darstellung der die Differentialgleichung befriedigenden Reihen in der Form unendlicher Determinanten. Fall einfacher Nullstellen. Fundamentalgleichung.**

Setzen wir nun

$$\bar{\chi}_{\nu\lambda} = \chi_{\nu\lambda}(\varrho) x^{\nu-\lambda},$$

so ist jede der Reihen

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| H_\iota(\lambda) x^\lambda \right| \qquad (\iota = 2, 3, \cdots n)$$

innerhalb des Kreisringes E convergent; hieraus folgt die Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu \gtrless \mu} \sum \left| \bar{\chi}_{\nu\mu} \right|$$

ebenso, wie oben (Nr. 82, S. 290) aus der Convergenz der S_ι die Convergenz der Reihe (15) erschlossen wurde. Ersetzen wir also in $D(\varrho)$ oder in einer Subdeterminante von $D(\varrho)$ die Elemente irgend einer Zeile durch die dem zweiten Index entsprechenden Potenzen von x, so kann, zufolge der über die unendlichen Determinanten bewiesenen Sätze (Nr. 78, S. 282, Nr. 79, S. 284), die so entstehende unendliche Determinante als Potenzreihe von x geschrieben werden, und dieselbe convergirt in Bezug auf x innerhalb E und in Bezug auf ϱ gleichmässig für alle endlichen Werthe von ϱ.

Die Coefficienten der Reihe $g(x, \varrho)$, die innerhalb E eine Lösung der Differentialgleichung (A) darstellen sollte, müssen nicht nur den Gleichungen (13) genügen, sondern es müssen, da der Punkt $x = 1$ innerhalb E befindlich angenommen wurde, d. h. $g(x, \varrho)$ für $x = 1$ convergent sein sollte, auch die absoluten Beträge dieser Coefficienten unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Soll also eine Bestimmung der $g_\nu(\varrho)$ aus den Gleichungen (13) möglich sein, so muss die Determinante $D(\varrho)$ dieser Gleichungen verschwinden, d. h. es muss für ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$D(\varrho) = 0$$

genommen werden. Diese Gleichung spielt hier dieselbe Rolle wie im Falle der Bestimmtheit die determinirende Fundamentalgleichung, nur mit dem Unterschiede, dass die Exponenten ϱ hier nicht vollkommen, sondern nur abgesehen von ganzen Zahlen bestimmt erscheinen; wir können z. B. für ϱ die n oben ausgesonderten Nullstellen $r_1, r_2, \cdots r_n$ von $D(\varrho)$ nehmen.

Sind diese n Nullstellen sämmtlich von einander verschieden, so ist jedes r_α eine einfache Nullstelle von $D(\varrho)$, d. h. es ist

$$D'(\varrho) = \frac{dD(\varrho)}{d\varrho}$$

für $\varrho = r_\alpha$ von Null verschieden. Beachten wir dann, dass (nach S. 284)

$$\frac{dD(\varrho)}{d\varrho} = \sum_i \sum_\varkappa \binom{i}{\varkappa} \frac{d\chi_{i\varkappa}(\varrho)}{d\varrho} \tag{26}$$

ist, so erkennen wir, dass in diesem Falle nicht sämmtliche ersten Subdeterminanten $\binom{i}{\varkappa}$ von $D(\varrho)$ für $\varrho = r_\alpha$ verschwinden können; sei z. B. die Subdeterminante

$$\binom{i_\alpha}{\varkappa_\alpha}$$

für $\varrho = r_\alpha$ von Null verschieden. — Die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems (13) für $\varrho = r_\alpha$ ergiebt sich dann (nach S. 286) in der Form

$$\binom{i_\alpha}{\varkappa_\alpha} g_\nu(\varrho) = \binom{i_\alpha}{\nu} g_{\varkappa_\alpha}(\varrho) \qquad (\nu = -\infty \ldots +\infty),$$

wo für ϱ der Werth r_α zu setzen ist, und für $g_{\varkappa_\alpha}(r_\alpha)$ eine willkürliche Constante genommen werden kann. Bezeichnen wir die so gefundenen Werthe der $g_\nu(r_\alpha)$ durch $g_{\alpha\nu}$, so haben wir die n Reihen

$$y_\alpha = x^{r_\alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\nu} x^\nu \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

die innerhalb E convergiren und die Differentialgleichung (A) befriedigen, und diese stellen, da die r_α sämmtlich von einander verschieden sein sollten, ein Fundamentalsystem von (A) dar. Wenn x den Umlauf U um $x = 0$ beschreibt, so gehen die y_α in

$$\Theta y_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha} y_\alpha, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

über, und es sind folglich die Grössen

(27) $$\omega_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha}$$

die Wurzeln der zum Umlaufe U gehörigen Fundamentalgleichung

$$F(\omega) = 0;$$

dieselbe besitzt also in diesem Falle n verschiedene Wurzeln, und wenn wir noch

$$\omega = e^{2\pi i \varrho}$$

setzen, so ist zufolge der Gleichungen (24), (25) geradezu

(28) $$D(\varrho)(2\pi i)^n e^{\frac{n(n-1)}{2}\pi i} = \prod_{\alpha=1}^{n}(\omega - \omega_\alpha) = F(\omega).$$

Wir haben also ein Verfahren, um die Elemente des zum Umlaufe U gehörigen Fundamentalsystems y_α zu finden, und haben auch die Fundamentalgleichung aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern zusammengesetzt.

84. Fall mehrfacher Nullstellen. Integralgruppen und Untergruppen.

Falls nun die Grössen r_α nicht sämmtlich von einander verschieden sind, so wird ein ähnliches Verfahren einzuschlagen sein, wie wir es für den Fall der Bestimmtheit auseinandergesetzt haben. Wir begnügen uns damit dasselbe hier kurz anzudeuten und verweisen in Betreff der genaueren Ausführung einiger Einzelheiten auf die Abhandlung des Herrn von Koch. (Acta Mathematica, Bd. 16, S. 217 ff.)

Wenn einige der Grössen r_α identisch werden, so ist der gemeinsame Werth r' von λ dieser Grössen eine λ-fache Nullstelle von $D(\varrho)$, und die Summe dieser Ordnungszahlen λ ist gleich n. Die Aufgabe besteht darin, entsprechend dieser, wie wir sagen wollen, λ-fachen Wurzel von $D(\varrho)$, λ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (A) herzustellen. Wenn eine ganze transcendente Function $P(\varrho)$ an der regulären Stelle $\varrho = r'$ von μ^{ter} Ordnung verschwindet, so ist auch noch der Quotient

$$\frac{P(\varrho)}{(\varrho - r')^\mu}$$

eine ganze transcendente Function; man sagt darum nicht unzweckmässig, $P(\varrho)$ sei in diesem Falle durch den Factor

$$(\varrho - r')^\mu$$

theilbar, oder dieser Factor sei in $P(\varrho)$ enthalten.

Enthält $D(\varrho)$ den Factor $\varrho - r'$ zur λ^{ten} Potenz, so können auch noch die ersten, zweiten, $\cdots$ Subdeterminanten von $D(\varrho)$ eine gewisse Potenz dieses Factors enthalten. Jedenfalls giebt es aber, wie oben (S. 285) gezeigt wurde, eine endliche positive ganze Zahl r von der Beschaffenheit, dass unter den r^{ten} Subdeterminanten von $D(\varrho)$ wenigstens eine für $\varrho = r'$ von Null verschieden ist. Sei

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r \end{pmatrix}$$

eine für $\varrho = r'$ nicht verschwindende r^{te} Subdeterminante, und denken wir uns dieselbe so gewählt, dass alle Subdeterminanten

$$(29) \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_\nu \\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu < r),$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\nu$ irgend ν der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$, $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\nu$ irgend ν der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$ bedeuten, für $\varrho = r'$ noch sämmtlich verschwinden. Bezeichnen wir dann die Gesammtheit der Subdeterminanten (29) für einen bestimmten Werth von ν durch $M^{(\nu)}$ und den Exponenten der höchsten Potenz von $\varrho - r'$, die noch in sämmtlichen $M^{(\nu)}$ enthalten ist durch λ_ν, so folgt aus der Gleichung (26) unmittelbar, dass λ_1 kleiner sein muss wie λ, und ebenso schliesst man allgemein

$$\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{r-1}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\lambda \geqq r,$$

und man zeigt ferner leicht, dass die sämmtlichen ν^{ten} Subdeterminanten von $D(\varrho)$ den Factor

$$(\varrho - r')^{\lambda_\nu}$$

enthalten müssen.

Setzt man nun

$$(30) \qquad g_{1\nu}(\varrho) = c_{11} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty),$$

$$(31) \qquad g_1(x, \varrho) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{1\nu}(\varrho) x^{\varrho+\nu},$$

wo c_{11} eine willkürliche Constante bedeutet, so wird die linke Seite der Differentialgleichung (A), wenn man für y die Reihe $g_1(x, \varrho)$ einsetzt, die Form

$$P(g_1(x, \varrho)) = \sum_\nu x^{\varrho+\nu} \sum_\mu \frac{\chi_{\nu\mu}(\varrho)}{h_\nu(\varrho)} g_{1\mu}(\varrho)$$

annehmen, oder da

$$\sum_{\nu} \binom{\alpha_1}{\mu} \chi_{\nu\mu}(\varrho) = 0, \quad \text{für } \mu \neq \alpha_1,$$

$$\sum_{\nu} \binom{\alpha_1}{\alpha_1} \chi_{\nu\alpha_1}(\varrho) = D(\varrho)$$

ist, die Form

(32) $$P(g_1(x, \varrho)) = c_{11} \frac{D(\varrho)}{h_{\alpha_1}(\varrho)} x^{\varrho+\alpha_1}.$$

Da die Functionen $h_\iota(\varrho)$ für keinen endlichen Werth von ϱ verschwinden, so ist $\varrho = r'$ eine λ-fache Nullstelle der rechten Seite der Gleichung (32), so dass also $P(g_1(x, \varrho))$ mit seinen $\lambda - 1$ ersten Ableitungen nach ϱ für $\varrho = r'$ verschwindet; es sind folglich die Ausdrücke

$$g_1^{(i)}(x, r') \qquad (i = 0, 1, \ldots \lambda - 1),$$

wo

$$g_1^{(i)}(x, \varrho) = \frac{\partial^i g_1(x, \varrho)}{\partial \varrho^i}$$

gesetzt wurde, Lösungen der Differentialgleichung (A). Von diesen sind, da die Subdeterminanten

$$\binom{\alpha_1}{\nu}$$

den Factor

$$(\varrho - r')^{\lambda_1}$$

enthalten, die

$$g_1^{(i)}(x, r') \qquad (i < \lambda_1)$$

identisch Null, dagegen verschwinden nicht alle Coefficienten von

$$g_1^{(\lambda_1)}(x, \varrho)$$

für $\varrho = r'$. Aus der gleichmässigen Convergenz der Reihe $g_1(x, \varrho)$ für alle endlichen Werthe von ϱ, erschliesst man (vergl. Nr. 48), dass sich die successiven Ableitungen nach ϱ durch gliedweise Differentiation ergeben; wir erhalten also die $\lambda - \lambda_1$ Entwickelungen

$$y_{11} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{1\nu}^{(\lambda_1)}(r') x^{r'+\nu},$$

$$y_{12} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\nu}^{(\lambda_1+1)}(r') + (\lambda_1 + 1)_1 g_{1\nu}^{(\lambda_1)}(r') \log x\right] x^{r'+\nu},$$

. . . .

$$y_{1,\lambda-\lambda_1} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\nu}^{(\lambda-1)}(r') + \cdots + \frac{(\lambda-1)\cdots(\lambda_1-1)}{(\lambda-\lambda_1-1)!} g_{1\nu}^{(\lambda_1)}(r') \log^{\lambda-\lambda_1-1} x\right] x^{r'+\nu},$$

die innerhalb ihres Convergenzbereiches E Integrale von (A) darstellen, und diese $\lambda - \lambda_1$ Integrale sind offenbar linear unabhängig; hierbei wurde

$$g_{1\nu}^{(i)}(\varrho) = \frac{d^i g_{1\nu}(\varrho)}{d\varrho^i}$$

gesetzt. Wenn nun $\lambda_1 > 0$ ist, so sei ferner

$$g_{2\nu}(\varrho) = c_{21}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \nu & \beta_2\end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \nu\end{pmatrix} \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty),$$

$$g_2(x, \varrho) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{2\nu}(\varrho)\, x^{\varrho+\nu},$$

wo c_{21}, c_{22} willkürliche Constanten bedeuten. Dann ist

$$P(g_2(x, \varrho)) = G_{\alpha_1}(\varrho)\frac{x^{\varrho+\alpha_1}}{h_{\alpha_1}(\varrho)} + G_{\alpha_2}(\varrho)\frac{x^{\varrho+\alpha_2}}{h_{\alpha_2}(\varrho)},$$

wenn

$$G_{\alpha_1}(\varrho) = c_{21}\begin{pmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{pmatrix} - c_{22}\begin{pmatrix}\alpha_2 \\ \beta_1\end{pmatrix},$$

$$G_{\alpha_2}(\varrho) = - c_{21}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \beta_1\end{pmatrix}$$

gesetzt wird, und wir erhalten in den Entwickelungen

$$g_{21} \quad = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{2\nu}^{(\lambda_2)}(r')\, x^{r'+\nu},$$

$$g_{22} \quad = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left[g_{2\nu}^{(\lambda_2+1)}(r') + (\lambda_2+1)_1 g_{2\nu}^{(\lambda_2)}(r') \log x\right] x^{r'+\nu},$$

. . . .

$$g_{2,\lambda_1-\lambda_2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\Bigg[g_{2\nu}^{(\lambda_1-1)}(r') + \cdots$$
$$+ \frac{(\lambda_1-1)\cdots(\lambda_2-1)}{(\lambda_1-\lambda_2-1)!}\, g_{2\nu}^{(\lambda_2)}(r') \log^{\lambda_1-\lambda_2-1} x\Bigg] x^{r'+\nu},$$

die innerhalb E gültigen Darstellungen von $\lambda_1 - \lambda_2$ weiteren Integralen von (A). So fortfahrend finden wir schliesslich, wenn

$$g_{r\nu}(\varrho) = c_{r1}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \\ \nu & \beta_2 & \cdots & \beta_r\end{pmatrix} + \cdots + c_{rr}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_{r-1} & \alpha_r \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{r-1} & \nu\end{pmatrix}$$

gesetzt wird, wo $c_{r1}, \cdots c_{rr}$ willkürliche Constanten darstellen, die λ_{r-1} Entwickelungen

$$y_{r1} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{r\nu}(r')\, x^{r'+\nu},$$

$$y_{r2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[g'_{r\nu}(r') + g_{r\nu}(r')\log x\right] x^{r'+\nu},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$y_{r,\lambda_{r-1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[g_{r\nu}^{(\lambda_{r-1}-1)}(r') + \cdots + g_{r\nu}(r')\log^{\lambda_{r-1}-1} x\right] x^{r'+\nu},$$

die auch innerhalb E convergiren und daselbst Lösungen von (A) darstellen. Bei geeigneter Wahl der Constanten $c_{\varkappa\mu}$, z. B. wenn man nimmt

$$c_{\varkappa\varkappa} = 1, \quad c_{\varkappa 1} = c_{\varkappa 2} = \cdots = c_{\varkappa, \varkappa-1} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots r),$$

sind die so erhaltenen

$$\lambda - \lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + \cdots + \lambda_{r-1} = \lambda$$

Integrale $y_{\varkappa\mu}$ linear unabhängig, und wir haben also in der That, entsprechend der λ-fachen Nullstelle r' von $D(\varrho)$, genau λ Integrale von (A) gefunden. Wir erhalten also auch im allgemeinen Falle, entsprechend den n einfachen Nullstellen $r_1, r_2, \cdots r_n$ von $D(\varrho)$, genau n Integrale, die die Form des zum Umlaufe U gehörigen canonischen Fundamentalsystems haben; man schliesst hieraus, dass auch in diesem Falle die Beziehung (28) zwischen $D(\varrho)$ und der zu E gehörigen Fundamentalgleichung besteht, so dass also, wenn r_α eine λ_α-fache Nullstelle von $D(\varrho)$ ist,

$$\omega_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha}$$

eine λ_α-fache Wurzel der Fundamentalgleichung darstellt. Die dem r_α entsprechenden Zahlen $\lambda, \lambda_1, \cdots \lambda_{r-1}$ liefern zugleich die Anzahl und die Elementenzahlen der Untergruppen, in welche die zur λ-fachen Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung gehörige Integralgruppe zerfällt (vergl. Nr. 37, S. 126). Es ist also die Untersuchung der Fundamentalgleichung vollständig auf die Untersuchung der unendlichen Determinante $D(\varrho)$ zurückgeführt. Ehe wir nun dazu übergehen die Natur der functionalen Abhängigkeit dieser Determinante von den Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ der Reihenentwickelungen der $P_\varkappa(x)$ zu erörtern, wollen wir die vorhergehende Untersuchung von der dem Bereiche E auferlegten Beschränkung

(33) $$R < 1 < R'$$

zu befreien suchen. Zu diesem Ende setzen wir, wenn die Bedingung (33) nicht schon von selbst erfüllt ist,

$$\sqrt{RR'} = K,$$
$$x = zK;$$

dann kann die Differentialgleichung (A) in der Form

$$(A') \qquad z^n \frac{d^n y}{dz^n} + z^{n-2} Q_{n-2}(z) \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} + \cdots + Q_0(z) y = 0$$

geschrieben werden, wo

$$Q_\varkappa(z) = P_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \beta_{\varkappa\lambda} z^\lambda, \quad \beta_{\varkappa\lambda} = \frac{\alpha_{\varkappa\lambda}}{K^{-\lambda}}$$

ist, und die Entwickelungen der $Q_\varkappa(z)$ convergiren für

$$R_1 < |z| < R_1',$$

wenn

$$R_1 = \sqrt{\frac{R}{R'}}, \quad R_1' = \sqrt{\frac{R'}{R}}$$

gesetzt wird; diese beiden Grössen genügen aber der Bedingung

$$R_1 < 1 < R_1',$$

so dass für die Differentialgleichung (A′) alle vorhergehenden Entwickelungen unmittelbar anwendbar sind. Hieraus übersieht man aber, dass dieselben auch für die ursprüngliche Differentialgleichung gültig bleiben, da aus der Convergenz der für die Differentialgleichung (A′) zu bildenden unendlichen Determinanten die Convergenz der entsprechenden Ausdrücke für die ursprüngliche Differentialgleichung ohne weiteres folgt.

Drittes Kapitel.

85. Natur der Abhängigkeit der Coefficienten der Fundamentalgleichung von den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern.

Wenn es sich darum handelt die Natur der Coefficienten der zum Bereiche E (S. 272) gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A) als Functionen der $\alpha_{\varkappa\lambda}$ zu studiren, so muss man zuvörderst beachten, dass die $\alpha_{\varkappa\lambda}$, als Entwickelungscoefficienten gewisser Functionen $P_\varkappa(x)$, nicht unmittelbar als unabhängige Variable aufgefasst werden dürfen. Denken wir uns z. B. die $P_\varkappa(x)$ als rationale Functionen von x, und seien $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die Unendlichkeitsstellen dieser rationalen Functionen. Als Bereich E kann dann z. B. ein Kreisring genommen werden, der so beschaffen ist, dass innerhalb des inneren Kreises K gewisse der Punkte a_λ, etwa $a_1, a_2, \cdots a_\tau$, gelegen sind, während die übrigen $a_{\tau+1}, \cdots a_\sigma$ sich ausserhalb des äusseren Kreises K' befinden. Sei dann in Partialbrüche zerlegt

$$\text{(H)} \qquad P_\varkappa(x) = G_\varkappa(x) + \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\mu_\lambda} \frac{A_{\varkappa\lambda i}}{(x-a_\lambda)^i},$$

wo $G_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function von x, μ_λ die Ordnung der Unendlichkeitsstelle a_λ, die $A_{\varkappa\lambda i}$ Constanten bedeuten, so lässt sich das Aggregat

$$\sum_{\lambda=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{\mu_\lambda} \frac{A_{\varkappa\lambda i}}{(x-a_\lambda)^i}$$

nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1}, das Aggregat

$$\sum_{\lambda=\tau+1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\mu_\lambda} \frac{A_{\varkappa\lambda i}}{(x-a_\lambda)^i}$$

nach positiven ganzen Potenzen von x entwickeln, und beide Entwickelungen convergiren innerhalb E. Die Coefficienten $\alpha_{\varkappa\nu}$ der Entwickelungen (1) sind folglich in diesem Falle homogene lineare Functionen (mit von den a_λ abhängigen Coefficienten) der $A_{\varkappa\lambda i}$ und der in der ganzen Function $G_\varkappa(x)$ auftretenden Constanten. Denken wir uns also die $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$, d. h. die singulären Punkte der Differentialgleichung fest (im Allgemeinen ist auch noch $x = 0$ eine singuläre Stelle), dagegen die $A_{\varkappa\lambda i}$ und die Coefficienten der $G_\varkappa(x)$ willkürlich veränderlich, so erscheinen die $\alpha_{\varkappa\nu}$ als lineare Functionen einer gewissen endlichen Anzahl unbeschränkt veränderlicher Grössen

$$(34) \qquad \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m.$$

Allgemein wollen wir annehmen, dass die Coefficienten $\alpha_{\varkappa\nu}$ der Entwickelungen (1) als ganze rationale Functionen von m unbeschränkt veränderlichen Grössen (34) gegeben sind, und stellen uns die Aufgabe, die Abhängigkeit der Coefficienten der Fundamentalgleichung von diesen m Grössen zu ermitteln.

Da zufolge der Gleichungen (10) die Determinante der linearen Substitution, die ein Fundamentalsystem von (A) beim Umlaufe U erfährt, den Werth Eins hat, so hat die Fundamentalgleichung $F(\omega)$ die Form

$$F(\omega) = \omega^n + J_1 \omega^{n-1} + \cdots + J_{n-1}\omega + (-1)^n = 0,$$

wie überdies auch daraus erhellt, dass

$$\omega_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n), \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

und also zufolge der Gleichung (25)

$$\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n = e^{\pi i n(n-1)} = 1$$

ist. Nun ist

$$J_{n-\mu} = \frac{F^{(\mu)}(0)}{\mu!} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n-1),$$

wo

$$F^{(\mu)}(\omega) = \frac{d^\mu F(\omega)}{d\omega^\mu}.$$

Ferner hat man, wenn

$$F(\omega) = f(\varrho), \quad \omega = e^{2\pi i \varrho}$$

gesetzt wird,

$$F^{(\mu)}(\omega) = \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^\mu f^{(\mu)}(\varrho) + \cdots + \frac{d^\mu \varrho}{d\omega^\mu} f'(\varrho) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots),$$

wo

$$f^{(\mu)}(\varrho) = \frac{d^\mu f(\varrho)}{d\varrho^\mu}$$

ist, und folglich ergeben sich die

$$F(1), \quad F'(1). \cdots F^{(n)}(1)$$

als homogene lineare Functionen von

$$(35) \qquad f(0), \quad f'(0), \cdots f^{(n)}(0)$$

mit in πi rationalen Coefficienten. Die $J_{n-\mu}$ erscheinen also als homogene lineare Functionen der Grössen (35); diese selbst sind aber zufolge der Gleichung (28) homogen linear durch

$$(36) \qquad D(0), \quad D'(0), \cdots D^{(n)}(0)$$

mit in πi rationalen Coefficienten darstellbar, und es sind folglich die $J_{n-\mu}$ als homogene lineare Ausdrücke der Grössen (36) mit in πi rationalen Coefficienten gegeben. Wir haben also nur die Abhängigkeit der Grössen (36) von den $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ zu untersuchen; da aber $D(\varrho)$ eine ganze transcendente Function von ϱ, also in Form einer beständig convergenten, nach positiven ganzen Potenzen von ϱ fortschreitenden Reihe darstellbar ist, so handelt es sich schliesslich um die Bestimmung der Coefficienten dieser Reihe als Functionen der $\xi_1, \cdots \xi_m$. Zu diesem Ende denken wir uns die unendliche Determinante $D(\varrho)$ in der Form (IV) entwickelt; wir setzen also

$$\chi_{i\varkappa}(\varrho) = \psi_{i\varkappa}(\varrho) \qquad (i \gtrless \varkappa),$$

$$\chi_{ii}(\varrho) = \psi_{ii}(\varrho) + 1,$$

und ferner

$$D_{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu} = [\psi_{i\varkappa}(\varrho)] \qquad (i, \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\nu),$$

$$\overset{\nu}{D}(\varrho) = \sum_{(\varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_\nu)} D_{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu},$$

dann ist

$$(37) \qquad D(\varrho) = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \overset{\nu}{D}(\varrho).$$

Zufolge der Gleichungen (12), (6), (5) ist

$$(38) \quad \begin{cases} \underset{(i \gtrless \varkappa)}{\psi_{i\varkappa}(\varrho)} = h_i(\varrho) \sum_{\lambda=0}^{n-2} \alpha_{\lambda, i-\varkappa}(\varrho+\varkappa)(\varrho+\varkappa-1)\cdots(\varrho+\varkappa-\lambda+1), \\ \psi_{ii}(\varrho) = h_i(\varrho) f_0(\varrho+i) - 1, \end{cases}$$

und da wegen des Verschwindens von $\alpha_{n-1,0}$ aus den Gleichungen (11)

$$h_i(\varrho) = \frac{1}{i^n} e^{-\frac{n}{i}\varrho + \frac{n(n-1)}{2i}}$$

folgt, so sind also die $\psi_{i\varkappa}(\varrho)$ lineare homogene Ausdrücke der Entwickelungscoefficienten $\alpha_{\lambda\mu}$. Seien diese Coefficienten, als ganze Functionen der Parameter $\xi_1, \cdots \xi_m$, vom s^{ten} oder von niedrigerem Grade, dann sind die $\psi_{i\varkappa}(\varrho)$ vom selben Grade in den $\xi_1, \cdots \xi_m$, und $D_{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu}$ ist in diesen Grössen vom Grade νs. Da die Convergenz der Determinante $D(\varrho)$ bewiesen wurde, ohne irgendwelche andere Voraussetzungen über die Natur der $\alpha_{\lambda\mu}$ zu machen, als die, dass die Reihen (1) innerhalb E convergent sind, so wird $D(\varrho)$ und folglich auch die auf der rechten Seite von (37) stehende Entwickelung unbedingt und für alle endlichen Werthe von ϱ gleichmässig convergent sein, was auch den $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m$ für endliche Werthe beigelegt werden mögen. Sei

$$\xi_1^0, \quad \xi_2^0, \cdots \xi_m^0$$

ein beliebiges solches Werthsystem, dann sind die $D_{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu}$ nach positiven ganzen Potenzen der Grössen

$$(39) \qquad \xi_1 - \xi_1^0, \quad \xi_2 - \xi_2^0, \cdots \xi_m - \xi_m^0$$

entwickelbar; das Gleiche gilt also auch für die Coefficienten der Entwickelung von $\overset{\nu}{D}(\varrho)$ nach Potenzen von ϱ, und zwar sind diese Coefficienten in den Grössen (39) höchstens von der Dimension νs. Aus der unbedingten Convergenz der Entwickelung (37) folgt hiernach, dass, wenn wir uns $D(\varrho)$ nach positiven ganzen Potenzen von ϱ entwickelt denken, die Coefficienten der einzelnen Potenzen von ϱ erhalten werden, indem wir die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von ϱ in den Entwickelungen der $\overset{\nu}{D}(\varrho)$ zusammenfassen. Die Coefficienten der Entwickelung von $D(\varrho)$ stellen sich also in der Form von Reihen dar, die nach positiven ganzen Potenzen der Grössen (39) fortschreiten. D. h. mit anderen Worten, diese Coefficienten sind, als Functionen der $\xi_1, \cdots \xi_m$ aufgefasst, in der Umgebung jeder endlichen Stelle

$$\xi_1 = \xi_1^0, \cdots \xi_m = \xi_m^{(0)}$$

regulär, sie sind folglich ganze transcendente Functionen der $\xi_1, \cdots \xi_m$. Das Gleiche gilt demnach auch von den Coefficienten J_λ der Fundamentalgleichung, diese lassen sich also durch beständig convergente gewöhnliche Potenzreihen der $\xi_1, \cdots \xi_n$ darstellen. Im Falle, wo die Coefficienten der Differentialgleichung (A) rationale Functionen von x sind, können wir uns dieselben in der Form (H) geschrieben denken, die Coefficienten J_λ der zum Bereiche E gehörigen Fundamentalgleichung sind dann ganze transcendente Functionen der $A_{\varkappa\lambda i}$ und der Coefficienten der $G_\varkappa(x)$. Entwickeln wir die J_λ nach Potenzen dieser Grössen $A_{\varkappa\lambda i}$ u. s. w., so hängen die Coefficienten der Entwickelungen noch von den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ ab; die Natur dieser Abhängigkeit wollen wir im folgenden Abschnitte mit Hülfe von anderen Methoden, die uns zugleich auch einen neuen Beweis des hier gefundenen Ergebnisses liefern werden, untersuchen.

86. Die Recursionsformel und Fundamentalgleichung einer Differentialgleichung, die aus mehreren Differentialgleichungen zusammengesetzt ist.

Wir hatten in der Theorie der Fundamentalgleichung (vergl. die Nummern 33, 35) eine Reihe von Sätzen entwickelt, die Beziehungen zwischen der Fundamentalgleichung einer aus mehreren Differentialgleichungen zusammengesetzten Differentialgleichung und den Fundamentalgleichungen der Componenten lieferten. Wir wollen nun sehen, wie sich diese Beziehungen im Lichte der eben entwickelten Theorie darstellen. Sei also die linke Seite $P(y)$ der Differentialgleichung (A) — worin wir wieder den Coefficienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von Null verschieden annehmen wollen, da dies, wie aus den vorstehenden Entwickelungen sofort zu übersehen ist, keine wesentliche Aenderung der erlangten Resultate bedingt — aus zwei Differentialausdrücken $Q(y)$, $R(y)$ in der Form

(40) $$P(y) = RQ$$

zusammengesetzt, wo

$$Q(y) = x^{\lambda} y^{(\lambda)} + x^{\lambda-1} Q_{\lambda-1}(x) y^{(\lambda-1)} + \cdots + Q_0(x) y,$$

und innerhalb des Bereiches E

$$Q_\varkappa(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_{\varkappa\nu} x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \lambda - 1)$$

ist. Dann folgt zunächst aus den für die Zerlegung von Differentialausdrücken aufgestellten Sätzen, dass auch die Coefficienten von $R(y)$ innerhalb E nach ganzen Potenzen von x entwickelbar sein müssen, und da der Coefficient der höchsten Ableitung von $P(y)$ gleich dem Producte der Coefficienten der höchsten Ableitungen von $R(y)$, $Q(y)$ ist (S. 46), so hat $R(y)$ die Form

$$R(y) = x^{n-\lambda} y^{(n-\lambda)} + R_{n-\lambda-1}(x) x^{n-\lambda-1} y^{(n-\lambda-1)} + \cdots + R_0(x) y,$$

und innerhalb E gelten die Entwickelungen

$$R_\varkappa(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\varkappa\nu} x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n - \lambda - 1).$$

Bilden wir nun die charakteristischen Functionen

$$P(x^\varrho) = f(x, \varrho)x^\varrho,$$
$$Q(x^\varrho) = \varphi(x, \varrho)x^\varrho,$$
$$R(x^\varrho) = \psi(x, \varrho)x^\varrho,$$

und sei nach Potenzen von x entwickelt innerhalb E

$$f(x, \varrho) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} f_\varkappa(\varrho)x^\varkappa,$$
$$\varphi(x, \varrho) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \varphi_\varkappa(\varrho)x^\varkappa,$$
$$\psi(x, \varrho) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \psi_\varkappa(\varrho)x^\varkappa;$$

dann lauten die Recursionsformeln für die Coefficienten einer Reihe

$$g(x, \varrho) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu x^{\nu+\varrho},$$

die den Differentialgleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

genügen soll, beziehungsweise

$$\left.\begin{aligned} F_\nu(\varrho) &= \sum_\varkappa g_\varkappa a_{\nu\varkappa}(\varrho) = 0, \\ \Phi_\nu(\varrho) &= \sum_\varkappa g_\varkappa b_{\nu\varkappa}(\varrho) = 0, \\ \Psi_\nu(\varrho) &= \sum_\varkappa g_\varkappa c_{\nu\varkappa}(\varrho) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa, \nu = -\infty \ldots +\infty),$$

wo

$$a_{\nu\varkappa}(\varrho) = f_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa),$$
$$b_{\nu\varkappa}(\varrho) = \varphi_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa),$$
$$c_{\nu\varkappa}(\varrho) = \psi_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa)$$

gesetzt wurde, und es ist identisch

$$P(g(x, \varrho)) = \sum_\nu F_\nu(\varrho)x^{\varrho+\nu},$$
$$Q(g(x, \varrho)) = \sum_\nu \Phi_\nu(\varrho)x^{\varrho+\nu},$$
$$R(g(x, \varrho)) = \sum_\nu \Psi_\nu(\varrho)x^{\varrho+\nu}.$$

Wenn die Reihe $g(x, \varrho)$ der Differentialgleichung $Q = 0$ genügt, so befriedigt sie auch die Differentialgleichung $P = 0$; da nun

$$P(g(x, \varrho)) = R(Q(g(x, \varrho))) = R\Big(\sum_{\nu} \Phi_{\nu}(\varrho) x^{\varrho+\nu}\Big)$$

ist, so erhalten wir die Identität

$$\sum_{\nu} F_{\nu}(\varrho) x^{\varrho+\nu} = \sum_{\nu} \Psi_{\nu}(\varrho) x^{\varrho+\nu},$$

wo

$$\Psi_{\nu}(\varrho) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} c_{\nu\varkappa}(\varrho) \Phi_{\varkappa}(\varrho)$$

gesetzt wurde, so dass sich also

$$\Psi_{\nu}(\varrho) = \sum_{\varkappa} \sum_{\mu} g_{\mu} c_{\nu\varkappa}(\varrho) b_{\varkappa\mu}(\varrho)$$

ergiebt. Es ist folglich

$$F_{\nu}(\varrho) = \sum_{\varkappa} \sum_{\mu} c_{\nu\varkappa}(\varrho) b_{\varkappa\mu}(\varrho) g_{\mu}$$

und demgemäss

$$(41) \qquad a_{\nu\mu}(\varrho) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} c_{\nu\varkappa}(\varrho) b_{\varkappa\mu}(\varrho) \qquad (\nu, \mu = -\infty, \quad +\infty).$$

Uebertragen wir den für endliche Systeme aufgestellten Begriff der Composition auf unendliche, so können wir also sagen, das System

$$(a_{\nu\mu}(\varrho))$$

ist aus den beiden Systemen

$$(c_{\nu\mu}(\varrho)), \quad (b_{\varkappa\mu}(\varrho))$$

componirt. Um hieraus für die Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

einen Schluss ziehen zu können, setzen wir

$$f_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \alpha_{\varkappa 0} \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1) = (\varrho - \varrho_1) \cdots (\varrho - \varrho_n),$$

$$\varphi_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \beta_{\varkappa 0} \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1) = (\varrho - \sigma_1) \cdots (\varrho - \sigma_{\lambda}),$$

$$\psi_0(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{n-\lambda} \gamma_{\varkappa 0} \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1) = (\varrho - \tau_1) \cdots (\varrho - \tau_{n-\lambda}).$$

$$h_\nu(\varrho) = \frac{1}{\nu^n} e^{-\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} \frac{\varrho - \varrho_\varkappa}{\nu}},$$

$$\eta_\nu(\varrho) = \frac{1}{\nu^\lambda} e^{-\sum\limits_{\varkappa=1}^{\lambda} \frac{\varrho - \sigma_\varkappa}{\nu}},$$

$$\zeta_\nu(\varrho) = \frac{1}{\nu^{n-\lambda}} e^{-\sum\limits_{\varkappa=1}^{n-\lambda} \frac{\varrho - \tau_\varkappa}{\nu}},$$

dann ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varrho_\varkappa = \frac{n(n-1)}{2} - \alpha_{n-1,0},$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\lambda} \sigma_\varkappa = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \beta_{\lambda-1,0},$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-\lambda} \tau_\varkappa = \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{2} - \beta_{n-\lambda-1,0}.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung (40) unmittelbar:

$$P_{n-1}(x) = (n-\lambda)\lambda + Q_{\lambda-1}(x) + R_{n-\lambda-1}(x),$$

also ist, wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung innerhalb E entwickeln und die von x unabhängigen Glieder mit einander vergleichen,

$$\alpha_{n-1,0} = (n-\lambda)\lambda + \beta_{\lambda-1,0} + \gamma_{n-\lambda-1,0},$$

und folglich

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varrho_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} \sigma_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n-\lambda} \tau_\varkappa;$$

wir finden demnach

$$h_\nu(\varrho) = \eta_\nu(\varrho)\,\zeta_\nu(\varrho). \tag{42}$$

Nun sind die unendlichen Determinanten

$$\left.\begin{aligned} [h_\nu(\varrho) a_{\nu\varkappa}(\varrho)] &= D(\varrho) \\ [\eta_\nu(\varrho) b_{\nu\varkappa}(\varrho)] &= \Delta(\varrho) \\ [\zeta_\nu(\varrho) c_{\nu\varkappa}(\varrho)] &= \mathrm{H}(\varrho) \end{aligned}\right\} \qquad (\nu, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

beziehungsweise mit den linken Seiten der Fundamentalgleichungen von

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

identisch. Bilden wir die Ausdrücke

$$\bar{c}_{\nu\mu} = \sum_{\varkappa} \zeta_\nu c_{\nu\varkappa} \cdot \eta_\varkappa b_{\varkappa\mu},$$

so hat nach dem Multiplicationstheoreme der unendlichen Determinanten die aus den $\bar{c}_{\nu\mu}$ gebildete Determinante die Normalform und ist dem Producte von $\Delta(\varrho)$ und $\mathsf{H}(\varrho)$ gleich, d. h. wir haben

$$[\bar{c}_{\nu\mu}] = \Delta(\varrho) \cdot \mathsf{H}(\varrho) \qquad (\nu, \mu = -\infty, \cdots +\infty).$$

Offenbar ist aber, wie man durch einfache Transformationen erkennt,

$$(43) \qquad \Delta(\varrho) = [\eta_\nu(\varrho) b_{\nu\varkappa}(\varrho)] = [\eta_\varkappa(\varrho) b_{\nu\varkappa}(\varrho)] \qquad (\nu, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty),$$

wir können folglich auch schreiben

$$\Delta(\varrho)\mathsf{H}(\varrho) = \Big[\zeta_\nu(\varrho)\eta_\mu(\varrho)\sum_{\varkappa} c_{\nu\varkappa}(\varrho) b_{\varkappa\mu}(\varrho)\Big] \qquad (\nu, \mu = -\infty, \cdots +\infty),$$

oder nach (41)

$$\Delta(\varrho)\mathsf{H}(\varrho) = [\zeta_\nu(\varrho)\eta_\mu(\varrho) a_{\nu\mu}(\varrho)] \qquad (\nu, \mu = -\infty, \cdots +\infty).$$

Nun folgt aber ähnlich wie (43) die Gleichung

$$[\zeta_\nu(\varrho)\eta_\mu(\varrho) a_{\nu\mu}(\varrho)] = [\zeta_\nu(\varrho)\eta_\nu(\varrho) a_{\nu\mu}(\varrho)] \qquad (\nu, \mu = -\infty, \cdots +\infty),$$

also ist mit Rücksicht auf die Gleichung (42)

$$(44) \qquad \Delta(\varrho)\mathsf{H}(\varrho) = D(\varrho),$$

ein Satz, der schon in der Theorie der Fundamentalgleichung auf anderem Wege bewiesen wurde.

87. Beziehung zwischen den Recursionsformeln und Fundamentalgleichungen von adjungirten Differentialgleichungen.

Wir wollen nun noch die Beziehung zwischen den Fundamentalgleichungen der gegebenen Differentialgleichung (A) und ihrer adjungirten in ähnlicher Weise herleiten. Dabei ist es zweckmässig, die adjungirte Differentialgleichung in der Form

$$(\mathrm{A}') \quad P'(z) = (-1)^n \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}\left(x^\varkappa P_\varkappa(x) z\right) = 0, \quad P_n(x) = 1,$$

zu Grunde zu legen, da dieselbe dann unmittelbar in der der Form von (A) analogen Gestalt

$$P'(z) = x^n z^{(n)} + x^{n-1} P'_{n-1}(x) z^{(n-1)} + \cdots + P'_0(x) z = 0$$

erscheint, wo die $P'_\varkappa(x)$ innerhalb des Kreisringes E auch in der Gestalt von Reihen, die nach ganzen Potenzen von x fortschreiten, darstellbar sind. Die Lagrange'sche Beziehung (Nr. 21, S. 54) lautet dann

$$zP(y) - y(-1)^n P'(z) = \frac{d}{dx} P(y, z),$$

wenn wir setzen (vergl. S. 55)

$$P(y, z) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{h=0}^{\varkappa-1} (-1)^h y^{(\varkappa-h-1)} \frac{d^h}{dx^h} (x^\varkappa P_\varkappa(x) z).$$

Bilden wir für die Differentialgleichung (A′) die charakteristische Function

$$P'(x^\varrho) = x^\varrho f'(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} f_\lambda'(\varrho) x^\lambda$$

und setzen ferner

$$f_0'(\varrho) = (\varrho - \varrho_1')(\varrho - \varrho_2') \cdots (\varrho - \varrho_n'),$$

$$a_{i\varkappa}'(\varrho) = f_{i-\varkappa}'(\varrho + \varkappa),$$

$$h_\nu'(\varrho) = \frac{1}{\nu^n} e^{-\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\varrho - \varrho_\varkappa'}{\nu}},$$

so stellt die unendliche Determinante

$$D'(\varrho) = [h_\nu'(\varrho) a_{\nu\varkappa}'(\varrho)] \qquad (\nu, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

die linke Seite der zum Kreisringe E gehörigen Fundamentalgleichung von (A′) dar. Bedeutet nun ν eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, und setzen wir in die Lagrange'sche Beziehung

$$y = x^{-\varrho-\nu-1}, \quad z = x^\varrho$$

ein, so erhält dieselbe die Gestalt

$$x^\varrho P(x^{-\varrho-\nu-1}) - (-1)^n x^{-\varrho-\nu-1} P'(x^\varrho) = \frac{d}{dx} P(x^{-\varrho-\nu-1}, x^\varrho),$$

oder

$$x^{-\nu-1} \{f(x, -\varrho-\nu-1) - (-1)^n f'(x, \varrho)\} = \frac{d}{dx} P(x^{-\varrho-\nu-1}, x^\varrho).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist innerhalb E durch eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellbar. Diese muss also gleich der Ableitung einer Potenzreihe sein und kann folglich kein Glied mit x^{-1} enthalten, d. h. der Coefficient von x^{-1} muss verschwinden; wir erhalten demgemäss die Gleichung

$$f_\nu(-\varrho-\nu-1) = (-1)^n f_\nu'(\varrho) \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty).$$

Hieraus folgt

$$f_{i-\varkappa}'(\varrho+\varkappa) = (-1)^n f_{i-\varkappa}(-\varrho-\varkappa-i+\varkappa-1),$$

also

$$a_{i\varkappa}'(\varrho) = (-1)^n a_{-\varkappa,-i}(-\varrho-1),$$

und

$$f_0'(\varrho) = (-1)^n f_0(-\varrho - 1),$$

woraus sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varrho_\varkappa' = -n - \sum_{\varkappa=1}^{n} \varrho_\varkappa$$

ergiebt. Wir finden daher

$$h_\nu'(\varrho) = (-1)^n h_{-\nu}(-\varrho - 1)$$

und endlich

$$h_\nu'(\varrho) a_{\nu\varkappa}'(\varrho) = h_{-\nu}(-\varrho - 1) a_{-\varkappa,-\nu}(-\varrho - 1);$$

also ist

$$D'(\varrho) = [h_{-\nu}(-\varrho - 1) a_{-\varkappa,-\nu}(-\varrho - 1)] \qquad (\varkappa, \nu = -\infty, \ldots +\infty)$$

Da aber (vergl. Gl. (43))

$$D(\varrho) = [h_\varkappa(\varrho) a_{\varkappa\nu}(\varrho)] \qquad (\varkappa, \nu = -\infty, \ldots +\infty)$$

auch in der Form

$$D(\varrho) = [h_\nu(\varrho) a_{\varkappa\nu}(\varrho)] \qquad (\varkappa, \nu = -\infty, \ldots +\infty)$$

geschrieben werden kann, und der Werth dieser unendlichen Determinante keine Aenderung erfährt, wenn man Zeilen und Reihen beliebig so miteinander vertauscht, dass Diagonalglieder und Nichtdiagonalglieder wieder zu ebensolchen werden, so ist

$$D(\varrho) = [h_{-\nu}(\varrho) a_{-\varkappa,-\nu}(\varrho)] \qquad (\varkappa, \nu = -\infty, \ldots +\infty);$$

wir finden also

$$D'(\varrho) = D(-\varrho - 1)$$

als Beziehung zwischen den Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen (A) und (A′). Setzen wir also wie oben

$$\omega = e^{2\pi i \varrho},$$

so ergeben sich für die Wurzeln der Fundamentalgleichung der adjungirten Differentialgleichung die Werthe

$$\omega_\alpha' = e^{2\pi i(-r_\alpha - 1)} = \frac{1}{\omega_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

ein Resultat, welches auch nach den Methoden des dritten Abschnittes gefunden werden kann, wenn man beachtet, dass die lineare Substitution, welche das dem Fundamentalsysteme $[y_m]$ von (A) adjungirte Fundamentalsystem $[z_m]$ von (A′) bei einem Umlaufe U erfährt, zufolge des Satzes der Nr. 23 (S. 65), die reciproke der linearen Substitution ist, die das Fundamentalsystem $[y_m]$ bei demselben Umlaufe erleidet.

Viertes Kapitel.

88. Die Hamburger'sche Methode für die Entwickelung der Integrale innerhalb eines Kreisringes.

Man kann sich, um die Entwickelungen eines Fundamentalsystems innerhalb E und die zu E gehörige Fundamentalgleichung zu finden, auch noch einer anderen Methode bedienen, die darauf ausgeht, den Kreisring E auf das Innere einer einfach zusammenhängenden Kreisfläche abzubilden. Dieselbe rührt in ihren Grundzügen von Herrn Hamburger her und führt auf Reihenentwickelungen, die für manche Zwecke geeigneter sein können als die, welche sich durch Anwendung der unendlichen Determinanten ergeben.

Sei x_0 ein beliebiger innerhalb E befindlicher Punkt; verbinden wir x_0 geradlinig mit dem Punkte $x = 0$ und wählen auf dieser Verbindungslinie zwei ebenfalls innerhalb E gelegene Punkte x_1, x_2, für welche

$$|x_1| < |x_2|, \qquad x_0 = \sqrt{x_1 x_2}$$

ist. Bedeutet dann h den positiven Werth von

$$\frac{1}{2} \log \frac{x_2}{x_1},$$

so ist

$$x_2 = x_0 e^h, \qquad x_1 = x_0 e^{-h}.$$

Wir setzen nun

$$x = x_0 e^z,$$

dann wird der von den beiden Kreisen

$$|x| = |x_1|, \qquad |x| = |x_2|$$

begrenzte Kreisring X auf einen unendlichen Parallelstreifen Z der z-Ebene abgebildet, der durch zwei zur lateralen Axe in den Abständen $-h$ und h von dieser Axe gezogenen Parallelen begrenzt ist. Wenn

$$r = |x|, \qquad x = r e^{\varphi i}$$

gesetzt wird, so entspricht jedem Werthsysteme von r und φ, welches einen Punkt von X bestimmt, ein z-Werth innerhalb oder auf der Begrenzung von Z und umgekehrt. Setzen wir ferner

$$\alpha = \frac{\pi}{2h}, \qquad t = \frac{e^{i\alpha z} - 1}{e^{i\alpha z} + 1},$$

so wird der Parallelstreifen Z auf den Einheitskreis der t-Ebene*) abgebildet. Wenn z innerhalb Z verbleibend eine Werthenfolge durchläuft, deren imaginärer Theil nach positiver oder negativer Richtung hin ins Unendliche rückt, so nähert sich t den Werthen -1 oder $+1$; für $z = 0$ ist auch $t = 0$. Die Function

$$(45) \qquad x = x_0 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}$$

vermittelt folglich die conforme Abbildung des Kreisringes X auf den Einheitskreis der t-Ebene, so dass jedem Werthe t innerhalb oder auf der Peripherie des Einheitskreises (mit Ausnahme von $t = \pm 1$) ein wohlbestimmtes Werthepaar r, φ, welches einen Punkt von X darstellt, zugehört und umgekehrt.

Bedeutet nun

$$f(x) = F(t)$$

eine in der Umgebung jeder Stelle von X reguläre Function von x, die aber innerhalb E nicht eindeutig zu sein braucht, die also, wenn x den innerhalb E verlaufenden geschlossenen Umlauf U um $x = 0$ vollzieht, in

$$\Theta f(x) \neq f(x)$$

übergehen kann, so ist $F(t)$ innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene eindeutig und nach positiven ganzen Potenzen von t entwickelbar:

$$(46) \qquad F(t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa t^\varkappa, \qquad |t| < 1,$$

$$c_\varkappa = \frac{1}{\varkappa!}\left(\frac{d^\varkappa F(t)}{dt^\varkappa}\right)_{t=0}.$$

Denken wir uns ein bestimmtes Element der Function $f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ fixirt,

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - x_0) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} f^{(\varkappa)}(x_0)\frac{(x-x_0)^\varkappa}{\varkappa!},$$

$$f^{(\varkappa)}(x) = \frac{d^\varkappa f(x)}{dx^\varkappa},$$

so ist

*) So bezeichnen wir kurz den um $t = 0$ mit dem Radius Eins beschriebenen Kreis.

$$f(x) = \mathfrak{P}\left(x_0\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right]\right)$$

nach positiven ganzen Potenzen von t entwickelbar, und die Coefficienten dieser Entwickelung sind als bekannt anzusehen, wenn die Coefficienten von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ gegeben sind, d. h. wenn man die Werthe von $f(x)$ und seinen successiven Ableitungen für $x = x_0$ kennt; diese Entwickelung muss aber dann nach bekannten analytischen Principien mit (46) übereinstimmen. Setzen wir in (46) für t den sich aus (45) ergebenden Werth

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}$$

ein, so ergiebt sich für $f(x)$ eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa t^\varkappa,$$

die innerhalb X convergent ist. Aus dieser Darstellung kann die Aenderung, die $f(x)$ bei einem Umlaufe U erfährt, unmittelbar abgelesen werden, wenn man beachtet, dass der Umlauf U durch eine Vermehrung des Argumentes φ von x um 2π gegeben wird, so dass also

$$\frac{\Theta t + 1}{\Theta t - 1} = e^{-\frac{\pi^2}{h}} \frac{t + 1}{t - 1}$$

ist. Wenn nun t innerhalb des Einheitskreises liegt, so ist auch

$$|\Theta t| < 1,$$

d. h. die Entwickelung (46) convergirt auch noch für $t = \Theta t$; wir erhalten demnach

$$\Theta f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa (\Theta t)^\varkappa,$$

und ebenso ist, wenn der Umlauf U λ-mal vollzogen wird (λ eine positive oder negative ganze Zahl)

$$\Theta^\lambda f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa (\Theta^\lambda t)^\varkappa.$$

Sei nun $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A), definirt durch seine Anfangswerthe in dem regulären Punkte

$x = x_0$; denken wir uns z. B. diese Anfangswerthe so gewählt, dass für $x = x_0$

$$y_m^{(\varkappa)} = 0, \quad \text{wenn } \varkappa < n \text{ aber } \varkappa \neq n - m,$$
$$y_m^{(n-m)} = 1,$$

dann ist in der Umgebung von $x = x_0$

$$(47) \qquad y_m = \frac{(x - x_0)^{n-m}}{(n-m)!} + \sum_{\varkappa = n}^{\infty} g_{m\varkappa}(x_0)(x - x_0)^{\varkappa}$$
$$(m = 1, 2, \cdots n).$$

Die Coefficienten dieser Reihenentwickelungen bestimmen sich in einfacher Weise, indem man (vergl. Nr. 9, S. 21) mit Hülfe der Differentialgleichung (A) durch wiederholte Differentiation und Elimination

$$\frac{1}{\varkappa!} y^{(\varkappa)} = g_{1\varkappa}(x) y^{(n-1)} + g_{2\varkappa}(x) y^{(n-2)} + \cdots + g_{n\varkappa}(x) y, \qquad \varkappa \geq n,$$

bildet, wo sich die $g_{1\varkappa}(x), \cdots g_{n\varkappa}(x)$ als ganze rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung (A) und deren successiven Ableitungen, dividirt durch gewisse Potenzen von x darstellen, und dann $g_{m\varkappa}(x_0)$ den Werth von $g_{m\varkappa}(x)$ für $x = x_0$ bedeutet. Mit Hülfe der innerhalb E gültigen Reihenentwickelungen (1) (S. 273) der $P_\varkappa(x)$ sind also die $g_{m\varkappa}(x_0)$ in der Form von Reihen darstellbar, die nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x_0 fortschreiten. Setzt man dann in die Entwickelungen (47) für $x - x_0$ den Werth

$$x - x_0 = x_0 \left\{ \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1 \right\}$$

ein und entwickelt nach Potenzen von t, so erscheinen die $y_1, y_2, \cdots y_n$ in der Form von Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen von t fortschreiten und für $|t| < 1$ convergiren. Diese Reihen stellen innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A_0) dar, die aus (A) hervorgeht, indem man an Stelle von x eine neue unabhängige Variable t durch die Gleichung (45) einführt. Bedeutet dann $v_1(t), \cdots v_n(t)$ ein Fundamentalsystem von (A_0), welches durch die Anfangsbedingungen

$$\frac{d^{\varkappa} v_m(t)}{dt^{\varkappa}} = 0, \quad \varkappa < n, \quad \varkappa \neq n - m: \quad \frac{d^{n-m} v_m(t)}{dt^{n-m}} = 1$$

für $t = 0$ definirt ist, so hat man für $|t| < 1$

$$v_m(t) = \frac{t^{n-m}}{(n-m)!} + \sum_{\varkappa = n}^{\infty} \gamma_{m\varkappa}(x_0) t^{\varkappa} \qquad (m = 1, 2, \cdots n)$$

und ferner

$$(48)\qquad y_m = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{m\varkappa} v_\varkappa(t) \qquad (m = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $c_{m\varkappa}$ Constanten bedeuten. Setzen wir

$$\left\{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right\}^q = \left(\frac{4h}{\pi i}t\right)^q \{[h, q]_0 + [h, q]_1 t + \cdots\},$$

wo also $[h, q]_0 = 1$ und

$$[h, q]_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

ein ganzer rationaler Ausdruck ν^{ten} Grades in h und q ist, so folgt durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von t auf beiden Seiten der Gleichungen (48)

$$(49)\qquad c_{m\varkappa} = \frac{(n-\varkappa)!}{(n-m)!}[h, n-m]_{m-\varkappa}\left(\frac{4h}{\pi i}x_0\right)^{n-m}$$
$$(\varkappa, m = 1, 2, \cdots n),$$

wo für negative Werthe von ν

$$[h, q]_\nu = 0$$

zu nehmen ist. Wir finden also

$$c_{m\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad \varkappa > m; \quad c_{mm} = \left(\frac{4h}{\pi i}x_0\right)^{n-m}, \quad m < n,$$

und da auch

$$[h, 0]_\nu = 0$$

ist, so haben wir ferner

$$c_{n\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad \varkappa < n, \quad c_{nn} = 1.$$

Für die Coefficienten $\gamma_{m\varkappa}(x_0)$ ergeben sich die Formeln

$$(50)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{m}\frac{(n-\varkappa)!}{(n-m)!}[h, n-m]_{m-\varkappa}\gamma_{\varkappa, n+\nu}(x_0) = \frac{[h, n-m]_{m+\nu}}{(n-m)!}$$
$$+ \sum_{\varkappa=0}^{\nu}\left(\frac{4h}{\pi i}x_0\right)^{m+\varkappa}[h, n+\varkappa]_\nu g_{m, n+\varkappa}(x_0) \qquad \left(\begin{matrix} m = 1, 2, \cdots n \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots \end{matrix}\right),$$

woraus sich die $\gamma_{m\varkappa}(x_0)$ mit Hülfe der $g_{m\varkappa}(x_0)$ berechnen lassen. Wir erhalten also auch die $\gamma_{m\varkappa}(x_0)$ in Form von Reihen dargestellt, die nach positiven und negativen Potenzen von x_0 fortschreiten. Für die $y_1, \cdots y_m$ ergiebt sich die innerhalb X gültige Darstellung

$$(51)\qquad y_m = \sum_{\nu=1}^{n} c_{m\nu}\left\{\frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!} + \sum_{\lambda=n}^{\infty}\gamma_{\nu\lambda}(x_0)t^\lambda\right\} \qquad (m = 1, 2, \cdots n),$$

worin t, $c_{m\nu}$, $\gamma_{\nu\lambda}(x_0)$ aus den Gleichungen (45), (44), (50) zu entnehmen sind.

89. Berechnung der Coefficienten der Fundamentalgleichung.

Wenn x den Umlauf U vollzieht, so finden wir die Werthänderungen der $y_1, \cdots y_n$, indem wir in (51) das Argument von x um 2π vermehren, d. h. also, indem wir Θt an die Stelle von t setzen. Um nun die zum Umlaufe U gehörige Fundamentalgleichung

$$F(\omega) = 0$$

zu bestimmen, können wir an Stelle des Fundamentalsystems $y_1, \cdots y_n$ das Fundamentalsystem

$$z_m(x) = v_m(t) \qquad (m = 1, 2, \cdots n)$$

betrachten, da ja die Fundamentalgleichung von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig ist. Wenn wir uns gleich den Umlauf U λ-mal vollzogen denken (λ eine positive oder negative ganze Zahl), so haben wir, um die Werthänderung der Integrale $z_m(x)$ zu finden, das Argument φ von x um $2\lambda\pi$ zu vermehren. Dadurch verwandelt sich t in $\Theta^\lambda t$ und es ist

$$\Theta^\lambda z_m(x) = v_m(\Theta^\lambda t).$$

Da wir für den Ausgangswerth $x = x_0$ dem t den Werth Null beigelegt hatten, so ist der Werth von $\Theta^\lambda t$ für $x = x_0$ durch die Formel

$$t_\lambda = \frac{(e^{2\lambda\pi i})^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{(e^{2\lambda\pi i})^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} = \frac{e^{-\frac{\lambda\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\lambda\pi^2}{h}} + 1}$$

gegeben, während allgemein

$$\Theta^\lambda t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}e^{2\lambda\pi i}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}e^{2\lambda\pi i}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}$$

ist. Die Ausdrücke

$$v_m(\Theta^\lambda t) = \Theta^\lambda z_m(x)$$

sind homogene lineare Functionen mit constanten Coefficienten von $v_1(t), \cdots v_n(t)$; sei

$$v_m(\Theta^\lambda t) = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{m\varkappa}^{(\lambda)} v_\varkappa(t) \qquad (m = 1, 2, \cdots n),$$

wo also (vergl. Nr. 31, S. 97)

$$a_{m\varkappa}^{(\lambda)} = \sum_{l=1}^{n} a_{ml}^{(\lambda-1)} a_{l\varkappa}$$

ist, wenn

$$a^{(1)}_{m\varkappa} = a_{m\varkappa}, \quad a^{(0)}_{m\varkappa} = \delta_{m\varkappa} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq \varkappa, \\ 1 & \text{für} \quad m = \varkappa \end{cases}$$

gesetzt wird. Dann ist auch

$$\frac{d^{n-\mu} v_m(\Theta^\lambda t)}{dt^{n-\mu}} = \sum_{\varkappa=1}^{n} a^{(\lambda)}_{m\varkappa} \frac{d^{n-\mu} v_\varkappa(t)}{dt^{n-\mu}}$$

und folglich, gemäss den für die $v_1(t), \cdots v_m(t)$ fixirten Anfangsbedingungen,

$$a^{(\lambda)}_{m\varkappa} = \left\{ \frac{d^{n-\varkappa} v_m(\Theta^\lambda t)}{dt^{n-\varkappa}} \right\}_{t=0}.$$

Da

$$\frac{\Theta^\lambda t + 1}{\Theta^\lambda t - 1} = e^{-\frac{\lambda \pi^2}{h}} \frac{t+1}{t-1},$$

also für $|t| < 1$ auch

$$|\Theta^\lambda t| < 1$$

ist, so ergiebt sich unmittelbar aus den innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene gültigen Entwickelungen der $v_m(t)$ (vergl. S. 317)

$$v_m(\Theta^\lambda t) = \frac{(\Theta^\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!} + \sum_{\mu=n}^{\infty} \gamma_{m\mu}(x_0)(\Theta^\lambda t)^\mu,$$

und folglich haben wir

$$(52) \qquad a^{(\lambda)}_{m\varkappa} = \frac{t^{(\varkappa)}_{n-m,\lambda}}{(n-m)!} + \sum_{\mu=n}^{\infty} \gamma_{m\mu}(x_0)\, t^{(\varkappa)}_{\mu\lambda},$$

wenn

$$\left\{ \frac{d^{n-\varkappa}(\Theta^\lambda t)^\mu}{dt^{n-\varkappa}} \right\}_{t=0} = t^{(\varkappa)}_{\mu\lambda}$$

gesetzt wird. Die $t^{(\varkappa)}_{\mu\lambda}$ lassen sich leicht finden, indem man mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{\tau+1}{\tau-1} = K\frac{t+1}{t-1}$$

die Werthe von

$$\left(\frac{d^{n-\varkappa}(\tau^\mu)}{dt^{n-\varkappa}}\right)_{t=0}$$

durch K darstellt; für

$$K = e^{-\frac{\lambda \pi^2}{h}}$$

liefern diese Ausdrücke dann unmittelbar die Grössen $t^{(\varkappa)}_{\mu\lambda}$. Die Ausdrücke (52) für die $a^{(\lambda)}_{m\varkappa}$ hängen von x_0 ab, nach dessen positiven und negativen ganzen Potenzen sie entwickelt werden können, überdies enthalten dieselben noch die positive Grösse h, die, wenn x_0 beliebig innerhalb E gewählt wird, gewissen Beschränkungen unterliegt. Bezeichnen wir mit

$$A = (a_{m\varkappa}) \qquad (m, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die aus den n^2 Elementen $a_{m\varkappa}$ gebildete lineare Substitution, so ist A nichts anderes als die Substitution, welche das Fundamentalsystem $[z_m(x)]$ der Differentialgleichung (A) erfährt, wenn x den Umlauf U vollzieht, wir haben also

$$[\Theta z_m(x)] = A\,[z_m(x)] \qquad (m = 1, 2, \cdots n).$$

Ferner ist

$$A^\lambda = \left(a_{m\varkappa}^{(\lambda)}\right) \qquad (m, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

und die zum Umlaufe U gehörige Fundamentalgleichung lautet

$$F(\omega) = (-1)^n \left| a_{m\varkappa} - \delta_{m\varkappa}\omega \right| = 0 \qquad (m, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind offenbar von x_0 und h unabhängig; um dieselben zu finden, haben wir also in die Determinante $F(\omega)$ für die $a_{m\varkappa}$ ihre Ausdrücke (52) einzusetzen und dann in der ausgerechneten Form die von x_0 unabhängigen Glieder allein beizubehalten, diese müssen dann schon von selbst auch von h unabhängig sein. Da aber die Glieder jener Determinante Producte der verschiedenen $a_{m\varkappa}$ sind, und die Entwickelungen der $a_{m\varkappa}$ nach Potenzen von x_0 unendlich viele positive und negative Potenzen enthalten, so wäre die Berechnung der Coefficienten der Fundamentalgleichung auf diese Weise geradezu unausführbar. Es ist darum zweckmässiger, das folgende Verfahren einzuschlagen. Die Wurzeln der Gleichung

$$\left| a_{m\varkappa}^{(\lambda)} - \omega\delta_{m\varkappa} \right| = 0 \qquad (m, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sind offenbar nichts anderes als

$$\omega_1^\lambda, \; \omega_2^\lambda, \; \cdots \; \omega_n^\lambda,$$

wenn wie gewöhnlich $\omega_1, \cdots \omega_n$ die Wurzeln der Fundamentalgleichung bedeuten; folglich ist:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^\lambda = a_{11}^{(\lambda)} + a_{22}^{(\lambda)} + \cdots + a_{nn}^{(\lambda)},$$

und da diese Ausdrücke auch von x_0 und h unabhängig sein müssen, so haben wir bei ihrer Berechnung in den Entwickelungen (52) nur die von x_0 unabhängigen Glieder beizubehalten, d. h. die $\gamma_{m\mu}(x_0)$ durch ihre von x_0 unabhängigen Glieder zu ersetzen; diese lassen sich aber aus den Gleichungen (50) unmittelbar bestimmen, wenn die Coefficienten der Entwickelungen (1) bekannt sind. Der Grösse h kann dann noch ein beliebiger Werth beigelegt werden, der z. B. der Beschränkung

$$0 < h < \frac{1}{2} \log \frac{R'^2}{R^2}$$

zu unterliegen hat, wenn wir x_2 als auf der Peripherie des Kreises

$$|x| = R'$$

gelegen, annehmen. Die Coefficienten $J_1, \cdots J_n$ der Fundamentalgleichung setzen sich dann auf bekannte Weise aus den so gefundenen Potenzsummen der Wurzeln zusammen.

An Stelle der Substitution (45) könnten noch viele andere Transformationen gewählt werden, die mit grösserer oder geringerer Einfachheit zum selben Ziele führen würden. Man könnte z. B. bei der Substitution

$$x = x_0 e^z$$

stehen bleiben; wenn es sich in einem gegebenen Falle um die wirkliche Berechnung der Coefficienten der Fundamentalgleichung handelt, so wird man die Auswahl der anzuwendenden Transformation stets der besonderen Natur der vorgelegten Differentialgleichung anzupassen haben.

Fünftes Kapitel.

90. Singuläre Stellen, an denen sich einige Integrale bestimmt verhalten. Fundamentalgleichung und Recursionsformel.

Die in den vorhergehenden Kapiteln angestellten Betrachtungen, deren Anwendung wir in einem der folgenden Abschnitte darzulegen haben werden, bleiben ohne weiteres gültig, wenn entweder der Punkt $x = 0$, den wir als Mittelpunkt des Kreisringes E gewählt hatten, der einzige innerhalb des kleineren Kreises gelegene singuläre Punkt der Differentialgleichung ist, d. h. wenn der Radius R dieses Kreises beliebig klein angenommen werden kann; oder wenn der Punkt $x = \infty$ der einzige ausserhalb des grösseren Kreises befindliche singuläre Punkt ist, d. h. der Radius R' des letzteren beliebig gross genommen werden darf. Diese beiden Fälle, die wir jetzt genauer zu untersuchen haben, lassen sich auch einfacher dahin charakterisiren, dass die Coefficienten der Differentialgleichung in der Umgebung von $x = 0$ beziehungsweise $x = \infty$ eindeutig, aber nicht regulär sind, es kann sogar der betreffende Punkt noch als eine Stelle der Unbestimmtheit für die Coefficienten erscheinen. — Wenn das letztere der Fall ist, so ist es nach den Ergebnissen des vierten Abschnittes von vorneherein ausgeschlossen, dass sich sämmtliche Integrale der Differentialgleichung in dem betrachteten Punkte bestimmt verhalten, da ja, wenn dies einträte, die Coefficienten in der Umgebung dieses Punktes den Charakter rationaler Functionen haben müssten. Es ist aber sehr wohl möglich, dass einige, etwa λ Integrale der Differentialgleichung in einem Punkte bestimmt sind, während dieser Punkt für die Coefficienten eine Stelle der Unbestimmtheit darstellt.

Sei also z. B. der Punkt $x = 0$ so beschaffen, dass in der durch den Kreis

$$|x| = R'$$

dargestellten Umgebung desselben die Coefficienten der Differentialgleichung (A) die Entwickelungen (1) (S. 273) zulassen, wobei es dahingestellt bleiben soll, ob diese Entwickelungen auch unendlich viele negative

Potenzen von x enthalten oder nicht. Mögen ferner genau $\lambda < n$ linear unabhängige Integrale

$$y_1, y_2, \cdots y_\lambda$$

vorhanden sein, die sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten, und seien

$$y_{\lambda+1}, \cdots y_n$$

$n - \lambda$ Integrale, die mit $y_1, \cdots y_\lambda$ zusammengenommen ein Fundamentalsystem von (A) constituiren, so müssen diese in $x = 0$ eine Stelle der Unbestimmtheit besitzen, da sonst mehr wie λ linear unabhängige sich in $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale vorhanden wären. Dann lässt sich also jedes Integral von (A), welches sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhält, als homogene lineare Function der $y_1, \cdots y_\lambda$ darstellen. — Denken wir uns nun das zum Bereiche E, oder, wie wir jetzt sagen können, zum Punkte $x = 0$ gehörige canonische Fundamentalsystem aufgestellt und die $y_1, \cdots y_\lambda$ durch die Elemente desselben ausgedrückt, so ist

$$y_m = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha m} x^{r_\alpha} \{ \varphi_{m\alpha 0}(x) + \varphi_{m\alpha 1}(x) \log x + \cdots + \varphi_{m\alpha \varkappa_\alpha}(x) \log^{\varkappa_\alpha} x \}$$
$$(m = 1, 2, \cdots \lambda),$$

wo die $c_{\alpha m}$, r_α Constanten, die $\varphi_{m\alpha\varkappa}(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen bedeuten. Lassen wir die unabhängige Variable x den Umlauf U um den Punkt $x = 0$ beschreiben, so verwandelt sich y_m in Θy_m, und aus der für y_m gefundenen Form ist sofort ersichtlich, dass sich auch Θy_m im Punkte $x = 0$ bestimmt verhalten muss. Es ist folglich

$$\Theta y_m = \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} a_{m\varkappa} y_\varkappa \qquad (m = 1, 2, \cdots \lambda),$$

wo die $a_{m\varkappa}$ Constanten bedeuten, d. h. die $y_1, \cdots y_\lambda$ verwandeln sich bei dem Umlaufe U in lineare homogene Functionen ihrer selbst. Sie bilden folglich ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung λ^{ter} Ordnung

$$Q(y) = (-x)^\lambda \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_\lambda)}{D(y_1, \cdots y_\lambda)} = 0,$$

deren Coefficienten in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig und überdies, wenn man durch den Coefficienten der höchsten Ableitung dividirt, von der Form (D) (S. 152) sind, da sich die sämmtlichen Integrale in $x = 0$ bestimmt verhalten. Die linke Seite $P(y)$ der Differentialgleichung (A) kann dann in der Form

$$P(y) = RQ(y)$$

dargestellt werden, wo $R(y)$ einen Differentialausdruck $(n-\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in der Umgebung von $x=0$ eindeutigen Coefficienten bedeutet.

Hieraus folgt zunächst, dass, wenn wir uns das zu $x=0$ gehörige canonische Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Q=0$ aufgestellt denken, die λ Elemente dieses Fundamentalsystems auch in dem zum Punkte $x=0$ canonischen Fundamentalsysteme von (A) enthalten sein müssen, d. h. das canonische Fundamentalsystem von (A) enthält genau λ sich bei $x=0$ bestimmt verhaltende Integrale und diese sind für sich in Gruppen und Untergruppen eingetheilt. Besitzt also die Differentialgleichung (A) überhaupt ein sich bei $x=0$ bestimmt verhaltendes Integral, so besitzt sie nothwendig auch eines von der Form

$$x^r\varphi(x), \tag{53}$$

wo r eine Constante, $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x=0$ reguläre Function bedeutet. (Vergl. Nr. 43, S. 150.)

Ferner ist leicht einzusehen, dass die Differentialgleichung

$$R=0$$

lauter sich in $x=0$ unbestimmt verhaltende Integrale besitzen muss. Denn bedeutet η ein Integral dieser Differentialgleichung, so ist nach den Ergebnissen der Nr. 27 (S. 80 ff.) jede Lösung der nicht homogenen Differentialgleichung

$$Q(y)=\eta \tag{54}$$

ein von den $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ linear unabhängiges Integral von (A). Besässe nun $R=0$ ein sich in $x=0$ bestimmt verhaltendes Integral, so müsste diese Differentialgleichung auch durch ein Integral von der Form (53) befriedigt werden können; würde dann für η dieses Integral genommen, so folgte aus dem Satze der Nr. 58 (S. 207), dass sich alle Lösungen von (54) in $x=0$ bestimmt verhalten, es gäbe also noch ein von den $y_1, \cdots y_\lambda$ linear unabhängiges Integral von (A), welches sich in $x=0$ bestimmt verhält, wider die Voraussetzung. Wir können also die folgenden Sätze aussprechen:

Besitzt die Differentialgleichung (A) genau λ linear unabhängige, sich in $x=0$ bestimmt verhaltende Integrale, so lässt sich ihre linke Seite in der Form

$$P=RQ$$

darstellen, wo Q einen Differentialausdruck λ^{ter} Ordnung bedeutet, für den $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist (vergl.

S. 272). Die Differentialgleichung $R=0$ hat kein sich in $x=0$ bestimmt verhaltendes Integral.

Ist umgekehrt die linke Seite von (A) in der Form

$$P = RQ$$

darstellbar, so besitzt (A) nicht weniger sich in $x=0$ bestimmt verhaltende Integrale wie $Q=0$, und nicht mehr wie $R=0$ und $Q=0$ zusammengenommen; besitzt $R=0$ kein sich in $x=0$ bestimmt verhaltendes Integral, so genügen die sämmtlichen so beschaffenen Integrale von (A) der Differentialgleichung $Q=0$. Ist der Punkt $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit für den Differentialausdruck Q, so ist die Anzahl der sich in $x=0$ bestimmt verhaltenden Integrale von (A) genau gleich der Summe der Anzahlen der ebenso beschaffenen Integrale von $Q=0$ und $R=0$. Analoges gilt, wenn P aus mehr als zwei Differentialausdrücken zusammengesetzt ist.

Wenden wir nun die in der Nr. 86 (S. 307 ff.) angestellten Betrachtungen auf den Fall an, wo die Differentialgleichung (A) genau λ linear unabhängige Integrale besitzt, die sich in $x=0$ bestimmt verhalten, und möge $Q=0$ wie oben die Differentialgleichung bedeuten, deren Fundamentalsystem diese λ Integrale $y_1, \cdots y_\lambda$ darstellen. In den Entwickelungen der Coefficienten von $Q=0$ sind, wenn wir die a. a. O. eingeführten Bezeichnungen beibehalten, die

$$\beta_{\varkappa\nu}, \qquad \nu < 0,$$

sämmtlich gleich Null, weil $x=0$ ein Punkt der Bestimmtheit für $Q=0$ sein sollte, also ist auch

$$\varphi_\lambda(\varrho) = 0, \qquad \lambda < 0,$$

und folglich

$$b_{\lambda\mu}(\varrho) = 0, \qquad \lambda < \mu.$$

Die unendliche Determinante

$$\Delta(\varrho) = [\eta_\iota(\varrho) b_{\iota\varkappa}(\varrho)] \qquad (\iota, \varkappa = -\infty, \quad +\infty)$$

reducirt sich also in diesem Falle auf das Product ihrer Diagonalglieder, d. h. es ist

$$\Delta(\varrho) = \prod_{-\infty}^{+\infty} \eta_\iota(\varrho) b_{\iota\iota}(\varrho).$$

Nun ist aber

$$\eta_\nu(\varrho) b_{\nu\nu}(\varrho) = \prod_{\varkappa=1}^{\lambda} \left(1 + \frac{\varrho - \sigma_\varkappa}{\nu}\right) e^{-\frac{\varrho - \sigma_\varkappa}{\nu}}.$$

und

$$\varphi_0(\varrho) = (\varrho - \sigma_1) \cdots (\varrho - \sigma_\lambda) = 0$$

ist offenbar nichts anderes, als die zu $x = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von $Q = 0$; wir haben folglich

$$\Delta(\varrho) = \prod_{\varkappa=1}^{\lambda} \frac{\sin(\varrho - \sigma_\varkappa)\pi}{\pi}$$

und (vergl. Nr. 87, S. 311)

$$D(\varrho) = \mathsf{H}(\varrho) \prod_{\varkappa=1}^{\lambda} \frac{\sin(\varrho - \sigma_\varkappa)\pi}{\pi};$$

dadurch ist zunächst die an sich selbstverständliche Thatsache in Evidenz gesetzt, dass von den n innerhalb eines Periodenstreifens gelegenen Nullstellen von $D(\varrho)$ genau λ mit den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung $Q = 0$ übereinstimmen.

Bedeutet σ_1 eine dieser Wurzeln, zu der ein in Reihenform darstellbares Integral

$$x^{\sigma_1} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathfrak{g}_\varkappa x^\varkappa, \qquad \mathfrak{g}_0 \neq 0,$$

von $Q = 0$ und $P = 0$ gehört, so müssen also die Gleichungssysteme

(55) $$\Phi_\nu(\sigma_1) = 0 \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

und

(56) $$F_\nu(\sigma_1) = 0 \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

befriedigt werden können, indem man setzt:

$$g_{-\nu} = 0, \qquad g_\nu = \mathfrak{g}_\nu.$$

Hieraus ergiebt sich eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung (A) überhaupt ein sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhaltendes Integral besitzt, nämlich die, dass es möglich sei, das Gleichungssystem (56) durch Werthe der g_ν zu befriedigen, die für negative Werthe des Index sämmtlich verschwinden, wenn für σ_1 eine geeignete Nullstelle von $D(\varrho)$ gesetzt wird.

Diese Bedingung ist aber völlig unbrauchbar, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung (A) den Punkt $x = 0$ zur Unbestimmtheitsstelle haben, weil in diesem Falle die Bestimmung dieses geeigneten σ_1 nur dann möglich ist, wenn die Zerlegung der linken Seite von (A) in RQ bereits bekannt ist. Dann ist aber die Frage nach der Existenz eines sich in $x = 0$ bestimmt verhaltenden Integrals schon auf Grund der vorhin bewiesenen Sätze entschieden. Nur in dem Falle, wo die Coefficienten von (A) im Punkte $x = 0$ den Charakter von rationalen Functionen besitzen, ist eine directe Bestimmung der Exponenten σ, zu denen unter Umständen sich bestimmt verhaltende Integrale gehören können, möglich; wir wollen jetzt zur Betrachtung dieses für die Theorie besonders wichtigen Falles übergehen.

91. Stellen, an denen die Coefficienten den Charakter rationaler Functionen haben. Charakteristischer Index. Satz über die determinirende Function.

Wir machen jetzt die Annahme, dass die Coefficienten von (A), wenn man sich dieselben in der Umgebung von $x = 0$ entwickelt denkt, nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von x enthalten. Sei

$$P_\varkappa(x) = \sum_{\nu=-n_\varkappa}^{\infty} a_{\varkappa\nu} x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots (n-1)),$$

also

$$a_{\varkappa\nu} = 0, \quad \text{wenn} \quad \nu < -n_\varkappa,$$

ferner bedeute n_μ die grösste unter den Zahlen

$$n_n = 0, \quad n_{n-1}, \; n_{n-2}, \; \cdots \; n_0,$$

und zwar möge dieselbe für den Index μ zum ersten Male auftreten, so dass also

$$n_\varkappa < n_\mu, \qquad \varkappa > \mu,$$
$$n_\varkappa < n_\mu, \qquad \varkappa < \mu.$$

Multipliciren wir dann die Differentialgleichung (A) mit

$$x^{n_\mu},$$

so enthalten die Entwickelungen der Coefficienten nur positive Potenzen von x, und wenn wir

$$x^{n_\mu} P(y) = P(y),$$
$$x^{n_\mu} P_\varkappa(x) = P_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n)$$

setzen, so ist

$$P_\mu(0) \neq 0.$$

Die Differentialgleichung

$$\text{(E)} \quad P(y) = x^n P_n(x) y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = 0$$

besitzt folglich im Sinne der in der Nr. 44 (S. 154) eingeführten Terminologie bei $x = 0$ die Normalform. Die charakteristische Function derselben ist

$$P(x^\varrho) = x^{n_\mu} P(x^\varrho) = \sum_{\nu=-n_\mu}^{\sigma} f_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu+n_\mu},$$

der Coefficient von x^ϱ

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha_{\varkappa, -n_\mu} \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1),$$

d. h. die determinirende Function ist also eine ganze Function μ^{ten} Grades von ϱ. Die Zahl

$$n - \mu$$

nennt man nach Herrn Thomé den zu $x = 0$ gehörigen **charakteristischen Index** der Differentialgleichung; wenn dieser den Werth Null hat, d. h. wenn $n = \mu$ ist, so ist $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung, denn wegen

$$P_n(x) = 1, \qquad P_n(x) = x^{n_\mu}$$

ist alsdann

$$n_\mu = 0.$$

In diesem Falle ist also

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = f_0(\varrho),$$

und wir haben vollständigen Anschluss an die im vierten Abschnitte gebrauchten Bezeichnungen. Wenn $\mu = 0$, d. h. der charakteristische Index gleich n ist, so ist die determinirende Function

$$f_{-n_0}(\varrho)$$

eine von ϱ unabhängige Constante.

Sei

$$P = RQ,$$

wo Q einen Differentialausdruck λ^{ter} Ordnung bedeutet, dessen Coefficienten in der Umgebung von $x = 0$ ebenfalls den Charakter rationaler Functionen besitzen. Setzen wir Q in die Normalform, was durch Multiplication mit der $\lambda_\alpha^{\text{ten}}$ Potenz von x erreicht werden möge, und bedeute $\lambda - \alpha$ den charakteristischen Index der Differentialgleichung

$$(57) \qquad Q(y) = x^{\lambda_\alpha} Q(y) = 0,$$

so ist, wenn wir im Uebrigen die in der Nr. 86 (S. 308) eingeführte Bezeichnung festhalten,

$$\varphi_\nu(\varrho) = 0, \qquad \nu < \lambda_\alpha,$$

und die determinirende Function

$$\varphi_{-\lambda_\alpha}(\varrho)$$

dieser Differentialgleichung ist eine ganze Function α^{ten} Grades von ϱ. Aus der Bildungsweise des Differentialausdruckes $R(y)$ folgt, dass seine Coefficienten in der Umgebung von $x = 0$ auch den Charakter rationaler Functionen besitzen müssen. Sei

$$n - \lambda - \beta$$

der charakteristische Index von

$$R(y) = 0$$

und $\varkappa_\beta$ die höchste negative Potenz von x, die in der Entwickelung von $R_\beta(x)$ auftritt, dann ist

$$\psi_\nu(\varrho) = 0, \qquad \nu < \varkappa_\beta,$$

und die determinirende Function

$$\psi_{-\varkappa_\beta}(\varrho)$$

von $R(y) = 0$ ist in ϱ vom β^{ten} Grade. Nun ist aber

$$P(x^\varrho) = RQ(x^\varrho) = \sum_{\varkappa=-\lambda_\alpha}^{\infty} \varphi_\varkappa(\varrho) R(x^{\varrho+\varkappa}),$$

folglich haben wir

$$\sum_{\mathfrak{a}=-n_\mu}^{\infty} f_{\mathfrak{a}}(\varrho) x^{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=-\lambda_\alpha}^{\infty} \sum_{\mathfrak{c}=-\varkappa_\beta}^{\infty} \varphi_{\mathfrak{b}}(\varrho) \psi_{\mathfrak{c}}(\varrho + \mathfrak{b}) x^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}},$$

und hieraus folgt durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x

$$(58) \qquad \left| \begin{aligned} n_\mu &= \lambda_\alpha + \varkappa_\beta, \\ f_{-n_\mu}(\varrho) &= \varphi_{-\lambda_\alpha}(\varrho) \cdot \psi_{-n_\mu+\lambda_\alpha}(\varrho - \lambda_\alpha), \\ \mu &= \alpha + \beta. \end{aligned} \right.$$

92. Sätze über Differentialgleichungen, die einige sich an einer singulären Stelle bestimmt verhaltende Integrale besitzen.

Besitzt die Differentialgleichung (A) genau λ linear unabhängige sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$, so können wir die Differentialgleichung (57) als diejenige annehmen, der diese λ Integrale genügen; dann ist, wie im allgemeinen Falle (Nr. 90, S. 326 ff.), $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit für diese Differentialgleichung und folglich

$$\alpha = \lambda, \qquad \lambda_\alpha = 0,$$

also ist ferner

$$\varphi_0(\varrho) = (\varrho - \sigma_1) \cdots (\varrho - \sigma_\lambda)$$

die determinirende Function, und demnach zufolge der Gleichungen (58)

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = \varphi_0(\varrho)\psi_{-n_{\bar{\mu}}}(\varrho).$$

D. h. die Exponenten $\sigma_1, \cdots \sigma_\lambda$, zu denen die sich bestimmt verhaltenden Integrale der Differentialgleichung (A) gehören, sind Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichung

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = 0$$

von (A), und zwar absorbiren sie genau so viele Wurzeln dieser Gleichung, als ihre Anzahl λ beträgt. Hieraus fliessen die folgenden Sätze:

Eine Differentialgleichung (A), deren Coefficienten in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben, besitzt höchstens so viele linear unabhängige Integrale, die sich in $x = 0$ bestimmt verhalten, als der Grad ihrer determinirenden Function anzeigt. Ist die Anzahl dieser Integrale genau gleich dem Grade der determinirenden Function, und stellt man die linke Seite $P(y)$ von (A) in der Form

$$P = RQ$$

dar, wo Q durch die sämmtlichen sich bestimmt verhaltenden Integrale von (A) annullirt wird, so besitzt die Gleichung

$$R = 0$$

kein sich bestimmt verhaltendes Integral, denn ihre determinirende Function ist eine von ϱ unabhängige Constante.

Umgekehrt, wenn die determinirende Function von (A) vom λ^{ten} Grade ist, und $P(y)$ sich in der Form

$$P = RQ$$

darstellen lässt, wo Q von λ^{ter} Ordnung und die determinirende Function von R eine Constante ist, so hat die Gleichung $Q = 0$ den Punkt $x = 0$ zur Stelle der Bestimmtheit und besitzt also λ in $x = 0$ bestimmte Integrale, die dann sämmtlich auch der Differentialgleichung (A) genügen.

Dieser letztere Satz lässt sich auf eine elegante Form bringen, wenn man die adjungirte Differentialgleichung

$$\text{(A}'\text{)} \qquad P'(z) = 0$$

von (A) mit heranzieht. Aus der oben (S. 312) abgeleiteten Gleichung

$$f_\nu(-\varrho - \nu - 1) = (-1)^n f'_\nu(\varrho) \qquad (\nu = -\infty, \cdots + \infty)$$

folgt nämlich zunächst, dass auch die Coefficienten von (A′) in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen besitzen, und dass der charakteristische Index von (A′) mit dem von (A) übereinstimmt (was übrigens auch direct aus der Form der adjungirten Differentialgleichung abgelesen werden kann). Hat also die Differentialgleichung (A) lauter sich bei $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale, d. h. ist der charakteristische Index gleich Null, so gilt dasselbe auch für die adjungirte Differentialgleichung, und die Wurzeln ϱ, ϱ' der beiderseitigen determinirenden Fundamentalgleichungen stehen in der Beziehung

$$\varrho = -\varrho' - 1.$$

Wenn

$$P = RQ$$

ist, und R', Q' bedeuten die zu R, Q adjungirten Differentialausdrücke, so ist nach dem Reciprocitätssatze der Herren Thomé und Frobenius (Nr. 21, S. 59)

$$P' = Q'R';$$

damit also die Differentialgleichung (A), deren determinirende Function vom λ^{ten} Grade ist, genau λ sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhaltende Integrale besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass die adjungirte Differentialgleichung (A') mit einer Differentialgleichung $(n - \lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren determinirende Function eine Constante ist, alle Integrale gemein hat.

Wenn die determinirende Function von (A) eine Constante ist, so kann diese Differentialgleichung kein sich in $x = 0$ bestimmt verhaltendes Integral besitzen. Ist die determinirende Function vom Grade $\mu > 0$, und

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = (\varrho - \sigma_1) \cdots (\varrho - \sigma_\mu),$$

so hat man, um zu entscheiden, ob zu einer bestimmten der Grössen $\sigma_\varkappa$ ein sich bestimmt verhaltendes Integral von (A) existirt, folgendermassen zu verfahren. Sei σ_i die in ihrem realen Theile grösste unter denjenigen der Zahlen $\sigma_1, \cdots \sigma_\mu$, die sich von $\sigma_\varkappa$ um ganze Zahlen unterscheiden, dann muss, wenn zu $\sigma_\varkappa$ überhaupt ein sich bestimmt verhaltendes Integral gehören soll, zu σ_i ein in der Form

$$x^{\sigma_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{g}_\nu x^\nu, \qquad \mathfrak{g}_0 \neq 0,$$

darstellbares Integral gehören. Die Recursionsformel

$$F_\nu(\varrho) = 0 \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

hat die Gestalt

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{n\mu+\nu} f_{\nu-\lambda}(\varrho + \lambda) g_\lambda = 0 \qquad (\nu = -\infty, \cdots + \infty);$$

soll also ein, abgesehen vom Factor x^ϱ, nur nach positiven x-Potenzen entwickelbares Integral existiren, so müssen die Coefficienten $\mathfrak{g}_\lambda$ der Entwickelung die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=0}^{n_\mu+\nu} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)\mathfrak{g}_\lambda = 0 \qquad (\nu = -n_\mu, \cdots \infty) \tag{59}$$

erfüllen. Wir finden also zunächst eine Bestätigung des schon früher erlangten Resultates, dass, wenn $\mathfrak{g}_0 \neq 0$ sein soll, ϱ der Gleichung

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = 0$$

genügen muss. Für $\varrho = \sigma_i$ ist zufolge der getroffenen Wahl dieser Wurzel

$$f_{-n_\mu}(\sigma_i + n_\mu + \nu) \neq 0, \qquad \nu > -n_\mu,$$

die Gleichungen (59) liefern also jedenfalls wohlbestimmte Werthe für die $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots$, wenn wir dem $\mathfrak{g}_0$ einen willkürlich gewählten von Null verschiedenen Werth beilegen. Die so gebildete Reihe

$$x^{\sigma_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{g}_\nu x^\nu$$

stellt ein Integral von (A) dar, wenn sie convergirt; dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn sich aus den Gleichungen

$$F_\nu(\sigma_i) = 0 \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

für die sämmtlichen

$$g_{-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

der Werth Null ergiebt, sofern

$$g_\nu = \mathfrak{g}_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \cdots \infty)$$

gesetzt wird; da aber

$$\sum_{\lambda=0}^{n_\mu+\nu} f_{\nu-\lambda}(\sigma_i+\lambda)\mathfrak{g}_\lambda = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots \infty)$$

ist, so heisst dies, es müssen die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} f_{\lambda-\nu}(\sigma_i - \lambda) g_{-\lambda} = 0 \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

mit Nothwendigkeit das Verschwinden der sämmtlichen $g_{-\lambda}$ erfordern. Dies ist eine mit Hülfe von unendlichen Determinanten leicht aufzustellende Bedingung. Ist dieselbe erfüllt, so haben wir also in

$$y_1 = x^{\sigma_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{g}_\nu x^\nu$$

ein sich im Punkte $x = 0$ bestimmt verhaltendes Integral.

Man kann nun, wenn $\mu > 1$ ist, in der Differentialgleichung (A) die Substitution

$$y = y_1 \int z\, dz$$

machen, wodurch für z eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entsteht, deren Coefficienten in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter rationaler Functionen haben und deren determinirende Function (vergl. Nr. 56, S. 198) durch den Ausdruck

$$\frac{f_{-n_\mu}(\varrho + \sigma_i + 1)}{\varrho + 1}$$

dargestellt wird. Besitzt die Differentialgleichung (A) noch ein von y_1 linear unabhängiges, sich bestimmt verhaltendes Integral y_2, so muss die Differentialgleichung in z durch eine Reihe von der Form

$$x^{\sigma_\varkappa - \sigma_i - 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{h}_\nu x^\nu, \qquad \mathfrak{h}_0 \neq 0.$$

befriedigt werden können, wo $\sigma_\varkappa$ eine Wurzel von

$$f_{-n_\mu}(\varrho) = 0$$

bedeutet. Ob dies der Fall ist, lässt sich nach der eben erörterten Methode entscheiden; fällt die Entscheidung im bejahenden Sinne aus, so setzt man wieder

$$z = y_2 \int t\, dx$$

und fährt auf diese Weise fort, bis man zu einer Differentialgleichung

$$R = 0$$

gelangt, die kein sich bestimmt verhaltendes Integral besitzt. Ist diese Differentialgleichung von der Ordnung $n - \lambda$, so hat (A) genau λ linear unabhängige Integrale, die sich in $x = 0$ bestimmt verhalten, und wenn

$$Q = 0$$

die Differentialgleichung λ^{ter} Ordnung bedeutet, der diese λ Integrale genügen, so ist:

$$P = RQ.$$

93. Differentialgleichungen mit $n-1$ sich bestimmt verhaltenden Integralen. Allgemeine Bemerkungen.

Soll die Differentialgleichung genau $n-1$ linear unabhängige sich bestimmt verhaltende Integrale besitzen, so muss

$$\mu = n - 1$$

sein, denn wäre $\mu = n$, so wäre $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit für (A), es gäbe also n linear unabhängige sich bestimmt verhaltende Integrale; also lässt sich in diesem Falle die linke Seite von (A) in die Form setzen

$$P = RQ,$$

wo Q einen Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem charakteristischen Index Null, R einen Differentialausdruck erster Ordnung, der durch kein sich bestimmt verhaltendes Integral befriedigt wird, bedeutet. Denken wir uns R in der Normalform geschrieben, so ist:

$$R = vx\frac{dy}{dx} + uy,$$

wo u, v nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelbare Functionen bedeuten, die für $x = 0$ nicht gleichzeitig verschwinden. Wäre v für $x = 0$ von Null verschieden, so verhielte sich das allgemeine Integral

$$y = e^{-\int \frac{u\,dx}{vx}}$$

der Differentialgleichung $R = 0$ in $x = 0$ bestimmt, es muss also v für $x = 0$ verschwinden. Sei

$$v = x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \qquad a_0 \neq 0,$$

dann ist

$$(60) \qquad y = e^{c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_m}{x^m}} x^r \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu.$$

Die adjungirte Differentialgleichung (A′) lautet

$$(\text{A}') \qquad P'(z) = Q'R' = 0;$$

Q' hat in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, während

$$R'(z) = \frac{d}{dx}(xvz) - uz$$

ist. Das zu (60) adjungirte Integral lautet daher

$$z = \frac{C}{vxy},$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet, es hat also dieselbe Form, wie das Integral y selbst, und dieses Integral z genügt offenbar auch der Differentialgleichung (A'). Wir können demnach sagen:

Damit eine Differentialgleichung (A), deren charakteristischer Index gleich Eins ist, genau $n-1$ linear unabhängige sich bestimmt verhaltende Integrale besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass die adjungirte Differentialgleichung ein Integral von der Form (60) hat.

Analoge Betrachtungen wie die, welche wir hier für den Punkt $x = 0$ angestellt haben, können auch für den unendlich fernen Punkt $x = \infty$ durchgeführt werden; man kann dann ferner den Fall, wo die Coefficienten der Differentialgleichung (A) rationale Functionen von x sind, in Betracht ziehen, und wenn dieselbe nicht der Fuchs'schen Classe angehört, die Aufgabe erörtern, diejenigen Fälle anzugeben, wo die Differentialgleichung einige Integrale besitzt, die sich entweder allenthalben, oder in der Umgebung gewisser singulärer Punkte bestimmt verhalten. Diese Aufgabe hat Herr Thomé in einer Reihe von Abhandlungen behandelt, wir begnügen uns damit, an dieser Stelle auf dieselben hinzuweisen und bemerken nur, dass die dabei anzuwendenden Methoden im wesentlichen dieselben sind, wie die, welche im Vorhergehenden dargelegt worden sind. Herr Thomé hat aber auch diejenigen Integrale der linearen Differentialgleichungen, die sich nicht überall bestimmt verhalten, in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle untersucht, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung in dieser Umgebung den Charakter von rationalen Functionen besitzen. Diese Untersuchungen sind dann auch durch Herrn Poincaré weitergeführt worden, und wir wollen nun dazu übergehen, die dabei in Anwendung gebrachten Methoden vorzuführen. Es soll uns hierbei der Punkt $x = \infty$ als Paradigma dienen, da für denselben die Darstellung am übersichtlichsten wird, und ja durch eine einfache Transformation der unabhängigen Variabeln die Untersuchung eines beliebigen im Endlichen gelegenen Punktes leicht auf die des unendlich fernen Punktes zurückgeführt werden kann.

Sechstes Kapitel.

94. Untersuchung einer Differentialgleichung in der Umgebung des unendlich fernen Punktes. Rang.

Seien die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad P(y) = x^n y^{(n)} + P_{n-1}(x) x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = 0$$

in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ so entwickelbar, dass

$$\text{(1)} \qquad P_\varkappa(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{n_\varkappa} \alpha_{\varkappa,\nu} x^\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

ist, und sei n_μ so beschaffen, dass in der Reihe der Zahlen

$$n_{n-1}, \; n_{n-2}, \; \cdots \; n_0$$

die Ungleichungen

$$n_\mu > n_\varkappa, \quad \varkappa > \mu,$$
$$n_\mu \geqq n_\varkappa, \quad \varkappa < \mu$$

stattfinden; dann wollen wir auch hier die Zahl

$$n - \mu$$

den zu $x = \infty$ gehörigen charakteristischen Index und

$$f_{n_\mu}(\varrho) = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha_{\varkappa, n_\mu} \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1)$$

die determinirende Function nennen. (Eigentlich wäre in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen der Nr. 59 (S. 211) $f_{n_\mu}(-\varrho)$ als determinirende Function zu erklären, diese geringfügige Abweichung wird aber zu keinerlei Unklarheit Anlass geben.)

Wenn

$$n - \mu = 0$$

ist, so hat man $n_\mu = 0$, also ist die determinirende Function

$$f_0(\varrho)$$

vom n^{ten} Grade; wir haben dann den Fall, wo $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, und es gehören zu den n Wurzeln der Gleichung

$$f_0(-\varrho) = 0$$

als Exponenten die n sich in $x = \infty$ bestimmt verhaltenden canonischen Integrale. Wenn

$$n - \mu > 0$$

ist, so kann es höchstens μ sich im Punkte $x = \infty$ bestimmt verhaltende Integrale geben, die dann zu ebensovielen Wurzeln der Gleichung

$$f_{n_\mu}(-\varrho) = 0$$

als Exponenten gehören.

Wir wollen, um unnöthige Complicationen zu vermeiden, annehmen, es sei

$$n - \mu = n - 1;$$

dann ist also die determinirende Function

$$f_{n_1}(\varrho) = \alpha_{1,\,n_1}\varrho + \alpha_{0,\,n_1} \tag{2}$$

vom ersten Grade, und wenn ein sich in $x = \infty$ bestimmt verhaltendes Integral existirt, so ist dasselbe in der Form

$$x^r \sum_{\nu=-\infty}^{0} g_\nu x^\nu, \qquad g_0 \neq 0, \tag{3}$$

darstellbar, wo

$$r = -\frac{\alpha_{0,\,n_1}}{\alpha_{1,\,n_1}} \tag{4}$$

gesetzt wurde, und die g_ν den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{-\lambda} f_{\nu+\lambda}(\varrho - \lambda) = 0 \qquad (\nu = n_1,\ n_1 - 1, \cdots -\infty) \tag{5}$$

gemäss zu bestimmen sind; hierin ist g_0 noch völlig willkürlich. Berechnen wir die $g_{-1}, g_{-2}, \cdots$ aus den Gleichungen (5), indem wir $\varrho = r$ setzen und bilden dann die Reihe (3), so stellt dieselbe, falls sie convergirt, ein Integral von (A) dar; die Bedingungen für die Convergenz ergeben sich ebenso wie bei der Betrachtung des Punktes $x = 0$ in der Form, dass gewisse unendliche Determinanten verschwinden müssen.

Wenn der charakteristische Index gleich n, d. h.

$$n_0 > n_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n - 1)$$

ist, so kann die Differentialgleichung (A) kein sich im Punkte $x = \infty$ bestimmt verhaltendes Integral besitzen, weil sich die determinirende Function auf eine von ϱ unabhängige Constante reducirt; dieser Fall ist es, mit dem wir uns jetzt ausführlicher zu beschäftigen haben.

Nehmen wir allgemein an, es sei

$$P_{n-\lambda}(x) = x^{\lambda(\varkappa+1)} \mathfrak{P}_{n-\lambda}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\mathfrak{P}_{n-\lambda}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $x = \infty$ verschwindet; dann können wir setzen

$$x^{n-\lambda} P_{n-\lambda}(x) = x^n \left(\varphi_{\lambda\varkappa}(x) + Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\varphi_{\lambda\varkappa}(x)$ eine ganze rationale Function von x bedeutet, deren Grad nicht grösser ist als $\lambda\varkappa$, und $Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine Reihe von der Form

$$Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{n-\lambda,\nu}}{x^\nu} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

darstellt, die in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ convergirt. Dann erhält nach Division mit x^n die Differentialgleichung (A) die Gestalt

$$\text{(A)} \quad y^{(n)} + \left(\varphi_\varkappa(x) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) y^{(n-1)} + \cdots + \left(\varphi_{n\varkappa}(x) + Q_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) y = 0,$$

und es ist im Allgemeinen

$$n_{n-\lambda} = \lambda\varkappa + \lambda,$$

also die determinirende Function

$$f_{n\varkappa+n}(\varrho) = \mathfrak{P}_0(\infty) = \text{const.}$$

Wir sagen in diesem Falle, die Gleichung (A) sei vom *Range* $\varkappa + 1$.

95. Integration einer besonderen Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung eine ganze transcendente Function ist. Charakteristische Gleichung.

Bezeichnen wir den Coefficienten der $\lambda\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz von x in der ganzen Function $\varphi_{\lambda\varkappa}(x)$ durch $A_{n-\lambda}$, so dass also

$$\text{(6)} \qquad \varphi_{\lambda\varkappa}(x) = A_{n-\lambda} x^{\lambda\varkappa} + \cdots$$

ist, und betrachten wir die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}) \qquad z^{(n)} + \varphi_\varkappa(x) z^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n\varkappa}(x) z = 0,$$

deren Coefficienten aus denen der Differentialgleichung (A) hervorgehen, wenn wir in den letzteren die mit $\frac{1}{x}$ verschwindenden Terme weglassen. Der einzige singuläre Punkt dieser Differentialgleichung ist $x = \infty$, das allgemeine Integral von ($\mathfrak{A}$) ist folglich in der Form

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i x^i \tag{7}$$

darstellbar, wo $\delta_0, \delta_1, \cdots \delta_{n-1}$ willkürliche Constanten bedeuten, und die folgenden δ_i mittelst der zu $x = 0$ gehörigen Recursionsformel bestimmt werden. Diese Reihe convergirt dann zufolge des Existenztheorems (Nr. 9, S. 25) für alle endlichen Werthe von x, d. h. sie ist beständig convergent.

Setzen wir

$$z = e^{\int v\,dx}, \quad v = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx},$$

so ist

$$v = \frac{i}{x} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \cdots, \tag{8}$$

wo i den Index des ersten nicht verschwindenden Coefficienten δ der Reihe (7) bedeutet. Sei

$$\frac{d^r z}{dx^r} = z(v^r + D_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

so ist

$$\frac{d^{r+1} z}{dx^{r+1}} = z\left(v^{r+1} + vD_r + rv^{r-1}\frac{dv}{dx} + \frac{dD_r}{dx}\right),$$

also

$$D_{r+1} = rv^{r-1}\frac{dv}{dx} + vD_r + \frac{dD_r}{dx} \tag{10}$$

und

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{dv}{dx}.$$

Setzt man die Werthe (9) in die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) ein, so ergiebt sich

$$v^n + \varphi_\varkappa v^{n-1} + \cdots + \varphi_{n\varkappa} + D_n + \varphi_\varkappa D_{n-1} + \cdots + \varphi_{(n-2)\varkappa}\frac{dv}{dx} = 0$$

oder nach Division durch $x^{n\varkappa}$

$$\frac{v^n}{x^{n\varkappa}} + \left(A_{n-1} + \left[\frac{1}{x}\right]_{n-1}\right)\frac{v^{n-1}}{x^{(n-1)\varkappa}} + \cdots + A_0 + \left[\frac{1}{x}\right]_0 \tag{11}$$

$$+ \frac{D_n}{x^{n\varkappa}} + \left(A_{n-1} + \left[\frac{1}{x}\right]_{n-1}\right)\frac{D_{n-1}}{x^{(n-1)\varkappa}} + \cdots + \left(A_2 + \left[\frac{1}{x}\right]_2\right)\frac{\frac{dv}{dx}}{x^2} = 0,$$

wo das Zeichen $\left[\frac{1}{x}\right]_\lambda$ ein Aggregat von Gliedern andeutet, die für $x = \infty$ verschwinden. Hieraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{v}{x^\varkappa}$$

ein bestimmter endlicher Werth ist, wenn z ein particuläres Integral der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) darstellt. In der That sei

$$v = x^\varkappa w, \quad \frac{1}{x} = \xi,$$

wo w eine Function bedeutet, die in der Form

$$w = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \cdots$$

entwickelbar ist. Dann ergiebt sich aus den Gleichungen (10)

$$D_r = x^{(r-1)\varkappa - 1} w_r,$$

wo

$$w_r = c_0^{(r)} + c_1^{(r)}\xi + \cdots$$

ist, und die $c_\lambda^{(r)}$ aus den c_λ ganz und rational mit numerischen Coefficienten zusammengesetzt sind.

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (11) ein, so erhalten wir

$$(12) \quad \begin{aligned} & w^n + (A_{n-1} + [\xi]_{n-1})w^{n-1} + \cdots + A_0 + [\xi]_0 \\ & + \xi^{\varkappa+1}\{w_n + (A_{n-1} + [\xi]_{n-1})w_{n-1} + \cdots + (A_2 + [\xi]_2)w_2\} = 0, \end{aligned}$$

und somit für $\xi = 0$

$$(13) \qquad c_0^n + A_{n-1}c_0^{n-1} + \cdots + A_0 = 0.$$

Es ergiebt sich also

$$c_0 = \lim_{x=\infty} \frac{v}{x^\varkappa}$$

als Wurzel einer algebraischen Gleichung, d. h. als endlicher wohlbestimmter Werth.

Wenn in der Entwickelung (7)

$$\delta_0 \neq 0,$$

so ist v nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelbar, und folglich w eine ganze rationale Function von höchstens $\varkappa^{\text{tem}}$ Grade in ξ. Nehmen wir nun an, es seien die Wurzeln der Gleichung (13) sämmtlich von einander verschieden, dann erhalten wir also für c_0 die n Werthe

$$c_{0,1}, \; c_{0,2}, \; \cdots \; c_{0,n}.$$

Differentiiren wir die Gleichung (12) $\varkappa$-mal nach ξ und setzen in den so entstehenden Gleichungen $\xi = 0$ und

$$c_0 = c_{0,\lambda},$$

so ergeben sich für die Werthe der Ableitungen

$$\frac{dw}{d\xi}, \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \cdots \frac{d^\varkappa w}{d\xi^\varkappa}$$

im Punkte $\xi = 0$, d. h. für die Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_\varkappa$ der ganzen rationalen Function

$$w = c_0 + c_1 \xi + \cdots + c_\varkappa \xi^\varkappa$$

wohlbestimmte endliche Werthe

$$c_{1,\lambda}, c_{2,\lambda}, \cdots c_{\varkappa,\lambda};$$

d. h. mit anderen Worten: berechnen wir die $\varkappa + 1$ ersten Coefficienten in den Entwickelungen der n verschiedenen Zweige der durch die Gleichung

$$w^n + \psi_{n-1}(\xi) w^{n-1} + \cdots + \psi_0 = 0$$

definirten algebraischen Function w von ξ, wo

$$\psi_{n-\lambda}(\xi) = A_{n-\lambda} + [\xi]_{n-\lambda} = \frac{\varphi_{\lambda \varkappa}}{x^{\lambda \varkappa}}$$

gesetzt wird, so sind diese nichts anderes als die Werthsysteme

$$c_{0,\lambda}, c_{1,\lambda}, \cdots c_{\varkappa,\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

und die Ausdrücke

$$w_\lambda = \sum_{i=0}^{\varkappa} c_{i,\lambda} \frac{1}{x^i} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

befriedigen dann die Differentialgleichung (12). Die Ausdrücke

$$z_\lambda = e^{\int v_\lambda dx},$$

wo

$$v_\lambda = c_{0,\lambda} x^\varkappa + c_{1,\lambda} x^{\varkappa - 1} + \cdots + c_{\varkappa,\lambda}$$

ist, d. h. also die Ausdrücke

$$z_\lambda = e^{\frac{c_{0,\lambda}}{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} + \frac{c_{1,\lambda}}{\varkappa} x^\varkappa + \cdots + c_{\varkappa,\lambda} x + c_{\varkappa+1,\lambda}}, \tag{14}$$

wo $c_{\varkappa+1,\lambda}$ eine willkürliche Constante bedeutet, stellen n particuläre Integrale der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) dar, und es ist leicht einzusehen, dass dieselben ein Fundamentalsystem bilden. Für $\varkappa = 0$ ist ($\mathfrak{A}$) eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten, (13) ihre charakteristische Gleichung, in diesem Falle stimmt das eben gefundene Resultat mit dem Ergebnisse der Nr. 69 (S. 245) überein.

Falls die Gleichung (13), die wir auch im allgemeinen Falle $\varkappa > 0$ die **charakteristische Gleichung** nennen wollen, mehrfache Wurzeln besitzt, so versagt die eben angewandte Methode zur Herstellung eines Fundamentalsystems von ($\mathfrak{A}$); man kann dann z. B. die Substitution

$$z = e^{\frac{c}{\varkappa+1}x^{\varkappa+1}}t$$

machen, und durch ein dem in der Nr. 69 für die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten bez. die Differentialgleichung (I) (S. 243) angewandten analoges Verfahren ein Fundamentalsystem gewinnen. Wir wollen im Folgenden, um Erschwerungen zu vermeiden, die das Wesen der Sache nicht treffen, voraussetzen, dass die Gleichung (13) n von einander verschiedene Wurzeln hat, so dass also die Ausdrücke (14) ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) darstellen.

96. Normalreihen und Normalintegrale. Fundamentale determinirende Factoren.

Machen wir nun in der Differentialgleichung (A) die Substitution

$$y = z_\lambda u$$

und setzen

$$\frac{1}{z_\lambda}\frac{d^r z_\lambda}{dx^r} = v_\lambda^r + D_{\lambda, r},$$

so ist v_λ^r eine ganze Function $r\varkappa^{\text{ten}}$, $D_{\lambda, r}$ eine solche $(r-1\ \varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grades von x; die Differentialgleichung für u erhält also die Form

$$(15)\quad \begin{aligned} & u^{(n)} + (nv_\lambda + \varphi_\varkappa + Q_{n-1})u^{(n-1)} + \cdots \\ & + u^{(n-r)}\{n_r(v_\lambda^r + D_{\lambda, r}) + (n-1)_{r-1}(\varphi_\varkappa + Q_{n-1})(v_\lambda^{r-1} + D_{\lambda, r-1}) \\ & \qquad\qquad + \cdots + \varphi_{r\varkappa} + Q_{n-r}\} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u'\{n(v_\lambda^{n-1} + D_{\lambda, n-1}) + (n-1)(\varphi_\varkappa + Q_{n-1})(v_\lambda^{n-2} + D_{\lambda, n-2}) \\ & \qquad\qquad + \cdots + \varphi_{(n-1)\varkappa} + Q_1\} \\ & + u\{Q_{n-1}(v_\lambda^{n-1} + D_{\lambda, n-1}) + Q_{n-2}(v_\lambda^{n-2} + D_{\lambda, n-2}) \\ & \qquad\qquad + \cdots + Q_0\} = 0 \end{aligned}$$

oder, wenn wir nach Multiplication mit x^n in jedem Coefficienten das Glied mit der höchsten positiven x-Potenz hervortreten lassen,

$$
\begin{aligned}
& x^n u^{(n)} + x^{n-1} u^{(n-1)} \{ x^{\varkappa+1} (n c_{0,\lambda} + A_{n-1}) + \cdots \} + \cdots \\
& + x^{n-r} u^{(n-r)} \{ x^{r(\varkappa+1)} (n_r c_{0,\lambda}^r + (n-1)_{r-1} A_{n-1} c_{0,\lambda}^{r-1} + \cdots + A_{n-r}) + \cdots \} \\
& + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + x u' \{ x^{(n-1)(\varkappa+1)} (n c_{0,\lambda}^{n-1} + (n-1) A_{n-1} c_{0,\lambda}^{n-2} + \cdots + A_1) + \cdots \} \\
& + u \{ x^{(n-1)(\varkappa+1)} b_{n-1,1} c_{0,\lambda}^{n-1} + \cdots \} = 0.
\end{aligned}
$$

Da $c_{0,\lambda}$ zufolge der gemachten Voraussetzung eine einfache Wurzel der Gleichung (13) ist, so kann die Ableitung der linken Seite von (13) nach c_0 für $c_0 = c_{0,\lambda}$ nicht verschwinden: der charakteristische Index der Differentialgleichung für u ist also gleich $n-1$, und die determinirende Function lautet

$$\left(n c_{0,\lambda}^{n-1} + (n-1) A_{n-1} c_{0,\lambda}^{n-2} + \cdots + A_1\right) \varrho + b_{n-1,1} c_{0,\lambda}^{n-1},$$

wenn $\varkappa > 0$ ist, dagegen lautet dieselbe für $\varkappa = 0$

$$\left(n c_{0,\lambda}^{n-1} + (n-1) A_{n-1} c_{0,\lambda}^{n-2} + \cdots + A_1\right) \varrho + b_{n-1,1} c_{0,\lambda}^{n-1} + \cdots + b_{0,1}.$$

Bezeichnen wir den Nullwerth dieser determinirenden Function durch r_λ, so lässt sich eine die Differentialgleichung (15) formal befriedigende Reihe

$$x^{r_\lambda} \sum_{\nu=-\infty}^{0} \mathfrak{g}_{\lambda,\nu} x^\nu, \quad \mathfrak{g}_{\lambda,0} \neq 0, \tag{16}$$

aufstellen, die zum Exponenten r_λ gehört, und falls sie convergent ist, ein Integral von (15) repräsentirt. Entsprechend erhalten wir also einen die Differentialgleichung (A) formell befriedigenden Ausdruck

$$y_\lambda = z_\lambda x^{r_\lambda} \sum_{\nu=-\infty}^{0} \mathfrak{g}_{\lambda,\nu} x^\nu, \tag{17}$$

der, falls die Reihe (16) convergirt, ein Integral von (A) darstellt. Ein solches Integral soll nach Herrn Thomé als ein Normalintegral bezeichnet werden: die Bedingungen für die Existenz eines solchen ergeben sich nach den vorhin (Nr. 95, S. 338) auseinandergesetzten Methoden unmittelbar, wenn man z_λ kennt: den Ausdruck z_λ nennt Herr Thomé einen fundamentalen determinirenden Factor. Allgemein soll der Ausdruck (17), auch wenn die Reihe (16) nicht convergirt, eine Normalreihe genannt werden; wir erhalten also, falls die Gleichung (13) n von einander verschiedene Wurzeln besitzt, n Normalreihen, entsprechend den durch die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) bestimmten n fundamentalen determinirenden Factoren. Falls die n Reihen (16) für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ sämmtlich convergiren, so stellen die Ausdrücke (17) n Normalintegrale von (A) dar, und diese bilden, wie leicht einzusehen ist, ein Fundamentalsystem. Man kann sich von der analytischen Bedeutung des Vorhandenseins eines Normalintegrals in sehr anschaulicher Weise Rechenschaft geben, wenn man das Verhalten der logarithmischen Ableitung eines solchen Integrals etwas genauer untersucht.

Nehmen wir nämlich an, die Reihe (16) sei convergent, so dass also der Ausdruck (17) ein Normalintegral darstellt und bilden wir die logarithmische Ableitung dieses Ausdruckes:

$$Y_\lambda = \frac{1}{y_\lambda}\frac{dy_\lambda}{dx} = c_{0,\lambda}x^\varkappa + c_{1,\lambda}x^{\varkappa-1} + \cdots + c_{\varkappa,\lambda} + \frac{r_\lambda}{x} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{x^\nu},$$

wo

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{x^\nu} = \frac{d}{dx}\left(\log\sum_{\nu=-\infty}^{0}\mathfrak{g}_{\lambda,\nu}x^\nu\right)$$

gesetzt wurde, so erkennen wir, dass Y_λ in der Umgebung von $x=\infty$ nach ganzen Potenzen von x entwickelbar ist. Diese Function ist also jedenfalls so beschaffen, dass sie sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle, die innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{x^\nu}$$

liegt, regulär verhält.

Betrachten wir andererseits allgemein ein Integral y, welches sich bei einem Umlaufe um $x=\infty$ mit einer Constanten ω multiplicirt — ω irgend eine Wurzel der zu $x=\infty$ gehörigen Fundamentalgleichung — so ist

$$y = x^r\varphi(x), \qquad -r = \frac{\log\omega}{2\pi i},$$

und $\varphi(x)$ bedeutet eine Function, die in der Umgebung von $x=\infty$ durch eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellbar ist, in welcher positive und negative Potenzen in unendlicher Anzahl vorkommen (vgl. Nr. 39).

Bilden wir auch hier die logarithmische Ableitung

$$Y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

so ist dieselbe zwar in der Umgebung von $x=\infty$ eindeutig, zeigt aber im Allgemeinen ein wesentlich anderes Verhalten wie die logarithmische Ableitung eines Normalintegrals oder auch wie $\varphi(x)$ selbst. Wenn nämlich in jeder Nähe von $x=\infty$ Stellen vorhanden sind, an denen die Function $\varphi(x)$ verschwindet — und dies kann im Allgemeinen vorkommen, da $x=\infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die

Function $\varphi(x)$ ist — so giebt es in jeder Nähe von $x=\infty$ Stellen, an denen die Function Y unendlich wird, denn offenbar ist jede Nullstelle von $\varphi(x)$ eine Unendlichkeitsstelle von Y. Es lässt sich also in diesem Falle um $x=\infty$ herum kein Bereich von endlicher Ausdehnung abgrenzen, der so beschaffen ist, dass sich die Function Y in der Umgebung jeder Stelle desselben regulär verhält, diese Function lässt sich folglich in der Umgebung von $x=\infty$ nicht nach dem Laurent'schen Satze, d. h. nach ganzen Potenzen von x entwickeln.

Wenn sich dagegen um $x=\infty$ herum ein Bereich von endlicher Ausdehnung so abgrenzen lässt, dass innerhalb desselben keine Nullstelle der Function $\varphi(x)$, d. h. (wenn wir von $x=\infty$ selbst absehen) von y liegt, so verhält sich der Quotient

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

ebenso wie $\varphi(x)$ selbst in der Umgebung jeder endlichen, innerhalb jenes Bereiches gelegenen Stelle regulär, und die Function Y kann folglich in einer gewissen Umgebung von $x=\infty$ nach dem Satze von Laurent in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Bilden wir uns nun die Differentialgleichung, der Y als Function von x genügt, in ähnlicher Weise wie wir oben (Nr. 95, S. 340) die Differentialgleichung (11) für die logarithmische Ableitung v des Integrals z von ($\mathfrak{A}$) aufgestellt haben, so finden wir zunächst, dass diese Differentialgleichung in Y genau dieselbe Form hat wie die Differentialgleichung (11). Setzt man jetzt die Möglichkeit einer Entwickelung von Y nach ganzen Potenzen von x in der Umgebung von $x=\infty$ voraus, so schliesst man genau ebenso wie wir es oben (S. 341) für v gethan haben, dass

$$\lim_{x=\infty}\frac{Y}{x^{\varkappa}}$$

einen endlichen und bestimmten Werth besitzt; die Function Y hat also in der Umgebung von $x=\infty$ nothwendig die Form

$$Y=\sum_{\nu=-\infty}^{\varkappa}\gamma_{\nu}x^{\nu},$$

falls dieselbe überhaupt in dieser Umgebung nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden kann, d. h. falls das Integral y nicht in jeder Nähe von $x=\infty$ verschwindet.

Aus dieser Gestalt von Y folgt aber unmittelbar für y selbst die Darstellung

$$y = e^{\int Y dx} = \bar{z} x^{\gamma - 1} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo

$$\bar{z} = e^{\frac{\gamma_\varkappa}{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} + \frac{\gamma_{\varkappa-1}}{\varkappa} x^\varkappa + \cdots + \gamma_0 x}$$

gesetzt wurde und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitende Reihe bedeutet. Also ist in diesem Falle y ein Normalintegral. Wir können demnach sagen:

Ein Normalintegral ist dadurch charakterisirt, dass es nicht in jeder Nähe des Punktes $x = \infty$ verschwindet; d. h. jedes Normalintegral hat diese Eigenschaft, und umgekehrt, wenn ein Integral in der Umgebung von $x = \infty$ in Reihenform darstellbar und so beschaffen ist, dass sich ein endlicher Bereich um $x = \infty$ abgrenzen lässt, innerhalb dessen dieses Integral nicht verschwindet, so ist es ein Normalintegral.

97. Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Normale Differentialausdrücke.

Wenn die charakteristische Gleichung (13) mehrfache Wurzeln hat (vergl. Nr. 95, S. 343), so können zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten. Entweder erhält man an Stelle gewisser Normalreihen Ausdrücke von der Form

$$e^Q x^r \{\psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_q \log^q x\},$$

wo Q eine ganze rationale Function vom höchstens $(\varkappa + 1)^{\text{ten}}$ Grade, r eine Constante, $\psi_0, \psi_1, \cdots \psi_q$ Reihen bedeuten, die nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreiten, und die der Differentialgleichung (A) formell Genüge leisten; wir nennen solche Ausdrücke logarithmische Normalreihen, und falls sie convergiren, logarithmische Normalintegrale. Oder aber es treten an die Stelle gewisser Normalreihen Ausdrücke von der Form

$$e^Q x^r \psi(x),$$

wo, für ein positives ganzzahliges μ, Q eine ganze Function von $x^{\frac{1}{\mu}}$ bedeutet, deren Grad zwischen $\varkappa\mu$ und $(\varkappa + 1)\mu$ gelegen ist, und $\psi(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von

$$x^{-\frac{1}{\mu}}$$

fortschreitende Reihe darstellt; solche Ausdrücke nennt Herr Poincaré anormale Reihen, sie sind im Allgemeinen divergent und befriedigen formell die Differentialgleichung (A). Wir wollen aber im Folgenden unsere Betrachtungen auf den Fall einschränken, wo die Gleichung (13) lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzt, und verweisen für den Fall mehrfacher Wurzeln auf die Inaugural-Dissertation des Herrn Fabry, wo sich die hierauf bezüglichen Erörterungen in vollständiger Weise durchgeführt finden. Es soll nur noch kurz auf die Behandlung des besonderen Falles eingegangen werden, wo sich ein Factor

$$z = e^{Q} \tag{18}$$

so angeben lässt, dass durch die Substitution

$$y = zu$$

eine Differentialgleichung

$$\Pi(u) = \frac{1}{z} P(zu) = 0 \tag{19}$$

für u hervorgeht, für die $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist.

In diesem Falle besitzt die Differentialgleichung (19) n sich im Punkte $x = \infty$ bestimmt verhaltende Integrale

$$u_1, u_2, \cdots u_n$$

und folglich die Differentialgleichung (A) n Normalintegrale

$$y_\lambda = z u_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

mit demselben fundamentalen determinirenden Factor z. Diesen Factor nennt man dann nach Herrn Thomé einen determinirenden Factor schlechthin und die linke Seite von (A) einen bei $x = \infty$ normalen Differentialausdruck. Wenn die linke Seite von (A) ein solcher normaler Differentialausdruck ist, so tritt der bemerkenswerthe Umstand ein, dass der determinirende Factor z eindeutig bestimmt ist.

Die Differentialgleichung (19) hat nämlich die Form

$$\Pi(u) = u^{(n)} + \left(n \frac{z'}{z} + \varphi_x + Q_{n-1}\right) u^{(n-1)} + \cdots = 0;$$

soll $x = \infty$ für dieselbe eine Stelle der Bestimmtheit sein, so muss der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die Form haben

$$n \frac{z'}{z} + \varphi_x + Q_{n-1} = \frac{1}{x} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \delta_0 + \delta_1 \frac{1}{x} + \delta_2 \frac{1}{x^2} + \cdots$$

gesetzt wurde. Also haben wir, da

$$\frac{z'}{z} = Q'$$

ist,

$$Q' = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) - \varphi_z - Q_{n-1}\right\}.$$

Nun soll aber Q eine ganze rationale Function von x sein, es muss folglich

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) - Q_{n-1}\right) = 0$$

und

$$Q' = -\frac{1}{n}\,\varphi_z,$$

d. h. also

$$Q = -\frac{1}{n}\int \varphi_z dx + \text{const.}$$

sein. Wenn also die Differentialgleichung (A) vorgelegt ist, so kann man in derselben die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int \varphi_z dx}\,u$$

machen, und wenn die sich für u ergebende Differentialgleichung im Punkte $x = \infty$ die Bestimmtheitsgestalt hat, so kann man ohne specielle Convergenzbetrachtungen die Existenz von n Normalintegralen der Differentialgleichung (A) erschliessen. Wenn die Differentialgleichung (A) von der ersten Ordnung ist, so besitzt sie stets ein Normalintegral (vergl. Nr. 93, S. 335). In der That folgt für

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \frac{dy}{dx} + (\varphi_z + Q_0)\,y = 0$$

das allgemeine Integral

$$y = e^{-\int \varphi_z dx}\,e^{-\int Q_0 dx},$$

und da

$$Q_0 = \frac{b_{0,1}}{x} + \frac{b_{0,2}}{x^2} + \cdots$$

ist, so haben wir nach Ausführung der Integration

$$y = e^{-\int \varphi_z dx}\,x^{-b_{0,1}}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\mathfrak{P}$ den Algorithmus einer gewöhnlichen Potenzreihe bezeichnet. Das zu y adjungirte Integral der adjungirten Differentialgleichung von (A_1) ist dann (vergl. S. 335)

$$\eta = \frac{1}{xy},$$

sein determinirender Factor ist also der reciproke Werth des determinirenden Factors von y oder von (A_1).

Herr **Thomé** hat nun in einer Reihe von Abhandlungen solche Differentialgleichungen untersucht, deren linke Seite aus normalen Differentialausdrücken überhaupt oder aus normalen Differentialausdrücken erster Ordnung zusammengesetzt ist. Insbesondere werden auch solche Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten betrachtet, deren linke Seiten bei jeder singulären Stelle $x = a$ die Form eines normalen Differentialausdruckes haben (was hierunter zu verstehen ist, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, indem man

$$\xi = \frac{1}{x - a}$$

als neue unabhängige Variable einführt) und die als **Gleichungen mit schlechthin normalem Differentialausdruck** bezeichnet werden. Bezeichnet man dann mit Z das Product der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Factoren, so heisst Z der determinirende Factor schlechthin, und die Differentialgleichung wird durch die Substitution

$$y = Zu$$

in eine Differentialgleichung für u transformirt, die der **Fuchs**'schen Classe angehört. Ueber solche Differentialausdrücke, die schlechthin oder nur bei einer bestimmten Stelle normal sind, lässt sich nun eine Reihe von Sätzen aufstellen. Ist z. B. $P(y)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor

$$z = e^{q},$$

so ist der adjungirte Differentialausdruck $P'(\eta)$ ebenfalls ein normaler, aber mit dem determinirenden Factor

$$\zeta = e^{-q};$$

dies erhellt unmittelbar daraus, dass, wenn man $P(y)$ in der Form (14), Nr. 19 (S. 52) darstellt,

$$P(y) = v_n \frac{d}{dx} \frac{v_{n-1}}{v_n} \frac{d}{dx} \cdots \frac{v_1}{v_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1},$$

und wenn

$$\mu_i = z v_i \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\cdots n)}$$

gesetzt wird, $P(y)$ die Gestalt

$$P(y) = e^{-q} \mu_n \frac{d}{dx} \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \frac{d}{dx} \cdots \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{d}{dx} \frac{1}{\mu_1} e^{q} y$$

annimmt, während der adjungirte Differentialausdruck $P'(\eta)$ nach dem Satze der Nr. 21, S. 58 (vergl. Gl. (9) ebenda) durch den Ausdruck

$$P'(\eta) = \frac{1}{v_1}\frac{d}{dx}\frac{v_1}{v_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{v_{n-1}}{v_n}\frac{d}{dx}v_n\eta,$$

oder

$$P'(\eta) = \frac{e^{Q}}{\mu_1}\frac{d}{dx}\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\frac{d}{dx}\mu_n e^{-Q}\eta$$

gegeben wird.

98. Differentialgleichungen, deren linke Seite aus normalen Differentialausdrücken zusammengesetzt ist.

Allgemein lassen sich die Integrale einer Differentialgleichung, deren linke Seite aus lauter bei $x = \infty$ normalen Differentialausdrücken zusammengesetzt ist, in der Form

$$(20)\qquad \mu_1,\quad \mu_1\int\frac{\mu_2}{\mu_1}dx,\ \cdots,\ \mu_1\int\frac{\mu_2}{\mu_1}dx\int\cdots\frac{\mu_{n-1}}{\mu_{n-2}}dx\int\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}dx$$

darstellen, wo

$$\mu_i = e^{w_i}x^{r_i}\mathfrak{P}_i\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (i=1,2,\cdots n)$$

gesetzt wurde, und w_i eine ganze rationale Function von x, r_i eine Constante, $\mathfrak{P}_i$ den Algorithmus einer gewöhnlichen Potenzreihe bedeutet. Aus der über die Bestimmung des determinirenden Factors gemachten Bemerkung und aus den Eigenschaften der Differentialgleichungen, für die $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, folgt, dass sich in diesem Falle die Coefficienten der w_i, die Exponenten r_i und die Coefficienten der Reihen $\mathfrak{P}_i$ auf algebraische Weise aus den Parametern der Differentialgleichung zusammensetzen lassen. Analoges gilt für eine beliebige im Endlichen gelegene singuläre Stelle $x = a$, nur sind dann die w_i ganze rationale Functionen von $(x-a)^{-1}$ und

$$\mu_i = e^{w_i}(x-a)^{r_i}\mathfrak{P}_i(x-a).$$

Wir wollen nun fragen, wann lassen sich die Integrale (20) einer Differentialgleichung (A), deren linke Seite aus lauter bei dem Punkte $x = a$ normalen Differentialausdrücken zusammengesetzt ist, in der Form

$$(21)\qquad y = (x-a)^r\sum_{i=1}^{m}e^{w_i}\sum_{\varkappa}\psi_{i\varkappa}\log^{\varkappa}(x-a)$$

darstellen. Die directe Behandlung dieser Frage ist nicht ohne Schwierigkeit, wir gehen darum nach dem Vorgange von Günther (in seiner

Inauguraldissertation) umgekehrt von der Forderung aus, dass die Integrale von (A) eine Darstellung in der Form (21) gestatten, und stellen uns die Aufgabe, hieraus auf die Beschaffenheit der Coefficienten der Differentialgleichung zu schliessen, von denen wir natürlich voraussetzen müssen, dass sie sich in der Umgebung von $x = a$ wie rationale Functionen verhalten.

Es brauchen die $\psi_{i\varkappa}$ nicht gerade als gewöhnliche Potenzreihen von $x = a$ angesehen zu werden, dieselben können auch noch negative Potenzen in endlicher Anzahl enthalten. Setzen wir dann in die linke Seite $P(y)$ von (A) für y den Ausdruck (21) ein, so ergiebt sich

$$P(y) = (x - a)^r \sum_{i=1}^{m} e^{w_i} \sum_{\varkappa} \chi_{i\varkappa} \log^{\varkappa}(x - a), \tag{22}$$

wo auch die $\chi_{i\varkappa}$ Potenzreihen von $x - a$ bedeuten, die eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Soll dieser Ausdruck identisch verschwinden, so müssen nach einer in der Nr. 42 gemachten Bemerkung (S. 149) die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log(x - a)$ für sich gleich Null sein, es muss also eine Reihe von Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{m} e^{w_i} \chi_i = 0 \tag{23}$$

bestehen. Eine solche Gleichung, in der nicht alle χ_i selbst identisch verschwinden, kann aber nur bestehen, wenn alle w_i einander gleich sind. In der That folgt durch Differentiation von (23)

$$\sum_{i=1}^{m} e^{w_i} (w_i' \chi_i + \chi_i') = 0;$$

eliminirt man hieraus und aus (23) etwa e^{w_α}, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{i \neq \alpha} e^{w_i} \psi_i = 0,$$

die ein Glied weniger enthält wie (23), und worin

$$\psi_i = \begin{vmatrix} \chi_i & \chi_\alpha \\ w_i' \chi_i + \chi_i' & w_\alpha' \chi_\alpha + \chi_\alpha' \end{vmatrix}$$

gesetzt wurde, so dass sich also auch die ψ_i in der Umgebung von $x = a$ wie rationale Functionen verhalten. Sollten die sämmtlichen ψ_i identisch verschwinden, so müsste

$$w_i' - w_\alpha' = \frac{\chi_\alpha'}{\chi_\alpha} - \frac{\chi_i'}{\chi_i}$$

sein. Rechter Hand tritt höchstens die Potenz $(x-a)^{-1}$, sonst nur positive Potenzen von $x-a$ auf, während linker Hand nur die Potenzen $(x-a)^{-2}$, $(x-a)^{-3}$, $\cdots$ vorkommen können, es muss also entweder eine der beiden Functionen χ_i, χ_α identisch verschwinden, oder

$$w_i' = w_\alpha'$$

sein. In ähnlicher Weise weiter schliessend folgert man aus dem Bestehen von (23) successive das Bestehen analoger Gleichungen mit weniger als m Gliedern. Und da für $m=1$ die Gleichung

$$e^{w_i} X_i = 0$$

das Verschwinden von X_i erfordert, so erkennt man die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Sind nun in dem Ausdrucke (21) alle w_i von einander verschieden, so müssen in (22) die Coefficienten $\chi_{i\varkappa}$ für sich gleich Null sein; dies besagt aber offenbar nichts anderes, als dass jedes Glied

$$(24) \qquad (x-a)^{r} e^{w_i} \sum_{\varkappa} \psi_{i\varkappa} \log^{\varkappa}(x-a) \qquad (i=1,2,\cdots m)$$

für sich ein Integral von (A) ist. Die Anzahl m der Ausdrücke w_i kann demnach nicht grösser sein, wie die Ordnung n der Differentialgleichung (der Fall $n=m$ ist nur möglich, wenn keine Logarithmen auftreten), und wir haben somit in diesem Falle n Normalintegrale mit den fundamentalen determinirenden Factoren

$$e^{w_1}, \; e^{w_2}, \; \cdots \; e^{w_m}.$$

Besitzt die Differentialgleichung (A) überhaupt ein Integral der Form (24), so besitzt sie (vergl. S. 149) auch ein Integral der Form

$$v_1 = (x-a)^{r_1} e^{w_1} \varphi_1;$$

setzt man nun

$$B_1 = v_1 \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1},$$

so lässt sich die linke Seite von (A) in der Form darstellen

$$P(y) = A_1 B_1,$$

wo A_1 einen Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Die Integrale der Gleichung

$$A_1 = 0$$

besitzen die fundamentalen determinirenden Factoren

$$e^{w_2}, \; \cdots \; e^{w_m},$$

denen sich auch noch e^{w_1} selbst hinzugesellt, wenn zu diesem fundamentalen determinirenden Factor ein mit Logarithmen behaftetes Normalintegral von (A) gehört. Schliesst man so weiter, so findet man endlich

$$P(y) = B_n B_{n-1} \cdots B_2 B_1,$$

wo die B_i Differentialausdrücke erster Ordnung bedeuten, deren Coefficienten in der Umgebung von $x = a$ den Charakter rationaler Functionen besitzen, d. h. die Differentialgleichung (A) ist so beschaffen, dass ihre linke Seite aus normalen Differentialausdrücken zusammengesetzt ist.

Besitzt also die Differentialgleichung (A) n Normalintegrale, und fasst man diejenigen, die zu demselben fundamentalen determinirenden Factor e^{w_i} gehören, in eine Gruppe zusammen, so genügen diese für sich einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke, dessen Coefficienten sich in der Umgebung von $x = a$ wie rationale Functionen verhalten. Die Bedingung dafür, dass ein Differentialausdruck diese Beschaffenheit habe, lässt sich, wie wir gesehen haben, leicht angeben, und aus solchen Differentialausdrücken setzt sich dann die linke Seite von (A) zusammen.

Siebentes Kapitel.

99. Rang der Normalreihen. Reduction der allgemeinen Untersuchung auf die von Differentialgleichungen vom Range Eins.

Wir nehmen nunmehr die Untersuchung der Differentialgleichung (A) in der Umgebung von $x = \infty$ wieder auf, unter der Voraussetzung, dass diese Differentialgleichung vom Range $k + 1$ und die charakteristische Gleichung (13) so beschaffen ist, dass ihre sämmtlichen Wurzeln von einander verschieden sind. Dann hatten wir die n Normalreihen (17) aufgestellt, deren fundamentale determinirende Factoren z_λ die Eigenschaft besassen, dass ihre Logarithmen ganze rationale Functionen vom höchstens $(k + 1)^{\text{ten}}$ Grade in x waren.

Wir wollen umgekehrt zeigen, dass, wenn eine Gleichung (A), die vom Range $(k + 1)$ ist, durch n Normalreihen

$$S_1, S_2, \cdots S_n,$$

deren fundamentale determinirende Factoren im Exponenten von e ganze rationale Functionen vom q^{ten} oder niedrigeren Grade haben, formell befriedigt wird, der Rang dieser Gleichung höchstens der q^{te} sein kann.

Zu dem Ende berechnen wir aus den Identitäten

$$P(S_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

bei deren Herstellung die successiven Ableitungen der S_λ so zu bilden sind, als ob diese Reihen convergent wären, die Coefficienten von P; es ergiebt sich auf diese Weise

$$\varphi_{\alpha\varkappa} + Q_{n-\alpha} = (-1)^n \frac{D_\alpha(S_1, S_2, \cdots S_n)}{D(S_1, S_2, \cdots S_n)}.$$

Berechnet man diesen Determinantenquotienten, indem man mit den $S_1, S_2, \cdots S_n$ nach den gewöhnlichen Rechnungsregeln operirt, und ordnet schliesslich nach Potenzen von x, so muss die so entstehende Reihe convergent sein und mit der auf der linken Seite stehenden Entwickelung übereinstimmen. Man findet aber leicht, dass die aus dem Determinantenquotienten gebildete Reihe keine höhere positive Potenz von x enthalten kann, als wie die $\alpha(q-1)^{\text{te}}$, es ist also in der That $k+1 \leqq q$.

Der Rang einer Gleichung stimmt also genau mit dem Grade der Exponenten der fundamentalen determinirenden Factoren überein: wir übertragen darum die Rangeintheilung auch auf die Normalreihen selbst und sagen, ein System von n Normalreihen sei vom Range $k+1$, wenn die Logarithmen ihrer fundamentalen determinirenden Factoren vom $(k+1)^{\text{ten}}$ oder von niedrigerem Grade in x sind.

Für die theoretische Untersuchung der Integrale sowohl wie für die der Normalreihen ist es von Wichtigkeit, eine Reduction der Differentialgleichungen vom Range $(k+1)$ auf solche vom Range Eins vorzuführen, welche Herr Poincaré angegeben hat. Seien

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\ f_n(x),$$

wo

$$f_\lambda(x) = e^{a_\lambda x^h + b_\lambda x^{h-1} + \cdots + c_\lambda x}\, x^{r_\lambda}\, \psi_\lambda\left(\frac{1}{x}\right)$$

gesetzt wurde, die n Normalreihen, die der Differentialgleichung (A) vom Range $k+1 = h$ formell Genüge leisten, und sei ferner

$$y_{0,1}(x),\ y_{0,2}(x),\ \cdots\ y_{0,n}(x)$$

ein beliebiges Fundamentalsystem von (A). Nehmen wir eine primitive h^{te} Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{h}}$$

und bilden für die Functionen y_λ von x die Differentialgleichungen

$$(\mathrm{A}_\lambda) \qquad P_\lambda(y_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots h-1),$$

die aus der Differentialgleichung (A) dadurch hervorgehen, dass wir an die Stelle von x die Grösse

$$\varepsilon^\lambda x$$

als unabhängige Variable einführen. Dann ist die Differentialgleichung (A_λ) auch vom Range h, sie wird durch die Normalreihen

$$f_1(\varepsilon^\lambda x),\ f_2(\varepsilon^\lambda x),\ \cdots\ f_n(\varepsilon^\lambda x)$$

formell befriedigt, und besitzt das Fundamentalsystem

$$y_{\lambda,\alpha}(x) = y_\alpha(\varepsilon^\lambda x) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n).$$

Setzen wir nun

$$Y = y_0 y_1 \cdots y_{h-1},$$

wo y_λ das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A_λ) bedeuten möge, so erscheint dieses Product als homogene lineare Function mit constanten Coefficienten der n^h Einzelproducte

$$y_{0,\alpha_0} y_{1,\alpha_1} \cdots y_{h-1,\alpha_{h-1}},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{h-1}$ irgend eine Variation der n Zahlen $1, 2, \cdots n$ zur h^{ten} Classe mit unbeschränkter Wiederholung bedeutet. Bezeichnen wir diese Einzelproducte in irgend einer Reihenfolge durch

$$Y_1, \ Y_2, \cdots Y_{n^h},$$

und lassen wir die unabhängige Variable x einen geschlossenen Umlauf U um den unendlich fernen Punkt vollziehen, so verwandelt sich jedes $y_{\lambda,\alpha}$ in eine homogene lineare Function der

$$y_{\lambda,1}, \ y_{\lambda,2}, \cdots y_{\lambda,n};$$

die Y_α gehen folglich in lineare homogene Functionen ihrer selbst mit constanten Coefficienten über und bilden demnach ein Fundamentalsystem der linearen homogenen Differentialgleichung $(n^h)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(25) \qquad (-1)^{n^h} \frac{D(Y, Y_1, \cdots Y_{n^h})}{D(Y_1, \cdots Y_{n^h})} = \Pi(Y) = 0,$$

deren Coefficienten in der Umgebung von $x = \infty$ den Charakter rationaler Functionen besitzen. Diese Differentialgleichung wird formell befriedigt durch die n^h Normalreihen vom Typus

$$(26) \qquad f_{\alpha_0}(x) f_{\alpha_1}(\varepsilon x) \cdots f_{\alpha_{h-1}}(\varepsilon^{h-1} x);$$

der Logarithmus des fundamentalen determinirenden Factors der Normalreihe (26) ist

$$g_{\alpha_0}(x) + g_{\alpha_1}(\varepsilon x) + \cdots + g_{\alpha_{h-1}}(\varepsilon^{h-1} x),$$

wenn

$$g_\alpha(x) = a_\alpha x^h + b_\alpha x^{h-1} + \cdots + c_\alpha x$$

den Logarithmus des fundamentalen determinirenden Factors der Normalreihe $f_\alpha(x)$ bedeutet. Die Normalreihen (26) der Differentialgleichung (25) sind also vom Range h, folglich ist auch diese Differentialgleichung selbst vom Range h, und wir können ihre linke Seite in die Form setzen

$$\Pi(Y) = Y^{(n^h)} + (\Phi_{h-1} + R_{n^h-1}) Y^{(n^h-1)} + (\Phi_{2(h-1)} + R_{n^h-2}) Y^{(n^h-2)} + \cdots + (\Phi_{n^h(h-1)} + R_0) Y,$$

wo $\Phi_{\alpha(h-1)}$ eine ganze rationale Function vom höchstens $\alpha(h-1)^{\text{ten}}$ Grade in x, R_α eine nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe bedeutet, die mit einem zu $\frac{1}{x}$ proportionalen Gliede beginnt. Nun muss aber die Differentialgleichung (25) offenbar ungeändert bleiben, wenn wir εx an die Stelle von x setzen; durch diese Substitution verwandelt sich

$$\frac{d^\lambda Y}{dx^\lambda} \quad \text{in} \quad \varepsilon^{-\lambda}\frac{d^\lambda Y}{dx^\lambda},$$

die Differentialgleichung

$$x^{n^h} H(Y) = 0$$

muss folglich so beschaffen sein, dass der Coefficient der α^{ten} Ableitung sich mit

$$\varepsilon^{-n^h+\alpha}$$

multiplicirt, wenn εx an die Stelle von x gesetzt wird. Hieraus folgt, dass in

$$\Phi_{(n^h-\alpha)(h-1)} + R_\alpha$$

nur solche Potenzen von x auftreten können, deren Exponent nach dem Modul h den Rest α lässt. Führen wir nun in (25) eine neue unabhängige Variable ξ ein, die mit x durch die Gleichung

$$x^h = \xi$$

verknüpft ist und beachten, dass

$$\frac{d^\alpha v}{dx^\alpha} = h^\alpha \xi^{\alpha - \frac{\alpha}{h}} \frac{d^\alpha v}{d\xi^\alpha} + \cdots + h^\alpha\left(1-\frac{1}{h}\right)\left(1-\frac{2}{h}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha-1}{h}\right)\xi^{1-\frac{\alpha}{h}}\frac{dv}{d\xi}$$

ist, so erkennen wir, dass die transformirte Differentialgleichung die Form haben wird

$$\sum_{\alpha=0}^{n^h}(B_\alpha + \Xi_\alpha)\frac{d^{n^h-\alpha}Y}{d\xi^{n^h-\alpha}} = 0, \tag{27}$$

wo die B_α Constanten, die Ξ_α nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{\xi}$ fortschreitende Reihen bedeuten, die mit $\frac{1}{\xi}$ verschwinden. Die Differentialgleichung (27) ist also vom Range Eins. Unter den Ausdrücken (26), die dieser Differentialgleichung formell Genüge leisten, finden wir zunächst die n Normalreihen

$$f_\alpha(x) f_\alpha(\varepsilon x)\cdots f_\alpha(\varepsilon^{h-1}x) = e^{h a_\alpha \xi}\xi^{r_\alpha}\Psi_\alpha\left(\frac{1}{\xi}\right) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

die vom Range Eins sind, die übrigen $n^h - n$ Ausdrücke (26) sind im Allgemeinen anormale Reihen, da sie nach Potenzen von $\xi^{\frac{1}{h}}$ fortschreiten. Ein willkürliches Integral von (27) lässt sich im Allgemeinen nicht als das Product von Lösungen der Differentialgleichungen $(A_0), (A_1), \cdots (A_{h-1})$ darstellen, wir kennen aber die n^h particulären Integrale Y_α, für welche eine solche Darstellung möglich ist. Sei

$$(28) \qquad Y_\alpha = y_{0,\alpha_0} y_{1,\alpha_1} \cdots y_{h-1,\alpha_{h-1}},$$

und differentiiren wir diese Gleichung n^h-mal nach x, so erhalten wir

$$\frac{d^\lambda Y_\alpha}{dx^\lambda} = \sum F_{\lambda,\beta,\gamma,\cdots\mu} \frac{d^\beta y_{0,\alpha_0}}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y_{1,\alpha_1}}{dx^\gamma} \cdots \frac{d^\mu y_{h-1,\alpha_{h-1}}}{dx^\mu}$$
$$(\lambda = 0, 1, \cdots n^h; \quad \beta, \gamma, \cdots \mu = 0, 1, \cdots n-1),$$

wo die $F_{\lambda,\beta,\gamma,\cdots\mu}$ in der Umgebung von $x = \infty$ den Charakter rationaler Functionen besitzen. Diese Gleichungen sind linear in den n^h Producten

$$\frac{d^\beta y_{0,\alpha_0}}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y_{1,\alpha_1}}{dx^\gamma} \cdots \frac{d^\mu y_{h-1,\alpha_{h-1}}}{dx^\mu};$$

falls die Determinante der $n^h - 1$ ersten dieser Gleichungen nicht verschwindet, so ergeben sich also diese Producte als lineare Ausdrücke der

$$Y_\alpha, \frac{dY_\alpha}{dx}, \cdots \frac{d^{n^h-1} Y_\alpha}{dx^{n^h-1}}$$

mit Coefficienten, die in der Umgebung von $x = \infty$ den Charakter rationaler Functionen haben. Insbesondere findet man z. B.

$$\frac{dy_{0,\alpha_0}}{dx} y_{1,\alpha_1} \cdots y_{h-1,\alpha_{h-1}} = \sum_{\lambda=0}^{n^h-1} \mathfrak{F}_\lambda \frac{d^\lambda Y_\alpha}{dx^\lambda},$$

und nach Division durch (28),

$$\frac{1}{y_{0,\alpha_0}} \frac{dy_{0,\alpha_0}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{n^h-1} \mathfrak{F}_\lambda \frac{1}{Y_\alpha} \frac{d^\lambda Y_\alpha}{dx^\lambda};$$

in dieser Form stellen sich also die Integrale von (A) durch die Lösungen der Differentialgleichung (25) beziehungsweise (27) dar. Wir können somit sagen, die Behandlung einer Differentialgleichung von beliebigem Range h sei auf die einer Differentialgleichung vom Range Eins zurückgeführt.

100. Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung vom Range Eins in der Nähe des unendlich fernen Punktes.

Wenn die Differentialgleichung (A) vom Range Eins, also $k = 0$ ist, so reducirt sich $\varphi_{\lambda\varkappa}(x)$ auf die Constante $A_{n-\lambda}$, die Differentialgleichung hat also die Gestalt

$$(A) \quad y^{(n)} + \left\{A_{n-1} + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} y^{(n-1)} + \cdots + \left(A_0 + Q_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) y = 0,$$

und die durch Weglassung der mit $x = \infty$ verschwindenden Glieder entstehende Differentialgleichung in z

$$(\mathfrak{A}) \qquad z^{(n)} + A_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + A_0 z = 0$$

hat constante Coefficienten. Bezeichnen wir die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (13) (S. 341) durch

$$c_1, \; c_2, \; \cdots \; c_n$$

und nehmen der Einfachheit wegen an, dass diese sämmtlich von einander verschieden sind, so besitzt ($\mathfrak{A}$) das Fundamentalsystem

$$z_\lambda = e^{c_\lambda x} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

und das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lautet

$$z = \lambda_1 e^{c_1 x} + \lambda_2 e^{c_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{c_n x},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ willkürliche Constanten. Untersuchen wir das Verhalten von z, wenn x in den Punkt $x = \infty$ einrückt. Da $x = \infty$ sowohl für die Integrale von (A) als auch für die von ($\mathfrak{A}$) eine Stelle der Unbestimmtheit ist, so hängt der Werth, dem sich y oder z nähert, wenn x eine Folge von Werthen durchläuft, deren Limes gleich Unendlich ist, wesentlich von der Wahl dieser Folge ab. Wir wollen x eine Folge von unendlich anwachsenden positiven Werthen durchlaufen lassen, und denken uns darum die Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ der charakteristischen Gleichung der Grösse ihrer realen Theile nach geordnet, so dass also, wenn wir, wie üblich, durch $\Re(a)$ den realen Theil einer complexen Grösse a bezeichnen,

$$\Re(c_1) > \Re(c_2) > \cdots > \Re(c_n)$$

ist: wir setzen dabei überdies voraus, dass auch die realen Theile der Grössen $c_1, c_2, \cdots c_n$ sämmtlich von einander verschieden sind. Die logarithmische Ableitung von z ist

$$\frac{z'}{z} = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 e^{(c_2 - c_1)x} + \cdots + \lambda_n c_n e^{(c_n - c_1)x}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{(c_2 - c_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(c_n - c_1)x}},$$

und wenn wir nun x in irgend einer Weise als positive Grösse ins Unendliche gehen lassen, so ist nach bekannten Sätzen über die Exponentialfunction

$$\lim_{x = +\infty} e^{(c_\varkappa - c_1)x} = 0 \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n):$$

also haben wir im Allgemeinen, d. h. wenn $\lambda_1 \neq 0$ ist,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{z'}{z} = c_1;$$

für gewisse particuläre Integrale dagegen kann die logarithmische Ableitung für $x = +\infty$ gegen eine andere der Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ convergiren. Lassen wir nun x eine Werthenfolge durchlaufen, deren Argument nicht mehr den constanten Werth Null, sondern einen zwischen 0 und 2π gelegenen Werth ω besitzt, wir deuten das durch das Zeichen

$$\lim_{x=\omega\infty}$$

an, so lässt sich dieser Fall auf den vorhergehenden zurückführen, indem man in die Differentialgleichung die Substitution

$$x = \varrho\lambda, \qquad \lambda = e^{i\omega}$$

macht. Die charakteristische Gleichung wird dann

$$c^n + A_{n-1}\lambda c^{n-1} + \cdots + A_0\lambda^n = 0,$$

und ihre Wurzeln sind

$$\lambda c_1, \lambda c_2, \cdots \lambda c_n;$$

sind die realen Theile dieser n Wurzeln sämmtlich von einander verschieden, und bedeutet $\lambda c_\varkappa$ diejenige Wurzel, deren realer Theil der grösste ist, so ist im Allgemeinen

$$\lim_{\varrho=+\infty} \frac{z'}{z} = \lim_{x=\omega\infty} \frac{z'}{z} = \lambda c_\varkappa,$$

dagegen kann für gewisse particuläre Integrale dieser Limes gleich einer anderen der Grössen $\lambda c_1, \lambda c_2, \cdots \lambda c_n$ werden.

Wie man sofort übersieht, bleibt dieser Schluss auch bestehen, wenn einige der $c_1, c_2, \cdots c_n$ einander gleich werden, nicht aber, wenn für das Argument ω nur die realen Theile einiger der Grössen $\lambda c_1, \lambda c_2, \cdots \lambda c_n$ übereinstimmen, dies letztere kann aber offenbar nur für gewisse besondere Werthe des Argumentes ω eintreten. Sieht man von diesen ab, so kann man also sagen:

Die logarithmische Ableitung eines Integrales der Differentialgleichung (𝔄) nähert sich, wenn x mit dem Argument ω ins Unendliche einrückt, einer der Grössen

$$\lambda c_1, \lambda c_2, \cdots \lambda c_n; \qquad \lambda = e^{i\omega},$$

und zwar im Allgemeinen derjenigen derselben, deren realer Theil den grössten Werth hat.

Die Differentialgleichung (A) geht, wenn man die mit $x = \infty$ verschwindenden Glieder vernachlässigt, in ($\mathfrak{A}$) über. In den Anwendungen der Mathematik auf physikalische Probleme ist man daran gewöhnt, wenn die Integration einer gegebenen Differentialgleichung unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet, die Coefficienten derselben zu entwickeln und dann nur so viele Glieder der Entwickelung beizubehalten, dass diese „angenäherte" Differentialgleichung integrabel wird. Man geht dabei von der Voraussetzung aus, dass die Lösungen dieser angenäherten Differentialgleichung auch Annäherungen an gewisse Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung darstellen. Wollten wir uns dieser Schlussweise bedienen, so könnten wir sagen: die Lösungen von ($\mathfrak{A}$) stellen für hinreichend grosse Werthe von x gewisse Lösungen der Differentialgleichung (A) angenähert dar, der Satz über den Limes der logarithmischen Ableitung kann daher unmittelbar von den Lösungen von ($\mathfrak{A}$) auf die von (A) übertragen werden. Ein solcher Schluss entbehrt aber offenbar der analytischen Strenge; um diese zu wahren, müsste man zeigen können, dass nach Vorschrift einer beliebig kleinen Grösse ε eine positive Zahl w so angegeben werden kann, dass

$$|y - z| \quad \text{oder} \quad \left|\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z}\right|$$

kleiner ist als ε, wenn $|x| > w$. In dem vorliegenden Falle lässt sich, wie Herr Poincaré gezeigt hat, dieser Nachweis wirklich führen; wir begnügen uns damit, den Weg, den Herr Poincaré im American Journal (Band VII) eingeschlagen hat, hier kurz anzudeuten.

Setzt man

$$\lambda_\varkappa e^{c_\varkappa x} = \xi_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

so ist

$$z = \sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa,$$

$$z^{(\mu)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa^\mu \xi_\varkappa \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n-1).$$

Herr Poincaré setzt nun analog

$$y = \sum_{\varkappa=1}^{n} X_\varkappa,$$

$$y^{(\mu)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa^\mu X_\varkappa \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n-1);$$

dann folgt durch Differentiation

$$y^{(\mu+1)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa^\mu X_\varkappa' \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n-1)$$

Eliminirt man aus diesen $2n$ Gleichungen, denen noch die Differentialgleichung (A) hinzuzufügen ist, die Grössen

$$y, y', \cdots y^{(n-1)}, y^{(n)},$$

so erhält man für die $X_\varkappa$ das System von Differentialgleichungen

$$X_\varkappa' = c_\varkappa X_\varkappa - \sum_{\lambda=1}^{n} B_\lambda X_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die B_λ durch die Gleichungen

$$B_\lambda \prod_{\lambda \neq \varkappa} (c_\lambda - c_\varkappa) = Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) c_\lambda^{n-1} + Q_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) c_\lambda^{n-2} + \cdots + Q_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

erklärt sind. Herr Poincaré zeigt, dass im Allgemeinen

$$\lim_{x=+\infty} \frac{X_\varkappa}{X_1} = 0 \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

ist, so dass also

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y'}{y} = \lim_{x=+\infty} \frac{c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = c_1$$

wird, dass dagegen für gewisse particuläre Integrale y dieser Limes auch gleich einer anderen der Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ werden kann. Dabei bedeutet c_1 wie vorher diejenige Wurzel, deren realer Theil den grössten Werth hat.

Rückt x mit dem Argument ω ins Unendliche, so tritt an die Stelle der Wurzeln $c_1, \cdots c_n$ das System

$$\lambda c_1, \cdots \lambda c_n, \qquad \lambda = e^{\omega i},$$

wie man durch Ausführung der Substitution

$$x = \varrho \lambda$$

in die Differentialgleichung (A) sofort übersieht. Ganz allgemein kann man sagen: es ist

$$\lim_{x=\omega\infty} y e^{-ax} = 0,$$

wenn a eine Zahl bedeutet, für welche

$$\Re(a\lambda) > \Re(c_\varkappa \lambda) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist.

101. Rückblick auf die bisherigen Untersuchungen.

Wir werden im folgenden Abschnitte die Wichtigkeit der in der vorhergehenden Nummer angedeuteten Resultate für das tiefere Studium der Natur der Integrale einer Differentialgleichung vom Range Eins erörtern, indem wir von Differentialgleichungen handeln werden, deren Coefficienten nicht nur, wie bisher angenommen wurde, in der Umgebung von $x = \infty$ den Charakter rationaler Functionen haben, sondern wirklich rationale Functionen von x sind.

Wenn wir nämlich in unseren bisherigen Betrachtungen meist nur über das Verhalten der Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung in der Umgebung einer Stelle besondere Annahmen gemacht haben, so geschah dies, weil wir auch fast ausschliesslich das analytische Verhalten der Integrale in der Umgebung einer Stelle studirt haben. Allerdings haben wir nicht dies allein gethan. Abgesehen von den auf die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe bezüglichen Untersuchungen sind wir auch in den Besitz von Methoden gelangt, die uns das Verhalten der Integrale innerhalb eines Kreisringes kennen lehren, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung sich in der Umgebung jeder Stelle dieses Kreisringes regulär und innerhalb desselben eindeutig verhalten. Wir werden nun dazu übergehen, die bisher gewonnenen Ergebnisse für das Studium der Integralfunction in der ganzen Ebene zu verwerthen.

Da es sich in der Theorie der Differentialgleichungen wesentlich darum handelt, mit Hülfe einer vorgelegten Differentialgleichung neue Transcendenten zu definiren, so wird es von vorneherein geboten sein, sich im Allgemeinen auf die Untersuchung von Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten zu beschränken. Wenn über die Ordnung der zu untersuchenden Differentialgleichung keine besondere Annahme gemacht wird, so lässt sich aber, wie oben in der Nr. 61 (S. 218 ff.) gezeigt worden ist, die Untersuchung einer Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten auf die einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten zurückführen; wir legen darum den folgenden Betrachtungen eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten zu Grunde.

Fassen wir, ehe wir an die Formulirung der für solche Differentialgleichungen noch zu erledigenden Probleme gehen, kurz die Ergebnisse zusammen, die aus den bisher vorgeführten Untersuchungen fliessen.

Wenn sich die Coefficienten der Differentialgleichung, in der wir den Coefficienten der höchsten Ableitung gleich Eins gemacht haben, in der Umgebung einer Stelle $x = a$ regulär verhalten, so gilt das Gleiche für das allgemeine Integral. Werden die Coefficienten an der Stelle $x = a$, in deren Umgebung sie eindeutig sind, von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich, so sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, jenachdem nämlich diese Stelle für das allgemeine Integral eine Stelle der Bestimmtheit ist oder nicht.

Im ersteren Falle, für dessen Eintreten die Form (D) (Nr. 43, S. 152) der Coefficienten als nothwendig und hinreichend erkannt wurde, lässt sich mit rein algebraischen Hülfsmitteln ein canonisches Fundamentalsystem herstellen, dessen Verhalten bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln um diesen Punkt vollkommen beschrieben werden kann. Haben dagegen die Coefficienten in der Umgebung von $x = a$ nicht die Form (D), so ist die Stelle $x = a$ für das allgemeine Integral ein Punkt der Unbestimmtheit. Die Behandlung dieses Falles erfordert im Allgemeinen dieselben Hülfsmittel wie die Untersuchung eines Kreisringes E, innerhalb dessen die Coefficienten eindeutig und an jeder Stelle regulär sind.

Die Aufstellung des zu einem solchen Bereiche E gehörigen canonischen Fundamentalsystems ist nur mit Hülfe transcendenter Processe möglich, und diese gestatten zwar eine Berechnung der Entwickelungen der Elemente jenes Fundamentalsystems mit beliebiger Annäherung, gewähren aber keinen vollständigen Einblick in das Verhalten dieser Integrale bei einem Umlaufe innerhalb E. Nur in einigen besonderen Fällen kann dieses Verhalten entweder für alle oder doch wenigstens für einige Elemente des Fundamentalsystems, das zu einem Punkte $x = a$ gehört, der für die Coefficienten ein algebraischer Unendlichkeitspunkt, für das allgemeine Integral aber ein Punkt der Unbestimmtheit ist, genau angegeben werden, in denjenigen Fällen nämlich, wo entweder einige Integrale sich in $x = a$ bestimmt verhalten, oder wo einige oder n linear unabhängige Normalintegrale vorhanden sind.

Ueber das Eintreten dieses Umstandes kann nur durch besondere Convergenzbetrachtungen entschieden werden, die für die formal hergestellten Normalreihen vorzunehmen sind. Da diese letzteren durch rein algebraische Processe gewonnen werden, so geben sie, falls sie convergiren, über das Verhalten der durch sie dargestellten Integrale vollständigen Aufschluss; auf die Bedeutung, welche diese merkwürdigen Entwickelungen auch im Falle, wo sie divergent sind, für die Integrale der Differentialgleichung besitzen, hat Herr Poincaré zuerst aufmerksam gemacht; wir werden im folgenden Abschnitte das Ergebniss der hierauf bezüglichen Untersuchungen kurz angeben, ohne jedoch auf die Herleitung desselben genauer einzugehen. Wir bemerken aber gleich hier, dass die auf Stellen der Unbestimmtheit bezüglichen Untersuchungen der Forschung noch ein weites Feld darbieten, und dass wohl erst noch die Ausbildung neuer, oder eine wesentliche Vertiefung der bisher entwickelten Methoden erforderlich sein dürfte, um über das Verhalten der Integrale in der Umgebung einer solchen Stelle ebenso befriedigende Ergebnisse zu erlangen, wie sie die Methoden des Herrn Fuchs für den Fall einer Stelle der Bestimmtheit geliefert haben.

Siebenter Abschnitt.

Allgemeingültige Darstellungen der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Erstes Kapitel.

102. Das Integrationsproblem für eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten. Querschnitte.

Den folgenden Betrachtungen legen wir die Annahme zu Grunde, dass die Coefficienten der Differentialgleichung

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{A}$$

rationale Functionen von x sind und dass insbesondere der Coefficient der höchsten Ableitung p_0 eine Constante ist.

Seien $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die im Endlichen gelegenen Stellen, wo eine oder mehrere der rationalen Functionen $p_1, p_2, \cdots p_n$ unendlich werden, dann umfasst also der Bereich T, der aus der Gesammtheit aller Stellen besteht, in deren Umgebung sich die $p_1, p_2, \cdots p_n$ regulär verhalten, die Gesammtheit aller endlichen Werthe von x mit Ausschluss der $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$; dieser Bereich ist also ein $(\sigma + 1)$-fach zusammenhängender und da innerhalb desselben die $p_1, p_2, \cdots p_n$ auch eindeutig, d. h. unabhängig vom Fortsetzungswege sind, so ist T mit dem in der Nr. 11 definirten Bereiche E identisch. Denken wir uns T dadurch in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\bar{T}$ verwandelt, dass wir von $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ aus nach dem Unendlichen hin Querschnitte legen, die weder sich selbst noch einander gegenseitig durchkreuzen; nennen wir den von $a_\varkappa$ ausgehenden Querschnitt $l_\varkappa$, so ist das allgemeine Integral von (A) innerhalb $\bar{T}$ eindeutig, und kann bei Fortsetzungen auf innerhalb T verlaufenden geschlossenen Wegen nur dann eine Werthänderung erfahren, wenn diese Wege einen oder mehrere der Querschnitte $l_\varkappa$ überschreiten.

Sei $x = \xi$ ein von den $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$ verschiedener Punkt, und denken wir uns ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch seine

Anfangswerthe in $x = \xi$ definirt, so ergeben sich für die Elemente desselben Darstellungen in der Form von Potenzreihen, die für alle Werthe von x, die der Ungleichung

$$|x - \xi| < R_\xi$$

genügen, convergent sind, wo R_ξ die kleinste unter den Grössen

$$|\xi - a_1|, \quad |\xi - a_2|, \cdots |\xi - a_\sigma|$$

bedeutet, und die Coefficienten dieser Reihenentwickelungen bestimmen sich, mit Hülfe der durch die Anfangsbedingungen festgelegten n ersten Coefficienten, aus der zu $x = \xi$ gehörigen Recursionsformel.

Die Integration der Differentialgleichung (A) wird geleistet sein, sofern es gelingt, die Werthe der so innerhalb $\overline{T}$ eindeutig bestimmten Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ an irgend einer Stelle x des Bereiches T zu bestimmen, wenn überdies der Weg W vorgeschrieben wird, auf welchem die unabhängige Variable, von ξ ausgehend, nach jener Stelle x hin gelangt ist.

Jeder solche Weg lässt sich aus zwei Theilen zusammensetzen; einem innerhalb T verlaufenden, wir sagen directen Wege von ξ nach x, und einem die Querschnitte $l_1, \cdots l_\sigma$ überschreitenden von x ausgehenden geschlossenen Wege U. Bezeichnen wir die Werthe der $y_1, y_2, \cdots y_n$ im Punkte x für den directen Weg durch

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots\ y_n(x),$$

die Werthe, welche diese Integrale annehmen, nachdem die unabhängige Variable von x ausgehend den geschlossenen Weg U vollzogen hat, durch

$$\Theta y_1(x),\ \Theta y_2(x),\ \cdots\ \Theta y_n(x),$$

so ist:

$$[\Theta y_\varkappa(x)] = S[y_\varkappa(x)] \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo

$$S = (a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine wohlbestimmte lineare Substitution bedeutet.

Da zwei Wege, die zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines Theiles von T ausmachen, dieselben Functionswerthe der $y_1, \cdots y_n$ liefern, so hängt die Substitution S offenbar nur von der Anzahl, der Richtung und der Aufeinanderfolge der Ueberschreitungen ab, die der Weg U über die Querschnitte $l_1, \cdots l_\sigma$ vollzieht. Wir bezeichnen die Richtung, in der ein unendlich kleiner im positiven Sinne beschriebener Umlauf um den Punkt $a_\varkappa$ den Querschnitt $l_\varkappa$ überschreitet, als die positive, die entgegengesetzte als die negative und sagen, ein Weg habe den Querschnitt $l_\varkappa$ λ-mal überschritten, wenn er ihn, falls $\lambda > 0$ ist, λ-mal in positiver Richtung, oder falls $\lambda < 0$ ist, $-\lambda$-mal in negativer Richtung überschritten hat. Dann ist also S vollkommen bestimmt, wenn wir angeben, der Weg U überschreite zuerst λ_1-mal den Querschnitt l_{i_1}, dann λ_2-mal den Querschnitt l_{i_2} u. s. w., endlich λ_α-mal den Querschnitt l_{i_α}, wo

$$i_1, i_2, \cdots i_\alpha$$

eine Combination mit beliebiger Wiederholung der Zahlen $1, 2, \cdots \sigma$,

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\alpha$$

positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Bezeichnen wir nämlich durch $A_\varkappa$ diejenige lineare Substitution, welche die, innerhalb T eindeutigen particulären Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ erfahren, wenn die unabhängige Variable einen beliebig kleinen positiven Umlauf um den Punkt $a_\varkappa$ vollzieht, so ist (vergl. Nr. 30, S. 95, 96) die dem Umlaufe U entsprechende Substitution S in der Form

$$S = A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha}$$

darstellbar.

Das Integrationsgeschäft zerfällt also in zwei wesentlich zu unterscheidende Aufgaben. Die erste besteht darin, die Werthe des durch gewisse Anfangsbedingungen im Punkte $x = \xi$ definirten Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ in irgend einem Punkte x bei Fortsetzung auf directem Wege zu ermitteln; die andere darin, die Substitutionen aufzufinden, die dieses Fundamentalsystem erfährt, wenn die unabhängige Variable positive Umläufe um die einzelnen im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ ausführt. Beide Aufgaben lassen sich theoretisch durch successive Fortsetzung der Potenzreihen lösen, die in der Umgebung von $x = \xi$ zur Darstellung von $y_1, \cdots y_n$ dienen; praktisch ist dieses Verfahren nicht allein äusserst mühsam, sondern rechnerisch auch fast undurchführbar. Denn wenn man für eine Stelle ξ' der Umgebung von ξ die Werthe der $y_1, \cdots y_n$ und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen berechnen will, um dann mit Hülfe derselben die Entwickelungen dieser Integrale in der Umgebung von ξ' herzustellen, so ergeben sich diese Werthe selbst schon in der Form von unendlichen Reihen, und je öfter man das Fortsetzungsverfahren anzuwenden, d. h. je mehr Zwischenwerthe $\xi', \xi'', \cdots \xi^{(\alpha)}$ man zwischen ξ und x einzuschalten hat, damit jeder dieser Werthe $\xi^{(\varkappa)}$ in der Umgebung des vorhergehenden und der letzte $\xi^{(\alpha)}$ in der Umgebung von x gelegen sei (wobei diese Werthe überdies auch noch so zu wählen sind, dass sie auf dem vorgeschriebenen, von ξ nach x hinführenden Wege liegen), um so mehr häufen sich die in die Rechnung eintretenden unendlichen Reihen und damit die Schwierigkeiten der Ausführung dieser Rechnung.

Am einfachsten lassen sich diese Schwierigkeiten beseitigen, wenn es gelingt, eine Darstellung für die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ zu finden, die für den ganzen Bereich T unbeschränkte Gültigkeit hat, die also nicht nur die Werthbestimmung bei Fortsetzung auf directem Wege, sondern auch bei Fortsetzung auf beliebigem die Querschnitte überschreitendem Wege gestattet. Solche Darstellungen sind nun in der That von Herrn Fuchs gegeben worden; dieselben liefern zugleich eine Bestimmung der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$. Wir wollen die eine dieser Darstellungen jetzt vorführen, bemerken aber, dass wir später für die Lösung der erwähnten beiden Aufgaben noch andere Methoden entwickeln werden, die besonderen Zwecken zu dienen geeignet sind.

103. Darstellung eines Particularintegrals in Form einer Reihe.

Da diese Darstellung auch ohne weiteres auf eine nicht homogene Differentialgleichung anwendbar bleibt, so betrachten wir gleich die complette Differentialgleichung

(1) $$D(y) = y^{(n)} - p_1(x)y^{(n-1)} - \cdots - p_n(x)y = p(x),$$

wo nun auch $p(x)$ eine rationale Function bedeuten soll.

Wir denken uns den Differentialausdruck $D(y)$ als Differenz zweier Differentialausdrücke

$$D(y) = D_1(y) - D_2(y)$$

dargestellt, so dass $D_1(y)$ die n^{te} Ableitung von y enthält, $D_2(y)$ aber höchstens bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung ansteigt; dann hat (1) die Form

$$D_1(y) = D_2(y) + p(x).$$

Sei $y(x)$ ein Integral von (1), welches für den regulären Werth $x = \xi$ mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen die vorgeschriebenen Anfangswerthe

(2) $$y(\xi) = \eta, \quad y'(\xi) = \eta_1, \cdots y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

annimmt, und bedeute u_0 ein Integral der homogenen Differentialgleichung

(3) $$D_1(y) = 0,$$

welches den für $y(x)$ vorgeschriebenen Anfangsbedingungen (2) genügt. Ein solches Integral u_0 ist stets angebbar, wenn $D_1(y)$ wirklich die

n^{te} Ableitung enthält und überdies keinen von den singulären Punkten von (1) verschiedenen singulären Punkt besitzt.

Setzen wir dann

$$y = u_0 + u,$$

so genügt u der Differentialgleichung

$$D_1(u_0 + u) = D_2(u_0 + u) + p(x),$$

oder wenn wir die bekannte Function

$$p(x) + D_2(u_0) = F_0(x)$$

setzen, so muss u ein Integral der Differentialgleichung

$$D_1(u) - D_2(u) = F_0(x),$$

und zwar, da u mit seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = \xi$ verschwindet, das zu $x = \xi$ gehörige Hauptintegral (vergl. S. 78) derselben sein. Sei ebenso u_1 das Hauptintegral der Differentialgleichung

$$D_1(u) = F_0(x),$$

und setzen wir

$$u = u_1 + v,$$

so hat v das Hauptintegral zu sein von

$$D_1(v) = D_2(v) + F_1(x),$$

wo

$$F_1(x) = D_2(u_1)$$

gesetzt wurde. Sei allgemein $u_\varkappa$ das Hauptintegral von

(4) $$D_1(y) = F_{\varkappa-1}(x),$$

$v_{\varkappa-1}$ das Hauptintegral von

(5) $$D_1(y) = D_2(y) + F_\varkappa(x),$$

wo

$$F_{\varkappa-1}(x) = D_2(u_{\varkappa-1}), \quad F_\varkappa(x) = D_2(u_\varkappa)$$

gesetzt wurde, und $\varkappa$ die Werthe $2, 3, \cdots r$ durchläuft, so ist

(6) $$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_r + v_{r-1}.$$

Wir werden diesen Process ins Unendliche fortsetzen und auf diese Weise eine unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

erhalten; von dieser wird gezeigt werden, dass sie convergirt und das Integral y darstellt. Ehe wir aber auf diesen Convergenzbeweis eingehen, haben wir die Beschaffenheit der $u_\varkappa$ noch genauer zu untersuchen.

104. Untersuchung der einzelnen Glieder der Reihe, allgemein und unter einer besonderen Annahme.

Bedeute $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung (3), so ist $u_\varkappa$, das Hauptintegral von (4), in der Form

$$u_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_{\xi}^{x} F_{\varkappa-1}(x) \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} dx$$

darstellbar (vergl. Nr. 26, S. 78), wo

$$\Delta(x) = D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \sum \pm y_1 \, y_2' \cdots y_n^{(n-1)},$$

$$\Delta_\varkappa(x) = \frac{\partial \Delta(x)}{\partial \left[y_\varkappa^{(n-1)}\right]}$$

gesetzt wurde. Setzt man

$$c_{\varkappa i} = \int_{\xi}^{x} F_{\varkappa-1}(x) \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} dx,$$

so sind dies die bei der Lagrange'schen Methode variirten Constanten, und es ist demnach (vergl. Nr. 26, S. 77)

$$u_\varkappa^{(\varrho)} = \sum_{i=1}^{n} c_{\varkappa i} y_i^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 0, 1, \cdots n-1).$$

Setzen wir

$$D_2(y) = q_{n-1} y^{(n-1)} + q_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + q_0 y,$$

so ist

$$F_\varkappa(x) = D_2(u_\varkappa) = q_{n-1} u_\varkappa^{(n-1)} + q_{n-2} u_\varkappa^{(n-2)} + \cdots + q_0 u_\varkappa,$$

also

$$F_\varkappa(x) = \sum_{i=1}^{n} D_2(y_i) \int_{\xi}^{x} F_{\varkappa-1}(t) \frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)} dt,$$

wo wir der bequemeren Rechnung wegen jetzt die Integrationsvariable durch t bezeichnet haben. Nun ist aber $D_2(y_i(x))$ von t unabhängig und kann folglich unter das Integralzeichen genommen werden; wenn wir also

$$\sum_{i=1}^{n} D_2(y_i(x)) \Delta_i(t) = \Delta(t, x)$$

setzen, d. h.

$$\Delta(t, x) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ D_2(y_1, x) & D_2(y_2, x) & \cdots & D_2(y_n, x) \end{vmatrix},$$

so ist

$$(7) \qquad F_\varkappa(x) = \int_\xi^x \frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)} F_{\varkappa-1}(t) dt.$$

Wir haben auf diese Weise eine Recursionsformel für die $F_\varkappa(x)$, die uns diese Grössen für $\varkappa = 1, 2, 3, \cdots$ liefert, wenn das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ und $F_0(x)$ bekannt sind. Analog ergiebt sich, wenn

$$\sum_{i=1}^n y_i(x)\Delta_i(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix} = \Delta_1(t, x)$$

gesetzt wird,

$$(8) \qquad u_\varkappa = \int_\xi^x F_{\varkappa-1}(t) \frac{\Delta_1(t, x)}{\Delta(t)} dt.$$

Wir wollen nun die eben erhaltenen Formeln unter der besonderen Annahme

$$(9) \qquad D_1(y) = y^{(n)}, \quad D_2(y) = p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y$$

weiter ausrechnen. Zu dem Ende beachten wir zunächst, dass allgemein

$$\frac{\partial^\varkappa \Delta_1(t, x)}{\partial x^\varkappa} = \sum_{i=1}^n y_i^{(\varkappa)}(x) \Delta_i(t)$$

und andererseits

$$\Delta(t, x) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} q_\varkappa(x) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(\varkappa)}(x) & y_2^{(\varkappa)}(x) & \cdots & y_n^{(\varkappa)}(x) \end{vmatrix},$$

d. h. also

$$(10) \qquad \Delta(t, x) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} q_\varkappa(x) \frac{\partial^\varkappa \Delta_1(t, x)}{\partial x^\varkappa}$$

gefunden wird, während sich

$$(11)\qquad \frac{\partial \Delta_1(t,x)}{\partial t} = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-3)}(t) & \cdots & y_n^{(n-3)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \\ y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}$$

ergiebt. Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (3) ist, unter der Annahme (9) z. B.

$$1,\quad x-\xi,\quad (x-\xi)^2,\ \cdots\ (x-\xi)^{n-1};$$

mit Hülfe desselben stellt sich das den Anfangsbedingungen (2) genügende Integral u_0 von (3) in der Form

$$(12)\qquad u_0 = \eta + \eta_1 \frac{x-\xi}{1} + \eta_2 \frac{(x-\xi)^2}{2!} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}$$

dar. Für $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$ $y_n(x)$ wählen wir das Fundamentalsystem

$$y_\varkappa(x) = x^{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

dann ergiebt sich durch einfache Rechnung

$$\Delta(x) = 1!\ 2!\ \cdots\ (n-1)!,$$

$$\Delta_1(t,x) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^{n-1} \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & (n-1)t^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt leicht die Gleichung

$$\frac{\partial \Delta_1(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta_1(t,x)}{\partial x}.$$

Demnach ist in diesem Falle $\Delta_1(t,x)$ eine blosse Function von $t-x$, und zwar offenbar eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Da aber die Ausdrücke

$$\Delta_1(t,x),\quad \frac{\partial \Delta_1(t,x)}{\partial x},\ \cdots\ \frac{\partial^{n-2} \Delta_1(t,x)}{\partial x^{n-2}}$$

für $t = x$ identisch verschwinden, und

$$\left[\frac{\partial^{n-1} \Delta_1(t,x)}{\partial x^{n-1}}\right]_{t=x} = \Delta(t)$$

ist, so erhalten wir einfach

$$\Delta_1(t,x) = \Delta(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hiernach ergiebt sich aus Gleichung (10):

$$\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)} = p_1(x) + p_2(x)(x-t) + \cdots + p_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich $f(x, t)$, so erhalten wir also unter der Annahme (9) die Formeln

$$(13)\quad \begin{cases} F_\varkappa(x) = \int\limits_\xi^x f(x, t)\, F_{\varkappa-1}(t)\, dt, \\ f(x, t) = \sum\limits_{\varkappa=1}^{n} p_\varkappa(x)\, \frac{(x-t)^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!}, \\ F_0(x) = D_2(u_0) + p(x), \\ u_\varkappa = \int\limits_\xi^x F_{\varkappa-1}(t)\, \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt, \end{cases}$$

denen noch die Gleichung (12) hinzuzufügen wäre.

105. Untersuchung des Restgliedes und Convergenzbeweis.

Wir wenden uns nun im allgemeinen Falle zur Convergenzuntersuchung, und beachten dabei zuvörderst, dass das Restglied v_{r-1} der Reihe (6) als Hauptintegral der Differentialgleichung (5) für $\varkappa = r$ leicht dargestellt werden kann, wenn wir ein Fundamentalsystem $w_1, w_2, \cdots w_n$ der reducirten Differentialgleichung

$$(14)\qquad D_1(y) - D_2(y) = 0$$

kennen. Setzen wir nämlich

$$\mathsf{E}(x) = D(w_1, w_2, \cdots w_n),$$

$$\mathsf{E}_\varkappa(x) = \frac{\partial\, \mathsf{E}(x)}{\partial\left[w_\varkappa^{(n-1)}\right]},$$

so ergiebt sich

$$(15)\qquad v_{r-1} = \sum_{i=1}^{n} w_i(x) \int\limits_\xi^x F_r(t)\, \frac{\mathsf{E}_i(t)}{\mathsf{E}(t)}\, dt.$$

In Bezug auf die in den entwickelten Formeln auftretenden von ξ nach x erstreckten Integrale bemerken wir ferner, dass wir uns die Integration auf einem beliebigen innerhalb T verlaufenden, d. h. die singulären Punkte der Differentialgleichung nicht berührenden endlichen Wege L_x vollzogen denken können. Dann bleiben, wenn, wie schon hervorgehoben, die Theilung von $D(y)$ so eingerichtet wird, dass die

Coefficienten von $D_1(y)$ an keiner, von den singulären Stellen der Differentialgleichung (1) verschiedenen Stelle unendlich werden, die $y_1, y_2, \cdots y_n$ während des Verlaufes der Integration endlich und stetig, es behält folglich auch der Ausdruck

$$\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)}$$

stets einen endlichen Werth. Sei der Maximalwerth des absoluten Betrages von

$$F_0(x) = D_2(u_0) + p(x)$$

auf dem Integrationswege L_x gleich N, der Maximalwerth von

$$\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)}$$

auf demselben Wege gleich M, so folgt, wenn wir die Länge des Weges L_x gleich S_x setzen, also S_x durch die Gleichung

$$\int_{\xi}^{x} dt = S_x$$

erklären, aus der Gleichung (7) für $\varkappa = 1, 2, \cdots r$,

$$|F_1(x)| \leq MNS_x,$$
$$|F_2(x)| \leq \frac{1}{2} M^2 NS_x^2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$|F_r(x)| \leq \frac{1}{r!} M^r NS_x^r,$$

und da die Reihe

(16) $$N\left\{\frac{MS_x}{1!} + \frac{(MS_x)^2}{2!} + \frac{(MS_x)^3}{3!} + \cdots\right\}$$

für jeden endlichen Werth von S_x convergirt, so schliessen wir hieraus, dass die Reihe

(17) $$F_0(x) + F_1(x) + F_2(x) + \cdots$$

innerhalb T unbedingt und gleichmässig convergent ist. Da ferner auch

$$\frac{\Delta_1(t, x)}{\Delta(t)}, \quad \frac{E_i(t)}{E(t)}$$

unterhalb einer bestimmten Grenze bleiben, wenn t den Weg L_x durchläuft, so folgt nunmehr aus der Convergenz der Reihen (16), (17) einerseits die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

und andererseits die Gleichung

$$\lim_r v_{r-1} = 0,$$

so dass sich also aus (6) die Darstellung

(18)
$$y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} u_\varkappa$$

ergiebt.

Für die durch die Gleichungen (9) charakterisirte Form der Zerlegung von $D(y)$ kann noch eine weitere Umformung der $u_\varkappa$ vorgenommen werden. Die Differentiation des Ausdruckes von $u_\varkappa$ in den Gleichungen (13) nach x ergiebt

$$\frac{d^n u_\varkappa}{dx^n} = F_{\varkappa-1}(x),$$

also, da $u_\varkappa$ mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für $x = \xi$ verschwindet,

$$u_\varkappa = \int_\xi^{x\,(n)} F_{\varkappa-1}(x)\,(dx)^n,$$

wo durch den Ausdruck auf der rechten Seite das n-fach iterirte Integral nach x angedeutet wird. Setzen wir nun noch für $F_{\varkappa-1}(x)$ seinen Werth

$$F_{\varkappa-1}(x) = D_2(u_{\varkappa-1}) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots),$$
$$F_0(x) \quad = D_2(u_0) + p(x),$$

so erhalten wir die Recursionsformel

(19)
$$\begin{cases} u_\varkappa = \displaystyle\int_\xi^{x\,(n)} \{p_1(x) u_{\varkappa-1}^{(n-1)} + p_2(x) u_{\varkappa-1}^{(n-2)} + \cdots + p_n(x) u_{\varkappa-1}\}\,(dx)^n \\ \qquad\qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n), \\ u_1 = \displaystyle\int_\xi^{x\,(n)} \{p_1(x) u_0^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) u_0 + p(x)\}\,(dx)^n, \end{cases}$$

während u_0 durch die Gleichung (12) gegeben ist.

Zweites Kapitel.

106. Untersuchung der Integrale als Functionen der in den Coefficienten auftretenden Parameter. Darstellung der Substitutionscoefficienten.

Wenn die $p_1(x), \cdots p_n(x), p(x)$ rationale Functionen von x sind, so ist jedes der $u_\varkappa$ eine Function, die durch iterirte Integration rationaler Ausdrücke entsteht. Die Darstellung (18) von y gestattet uns dann den Werth von y zu berechnen an irgend einer Stelle x, die nicht zu den singulären Punkten gehört, wenn der Weg vorgeschrieben wird, auf welchem die Variable von ξ aus nach jener Stelle x gelangt; über diesen Weg ist dann immer die letzte der bei Bildung der $u_\varkappa$ erforderlichen Integrationen zu erstrecken. Die Werthe der successiven Ableitungen von y erhalten wir zufolge der über die Reihe (18) gefundenen Ergebnisse durch gliedweise Differentiation dieser Reihe, also ist insbesondere

$$(20) \qquad y^{(n-\alpha)} = \sum_{\varkappa=0}^{x} u_\varkappa^{(n-\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n-1),$$

wo

$$(21) \qquad u_\varkappa^{(n-\alpha)} = \int_\xi^{x(\alpha)} \left(p_1(x) u_{\varkappa-1}^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) u_{\varkappa-1}\right) (dx)^\alpha .$$

Diese Darstellung ist nun in hervorragender Weise dazu geeignet, um daran die Art der Abhängigkeit eines Integrals von den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern zu studiren, wobei indessen bemerkt werden muss, dass je nach der Art, wie diese Parameter in die Differentialgleichung eingehen, nicht gerade die Zerlegung (9) von $D(y)$ die zweckmässigste sein wird, vielmehr wird man die Zerlegung dem besonderen vorliegenden Falle anzupassen haben. Man hat nur immer dafür zu sorgen, dass die Integrale der Differentialgleichung (3) in einfacher Weise angebbar seien, damit sich u_0 in einer für die Untersuchung brauchbaren Form darstellt.

Wir nehmen im Folgenden $p(x) = 0$, d. h. die Differentialgleichung (1) homogen; überdies können wir uns vorstellen, dass der Punkt $x = \infty$ eine reguläre Stelle oder doch eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung ist, denn sollte dies nicht von vorneherein der Fall sein, so wäre nur an Stelle von x etwa

$$\frac{1}{x-a}$$

als neue unabhängige Variable einzuführen, wo a eine Stelle der Bestimmtheit (reguläre oder singuläre) bedeutet. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Gestalt der Coefficienten in der Umgebung von $x=\infty$, wie wir sie in der Nr. 59 (S. 211) festgestellt hatten, dass die rationalen Functionen $p_1(x), \cdots p_n(x)$, in Partialbrüche zerlegt, die Form

$$(22) \qquad p_\lambda(x) = \sum_h \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{A_{h\lambda i}}{(x-a_i)^h} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

haben müssen, wo die $A_{h\lambda i}$ Constanten, $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die im Endlichen gelegenen singulären Punkte von (1) bedeuten.

Denken wir uns diese Werthe in die Ausdrücke (19), (21) eingesetzt, so ersehen wir zunächst, dass sich jedes $u_\varkappa$ als ganze rationale Function der $A_{h\lambda i}$ darstellt. Da die Entwickelungen (18), (20) für alle endlichen Werthe der $A_{h\lambda i}$ unbedingt convergent sind, so können wir uns nach Potenzen dieser Grössen geordnet denken und erhalten auf diese Weise y mit seinen successiven Ableitungen in der Form beständig convergenter Potenzreihen dieser $A_{h\lambda i}$.

Es sind also die Integrale der Differentialgleichung (1) ganze transcendente Functionen der $A_{h\lambda i}$.

Die Coefficienten C dieser Entwickelungen

$$(23) \qquad y = \sum C A^{\mu_1}_{h_1\lambda_1 i_1} A^{\mu_2}_{h_2\lambda_2 i_2} \cdots A^{\mu_\varkappa}_{h_\varkappa \lambda_\varkappa i_\varkappa}$$

erscheinen in der Form iterirter Integrale rationaler Functionen, in deren Nenner nur die Linearfactoren

$$x-a_1 \quad x-a_2, \cdots x-a_\sigma$$

auftreten können. Solche iterirte Integrale lassen sich nun offenbar mit Hülfe von Transcendenten darstellen, die durch die Gleichungen

$$\Lambda(x, \xi;\ \alpha_1) = \int_\xi^x \frac{dx}{x-\alpha_1},$$

$$\Lambda(x, \xi;\ \alpha_1, \alpha_2) = \int_\xi^x \frac{\Lambda(x, \xi;\ \alpha_1)\, dx}{x-\alpha_2},$$

. . . .

$$\Lambda(x, \xi;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) = \int_\xi^x \frac{dx}{x-\alpha_m} \int_\xi^x \frac{dx}{x-\alpha_{m-1}} \cdots \int_\xi^x \frac{dx}{x-\alpha_1}$$

definirt werden, und wo die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ irgend welche der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ in bestimmter Aufeinanderfolge und mit unbeschränkter Wiederholung bedeuten. Die gedachten iterirten Integrale ergeben sich nämlich als lineare Functionen dieser Λ mit in x rationalen Coefficienten. In dieser Form sind also die Coefficienten C der Entwickelung (23) darstellbar, und diese Darstellung lässt zugleich die Art der Abhängigkeit des Integrals y von den singulären Punkten der Differentialgleichung hervortreten. Wie wir sehen ist diese Abhängigkeit von wesentlich anderer Natur als die von den $A_{h\lambda i}$. Wir wollen dieselbe nunmehr in dem Falle genauer studiren, wo der Fortsetzungsweg ein geschlossener ist, wo also die Reihen (18), (20) constante, d. h. von x unabhängige Werthe darstellen.

Die Bedeutung dieser geschlossenen Integrale ist leicht zu übersehen. Zunächst bemerken wir, dass die Werthe, welche die $y, y', y'', \cdots$ annehmen, wenn wir dieselben von einer Stelle x ausgehend auf einem zu x zurückkehrenden geschlossenen Wege U_x fortsetzen, offenbar nur davon abhängen, wie oft und in welcher Aufeinanderfolge dieser Weg die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ der in der Nr. 102 (S. 367) definirten Fläche T überschreitet. Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1), y_α definirt durch die Anfangsbedingungen

$$\eta_\lambda = 0, \quad \lambda \neq n - \alpha, \quad \eta_0 = \eta,$$
$$\eta_{n-\alpha} = 1,$$

und bezeichnen wir die diesen Anfangsbedingungen gemäss gebildeten Grössen $u_\varkappa$ durch $u_{\varkappa\alpha}$, so dass also nach Gleichung (12)

$$u_{0\alpha} = \frac{(x-\xi)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

zu nehmen ist. Bezeichnen wir ferner, wie in der Nr. 102 (S. 368) durch

$$\Theta^\lambda y_\alpha^{(\beta)}$$

dasjenige, was aus $y_\alpha^{(\beta)}$ wird, wenn x den Umlauf U_x λ-mal vollzogen hat, einen Umlauf, der sich durch stetige Deformation innerhalb T in einen Weg überführen lassen möge, der zunächst in T von x nach ξ, dann auf einem Wege U, der gewisse der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ überschreitet, nach ξ zurück, und endlich von ξ wieder auf einem innerhalb T verlaufenden Wege nach x geht. Dann ist

$$\Theta y_\alpha^{(\beta)} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma} y_\gamma^{(\beta)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $a_{\alpha\gamma}$ n^2 Constanten bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet, und für $x = \xi$ ist insbesondere zufolge der für die y_α festgesetzten Anfangsbedingungen (vergl. S. 320)

$$(24) \qquad a_{\alpha\gamma} = \Theta y_\alpha^{(n-\gamma)}(\xi);$$

diese Constanten, die Coefficienten der Substitution S, die das Fundamentalsystem $y_1, \cdots y_n$ bei dem Umlaufe U_x erfährt, hängen noch von ξ ab. Bilden wir die Ausdrücke der $y_\alpha^{(\beta)}(x)$ gemäss den Gleichungen (18), (20) mit Hülfe der $u_{\varkappa\alpha}^{(\beta)}$ und erstrecken diese iterirten Integrale, d. h. die letzte von den bei Bildung derselben auszuführenden Integrationen über den geschlossenen Weg U, so erhalten wir nichts anderes als die

$$\Theta y_\alpha^{(\beta)}(\xi);$$

diese und somit die $a_{\alpha\gamma}$ stellen sich demnach dar als ganze transcendente Functionen der $A_{h\lambda i}$ mit Coefficienten, die durch auf dem Wege U erstreckte geschlossene iterirte Integrale rationaler Functionen gegeben werden. Die Gleichung

$$a_{\alpha\gamma} - \omega\delta_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \cdots n)$$

ist die zum Umlaufe U_x gehörige Fundamentalgleichung, ihre Coefficienten und Wurzeln sind folglich unabhängig von ξ; diese Coefficienten erscheinen gleichfalls als ganze transcendente Functionen der $A_{h\lambda i}$, und die in den Entwickelungen dieser Functionen nach Potenzen der $A_{h\lambda i}$ als Coefficienten auftretenden Combinationen geschlossener iterirter Integrale geniessen die besondere Eigenschaft, von ξ unabhängig zu sein.

Der erste Theil dieses Ergebnisses stimmt mit dem in der Nr. 85 (S. 306) gefundenen Resultate überein; für die wirkliche Berechnung der Coefficienten der Fundamentalgleichung wird es aber, wie auch in der Nr. 89, zweckmässiger sein, dieselben nicht direct, sondern erst die Potenzsummen der Wurzeln der Fundamentalgleichung zu berechnen. Wir finden diese (vergl. Nr. 89, S. 321), indem wir die Ausdrücke der

$$a_{\alpha, n-\beta}^{(\lambda)} = \Theta^\lambda y_\alpha^{(\beta)}(\xi)$$

durch die $u_{\varkappa\alpha}^{(\beta)}$ herstellen, wobei dann die zur Bildung dieser Grössen erforderlichen iterirten Integrale über den λ-mal zu durchlaufenden geschlossenen Weg U zu erstrecken sind, in der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\alpha}^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots),$$

wo $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ die Wurzeln der Fundamentalgleichung bedeuten.

107. Die Günther'sche Entwickelung der Coefficienten der zu einem Kreisringe gehörigen Fundamentalgleichung für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es sollen nun diese Ausdrücke für den Fall wirklich berechnet werden, wo der geschlossene Weg U innerhalb eines um den Punkt $x = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreisringes E verläuft, der keinen der singulären Punkte enthält und dessen innerer Kreis gewisse $a_1, a_2, \cdots a_\tau$ einschliesst, während der äussere Kreis die übrigen $a_{\tau+1}, \cdots a_\sigma$ ausschliesst. Wir beschränken uns dabei, um allzu weitläufige Rechnungen zu vermeiden, auf die Betrachtung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der wir überdies den Coefficienten der ersten Ableitung gleich Null annehmen (vergl. Nr. 81), und legen also den folgenden Betrachtungen die Differentialgleichung

$$y^{(2)} = p_2(x)y \tag{25}$$

zu Grunde. Für dieselbe lautet die Darstellung (18) eines durch seine Anfangswerthe η, η_1 bei $x = \xi$ gegebenen Integrals:

$$y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} u_\varkappa,$$

wo jetzt nach (19)

$$u_\varkappa = \int_\xi^x dx \int_\xi^x p_2(x) u_{\varkappa-1}\, dx \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots),$$

und nach (12)

$$u_0 = \eta + \eta_1(x - \xi)$$

zu nehmen ist. Für das Fundamentalsystem

$$y_1, \quad \eta = 0, \quad \eta_1 = 1,$$
$$y_2, \quad \eta = 1, \quad \eta_1 = 0$$

ist demzufolge

$$u_{01} = x - \xi, \quad u_{02} = 1,$$

also haben wir

$$y_1 = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} u_{\varkappa 1}, \quad y_2 = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} u_{\varkappa 2},$$
$$y_1' = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} u_{\varkappa 1}', \quad y_2' = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} u_{\varkappa 2}',$$

und es sind

$$u_{\varkappa 1} = \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} p_2(x)dx \int\limits_{\xi}^{x} \cdots \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} (x - \xi) p_2(x) dx,$$

$$u_{\varkappa 2} = \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} p_2(x)dx \int\limits_{\xi}^{x} \cdots \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} p_2(x) dx$$

$2\varkappa$-fach iterirte Integrale,

$$u'_{\varkappa 1} = \int\limits_{\xi}^{x} p_2(x)dx \int\limits_{\xi}^{x} \cdots \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} (x - \xi) p_2(x) dx,$$

$$u'_{\varkappa 2} = \int\limits_{\xi}^{x} p_2(x)dx \int\limits_{\xi}^{x} \cdots \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} p_2(x) dx$$

$(2\varkappa - 1)$-fach iterirte Integrale. Die dem Umlaufe U_x entsprechende Substitution

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ist nach Nr. 81 (S. 288) eine unimodulare, d. h. es ist

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1;$$

die Fundamentalgleichung lautet also

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega \end{vmatrix} = \omega^2 - (a_{11} + a_{22})\omega + 1 = 0,$$

und der einzige zu berechnende Coefficient ist folglich

$$a_{11} + a_{22} = \Theta y_1'(\xi) + \Theta y_2(\xi).$$

D. h. aber, es ist

$$a_{11} + a_{22} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (\bar{u}'_{\varkappa 1} + \bar{u}_{\varkappa 2}) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} C_\varkappa,$$

wo $\bar{u}_{\varkappa i}$, $\bar{u}'_{\varkappa i}$ die Werthe von $u_{\varkappa i}$, $u'_{\varkappa i}$ bedeuten, wenn wir uns diese iterirten Integrale über den geschlossenen Weg U erstreckt denken. Durch partielle Integration lässt sich dann $C_\varkappa$ in die Form setzen

$$(26)\qquad C_\varkappa = \int\limits_{\xi}^{\xi} p_2 dx \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} \cdots \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} x p_2 dx$$

$$- \int\limits_{\xi}^{\xi} x p_2 dx \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} \cdots \int\limits_{\xi}^{x} dx \int\limits_{\xi}^{x} p_2 dx,$$

wo die letzte Integration von ξ nach diesem Punkte zurück über den Weg U zu erstrecken ist.

Sei die rationale Function

$$(27)\qquad p_2(x) = \sum_h \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{A_{hi}}{(x-a_i)^h}$$

innerhalb des Kreisringes E entwickelt:

$$(28)\qquad p_2(x) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \alpha_\varkappa x^\varkappa,$$

und setzen wir allgemein

$$(29)\qquad J(x, \xi;\, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m) = \int_\xi^x x^{\mu_m} dx \int_\xi^x x^{\mu_{m-1}} dx \int_\xi^x \cdots \int_\xi^x x^{\mu_1} dx,$$

so ist, wenn wir mit

$$J(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m)$$

dasjenige bezeichnen, was aus diesem m-fach iterirten Integrale wird, wenn wir die letzte Integration über den geschlossenen Weg U erstrecken, nach (26)

$$(30)\qquad \begin{aligned} C_\varkappa = \sum_{(i_1, \cdots i_\varkappa)} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_\varkappa} \{ & J(i_1 + 1, 0, i_2, 0, \cdots i_\varkappa) \\ & - J(i_1, 0, i_2, 0, \cdots i_\varkappa + 1)\}. \end{aligned}$$

Machen wir in (29) die Substitution

$$x = \xi t,$$

so wird

$$(31)\qquad J(x, \xi;\, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m) = \xi^{\varrho_1} J(t, 1;\, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m),$$

wo

$$\varrho_1 = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m + m$$

ist, und wir haben nun, um $J(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m)$ zu bestimmen, t einen gewissen von $t = 1$ ausgehenden Umlauf um $t = 0$ beschreiben zu lassen. Zufolge der Gleichung (31) erscheint $C_\varkappa$ in (30) als ganze rationale Function von ξ und ξ^{-1}, also $a_{11} + a_{22}$ in Form einer nach ganzen Potenzen von ξ fortschreitenden Reihe. Da dieser Ausdruck aber von ξ unabhängig sein muss, so haben wir bei der Berechnung nur die von ξ unabhängigen Glieder beizubehalten, d. h. nur diejenigen Glieder in (30), die der Wahl $\varrho_1 = 0$ in (31) entsprechen; die Summation in (30) hat sich also nur auf diejenigen Werthsysteme $i_1, i_2, \cdots i_\varkappa$ zu erstrecken, für welche

$$\sum_{h=1}^{\varkappa} i_h = -2\varkappa \tag{32}$$

ist. Wenn innerhalb des inneren Kreises von E nur der einzige singuläre Punkt $x = 0$ gelegen ist, so enthält die Entwickelung (28) nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen; in diesem Falle wird die Gleichung (32) nur durch eine endliche Anzahl von Werthsystemen $i_1, i_2, \cdots i_\varkappa$ befriedigt, d. h. $C_\varkappa$ setzt sich nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern zusammen; in jedem anderen Falle dagegen erscheint $C_\varkappa$ in Form einer unendlichen Reihe.

Die Function

$$J(t, 1;\, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m) = \int\limits_1^t t^{\mu_m} dt \int\limits_1^t t^{\mu_{m-1}} dt \int\limits_1^t \cdots \int\limits_1^t t^{\mu_1} dt \tag{33}$$

bildet mit 1 und den Ausdrücken

$$\int\limits_1^t t^{\mu_m} dt \int\limits_1^t t^{\mu_{m-1}} dt \int\limits_1^t \cdots \int\limits_1^t t^{\mu_\alpha} dt \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots m)$$

zusammen nach Nr. 19 ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$t^{\mu_1 + \cdots + \mu_m} \frac{d}{dt} t^{-\mu_1} \frac{d}{dt} t^{-\mu_2} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} t^{-\mu_m} \frac{dz}{dt} = 0$$

oder

$$z^{(m+1)} + \frac{A_1}{t} z^{(m)} + \frac{A_2}{t^2} z^{(m-1)} + \cdots + \frac{A_m}{t^m} z = 0,$$

deren determinirende Fundamentalgleichung

$$\varphi(\varrho) = \varrho \sum_{\lambda=0}^{m} A_\lambda (\varrho - 1) \cdots (\varrho - m + \lambda) = 0, \quad A_0 = 1, \tag{34}$$

nebst $\varrho = 0$ die Wurzeln

$$\varrho_\alpha = \mu_m + \cdots + \mu_\alpha + m - \alpha + 1 \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots m)$$

besitzen muss. Durch die Substitution

$$\tau = \log t$$

verwandelt sich diese Differentialgleichung (vergl. Nr. 69) in eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten, und der Ausdruck (33) ist dasjenige Integral derselben, welches mit seinen $(m-1)$ ersten Ableitungen für $\tau = 0$ verschwindet und dessen m^{te} Ableitung für $\tau = 0$ den Werth Eins annimmt. Nach der Cauchy'schen Integrationsmethode ergiebt sich demnach (Nr. 69, S. 247)

$$J(t,\ 1;\ \mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\ \mu_m) = \int \frac{t^\varrho}{\varphi(\varrho)}\, d\varrho,$$

das Integral erstreckt über eine geschlossene Curve, welche die sämmtlichen Wurzeln $0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \cdots\ \varrho_m$ der charakteristischen Gleichung (34) einschliesst.

Wenn nun der geschlossene Weg U ein einfacher Umlauf innerhalb des Kreisringes E ist, so ist der entsprechende Umlauf der Variabeln t ein von $t = 1$ ausgehender einfacher Umgang um $t = 0$; wir erhalten also

$$J(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\ \mu_m) = \xi^{\varrho_1} \int \frac{e^{2\pi i \varrho}}{\varphi(\varrho)}\, d\varrho, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Wir wollen den zur Bildung dieses Integrals erforderlichen Integrationsweg zusammensetzen aus einzelnen Umläufen um die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung (34). Seien diese $\varrho_1,\ \varrho_2,\ \cdots\ \varrho_\varkappa$, und zwar sei ϱ_α eine λ_α-fache Wurzel, also

$$\frac{1}{\varphi(\varrho)} = \frac{1}{(\varrho - \varrho_\alpha)^{\lambda_\alpha}}\, \varphi_\alpha(\varrho),$$

wo $\varphi_\alpha(\varrho)$ in der Umgebung von $\varrho = \varrho_\alpha$ nach positiven ganzen Potenzen entwickelbar ist. Denken wir uns dann auch $e^{2\pi i \varrho}$ nach Potenzen von $\varrho - \varrho_\alpha$ entwickelt, so finden wir

(35) $$J(\mu_1,\ \cdots\ \mu_m) = \xi^{\varrho_1} \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} \sum_{h=0}^{\lambda_\alpha - 1} \frac{b_{\alpha h} (2\pi i)^h}{h!},$$

wo

$$\left.\begin{aligned} b_{\alpha,\lambda_\alpha - 1} &= \varphi_\alpha(\varrho_\alpha) \\ b_{\alpha,h} &= \frac{1}{(\lambda_\alpha - h - 1)!} \frac{d^{\lambda_\alpha - h - 1} \varphi_\alpha(\varrho_\alpha)}{d\varrho_\alpha^{\lambda_\alpha - h - 1}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \cdots \varkappa \\ h = 0, 1, \cdots (\lambda_\alpha - 2) \end{pmatrix}.$$

Um nun den Ausdruck für $C_\varkappa$ zu bilden, bemerken wir zunächst, dass nach (26) und (30) $C_0 = 2$ ist; für $\varkappa \geq 1$ hat man für die beiden auf der rechten Seite von (30) unter dem Summenzeichen auftretenden J-Functionen die Darstellung (35) aufzusuchen. Setzt man

$$r_\alpha = \sum_{h=\alpha}^{\varkappa} i_h + 2(\varkappa - \alpha + 1),$$

so ist für die beiden mit $\alpha_{i_1}\ \cdots\ \alpha_{i_\varkappa}$ multiplicirten J-Functionen

$$m = 2\varkappa, \quad \text{und zufolge der Gleichung (32)}, \quad \varrho_1 = 0.$$

Ferner ist für

$$J(i_1 + 1,\ 0,\ \cdots\ i_\varkappa),$$

$$\varrho_2 = r_2,\ \varrho_3 = r_2 - 1,\ \cdots\ \varrho_{2\varkappa-1} = r_\varkappa - 1,\ \varrho_{2\varkappa} = 0,$$

dagegen für

$$J(i_1, 0, \cdots i_\varkappa + 1),$$

$$\varrho_2 = r_2 + 1,\ \varrho_3 = r_2,\ \cdots\ \varrho_{2\varkappa-1} = r_\varkappa,\ \varrho_{2\varkappa} = 0.$$

Dadurch sind die bei der Darstellung (35) anzuwendenden $b_{\alpha h}$ bestimmt, und man erkennt nun leicht, dass sich $C_\varkappa$ in die Form setzen lässt:

$$(36)\qquad C_\varkappa = \sum_{(i_1+i_2+\cdots+i_\varkappa=-2\varkappa)} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\varkappa} \sum_{(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_\varkappa)} \sum_{\alpha,h} \frac{2\, b_{\alpha h}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\varkappa)}}{h!} (2\pi i)^h,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_\varkappa$ eine Permutation der $i_1, i_2, \cdots i_\varkappa$ bedeutet, und die zweite Summation sich über alle möglichen dieser Permutationen erstreckt; die dritte Summation bezieht sich nur auf gerade Werthe von h, und die $b_{\alpha h}^{(\beta_1\cdots\beta_\varkappa)}$ sind durch die Gleichungen

$$J(\beta_1 + 1, 0, \cdots \beta_\varkappa) = \sum_{\alpha, h} \frac{b_{\alpha h}^{(\beta_1\cdots\beta_\varkappa)}}{h!} (2\pi i)^h$$

erklärt. Dass der Ausdruck für $C_\varkappa$ nur gerade Potenzen von $2\pi i$ enthalten kann, ist daraus zu schliessen, dass zu dem in entgegengesetztem Sinne vollzogenen Umlaufe U^{-1} die Substitution

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

und daher die Fundamentalgleichung

$$\omega^2 - (a_{11} + a_{22})\,\omega + 1 = 0$$

gehört, d. h. dieselbe Fundamentalgleichung wie zum Umlaufe U.

Berücksichtigt man nun die Art, wie sich die Coefficienten $a_\varkappa$ der Entwickelung (28) aus den Grössen A_{hi}, a_i in (27) zusammensetzen, so erkennt man unmittelbar aus der Darstellung (36), dass $a_{11} + a_{22}$ als (beständig convergente) Potenzreihe der A_{hi} erscheint mit Coefficienten, die sich als Summen unendlich vieler rationaler Functionen der $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ darstellen lassen. Analoges gilt für die Coefficienten der Fundamentalgleichung einer Differentialgleichung beliebig hoher Ordnung.

108. Entwickelung der Integrale einer Differentialgleichung vom Range Eins.

Um auch für eine Theilung von $D(y)$, die von der durch die Gleichungen (9) charakterisirten Form der Zerlegung verschieden ist, ein

Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, $D(y)$ sei die linke Seite einer Differentialgleichung vom Range Eins, also (vergl. S. 360)

$$D(y) = y^{(n)} + \left(A_{n-1} - Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) y^{(n-1)} + \cdots + \left(A_0 - Q_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) y.$$

Wir nehmen dann

$$D_1(y) = y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_0 y,$$

so dass

$$D_2(y) = Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) y^{(n-1)} + \cdots + Q_0\left(\frac{1}{x}\right) y$$

ist. Unter Festhaltung der im vorigen Abschnitte (Nr. 100) benutzten Bezeichnungen kann dann u_0 nach der Cauchy'schen Methode für die Integration einer Differentialgleichung mit constanten Coefficienten dargestellt werden als lineare homogene Function von

$$e^{c_1 x}, \; e^{c_2 x}, \; \cdots \; e^{c_n x}.$$

Diese letzteren Ausdrücke wählen wir nun auch als das Fundamentalsystem $y_1, \cdots y_n$, d. h. wir setzen

$$y_\varkappa = e^{c_\varkappa x} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n);$$

dann ist:

$$\Delta(x) = \left| c_i^{\varkappa-1} e^{c_i x} \right|_{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)} = e^{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x} \prod_{i \neq \varkappa} (c_i - c_\varkappa),$$

und

$$\Delta_\varkappa(x) = e^{\sum c_i x} \prod_{\lambda \neq i} (c_\lambda - c_i), \quad i \neq \varkappa,$$

also

$$\frac{\Delta_\varkappa(x)}{\Delta(x)} = e^{-c_\varkappa x} \frac{1}{\varphi'(c_\varkappa)},$$

wenn

$$\varphi_\varkappa(\varrho) = \varrho^n + A_{n-1} \varrho^{n-1} + \cdots + A_0$$

genommen wird. Wir erhalten demnach (vergl. Nr. 104)

$$u_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} e^{c_i x} \int_{\xi}^{x} F_{\varkappa-1}(x) \frac{e^{-c_i x}}{\varphi'(c_i)} dx \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots),$$

wo

$$F_0(x) = D_2(u_0) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \lambda_\varkappa e^{c_\varkappa x} \left\{ Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) c_\varkappa^{n-1} + Q_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) c_\varkappa^{n-2} + \cdots + Q_0\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

ist, wenn die Constanten $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ durch die Gleichung

$$u_0 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \lambda_\varkappa e^{c_\varkappa x}$$

definirt werden, und wo ferner

$$F_{\varkappa-1}(x) = Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) u_{\varkappa-1}^{(n-1)} + \cdots + Q_0\left(\frac{1}{x}\right) u_{\varkappa-1}$$

gefunden wird. Die Recursionsformel für $u_\varkappa$ lautet demnach

$$u_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{c_i x}}{\varphi'(a_i)} \int_\xi^x \left(Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) u_{\varkappa-1}^{(n-1)} + \cdots + Q_0\left(\frac{1}{x}\right) u_{\varkappa-1}\right) e^{-c_i x}\, dx$$

$$(\varkappa = 1, 2, \cdots).$$

Die Darstellung

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

kann dann auch mit Vortheil zur Untersuchung von y in der Umgebung von $x = \infty$ benutzt werden.

Drittes Kapitel.

109. Herstellung einer Differentialgleichung und ihrer adjungirten aus der Recursionsformel.

Wir fahren nun in der Untersuchung einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten fort und beginnen mit einigen Bemerkungen über die Recursionsformel einer solchen Differentialgleichung für eine Stelle der Bestimmtheit, als welche wir wie gewöhnlich $x = 0$ wählen wollen. Denken wir uns die Differentialgleichung durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von x auf die Form gebracht

$$(1)\quad P(y) = x^n \psi_n(x) y^{(n)} + x^{n-1} \psi_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + \psi_0(x) y = 0,$$

wo $\psi_n, \psi_{n-1}, \cdots \psi_0$ ganze rationale Functionen bedeuten und $\psi_n(x)$ für $x = 0$ nicht verschwinden darf. Wenn $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit sein soll, so lautet die Recursionsformel für eine der Differentialgleichung genügende Reihe von der Form

$$g(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^{\nu+\varrho}, \quad g_0(\varrho) \neq 0,$$

nach den in der Nr. 63 (S. 221 ff.) erlangten Ergebnissen:

$$(2)\quad \begin{aligned} g_\nu(\varrho) f_0(\varrho + \nu) + g_{\nu-1}(\varrho) f_1(\varrho + \nu - 1) + \cdots \\ + g_{\nu-m}(\varrho) f_m(\varrho + \nu - m) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

wo m den Grad der ganzen Functionen $\psi_n(x), \psi_{n-1}(x), \cdots \psi_0(x)$ bedeutet, und die $f_\lambda(\varrho)$ als Entwickelungscoefficienten der charakteristischen Function

$$x^\varrho f(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{n} \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - \varkappa + 1) \psi_\varkappa(x) = x^\varrho \sum_{\lambda=0}^{m} f_\lambda(\varrho) x^\lambda$$

definirt sind. Die Recursionsformel für das adjungirte Integral

$$g'(x, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(\sigma) x^{\sigma+\nu}, \quad g'_0(\sigma) \neq 0,$$

der zu (1) adjungirten Differentialgleichung

$$(3) \qquad (-1)^n P'(z) = \frac{d^n}{dx^n}(x^n \psi_n(x) z) - \cdots \pm \psi_0(x) z = 0$$

lautet dann, wenn die charakteristische Function derselben

$$x^\sigma f'(x, \sigma) = x^\sigma \sum_{\lambda=0}^{m} f'_\lambda(\sigma) x^\lambda$$

gesetzt wird,

$$g'_\nu(\sigma) f'_0(\sigma+\nu) + g'_{\nu-1}(\sigma) f'_1(\sigma+\nu-1) + \cdots + g'_{\nu-m}(\sigma) f'_m(\sigma+\nu-m) = 0,$$

oder da nach Nr. 87 (S. 312)

$$f'_\nu(\sigma) = f_\nu(-\sigma-\nu-1)$$

und

$$\sigma = -\varrho - 1$$

ist,

$$(4) \quad g'_\nu(\sigma) f_0(\varrho-\nu) + g'_{\nu-1}(\sigma) f_1(\varrho-\nu) + \cdots + g'_{\nu-m}(\sigma) f_m(\varrho-\nu) = 0.$$

Wir hatten schon in der Nr. 44 (S. 157) allgemein bemerkt, dass durch Angabe der charakteristischen Function auch umgekehrt die Differentialgleichung vollkommen bestimmt ist; es folgt hieraus, dass aus der Recursionsformel ebenfalls stets die Differentialgleichung hergestellt werden kann. Wir wollen dies für den jetzt zu behandelnden Fall rationaler Coefficienten explicite durchführen.

Sei also eine Reihe vorgelegt:

$$(5) \qquad g(x, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{r+\nu}, \quad g_0 \neq 0,$$

deren Coefficienten der m-gliedrigen linearen Recursionsformel

$$(6) \quad g_\nu f_0(r+\nu) + g_{\nu-1} f_1(r+\nu-1) + \cdots + g_{\nu-m} f_m(r+\nu-m) = 0$$

genügen, in welcher die $f_\lambda(r+\nu-\lambda)$ gegebene ganze rationale Functionen n^{ten} Grades von $\nu-\lambda$ bedeuten. Wir wollen zeigen, dass diese Reihe stets formell einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten Genüge leistet, und dass sie in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ convergirt, wenn $f_0(\varrho+\nu)$ nicht von niedrigerem als dem n^{ten} Grade ist.

Da die Recursionsformel (6) auch für $\nu = 0$ gelten soll, so muss zunächst

$$f_0(r) = 0$$

sein; daraus folgt, dass $f_0(r+\nu)$ keine von ν unabhängige Constante sein darf. Dies vorausgesetzt, denken wir uns $f_\lambda(\nu)$ nach den Regeln der Differenzenrechnung entwickelt, d. h. in der Form

$$f_\lambda(\nu) = f_\lambda(0) + \nu\,\Delta f_\lambda(0) + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f_\lambda(0) + \cdots$$
$$+ \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{n!}\Delta^n f_\lambda(0)$$

geschrieben, wo wie gewöhnlich

$$\Delta^i f_\lambda(\nu) = \Delta^{i-1} f_\lambda(\nu+1) - \Delta^{i-1} f_\lambda(\nu) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wurde. Wenn wir dann noch

$$\frac{1}{\mu!}\Delta^\mu f_\lambda(0) = \alpha_{\lambda,\mu}$$

setzen, so lautet die Recursionsformel (6)

$$\sum_{\lambda=0}^{m} g_{\nu-\lambda} \sum_{\mu=0}^{n} (r+\nu-\lambda)(r+\nu-\lambda-1)\cdots(r+\nu-\lambda-\mu-1)\alpha_{\lambda,\mu} = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $x^{r+\nu}$ und summiren in Bezug auf ν von 0 bis ∞, so kommt:

$$\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\lambda=0}^{m} x^{\lambda+\mu}\alpha_{\lambda,\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu+\mu}(r+\nu+1)\cdots(r+\nu+\mu)x^{\nu+r} = 0.$$

Durch formale Differentiation der Reihe (5) nach x folgt aber

$$\frac{d^\mu g(x,r)}{dx^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(r+\nu+\mu)(r+\nu+\mu-1)\cdots(r+\nu+1)g_{\nu+\mu}x^{r+\nu},$$

die Reihe $g(x, r)$ genügt folglich der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

(7) $$\sum_{\mu=0}^{n} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{m}\alpha_{\lambda,\mu}x^\lambda \frac{d^\mu y}{dx^\mu} = 0.$$

Die determinirende Fundamentalgleichung dieser Differentialgleichung bei $x = 0$ lautet

(8) $$\sum_{\mu=0}^{n}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\mu+1)\alpha_{0,\mu} = f_0(\varrho) = 0;$$

wenn dieselbe vom n^{ten} Grade in ϱ ist, so ist $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, und daraus folgt sofort die Convergenz der Reihe $g(x, r)$ nach dem Convergenzbeweise von Herrn Frobenius (Nr. 47). Und zwar erstreckt sich der Convergenzkreis dieser Reihe jedenfalls bis zu dem dem Punkte $x = 0$ zunächst gelegenen singulären Punkte der Differentialgleichung (7), d. h. wenn a die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{n}\alpha_{\lambda,n}x^\lambda = 0$$

bezeichnet, so convergirt die Reihe $g(x, r)$, wenn

$$|x| < |a|.$$

Aus der Recursionsformel (6) folgt ferner die Recursionsformel

$$(9) \qquad g'_\nu f_0(r-\nu) + g'_{\nu-1} f_1(r-\nu) + \cdots + g'_{\nu-m} f_m(r-\nu) = 0$$

für die der adjungirten Differentialgleichung von (7) genügende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu x^{s+\nu}, \qquad s = -r-1,$$

die, falls $f_0(\varrho)$ vom n^{ten} Grade ist, gleichfalls convergirt und das zu $g(x, r)$ adjungirte Integral darstellt. Man kann also mit Hülfe der Recursionsformel (9) auch die adjungirte Differentialgleichung derjenigen, welcher $g(x, r)$ genügt, unmittelbar hinschreiben.

110. Differentialgleichungen vom Range Eins. Recursionsformel für die Normalreihen.

Denken wir uns die vorgelegte Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch Multiplication mit einer geeigneten ganzen Function auf die Form gebracht

$$(\mathrm{A}) \qquad P_n(x) y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = 0,$$

wo $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, und wo überdies P_n für $x=0$ nicht verschwinden möge, was durch eine einfache Substitution stets zu erreichen ist. — Sei $M_\varkappa$ der Grad von $P_\varkappa(x)$. Multipliciren wir die Gleichung (A) mit x^n, so haben nach Division durch $P_n(x)$ die Zahlen

$$\varkappa + M_{n-\varkappa} - M_n = n_{n-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

genau dieselbe Bedeutung wie in der Nr. 94 (S. 337); bezeichnet also $n-\mu$ den charakteristischen Index für $x=\infty$, so ist:

$$n_\varkappa < n_\mu, \quad \varkappa > \mu,$$

$$n_\mu \geqq n_{\mu-1}, n_{\mu-2}, \cdots n_0,$$

und wir haben demnach

$$M_\varkappa < M_\mu + \varkappa - \mu, \quad \varkappa > \mu,$$

$$M_\varkappa \leqq M_\mu + \varkappa - \mu, \quad \varkappa < \mu.$$

Der Punkt $x = \infty$ ist dann und nur dann eine Stelle der Bestimmtheit, wenn $n = \mu$ ist; in diesem Falle ist also

$$M_{n-\varkappa} \leqq M_n - \varkappa,$$

d. h. die Grade der ganzen Functionen $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ nehmen ab. Wenn $x = \infty$ nicht Stelle der Bestimmtheit ist, so kann der charakteristische Index $n - \mu = i$ einen positiven Werth haben, der kleiner ist als n; dann ist

$$M_\varkappa < M_{n-i} + \varkappa - n + i \quad \text{für} \quad \varkappa > n - i,$$
$$M_\varkappa \leq M_{n-i} + \varkappa - n + i \quad \text{für} \quad \varkappa < n - i,$$

d. h. die Grade der ganzen Functionen $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ nehmen zwar nicht immer ab, sie nehmen aber keinesfalls zu, und der Grad von P_n übertrifft den Grad von P_0.

Wenn die Grade von $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ nicht abnehmen, und M_n auch M_0 nicht übertrifft, so werde

$$\frac{M_\lambda - M_n}{n - \lambda} = N_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n-1)$$

gesetzt; bedeutet dann $\varkappa$ diejenige ganze Zahl, die nicht kleiner ist als alle N_λ, die aber jedes der N_λ nur um einen echten Bruch oder Null übertrifft, so hat die Differentialgleichung (A) nach Division durch $P_n(x)$ die Form

$$y^{(n)} + \left(\varphi_\varkappa(x) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) y^{(n-1)} + \left(\varphi_{2\varkappa}(x) + Q_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)\right) y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ \left(\varphi_{n\varkappa}(x) + Q_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) y = 0,$$

wo $\varphi_{\lambda\varkappa}(x)$ eine ganze rationale Function vom höchstens $\lambda\varkappa^{\text{ten}}$ Grade bedeutet; die Gleichung (A) ist also vom Range $\varkappa + 1$.

Zufolge des in der Nr. 99 erlangten Resultates können wir uns auf die Betrachtung der Gleichungen vom Range Eins beschränken, d. h. auf den Fall wo $\varkappa = 0$ ist, wo also die Grade der ganzen Functionen $P_{n-1}, P_{n-2}, \cdots P_0$ den Grad von P_n nicht übertreffen; dieser begreift dann die Fälle, wo der charakteristische Index kleiner als n ist, mit unter sich. Sei $P_n(x)$ vom p^{ten} Grade und setzen wir

$$P_\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{p} C_{i,\varkappa} x^i \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n),$$
$$C_{p,n} = 1,$$

dann lautet also unsere Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad D(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} C_{i,\varkappa} x^i \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0$$

und die charakteristische Gleichung derselben ist

(10) $$\varphi_p(c) = c^n + C_{p,n-1}c^{n-1} + \cdots + C_{p,0} = 0,$$

indem nämlich, um Uebereinstimmung mit den früheren in der Nr. 95 (S. 339 ff.) benutzten Bezeichnungen zu erzielen, nur

$$A_\varkappa = C_{p,\varkappa}$$

zu setzen ist. Der Einfachheit wegen werde vorausgesetzt, dass alle n Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ der Gleichung (10) von einander verschieden sind, dann haben wir die n fundamentalen determinirenden Factoren

$$e^{c_1 x}, \; e^{c_2 x}, \; \cdots \; e^{c_n x},$$

denen die n Normalreihen

(11) $$e^{c_\varkappa x} x^{r_\varkappa} \psi_\varkappa\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

entsprechen, welche der Differentialgleichung (A) formell Genüge leisten. Wir wollen die Recursionsformeln für die Coefficienten dieser Normalreihen aufstellen, um dann eine merkwürdige Eigenschaft derselben abzuleiten.

Machen wir in (A) die Substitution

$$y = e^{c_\varkappa x} u,$$

so ergiebt sich (vergl. S. 343) für u die Differentialgleichung:

$$P_n u^{(n)} + \sum_{\lambda=1}^{n} (n_\lambda c_\varkappa^\lambda P_n + (n-1)_{\lambda-1} c_\varkappa^{\lambda-1} P_{n-1} + \cdots + P_{n-\lambda}) u^{(n-\lambda)} = 0,$$

oder nach Multiplication mit x^n

(12) $$x^n R_n(x) u^{(n)} + x^{n-1} R_{n-1}(x) u^{(n-1)} + \cdots + R_0(x) u = 0,$$

wo

$$R_{n-\lambda}(x) = x^\lambda (n_\lambda c_\varkappa^\lambda P_n + (n-1)_{\lambda-1} c_\varkappa^{\lambda-1} P_{n-1} + \cdots + P_{n-\lambda})$$
$$= \sum_{\nu=\lambda}^{p+\lambda} \alpha_{\nu, n-\lambda} x^\nu \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots \overline{n-1}),$$
$$R_0(x) = c_\varkappa^n P_n + c_\varkappa^{n-1} P_{n-1} + \cdots + P_0 = \sum_{\nu=n}^{p+n-1} \alpha_{\nu,0} x^\nu$$

gesetzt wurde. Es ist also

(13) $$\begin{cases} \alpha_{\nu,\lambda} = n_\lambda c_\varkappa^{n-\lambda} C_{\nu-n+\lambda, n} + (n-1)_\lambda c_\varkappa^{n-\lambda-1} C_{\nu-n+\lambda, n-1} + \cdots \\ \qquad\qquad + C_{\nu-n+\lambda,\lambda} \\ \qquad (n-\lambda \leqq \nu \leqq p+n-\lambda; \; \lambda = 1, 2, \cdots n), \\ \alpha_{\nu,0} = c_\varkappa^n C_{\nu-n,n} + c_\varkappa^{n-1} C_{\nu-n,n-1} + \cdots + C_{\nu-n,0}. \end{cases}$$

Die charakteristische Function von (12) lautet

$$x^\varrho f(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{\lambda=0}^{n} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\lambda+1) R_\lambda = x^\varrho \sum_\nu f_\nu(\varrho) x^\nu,$$

und wir erhalten folglich

$$(14)\qquad f_\nu(\varrho) = \sum_{\lambda=0}^{n} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\lambda+1)\,\alpha_{\nu,\lambda} \qquad [\nu = 0, 1, \cdots (p+n-1)];$$

insbesondere ist, wegen $P_n(0) \neq 0$,

$$f_{p+n-1}(\varrho) = \alpha_{p+n-1,1}\varrho + \alpha_{p+n-1,0},$$
$$f_{p+n-2}(\varrho) = \alpha_{p+n-2,2}\varrho(\varrho-1) + \alpha_{p+n-2,1}\varrho + \alpha_{p+n-2,0},$$
u. s. w.
$$f_0(\varrho) = \alpha_{0,n}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+1).$$

Für die Reihe

$$(15)\qquad x^{r_\varkappa}\psi_\varkappa\left(\frac{1}{x}\right) = g(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^{\varrho-\nu}$$

erhalten wir demnach die Recursionsformel

$$(16)\qquad \begin{cases} g_0(\varrho) f_{p+n-1}(\varrho) = 0, \\ g_1(\varrho) f_{p+n-1}(\varrho-1) + g_0(\varrho) f_{p+n-2}(\varrho) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_\nu(\varrho) f_{p+n-1}(\varrho-\nu) + g_{\nu-1}(\varrho) f_{p+n-2}(\varrho-\nu+1) + \cdots \\ \qquad + g_{\nu-(p+n-1)}(\varrho) f_0(\varrho-\nu+p+n-1) = 0, \end{cases}$$

wo $\varrho = r_\varkappa$ als Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung

$$f_{p+n-1}(\varrho) = 0$$

durch den Ausdruck

$$(17)\qquad r_\varkappa = -\frac{\alpha_{p+n-1,0}}{\alpha_{p+n-1,1}} = -\frac{c_\varkappa^n C_{p-1,n} + c_\varkappa^{n-1} C_{p-1,n-1} + \cdots + C_{p-1,0}}{n c_\varkappa^{n-1} + (n-1) c_\varkappa^{n-2} C_{p,n-1} + \cdots + C_{p,1}}$$

gegeben wird.

111. Aufstellung der Laplace'schen Transformirten und der ihr adjungirten Differentialgleichung.

Die Reihe (15) ist im Allgemeinen divergent, wir können aber, indem wir jeden Coefficienten derselben mit einem geeigneten Factor multipliciren, eine convergente Reihe erhalten.

Zu diesem Ende setzen wir

$$(18) \qquad g_\nu(\varrho) = (-1)^\nu \Gamma(-\varrho+\nu)\bar{G}_\nu(\sigma) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo

$$(19) \qquad \sigma = -p - \varrho,$$

und die Function $\Gamma(x)$ mit dem Gauss'schen $\Pi(x)$ durch die Gleichung

$$\Pi(x) = \Gamma(x+1)$$

verbunden ist. Die Gleichung (18) kann dann, zufolge bekannter Eigenschaften der Γ-Function (vergl. Nr. 75), auch in der Form

$$(20) \qquad g_\nu(\varrho) = \Gamma(-\varrho)\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\nu+1)\bar{G}_\nu(\sigma)$$

geschrieben werden. Setzen wir diese Ausdrücke in die Recursionsformel (16) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&(-1)^\nu \Gamma(-\varrho+\nu) f_{p+n-1}(\varrho-\nu)\bar{G}_\nu(\sigma) + \cdots\\ &+ (-1)^{\nu-\lambda}\Gamma(-\varrho+\nu-\lambda) f_{p+n-1-\lambda}(\varrho-\nu+\lambda)\bar{G}_{\nu-\lambda}(\sigma) + \cdots\\ &+(-1)^{\nu-(p+n-1)}\Gamma(-\varrho+\nu-p-n+1) f_0(\varrho-\nu+p+n-1)\bar{G}_{\nu-(p+n-1)}(\sigma)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung erscheint, wenn wir

$$(21) \qquad (-1)^\lambda \Gamma(-\varrho+\nu-\lambda) f_{p+n-1-\lambda}(\varrho-\nu+\lambda) = \bar{F}_\lambda(\sigma+\nu-\lambda)$$

setzen, in der Gestalt

$$\begin{aligned}(22) \qquad &\bar{G}_\nu(\sigma)\bar{F}_0(\sigma+\nu) + \bar{G}_{\nu-1}(\sigma)\bar{F}_1(\sigma+\nu-1) + \cdots\\ &+ \bar{G}_{\nu-(p+n-1)}(\sigma)\bar{F}_{p+n-1}(\sigma+\nu-p-n+1) = 0\end{aligned}$$

als lineare $(p+n-1)$-gliedrige Recursionsformel für die $\bar{G}_\nu(\sigma)$, und wir könnten also von derselben direct zu einer linearen Differentialgleichung übergehen, der die Reihe

$$(23) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{G}_\nu(\sigma)\, t^{\sigma+\nu}$$

Genüge leistet. Es ist aber zweckmässiger, nicht diese Differentialgleichung selbst, sondern zunächst ihre adjungirte aufzustellen, weil sich die letztere in einer mehr übersichtlichen Form ergiebt.

Um zu der der adjungirten Differentialgleichung entsprechenden Recursionsformel überzugehen, haben wir nach den Ergebnissen der Nr. 109 (S. 391) zu setzen

$$s = -\sigma - 1 = \varrho + p - 1,$$

$$F_\lambda(s+\nu-\lambda) = \bar{F}_\lambda(\sigma-\nu) = (-1)^\lambda \Gamma(-\varrho-\nu) f_{p+n-1-\lambda}(\varrho+\nu);$$

dann lautet diese Recursionsformel

$$(24)\quad G_\nu(s)F_0(s+\nu)+\cdots+G_{\nu-\lambda}(s)F_\lambda(s+\nu-\lambda)+\cdots$$
$$+G_{\nu-(p+n-1)}(s)F_{p+n-1}(s+\nu-p-n+1)=0.$$

Es seien nun Grössen $\beta_{\nu,\lambda}$ durch die Gleichungen

$$(25)\qquad \beta_{\nu,\lambda}=\alpha_{p+n-1-\nu,\ \lambda-p+1+\nu}$$

definirt, so dass also

$$\alpha_{\nu,\lambda}=\beta_{p+n-1-\nu,\ \nu-n+\lambda};$$

dann ist nach den Gleichungen (13), (14)

$$F_0(s+\nu)=\Gamma(-\varrho-\nu)(\beta_{0,p}(\varrho+\nu)+\beta_{0,p-1}),$$
$$F_1(s+\nu-1)=-\Gamma(-\varrho-\nu)\{\beta_{1,p}(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1)$$
$$+\beta_{1,p-1}(\varrho+\nu)+\beta_{1,p-2}\},$$

. . . .

$$F_{p+n-1}(s+\nu-p-n+1)$$
$$=(-1)^{p+n-1}\Gamma(-\varrho-\nu)(r+\nu)\cdots(r+\nu-n+1)\beta_{p+n-1,0},$$

und indem wir beachten, dass

$$\Gamma(x+n)=\Gamma(x)x(x+1)\cdots(x+n-1),$$
$$-\varrho=p-s-1$$

ist, erhalten wir die Ausdrücke:

$$F_0(s)=(-1)^{p-1}\Gamma(-s)s(s-1)\cdots(s-p+2)\{\beta_{0,p}(s-p+1)+\beta_{0,p-1}\},$$
$$F_1(s)=(-1)^{p-1}\Gamma(-s)s(s-1)\cdots(s-p+3)\{\beta_{1,p}(s-p+2)(s-p+1)$$
$$+\beta_{1,p-1}(s-p+2)+\beta_{1,p-2}\},$$

. . . .

$$F_{p+n-1}(s)=(-1)^{p-1}\Gamma(-s)\beta_{p+n-1,0}.$$

Setzen wir nunmehr

$$(26)\quad \Phi_\lambda(s)=(-1)^{p-1}\frac{F_\lambda(s)}{\Gamma(-s)}=\sum_{\varkappa=0}^{p}s(s-1)\cdots(s-\varkappa+1)\beta_{\lambda,\varkappa},$$

so nimmt die Recursionsformel (24) die Gestalt an

$$(27)\quad G_\nu(s)\Phi_0(s+\nu)+G_{\nu-1}(s)\Phi_1(s+\nu-1)+\cdots$$
$$+G_{\nu-(p+n-1)}(s)\Phi_{p+n-1}(s+\nu-p-n+1)=0.$$

Hierin ist, da $\varrho=r_\varkappa$ zu nehmen war,

$$s=s_\varkappa=r_\varkappa+p-1$$

zu setzen, und für diesen Werth verschwindet, wie es sein muss, die Function $\Phi_0(s)$. Für die Wahl des Incrementes, nach dessen Potenzen die durch die Recursionsformel (27) bestimmte Reihe fortschreiten soll, geben uns die Ausdrücke der $\alpha_{\nu,\lambda}$ durch die Gleichungen (13) einen Fingerzeig. Setzen wir nämlich

$$C_{\lambda,n} z^n + C_{\lambda,n-1} z^{n-1} + \cdots + C_{\lambda,1} z + C_{\lambda,0} = \varphi_\lambda(z)$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \cdots p),$$

so dass also

$$\varphi_p(z) = (z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_n)$$

ist, so lassen sich die Gleichungen (13) in der Form schreiben

$$\alpha_{\nu,\lambda} = \frac{\varphi^{(\lambda)}_{\nu-n+\lambda}(c_\varkappa)}{\lambda!},$$

woraus nach (25)

$$\beta_{\nu,\lambda} = \frac{\varphi_\lambda^{(\nu-p+\lambda+1)}(c_\varkappa)}{(\nu - p + \lambda + 1)!}$$

folgt, wenn

$$\varphi_\alpha^{(\lambda)}(z) = \frac{d^\lambda \varphi_\alpha(z)}{dz^\lambda}$$

gesetzt wird. Bilden wir also die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(s_\varkappa)(z - c_\varkappa)^{s_\varkappa + \nu},$$

so genügt dieselbe nach S. 392 der Differentialgleichung

$$\mathsf{E}(u) = \sum_{\mu=0}^{p} (z - c_\varkappa)^\mu \sum_{\lambda=0}^{n} \beta_{\lambda,\mu}(z - c_\varkappa)^\lambda \frac{d^\mu u}{dz^\mu} = 0,$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$\mathsf{E}(u) = (z - c_\varkappa)^{p-1} \sum_{\mu=0}^{p} \varphi_\mu(z) \frac{d^\mu u}{dz^\mu} = 0. \tag{28}$$

Die singulären Stellen dieser Differentialgleichung p^{ter} Ordnung, deren Rang, wie unmittelbar zu ersehen, auch gleich Eins ist, sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (10) von (A), d. h.

$$c_1, c_2, \cdots c_n.$$

Die zu $c_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung lautet

$$\Phi_0(s) = s(s-1) \cdots (s - p + 2)(s - s_\varkappa) = 0,$$

sie besitzt also nebst $s = s_\varkappa$ noch die $p - 1$ Wurzeln

$$s = 0, 1, \cdots p - 2;$$

der Punkt $z = c_\varkappa$ ist also eine Stelle der Bestimmtheit, woraus sofort die Convergenz der aufgestellten Reihe erschlossen werden kann. Das Gleiche gilt auch für die übrigen singulären Punkte c_i, $i \neq \varkappa$, allemal unter Festhaltung der Annahme, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (10) von einander verschieden sind.

Die Differentialgleichung, der die durch die Recursionsformel (22) bestimmte Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{G}_\nu(\sigma_\varkappa)(z-c_\varkappa)^{\sigma_\varkappa+\nu}, \qquad \sigma_\varkappa = -s_\varkappa - 1,$$

genügt, ist die adjungirte von (28), d. h.

$$\mathsf{E}'(w) = 0,$$

oder wenn wir

$$\mathsf{E}(u) = (z-c_\varkappa)^{p-1}\Delta(u)$$

setzen und durch $\Delta'(v)$ den zu $\Delta(u)$ adjungirten Differentialausdruck bezeichnen,

$$\mathsf{E}'(w) = \Delta'((z-c_\varkappa)^{p-1}w) = 0.$$

Die Reihe

$$(z-c_\varkappa)^{p-1}\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{G}_\nu(\sigma_\varkappa)(z-c_\varkappa)^{\sigma_\varkappa+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{G}_\nu(\sigma_\varkappa)(z-c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa+\nu},$$

wo

$$\varrho_\varkappa = \sigma_\varkappa + p - 1 = -r_\varkappa - 1$$

gesetzt wurde, genügt also der Differentialgleichung

$$\text{(L)} \quad \Delta'(v) = \sum_{\mu=0}^{p}(-1)^\mu \frac{d^\mu(\varphi_\mu(z)v)}{dz^\mu} = \sum_{i=0}^{p}\sum_{\varkappa=0}^{n} C_{i,\varkappa}(-1)^i \frac{d^i(vz^\varkappa)}{dz^i} = 0.$$

Diese Differentialgleichung p^{ter} Ordnung ist auch vom Range Eins, und ihre singulären Punkte stimmen mit denen der Gleichung (28) überein. Beachtet man, dass die determinirende Function von $\mathsf{E}'(w)$ bei $z = c_\varkappa$ durch

$$\Phi_0(-s-1)$$

gegeben wird, und dass

$$v = (z-c_\varkappa)^{p-1}w$$

ist, so ergeben sich für die Wurzeln der zum Punkte $z = c_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die Werthe

$$0,\ 1,\ \cdots\ p-2,\ \varrho_\varkappa$$

und zwar gilt das, wie man sofort übersieht, nicht nur für $c_\varkappa$, sondern es lauten für jeden beliebigen der singulären Punkte c_i die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$0, 1, \cdots p-2, \varrho_i,$$

wo

$$\varrho_i = \frac{\varphi_{p-1}(c_i)}{\varphi_p'(c_i)} - 1 = -r_i - 1 \tag{29}$$

und r_i der Exponent der zum fundamentalen determinirenden Factor $e^{c_i x}$ gehörigen Normalreihe der Differentialgleichung (A) ist. Wir erkennen hieraus, dass die Differentialgleichung (L) unabhängig ist von der Wahl der ihrer Herleitung zu Grunde gelegten Wurzel $c_\varkappa$ der charakteristischen Gleichung, d. h. dass wir dieselbe Differentialgleichung erhalten haben würden, wenn wir statt von $c_\varkappa$ von einer anderen Wurzel c_i ausgegangen wären. Die Differentialgleichung (L) wird aus einem bald zu erörternden Grunde die Laplace'sche Transformirte von (A) genannt; wir wollen nun die wesentlichsten Eigenschaften dieser bemerkenswerthen Differentialgleichung darlegen.

112. Differentialgleichungen mit einfachen singulären Punkten. Eigenschaften der Laplace'schen Transformirten. Convergenz der Normalreihe.

Unter beständiger Festhaltung der Annahme, dass die Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ der Gleichung (10) sämmtlich von einander verschieden sind, erkennen wir zunächst, dass der Coefficient der p^{ten} Ableitung in (L) für jeden der singulären Punkte $z = c_i$ nur von der ersten Ordnung verschwindet.

Wenn eine lineare Differentialgleichung

$$\chi_p(z)\frac{d^p w}{dz^p} + \chi_{p-1}(z)\frac{d^{p-1} w}{dz^{p-1}} + \cdots + \chi_0(z) w = 0$$

so beschaffen ist, dass der Coefficient der höchsten Ableitung die Form hat

$$\chi_p(z) = (z-c)\mathfrak{P}_p(z),$$

wo $\mathfrak{P}_p(z)$ eine in der Umgebung von $z = c$ reguläre Function bedeutet, die für $z = c$ nicht verschwindet, und wo auch

$$\chi_{p-1}(z), \cdots \chi_0(z)$$

in der Umgebung von $z = c$ regulär sind, so sagt man, der Punkt $z = c$ sei ein einfacher singulärer Punkt. Bringt man nämlich die Differentialgleichung durch Multiplication mit

$$\frac{(z-c)^{p-1}}{\mathfrak{P}_p(z)}$$

auf die Normalform

$$(30)\quad (z-c)^p\frac{d^p w}{dz^p}+(z-c)^{p-1}\psi_{p-1}(z)\frac{d^{p-1}w}{dz^{p-1}}+\cdots+\psi_0(z)w=0,$$

wo

$$\psi_\varkappa(z)=(z-c)^{p-\varkappa-1}\frac{\gamma_\varkappa(z)}{\mathfrak{P}_p(z)}\qquad (\varkappa=0,1,\cdots\overline{p-1})$$

ist, und setzt

$$\psi_\varkappa(z)=\sum_{\nu=p-\varkappa-1}^{\infty}\gamma_{\nu,\varkappa}(z-c)^\nu,$$

so lautet die charakteristische Function von (30)

$$(z-c)^\varrho\sum_{\varkappa=0}^{p}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)\psi_\varkappa(z)=(z-c)^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu(\varrho)(z-c)^\nu,$$

und es ist

$$(31)\begin{cases} f_0(\varrho)=\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-p+2)\{\gamma_{0,p}(\varrho-p+1)+\gamma_{0,p-1}\},\\ f_1(\varrho)=\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-p+3)\{\gamma_{1,p}(\varrho-p+2)(\varrho-p+1)\\ \qquad\qquad +\gamma_{1,p-1}(\varrho-p+2)+\gamma_{1,p-2}\},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{p-2}(\varrho)=\varrho\{\gamma_{p-2,p}(\varrho-1)(\varrho-2)\cdots(\varrho-p+1)+\cdots+\gamma_{p-2,1}\},\end{cases}$$

allgemein

$$f_\nu(\varrho)=\sum_{\varkappa=0}^{p}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\varkappa+1)\gamma_{\nu,\varkappa}\qquad (\nu>p-2).$$

Es ist folglich $z=c$ eine Stelle der Bestimmtheit, und die Coefficienten der Reihe

$$g(z-c,\varrho)=\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(\varrho)(z-c)^{\varrho+\nu},\qquad g_0(\varrho)\neq 0,$$

genügen der Recursionsformel

$$a_{\nu 0}(\varrho)g_0(\varrho)+a_{\nu 1}(\varrho)g_1(\varrho)+\cdots+a_{\nu\nu}(\varrho)g_\nu(\varrho)=0,$$

wo ϱ eine Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung $f_0(\varrho)=0$, d. h. einen der Werthe

$$0,\ 1,\ \cdots p-2,\ r=p-1-\frac{\gamma_{0,p-1}}{\gamma_{0,p}}$$

bedeutet, und wo wie gewöhnlich

$$a_{\alpha\beta}(\varrho)=f_{\alpha-\beta}(\varrho+\beta)$$

gesetzt wurde. Nehmen wir $\varrho = 0$, so ist

$$a_{\alpha\beta}(0) = a_{\alpha\beta} = f_{\alpha-\beta}(\beta),$$

also haben wir, wenn r keine ganze Zahl ist,

$$a_{\nu\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots p-2),$$

$$a_{\nu\nu} \neq 0 \qquad (\nu > p-2),$$

und folglich bestimmen sich die

$$g_{\nu+p-2}(0) = g_{\nu+p-2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

eindeutig durch $g_0, g_1, \cdots g_{p-2}$. In dem diese letzteren Grössen bestimmenden Gleichungssysteme sind aber, da nach (31)

$$a_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots p-2; \quad \beta \leqq \alpha)$$

ist, alle Coefficienten gleich Null, d. h. die $g_0, g_1, \cdots g_{p-2}$ sind willkürlich. Wir erhalten demnach entsprechend den Wurzeln

$$\varrho = 0, 1, \cdots p-2$$

$p-1$ linear unabhängige gewöhnliche Potenzreihen, während das p^{te} Integral, welches mit diesen zusammen das zu $z = c$ gehörige canonische Fundamentalsystem ausmacht, sich an der Stelle $z = c$ verzweigt. Das zu einem einfachen singulären Punkte gehörige canonische Fundamentalsystem einer Differentialgleichung p^{ter} Ordnung besteht also im Allgemeinen aus $p-1$ in der Umgebung dieses Punktes regulären und einem sich daselbst verzweigenden Elemente. Die Modificationen, die dieses Resultat erfährt, wenn r eine ganze Zahl ist, sind leicht anzugeben, wir lassen dieselben hier bei Seite. Die Form, in welche wir in der Nr. 70 (S. 249) eine beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe transformirt haben, ist offenbar dadurch charakterisirt, dass ihre sämmtlichen im Endlichen gelegenen singulären Punkte einfache sind; wir erkennen hieraus, dass eine ähnliche Transformation für Differentialgleichungen höherer Ordnung nicht möglich, diese Transformation also in der That, wie a. a. O. hervorgehoben, für die zweite Ordnung charakteristisch ist.

Für die Laplace'sche Transformirte (L) sind nun alle im Endlichen gelegenen singulären Punkte $z = c_i$ einfache; dagegen ist $z = \infty$ für (L) ebenso wie $x = \infty$ für (A) im Allgemeinen keine Stelle der Bestimmtheit. Wenn die durch die Gleichung (29) definirten Zahlen ϱ_i keine ganzen Zahlen sind, so gehört zu $z = c_i$ ein canonisches Fundamentalsystem, welches aus $p-1$ in der Umgebung von $z=c_i$ regulären Elementen und einer zum Exponenten ϱ_i gehörigen Reihe von der Form

$$(32) \qquad v_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{i\nu}(z-c_i)^{\varrho_i+\nu} \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

besteht. Es ist dann $r_\varkappa$, abgesehen von einem constanten Factor, nichts anderes, als die mit $(z-c_\varkappa)^{p-1}$ multiplicirte Reihe (23), worin noch

$$t = z - c_\varkappa, \qquad \sigma = \sigma_\varkappa = -p - r_\varkappa$$

zu setzen ist (vergl. S. 397); also haben wir

$$H_{\varkappa\nu} = \bar{G}_\nu(\sigma_\varkappa),$$

und folglich nach Gleichung (20)

$$(20\text{a}) \qquad g_\nu(r_\varkappa) = \Gamma(\varrho_\varkappa + \nu + 1)(-1)^\nu H_{\varkappa\nu},$$

d. h. die zum fundamentalen determinirenden Factor $e^{c_\varkappa x}$ gehörige Normalreihe von (A) lautet

$$(33) \qquad e^{c_\varkappa x} x^{-\varrho_\varkappa - 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\varkappa\nu}(-1)^\nu \Gamma(\varrho_\varkappa + \nu + 1) x^{-\nu},$$

und dies gilt offenbar nicht nur für $i=\varkappa$, sondern ebenso für jeden andern Werth $i=1,2,\cdots n$. Wir können also, abgesehen von dem constanten Factor $\Gamma(\varrho_i+1)$, die zum Factor $e^{c_i x}$ gehörige Normalreihe in der Form schreiben

$$(34) \qquad e^{c_i x} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (\varrho_i+1)(\varrho_i+2)\cdots(\varrho_i+\nu) H_{i\nu} x^{-\varrho_i-\nu-1}$$
$$(i=1,2,\cdots n);$$

dies ist die erste merkwürdige Beziehung zwischen der Differentialgleichung (A) und ihrer Laplace'schen Transformirten.

Wenn die Normalreihe (34) convergent ist für die Werthe von x in einer gewissen Umgebung von $x=\infty$, d. h. wenn dieselbe ein Normalintegral darstellt, so muss bekanntlich der absolute Betrag von

$$\sqrt[\nu]{H_{\nu i}(\varrho_i+1)(\varrho_i+2)\cdots(\varrho_i+\nu)}$$

für alle ν unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze bleiben; da aber der absolute Betrag von

$$\sqrt[\nu]{(\varrho_i+1)(\varrho_i+2)\cdots(\varrho_i+\nu)}$$

mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst, so muss, wenn die Reihe (34) convergirt,

$$\sqrt[\nu]{H_{\nu i}}$$

mit wachsendem ν gegen Null convergiren. Daraus folgt aber, dass die Reihe (32) beständig, d. h. für jeden endlichen Werth von $z - c_i$ convergirt, d. h. wenn die Differentialgleichung (A) ein zum Factor $e^{c_i x}$ gehöriges Normalintegral besitzt, so besitzt ihre Laplace'sche Transformirte ein Integral, welches abgesehen vom Factor $(z - c_i)^{\varrho_i}$ eine ganze transcendente Function ist. Wie Herr Poincaré gezeigt hat, ist dieser Satz auch umkehrbar, wir werden die Umkehrung später mit Hülfe anderer Methoden beweisen (S. 421, Nr. 116).

Wenn wir die bisher gemachten Voraussetzungen der Reihe nach fallen lassen, so kann es sich zunächst ereignen, dass, wenn einige der ϱ_i ganzzahlig sind, in den entsprechenden Integralen der Differentialgleichung (L) Logarithmen auftreten. Sind die $c_1, c_2, \cdots c_n$ nicht sämmtlich von einander verschieden und bedeutet etwa c_i eine μ_i-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung, so kann ferner der Punkt $z = c_i$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die Integrale von (L) sein. In diesem Falle wird die Differentialgleichung (A) nicht durch n Normalreihen befriedigt, sondern es entsprechen der μ_i-fachen Wurzel c_i anormale Reihen (vergl. S. 348). Es kann sich jedoch auch ereignen, dass $z = c_i$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (L) bleibt, trotzdem $\mu_i > 1$ ist; die Bedingungen hierfür lassen sich sofort übersehen. Sind dieselben erfüllt und ist etwa $\mu_i < p$, so besitzt die zu $z = c_i$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln

$$0,\ 1,\ \cdots\ p - \mu_i - 1,\quad \varrho_i,\ \varrho_i',\ \cdots\ \varrho_i^{(\mu_i - 1)}.$$

Man erkennt durch analoge Schlüsse, wie wir sie für den Fall eines einfachen singulären Punktes angewandt haben, dass alsdann, wenn keine der Grössen

$$\varrho_i,\ \varrho_i',\ \cdots\ \varrho_i^{(\mu_i - 1)} \tag{35}$$

eine positive ganze Zahl und grösser als $p - \mu_i - 1$ ist, in dem zu $z = c_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme $p - \mu_i$ in der Umgebung von $z = c_i$ reguläre Elemente vorhanden sind, und dass den übrigen μ_i Elementen, die im Allgemeinen die Form

$$(z - c_i)^{\varrho_i^{(\lambda)}} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{i\nu}^{(\lambda)} (z - c_i)^{\nu} \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots \mu_i - 1) \tag{36}$$

haben, genau ebensoviele zum Factor $e^{c_i x}$ gehörige Normalreihen der Differentialgleichung (A) entsprechen, die aus (36) auf dieselbe Weise gebildet werden können, wie im Falle $\mu_i = 1$ die Reihe (34) aus der

Entwickelung von r_i hergestellt werden konnte. Wenn in den zu den Exponenten (35) gehörigen Integralen von (L) Logarithmen auftreten, so werden die entsprechenden Normalreihen von (A) auch mit Logarithmen behaftet sein. Wir haben auf diese Weise ein leicht anwendbares Kriterium gewonnen, um in dem Falle, wo die charakteristische Gleichung (10) einer Differentialgleichung (A) vom Range Eins mehrfache Wurzeln besitzt, entscheiden zu können, ob Normalreihen (gewöhnliche oder logarithmische) vorhanden sind, oder nicht (vergl. S. 347).

Viertes Kapitel.

113. Directe Herleitung der Laplace'schen Transformirten.

Der Weg, auf welchem wir zur Laplace'schen Transformirten unserer Differentialgleichung (A) gelangt sind, muss als ein indirecter bezeichnet werden, weil wir den Durchgang durch die Reihe machen mussten und von dieser erst zur Differentialgleichung aufgestiegen sind. Laplace, der die Differentialgleichung (L) zuerst im Falle $p = 1$ aufgestellt hat, gelangte zu derselben auf einem directen Wege, indem er von dem Bestreben geleitet, die von ihm betrachtete Differentialgleichung durch Quadraturen zu integriren, dieselbe durch eine Integralsubstitution transformirte.

Im allgemeinen Falle eines beliebigen p wollen wir setzen

$$f(x, z) = \int v e^{zx} dz,$$

wo v eine noch zu bestimmende Function von z allein bedeuten und vorläufig auch noch der Integrationsweg unbestimmt bleiben möge.

Bilden wir das Resultat der Substitution von $f(x, z)$ an Stelle von y in die linke Seite der Differentialgleichung (A), so ist

$$D(f(x, z)) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x) \frac{\partial^\varkappa f(x, z)}{\partial x^\varkappa}.$$

Durch Differentiation unter dem Integralzeichen folgt aber

$$\frac{\partial^\varkappa f(x, z)}{\partial x^\varkappa} = \int v z^\varkappa e^{zx} dz,$$

und wir erhalten also

$$D(f(x, z)) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x) \int v z^\varkappa e^{zx} dz,$$

oder

$$D(f(x, z)) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{\varkappa=0}^{n} C_{i,\varkappa} \int v x^i z^\varkappa e^{zx} dz,$$

d. h. unter Anwendung der in der Nr. 111 (S. 399) eingeführten Bezeichnungen

$$D(f(x,z)) = \sum_{i=0}^{p} \int \varphi_i(z) \frac{\partial^i e^{zx}}{\partial z^i} v\, dz.$$

Durch Anwendung der partiellen Integrationsformel (vergl. S. 53, 54) folgt nun

$$\int \varphi_i(z) v \frac{\partial^i e^{zx}}{\partial z^i} dz = \varphi_i(z) v x^{i-1} e^{zx} - \frac{d(\varphi_i(z)v)}{dz} x^{i-2} e^{zx} + \cdots$$
$$+ (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}(\varphi_i(z)v)}{dz^{i-1}} e^{zx} + (-1)^i \int \frac{d^i(\varphi_i(z)v)}{dz^i} e^{zx} dz,$$

und wir finden demnach bei unbestimmter Integration

$$(37)\quad D(f(x,z)) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{d^\lambda(\varphi_i(z)v)}{dz^\lambda} x^{i-\lambda-1} e^{zx} (-1)^\lambda$$
$$+ \int \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \frac{d^i(\varphi_i(z)v)}{dz^i} e^{zx} dz.$$

Denken wir uns nun v so gewählt, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der Gleichung (37) verschwindet, so haben wir

$$\Delta'(v) = 0,$$

d. h. v als Lösung der Differentialgleichung (L) zu nehmen. Integriren wir dann auf einem bestimmten Wege l, und bezeichnen das auf diesem Wege genommene Integral $f(x, z)$ durch

$$J_l(x) = \int_{(l)} v e^{zx} dz,$$

so erhalten wir:

$$D(J_l(x)) = \int_{(l)} \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{i-1} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} (\varphi_i(z) v) x^{i-\lambda-1} e^{zx} \right\} dz;$$

der Ausdruck $J_l(x)$ stellt also ein Integral der Differentialgleichung (A) dar, wenn der Integrationsweg so gewählt ist, dass das Integral auf der rechten Seite verschwindet. Dies tritt ein:

1) für einen geschlossenen Weg l, auf welchem der Ausdruck

$$V(z,x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} (\varphi_i(z) v) x^{i-\lambda-1} e^{zx} (-1)^\lambda$$

zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt,

2) für einen Weg, in dessen Anfangs- und Endpunkte der Ausdruck V verschwindet.

In diesem Resultate liegt die eigentliche Bedeutung der Laplace-schen Transformirten.

114. Die Laplace'sche Differentialgleichung. Integration derselben durch Quadraturen.

Wir wollen zuvörderst den von Laplace behandelten Fall $p = 1$ genauer untersuchen. Die Differentialgleichung lautet dann

$$(\mathrm{A}_1) \quad (C_{1,n}x + C_{0,n})y^{(n)} + (C_{1,n-1}x + C_{0,n-1})y^{(n-1)} + \cdots + (C_{1,0}x + C_{0,0})y = 0,$$

man nennt sie gewöhnlich die Laplace'sche Differentialgleichung.

Für dieselbe ist nun

$$\varphi_1(z) = C_{1,n}z^n + \cdots + C_{1,0},$$
$$\varphi_0(z) = C_{0,n}z^n + \cdots + C_{0,0},$$

und die Laplace'sche Transformirte lautet einfach

$$(\mathrm{L}_1) \qquad -\frac{d(v\varphi_1(z))}{dz} + \varphi_0 v = 0.$$

Es ist folglich

$$v = \frac{1}{\varphi_1(z)} e^{\int \frac{\varphi_0(z)}{\varphi_1(z)} dz},$$

$$V = \varphi_1(z) v e^{zx},$$

also

$$J_l(x) = \int_{(l)} \frac{1}{\varphi_1(z)} e^{\int \frac{\varphi_0(z)}{\varphi_1(z)} dz} e^{zx} dz$$

und

$$D(J_l(x)) = \int_{(l)} dV.$$

Sei in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{\varphi_0(z)}{\varphi_1(z)} = m_0 + m_1 z + \cdots + m_\lambda z^\lambda + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{(z-a)^i} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i}{(z-b)^i} + \cdots;$$

wir nehmen also an, es sei $\varphi_1(z)$ nur vom Grade $n - \lambda$ (beschränken uns also für diese specielle Gleichung nicht auf den Rang Eins), d. h. λ der Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ der charakteristischen Gleichung seien unendlich, ferner seien μ derselben gleich a, ν derselben gleich b, u. s. w., so dass

$$\lambda + \mu + \nu + \cdots = n.$$

Dann ist

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} V &= e^{\int \frac{\varphi_0(z)}{\varphi_1(z)} dz + zx}, \\ &= e^{\frac{m_\lambda}{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots + (m_0 + x) z} (z-a)^{\alpha_1} (z-b)^{\beta_1} \cdots e^{W}, \end{aligned}\right.$$

wo

$$(39)\qquad W = -\sum_{i=2}^{\mu} \frac{\alpha_i}{i-1} \frac{1}{(z-a)^{i-1}} - \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\beta_i}{i-1} \frac{1}{(z-b)^{i-1}} - \cdots$$

gesetzt wurde. Bei Umläufen von z um die singulären Punkte a, b, $\cdots$ multiplicirt sich V demnach mit den Factoren

$$e^{2\pi i \alpha_1}, \; e^{2\pi i \beta_1}, \; \cdots \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Denken wir uns nun in der z-Ebene von einem willkürlichen Punkte ζ aus einfache Schleifen um die Punkte a, b, $\cdots$ gelegt, d. h. also Curven s_a, s_b, $\cdots$, die von ζ ausgehend durch lauter reguläre Stellen hindurch bis dicht an den betreffenden Punkt a, b, $\cdots$ heran, dann in kleinem Kreise um diesen in positiver Richtung herum und auf dem Hinwege wieder nach ζ zurück führen. Dann bleibt die Function V ungeändert, wenn wir die Variable z den Weg

$$l_{a,b} = s_b^{-1} s_a^{-1} s_b s_a$$

beschreiben lassen, und es wird folglich

$$J_{l_{a,b}}(x)$$

ein Integral der Differentialgleichung (A_1) darstellen.

Setzen wir:

$$\int_{(s_a)} v e^{zx} dz = A,$$

$$\int_{(s_b)} v e^{zx} dz = B,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

wobei für v ein bestimmter Ausgangswerth $v(\zeta)$ genommen werden möge, dann ist

$$J_{l_{a,b}}(x) = A + e^{2\pi i \alpha_1} B - e^{2\pi i \beta_1} A - B,$$

also

$$J_{l_{a,b}}(x) = (1 - e^{2\pi i \beta_1}) A - (1 - e^{2\pi i \alpha_1}) B.$$

Bedeutet m die Anzahl der von einander verschiedenen endlichen Wurzeln $a, b, \cdots$ der charakteristischen Gleichung $\varphi_1(z) = 0$, so erhalten wir auf diese Weise $m - 1$ linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung (A_1). Es handelt sich nun darum, noch $n - m + 1$ andere Integrale aufzufinden, die mit jenen zusammengenommen ein Fundamentalsystem constituiren.

Sei zunächst $\mu > 1$, d. h. a eine mehrfache Wurzel der Gleichung $\varphi_1(z) = 0$, dann setzen wir

$$z - a = \mathfrak{r} e^{\vartheta i}, \quad \mathfrak{r} > 0, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi,$$

$$\frac{-\alpha_\mu}{\mu - 1} = \bar{\mathfrak{r}} e^{\eta i}, \quad \bar{\mathfrak{r}} > 0, \quad 0 \leq \eta < 2\pi,$$

in die Ausdrücke (38), (39) ein und untersuchen das Verhalten von V, wenn z in den Punkt a einrückt. Es ist offenbar

$$V = \bar{V} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha_1} (\cos \alpha_1 \vartheta + i \sin \alpha_1 \vartheta) \cdot e^{\bar{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{1-\mu} \{ \cos(\eta + \overline{1-\mu}\,\vartheta) + i \sin(\eta + \overline{1-\mu}\,\vartheta) \}},$$

wo $\bar{V}$ einen Ausdruck darstellt, der im Punkte $z = a$ bestimmt ist und einen endlichen Werth annimmt. Wir ersehen hieraus, dass sich V für $z = a$ dem Werthe Null oder Unendlich annähert, jenachdem z in den Punkt a so einrückt, dass

$$\cos(\eta + \overline{1 - \mu}\,\vartheta)$$

negativ oder positiv ist. Es seien nun

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_{2(\mu-1)}$$

die aequidistanten zwischen 0 und 2π gelegenen Werthe von ϑ, für welche

$$\cos(\eta + \overline{1 - \mu}\,\vartheta) = 0$$

ist, und sei dieser Cosinus z. B. für

$$\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$$

negativ, dann ist also allemal

$$\lim_{z=a} V = 0,$$

wenn z so in den Punkt a einrückt, dass

(40) $$\vartheta_{2g+1} < \vartheta < \vartheta_{2g+2} \qquad (g = 0, 1, \cdots \overline{\mu - 2})$$

ist. Denken wir uns nun das Integral $J(x)$ erstreckt über einen von $z = a$ ausgehenden geschlossenen Weg $l_{a\varkappa}$, der den Punkt $z = a$ in einer Richtung verlässt, für welche ϑ in dem durch $g = \varkappa$ charakterisirten Intervalle (40) gelegen ist und der in solcher Richtung nach $z = a$ zurückkehrt, dass ϑ in dem durch $g = \varkappa + 1$ charakterisirten

Intervalle (40) verbleibt, so ist im Anfangs- und Endpunkte von $l_{a\varkappa}$ der Ausdruck V gleich Null, und es stellt folglich

$$J_{l_{a\varkappa}}(x) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 0, 1, \cdots \overline{\mu - 2})}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (A_1) dar. Diese $\mu - 1$ Lösungen hängen natürlich wesentlich davon ab, welche der Wurzelpunkte $b, \cdots$ von $\varphi_1(z)$ und wie oft dieselben von den Integrationswegen $l_{a\varkappa}$ umschlungen werden. Wir können z. B. annehmen, dass die $l_{a\varkappa}$ keinen dieser Wurzelpunkte einschliessen, dann dürfen die Dimensionen dieser Integrationswege beliebig verkleinert werden, und wir erhalten auf diese Weise $\mu - 1$ wohlbestimmte Integrale von (A_1), die der μ-fachen Wurzel a entsprechen. Verfahren wir ebenso für jede endliche mehrfache Wurzel der Gleichung $\varphi_1(z) = 0$, so haben wir einschliesslich der vorher gefundenen $(m - 1)$ Lösungen

$$J_{l_{a,b}}(x)$$

im Ganzen $n - \lambda - 1$ Integrale von (A_1).

Um die noch fehlenden $\lambda + 1$ Integrale zu erlangen, müssen wir den Integrationsweg vom Punkte $z = \infty$ ausgehen lassen, und untersuchen darum zunächst das Verhalten von V im Punkte $z = \infty$. Sei zunächst $\lambda > 0$; setzen wir dann wiederum

$$(41) \qquad \begin{cases} z = \mathfrak{r}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \\ \dfrac{m_\lambda}{\lambda + 1} = \mathfrak{r}(\cos\eta + i\sin\eta) \end{cases}$$

und bezeichnen jetzt durch

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_{2(\lambda+1)}$$

die zwischen 0 und 2π gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$\cos(\eta + \overline{\lambda + 1}\,\vartheta) = 0,$$

so strebt V dem Grenzwerthe Null oder Unendlich zu, jenachdem z mit einem Argumente ϑ ins Unendliche rückt, welches in einem der Intervalle

$$(42) \qquad \vartheta_{2g+1} < \vartheta < \vartheta_{2g+2} \qquad {\scriptstyle (g = 0, 1, \cdots \lambda)}$$

oder

$$\vartheta_{2g} < \vartheta < \vartheta_{2g+1} \qquad {\scriptstyle (g = 1, 2, \cdots \overline{\lambda+1})}$$

gelegen ist, vorausgesetzt, dass

$$\cos(\eta + \overline{\lambda + 1}\,\vartheta) < 0 \quad \text{ist für} \quad \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2.$$

Auf einem Integrationswege $l_\varkappa$, der von $z = \infty$ mit einem in dem Intervalle (42) für $g = \varkappa$ gelegenen Argumente ϑ ausgehend, ohne eine

Wurzel $a, b, \cdots$ der charakteristischen Gleichung einzuschliessen, mit einem in dem Intervalle (42) für $g = \varkappa + 1$ gelegenen Argumente ϑ nach $z = \infty$ zurückkehrt, ist demnach im Anfangs- und Endpunkte $V = 0$, d. h. wir haben in den Ausdrücken

$$J_{l_\varkappa}(x) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 0, 1, \cdots \lambda)}$$

$\lambda + 1$ Lösungen der Differentialgleichung (A_1).

Eine besondere Erörterung erfordert nur noch der Fall $\lambda = 0$; alsdann ist nämlich

$$V = e^{(m_0 + x)z}(z - a)^{\alpha_1}(z - b)^{\beta_1} \cdots e^{W},$$

und m_0 ist nichts Anderes als die Wurzel der Gleichung

$$- C_{1,n} m + C_{0,n} = 0.$$

Diese Gleichung ist offenbar die charakteristische Gleichung der Laplace'schen Transformirten (L_1), sie stimmt auch, wenn wir $-m$ an die Stelle von m setzen, mit der Gleichung überein, die den im Endlichen gelegenen singulären Punkt der Differentialgleichung (A_1) liefert, dieser ist also $x = - m_0$. Nun ist, wenn wir

$$z = \mathfrak{r} e^{\vartheta i},$$

$$x + m_0 = \bar{\mathfrak{r}} e^{\eta i}$$

setzen, V offenbar gleich Null, falls z so ins Unendliche wächst, dass

$$\cos(\vartheta + \eta) < 0$$

ist, d. h. mit anderen Worten, wenn das Argument ϑ von z der Ungleichung

$$\Re(x e^{\vartheta i}) < \Re(- m_0 e^{\vartheta i}) \tag{43}$$

Genüge leistet.

Beschränken wir x auf einen gewissen Bereich $\mathfrak{B}$, der den Punkt $x = - m_0$ nicht enthält, so können wir ϑ stets so wählen, dass für Werthe von x, die innerhalb $\mathfrak{B}$ liegen, die Ungleichung (43) erfüllt wird. Sei dann l' ein Integrationsweg, der von $z = \infty$ mit einem solchen Argumente ϑ ausgeht und, ohne eine der Wurzeln der Gleichung $\varphi_1(z) = 0$ einzuschliessen, mit einem ebenso beschaffenen Argumente ϑ nach $z = \infty$ zurückführt, so verschwindet V im Anfangs- und Endpunkte, und es stellt folglich

$$J_{l'}(x)$$

innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ eine Lösung von (A_1) dar.

Wir haben also in allen Fällen n Integrationswege gefunden, über welche erstreckt das Integral

$$\int v e^{zx} dz$$

Lösungen der Differentialgleichung (A_1) liefert. Im Falle $\lambda > 0$ stellen alle n so gefundenen Integrale diese Lösungen für alle endlichen Werthe von x dar, und zwar sind dieselben, wie aus der Form dieser Integrale sofort ersichtlich ist, ganze transcendente Functionen von x. Dies ist auch daraus einleuchtend, dass wenn $\lambda > 0$ ist, nothwendig C_{1n} verschwinden muss, so dass die Differentialgleichung (A_1) in diesem Falle keinen im Endlichen gelegenen singulären Punkt besitzt. Ist $\lambda = 0$, so erstreckt sich der Gültigkeitsbereich der $n - 1$ Integrale

$$J_{l_{a,b}}(x), \cdots J_{l_{a\varkappa}}(x), \cdots$$

auf die Gesammtheit aller endlichen x-Werthe und, diese $n - 1$ Lösungen von (A_1) sind auch wieder ganze transcendente Functionen; dagegen gilt das n^{te} Integral

$$J_{l'}(x)$$

nur in einem beschränkten, den Punkt $x = -m_0$ nicht einschliessenden Bereiche $\mathfrak{B}$, die durch dasselbe dargestellte Lösung von (A_1) ist folglich im Allgemeinen mehrdeutig und besitzt den Punkt $x = -m_0$ zum Verzweigungspunkte. Dies ist übrigens auch a priori klar, wenn man beachtet, dass der Punkt $x = -m_0$ ein einfacher singulärer Punkt der Differentialgleichung (A_1) ist.

115. Differentialgleichungen vom Range Eins, die von höherer Ordnung sind, als ihre Laplace'schen Transformirten.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, ähnlich wie es uns im Falle $p = 1$ gelungen ist, auch im Allgemeinen n Integrationswege l aufzufinden, die der einen von den beiden in der Nr. 113 (S. 408) aufgestellten Forderungen genügen, über welche erstreckt also $J_l(x)$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (A) darstellt. Diese Aufgabe bietet bedeutende Schwierigkeiten dar, weil sich im allgemeinen Falle das Verhalten der Function V nicht so leicht übersehen lässt, wie im Falle $p = 1$.

Wir setzen der Einfachheit wegen wieder voraus, dass die Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_n$ der charakteristischen Gleichung (10) sämmtlich (endlich und) von einander verschieden seien, und denken uns dann von dem beliebigen Punkte $z = \zeta$ aus einfache Schleifen $s_1, s_2, \cdots s_n$ nach den Punkten

$$z = c_1, c_2, \cdots c_n$$

hingelegt. Sei v eine beliebige Lösung der Laplace'schen Transformirten (L), und setzen wir das über die Schleife s_ν erstreckte Integral $J(x)$ gleich

$$T_\nu = \int_{(s_\nu)} v e^{zx} dz \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n).$$

Das zum Punkte $z = c_\nu$ gehörige canonische Fundamentalsystem besteht im Allgemeinen aus $p - 1$ in der Umgebung dieses Punktes regulären Elementen und aus einem Integrale von der Form

$$v_\nu = (z - c_\nu)^{\varrho_\nu} \mathfrak{P}_\nu(z \mid c_\nu),$$

wo $\mathfrak{P}_\nu(z \mid c_\nu)$ eine in der Umgebung von $z = c_\nu$ reguläre Function bedeutet; es ist folglich das beliebige Integral v in dieser Umgebung in der Form darstellbar

$$(44) \qquad v = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(z \mid c_\nu) + \gamma_\nu v_\nu,$$

wo auch $\overline{\mathfrak{P}}_\nu(z \mid c_\nu)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $z - c_\nu$ entwickelbare Function, γ_ν eine Constante bedeutet.

Substituiren wir nun das Integral T_ν in die linke Seite der Differentialgleichung (A), so kommt:

$$D(T_\nu) = \int_{(s_\nu)} \frac{\partial V}{\partial z} dz;$$

bezeichnen wir also das, was aus einer Function $f(z)$ wird, wenn z den Weg s_ν beschreibt, durch

$$\Theta_\nu f(z),$$

so ist

$$(45) \qquad D(T_\nu) = \Theta_\nu V(\zeta, x) - V(\zeta, x).$$

Nun ist

$$V(z, x) = e^{zx} \sum_{\mu=0}^{p-1} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{p-1-\mu} \varphi_{\mu\lambda}(z) \frac{d^\lambda v}{dz^\lambda},$$

wo die $\varphi_{\mu\lambda}(z)$ ganze rationale Functionen von z bedeuten, die sich aus den $\varphi_i(z)$ und ihren Ableitungen ganz und rational zusammensetzen; wir haben folglich

$$\Theta_\nu V(z, x) - V(z, x) = e^{zx} \sum_{\mu=0}^{p-1} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{p-1-\mu} \varphi_{\mu\lambda}(z) \left\{ \Theta_\nu \left(\frac{d^\lambda v}{dz^\lambda} \right) - \frac{d^\lambda v}{dz^\lambda} \right\}.$$

Vermöge der Gleichung (44) ergiebt sich aber

$$\Theta_\nu \left(\frac{d^\lambda v}{dz^\lambda} \right) - \frac{d^\lambda v}{dz^\lambda} = \gamma_\nu \left[\Theta_\nu \left(\frac{d^\lambda v_\nu}{dz^\lambda} \right) - \frac{d^\lambda v_\nu}{dz^\lambda} \right];$$

bezeichnen wir also die Differenz der Werthe der λ^{ten} Ableitung von v_ν für $z = \zeta$ vor und nach Vollzug des Umlaufes s_ν durch $\omega_{\nu\lambda}$, d. h.

$$\omega_{\nu\lambda} = \left\{\Theta_\nu\left(\frac{d^\lambda v_\nu}{dz^\lambda}\right) - \frac{d^\lambda v_\nu}{dz^\lambda}\right\}_{z=\zeta},$$

so ist

$$\Theta_\nu V(\zeta, x) - V(\zeta, x) = e^{\zeta x}\sum_{\mu=0}^{p-1} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{p-1-\mu} \varphi_{\mu\lambda}(\zeta)\cdot\gamma_\nu\omega_{\nu\lambda}.$$

Seien nun $h_1, h_2, \cdots h_n$ n noch zu bestimmende Constanten, so ist nach Gleichung (45)

$$D\Big(\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu T_\nu\Big) = e^{\zeta x}\sum_{\mu=0}^{p-1} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{p-1-\mu} \varphi_{\mu\lambda}(\zeta) \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu\gamma_\nu\omega_{\nu\lambda};$$

wenn sich also die $h_1, \cdots h_n$ so bestimmen lassen, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu\gamma_\nu\omega_{\nu\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots \overline{p-1}) \tag{46}$$

ist, so ist der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu T_\nu$$

eine Lösung der Differentialgleichung (A). Eine solche Bestimmung ist stets möglich, wenn

$$p < n;$$

in diesem Falle besitzen die Gleichungen (46) genau $n - p$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$h_1^{(\lambda)}, h_2^{(\lambda)}, \cdots h_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \overline{n-p}),$$

d. h. wir haben $n - p$ linear unabhängige Lösungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^{(\lambda)} T_\nu \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \overline{n-p}) \tag{47}$$

der Differentialgleichung (A). Diese Lösungen finden sich mit Hülfe der bestimmten Integrale T_ν dargestellt für alle endlichen Werthe von x, und aus dieser Form der Darstellung ist auch unmittelbar ersichtlich, dass die Lösungen (47) ganze transcendente Functionen von x sind. Wir finden also als Verallgemeinerung des für die Laplace'sche Gleichung ($p = 1$) erlangten Ergebnisses das Resultat:

Wenn $n > p$ ist, so besitzt die Differentialgleichung (A) $n - p$ linear unabhängige Integrale, die ganze transcendente Functionen sind.

Wenn die Wurzel ϱ_i der zu $z = c_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung in ihrem realen Theile grösser ist als $p - 1$, so verschwindet v_i mit seinen $p - 1$ ersten Ableitungen in diesem singulären Punkte; dies vorausgesetzt, kann man an Stelle des über die Schleife s_i erstreckten Integrals T_i das Integral

$$\int_{c_i}^{\zeta} v_i e^{zx} dz$$

benutzen, weil dann der für das Integral $v = v_i$ gebildete Ausdruck $V(z, x)$ für $z = c_i$ verschwindet; als Integrationsweg kann irgend eine beliebige, die singulären Punkte vermeidende, zwischen den Punkten c_i und ζ erstreckte Curve genommen werden.

116. Die allgemeine Differentialgleichung vom Range Eins. Convergenz der Normalreihe (vergl. Nr. 112).

Wenn n nicht grösser ist als p, so liefert das eingeschlagene Verfahren im Allgemeinen keine Lösungen der Differentialgleichung (A). Man kann aber auch in diesem Falle zu einer Darstellung von n Lösungen der Differentialgleichung (A) durch bestimmte Integrale von der Form $J(x)$ gelangen, wenn man Integrationswege anwendet, deren Anfangs- und Endpunkt im Unendlichen liegt. Um solche Integrationswege zu studiren, muss man das Verhalten der Integrale v von (L) in der Umgebung von $z = \infty$ kennen, man wird also genöthigt sein auf die Poincaré'schen Sätze, deren wir in der Nr. 100 (S. 362, 363) gedacht haben, zurückzugreifen. Dieselben werden uns gestatten in dem allgemeinen Falle ähnliche Resultate zu erhalten, wie die, welche wir für die Laplace'sche Differentialgleichung ($p = 1$) gefunden haben.

Bilden wir zu dem Ende zunächst die charakteristische Gleichung der Laplace'schen Transformirten (L), so lautet dieselbe

$$\sum_{\varkappa=0}^{p} C_{\varkappa, n}(-1)^{\varkappa} a^{\varkappa} = 0; \tag{48}$$

bezeichnen wir ihre Wurzeln durch

$$-a_1, -a_2, \cdots -a_p,$$

so sind die entgegengesetzten Werthe derselben, d. h.

$$a_1, a_2, \cdots a$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{p} C_{\varkappa, n} a^{\varkappa} = P_n(a) = 0,$$

also nichts anderes als die im Endlichen gelegenen singulären Punkte der Differentialgleichung (A). Der am Schlusse der Nr. 100 (S. 363) ausgesprochene Satz des Herrn Poincaré lehrt nun für die Integrale v von (L), dass

$$\lim v e^{xz} = 0$$

ist, wenn z mit dem Argumente ϑ ins Unendliche rückt, und

$$\Re(-xe^{\vartheta i}) > \Re(-a_{\varkappa} e^{\vartheta i}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p),$$

d. h.

$$\Re(xe^{\vartheta i}) < \Re(a_{\varkappa} e^{\vartheta i}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p) \tag{49}$$

ist. Unter denselben Bedingungen ist aber dann auch

$$\lim_{z=\vartheta\infty} \frac{d^{\lambda} v}{dz^{\lambda}} z^{\varkappa} e^{zx} = 0,$$

es verschwindet folglich der Grenzwerth des Ausdruckes $V(z, x)$

$$\lim_{z=\vartheta\infty} V(z, x),$$

wenn ϑ den Ungleichungen (49) Genüge leistet. Diese letzteren lassen sich offenbar stets befriedigen, wenn wir x auf einen Bereich beschränken, der keinen der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_p$ in sich schliesst; denken wir uns z. B. ein convexes Polygon P in der x-Ebene gezeichnet, ausserhalb dessen keiner dieser Punkte liegt, so lassen sich allemal Werthe von ϑ finden, die den Ungleichungen (49) genügen, wenn x ausserhalb des Polygons P verbleibt.

Wir denken uns nun in der z-Ebene z. B. einen Integrationsweg $l_{\varkappa}$, der, von $z = \infty$ mit einem den Ungleichungen (49) genügenden Argumente ausgehend, den Punkt $z = c_{\varkappa}$ umschlingt und dann mit demselben oder mit einem anderen, ebenfalls die Ungleichungen (49) befriedigenden Argumente nach $z = \infty$ zurückkehrt. Bilden wir dann

$$y_{\varkappa} = J_{l_{\varkappa}}(x) = \int_{(l_{\varkappa})} v e^{zx} \, dz,$$

wo v ein beliebiges Integral von (L) bedeutet, so ist

$$D(y_{\varkappa}) = \int_{(l_{\varkappa})} \frac{\partial V(x, z)}{\partial z} dz = 0,$$

d. h. $y_{\varkappa}$ eine Lösung der Differentialgleichung (A). Wenn wir wieder die $c_1, c_2, \cdots c_n$ von einander verschieden und die Zahlen

$\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ als nicht ganzzahlig voraussetzen, so ist in der Umgebung von $z = c_\nu$ jedes Integral v in der Form (44) darstellbar, und es ist folglich

$$y_\varkappa = \int\limits_{(l_\varkappa)} v e^{zx} dz = \gamma_\varkappa \int\limits_{(l_\varkappa)} v_\varkappa e^{zx}\, dz;$$

die Lösung $y_\varkappa$ ist also, abgesehen von einem constanten Factor, unabhängig von der Wahl des Integrals v.

Für $\varkappa = 1, 2, \cdots n$ ergeben sich auf diese Weise n Lösungen der Differentialgleichung (A), dieselben finden sich durch die bestimmten Integrale

$$J_{l_\varkappa}(x)$$

dargestellt, wenn x auf das Aeussere des Polygons P beschränkt wird; man kann noch unzählig viele andere Integrationswege finden, die den in der Nr. 113 (S. 408) aufgestellten Forderungen genügen, aber man erkennt leicht, dass die über dieselben erstreckten Integrale $J(x)$ nur Lösungen von (A) liefern, die homogene lineare Verbindungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ sind.

Wir specialisiren nun den Integrationsweg $l_\varkappa$, indem wir das Argument ϑ von z, mit welchem derselbe von $z = \infty$ ausgeht und nach $z = \infty$ zurückkehrt, gleich π nehmen; beschreiben wir z. B. um $c_\varkappa$ als Mittelpunkt einen kleinen Kreis $\mathfrak{C}_\varkappa$, und ziehen von $c_\varkappa$ aus eine Parallele zur realen z-Axe, die sich nach der Seite der negativen realen Werthe hin in's Unendliche erstreckt und den Kreis $\mathfrak{C}_\varkappa$ etwa im Punkte $b_\varkappa$ trifft, so möge der specialisirte Integrationsweg $l_\varkappa$ — wir nennen ihn $\bar{l}_\varkappa$ — von $z = \infty$ aus auf dieser Parallelen bis nach $b_\varkappa$ hin, dann längs $\mathfrak{C}_\varkappa$ nach $b_\varkappa$ zurück und wieder auf der Parallelen von $b_\varkappa$ nach $z = \infty$ laufend gewählt werden. Sollte auf dem so bestimmten Wege $\bar{l}_\varkappa$ einer der Punkte c_ν liegen, so modificiren wir $\bar{l}_\varkappa$, indem wir dem c_ν in einem kleinen Bogen ausweichen. Das Integral

$$\bar{y}_\varkappa = \int\limits_{(\bar{l}_\varkappa)} v_\varkappa e^{zx} dz \tag{50}$$

stellt dann eine Lösung der Differentialgleichung (A) dar, wenn x der Ungleichung (49) für $\vartheta = \pi$ genügt, d. h. wenn

$$\Re(x) > \Re(a_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots p),$$

also insbesondere, wenn z. B. x real positiv und sehr gross angenommen wird. Denken wir uns nun in (50) für $v_\varkappa$ seine Entwickelung nach Potenzen von $z - c_\varkappa$ eingesetzt (vergl. Gleichung (32) S. 404, für $i = \varkappa$)

(51) $$v_\varkappa = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\varkappa\nu}(z - c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa + \nu},$$

dann convergirt dieselbe im Allgemeinen nur innerhalb einer gewissen Umgebung von $z = c_\varkappa$. Wenn wir trotzdem das Product dieser Reihe in e^{zx} auf dem Wege $\bar{l}_\varkappa$ gliedweise integriren, so werden wir im Allgemeinen eine divergente Reihe erhalten; es würde sich dann und nur dann ein convergentes Resultat ergeben, wenn die Reihenentwickelung (51) für alle Punkte des Integrationsweges $\bar{l}_\varkappa$ gleichmässig und unbedingt convergent wäre. Dies kann aber nur eintreten, wenn

$$v_\varkappa(z - c_\varkappa)^{-\varrho_\varkappa}$$

eine ganze transcendente Function von z ist. Führen wir die Integration in der gedachten Weise ganz formal aus, so ist also

(52) $$\bar{y}_\varkappa \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\varkappa\nu} \int_{(\bar{l}_\varkappa)} (z - c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{zx} dz,$$

wo wir das Zeichen $\sim$ an Stelle des Gleichheitszeichens geschrieben haben, um anzudeuten, dass im Allgemeinen keine Gleichheit zwischen den beiden Ausdrücken besteht, weil der auf der rechten Seite stehende Ausdruck, von einzelnen Ausnahmefällen abgesehen, divergent ist.

Um das Integral

$$\int_{(\bar{l}_\varkappa)} (z - c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{zx} dz$$

zu berechnen, setzen wir

$$-(z - c_\varkappa)x = t;$$

dann lautet das transformirte Integral

$$(-1)^{\varrho_\varkappa + \nu - 1} x^{-\varrho_\varkappa - \nu - 1} e^{c_\varkappa x} \int t^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{-t} dt,$$

und der Integrationsweg in der t-Ebene führt, wenn wir, was ja erlaubt ist, x real positiv und hinreichend gross annehmen, auf der positiven realen Axe von $+\infty$ bis zu einem sehr kleinen positiven Werthe ε, dann von ε im Kreise um den Punkt $t = 0$ herum und längs der realen Axe wieder nach $+\infty$ zurück. Aber das so genommene Integral

(53) $$\int t^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{-t} dt$$

können wir schreiben:

$$\int\limits_{\infty}^{\varepsilon} t^{\varrho_\varkappa+\nu} e^{-t} dt + \int\limits_{(0)} t^{\varrho_\varkappa+\nu} e^{-t} dt + e^{2\pi i(\varrho_\varkappa+\nu)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} t^{\varrho_\varkappa+\nu} e^{-t} dt,$$

da sich $t^{\varrho_\varkappa+\nu}$ bei dem Umlaufe um $t=0$ mit dem Factor

$$e^{2\pi i(\varrho_\varkappa+\nu)}$$

multiplicirt hat. Lassen wir hierin ε gegen Null convergiren, so fällt das zweite Integral fort (der Fall eines negativen ganzzahligen $\varrho_\varkappa$ bleibt nach wie vor ausgeschlossen), und da nach einer bekannten Formel

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{\varrho-1} dt = \Gamma(\varrho)$$

ist, so ergiebt sich für das Integral (53) der Werth

$$(e^{2\pi i\varrho_\varkappa} - 1)\,\Gamma(\varrho_\varkappa + \nu + 1).$$

Somit finden wir

$$(54)\qquad \int\limits_{(\overline{l}_\varkappa)} (z - c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa+\nu} e^{zx} dz$$
$$= (-1)^{\varrho_\varkappa+\nu-1} x^{-\varrho_\varkappa-\nu-1} e^{c_\varkappa x}\, \Gamma(\varrho_\varkappa + \nu + 1)\,(e^{2\pi i\varrho_\varkappa} - 1).$$

Diese Gleichung gilt ihrer Herleitung gemäss nur für hinreichend grosse positive Werthe von x; da aber die Ausdrücke auf beiden Seiten monogene Functionen von x sind, so können wir nach bekannten analytischen Principien unmittelbar schliessen, dass die Gleichung für alle jene x-Werthe bestehen bleibt, für die das Integral auf der linken Seite überhaupt einen Sinn hat. Die rechte Seite von (52) erscheint hiernach in der Form

$$(-1)^{\varrho_\varkappa-1}(e^{2\pi i\varrho_\varkappa} - 1)\, e^{c_\varkappa x} x^{-\varrho_\varkappa-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu H_{\varkappa\nu}\, \Gamma(\varrho_\varkappa + \nu + 1)\, x^{-\nu}.$$

Dies ist aber abgesehen von dem constanten Factor

$$(-1)^{\varrho_\varkappa-1}(e^{2\pi i\varrho_\varkappa} - 1) = \mathfrak{C}$$

genau die zum fundamentalen determinirenden Factor

$$e^{c_\varkappa x}$$

gehörige Normalreihe (33). Wenn die Reihenentwickelung (51) für alle endlichen Werthe von z convergirt, so ist die gliedweise Integration legitim und die durch Ausführung derselben hervorgehende Reihe, d. h. die Normalreihe (33), convergirt so lange, als die Gleichung (54) gültig ist, d. h. für Werthe von x, deren absoluter Betrag hinreichend gross ist. In diesem Falle ist also (53) eine richtige Gleichung, und damit ist zugleich bewiesen, dass das Kriterium, welches wir in der Nr. 112 (S. 405) als nothwendig für die Convergenz der Normalreihe erkannt haben, auch hinreichend ist; es ist also die Existenz eines zum fundamentalen determinirenden Factor $e^{c_\varkappa x}$ gehörigen Normalintegrals der Differentialgleichung (A) gleichbedeutend mit der Existenz eines Integrals der Laplace-schen Transformirten, welches, abgesehen vom Factor

$$(z - c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa},$$

eine ganze transcendente Function von z ist.

117. Bedingung für die Existenz eines Integrals, das eine mit einem Exponentialfactor multiplicirte ganze Function ist. Asymptotische Darstellungen. Reciprocität der Laplace'schen Transformirten.

Der Herleitung dieses Satzes liegt die Annahme zu Grunde, dass $\varrho_\varkappa$ nicht ganzzahlig sei. Indem wir die Discussion der Fälle, wo für ganzzahliges $\varrho_\varkappa$ das Integral $v_\varkappa$ mit Logarithmen behaftet ist, bei Seite lassen, wollen wir nur den besonders bemerkenswerthen Fall betrachten, wo $\varrho_\varkappa$ ganzzahlig negativ ist, und wo $v_\varkappa$ keinen Logarithmus enthält. Alsdann besitzt $v_\varkappa$ in der Umgebung von $z = c_\varkappa$ den Charakter einer rationalen Function und bleibt also ungeändert, wenn z die Peripherie des Kreises $\mathfrak{C}_\varkappa$ durchläuft. Hieraus schliessen wir, dass in dem Integrale (50) die beiden Bestandtheile, welche von der Integration längs der zur realen Axe parallelen Geraden von $-\infty$ nach $b_\varkappa$ und von $b_\varkappa$ nach $-\infty$ herrühren, sich zerstören; es bleibt also nur

$$y_\varkappa = \int\limits_{(\mathfrak{C}_\varkappa)} v_\varkappa e^{zx} dz.$$

Sei in der Umgebung von $z = c_\varkappa$

$$v_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa(z \mid c_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{r_\varkappa+1} \frac{\alpha_\lambda}{(z - c_\varkappa)^\lambda} \qquad (r_\varkappa = -\varrho_\varkappa - 1 \geqq 0),$$

wo $\mathfrak{P}_\varkappa(z \mid c_\varkappa)$ eine in der Umgebung von $z = c_\varkappa$ reguläre Function bedeutet, dann ist

$$\int\limits_{(\mathfrak{C}_\varkappa)} \mathfrak{P}_\varkappa(z \mid c_\varkappa) e^{zx} dz = 0,$$

dagegen

$$\sum_{\lambda=1}^{r_\varkappa+1} \alpha_\lambda \int_{(\mathfrak{C}_\varkappa)} (z-c_\varkappa)^{-\lambda} e^{zx} dz = \sum_{\lambda=1}^{r_\varkappa+1} \alpha_\lambda e^{c_\varkappa x} \int_{(\mathfrak{C}_\varkappa)} (z-c_\varkappa)^{-\lambda} e^{(z-c_\varkappa)x} dz,$$

und da bekanntlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathfrak{C}_\varkappa)} (z-c_\varkappa)^{-\lambda} e^{(z-c_\varkappa)x} dz = \frac{x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

ist, so ergiebt sich für $\bar{y}_\varkappa$ der Ausdruck

$$\bar{y}_\varkappa = 2\pi i e^{c_\varkappa x} \sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa} \alpha_{\lambda+1} \frac{x^\lambda}{\lambda!},$$

d. h. in diesem Falle existirt stets ein Normalintegral der Differentialgleichung (A), und zwar reducirt sich dasselbe auf eine mit dem fundamentalen determinirenden Factor multiplicirte ganze rationale Function von x.

Wenn umgekehrt die Differentialgleichung (A) durch einen derartigen Ausdruck befriedigt werden soll, so muss zunächst $r_\varkappa$ eine positive ganze Zahl, d. h. $\varrho_\varkappa$ ganzzahlig negativ sein; ferner darf das zum Exponenten $\varrho_\varkappa$ gehörige Integral $v_\varkappa$ von (L) keinen Logarithmus enthalten, denn wenn dies der Fall wäre, so könnte sich der Ausdruck

$$\int_{(\bar{l}_\varkappa)} v_\varkappa e^{(z-c_\varkappa)x} dz$$

niemals auf eine ganze rationale Function von x reduciren. Damit also die Differentialgleichung (A) ein Normalintegral besitzt, welches eine mit dem fundamentalen determinirenden Factor $e^{c_\varkappa x}$ multiplicirte ganze rationale Function von x ist, ergiebt sich als nothwendig und hinreichend, dass

1) die p^{te} Wurzel $\varrho_\varkappa$ der zum singulären Punkte $z = c_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Laplaceschen Transformirten (L) eine negative ganze Zahl und

2) das zu dieser Wurzel als Exponenten gehörige Integral $v_\varkappa$ von (L) von Logarithmen frei sei.

Wir fügen diesen Resultaten, die — wie wir an späterer Stelle sehen werden — vielfacher und wichtiger Anwendungen fähig sind, noch einige Bemerkungen hinzu, die sich auf den Fall beziehen, wo $\varrho_\varkappa$ nicht ganzzahlig und die Reihe für $v_\varkappa$ nicht beständig convergent ist. Setzen wir dann

$$v_\varkappa - \sum_{\nu=0}^{q} H_{\varkappa\nu} (z-c_\varkappa)^{\varrho_\varkappa+\nu} = R_q(z),$$

so ist $R_q(z)$ für alle Werthe von z wohldefinirt, und wenn $z - c_\varkappa$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein genommen wird, so haben wir für unendlich wachsendes q

$$(z - c_\varkappa)^{-\varrho_\varkappa} \lim_q R_q(z) = 0.$$

Mit Benutzung der durch die Gleichung (20a), S. 404, fixirten Bezeichnung können wir demnach schreiben

$$\bar{y}_\varkappa = e^{c_\varkappa x} \mathfrak{C} \sum_{\nu=0}^{q} g_\nu(r_\varkappa) x^{r_\varkappa - \nu} + \int_{(l_\varkappa)} R_q(z) e^{zx} dz.$$

Aus den in der bereits erwähnten Arbeit im American Journal veröffentlichten Untersuchungen von Herrn Poincaré ergiebt sich nun, dass

$$(55) \qquad \lim_{x=\infty} x^m e^{-c_\varkappa x} \int_{(l_\varkappa)} R_q(z) e^{zx} dz = 0$$

ist für beliebiges m, wenn x als reale positive Grösse in's Unendliche rückt. Hieraus folgt, dass sich der Ausdruck

$$x^m e^{-c_\varkappa x} \left\{ \bar{y}_\varkappa - \mathfrak{C} e^{c_\varkappa x} \sum_{\nu=0}^{q} g_\nu(r_\varkappa) x^{r_\varkappa - \nu} \right\}$$

der Null nähert, wenn x als reale positive Grösse in's Unendliche wächst; man drückt dies gewöhnlich so aus, dass man sagt: die Function $\bar{y}_\varkappa$ werde durch die divergente Normalreihe

$$(56) \qquad \mathfrak{C} e^{c_\varkappa x} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\varkappa) x^{r_\varkappa - \nu}$$

für reale positive Werthe von x asymptotisch dargestellt.

Solche asymptotische Darstellungen sind in der Analysis schon seit langer Zeit bekannt, wir erinnern z. B. nur an die Darstellung von

$$\log \Gamma(z + 1)$$

durch die sogenannte Stirling'sche Reihe (vergl. Gauss, Disquisitiones circa seriem etc., art. 29); dieselben geben natürlich über den analytischen Charakter der so dargestellten Function keinen Aufschluss, sie können aber zur angenäherten Berechnung dieser Function für hinreichend grosse Werthe von x angewandt werden. Wir gehen hier weder auf die Begründung der Gleichung (55), noch auf eine genauere Untersuchung dieser asymptotischen Darstellungen ein, es werde bloss noch erwähnt, dass die Normalreihe (56) nur für reale positive x das Integral $\bar{y}_\varkappa$ von (A) asymptotisch darstellt; lässt man dagegen x mit einem anderen (von Null verschiedenen) Argumente in's Unendliche rücken, so erfolgt die asymptotische Annäherung der Reihe (56) nicht mehr an $\bar{y}_\varkappa$, sondern an ein anderes Integral von (A).

Die Theorie der Laplace'schen Transformirten hat uns in hinreichend allgemeinen Fällen Darstellungen für die Lösungen unserer Differentialgleichung vom Range Eins geliefert. Sie liess aber zugleich eine Anzahl bemerkenswerther Eigenschaften dieser Lösungen hervortreten, und man darf wohl erwarten, dass es der weiteren Forschung auf diesem Gebiete, auf welches Herr Poincaré erst vor wenigen Jahren die Aufmerksamkeit der Mathematiker gelenkt hat, gelingen dürfte, unsere Kenntnisse über das Verhalten der Integrale linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten in der Umgebung von Unbestimmtheitsstellen noch wesentlich zu erweitern. Dass die Resultate der in diesem Kapitel dargelegten Theorie über die besondere Classe der Differentialgleichungen vom Range Eins hinausreichen, lässt sich leicht einsehen.

Zwar erscheint die Bildung der Laplace'schen Transformirten wesentlich an die Voraussetzung geknüpft, dass die gegebene Differentialgleichung (A) rationale Coefficienten habe und vom Range Eins sei, es ist jedoch hierin der Fall, wo sich die Integrale von (A) zum Theil oder sämmtlich im Punkte $x = \infty$ bestimmt verhalten, mit eingeschlossen. Soweit es sich also um die blosse Möglichkeit einer Darstellung der Lösungen von (A) in der Form von bestimmten Integralen handelt, die über Lösungen der Laplace'schen Transformirten zu erstrecken sind, enthält jene Voraussetzung keine Beschränkung, denn wie schon (S. 379) hervorgehoben wurde, lässt sich durch eine einfache Transformation stets erreichen, dass der unendlich ferne Punkt eine reguläre Stelle oder eine singuläre Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung wird. Wesentlich ist jene beschränkende Voraussetzung dagegen für diejenigen Resultate, die sich auf das Verhalten der Integrale in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ und auf die Fragen nach der Existenz und der besonderen Beschaffenheit der zum Punkte $x = \infty$ gehörigen Normalreihen beziehen. Es lassen sich aber auch diese Ergebnisse für den Fall eines höheren Ranges nutzbar machen, wenn man sich der in der Nr. 99 (S. 356) angegebenen Reduction bedient, welche lehrt, wie die Behandlung der Integrale von Differentialgleichungen beliebigen Ranges auf das Studium gewisser besonderer Lösungen einer Differentialgleichung vom Range Eins zurückgeführt werden kann.

Besonders bemerkenswerth ist noch eine eigenartige Reciprocität, die zwischen der Differentialgleichung (A) und ihrer Laplace'schen Transformirten (L) besteht.

Bilden wir nämlich die adjungirte Differentialgleichung von (L), so lautet dieselbe nach S. 399, 400:

$$(L') \qquad \Delta(u) = \sum_{\mu=0}^{p} \varphi_\mu(z) \frac{d^\mu u}{dz^\mu} = \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{\varkappa=0}^{n} C_{\mu,\varkappa} z^\varkappa \frac{d^\mu u}{dz^\mu} = 0.$$

Beachten wir nun die Art und Weise, wie sich die Coefficienten von (L) aus denen von (A) zusammensetzen, so erkennen wir sofort, dass die Laplace'sche Transformirte der Differentialgleichung (L′) die Form haben werde:

$$(A') \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{p} C_{\mu,\varkappa} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa (x^\mu \eta)}{dx^\varkappa} = 0;$$

dies ist aber nach Nr. 24 (S. 69) nichts anderes als die adjungirte Differentialgleichung von (A). Wir haben also den Satz:

Die adjungirte Differentialgleichung der Laplace'schen Transformirten einer Differentialgleichung (A) vom Range Eins ist so beschaffen, dass ihre Laplace'sche Transformirte die adjungirte der ursprünglichen Differentialgleichung (A) ist.

Achter Abschnitt.

Berechnung der Fundamentalsubstitutionen für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Erstes Kapitel.

118. Fortsetzung eines Fundamentalsystems.

So wichtig die im vorhergehenden Abschnitte kennengelernten Darstellungsmethoden der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten sind, so machen sie es doch nicht überflüssig ein Verfahren für die Integration solcher Differentialgleichungen zu entwickeln, welches nur von den in den Umgebungen einzelner Punkte, beziehungsweise innerhalb gewisser Kreisringe gültigen Reihenentwickelungen Gebrauch macht, dabei aber auch die Schwierigkeiten, welche die analytische Fortsetzung von Potenzreihen mit sich bringt, vermeidet.

Wir nehmen zu dem Ende die in der Nr. 102 (S. 367 ff.) benutzten Bezeichnungen wieder auf; es sei also $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein durch sei..e Anfangswerthe im regulären Punkte $x = \xi$ definirtes Fundamentalsystem, dann sind die Entwickelungen in der Umgebung von $x = \xi$

$$(1) \qquad y_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa(x \mid \xi) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\varkappa(x \mid \xi)$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, als bekannt anzusehen. In einem Punkte $\bar{x}$, der innerhalb des Convergenzkreises dieser Entwickelungen liegt, bietet die Berechnung der Werthe von $y_1, \cdots y_n$ keinerlei Schwierigkeiten dar, wenn als Fortsetzungsweg der directe Weg von ξ nach $\bar{x}$ genommen wird; es ist darum von Wichtigkeit hervorzuheben, wie weit sich dieser Convergenzkreis erstrecken kann. Im Allgemeinen ist es der Kreis mit dem Mittelpunkte ξ, der sich bis zum nächstgelegenen der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ ausdehnt (vergl. Nr. 9); die Convergenz der Entwickelungen (1) kann aber über das Innere dieses Kreises hinausreichen, wenn nämlich die auf der Peripherie desselben gelegenen singulären Punkte der Differentialgleichung ausserwesentliche singuläre Stellen sind. In der That wären in diesem Falle die Functionen $y_1, \cdots y_n$ in der Umgebung jeder Stelle dieser Kreisperipherie regulär (vergl. die Definition der ausserwesentlichen singulären Stellen in der Nr. 55, S. 197), und man weiss nach einem bekannten Satze der Functionentheorie, dass, wenn eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x \mid \xi)$ innerhalb eines Kreises

$$|x - \xi| = R$$

convergirt, wenn überdies die durch $\mathfrak{P}(x \mid \xi)$ definirte monogene Function in der Umgebung jeder Stelle der Peripherie dieses Kreises regulär ist, dass dann die Reihe $\mathfrak{P}(x \mid \xi)$ auch noch innerhalb eines Kreises convergiren muss, dessen Radius um einen endlichen Betrag grösser ist, wie R. Der wahre Convergenzkreis der Potenzreihen (1) erstreckt sich also bis zu dem dem Punkte $x = \xi$ zunächst gelegenen wesentlichen singulären Punkte, wobei es aber noch immer nicht ausgeschlossen ist, dass einzelne dieser Reihen auch über diesen Kreis hinaus convergiren.

Denken wir uns die Reihenfolge der im Endlichen gelegenen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ so gewählt, dass $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ die wesentlichen, $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \cdots a_\sigma$ die ausserwesentlichen singulären darstellen, so spielen also bei Feststellung des Convergenzkreises von Reihenentwickelungen, die der Differentialgleichung genügen, nur die $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ eine Rolle. Ueberhaupt sind die ausserwesentlichen Stellen nichts, was den die Integrale darstellenden Functionen eigenthümlich ist, vielmehr haften sie der Differentialgleichung an, der diese Functionen genügen; die tiefere Bedeutung des Auftretens solcher Stellen wird erst in einem späteren Abschnitte dargelegt werden können.

Es bedeute also im Folgenden, für irgend einen Werth $x = \xi$, R_ξ die kleinste unter den Grössen

$$|\xi - a_1|, \ |\xi - a_2|, \cdots |\xi - a_\varrho|,$$

wir fragen dann zunächst: wie berechnet man die Werthe der $y_1, y_2, \cdots y_n$ in einem regulären Punkte $x = \bar{x}$, der nicht innerhalb des Kreises

$$|x - \xi| = R_\xi$$

gelegen ist, bei Fortsetzung auf directem, d. h. innerhalb $\bar{T}$ verlaufenden Wege. Der einfachste Fall ist der, wo der Punkt $\bar{x}$ so gelegen ist, dass die Kreise

$$|x - \xi| = R_\xi, \quad |x - \bar{x}| = R_{\bar{x}}$$

ein beiden gemeinsames Gebiet besitzen. Bezeichnet nämlich α irgend eine reguläre Stelle dieses Gebietes, denken wir uns ferner ein Fundamentalsystem $z_1, z_2, \cdots z_n$ durch seine Anfangswerthe in $x = \bar{x}$ definirt und die Entwickelungen desselben in der Umgebung dieses Punktes

(2) $$z_\varkappa = \overline{\mathfrak{P}}_\varkappa(x \mid \overline{x}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

hergestellt, so convergiren diese Reihen ebensowohl wie die Reihen (1) im Punkte $x = \alpha$. — Nun besteht aber zwischen den beiden Fundamentalsystemen $[y_\varkappa]$ und $[z_\varkappa]$ die Beziehung

(3) $$[y_\varkappa] = S[z_\varkappa],$$

wo

$$S = (\alpha_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Differentiiren wir die Gleichungen (1), (2) und die durch (3) repräsentirten n Gleichungen $(n-1)$-mal nach x, so convergiren die für die Ableitungen der $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ sich ergebenden Potenzreihen auch sämmtlich für $x = \alpha$. Setzen wir also $x = \alpha$, und denken uns in die Gleichungen (3) und in die durch Differentiation aus denselben hervorgegangenen, die mittels der Potenzreihen berechneten Werthe der $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ und ihrer Ableitungen im Punkte $x = \alpha$ eingeführt, so erhalten wir die n Systeme von je n Gleichungen

$$\mathfrak{P}_\varkappa^{(\lambda)}(\alpha \mid \xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} \overline{\mathfrak{P}}_i^{(\lambda)}(\alpha \mid \overline{x}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \cdots (n-1) \\ \varkappa = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix};$$

aus diesen lassen sich die Werthe der n^2 Grössen $\alpha_{\varkappa i}$ eindeutig berechnen, weil die Determinante

$$\left| \overline{\mathfrak{P}}_i^{(\lambda)}(\alpha \mid \overline{x}) \right| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = 0, 1, \cdots (n-1) \end{pmatrix},$$

die ja nichts anderes ist, als der Werth der Determinante des Fundamentalsystems $[z_\varkappa]$ in dem singulären Punkte $x = \alpha$, nicht verschwindet.

Die so gefundenen Werthe der Substitutionscoefficienten $\alpha_{\varkappa i}$ sind unabhängig von der Wahl der Stelle $x = \alpha$ des gemeinsamen Convergenzbereiches der Reihen (1), (2).

Man kann diese a priori selbstverständliche Thatsache auch unmittelbar in Evidenz setzen, wenn man beachtet, dass sich aus den Gleichungen (3) und den daraus durch Differentiation entstehenden für die Substitutionscoefficienten die Werthe

$$\alpha_{\varkappa i} = \frac{D(z_1, \cdots z_{i-1}, y_\varkappa, z_{i+1}, \cdots z_n)}{D(z_1, z_2, \cdots z_n)}$$

ergeben. In diesen Ausdrücken ist nämlich

$$D(z_1, z_2, \cdots z_n) = C \cdot e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx},$$

$$D(z_1, \cdots z_{i-1}, y_\varkappa, z_{i+1}, \cdots z_n) = C_{\varkappa i} \cdot e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx},$$

wo C und $C_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten; wir erhalten folglich

$$\alpha_{\varkappa i} = \frac{C_{\varkappa i}}{C},$$

und dabei ist C stets von Null verschieden, weil $[z_\varkappa]$ ein Fundamentalsystem darstellt, dagegen kann $C_{\varkappa i}$ verschwinden, wenn $y_\varkappa$ mit den $z_1, \cdots z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots z_n$ in linearer Beziehung steht.

Die Berechnung von C bietet im Allgemeinen keinerlei Schwierigkeiten dar (vergl. Nr. 123, S. 449); um für die $C_{\varkappa i}$ gut convergirende Reihen zu erhalten, muss man die Stelle $x = a$ geeignet wählen. Sind die $\alpha_{\varkappa i}$ mit hinreichender Genauigkeit berechnet, so ergeben sich die Werthe der $y_\varkappa$ und ihrer successiven Ableitungen für $x = \bar{x}$, sowie überhaupt für alle Punkte innerhalb des Kreises

$$|x - \bar{x}| = R_{\bar{x}},$$

mit Hülfe der Gleichungen (3), aus den entsprechenden Werthen der $z_\varkappa$ und ihrer Ableitungen.

119. Fall, wo die Convergenzkreise nicht in einander greifen. Abbildung durch eine lineare Function. Allgemeinere Abbildung.

Wenn der Punkt $x = \bar{x}$ so liegt, dass sich die Ungleichungen

$$|x - \xi| < R_\xi, \qquad |x - \bar{x}| < R_{\bar{x}}$$

nicht gleichzeitig befriedigen lassen, so wird man zu verschiedenen Mitteln greifen können, um die Berechnung der Werthe der $y_\varkappa$ in diesem Punkte vorzunehmen. Z. B. könnte man ähnlich wie bei der gewöhnlichen analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe zwischen ξ und $\bar{x}$ eine Reihe von Stellen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\lambda$ einschalten, so dass je zwei aufeinander folgende unter den Convergenzkreisen der zu den Stellen

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\lambda, \bar{x}$$

gehörigen Reihenentwickelungen in einander greifen. Bedeutet dann

$$y_{i\varkappa} = \mathfrak{P}_{i\varkappa}(x \mid \xi_i) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ein in der Umgebung von $x = \xi_i$ entwickeltes Fundamentalsystem, und setzen wir

$$[y_\varkappa] = S_1[y_{1\varkappa}],$$
$$[y_{1\varkappa}] = S_2[y_{2\varkappa}],$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[y_{\lambda\varkappa}] = S_{\lambda+1}[z_\varkappa],$$

so lassen sich die Coefficienten der Substitutionen $S_1, S_2, \cdots S_{\lambda+1}$ nach der vorhin angegebenen Methode berechnen, und die durch Composition dieser Substitutionen entstehende Substitution

$$S = S_1 S_2 \cdots S_{\lambda+1}$$

vermittelt dann den Uebergang von den $y_\varkappa$ zu den $z_\varkappa$, indem nämlich

$$[y_\varkappa] = S[z_\varkappa]$$

gefunden wird. Diese Gleichungen liefern dann wieder unmittelbar die Werthe der $y_\varkappa$ in allen Punkten, für welche

$$|x - \bar{x}| < R_{\bar{x}}.$$

Diese Methode erfordert bei der Composition der $S_1, S_2, \cdots$ die Multiplication der durch unendliche Reihen dargestellten Coefficienten dieser Substitutionen, führt also im Allgemeinen auf sehr complicirte Rechnungen; es ist darum zweckmässiger, diesen Fall durch eine Abbildung auf den vorhin behandelten zurückzuführen.

Nehmen wir zunächst an, es sei möglich, in der x-Ebene einen Kreis K zu zeichnen, der durch $\bar{x}$ hindurch geht und den Punkt ξ in seinem Innern enthält, während die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ ganz ausserhalb oder auf der Peripherie desselben gelegen sind; sei $x = c$ der Mittelpunkt dieses Kreises. Dann lässt sich z. B. leicht eine lineare Function t von x angeben, die den Kreis K der x-Ebene auf den Einheitskreis der t-Ebene abbildet und die überdies so beschaffen ist, dass

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{für} \quad x = \xi, \quad t = 0, \\ \text{für} \quad x = \bar{x}, \quad t = 1 \end{cases}$$

wird. In der That werden ja bekanntlich durch eine lineare Function

$$(5) \qquad t = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

die Kreise der x-Ebene auf Kreise der t-Ebene abgebildet, wenn wir uns den Begriff des Kreises so gefasst denken, dass er auch die geraden Linien als specielle Fälle mit in sich schliesst. Bezeichnen wir nämlich die conjugirte complexe Grösse von a durch a', so ist die allgemeine Gleichung eines Kreises in der t-Ebene

$$(6) \qquad Att' + Bt + B't' + C = 0,$$

wo A, C reale Grössen bedeuten. Setzen wir aber in der Gleichung (6) für t den Werth (5) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(7)\qquad &(A\alpha\alpha' + B\alpha\gamma' + B'\alpha'\gamma + C\gamma\gamma')xx' \\ &+ (A\alpha\beta' + B\alpha\delta' + B'\gamma\beta' + C\gamma\delta')x \\ &+ (A\alpha'\beta + B'\alpha'\delta + B\gamma'\beta + C\gamma'\delta)x' \\ &+ (A\beta\beta' + B\beta\delta' + B'\beta'\delta + C\delta\delta') = 0,\end{aligned}$$

und dies ist wieder die Gleichung eines Kreises in der x-Ebene.

Die Gleichung des Kreises K der x-Ebene möge lauten:

$$(8)\qquad xx' - (cx' + c'x) + cc' = (\bar{x} - c)(\bar{x}' - c');$$

soll diesem der Einheitskreis der t-Ebene entsprechen, so haben wir in (6)

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -1$$

zu setzen und dann α, β, γ, δ so zu bestimmen, dass die Gleichungen (7) und (8) in ihren Coefficienten identisch werden. Wegen (4) ist aber die Gleichung (5) nothwendig von der Form

$$t = \frac{\gamma\bar{x} + \delta}{\bar{x} - \xi} \cdot \frac{x - \xi}{\gamma x + \delta},$$

und wir finden hiernach durch einfache Rechnung

$$(9)\qquad x = c + (\bar{x} - c)\frac{(1 - f)t + f(1 - f')}{(1 - f)f't + (1 - f')},$$

wo

$$f = \frac{\xi - c}{\bar{x} - c}$$

gesetzt wurde.

Führen wir in die Differentialgleichung (A) t als neue unabhängige Variable ein, so verwandelt sich (A) nach Division durch

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^n$$

in eine Differentialgleichung $(\bar{A})$ von derselben Beschaffenheit wie die ursprüngliche, und es entsprechen regulären Punkten der einen Differentialgleichung reguläre Punkte der anderen; ebenso haben die Punkte t, welche wesentlichen, beziehungsweise ausserwesentlichen singulären Stellen x von (A) entsprechen, denselben Charakter in Beziehung auf die Differentialgleichung $(\bar{A})$. Da dem Punkte $x = \xi$, der innerhalb K liegt, der Punkt $t = 0$ entspricht, so werden die Punkte ausserhalb des Kreises K auf Punkte der t-Ebene abgebildet, die auch ausserhalb des Einheitskreises liegen; die singulären Stellen von $(\bar{A})$ liegen folglich keinesfalls innerhalb dieses Kreises. Entwickeln wir also die $y_\varkappa$ nach Potenzen von t und die $z_\varkappa$ nach Potenzen von $t - 1$ (was z. B. dadurch geschehen kann, dass wir mit Hülfe von (9) $x - \xi$ nach Potenzen von t und $x - \bar{x}$ nach Potenzen von $t - 1$ entwickeln, diese Entwickelungen in die Reihen (1) beziehungsweise (2) einsetzen und dann nach Potenzen von t, beziehungsweise $t - 1$ ordnen) so convergiren die Reihen für die $y_\varkappa$ jedenfalls für

$$t < 1$$

und die Reihen für die $z_\varkappa$ innerhalb eines gewissen um $t = 1$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises; es giebt also einen gemeinsamen Convergenzbereich, und dadurch ist die Berechnung der Substitutionscoefficienten $\alpha_{\varkappa i}$ ermöglicht.

Der Umstand, dass sich der Punkt $t = 1$ auf der Peripherie des zu $t = 0$ gehörigen Convergenzkreises befindet, legt die Frage nahe, ob man für die Berechnung der $\alpha_{\varkappa i}$ nicht geradezu die Werthe der $y_\varkappa$ und ihrer Ableitungen nach t im Punkte $t = 1$ benutzen könnte. Dies ist ohne Weiteres möglich, wenn die Entwickelungen dieser Functionen in der Umgebung von $t = 0$ im Punkte $t = 1$ noch convergent sind; wir kommen sehr bald (in der Nr. 123) auf die Vereinfachungen, welche die Wahl $t = 1$ bei Ausführung der Rechnung mit sich bringt und auf die Bedingungen für die Zulässigkeit dieser Wahl, unter etwas allgemeineren Voraussetzungen zurück.

Falls die gegenseitige Lage der Punkte ξ und $\bar{x}$ keine derartige ist, dass ein Kreis K von der angegebenen Beschaffenheit gelegt werden kann, so muss man zu anderen Abbildungen seine Zuflucht nehmen. Z. B. ist es stets möglich, in der x-Ebene zwei ganz innerhalb T verlaufende geradlinig begrenzte Parallelstreifen P_1, P_2 zu construiren, die ein parallelogrammförmiges Gebiet mit einander gemein haben, und die keinen der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ in ihrem Innern enthalten, während der Punkt $x = \xi$ innerhalb des einen P_1, der Punkt $x = \bar{x}$ innerhalb des anderen P_2 gelegen ist. Ein Parallelstreifen P der x-Ebene lässt sich aber leicht auf das Innere des Einheitskreises einer t-Ebene abbilden. Sei nämlich p derjenige Punkt, in welchem die Symmetrale von P von dem auf ihre Richtung vom Punkte $x = 0$ aus gefällten Lothe getroffen wird, und setzen wir

$$\zeta = (x - p)\, e^{-i \operatorname{Arg} p},$$

wo wie üblich

$$\operatorname{Arg} p = \frac{1}{i} \log \frac{p}{|p|}$$

zu nehmen ist, so entspricht dem Streifen P der x-Ebene ein zur lateralen ζ-Axe symmetrischer ebenso breiter Parallelstreifen der ζ-Ebene, und dieser wird (vergl. Nr. 88, S. 315) durch die Function

$$t = \frac{e^{i\alpha\zeta} - 1}{e^{i\alpha\zeta} + 1}$$

auf das Innere des Einheitskreises der t-Ebene abgebildet, wenn

$$h = \frac{\pi}{2\alpha}$$

die halbe Breite des Streifens P bedeutet. Seien nun

$$(10) \qquad t_1 = f_1(x), \quad t_2 = f_2(x)$$

die beiden Functionen, welche die Parallelstreifen P_1 beziehungsweise P_2 auf die Flächen der Einheitskreise der Ebenen t_1 beziehungsweise t_2 abbilden, dann ist die Abbildung conform, so lange

$$|t_1| < 1, \quad \text{bez.} \quad |t_2| < 1.$$

Aus den Gleichungen (10) entnehmen wir also

$$\begin{cases} x - \xi = \mathfrak{P}_\xi(t_1), \\ x - \bar{x} = \mathfrak{P}_{\bar{x}}(t_2), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_{\bar{x}}$ gewöhnliche Potenzreihen von t_1 beziehungsweise t_2 bedeuten. Setzen wir diese Ausdrücke in die Entwickelungen (1) bez. (2) und die daraus durch Differentiation nach x hervorgegangenen ein, so erhalten wir die $y_\varkappa$ nebst ihren successiven Ableitungen entwickelt nach Potenzen von $f_1(x)$, die $z_\varkappa$ nebst ihren successiven Ableitungen entwickelt nach Potenzen von $f_2(x)$, und diese Entwickelungen convergiren innerhalb der Parallelstreifen P_1 beziehungsweise P_2. Nehmen wir nun für x irgend einen (regulären) Punkt des gemeinsamen Gebietes von P_1 und P_2, so convergiren für denselben beide Entwickelungen, und wir können folglich genau ebenso wie vorhin die Substitutionscoefficienten $\alpha_{\varkappa i}$ berechnen.

Die Coefficienten der nach Potenzen von $f_1(x)$ bez. $f_2(x)$ fortschreitenden Entwickelungen für die $y_\varkappa$ bez. $z_\varkappa$ lassen sich in sehr einfacher Weise durch Recursionsformeln bestimmen, z. B. indem man in die Differentialgleichung (A) t_1 bez. t_2 als neue unabhängige Variable einführt, oder aber indem man direct (wie in der Nr. 88) die Ableitungen einer Function nach t_1 bez. t_2 durch die Ableitungen derselben Function nach x ausdrückt und dann

$$x = \xi, \quad t_1 = 0 \qquad \text{bez.} \qquad x = \bar{x}, \quad t_2 = 0$$

setzt.

Man kann natürlich auch noch zahlreiche andere Abbildungen anwenden; allgemein liesse sich die folgende Regel aufstellen. Man grenze um jeden der Punkte $x = \xi$, $x = \bar{x}$ einen Bereich (ξ) bez. $(\bar{x})$ ab, in dessen Innerem keiner der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ liegt, ferner mögen die im übrigen beliebig gestalteten Bereiche (ξ) und $(\bar{x})$ ein Gebiet G mit einander gemein haben. Dann existiren, nach den von Riemann begründeten Principien der conformen Abbildung, stets zwei Functionen

$$(11) \qquad f_\xi(x) \quad \text{und} \quad f_{\bar{x}}(x)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$|f_\xi(x)| < 1,$$

wenn sich x innerhalb des Gebietes (ξ), und

$$|f_{\bar{x}}(x)| < 1,$$

wenn sich x innerhalb des Gebietes $(\bar{x})$ befindet, und dass diese beiden Functionen die eindeutig conforme Abbildung des Einheitskreises auf die beiden Gebiete (ξ) bez. $(\bar{x})$ liefern.

Man kann dann, wenn der Algorithmus der Abbildungsfunctionen (11) bekannt ist, z. B. mit Hülfe der durch Einführung der neuen unabhängigen Variabeln

$$t = f_\xi(x) \quad \text{bez.} \quad \bar{t} = f_{\bar{x}}(x)$$

transformirten Differentialgleichung, die innerhalb des Einheitskreises geltenden Reihenentwickelungen der Integrale $y_\varkappa$ nach Potenzen von t, und die der Integrale $z_\varkappa$ nach Potenzen von $\bar{t}$ herstellen; diese Entwickelungen convergiren beziehungsweise innerhalb der Gebiete (ξ) und $(\bar{x})$ der x-Ebene, also jedenfalls gleichzeitig innerhalb des Bereiches G. Bildet man wieder die $n-1$ ersten Ableitungen, substituirt dieselben in die Gleichungen (3) und die daraus durch $(n-1)$-mal wiederholte Differentiation entstehenden, und setzt endlich für x einen Werth α des Gebietes G ein, so kann man die $\alpha_{i\varkappa}$ berechnen.

Mit Rücksicht auf die besondere Lage der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ wird man die Gebiete (ξ) und $(\bar{x})$ immer so einzurichten haben, dass die Abbildungsfunctionen (11) möglichst einfache werden; jedenfalls lässt sich auf diese Weise die Werthberechnung der Elemente des Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ für alle regulären Stellen $\bar{x}$ bei Fortsetzung auf directem Wege ausführen. Wir haben also nur noch die zweite Aufgabe des Integrationsgeschäftes (vergl. Nr. 102, S. 369) zu erledigen, d. h. die Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ aufzusuchen, die das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ bei einfachen positiven Umläufen um die wesentlichen singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ erfährt.

Zweites Kapitel.

120. Methoden für die Berechnung der Substitutionscoefficienten. Fundamentalsubstitutionen.

Für die Berechnung der Coefficienten der linearen Substitution, die ein gegebenes Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ erfährt, wenn die unabhängige Variable x einen Umlauf U vollzieht, haben wir bereits zwei verschiedene Methoden kennen gelernt. Die erste ist die im vierten Kapitel des sechsten Abschnittes (Nr. 88, 89, S. 314—322) dargelegte Hamburger'sche. In der That gestattet dieselbe nicht nur die Bestimmung der zum Umlaufe U gehörigen Fundamentalgleichung, sondern auch die der Substitutionscoefficienten selbst, vorausgesetzt, dass dieser Umlauf innerhalb eines keinen singulären Punkt enthaltenden Kreisringes E verläuft.

Denken wir uns nämlich den Kreisring E wie er a. a. O. betrachtet wurde, dann sind wir nach den im vorhergehenden Kapitel gegebenen Auseinandersetzungen im Stande, die Werthe des Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ für irgend eine innerhalb E gelegene (reguläre) Stelle x_0 zu berechnen. Wir können also gleich $[y_\varkappa]$ mit dem ebenso bezeichneten Fundamentalsysteme identificiren, welches wir a. a. O. (Nr. 88, S. 317) definirt und der dortigen Untersuchung zu Grunde gelegt haben. Nun wurde gezeigt, wie die Coefficienten $a_{h\varkappa}$ der Substitution, die das Fundamentalsystem

$$v_m(t) = z_m(x) \qquad (m = 1, 2, \cdots n)$$

beim Umlaufe U erfährt, in der Form von unendlichen Reihen dargestellt werden können; der Zusammenhang zwischen den Fundamentalsystemen $[y_\varkappa]$ und $[z_\varkappa]$ wird durch die Gleichungen (48) (Nr. 88, S. 318) vermittelt, deren Coefficienten $c_{m\varkappa}$ sich in (49) (ebenda) explicite angegeben finden. Die Substitution, die das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ beim Umlaufe U erfährt, lautet aber

$$\left(c_{m\varkappa}\right)\left(a_{m\varkappa}\right)\left(c_{m\varkappa}\right)^{-1} \qquad (m, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wir können dieselbe also als bekannt ansehen. — Eine directe Berechnung der Coefficienten dieser Substitution lässt sich auch aus der

Reihenentwickelung (51) (Nr. 88, S. 318) entnehmen, indem man daselbst t in Θt verwandelt und dann $x = x_0$, d. h. $t = 0$ setzt.

Bedeutet nun für den Punkt $x = a_\varkappa$, $R_{a_\varkappa}$ den kleinsten unter den absoluten Beträgen der Differenzen

$$a_i - a_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots \varkappa - 1, \varkappa + 1, \cdots \varrho)$$

und nehmen wir den Kreisring E als die Kreisfläche

$$|x - a_\varkappa| < R_{a_\varkappa} \tag{12}$$

nach Ausschluss eines beliebig kleinen um $x = a_\varkappa$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, dann sind wir im Stande, nach der Hamburger'schen Methode die Coefficienten der Substitution $A_\varkappa$ zu berechnen, die das bei $x = \xi$ durch seine Anfangswerthe definirte Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ beim positiven Umlaufe um den Punkt $x = a_\varkappa$ erleidet, wenn wir nur erst dieses Fundamentalsystem auf directem Wege nach einer der Ungleichung (12) genügenden regulären Stelle x_0 hin fortsetzen und dasselbe dann durch dasjenige Fundamentalsystem darstellen, welches bei $x = x_0$ den in der Nr. 88 (S. 317) aufgeführten Anfangsbedingungen genügt. Wenn wir diese Rechnung für $\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho$ machen, so ist die Integration der gegebenen Differentialgleichung als vollzogen anzusehen.

Die zweite Methode, die bei der Erledigung dieser Aufgabe angewandt werden kann, ist die, welche wir im zweiten Kapitel des siebenten Abschnittes (Nr. 106) auf die Fuchs'sche Darstellung der Integrale durch iterirte Quadraturen gegründet haben. Diese liefert uns für einen beliebigen Umlauf U directe Ausdrücke für die Coefficienten $a_{i\varkappa}$ der Substitution, die das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ bei diesem Umlaufe erfährt, in der Form von iterirten, längs des geschlossenen Weges U erstreckten Integralen, sie hat also vor der Hamburger'schen Methode den Vorzug voraus, dass sie nicht nur bei Umläufen anwendbar ist, die innerhalb eines von singulären Punkten freien Kreisringes verlaufen oder durch stetige Deformation innerhalb T in solche übergeführt werden können, sondern auch in dem allgemeinsten Falle eines ganz beliebigen Umlaufes zu brauchbaren Darstellungen der Substitutionscoefficienten führt. Beiden Methoden ist gemeinsam, dass sie unmittelbar die Substitutionscoefficienten für ein beliebiges, durch seine Anfangswerthe bestimmtes Fundamentalsystem liefern. Man kann der Aufgabe, die Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ zu bestimmen, aber auch noch eine etwas andere Wendung geben, wodurch sie auf die Aufsuchung der zu gewissen Umläufen gehörigen Fundamentalgleichungen zurückgeführt und damit auch der Anwendung der in den drei ersten Kapiteln des sechsten Abschnittes dargelegten Methoden zugänglich wird.

Legen wir ein anderes Fundamentalsystem $(z_\varkappa)$ zu Grunde, welches mit $[y_\varkappa]$ in der Beziehung

$$[y_\varkappa] = C[z_\varkappa]$$

steht, wo

$$C = (c_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine lineare Substitution bedeutet, so gehen die Substitutionen

$$B_1, B_2, \cdots B_\varrho,$$

die das Fundamentalsystem $[z_\varkappa]$ bei einfachen positiven Umläufen um die wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ erfährt, aus den $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ durch Transformation dieser letzteren mit der zur Substitution C inversen Substitution C^{-1} hervor (vergl. Nr. 32, S. 103). Umgekehrt, wenn wir die $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ mit einer beliebigen linearen Substitution S von nicht verschwindender Determinante transformiren, so stellt das System

$$SA_\varkappa S^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

die den einfachen Umläufen um die singulären Punkte $a_\varkappa$ entsprechenden Substitutionen des Fundamentalsystems

$$S[y_\varkappa]$$

dar. Wir wollen ein solches System von ϱ Substitutionen als System von Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung bezeichnen, weil sich die einem beliebigen Umlaufe entsprechende Substitution durch Composition der Elemente eines solchen Systems bilden lässt.

Es giebt also unzählig viele Systeme von Fundamentalsubstitutionen, und alle gehen aus einem einzigen derselben durch Transformation mit einer beliebigen linearen Substitution von nicht verschwindender Determinante hervor. Wir wollen diese unzählig vielen Systeme als einander aequivalent bezeichnen und sie als nicht von einander verschieden betrachten. Es handelt sich dann darum, die zur Bestimmung des so gefassten Begriffes eines Systems von Fundamentalsubstitutionen erforderlichen Elemente aufzusuchen.

121. **Fundamentalinvarianten. Berechnung derselben.**

Beim Uebergange von einem Systeme von Fundamentalsubstitutionen zu einem aequivalenten bleiben (vergl. Nr. 32, S. 105) die Fundamentalgleichungen der einzelnen das System constituirenden Substitutionen invariant. Aber nicht allein diese, sondern auch die Fundamentalgleichungen, die zu beliebigen, durch Composition aus den ϱ Fundamentalsubstitutionen entstehenden Substitutionen, d. h. zu beliebigen Umläufen gehören, geniessen diese selbe Eigenschaft. In der That können wir einen Umlauf U charakterisiren durch die Substitution, die das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ bei Vollzug desselben erfährt, wenn wir eben Umläufe, die durch stetige Deformation innerhalb T aus einander hervorgehen, als gleichwerthig ansehen. Sei diese Substitution

$$(13) \qquad A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha} \qquad (i_1, i_2, \cdots i_\alpha = 1, 2, \cdots \nu),$$

dann ist die dem Fundamentalsysteme

$$S[y_\varkappa]$$

entsprechende Substitution:

$$(14) \qquad S A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha} S^{-1}$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$\left(S A_{i_1} S^{-1}\right)^{\lambda_1} \left(S A_{i_2} S^{-1}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(S A_{i_\alpha} S^{-1}\right)^{\lambda_\alpha};$$

dieselbe ist aus den Fundamentalsubstitutionen

$$S A_\varkappa S^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

genau ebenso gebildet, wie die Substitution (13) aus den Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$. Die Identität der zu den Substitutionen (13), (14) gehörigen Fundamentalgleichungen ist aber unmittelbar ersichtlich.

Also können wir sagen: Für alle aequivalenten Systeme von Fundamentalsubstitutionen sind die Fundamentalgleichungen sämmtlicher durch Composition entstandener Substitutionen invariant.

Es sind folglich die Wurzeln und Coefficienten dieser sämmtlichen Fundamentalgleichungen Invarianten, und wir können nunmehr das System von Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung durch Angabe einer hinreichenden Anzahl solcher Invarianten charakterisiren. Dasselbe erscheint dadurch einzig und allein von den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern abhängig, während die einem besonderen Fundamentalsysteme entsprechenden Fundamentalsubstitutionen überdies noch von den Anfangsbedingungen dieses Fundamentalsystems abhängen. Es frägt sich nun zunächst, wie viele Invarianten zu der gedachten Bestimmung erforderlich sind.

Um bei der nun vorzunehmenden Constantenzählung nichts Ueberflüssiges mit hineinzuziehen, denken wir uns die Differentialgleichung auf die in Nr. 81 (S. 287) eingeführte Form gebracht, d. h. wir nehmen von vorneherein an, dass das Glied mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von y fehlt. Dann sind die Substitutionen, die irgend ein Fundamentalsystem bei allen möglichen Umläufen erfährt, stets unimodular (vergl. a. a. O., S. 288); eine solche Substitution

$$\left.\begin{array}{l} S = (\alpha_{i\varkappa}) \\ |\alpha_{i\varkappa}| = 1 \end{array}\right\} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

hängt also von $n^2 - 1$ Constanten ab, und die zugehörige Fundamentalgleichung hat die Form (vergl. Nr. 85, S. 304)

$$F(\omega) = \omega^n + J_1 \omega^{n-1} + \cdots + J_{n-1}\omega + (-1)^n = 0,$$

d. h. sie enthält $n-1$ als Invarianten anzusehende Coefficienten, die rationale Functionen der durch die Gleichung

$$|\alpha_{i\varkappa}| = 1 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

verknüpften n^2 Grössen $\alpha_{i\varkappa}$ sind.

Die ϱ Fundamentalsubstitutionen hängen demnach von

$$\varrho(n^2 - 1)$$

Constanten ab; da aber aequivalente Systeme als nicht verschieden angesehen werden, so haben wir von dieser Zahl noch die Anzahl der Constanten, von denen die transformirende Substitution abhängt, d. h. $n^2 - 1$ abzuziehen. Das System der Fundamentalsubstitutionen unserer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit ϱ im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Punkten hängt folglich von

$$(\varrho - 1)(n^2 - 1)$$

Constanten ab. Dies ist also auch die Anzahl der erforderlichen Invarianten. Wir werden z. B. die Coefficienten der zu

$$(\varrho - 1)(n + 1)$$

geeignet gewählten Umläufen gehörigen Fundamentalgleichungen nehmen können. Dabei ist jedoch noch zu beachten, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen im Allgemeinen algebraische, also mehrdeutige Functionen dieser $(\varrho - 1)(n^2 - 1)$ Invarianten sind; durch Angabe eines Systems solcher Invarianten — Herr Poincaré nennt sie die Fundamentalinvarianten — werden darum im Allgemeinen mehrere, wesentlich von einander verschiedene Systeme von Fundamentalsubstitutionen bestimmt, unter denen dann nur eines das der gegebenen Differentialgleichung eigenthümliche ist.

Die $(\varrho - 1)(n + 1)$ Umläufe, deren Fundamentalgleichungen ein System von Fundamentalinvarianten liefern, können in mannigfacher Weise gewählt werden. Jedenfalls wird man die ϱ einfachen positiven Umläufe um die wesentlichen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ herausgreifen, da sich für diese die zugehörigen Invarianten verhältnissmässig am einfachsten berechnen lassen. Wenn auch der Punkt $x = \infty$ zu den wesentlichen singulären Stellen gehört, so wird man aus demselben Grunde den positiven einfachen Umlauf um diesen Punkt als $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ wählen, d. h. also einen einfachen im negativen Sinne vollzogenen Umlauf, der die sämmtlichen Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ umschliesst. Nebst den so erhaltenen $(\varrho + 1)(n - 1)$ Invarianten sind dann noch die zu $(\varrho - 1)n - 2$ (beziehungsweise, wenn $x = \infty$ keine wesentliche singuläre Stelle der Differentialgleichung ist, noch die zu $(\varrho - 1)n - 1$) anderen Umläufen gehörigen Invarianten aufzusuchen. Diese Umläufe müssen jedenfalls so gewählt werden, dass sie sich durch stetige Deformation innerhalb $\overline{T}$ nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, da sie sonst Umläufen um die einzelnen singulären Punkte aequivalent wären. Man kann sich aber z. B. stets so einrichten, dass diese $(\varrho - 1)n - 2$ beziehungsweise $(\varrho - 1)n - 1$ Umläufe innerhalb von Kreisringen verlaufen, die eine gewisse Anzahl der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \infty$ ein- und die übrigen ausschliessen. Dann lassen sich die zugehörigen Invarianten finden, entweder mit Hülfe der Hamburger'schen Methode, oder aber, indem man sich des in der Nr. 85 (S. 304) dargelegten, auf der Anwendung von unendlichen Determinanten beruhenden Verfahrens bedient. Wie wir an dem Beispiele der Differentialgleichung zweiter Ordnung gezeigt haben (vergl. Nr. 107, S. 382), kann man ferner für so beschaffene Umläufe, aus den durch das Fuchs'sche Verfahren der iterirten Quadraturen gelieferten Ausdrücken, Reihenentwickelungen für die Coefficienten der Fundamentalgleichung herleiten, so dass wir also drei verschiedene Methoden haben, um in diesem Falle die Invarianten zu berechnen.

Wenn die wesentlichen singulären Punkte

$$x = a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \infty$$

Stellen der Unbestimmtheit für die Integrale der Differentialgleichung sind, so muss man sich im Allgemeinen auch für die ϱ beziehungsweise $\varrho + 1$ Umläufe um die einzelnen dieser Punkte einer dieser drei Methoden bedienen; nur in dem Falle, wo bei einem solchen Punkte $x = a_\varkappa$ beziehungsweise $x = \infty$ n Normalintegrale existiren (vergl.

Nr. 101, S. 365), kann die Bestimmung der Coefficienten der zu diesem Punkte gehörigen Fundamentalgleichung ohne Anwendung höherer transcendenter Processe, nämlich durch algebraische Operationen und Logarithmenbildung allein, erfolgen.

Für die zweckmässige Wahl der nöthigen Umläufe lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen, sie muss in jedem besonderen Falle der gegenseitigen Lage der wesentlichen singulären Punkte angepasst werden. Für theoretische Untersuchungen ist es nicht erforderlich, die Umläufe gerade so einzurichten, dass sie innerhalb von Kreisringen verlaufen, die keinen singulären Punkt enthalten, denn die Fuchs'sche Methode der iterirten Quadraturen liefert uns ja in jedem Falle Ausdrücke für die Coefficienten der Fundamentalgleichung, und wenn dieselben auch unmittelbar für die numerische Rechnung nicht so gut geeignet sind, wie die für Kreisringe anwendbaren Reihenentwickelungen, so gewähren sie auf der anderen Seite, wie wir früher (in der Nr. 106, S. 378) gesehen haben, doch tiefe Einsicht in die analytische Natur der Abhängigkeit der Invarianten von den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern. Wir werden darum, so oft es sich im Folgenden um die Aufstellung eines Systems von Fundamentalinvarianten handeln wird (wie z. B. bei den Untersuchungen der Nr. 125, S. 461) ohne Rücksicht auf die besondere Lage der singulären Punkte die erforderlichen $(\varrho - 1)(n + 1)$ Umläufe immer so wählen, wie es für die anzustellende Untersuchung gerade zweckmässig erscheint.

122. Die Fuchs'sche Methode der Uebergangssubstitutionen.

Bei den bisher auseinandergesetzten Methoden zur Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen spielt die Herstellung der Fundamentalgleichungen, die zu den Umläufen um die einzelnen singulären Punkte gehören, eine wesentliche Rolle. Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Coefficienten dieser Fundamentalgleichungen, wenn die vorgelegte Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört. In diesem Falle kennen wir unmittelbar durch rein algebraische Operationen die den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ und $x = \infty$ entsprechenden canonischen Substitutionen, und folglich auch die zu denselben gehörigen Invarianten. (Vergl. Nr. 54.) Dagegen müssen die Invarianten, die den übrigen noch erforderlichen $(\varrho - 1)n - 2$ beziehungsweise $(\varrho - 1)n - 1$ Umläufen entsprechen — Umläufen, die sich nicht durch stetige Deformation innerhalb $\overline{T}$ auf einen Punkt zusammenziehen lassen —

auch für die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe mit Hülfe transcendenter Processe bestimmt werden.

Man kann aber bei dieser Classe von Differentialgleichungen ein anderes Verfahren zur Herstellung der Fundamentalsubstitutionen anwenden, welches zwar principiell für alle Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte zum Ziele führt, jedoch im Falle, wo Stellen der Unbestimmtheit für die Integrale vorhanden sind, nicht geringere Rechnungsschwierigkeiten darbietet als die bereits entwickelten Methoden, während es für die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe einen verhältnissmässig hohen Grad von Einfachheit mit sich bringt. Dieses, in seinen Grundzügen von Herrn Fuchs herrührende Verfahren stützt sich auf die folgende Ueberlegung.

Denken wir uns zwei singuläre Punkte a_i und $a_\varkappa$, und sei das zu $x = a_i$ gehörige canonische Fundamentalsystem

$$y_{i1}, \; y_{i2}, \; \cdots \; y_{in},$$

das zu $x = a_\varkappa$ gehörige

$$y_{\varkappa 1}, \; y_{\varkappa 2}, \; \cdots \; y_{\varkappa n};$$

es mögen ferner Ω_i und $\Omega_\varkappa$ die Substitutionen bedeuten, die die Fundamentalsysteme $[y_{i\alpha}]$ beziehungsweise $[y_{\varkappa\alpha}]$ erfahren, wenn x einen einfachen positiven Umlauf um a_i beziehungsweise $a_\varkappa$ vollzieht.

Verbinden wir die Punkte a_i und $a_\varkappa$ durch einen beliebig innerhalb T verlaufenden Weg $(a_i a_\varkappa)$ und denken wir uns z. B. die in der Umgebung von $x = a_i$ dargestellten Integrale $[y_{i\alpha}]$ längs dieses Weges bis in die Umgebung von $a_\varkappa$ fortgesetzt, dann bestehen zwischen den so fortgesetzten $[y_{i\alpha}]$ und den $[y_{\varkappa\alpha}]$ die Beziehungen

$$[y_{i\alpha}] = S_{i\varkappa}[y_{\varkappa\alpha}] \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

wo

$$S_{i\varkappa} = (b_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante bedeutet; wir wollen dieselbe die zu dem Wege $(a_i a_\varkappa)$ gehörige Uebergangssubstitution nennen. Nehmen wir an, diese sei bekannt, dann kennen wir auch unmittelbar die Substitution, welche das Fundamentalsystem $[y_{i\alpha}]$ erfährt, wenn die unabhängige Variable einen einfachen positiven Umlauf um den Punkt $x = a_\varkappa$ vollzieht; es ist dies nämlich offenbar die Substitution

$$S_{i\varkappa}\Omega_\varkappa S_{i\varkappa}^{-1}.$$

Sei z. B. der Punkt $x = \infty$ eine wesentliche singuläre

Stelle der Differentialgleichung — eine Annahme, die ja keine Beschränkung der Allgemeinheit involvirt —, und bedeute

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$$

das zu demselben gehörige canonische Fundamentalsystem, Ω die canonische Substitution; sei ferner $S_\varkappa$ die zu dem von $x = \infty$ nach dem Punkte $x = a_\varkappa$ führenden Querschnitte $l_\varkappa$ gehörige Uebergangssubstitution, so dass also die Beziehung

$$[\eta_\alpha] = S_\varkappa [y_{\varkappa\alpha}] \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

besteht; dann erfährt das Fundamentalsystem $[\eta_\alpha]$ bei einem einfachen positiven Umlaufe um den Punkt $x = a_\varkappa$ die Substitution

$$S_\varkappa \Omega_\varkappa S_\varkappa^{-1}.$$

Es stellen also

$$(15) \qquad S_1 \Omega_1 S_1^{-1}, \; S_2 \Omega_2 S_2^{-1}, \cdots S_\varrho \Omega_\varrho S_\varrho^{-1}$$

ein System von Fundamentalsubstitutionen dar, und da ein positiver Umlauf um $x = \infty$ einem negativen Umlaufe um alle im Endlichen gelegenen singulären Punkte aequivalent ist, dieser letztere sich aber wieder in die ϱ hintereinander auszuführenden negativen Umläufe um die einzelnen Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ auflösen lässt, so besteht die Beziehung

$$\Omega = \left(S_1 \Omega_1 S_1^{-1} S_2 \Omega_2 S_2^{-1} \cdots S_\varrho \Omega_\varrho S_\varrho^{-1}\right)^{-1},$$

die sich, wenn wir nach Nr. 30 (S. 95) die auf der rechten Seite stehende inverse Substitution bilden, in die Form

$$(16) \qquad S_1 \Omega_1 S_1^{-1} \cdots S_{\varrho-1} \Omega_{\varrho-1} S_{\varrho-1}^{-1} S_\varrho \Omega_\varrho S_\varrho^{-1} \Omega = 1$$

setzen lässt.

Aus dieser Gleichung können wir beiläufig eine Folgerung ziehen, die sich auf beliebige lineare Differentialgleichungen mit allenthalben eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte bezieht. Nach dem Satze über die Determinante einer componirten Substitution (Nr. 30, S. 92) folgt nämlich aus (16)

$$|\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdots |\Omega_\varrho| \cdot |\Omega| = 1,$$

wenn wir wie gewöhnlich durch $|A|$ die Determinante einer Substitution A bezeichnen. Nun ist aber $|\Omega_\varkappa|$ nichts anderes, als das Product der Wurzeln der zum Punkte $x = a_\varkappa$ gehörigen Fundamentalgleichung und ebenso $|\Omega|$ das Product der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung, es ist folglich das Product der

Wurzeln der Fundamentalgleichungen, die zu den sämmtlichen singulären Punkten der Differentialgleichung gehören, gleich Eins.

Dieses Resultat gilt natürlich allgemein; wenn der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung in der Differentialgleichung zum Wegfall gebracht ist, so ist es an sich evident. Falls die Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, so sind (vergl. Nr. 51, S. 181) die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen die durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen der Wurzeln der entsprechenden Fundamentalgleichungen, und das eben gefundene Resultat besagt also, dass die Summe der Wurzeln der sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen eine ganze Zahl sein muss. Die in der Nr. 68 (S. 241) abgeleitete Fuchs'sche Relation bestimmt diese ganze Zahl; sie ist nämlich gleich

$$(\varrho-1)\frac{n(n-1)}{2}.$$

Die canonischen Substitutionen

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \cdots\ \Omega_\varrho,\ \Omega$$

können wir als bekannt ansehen; wenn die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört, so sind dieselben unmittelbar durch die zu den Punkten

$$x = a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_\varrho,\ \infty \tag{17}$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gegeben. Um das System (15) von Fundamentalsubstitutionen aufstellen zu können, bedarf es also nur noch der Kenntniss von $\varrho-1$ der Uebergangssubstitutionen

$$S_1,\ S_2,\ \cdots\ S_\varrho,$$

die ϱ^{te} ergiebt sich dann aus der Beziehung (16), die ja (vergl. Nr. 30) n^2 Gleichungen für die n^2 Coefficienten der unbekannten Substitution darstellt.

Auf diese Weise wird eine der Uebergangssubstitutionen vor den anderen in unsymmetrischer Weise bevorzugt; um dieses zu vermeiden, können wir z. B. von vorneherein einen der singulären Punkte $a_1, \cdots a_\varrho$, etwa a_ϱ herausgreifen und dann das folgende Verfahren einschlagen. Wir verbinden a_ϱ mit dem unendlich fernen Punkte durch $\varrho-1$ Wege

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_{\varrho-1}$$

von der Beschaffenheit, dass von den $\varrho-1$ Gebieten, in welche die Ebene durch diese Wege getheilt wird, jedes einen und nur einen der singulären Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\varrho-1}$$

enthält, und zwar das zwischen $\lambda_\varkappa$ und $\lambda_{\varkappa+1}$ gelegene Gebiet den Punkt $a_\varkappa$, wobei dann $\lambda_\varrho = \lambda_1$ und $\varkappa = 1, 2, \cdots (\varrho - 1)$ zu nehmen ist. Es mögen ferner die den Wegen $\lambda_\varkappa$ entsprechenden Uebergangssubstitutionen $\Sigma_\varkappa$ bekannt sein, d. h. also die Substitutionen, die auf das, aus der Umgebung von $x = a_\varrho$ längs $\lambda_\varkappa$ bis in die Umgebung von $x = \infty$ fortgesetzte, zu $x = a_\varrho$ gehörige canonische Fundamentalsystem $[y_{\varrho\alpha}]$ auszuüben sind, damit dasselbe in das zu $x = \infty$ gehörige canonische Fundamentalsystem $[\eta_\alpha]$ übergehe. Gehen wir von $x = a_\varrho$ längs $\lambda_\varkappa$ bis in die Nähe von $x = \infty$, dann von $x = \infty$ innerhalb des von $\lambda_\varkappa$, $\lambda_{\varkappa+1}$ begrenzten Bereiches bis in die Umgebung von $x = a_\varkappa$, in kleinem Kreise um $a_\varkappa$ herum und längs des von $x = \infty$ nach $x = a_\varkappa$ beschriebenen Weges in die Nähe von $x = \infty$ zurück, endlich längs $\lambda_{\varkappa+1}$ wieder nach $x = a_\varrho$, so erleiden die Integrale $[y_{\varrho\alpha}]$, wenn wir sie längs dieses geschlossenen Weges fortsetzen, keine Werthänderung. Es ist folglich, da bei Fortsetzung

$$\begin{aligned} &\text{längs } \lambda_\varkappa, && [\eta_\alpha] = \Sigma_\varkappa[y_{\varrho\alpha}], \\ &\quad\text{„} \quad \lambda_{\varkappa+1}, && [\eta_\alpha] = \Sigma_{\varkappa+1}[y_{\varrho\alpha}] \end{aligned}$$

ist, die Substitution

$$\Sigma_\varkappa \Sigma_{\varkappa+1}^{-1}$$

diejenige, welche das Fundamentalsystem $[y_\alpha]$ erfährt, wenn man die Variable x den erwähnten kleinen Kreis um $x = a_\varkappa$ beschreiben lässt. Es bilden demnach

$$\Omega, \ \Sigma_1\Sigma_2^{-1}, \ \Sigma_2\Sigma_3^{-1}, \cdots \ \Sigma_{\varrho-1}\Sigma_1^{-1}$$

ein System von Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung (A).

Wir sehen also, dass man sich zur Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen statt der erforderlichen $(\varrho - 1)(n^2 - 1)$ Invarianten auch gewisser Uebergangssubstitutionen bedienen kann, vorausgesetzt, dass die zu den wesentlichen singulären Punkten (17) gehörigen canonischen Substitutionen bekannt sind. Allgemein werden wir ein ausreichendes System von Uebergangssubstitutionen erhalten, wenn wir die $\varrho + 1$ wesentlichen singulären Stellen (17) auf irgend eine Weise durch ϱ Wege verbinden, die immer zwischen zweien dieser Stellen verlaufen und überdies so beschaffen sind, dass man auf denselben von jeder der $\varrho + 1$ Stellen aus nach jeder anderen hin gelangen kann.

Wenn die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört, und auch noch in dem allgemeineren Falle, wo zu jedem der wesentlichen singulären Punkte (17) ein System von n linear unabhängigen Normalintegralen gehört, lassen sich die $\varrho + 1$ canonischen Substitutionen durch rein algebraische Processe bestimmen. Es kommt also für eine solche Differentialgleichung nur noch darauf an, ein Verfahren anzugeben, mittelst dessen sich die Uebergangssubstitution bestimmen lässt, welche zu einem zwischen zwei singulären Punkten a_i, $a_\varkappa$ verlaufenden Wege $(a_i a_\varkappa)$ gehört.

Das ist aber im Wesentlichen genau dieselbe Aufgabe wie jene, mit der wir uns in der Nr. 118 bei der Fortsetzung eines Fundamentalsystems von einem regulären Punkte $x = \xi$ nach einem anderen regulären Punkte $x = \bar{x}$ hin bereits beschäftigt haben. In der That handelt es sich hier wie dort um die Bestimmung der Coefficienten der, zwei Fundamentalsysteme verknüpfenden linearen Substitution, wenn man die Entwickelungen eines jeden dieser Fundamentalsysteme in der Umgebung je einer gewissen Stelle kennt. Wenn die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört, so sind, allgemein gesprochen, diese beiden Stellen solche, wo sich die Integrale bestimmt verhalten; wir wollen zeigen, wie man in diesem Falle die dem directen Verbindungswege entsprechende Uebergangssubstitution zu berechnen hat.

123. Berechnung der Uebergangssubstitutionen für die Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Wir nehmen zunächst an, die beiden Punkte a_i, $a_\varkappa$ seien so gelegen, dass man einen Kreis K beschreiben kann, der durch $a_\varkappa$ hindurchgeht und den Punkt a_i einschliesst, während sich alle von a_i verschiedenen wesentlichen singulären Punkte entweder auf der Peripherie dieses Kreises oder ausserhalb desselben befinden. Dann kann man, wie in der Nr. 119 (S. 431), eine lineare Function

$$t = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{18}$$

von x als neue unabhängige Variable in die Differentialgleichung einführen, die für $x = a_i$ verschwindet, für $x = a_\varkappa$ den Werth Eins annimmt und den Kreis K der x-Ebene auf den Einheitskreis der t-Ebene abbildet. Dadurch verwandelt sich die Differentialgleichung

$$P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{A}$$

in

$$\bar{P}(y) = \left(\frac{dt}{dx}\right)^n P(y) = 0, \tag{$\bar{\text{A}}$}$$

und da eine Function y von x, die sich an einer Stelle $x = a$ bestimmt verhält, sich auch als Function von t an der entsprechenden

Stelle bestimmt verhalten muss, so gehört die Differentialgleichung ($\bar{A}$) auch zur Fuchs'schen Classe. Man erkennt auch leicht, dass in entsprechenden Punkten x und t die determinirenden Fundamentalgleichungen der beiden Differentialgleichungen (A), ($\bar{A}$) übereinstimmen; durch die Substitution (18) hat sich also der wesentliche Charakter der Differentialgleichung (A) nicht geändert, wir haben aber erreicht, dass der singuläre Punkt $t = 1$ auf dem Convergenzkreise der die Integrale in der Umgebung von $t = 0$ darstellenden Reihenentwickelungen gelegen ist.

Sei wie oben (S. 443)

$$y_{i1},\ y_{i2},\ \cdots\ y_{in}$$

das zu $x = a_i$ beziehungsweise $t = 0$ gehörige,

$$y_{\varkappa 1},\ y_{\varkappa 2},\ \cdots\ y_{\varkappa n}$$

das zu $x = a_\varkappa$ beziehungsweise $t = 1$ gehörige canonische Fundamentalsystem, und zwar in dem strengen, am Schlusse der Nr. 54 (S. 194) präcisirten Sinne des Wortes. Wenn dann

$$[y_{i\alpha}] = S_{i\varkappa}[y_{\varkappa\alpha}] \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$
$$S_{i\varkappa} = (b_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wird, so ist (vergl. Nr. 118, S. 429)

$$(19) \qquad b_{\alpha\beta} = \frac{D(y_{\varkappa 1}, \cdots y_{\varkappa,\beta-1}, y_{i\alpha}, y_{\varkappa,\beta+1}, \cdots y_{\varkappa n})}{D(y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n})}.$$

Um hieraus $b_{\alpha\beta}$ zu berechnen, haben wir nur in dem auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ausdrucke für t irgend einen Punkt zu nehmen, in welchem die Werthe der $[y_{i\alpha}]$, $[y_{\varkappa\alpha}]$ und ihrer Ableitungen bekannt sind, denn ebenso wie die $c_{\varkappa i}$ in der Nr. 118 (S. 429) sind hier die Werthe der $b_{\alpha\beta}$ von der Wahl dieses Punktes unabhängig. Wir können z. B. den Punkt $t = 1$ wählen; diese Wahl bietet den Vortheil dar; dass sich eine einfach zu bildende Function von t herstellen lässt, die für $t = 1$ mit dem Werthe des Ausdruckes auf der rechten Seite von (19) für $t = 1$, d. h. mit $b_{\alpha\beta}$ übereinstimmt.

Denken wir uns nämlich Zähler und Nenner dieses Ausdruckes mit

$$(t-1)^{-r}$$

multiplicirt, wo

$$r = \sum_{\alpha=1}^{n} r_{\varkappa\alpha} - \frac{n(n-1)}{2}$$

gesetzt wurde und

$$r_{\varkappa 1},\ r_{\varkappa 2},\ \cdots\ r_{\varkappa n}$$

die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ oder $t = 1$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bedeuten, so ist, wie wir in der Nr. 56 (S. 200) bewiesen haben, der Grenzwerth

$$\lim_{t=1} (t-1)^{-r} D(y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n}) = C$$

endlich und von Null verschieden, und folglich ist, da doch $b_{\alpha\beta}$ jedenfalls ein endlicher Werth ist, auch der Grenzwerth

$$\lim_{t=1} (t-1)^{-r} D(y_{\varkappa 1}, \cdots y_{\varkappa, \beta-1}, y_{i\alpha}, y_{\varkappa, \beta+1}, \cdots y_n) = C'_{\alpha\beta}$$

endlich. Wir denken uns die Bezeichnung so gewählt, dass das Integral $y_{\varkappa\alpha}$ zum Exponenten $r_{\varkappa\alpha}$ gehört; dann gehört, zufolge des Satzes 2 der Nr. 40,

$$\frac{d^\lambda y_{\varkappa\alpha}}{dt^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1)$$

im Allgemeinen zum Exponenten $r_{\varkappa\alpha} - \lambda$. (Von dem in der Nr. 40 (S. 141) präcisirten Ausnahmefalle, der nur eintreten könnte, wenn $r_{\varkappa\alpha}$ ganzzahlig positiv und kleiner als n wäre, wollen wir absehen; das Eintreten desselben würde zwar einige unwesentliche Modificationen in der Deduction, jedoch keinerlei Abänderung der zu erlangenden Resultate erfordern.) Nun führen wir die Multiplication von

$$D(y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n})$$

mit $(t-1)^{-r}$ so aus, dass wir zunächst die α^{te} Zeile mit $(t-1)^{-r_{\varkappa\alpha}}$ für $\alpha = 1, 2, \cdots n$, und dann die β^{te} Reihe mit $(t-1)^{\beta-1}$ für $\beta = 1, 2, \cdots n$ multipliciren, wobei wir uns diese Determinante so geschrieben denken, dass die Zeilen immer von einem $y_{\varkappa\alpha}$ und seinen Ableitungen gebildet werden, während die Ableitungen gleich hoher Ordnung in einer Reihe stehen. Dann verhält sich (vergl. Nr. 40, S. 140) die so transformirte Determinante:

$$D' = D(y_{\varkappa 1}, \cdots y_{\varkappa n})(t-1)^{-r},$$

wenn wir für die $y_{\varkappa\alpha}$ und ihre Ableitungen die in der Umgebung von $t = 1$ gültigen Entwickelungen setzen und dann $t = 1$ werden lassen, wie ein Ausdruck

$$L = L_0 + L_1 \log(t-1) + \cdots + L_\sigma \log^\sigma (t-1),$$

wo $L_0, L_1, \cdots L_\sigma$ Constanten bedeuten. Da aber D' für $t = 1$ den endlichen Werth C annimmt, so können wir, um C zu berechnen, aus den Entwickelungen der $y_{\varkappa\alpha}$ und ihrer Ableitungen zunächst die mit Logarithmen behafteten Glieder, dann aber auch alle diejenigen Potenzen von $(t-1)$ weglassen, die keinen Beitrag liefern zu dem Werthe von D' für $t = 1$. Wir erhalten auf diese Weise eine Determinante D, deren Elemente sich aus einer endlichen Anzahl von Summanden zusammensetzen, und die für $t = 1$ mit dem Werthe von D' für diesen Punkt, d. h. mit C übereinstimmt. Die Berechnung von C bietet also keinerlei Schwierigkeiten dar; sie erfordert nicht die Summation einer unendlichen Reihe.

Entwickeln wir die Zählerdeterminante auf der rechten Seite der Gleichung (19) nach den Elementen der β^{ten} Zeile, so sei

$$D(y_{\varkappa 1}, \cdots y_{\varkappa, \beta-1}, y_{i\alpha}, y_{\varkappa, \beta+1}, \cdots y_{\varkappa n}) =$$
$$= D_{0\beta} y_{i\alpha} + D_{1\beta} \frac{dy_{i\alpha}}{dt} + \cdots + D_{n-1, \beta} \frac{d^{n-1} y_{i\alpha}}{dt^{n-1}};$$

dann ist

$$C_{\alpha\beta} = \lim_{t=1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} D_{\lambda\beta} (t-1)^{-r} \frac{d^\lambda y_{i\alpha}}{dt^\lambda}. \tag{20}$$

Mögen die Wurzeln

$$r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n}$$

der zu $t = 1$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung so geordnet sein, dass mit wachsendem zweiten Index die realen Theile nicht kleiner werden, und sei ϱ der (algebraisch) kleinste dieser realen Theile, dann ist

$$\Re(r_{\varkappa\alpha}) - \varrho \geq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n).$$

In der Umgebung von $t = 1$ ist

$$y_{\varkappa\alpha} = (t-1)^{r_{\varkappa\alpha}} \{\varphi_{0\alpha} + \varphi_{1\alpha} \log(t-1) + \cdots + \varphi_{\nu\alpha} \log^\nu (t-1)\},$$

wo die $\varphi_{0\alpha}, \varphi_{1\alpha}, \cdots \varphi_{\nu\alpha}$ nach positiven ganzen Potenzen von $t-1$ fortschreitende Reihen bedeuten, die für $t = 1$ nicht sämmtlich verschwinden; es ist folglich (vergl. Nr. 40, S. 140)

$$y_{\varkappa\alpha}(t-1)^{-\varrho} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

für $t = 1$ entweder endlich oder nur so unendlich wie ein Ausdruck L, und das Gleiche gilt im Allgemeinen von den Producten

$$\frac{d^\lambda y_{\varkappa\alpha}}{dt^\lambda} (t-1)^{-\varrho+\lambda} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = 1, 2, \cdots (n-1) \end{pmatrix}.$$

Nun sind die Integrale $y_{i\alpha}$ homogene lineare Functionen der $y_{\varkappa\alpha}$ mit constanten Coefficienten, es ist folglich auch

$$y_{i\alpha}(t-1)^{-\varrho},$$

und ebenso im Allgemeinen

$$\frac{d^\lambda y_{i\alpha}}{dt^\lambda}(t-1)^{-\varrho+\lambda} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = 1, 2, \cdots (n-1)\end{pmatrix}$$

für $t = 1$ endlich oder nur so unendlich wie ein Ausdruck L, d. h. mit anderen Worten, es ist

$$(21) \qquad \lim_{t=1}(t-1)^{-\varrho+\varepsilon+\lambda}\frac{d^\lambda y_{i\alpha}}{dt^\lambda} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = 0, 1, 2, \cdots (n-1)\end{pmatrix},$$

wenn ε irgend eine positive reale Grösse bedeutet.

In der Entwickelung von

$$(t-1)^{-r}D_{\lambda\beta}$$

in der Umgebung von $t = 1$ geben also diejenigen Glieder

$$c\cdot(t-1)^\mu \log^\nu(t-1),$$

wo c eine Constante, ν eine positive ganze Zahl und μ eine Grösse bedeutet, deren realer Theil grösser ist als $-\varrho+\lambda$, mit der λ^{ten} Ableitung von $y_{i\alpha}$ nach t multiplicirt ein Product, welches für $t = 1$ verschwindet. Wir können darum bei der Berechnung von $C_{\alpha\beta}$ aus der Gleichung (20) diejenigen Glieder in den Potenzreihen der Entwickelung des Ausdruckes

$$(t-1)^{-r}D_{\lambda\beta} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \overline{n-1})$$

weglassen, in denen der reale Theil des Exponenten grösser ist als $-\varrho+\lambda$; den übrig bleibenden Theil dieses Ausdruckes bezeichnen wir durch

$$\bar{D}_{\lambda\beta} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \overline{n-1}).$$

In den nach Potenzen von $t-1$ fortschreitenden Reihen, die in der Entwickelung von $y_{\varkappa\alpha}$ auftreten, kommen nur Exponenten vor, die sich von $r_{\varkappa\alpha}$ um positive ganze Zahlen unterscheiden. Bei der Bildung von $\bar{D}_{\lambda\beta}$ brauchen wir von diesen Reihen (für $\alpha = 1, 2, \cdots n$) nur jene Glieder beizubehalten, deren Exponenten $r_{\varkappa\alpha}+g$ so beschaffen sind, dass die ganze positive Zahl g der Ungleichung

$$g \leqq \Re(r_{\varkappa 1}-\varrho)$$

genügt. (Durch dieselbe Reduction wird auch der zur Berechnung von C erforderliche Ausdruck $\bar{D}$ aus D' erhalten, vergl. oben S. 450). Nun lassen sich die Ausdrücke

$$(t-1)^{r_{\varkappa\alpha}+g}, \qquad \log^\nu(t-1)$$

nach positiven ganzen Potenzen von t entwickeln, und diese Entwickelungen convergiren innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene; folglich lassen sich die $\bar{D}_{\lambda\beta}$ innerhalb dieses Kreises ebenfalls in der

Form von Reihen darstellen, die nach positiven ganzen Potenzen von t fortschreiten. Zufolge der Gleichung (20) ist dann:

$$(22) \qquad C_{\alpha\beta} = \lim_{t=1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} D_{\lambda\beta} \frac{d^\lambda y_{i\alpha}}{dt^\lambda} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n),$$

und hierin hat man sich für die $y_{i\alpha}$ ihre in der Umgebung von $t = 0$ gültigen Entwickelungen gesetzt zu denken. Sei

$$y_{i\alpha} = t^{r_{i\alpha}} \{ \psi_{0\alpha} + \psi_{1\alpha} \log t + \cdots + \psi_{\nu\alpha} \log^\nu t \} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $r_{i\alpha}$ die Wurzeln der zu $t = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, $\psi_{0\alpha}, \psi_{1\alpha}, \cdots \psi_{\nu\alpha}$ nach positiven ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihen bedeuten, die für $t = 0$ nicht sämmtlich verschwinden; dann sind (vergl. Gleichung (32), Nr. 67, S. 238) die Ausdrücke

$$t^{r_{i\alpha}} \psi_{\mu\alpha} \qquad (\mu = 0, 1, \cdots \nu)$$

als homogene lineare Functionen der $y_{i\alpha}$ mit von $\log t$ abhängigen Coefficienten darstellbar. Da nun $\log t$ nach positiven ganzen Potenzen von $t - 1$ entwickelt werden kann, so schliessen wir hieraus und aus den Gleichungen (21), dass

$$\lim_{t=1} (t-1)^{-\varrho+\lambda+\varepsilon} \frac{d^\lambda (\psi_{\mu\alpha} t^{r_{i\alpha}})}{dt^\lambda} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \cdots \overline{n-1} \\ \alpha = 1, 2, \cdots n \\ \mu = 0, 1, 2, \cdots \overline{\nu - 1} \end{pmatrix},$$

wenn ε irgend eine reale positive Grösse bedeutet. Durch eine ähnliche Ueberlegung wie die, welche wir oben für D' angestellt haben, ergiebt sich, dass sich das Product

$$D_{\lambda\beta} (t-1)^{-r+r_{\varkappa\beta}-\lambda}$$

für $t = 1$ verhält wie ein Ausdruck L; das Gleiche gilt folglich von dem Producte

$$D_{\lambda\beta} (t-1)^{r_{\varkappa\beta}-\lambda},$$

und es ist demnach für jedes positive reale ε:

$$\lim_{t=1} D_{\lambda\beta} (t-1)^{r_{\varkappa\beta}-\lambda+\varepsilon} = 0.$$

Bei der Berechnung von $C_{\alpha\beta}$ aus der Gleichung (22) können wir daher an die Stelle von $y_{i\alpha}$ einen Ausdruck setzen, der entsteht, wenn wir in $y_{i\alpha}$ den $\log t$ nach Potenzen von $t - 1$ entwickeln und von dieser Entwickelung nur diejenigen Potenzen beibehalten, deren Exponent den realen Theil von $r_{\varkappa\beta} - \varrho$ nicht übertrifft. Setzt man dann noch in $t^{r_{i\alpha}}$ direct $t = 1$, wodurch also

$$\lim_{t=1} t^{r_{i\alpha}} = e^{2 r_{i\alpha} k \pi \sqrt{-1}}$$

wird, wo k eine ganze Zahl ist, so nimmt die Gleichung (22) endlich die Form an

$$C_{\alpha\beta} = \lim_{t=1} \mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t), \tag{23}$$

wenn $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von t fortschreitende und innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene convergirende Reihe bedeutet, deren Coefficienten sich rational mit rationalen Zahlencoefficienten zusammensetzen aus den in den Entwickelungen der $y_{\varkappa\alpha}$ in der Umgebung von $t = 1$ und den in den Entwickelungen der $y_{i\alpha}$ in der Umgebung von $t = 0$ auftretenden Constanten, ferner aus $\pi\sqrt{-1}$ und

$$e^{2 r_{i\alpha} \pi \sqrt{-1}}.$$

Der auf der rechten Seite der Gleichung (23) stehende Grenzwerth ist wie folgt aufzufassen. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)$ determinirt eine monogene Function $P_{\alpha\beta}$ von t; diese ist ein homogener linearer Ausdruck der $\psi_{\mu\alpha}$ und ihrer Ableitungen mit Coefficienten, die aus einer endlichen Anzahl verschiedener Potenzen von $(t - 1)$ und aus $\log(t - 1)$ ganz und rational zusammengesetzt sind; sie wird also regulär sein in der Umgebung von $t = 0$ und in der Umgebung jeder Stelle t, wo sich die Functionen, welche aus den $\psi_{\mu\alpha}$ durch Fortsetzung entstehen, regulär verhalten. Die einzigen singulären Stellen der aus den $\psi_{\mu\alpha}$ entspringenden Functionen sind aber (vergl. Nr. 67, S. 238) die singulären Stellen der Differentialgleichung (A); die Function $P_{\alpha\beta}$ kann also auch nur an diesen Stellen singulär sein, und muss überdies in der Umgebung derselben den Charakter eines sich bestimmt verhaltenden Integrals einer linearen Differentialgleichung (vergl. Nr. 65, S. 229) zeigen. $C_{\alpha\beta}$ ist nun der Werth, den diese Function an der Stelle der Bestimmtheit $t = 1$ annimmt, wenn t aus dem Inneren des Einheitskreises kommend in $t = 1$ einrückt, und zur Berechnung der Functionswerthe für $|t| < 1$ die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)$ benutzt wird. Falls also diese Potenzreihe für $t = 1$ noch convergirt, so stellt der Ausdruck

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(1),$$

nach dem in der Nr. 65 (S. 229) angeführten Satze von Abel, den Werth $C_{\alpha\beta}$ dar; um über die Convergenz zu entscheiden, haben wir auf den in der erwähnten Nummer dargelegten Thomé'schen Satz zurückzugreifen.

124. Convergenzfragen. Fall, wo die singulären Punkte auf einem Kreise liegen. Die Fuchs'sche Abbildung.

Nehmen wir zuvörderst an, der in der x-Ebene durch $a_\varkappa$ hindurchgelegte Kreis K, der den Punkt a_ι in seinem Inneren enthält, sei so beschaffen, dass auf seiner Peripherie kein wesentlicher singulärer Punkt der Differentialgleichung (A) ausser $a_\varkappa$ gelegen ist. Dann ist $t = 1$ der einzige wesentliche singuläre Punkt der Differentialgleichung ($\bar{\mathrm{A}}$), der sich auf der Peripherie des Einheitskreises der t-Ebene befindet und somit auch der einzige auf diesem Kreisumfange gelegene singuläre Punkt der Function $P_{\alpha\beta}$. Da diese Function im Punkte $t = 1$ den endlichen Werth $C_{\alpha\beta}$ besitzt, so convergirt in diesem Falle die Reihe $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)$, zufolge des erwähnten Thomé'schen Satzes, auch noch für $t = 1$ (überhaupt für alle Punkte der Peripherie des Einheitskreises der t-Ebene), sie stellt also für $t = 1$ die gesuchte Constante $C_{\alpha\beta}$ dar.

Befinden sich dagegen auf der Peripherie von K noch andere wesentliche singuläre Stellen ausser $a_\varkappa$, somit auf der Peripherie des Einheitskreises der t-Ebene noch von $t = 1$ verschiedene wesentliche singuläre Stellen der Differentialgleichung ($\bar{\mathrm{A}}$), so seien diese etwa $b_1, b_2, \cdots b_\tau$. Dann hängt (vergl. den erwähnten Satz der Nr. 65) die Convergenz von $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(1)$ von dem Verhalten der Function $P_{\alpha\beta}$ in der Umgebung der Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ ab. Wenn die Wurzeln der, zu den im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen so beschaffen sind, dass ihre realen Theile grösser sind als $n - 2$, so sind die Exponenten, die in den Entwickelungen irgend eines Integrals von (A), beziehungsweise ($\bar{\mathrm{A}}$) und seiner $n - 1$ ersten Ableitungen nach x beziehungsweise t, in der Umgebung einer singulären Stelle auftreten, algebraisch grösser als -1; die gleiche Eigenschaft kommt dann den Entwickelungen der aus den Reihen $\psi_{\mu\alpha}$ entspringenden Functionen und deren $n - 1$ ersten Ableitungen und folglich auch denen der Functionen

$$P_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

in der Umgebung der Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ zu. In diesem Falle ist also die Convergenz der Reihen $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)$ im Punkte $t = 1$ gesichert, und zwar gilt dies, wenn $a_\iota, a_\varkappa$ irgend zwei der im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ sind, ebenso auch, wenn entweder beide oder einer von beiden eine beliebige reguläre Stelle bedeutet, endlich auch, wenn a_ι den unendlich fernen Punkt $x = \infty$ darstellt, vorausgesetzt nur, dass ein Kreis K von der zur Vornahme der Abbildung erforderlichen Beschaffenheit gelegt werden kann. Wenn die Wurzeln der zu den Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die gedachte Forderung nicht erfüllen, so kann man leicht auf die Differentialgleichung (A) eine Transformation anwenden, wodurch dieselbe in eine Differentialgleichung übergeht, bei welcher jener Forderung genügt ist. Man setze nämlich

$$(24) \qquad y = (x - a_1)^{-g_1}(x - a_2)^{-g_2} \cdots (x - a_\varrho)^{-g_\varrho} u,$$

wo $g_1, g_2, \cdots g_\varrho$ positive ganze Zahlen bedeuten von der Beschaffenheit, dass die realen Theile der Grössen

$$(25) \qquad g_\varkappa + r_{\varkappa\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \cdots n \\ \varkappa = 1, 2, \cdots \varrho \end{pmatrix}$$

grösser sind als $n - 2$, wenn $r_{\varkappa\alpha}$ die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (A) bedeuten. Dann genügt u einer Differentialgleichung (B) von derselben Beschaffenheit wie (A); die wesentlichen singulären Punkte von (B) sind auch wieder $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$, und die zu $x = a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung wird durch die Grössen (25) für $\alpha = 1, 2, \cdots n$ befriedigt. Die Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung (B) sind aber offenbar dieselben wie die der Differentialgleichung (A), man kann also die Rechnung für die Differentialgleichung (B) vornehmen, deren Beschaffenheit die Convergenz der Reihen $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)$ im Punkte $t = 1$ verbürgt. Dass die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ der Uebergangssubstitution $S_{i\varkappa}$ dieselben bleiben, wenn man sie, statt durch die Gleichungen (19), mittelst der analogen für die Differentialgleichung (B) gebildeten Gleichungen

$$b_{\alpha\beta} = \frac{D(u_{\varkappa 1}, \cdots u_{\varkappa, \beta-1}, u_{i\alpha}, u_{\varkappa, \beta+1}, \cdots u_{\varkappa n})}{D(u_{\varkappa 1}, u_{\varkappa 2}, \cdots u_{\varkappa n})}$$

berechnet, wo $[u_{\varkappa\alpha}]$, $[u_{i\alpha}]$ die zu den Punkten $a_\varkappa$ beziehungsweise a_i gehörigen canonischen Fundamentalsysteme von (B) bedeuten, ist auch unmittelbar einzusehen, wenn man sich der Gleichung (12) der Nr. 22 (S. 60) erinnert, und bedenkt, dass

$$u_{\lambda\alpha} = y_{\lambda\alpha} \prod_{\nu=1}^{\varrho} (x - a_\nu)^{g_\nu} \qquad (\lambda = i, \varkappa;\ \alpha = 1, 2, \cdots n)$$

genommen werden kann. Wir können also, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, dass die Convergenz der Reihen $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(1)$ für jede der oben aufgezählten Combinationen der Punkte $a_i, a_\varkappa$ gesichert sei. Bemerken wir noch, dass durch die Ausführung der Transformation (24) auch das Eintreten des Ausnahmefalles, in welchem der Satz 2 der Nr. 40 ungültig wird, für die Elemente der canonischen Fundamentalsysteme, die zu den im Endlichen gelegenen singulären Punkten gehören, sowie für deren $n-1$ erste Ableitungen, allemal verhindert wird.

Auf diese Weise erhalten wir die Coefficienten der Uebergangssubstitution, die dem directen Wege zwischen zwei singulären Punkten a_i, $a_\varkappa$ entspricht, in der Form von einfach zu bildenden unendlichen Reihen, vorausgesetzt, dass diese Punkte so liegen, dass ein Kreis K von der zu Anfang der Nr. 123 (S. 447) hervorgehobenen Beschaffenheit construirt werden kann. Lassen wir z. B. a_i den unendlich fernen Punkt bedeuten und nehmen wir an, die im Endlichen befindlichen wesentlichen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ liegen auf einer allenthalben convex gekrümmten analytischen Curve; dann kann man durch jeden dieser Punkte einen Kreis zeichnen, der alle übrigen der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ entweder einschliesst oder auf seiner Peripherie enthält. Diesen Kreis bildet man dann mittelst einer linearen Function auf den Einheitskreis einer t-Ebene ab, so dass dem Punkte $x=\infty$ der Punkt $t=0$ entspricht und erhält dann durch das erörterte Verfahren die Coefficienten der Uebergangssubstitutionen, die den directen Wegen von $x=\infty$ nach den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$, d. h. also den Querschnitten $l_1, l_2, \cdots l_\varrho$ entsprechen.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ sämmtlich auf einem Kreise liegen, weil dann eine einzige Abbildung genügt, um alle ϱ Uebergangssubstitutionen zu bestimmen. Bildet man nämlich diesen Kreis auf den Einheitskreis einer t-Ebene ab, wo t eine lineare Function von x bedeutet, die für $x=\infty$ verschwindet, so entsprechen den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ der Differentialgleichung (A) Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$, die auf der Peripherie des Einheitskreises der t-Ebene liegen, und diese sind nebst $t=0$ die einzigen wesentlichen singulären Stellen der transformirten Differentialgleichung (A) mit der unabhängigen Variabeln t. Denkt man sich dann, falls dies erforderlich sein sollte, noch die Transformation (24) vollzogen, so kann man direct die Beziehungen zwischen dem zu $t=0$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme $[\eta_\alpha]$ und den zu den Punkten $t=b_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystemen

$$[y_{\varkappa\alpha}] \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

aufstellen, indem man die angegebenen Reductionen in den Entwickelungen vornimmt und dann für t den Werth $b_\varkappa$ einsetzt.

Man hat dann zugleich die Möglichkeit, die Werthberechnung eines beliebig gegebenen Fundamentalsystems $[y_\alpha]$ bei Fortsetzung auf gegebenem Wege in der denkbar einfachsten Weise zu vollziehen. Denkt man sich nämlich die Elemente von $[y_\alpha]$ in der Umgebung der regulären Stelle $t = \infty$ entwickelt, so gelten diese nach positiven ganzen Potenzen von t^{-1} fortschreitenden Entwickelungen ausserhalb des Einheitskreises; die Entwickelungen der Elemente des Fundamentalsystems $[\eta_\alpha]$ gelten innerhalb des Einheitskreises. Wenn man also die Beziehung zwischen den beiden Systemen $[\eta_\alpha]$ und $[y_\alpha]$ kennt, so lassen sich die Werthe der $[y_\alpha]$ auch für Punkte innerhalb des Einheitskreises berechnen. Die Herstellung dieser Beziehung bei Fortsetzung von $[y_\alpha]$ auf vorgeschriebenem Wege bietet aber keinerlei Schwierigkeiten dar, wenn man die ϱ Uebergangssubstitutionen kennt, die $[\eta_\alpha]$ mit den

$$[y_{\varkappa\alpha}] \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

verknüpfen.

In einer Reihe von Abhandlungen hat Herr Fuchs ein Verfahren angegeben, welches gestattet, diese, für den Fall, wo die endlichen wesentlichen singulären Punkte auf einem Kreise liegen, anwendbare Methode auf Differentialgleichungen zu übertragen, deren singuläre Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ beliebig in der Ebene vertheilt sind. Herr Fuchs zeigt nämlich, dass sich eine rationale Function

$$x = F(w) \tag{26}$$

angeben lässt, die den folgenden Bedingungen genügt.

Es soll für $w = 0$ x unendlich gross werden und der Punkt $x = \infty$ soll kein Verzweigungspunkt der algebraischen Function w von x sein. Dann lässt sich stets um den Punkt $w = 0$ als Mittelpunkt ein Kreis mit von Null verschiedenem Radius beschreiben, der so beschaffen ist, dass innerhalb desselben nicht zwei w-Punkte liegen, für die $F(w)$ denselben Werth annimmt. Den grössten Kreis, der diese Eigenschaft besitzt, nennt Herr Fuchs den zur Function $F(w)$ gehörigen Grenzkreis. Die Function $F(w)$ kann nun so eingerichtet werden, dass den Punkten

$$x = a_1, a_2, \cdots a_\varrho$$

ϱ verschiedene auf dem Einheitskreise der w-Ebene gelegene Punkte

$$w = b_1, b_2, \cdots b_\varrho$$

entsprechen, und dass überdies der Radius des Grenzkreises grösser ist als Eins. Diese Function hat dann die Form

$$F(w) = \frac{f(w)}{w \cdot g(w)},$$

wo $f(w)$, $g(w)$ ganze rationale Functionen von w ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, und es liegen nothwendig alle Wurzeln der Gleichungen

$$g(w) = 0$$

und

$$F'(w) = \frac{d\,F(w)}{d\,w} = 0$$

entweder ausserhalb oder auf der Peripherie des Grenzkreises.

Denken wir uns die Differentialgleichung (A) auf die Form gebracht

$$(27)\qquad \psi_n(x)\frac{d^n y}{d\,x^n} + \psi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{d\,x^{n-1}} + \cdots + \psi_0(x)\,y = 0,$$

wo $\psi_n(x)$, $\psi_{n-1}(x)$, $\cdots$ $\psi_0(x)$ ganze rationale Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler sind, so verschwindet $\psi_n(x)$ für die endlichen wesentlichen und ausserwesentlichen singulären Punkte

$$x = a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_\sigma$$

der Differentialgleichung (A). Führen wir in die Differentialgleichung (27) mit Hülfe der Gleichung (26) die unabhängige Variable w ein, so erhalten wir

$$(28)\qquad [\Psi(w)]^{n-1}[w\cdot g(w)]^{\lambda} R(w)\frac{d^n y}{d\,w^n} + \varphi_{n-1}(w)\frac{d^{n-1} y}{d\,w^{n-1}} + \cdots$$
$$+ \varphi_1(w)\frac{d\,y}{d\,w} + \varphi_0(w)\,y = 0,$$

wo

$$\Psi(w) = w\,g(w)f'(w) - f(w)[g(w) + w\,g'(w)],$$
$$R(w) = \psi_n(F(w))$$

gesetzt wurde, und $f'(w)$, $g'(w)$ die Ableitungen von $f(w)$, $g(w)$ nach w, λ eine von dem Grade der ganzen Functionen ψ_n, ψ_{n-1}, $\cdots$ ψ_0 abhängende ganze positive Zahl, $\varphi_{n-1}(w)$, $\cdots$ $\varphi_0(w)$ ganze Functionen von w bedeuten. Die singulären Punkte der Differentialgleichung (28) werden geliefert durch die Wurzeln der Gleichungen

$$(29)\qquad \Psi(w) = 0,$$

$$(30)\qquad w\cdot g(w) = 0,$$

$$(31)\qquad R(w) = 0.$$

Wenn $\Psi(w)$ verschwindet, so muss auch $F'(w)$ gleich Null sein, die Wurzeln der Gleichung (29) liegen also nicht innerhalb des Grenzkreises; das Gleiche gilt von den Wurzeln von (30), abgesehen von $w = 0$. Die Gleichung (31) endlich wird befriedigt durch diejenigen w-Werthe, die den im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Differentialgleichung (A) entsprechen. Diejenigen unter diesen w-Werthen, welche ausserwesentlichen singulären Punkten von (A) entsprechen, sind auch wieder ausserwesentliche singuläre Stellen der Differentialgleichung (28), denn eine Function, die in der Umgebung von $x = a$

regulär, d. h. nach positiven ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelbar ist, verhält sich auch, als Function von w betrachtet, regulär in der Umgebung jeder Stelle w, die vermöge der Gleichung (26) dem Werthe $x = a$ entspricht. Von den wesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung (28) liegen also innerhalb des Grenzkreises nur der dem Punkte $x = \infty$ entsprechende Nullpunkt der w-Ebene, und die auf dem Einheitskreise befindlichen Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$, die den Punkten

$$x = a_1, a_2, \cdots a_\varrho$$

entsprechen.

Studiren wir also die Integrale von (28) nur innerhalb des Grenzkreises, so haben wir dieselben Verhältnisse wie in dem Falle, wo sich die im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Stellen sämmtlich auf einer Kreisperipherie befinden, und wir können also nach der oben dargelegten Methode die den directen Verbindungslinien von $w = 0$ mit

$$w = b_1, b_2, \cdots b_\varrho$$

entsprechenden Uebergangssubstitutionen berechnen. Nun ist aber das Innere des Grenzkreises die eindeutig conforme Abbildung desjenigen Theiles G der x-Ebene, der erhalten wird, wenn man sich in dieser Ebene die geschlossene Curve C gezogen denkt, welche dem Grenzkreise der w-Ebene entspricht und das Innere dieser Curve, d. h. denjenigen von C begrenzten Bereich, der den Punkt $x = \infty$ nicht enthält, ausschliesst. Dieser Theil G der x-Ebene enthält dann die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ und $x = \infty$ in sich, und die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\varrho$ können so gelegt werden, dass sie auch ganz innerhalb G verlaufen; die den directen Verbindungslinien von $w = 0$ mit

$$w = b_1, b_2, \cdots b_\varrho$$

entsprechenden Uebergangssubstitutionen stimmen folglich unmittelbar mit den den Querschnitten $l_1, l_2, \cdots l_\varrho$ entsprechenden Uebergangssubstitutionen der Differentialgleichung (A) überein. Bemerken wir noch, dass man, um die Entwickelungen der zu den Punkten

$$w = 0, b_1, b_2, \cdots b_\varrho$$

gehörigen canonischen Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (28) zu finden, nichts anderes zu thun hat, als in die Entwickelungen der zu den Punkten

$$x = \infty, a_1, a_2, \cdots a_\varrho$$

gehörigen canonischen Fundamentalsysteme von (A) für x die Entwickelung von $F(w)$ einzusetzen, indem man allemal denjenigen innerhalb des

Grenzkreises eindeutig determinirten Zweig der algebraischen Function w von x benutzt, der für $x = \infty$ verschwindet.

Die Anwendung dieser Abbildung ist natürlich nicht an die Bedingung geknüpft, dass die gegebene Differentialgleichung (A) mit in x rationalen Coefficienten zur Fuchs'schen Classe gehören soll (vergl. Nr. 122, S. 443); nur muss man, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, bei der Vergleichung der Entwickelungen der Elemente des zu $x = \infty$, beziehungsweise $w = 0$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems und ihrer Ableitungen, mit den Entwickelungen der Elemente des zu einem Punkte $w = b_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems und ihrer Ableitungen für w irgend einen nicht singulären Punkt des gemeinsamen Convergenzgebietes wählen, während im Falle, wo die Differentialgleichung (A) und folglich auch die Differentialgleichung (28) der Fuchs'schen Classe angehört, für w der singuläre Punkt $b_\varkappa$ selbst gewählt werden kann, vorausgesetzt, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen die für die Convergenz erforderlichen Bedingungen erfüllen.

Drittes Kapitel.

125. System von Fundamentalinvarianten für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wenn zwei singuläre Punkte a_i, $a_\varkappa$ nicht so liegen, dass ein Kreis K von der zu Anfang der Nr. 123 (S. 447) angegebenen Beschaffenheit construirt werden kann, so hat man, um die dem directen Wege zwischen a_i und $a_\varkappa$ entsprechende Uebergangssubstitution zu berechnen, eine Reihe regulärer Stellen

$$a_i', \; a_i^{(2)}, \; \cdots \; a_i^{(\lambda)}$$

so einzuschalten, dass von den Stellen

$$a_i, \; a_i', \; a_i^{(2)}, \; \cdots \; a_i^{(\lambda)}, \; a_\varkappa$$

je zwei aufeinanderfolgende die zur Vornahme der Abbildung (18) (S. 447) erforderliche Lage haben. Berechnet man dann die den directen Wegen

$$\left(a_i, \, a_i'\right), \; \left(a_i', \, a_i^{(2)}\right), \; \cdots \; \left(a_i^{(\lambda)}, \, a_\varkappa\right)$$

entsprechenden Uebergangssubstitutionen, so kann man aus diesen die gesuchte Uebergangssubstitution in ähnlicher Weise zusammensetzen, wie in der Nr. 119 (S. 431) die Substitution S aus S_1, S_2, $\cdots$ $S_{\lambda+1}$ componirt wurde. In ähnlicher Weise kann man durch Einschaltung einer endlichen Anzahl regulärer Stellen die Uebergangssubstitution finden, die zu einem zwischen zwei Punkten a_i, $a_\varkappa$ erstreckten Wege gehört, der nicht innerhalb T verläuft, sondern irgendwelche der Querschnitte l_1, l_2, $\cdots$ l_ϱ beliebig oft überschreitet.

Durch die zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen canonischen Substitutionen und die erforderliche Anzahl von Uebergangssubstitutionen lassen sich die Coefficienten eines Systems von Fundamentalsubstitutionen eindeutig bestimmen, weil es zur Herstellung derselben nur der Composition und der Bildung von inversen Substitutionen bedarf, und dies beides durch Vornahme rationaler Operationen mit den Substitutionscoefficienten bewirkt werden kann. Hierin liegt ein wesentlicher Vorzug, den die Methode der Uebergangssubstitutionen vor der Methode der Fundamentalinvarianten voraus hat, denn die letztere liefert wie bereits bemerkt (vergl. Nr. 121, S. 440) im Allgemeinen eine mehrdeutige Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen. Um über die Natur dieser Mehrdeutigkeit einigen Aufschluss zu erlangen, wollen wir nach dem von Herrn Vogt angewandten Verfahren für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die Systeme von Fundamentalinvarianten etwas genauer untersuchen.

Sei wie in der Nr. 107 (S. 382) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = p_2(x) y \tag{1}$$

gegeben, und bedeute y_1, y_2 ein Fundamentalsystem, welches beim einfachen Umlaufe um den wesentlichen singulären Punkt $x = a_\varkappa$ die Substitution

$$A_\varkappa = \begin{pmatrix} \alpha_\varkappa & \beta_\varkappa \\ \gamma_\varkappa & \delta_\varkappa \end{pmatrix} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho),$$

beim positiven Umlaufe um den Punkt $x = \infty$ die Substitution

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} = A_\varrho^{-1} A_{\varrho-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1} \tag{2}$$

erfährt. Es ist dann

$$\alpha_\varkappa \delta_\varkappa - \beta_\varkappa \gamma_\varkappa = 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \varrho),$$

und ebenso ist die Determinante jeder Substitution, die aus den

$$A_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \varrho)$$

auf irgend eine Weise componirt ist, gleich Eins.

Eine unimodulare Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

besitzt als einzige Invariante den Ausdruck

$$J_A = \alpha + \delta;$$

wenn es sich also um die Bestimmung eines Systems von Fundamentalsubstitutionen der gegebenen Differentialgleichung handelt, wozu nach den Ergebnissen der Nr. 121 (S. 440) $3\varrho - 3$ Invarianten erforderlich sind, so haben wir $3\varrho - 3$ Substitutionen auszuwählen. Wir nehmen z. B. die folgenden:

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1, & A_2, & \cdots A_\varrho, \\ A_2A_1, & A_3A_1, & \cdots A_\varrho A_1, \\ A_3A_2, & A_4A_3, & \cdots A_\varrho A_{\varrho-1}, \end{cases}$$

und fragen: wie bestimmt sich das System von Fundamentalsubstitutionen durch die Invarianten dieser $3\varrho - 3$ Substitutionen.

Es werde durch

$$J_{A_\varkappa} = J_\varkappa = \alpha_\varkappa + \delta_\varkappa$$

die Invariante der Substitution $A_\varkappa$, durch

$$J_{A_\varkappa A_i} = J_{\varkappa i}$$

die Invariante der componirten Substitution

$$A_\varkappa A_i,$$

allgemein durch

$$J_{A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu \cdots A_\gamma^\nu} = J_{\alpha^\lambda \beta^\mu \cdots \gamma^\nu}$$

die Invariante von

$$A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu \cdots A_\gamma^\nu \qquad (\alpha, \beta, \cdots \gamma = 1, 2, \cdots \varrho)$$

bezeichnet, wo $\lambda, \mu, \cdots \nu$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Die componirte Substitution $A_\varkappa A_i$ lautet

$$A_\varkappa A_i = \begin{pmatrix} \alpha_\varkappa\alpha_i + \beta_\varkappa\gamma_i & \alpha_\varkappa\beta_i + \beta_\varkappa\delta_i \\ \gamma_\varkappa\alpha_i + \delta_\varkappa\gamma_i & \gamma_\varkappa\beta_i + \delta_\varkappa\delta_i \end{pmatrix},$$

also ist

$$J_{\varkappa i} = \alpha_\varkappa\alpha_i + \beta_\varkappa\gamma_i + \gamma_\varkappa\beta_i + \delta_\varkappa\delta_i;$$

für die inverse Substitution

$$A_\varkappa^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_\varkappa & -\beta_\varkappa \\ -\gamma_\varkappa & \alpha_\varkappa \end{pmatrix}$$

haben wir

$$(4)\qquad J_{\varkappa^{-1}} = \delta_\varkappa + \alpha_\varkappa = J_\varkappa.$$

Setzen wir

$$A_\varkappa^\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_\varkappa^{(\lambda)} & \beta_\varkappa^{(\lambda)} \\ \gamma_\varkappa^{(\lambda)} & \delta_\varkappa^{(\lambda)} \end{pmatrix}$$

und bezeichnen durch $\omega_{\varkappa 1}$, $\omega_{\varkappa 2}$ die Wurzeln der Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_\varkappa - \omega & \beta_\varkappa \\ \gamma_\varkappa & \delta_\varkappa - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

so sind (vergl. Nr. 89, S. 321) die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_\varkappa^{(\lambda)} - \omega & \beta_\varkappa^{(\lambda)} \\ \gamma_\varkappa^{(\lambda)} & \delta_\varkappa^{(\lambda)} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

durch

$$\omega_{\varkappa 1}^\lambda, \quad \omega_{\varkappa 2}^\lambda$$

dargestellt; man erhält folglich die Gleichung

$$J_{\varkappa\lambda} = J_\varkappa^\lambda - \lambda J_\varkappa^{\lambda-2} + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1 \cdot 2} J_\varkappa^{\lambda-4} - \cdots, \qquad \lambda > 0. \tag{5}$$

Ferner findet man durch einfache Rechnung die Beziehungen

$$\begin{cases} J_{\varkappa i} = J_{i\varkappa}, \\ J_{i\lambda\varkappa} = J_{\lambda\varkappa i} = J_{\varkappa i\lambda}, \end{cases} \tag{6}$$

$$J_{\varkappa i} + J_{\varkappa i-1} = J_\varkappa J_i, \tag{7}$$

$$J_{i\lambda\varkappa} + J_{\lambda i\varkappa} = J_\varkappa J_{i\lambda} + J_\lambda J_{\varkappa i} + J_i J_{\lambda\varkappa} - J_\varkappa J_\lambda J_i. \tag{8}$$

Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalgleichungen von einander verschieden sind; dann liefert die Invariante

$$J_\varkappa = \alpha_\varkappa + \delta_\varkappa$$

durch die quadratische Gleichung

$$\omega_\varkappa^2 - (\alpha_\varkappa + \delta_\varkappa)\omega_\varkappa + 1 = 0$$

die beiden Wurzeln $\omega_{\varkappa 1}$, $\omega_{\varkappa 2}$ der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen Fundamentalgleichung und damit die zu diesem Punkte gehörige canonische Substitution

$$\Omega_\varkappa = \begin{pmatrix} \omega_{\varkappa 1} & 0 \\ 0 & \omega_{\varkappa 2} \end{pmatrix}.$$

Die mit $\Omega_\varkappa$ ähnliche Substitution, welche irgend ein Fundamentalsystem beim Umlaufe um $x = a_\varkappa$ erleidet, ist dann (vergl. Nr. 32, S. 105) in der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\varkappa 1} & 0 \\ 0 & \omega_{\varkappa 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1}$$

enthalten, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Constanten sind, deren Determinante

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$$

von Null verschieden ist. Ausgerechnet lautet diese Substitution:

$$\begin{pmatrix} \omega_{\varkappa 1}\frac{\alpha\delta}{\Delta} - \omega_{\varkappa 2}\frac{\beta\gamma}{\Delta} & \frac{\alpha\beta}{\Delta}(\omega_{\varkappa 2} - \omega_{\varkappa 1}) \\ \frac{\gamma\delta}{\Delta}(\omega_{\varkappa 1} - \omega_{\varkappa 2}) & \omega_{\varkappa 1}\frac{-\beta\gamma}{\Delta} + \omega_{\varkappa 2}\frac{\alpha\delta}{\Delta} \end{pmatrix},$$

und hieraus erhellt, dass dieselbe nur von zwei Parametern, als welche wir z. B.

$$\frac{\alpha\delta}{\Delta},\ \frac{\alpha\beta}{\Delta}$$

wählen können, abhängt. Es stellt folglich auch schon der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{\varkappa 1} & 0 \\ 0 & \omega_{\varkappa 2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}^{-1}$$

die allgemeinste mit $\Omega_\varkappa$ ähnliche Substitution dar, wenn a, b irgend welche von einander verschiedene Constanten bedeuten.

126. Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen aus den Fundamentalinvarianten. Mehrdeutigkeit.

Um das System von Fundamentalsubstitutionen zu bestimmen, bedarf es jetzt nur noch z. B. der Herstellung eines Systems von Uebergangssubstitutionen, die (vergl. Nr. 122, S. 446) eine Circulation zwischen irgend zweien der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ ermöglichen.

Sei

$$S_{i\varkappa} = \begin{pmatrix} \alpha_{i\varkappa} & \beta_{i\varkappa} \\ \gamma_{i\varkappa} & \delta_{i\varkappa} \end{pmatrix} \qquad (i \neq \varkappa)$$

die dem directen Wege von a_i nach $a_\varkappa$ entsprechende Uebergangssubstitution, d. h. also die Substitution, welche das zu $x = a_\varkappa$ gehörige canonische Fundamentalsystem $y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}$ in das zu $x = a_i$ gehörige y_{i1}, y_{i2} überführt,

$$[y_{i1}, y_{i2}] = S_{i\varkappa}[y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}].$$

Dann erfährt das Fundamentalsystem y_{i1}, y_{i2} bei einem einfachen positiven Umlaufe um den Punkt $a_\varkappa$ die Substitution

$$S_{i\varkappa}\Omega_\varkappa S_{i\varkappa}^{-1},$$

es ist folglich, wenn

$$[y_{i1}, y_{i2}] = \Sigma_i[y_1, y_2],$$

also

$$\Omega_i = \Sigma_i A_i \Sigma_i^{-1}$$

gesetzt wird, auch

$$S_{i\varkappa}\Omega_\varkappa S_{i\varkappa}^{-1} = \Sigma_i A_\varkappa \Sigma_i^{-1}$$

und daher

$$(9)\qquad J_{i\varkappa} = J_{A_i A_\varkappa} = J_{A_\varkappa A_i} = J_{S_{i\varkappa}\Omega_\varkappa S_{i\varkappa}^{-1}\Omega_i}.$$

Setzt man nun

$$(10)\qquad M_{i\varkappa} = M_{\varkappa i} = \frac{2J_{i\varkappa} - J_i J_\varkappa}{(\omega_{i1}-\omega_{i2})(\omega_{\varkappa 1}-\omega_{\varkappa 2})},$$

so folgt aus der Gleichung (9) durch einfache Rechnung

$$(i,\varkappa)\qquad \begin{cases} \alpha_{i\varkappa}\delta_{i\varkappa} = \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}+1), \\ \beta_{i\varkappa}\gamma_{i\varkappa} = \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}-1). \end{cases}$$

Wenn $J_{i\varkappa}$ als bekannt vorausgesetzt wird, so bestimmen diese beiden Gleichungen die Substitution $S_{i\varkappa}$, abgesehen von zwei Parametern, in eindeutiger Weise. Eine Abänderung dieser beiden Parameter, als welche wir z. B. $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ wählen können, bewirkt aber im Allgemeinen nur die gleichzeitige Transformation der beiden Substitutionen A_i, $A_\varkappa$ durch eine und dieselbe Substitution. In der That hat man mit Rücksicht auf die Gleichungen $(i,\varkappa)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i\varkappa} & \beta_{i\varkappa} \\ \gamma_{i\varkappa} & \delta_{i\varkappa} \end{pmatrix} \Omega_\varkappa \begin{pmatrix} \alpha_{i\varkappa} & \beta_{i\varkappa} \\ \gamma_{i\varkappa} & \delta_{i\varkappa} \end{pmatrix}^{-1} = \bar{S}_{i\varkappa}\Omega_\varkappa \bar{S}_{i\varkappa}^{-1},$$

wo

$$\bar{S}_{i\varkappa} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_{i\varkappa}\beta_{i\varkappa}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_{i\varkappa}\beta_{i\varkappa}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}-1) & \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}+1) \end{pmatrix}$$

gesetzt wurde. Wählen wir also in $S_{i\varkappa}$ das eine Mal

$$\alpha_{i\varkappa} = 1, \quad \beta_{i\varkappa} = 1,$$

das andere Mal $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ beliebig, so finden wir für die Substitutionen, die das Fundamentalsystem y_1, y_2 bei den Umläufen um a_i beziehungsweise $a_\varkappa$ erfährt, das eine Mal

$$A_i = \Sigma_i^{-1}\Omega_i\Sigma_i,$$

$$A_\varkappa = \Sigma_i^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}-1) & \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}+1) \end{pmatrix} \Omega_\varkappa \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M_{i\varkappa}+1) & -1 \\ -\frac{1}{2}(M_{i\varkappa}-1) & 1 \end{pmatrix} \Sigma_i,$$

das andere Mal

$$A_i' = \Sigma_i^{-1}\Omega_i\Sigma_i,$$

$$A_\varkappa' = \Sigma_i^{-1}\bar{S}_{i\varkappa}\Omega_\varkappa \bar{S}_{i\varkappa}^{-1}\Sigma_i.$$

Da aber offenbar für beliebiges p

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \Omega_i \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}^{-1}$$

ist, so ergiebt sich, wie wir behauptet haben,

$$A'_i = TA_iT^{-1}, \quad A_\varkappa = TA_\varkappa T^{-1},$$

wo

$$T = \Sigma_i^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_{i\varkappa}\beta_{i\varkappa}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_{i\varkappa}\beta_{i\varkappa}}} \end{pmatrix} \Sigma_i$$

zu nehmen ist.

Dieselben Gleichungen $(i, \varkappa)$, welche für die Coefficienten von $S_{i\varkappa}$ bestehen, gelten auch für die Coefficienten der Substitution

$$S_{\varkappa i} = \begin{pmatrix} \alpha_{\varkappa i} & \beta_{\varkappa i} \\ \gamma_{\varkappa i} & \delta_{\varkappa i} \end{pmatrix},$$

da ja offenbar

$$S_{i\varkappa}S_{\varkappa i} = 1$$

ist.

Nehmen wir nun ein Dreieck, welches entsteht, indem man drei der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$, also etwa

$$a_\varkappa, a_\lambda, a_i, \qquad \varkappa \neq \lambda \neq i \neq \varkappa,$$

durch directe Wege verbindet und betrachten das zu den drei Seiten dieses Dreieckes gehörige Tripel von Uebergangssubstitutionen

$$S_{\varkappa\lambda}, S_{\lambda i}, S_{i\varkappa}.$$

Dann besteht zunächst die unmittelbar evidente Beziehung

$$S_{\varkappa\lambda}S_{\lambda i}S_{i\varkappa} = 1,$$

und ferner haben wir die Gleichungen

$$(i, \varkappa), (\lambda, i), (\varkappa, \lambda).$$

Hieraus folgen sofort die Ausdrücke

$$\alpha_{\varkappa\lambda}\alpha_{\lambda i}\alpha_{i\varkappa} + \delta_{\varkappa\lambda}\delta_{\lambda i}\delta_{i\varkappa} = \frac{1}{2}(M_{\varkappa\lambda} + M_{\lambda i} + M_{i\varkappa} + 1),$$

$$\alpha_{\varkappa\lambda}\alpha_{\lambda i}\alpha_{i\varkappa}\delta_{\varkappa\lambda}\delta_{\lambda i}\delta_{i\varkappa} = \frac{1}{8}(M_{\varkappa\lambda} + 1)(M_{\lambda i} + 1)(M_{i\varkappa} + 1),$$

d. h. die Producte

$$\alpha_{\varkappa\lambda}\alpha_{\lambda i}\alpha_{i\varkappa}, \quad \delta_{\varkappa\lambda}\delta_{\lambda i}\delta_{i\varkappa}$$

genügen der quadratischen Gleichung

$$(\varkappa, \lambda, \iota) \quad P^2_{\varkappa\lambda\iota} - \frac{1}{2}(M_{\varkappa\lambda} + M_{\lambda\iota} + M_{\iota\varkappa} + 1) P_{\varkappa\lambda\iota}$$
$$+ \frac{1}{8}(M_{\varkappa\lambda} + 1)(M_{\lambda\iota} + 1)(M_{\iota\varkappa} + 1) = 0.$$

Hieraus bestimmen sich die Coefficienten der drei Substitutionen

$$S_{\varkappa\lambda}, \; S_{\lambda\iota}, \; S_{\iota\varkappa},$$

abgesehen von drei Parametern, als welche man z. B. $\beta_{\varkappa\lambda}$, $\alpha_{\varkappa\lambda}$, $\alpha_{\lambda\iota}$ wählen kann, in eindeutiger Weise, wenn man noch für jedes der Producte

$$\alpha_{\varkappa\lambda}\alpha_{\lambda\iota}\alpha_{\iota\varkappa}, \qquad \delta_{\varkappa\lambda}\delta_{\lambda\iota}\delta_{\iota\varkappa}$$

je eine bestimmte Wurzel der Gleichung $(\varkappa, \lambda, \iota)$ festsetzt, vorausgesetzt, dass die Invarianten

$$J_\varkappa, \; J_\lambda, \; J_\iota, \; J_{\varkappa\lambda}, \; J_{\lambda\iota}, \; J_{\iota\varkappa}$$

als bekannt angesehen werden.

Nehmen wir also die $\varrho - 2$ Tripel von Uebergangssubstitutionen

(11) $$S_{1\varkappa}, \; S_{\varkappa, \varkappa+1}, \; S_{\varkappa+1, 1} \qquad (\varkappa = \overline{2, 3, \cdots \varrho - 1}),$$

so bestimmen sich die Coefficienten derselben, abgesehen von ϱ Parametern, als welche wir z. B.

$$\beta_{12}, \; \alpha_{12}, \; \alpha_{23}, \; \cdots \; \alpha_{\varrho-1, \varrho}$$

wählen können, in eindeutiger Weise, wenn man für die Producte

$$\alpha_{1\varkappa}\alpha_{\varkappa, \varkappa+1}\alpha_{\varkappa+1, 1}, \quad \delta_{1\varkappa}\delta_{\varkappa, \varkappa+1}\delta_{\varkappa+1, 1}$$

je eine bestimmte Wurzel der Gleichungen

$$(1, \varkappa, \varkappa + 1) \qquad (\varkappa = \overline{2, 3, \cdots \varrho - 1})$$

festsetzt, da ja die Invarianten

$$J_{1\varkappa} = J_{\varkappa 1}, \quad J_{\varkappa, \varkappa+1} = J_{\varkappa+1, \varkappa}, \quad J_{\varkappa+1, 1}$$

als bekannt vorausgesetzt sind. Die übrigen Uebergangssubstitutionen ergeben sich, wenn die Substitutionen (11) gefunden sind, vermöge der Beziehungen

$$S_{\varkappa\lambda}S_{\lambda 1}S_{1\varkappa} = 1, \qquad 1 \neq \varkappa \neq \lambda \neq 1,$$

in eindeutiger Weise; die Kenntniss der Substitutionen (11) reicht also zur Bestimmung des Systems von Fundamentalsubstitutionen vollständig aus.

Aehnlich wie die Abänderung der beiden Parameter $\alpha_{\iota\varkappa}$, $\beta_{\iota\varkappa}$ in der Uebergangssubstitution $S_{\iota\varkappa}$ nur die gleichzeitige Transformation der

Substitutionen A_i, $A_\varkappa$ durch eine und dieselbe Substitution zur Folge hat, werden, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, im Allgemeinen durch verschiedene Wahl der ϱ Parameter

$$\beta_{12}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \cdots \alpha_{\varrho-1.\varrho}$$

stets aequivalente Systeme von Fundamentalsubstitutionen (im Sinne der Nr. 120, S. 438) erzielt, vorausgesetzt, dass man über die Wurzeln der quadratischen Gleichungen

$$(1, \varkappa, \varkappa+1) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 2, 3, \cdots \overline{\varrho-1})}$$

disponirt hat. Das System von Fundamentalsubstitutionen ist also durch die Invarianten der Substitutionen (3) und durch die Wurzeln jener quadratischen Gleichungen eindeutig bestimmt; folglich bestimmen die Invarianten der Substitutionen (3) allein im Allgemeinen $2^{\varrho-2}$ wesentlich verschiedene Systeme von Fundamentalsubstitutionen, entsprechend allen möglichen Combinationen der Wurzeln der gedachten quadratischen Gleichungen.

127. Darstellung der Invariante einer beliebigen Substitution durch die Fundamentalinvarianten.

Man kann auch leicht den Ausdruck für die Invariante einer beliebigen durch Composition der A_1, A_2, $\cdots A_\varrho$ entstandenen Substitution durch die Invarianten der Substitutionen (3) aufstellen. Zunächst kann man die Invariante einer durch beliebige Composition der beiden Substitutionen

$$A_i, A_\varkappa$$

entstandenen Substitution vermöge der Gleichung (8) rational ausdrücken durch Invarianten von der Form

$$J_{i^\lambda}, J_{\varkappa^\mu}, J_{i^\lambda \varkappa^\mu},$$

wo λ, μ ganze Zahlen bedeuten. Diese Invarianten führt man mit Hülfe der Gleichung (7) auf den Fall positiver λ, μ zurück, und drückt dann

$$J_{i^\lambda}, J_{\varkappa^\mu} \qquad {\scriptstyle (\lambda, \mu > 0)}$$

nach Gleichung (5) durch J_i, $J_\varkappa$ aus. Um

$$J_{i^\lambda \varkappa^\mu} = J_{\varkappa^\mu i^\lambda}$$

zu finden, beachten wir, dass dies nichts anderes ist als die Invariante der Substitution

$$S_{i\varkappa} \Omega_\varkappa^\mu S_{i\varkappa}^{-1} \Omega_i^\lambda,$$

es ist folglich (vergl. S. 466, Gleichung (10))

$$M_{i^\lambda \varkappa^\lambda} = M_{i\varkappa},$$

d. h. nach einer in der Nr. 125 (S. 464) gemachten Bemerkung

$$\frac{2\,J_{i^\lambda \varkappa^\mu} - J_{i^\lambda} J_{\varkappa^\mu}}{(\omega^\lambda_{i1} - \omega^\lambda_{i2})(\omega^\mu_{\varkappa 1} - \omega^\mu_{\varkappa 2})} = \frac{2\,J_{i\varkappa} - J_i J_\varkappa}{(\omega_{i1} - \omega_{i2})(\omega_{\varkappa 1} - \omega_{\varkappa 2})},$$

und hieraus bestimmt sich die gesuchte Grösse in eindeutiger Weise, wenn die

$$J_\varkappa,\ J_i,\ J_{i\varkappa}$$

gegeben sind. Nun kann man vermöge der Relationen

$$S_{\varkappa 1} S_{1i} S_{i\varkappa} = 1, \quad 1 \neq i \neq \varkappa \neq 1,$$

alle $J_{i\varkappa}$ durch die Invarianten der Substitutionen (3) in eindeutiger Weise darstellen, wenn man noch die Wurzeln der Gleichungen $(1, \varkappa, \varkappa + 1)$ zu Hülfe nimmt. Es ergiebt sich z. B.

$$M_{24} = \frac{M_{12} M_{34} + M_{14} M_{23} + M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{34} + 1}{M_{13} - 1} - 8\,\frac{P'_{123} P'_{134} + P''_{123} P''_{134}}{M_{13}^2 - 1},$$

wo die Grössen

$$\left.\begin{aligned} P'_{1,\varkappa,\varkappa+1} &= \alpha_{1\varkappa} \alpha_{\varkappa,\varkappa+1} \alpha_{\varkappa+1,1} \\ P''_{1,\varkappa,\varkappa+1} &= \delta_{1\varkappa} \delta_{\varkappa,\varkappa+1} \delta_{\varkappa+1,1} \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots \overline{\varrho - 1})$$

die Wurzeln der Gleichung $(1, \varkappa, \varkappa + 1)$ bedeuten, und hieraus findet man in eindeutiger Weise J_{24}. Eine simultane Vertauschung der

$$P'_{123},\ P'_{134} \quad \text{und} \quad P''_{123},\ P''_{134}$$

ändert den Werth von M_{24} nicht; entsprechend findet man auch nur zwei verschiedene Werthe für diese Grösse, und diese befriedigen die einfache quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & 1 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & 1 & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aehnlich ergeben sich die übrigen $J_{i\varkappa}$, die nicht Invarianten der Substitutionen (3) sind.

Um die Invarianten der durch Composition von drei Substitutionen

$$A_\varkappa,\ A_\lambda,\ A_i$$

entstehenden Substitutionen darzustellen, bemerken wir, dass zufolge der Gleichungen (5), (7), (8) alles auf die Bildung der beiden Invarianten

$$J_{i\lambda\varkappa},\ J_{\varkappa\lambda i} = J_{i^{-1}\lambda^{-1}\varkappa^{-1}}$$

hinauskömmt. Dies sind aber die Invarianten der Substitutionen

$$S_{\varkappa i}\Omega_i S_{\varkappa i}^{-1} S_{\varkappa\lambda}\Omega_\lambda S_{\varkappa\lambda}^{-1}\Omega_\varkappa = S_{i\varkappa}^{-1}\Omega_i S_{\lambda i}^{-1}\Omega_\lambda S_{\varkappa\lambda}^{-1}\Omega_\varkappa,$$
$$S_{\varkappa i}\Omega_i^{-1} S_{\varkappa i}^{-1} S_{\varkappa\lambda}\Omega_\lambda^{-1} S_{\varkappa\lambda}^{-1}\Omega_\varkappa^{-1} = S_{i\varkappa}^{-1}\Omega_i^{-1} S_{\lambda i}^{-1}\Omega_\lambda^{-1} S_{\varkappa\lambda}^{-1}\Omega_\varkappa^{-1};$$

hieraus ergeben sich nun durch einfache Rechnung die Gleichungen

$$J_{i\lambda\varkappa} + J_{\varkappa\lambda i} = J_\varkappa J_{i\lambda} + J_\lambda J_{\varkappa i} + J_i J_{\lambda\varkappa} - J_i J_\lambda J_\varkappa,$$
$$J_{i\lambda\varkappa} - J_{\varkappa\lambda i} = (P''_{\varkappa\lambda i} - P'_{\varkappa\lambda i})(\omega_{\varkappa 1} - \omega_{\varkappa 2})(\omega_{\lambda 1} - \omega_{\lambda 2})(\omega_{i1} - \omega_{i2}),$$

von denen die erste vermöge (6) mit (8) übereinstimmt, und wo in der zweiten $P'_{\varkappa\lambda i}$, $P''_{\varkappa\lambda i}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $(\varkappa, \lambda, i)$ bedeuten. Es lässt sich auch leicht eine quadratische Gleichung für diese beiden Invarianten selbst herstellen, man findet nämlich

$$\begin{aligned} & J_{i\lambda\varkappa}^2 - (J_i J_{\lambda\varkappa} + J_\lambda J_{\varkappa i} + J_\varkappa J_{i\lambda} - J_i J_\lambda J_\varkappa) J_{i\lambda\varkappa} \\ (12)\qquad & + J_i^2 + J_\lambda^2 + J_\varkappa^2 + J_{\lambda\varkappa}^2 + J_{\varkappa i}^2 + J_{i\lambda}^2 - J_i J_\lambda J_{i\lambda} \\ & - J_\lambda J_\varkappa J_{\lambda\varkappa} - J_\varkappa J_i J_{\varkappa i} + J_{\lambda\varkappa} J_{\varkappa i} J_{i\lambda} - 4 = 0, \end{aligned}$$

und derselben Gleichung genügt auch $J_{\varkappa\lambda i}$. Es lassen sich dann die Invarianten aller Substitutionen, die auf irgend eine Weise aus den drei Substitutionen

$$A_\varkappa,\ A_\lambda,\ A_i$$

componirt sind, auf rationale Weise aus den Invarianten

$$J_\varkappa,\ J_\lambda,\ J_i,\ J_{\lambda\varkappa},\ J_{\varkappa i},\ J_{i\lambda}$$

und den Wurzeln der Gleichung (12) zusammensetzen. Um zu zeigen, dass diese sämmtlichen $J_{i\lambda\varkappa}$ eindeutig bestimmt sind, wenn nebst den Invarianten der Substitutionen (3) noch die Wurzeln der quadratischen Gleichungen

$$(1,\ \varkappa,\ \varkappa+1) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots \overline{\varrho - 1})$$

festgelegt werden, bemerken wir, dass nach dem Vorhergehenden die eindeutige Bestimmung der

$$J_{1,\varkappa,\varkappa+1},\ J_{\varkappa+1,\varkappa,1}$$

feststeht. Aus diesen setzen sich aber alle anderen $J_{i\lambda\varkappa}$ rational zusammen, wie man durch einfache Rechnung verificiren kann.

Die Invarianten von Substitutionen, die durch Composition von vieren oder mehreren der

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\varrho$$

hervorgehen, sind rationale Functionen der Invarianten von Substitutionen, die sich aus zweien oder dreien der

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\varrho$$

zusammensetzen lassen. Es ergiebt sich dies aus der leicht abzuleitenden Gleichung

$$\begin{aligned}2J_{\varkappa\lambda i\mu} = {} & J_\varkappa J_{\lambda i\mu} + J_\lambda J_{i\mu\varkappa} + J_i J_{\mu\varkappa\lambda} + J_\mu J_{\varkappa\lambda i} + J_{\varkappa\lambda} J_{i\mu} + J_{\lambda i} J_{\mu\varkappa} \\ & - J_{\lambda\mu} J_{\varkappa i} - J_\varkappa J_\lambda J_{i\mu} - J_\lambda J_i J_{\mu\varkappa} - J_i J_\mu J_{\varkappa\lambda} - J_\mu J_\varkappa J_{\lambda i} + J_\varkappa J_\lambda J_i J_\mu .\end{aligned}$$

Auf diese Weise finden wir für die Invariante jeder durch Composition aus den Fundamentalsubstitutionen hervorgehenden Substitution im Allgemeinen $2^{\varrho-2}$ verschiedene Werthe, entsprechend den $2^{\varrho-2}$ verschiedenen Systemen von Fundamentalsubstitutionen, die durch das Invariantensystem der Substitutionen (3) bestimmt werden.

128. Invariantensysteme, die eine eindeutige Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen liefern. Ausnahmefälle. Berechnung der Invarianten.

Um ein bestimmtes der $2^{\varrho-2}$ Systeme von Fundamentalsubstitutionen zu fixiren, die einem Werthensysteme der Invarianten der Substitutionen (3) entsprechen, kann man sich z. B. die $4\varrho - 5$ Invarianten

$$(13)\quad J_1,\ J_2,\ \cdots\ J_\varrho;\ J_{21},\ \cdots\ J_{\varrho 1};\ J_{32},\ \cdots\ J_{\varrho,\varrho-1};\ J_{321},\ \cdots\ J_{\varrho,\varrho-1,1},$$

zwischen denen noch $\varrho - 2$ quadratische Gleichungen bestehen, gegeben denken; durch diese lässt sich dann die Invariante jeder aus den Fundamentalsubstitutionen componirten Substitution rational darstellen. Im Falle $\varrho = 2$ ist durch die Invarianten

$$J_1,\ J_2,\ J_{21}$$

das System von Fundamentalsubstitutionen eindeutig bestimmt, d. h. für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Punkten, in welcher das Glied mit der ersten Ableitung von y fehlt, hat man, um das System von Fundamentalsubstitutionen zu bestimmen, nur die Wurzeln der zu den beiden im Endlichen gelegenen und zum unendlich fernen Punkte gehörigen Fundamentalgleichungen aufzusuchen.

Im Falle $\varrho = 3$ bestimmen die sechs Invarianten

$$J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_{21},\ J_{31},\ J_{32} \tag{14}$$

im Allgemeinen zwei wesentlich verschiedene Systeme von Fundamentalsubstitutionen, entsprechend der Art, wie man die Wurzeln der Gleichung (12) für

$$\varkappa = 1,\quad \lambda = 2,\quad i = 3$$

den beiden Invarianten

$$J_{321},\ J_{123}$$

zuordnet. Welches dieser beiden Systeme bei einer vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei wesentlichen singulären Punkten im Endlichen das thatsächlich richtige ist, entscheidet man am einfachsten durch die dem unendlich fernen Punkte entsprechende Fundamentalgleichung, deren Wurzelsumme zufolge der Gleichung (2) den Werth von

$$J_0 = J_{3^{-1}2^{-1}1^{-1}} = J_{123}$$

liefert. Wenn

$$A_1,\ A_2,\ A_3$$

das eine System von Fundamentalsubstitutionen ist, so wird das andere, denselben Werthen der Invarianten (14) entsprechende, z. B. durch

$$A_1^{-1},\ A_2^{-1},\ A_3^{-1}$$

geliefert, und in der That ist die dem Umlaufe um $x = \infty$ entsprechende Substitution das eine Mal

$$A_0 = (A_1 A_2 A_3)^{-1},$$

das andere Mal

$$A_0' = (A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1})^{-1} = A_3 A_2 A_1,$$

d. h. die Wurzelsumme der zu $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung ist das eine Mal gleich

$$J_{123}$$

und das andere Mal gleich

$$J_{321}.$$

In gewissen besonderen Fällen bedürfen die vorstehenden Betrachtungen einer Modification. So kann z. B. der Schluss (S. 469), dass durch verschiedene Wahl der ϱ Parameter, von denen die Coefficienten der Substitutions-Tripel (11) noch abhängen, immer aequivalente Systeme von Fundamentalsubstitutionen zum Vorschein kommen, illusorisch werden, wenn eine oder mehrere der Grössen $M_{i\varkappa}$ den Werth

$+1$ oder -1 annehmen. In diesem Falle bewirkt nämlich eine Abänderung der beiden Parameter, von denen die Uebergangssubstitution $S_{i\varkappa}$ noch abhängt, nicht nothwendig die gleichzeitige Transformation der Substitutionen A_i, $A_\varkappa$ durch eine und dieselbe Substitution (vergl. S. 466). Man kann sich, um dies nachzuweisen, auf die Betrachtung des Falles

$$M_{i\varkappa} = 1$$

beschränken, da der andere durch geeignete Wahl der Wurzeln ω_{i1}, ω_{i2}, $\omega_{\varkappa 1}$, $\omega_{\varkappa 2}$ stets auf diesen zurückgeführt werden kann: alsdann ist also

$$\beta_{i\varkappa}\gamma_{i\varkappa} = 0, \quad \alpha_{i\varkappa}\delta_{i\varkappa} = 1.$$

Wählt man nun z. B.

$$\beta_{i\varkappa} = 0, \quad \gamma_{i\varkappa} \neq 0,$$

so hat die Uebergangssubstitution $S_{i\varkappa}$ im Wesentlichen die Form

$$S_{i\varkappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_{i\varkappa} & 1 \end{pmatrix},$$

wählt man dagegen

$$\beta_{i\varkappa} = 0, \quad \gamma_{i\varkappa} = 0,$$

so kann

$$S_{i\varkappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

genommen werden; die durch diese beiden Wahlen bestimmten Substitutionen A_i, $A_\varkappa$ sind aber offenbar nicht aequivalent. Denn für $S_{i\varkappa} = 1$ folgt (vergl. S. 465)

$$\Omega_i = \Sigma_i A_i \Sigma_i^{-1},$$

$$\Omega_\varkappa = \Sigma_i A_\varkappa \Sigma_i^{-1},$$

also hat man, da

$$\Omega_\varkappa \Omega_i = \Omega_i \Omega_\varkappa$$

ist, auch

$$A_\varkappa A_i = A_i A_\varkappa,$$

d. h. die beiden Substitutionen A_i, $A_\varkappa$ sind, wie man zu sagen pflegt, vertauschbar, dies ist aber für die durch

$$S_{i\varkappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_{i\varkappa} & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{i\varkappa} \neq 0,$$

bestimmten A_i, $A_\varkappa$ nicht der Fall. Dagegen ergeben sich bei verschiedener Wahl von $\gamma_{i\varkappa}$ aequivalente Systeme von Fundamentalsubstitutionen; es wird also im Allgemeinen, wenn eines der $M_{i\varkappa}$ den Werth ± 1 annimmt, die Anzahl der durch die Fundamentalinvarianten bestimmten verschiedenen Systeme von Fundamentalsubstitutionen verdoppelt.

Ein anderer Specialfall ist der, wo eine oder mehrere der quadratischen Gleichungen

$$(1, \varkappa, \varkappa + 1) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 2, 3, \cdots \overline{\varrho - 1})}$$

eine doppelte Wurzel hat. Dadurch reducirt sich im Allgemeinen die Anzahl der verschiedenen Systeme von Fundamentalsubstitutionen und zwar durch jedes Auftreten einer Gleichung mit doppelter Wurzel auf die Hälfte. Wir gehen auf eine genauere Discussion dieser Specialfälle nicht ein, da es uns nur darum zu thun war eine Vorstellung von der Art der Vieldeutigkeit zu erlangen, welche der Bestimmung des Systems von Fundamentalsubstitutionen durch Fundamentalinvarianten anhaftet.

Was nun die Berechnung der Invarianten (13) anlangt, so wird man sich im Allgemeinen nur für die Herstellung der $J_1, J_2, \cdots J_\varrho$ der in der Nr. 107 aufgeführten Reihenentwickelungen bedienen können, weil sich die Umläufe, denen die übrigen dieser Invarianten entsprechen, nicht immer in Kreisringe, die keinen wesentlichen singulären Punkt enthalten, einschliessen lassen. Dagegen kann man diese Entwickelungen für die Berechnung der Invarianten $J_{i\varkappa}$, die zu Umläufen gehören, welche nur zwei singuläre Punkte a_i, $a_\varkappa$ umschliessen und mit Hülfe deren sich ja alle übrigen Invarianten, wie wir gesehen haben, wenn auch nicht eindeutig, so doch algebraisch bestimmen, nutzbar machen, indem man sich der folgenden einfachen Abbildung der x-Ebene bedient.

Es seien a_i, $a_\varkappa$ irgend zwei der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$; wir verbinden dieselben durch eine gerade Linie und nehmen an, dass sich auf der von a_i, $a_\varkappa$ begrenzten endlichen Strecke kein anderer wesentlicher singulärer Punkt der Differentialgleichung befinde. Dann giebt es unter der Schaar confocaler Ellipsen, welche die Punkte a_i, $a_\varkappa$ zu Brennpunkten haben, unzählig viele, die keine anderen wesentlichen singulären Punkte als a_i, $a_\varkappa$ einschliessen; wir greifen eine solche Ellipse K heraus und bezeichnen die Längen ihrer Axen durch p, q und zwar sei $p > q$. Setzen wir nun

$$x = \frac{a_\varkappa - a_i}{4}\left(w + \frac{1}{w}\right) + \frac{a_\varkappa + a_i}{4},$$

so finden wir das durch die geradlinige Strecke $(a_i a_\varkappa)$ und die Ellipse K begrenzte Gebiet G der x-Ebene, in der w-Ebene abgebildet, entweder auf das Innere eines Kreisringes, der durch den Einheitskreis und den mit demselben concentrischen Kreis vom Radius

$$\frac{p+q}{\left|\frac{a_i - a_\varkappa}{2}\right|} > 1$$

begrenzt wird, oder auf das Innere des vom Einheitskreise und dem damit concentrischen Kreise vom Radius

$$\frac{p-q}{\left|\frac{a_i - a_\varkappa}{2}\right|} < 1$$

gebildeten Kreisringes, jenachdem der eine oder der andere Zweig der algebraischen Function w von x ausgewählt wird. Auf diese Weise entspricht einem innerhalb des Gebietes G verlaufenden geschlossenen Wege der Variabeln x ein in einem Kreisringe eingeschlossener Umlauf der Variabeln w. Wenn man also in die gegebene Differentialgleichung w als unabhängige Variable einführt, so kann man zur Berechnung der diesem Umlaufe zugehörigen Invariante die für Kreisringe geltenden Methoden anwenden. Falls mehrere singuläre Punkte auf einer geraden Linie liegen, so kann man in ähnlicher Weise die Umläufe um mehrere dieser Punkte auf geschlossene Wege, die in Kreisringen verlaufen, zurückführen; auch ist dieses Verfahren natürlich auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anwendbar.

Die Berechnung der Invarianten (13) hat keinerlei Schwierigkeit, wenn es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei im Endlichen gelegenen singulären Punkten a_1, a_2 handelt, die der Fuchs'schen Classe angehört. In diesem Falle braucht man nämlich, wie wir oben (S. 472) bemerkt haben, nur die Wurzeln der zu den singulären Punkten

$$x = a_1,\ a_2,\ \infty$$

gehörigen Fundamentalgleichungen zu kennen, und diese ergeben sich auf Grund des Satzes der Nr. 51 (S. 180) unmittelbar aus den Wurzeln der zu diesen Punkten gehörigen determinirenden Gleichungen. Gleichwohl darf man auch in diesem Falle, der ja, wie im fünften Abschnitte (Nr. 70) gezeigt wurde, im Wesentlichen auf die Gauss'sche Differentialgleichung hinauskommt, die Aufgabe der Bestimmung des Systems von Fundamentalsubstitutionen nicht ohne Weiteres für erledigt halten, denn es handelt sich noch darum, die Substitutionen anzugeben, die ein bestimmtes Fundamentalsystem beim Umlaufe um die einzelnen singulären Punkte erfährt. Diese Aufgabe fällt natürlich auch im allgemeinen Falle nicht mit der Aufsuchung eines Systems von Fundamentalsubstitutionen zusammen, man muss eben noch diejenige Substitution bestimmen, durch welche das gefundene System von Fundamentalsubstitutionen zu transformiren ist, damit es die, einem vorgelegten Fundamentalsysteme entsprechenden Substitutionen liefert. Wir wollen für die Gauss'sche Differentialgleichung die expliciten Ausdrücke für die Coefficienten der Uebergangssubstitutionen aufstellen und nehmen zu dem Ende die im vierten Kapitel des fünften Abschnittes eingeführten Bezeichnungen wieder auf.

129. Berechnung der Uebergangssubstitutionen für die Gauss'sche Differentialgleichung im Falle unbestimmter α, β, γ.

Wir denken uns die von den singulären Punkten $x = 0$, $x = 1$ der Differentialgleichung (G) (Nr. 70, S. 252) nach dem Punkte $x = \infty$ hin zu legenden Querschnitte z. B. längs der realen Axe der x-Ebene erstreckt, so dass also der von $x = 0$ ausgehende Querschnitt l_0 in der Richtung der negativen, der von $x = 1$ ausgehende Querschnitt l_1 in der Richtung der positiven realen Grössen verläuft. In der so zerschnittenen x-Ebene, welche jetzt die einfach zusammenhängende Fläche T repräsentirt, fixiren wir nunmehr die particulären Integrale

$$u_{01},\ u_{02};\quad u_{11},\ u_{12};\quad u_{\infty 1},\ u_{\infty 2},$$

indem wir festsetzen, dass die mehrdeutigen Potenzen von

$$x,\quad 1 - x,\quad \frac{1}{x},$$

die in den (in den Nummern 71, 72 gegebenen) Entwickelungen dieser Integrale:

$$\begin{aligned}
u_{01} &= F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\
u_{02} &= x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),\\
u_{11} &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),\\
u_{12} &= (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x),\\
u_{\infty 1} &= x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right),\\
u_{\infty 2} &= x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

als Factoren auftreten, so gewählt werden, dass

$$\lim_{x=1} x^{1-\gamma} = 1, \qquad \lim_{x=0} (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} = 1,$$

$$\lim_{x=1} x^{-\alpha} = 1, \qquad \lim_{x=1} x^{-\beta} = 1$$

sei. Wir setzen vorläufig voraus, dass keine der Grössen

$$1-\gamma,\quad \gamma-\alpha-\beta,\quad \alpha-\beta$$

eine ganze Zahl ist.

Es handelt sich dann um die Herstellung der zu den Querschnitten l_1, l_0 gehörigen Uebergangssubstitutionen

$$S_{\infty 1}=\begin{pmatrix}\alpha_{\infty 1} & \beta_{\infty 1}\\ \gamma_{\infty 1} & \delta_{\infty 1}\end{pmatrix},\qquad S_{\infty 0}=\begin{pmatrix}\alpha_{\infty 0} & \beta_{\infty 0}\\ \gamma_{\infty 0} & \delta_{\infty 0}\end{pmatrix},$$

die durch die Gleichungen

(1) $$[u_{\infty 1},\, u_{\infty 2}]=S_{\infty 1}[u_{11},\, u_{12}],$$

(2) $$[u_{\infty 1},\, u_{\infty 2}]=S_{\infty 0}[u_{01},\, u_{02}]$$

erklärt werden; diese werden uns auch zugleich die bereits in der Nr. 74 (S. 267) erwähnten Relationen zwischen je dreien der die sechs verschiedenen Integrale

$$u_{01},\, u_{02};\quad u_{11},\, u_{12};\quad u_{\infty 1},\, u_{\infty 2}$$

darstellenden Entwickelungen I—XXIV (a. a. O. S. 266) liefern.

Die zu den Punkten $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ gehörigen canonischen Substitutionen lauten der Reihe nach

$$\Omega_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\pi i\gamma}\end{pmatrix},\qquad \Omega_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix},$$

$$\Omega_\infty=\begin{pmatrix}e^{2\pi i\alpha} & 0\\ 0 & e^{2\pi i\beta}\end{pmatrix}.$$

Die Substitutionen, die etwa das Fundamentalsystem $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ bei einfachen positiven Umläufen um die Punkte

$$x=0,\quad x=1,\quad x=\infty$$

erfährt, d. h. die zu diesem Fundamentalsysteme gehörigen Fundamentalsubstitutionen, lassen sich alsdann in die Form setzen

$$A_0=S_{\infty 0}\Omega_0 S_{\infty 0}^{-1},\quad A_1=S_{\infty 1}\Omega_1 S_{\infty 1}^{-1},\quad A_\infty=\Omega_\infty,$$

und es besteht die Beziehung

(3) $$\Omega_\infty^{-1}=S_{\infty 0}\Omega_0 S_{\infty 0}^{-1}\, S_{\infty 1}\Omega_1 S_{\infty 1}^{-1},$$

welche vier Gleichungen zwischen den Coefficienten der beiden zu bestimmenden Uebergangssubstitutionen liefert. Nun lassen sich aber für jede dieser Substitutionen zwei Coefficienten leicht berechnen. Setzen wir nämlich

$$\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)} = f(\alpha, \beta, \gamma),$$

so besteht, wie wir in der Nr. 75 (S. 270) gezeigt haben, die Gleichung (vergl. (43) a. a. O.)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = f(\alpha, \beta, \gamma),$$

vorausgesetzt, dass die für die Convergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ im Punkte $x = 1$ erforderliche Bedingung (vergl. Nr. 74, S. 268)

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$$

erfüllt ist. Hieraus ergeben sich sofort die Gleichungen:

$$F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1) = f(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1),$$
$$F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, 1) = f(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1),$$

wenn

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$$

ist, und

$$F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, 1) = f(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1),$$
$$F(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, 1) = f(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1),$$

wenn

$$\Re(1 - \gamma) > 0$$

ist. Machen wir vorläufig die Annahme

$$(4) \qquad \Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0, \quad \Re(1 - \gamma) > 0,$$

so ist überdies zufolge der Entwickelungen V, VII (Nr. 74)

$$\text{für} \quad x = 1, \quad u_{11} = 1, \quad u_{12} = 0,$$

und zufolge der Entwickelungen I, III

$$\text{für} \quad x = 0, \quad u_{01} = 1, \quad u_{02} = 0.$$

Nehmen wir jetzt in den Gleichungen (1) für $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ die mit $(-1)^{\alpha}$ beziehungsweise $(-1)^{\beta}$ multiplicirten Entwickelungen IX, X und setzen dann $x = 1$, so erhalten wir

$$\alpha_{\infty 1} = f(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1),$$
$$\gamma_{\infty 1} = f(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1);$$

nehmen wir ferner in den Gleichungen (2) für $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ die mit $(-1)^{\alpha}$ beziehungsweise $(-1)^{\beta}$ multiplicirten Entwickelungen XIII, XIV, die für

$$\left|\frac{1}{1-x}\right| < 1$$

gültig sind, und setzen dann $x = 0$, so ergiebt sich

$$\alpha_{x0} = f(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1)e^{-\pi i \alpha},$$
$$\gamma_{x0} = f(\beta, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1)e^{-\pi i \beta}.$$

Die vier in der symbolischen Beziehung (3) zusammengefassten Gleichungen würden nun hinreichen, um auch noch die übrigen Coefficienten der Substitutionen S_{x1}, S_{x0} zu bestimmen, wir schlagen aber für die Berechnung derselben ein etwas weniger umständliches Verfahren ein, welches uns auch ermöglichen wird, die beschränkende Voraussetzung (4) fallen zu lassen.

Um die Formeln zunächst in der Gestalt zu erhalten, wie sie von Gauss und Kummer aufgestellt worden sind, berechnen wir statt der Substitution S_{x1} vorerst die dem directen Wege zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ entsprechende Uebergangssubstitution

$$S_{10} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \beta_{10} \\ \gamma_{10} & \delta_{10} \end{pmatrix},$$

die mit S_{x1}, S_{x0} durch die Beziehung

$$S_{x1} S_{10} S_{x0}^{-1} = 1$$

verknüpft und durch die Gleichungen

$$(5) \qquad [u_{11}, u_{12}] = S_{10}[u_{01}, u_{02}]$$

erklärt ist. Denken wir uns in diesen letzteren Gleichungen für u_{01}, u_{02} die Entwickelungen I, III, für u_{11}, u_{12} die Entwickelungen V, VII eingesetzt, so können wir, falls

$$\Re(1 - \gamma) > 0$$

vorausgesetzt wird, $x = 0$ setzen und erhalten

$$\alpha_{10} = f(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1),$$
$$\gamma_{10} = f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1).$$

Falls auch noch

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$$

ist, so können wir in eben diesen Gleichungen auch $x = 1$ einsetzen, wodurch sich die Beziehungen

$$1 = \alpha_{10} f(\alpha, \beta, \gamma) + \beta_{10} f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma),$$
$$0 = \gamma_{10} f(\alpha, \beta, \gamma) + \delta_{10} f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma)$$

ergeben. Indem man nun die bekannten Eigenschaften der Π-Function (vergl. Gauss, Disquisitiones circa seriem etc. art. 25)

$$\Pi(-z)\,\Pi(z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z},$$

$$\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

benutzt, findet man hieraus die Ausdrücke

$$\beta_{10} = -\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} = f(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1),$$

$$\delta_{10} = -\frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} = f(1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1).$$

Die Gleichungen (5) lassen sich hiernach in die elegante Form setzen

$$(6)\begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) = f(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ +f(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1)\,x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x), \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x) \\ \quad = f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ \quad + f(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1)\,x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x). \end{cases}$$

Um nun zu zeigen, dass diese nur unter Festhaltung der Voraussetzung (4) hergeleiteten Formeln auch gültig bleiben, wenn diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist, kann man sich z. B. des folgenden Verfahrens bedienen. Nehmen wir an, es sei etwa

$$\Re(1-\gamma) < 0, \quad \text{aber} \quad \Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0,$$

dann convergiren die für u_{11}, u_{12} geltenden Entwickelungen VI, VIII für $x = 0$ und die für u_{01}, u_{02} geltenden Entwickelungen I, III für $x = 1$. Benutzt man in den Gleichungen (5) diese Entwickelungen, so ergeben sich, wenn man nach Division durch $x^{1-\gamma}$ $x = 0$ und dann $x = 1$ setzt, Ausdrücke für die Coefficienten der Substitution S_{10}, die mit den unter Festhaltung der Bedingungen (4) gefundenen durch leichte Umformungen in Uebereinstimmung gebracht werden können. So lautet z. B. die eine der Gleichungen (5) nach Division durch $x^{1-\gamma}$

$$F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma) = x^{\gamma-1}\alpha_{10}F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$+ \beta_{10}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

also folgt für $x = 0$, da wegen $\Re(1-\gamma) < 0$

$$\lim_{x=0} x^{\gamma-1} = 0$$

ist, für β_{10} der Ausdruck

$$\beta_{10} = f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma),$$

und dies stimmt mit dem oben gefundenen Werthe überein.

Hätte man

$$\Re(1 - \gamma) > 0 \quad \text{und} \quad \Re(\gamma - \alpha - \beta) < 0,$$

so würden in den Gleichungen (5) für u_{11}, u_{12} die Entwickelungen V, VII, dagegen für u_{01}, u_{02} die Entwickelungen II, IV zu nehmen sein; endlich müsste man sich, wenn

$$\Re(1 - \gamma) < 0 \quad \text{und} \quad \Re(\gamma - \alpha - \beta) < 0$$

wären, für u_{11}, u_{12} der Entwickelungen VI, VIII und für u_{01}, u_{02} der Entwickelungen II, IV bedienen; allemal würden sich für die Coefficienten der Substitution S_{10} die unter der Annahme (4) gefundenen Werthe ergeben. Diese Werthe sind also richtig, so lange die dabei in Betracht kommenden Π-Functionen einen Sinn haben. Die Function $f(\alpha, \beta, \gamma)$ ist (vergl. Nr. 75, S. 271), so lange keine der Grössen

$$\gamma - 1, \; \gamma - \alpha - \beta - 1, \; \gamma - \alpha - 1, \; \gamma - \beta - 1$$

gleich einer negativen ganzen Zahl ist, eine eindeutige Function der α, β, γ, die niemals verschwindet oder unendlich wird. Sie wird unendlich, wenn eine der Grössen

$$\gamma - 1, \; \gamma - \alpha - \beta - 1$$

ganzzahlig negativ ist, ohne dass eine der beiden Grössen

$$\gamma - \alpha - 1, \; \gamma - \beta - 1$$

eine negative ganze Zahl wäre; sie verschwindet, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Wir können folglich sagen: die für die Coefficienten der Gleichungen (5) gefundenen Ausdrücke bleiben gültig, so lange $\gamma - \alpha - \beta$ und $1 - \gamma$ nicht Null oder ganze Zahlen sind, insbesondere gilt die Gleichung (6), so lange $1 - \gamma$ nicht ganzzahlig und $\alpha + \beta - \gamma + 1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, und die Gleichung (7), so lange $1 - \gamma$ nicht ganzzahlig und $\gamma - \alpha - \beta + 1$ weder Null noch eine negative ganze Zahl ist. D. h. mit anderen Worten: die Gleichungen (6), (7) bleiben gültig, so lange die in denselben vorkommenden Potenzreihenentwickelungen der Integrale

$$u_{01}, \; u_{02}, \; u_{11}, \; u_{12}$$

einen Sinn haben.

Genau ebenso finden wir für die Coefficienten der Substitution

S_{x0} nebst den schon oben gefundenen Werthen der α_{x0}, γ_{x0} die Ausdrücke

$$\beta_{x0} = e^{(\gamma-\alpha-1)\pi i} f(1-\beta,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1),$$
$$\delta_{x0} = e^{(\gamma-\beta-1)\pi i} f(1-\alpha,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1);$$

die Gleichungen (2) nehmen hiernach die Form an

$$\begin{aligned} (8) \qquad u_{x1} &= e^{-\pi i \alpha} f(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1) u_{01} \\ &\quad + e^{(\gamma-\alpha-1)\pi i} f(1-\beta,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1) u_{02}, \\ (9) \qquad u_{x2} &= e^{-\pi i \beta} f(\beta,\ \gamma-\alpha,\ \beta-\alpha+1) u_{01} \\ &\quad + e^{(\gamma-\beta+1)} f(1-\alpha,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1) u_{02}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten, so lange $1-\gamma$ und $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig sind, insbesondere gilt (8), wenn $1-\gamma$ keine ganze Zahl und $\alpha-\beta+1$ nicht Null oder eine negative ganze Zahl ist und (9), wenn $1-\gamma$ keine ganze Zahl und $\beta-\alpha+1$ weder Null noch negativ ganzzahlig ist.

Jetzt hat auch die Herstellung aller anderen Uebergangssubstitutionen keinerlei Schwierigkeit: wir stellen die vollständigen Formeln zusammen und bemerken, dass jede einzelne der anzugebenden Gleichungen so lange gültig bleibt, als die Entwickelungen der in derselben vorkommenden Integrale, wie sie durch die Formeln I—XXIV geliefert werden, einen Sinn behalten.

Die inverse Substitution von S_{10}

$$S_{01} = S_{10}^{-1}$$

lautet

$$\begin{aligned} u_{01} &= f(\alpha,\ \beta,\ \gamma) u_{11} + f(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma) u_{12}, \\ u_{02} &= f(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma) u_{11} + f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma) u_{12}. \end{aligned}$$

Die Substitution

$$S_{1x} = S_{x1}^{-1}$$

ergiebt sich in der Form

$$\begin{aligned} u_{11} &= f(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) u_{x1} + f(\beta-\gamma+1, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1) u_{x2}, \\ u_{12} &= e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} f(\gamma-\beta,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1) u_{x1} \\ &\quad + e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} f(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1) u_{x2}, \end{aligned}$$

und S_{x1} selbst hat die Gestalt

$$u_{x1} = f(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1)u_{11}$$
$$+ e^{(\gamma - \alpha - \beta)\pi i} f(1 - \beta, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1)u_{12},$$
$$u_{x2} = f(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1)u_{11}$$
$$+ e^{(\gamma - \alpha - \beta)\pi i} f(1 - \alpha, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1)u_{12}.$$

Endlich finden wir für

$$S_{0x} = S_{x0}^{-1}$$

die Ausdrücke

$$u_{01} = e^{\alpha\pi i} f(\alpha, \gamma - \beta, \gamma)u_{x1} + e^{\beta\pi i} f(\gamma - \alpha, \beta, \gamma)u_{x2};$$
$$u_{02} = e^{(\alpha - \gamma + 1)\pi i} f(\alpha - \gamma + 1, 1 - \gamma, 2 - \gamma)u_{x1}$$
$$+ e^{(\beta - \gamma + 1)\pi i} f(1 - \alpha, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma)u_{x2}.$$

In den Fällen, wo eine oder mehrere der Grössen

$$1 - \gamma, \ \gamma - \alpha - \beta, \ \alpha - \beta$$

ganzzahlige Werthe haben, treten an die Stelle gewisser der sechs in Reihenform darstellbaren Integrale, die im allgemeinen Falle die canonischen Fundamentalsysteme repräsentiren, die in den Nummern 71, 72 aufgestellten mit Logarithmen behafteten Integrale; man kann dann auch für diese die Uebergangsubstitutionen herstellen, und zwar entweder direct, oder indem man in den oben aufgestellten Formeln einen Grenzübergang vornimmt; wir werden die betreffenden Ausdrücke an einer späteren Stelle geben, wo wir es mit wichtigen Specialfällen der Gauss'schen Differentialgleichung zu thun haben werden, für die gewisse der drei Wurzeldifferenzen der determinirenden Gleichungen gleich Null oder ganzen Zahlen sind.

130. **Schlussbemerkung.**

Die im gegenwärtigen Abschnitte entwickelten Methoden setzen uns in den Stand, für eine vorgelegte Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten den Verlauf eines durch seine Anfangswerthe gegebenen Integrals in der ganzen Ebene zu verfolgen. Wir bedürfen hierzu einerseits der in der Umgebung der einzelnen singulären Punkte gültigen Entwickelungen und andererseits des einem Fundamentalsysteme eigenthümlichen Systems von Fundamentalsubstitutionen. Das letztere setzt uns in den Stand, die Aenderungen zu verfolgen, welche ein Integral oder allgemein ein Fundamentalsystem von Integralen erfährt, wenn die unabhängige Variable x Wege beschreibt, die in der mehrfach zusammenhängenden Fläche T verlaufen, wo T aus der x-Ebene hervorgeht, indem wir die wesentlichen singulären Punkte von derselben ausschliessen. Wir können also kurz sagen, das System von Fundamentalsubstitutionen bestimmt uns die Verzweigung eines Fundamentalsystems, ebenso wie die zu einem algebraischen Gebilde gehörige Riemann'sche Fläche die Verzweigung der betreffenden algebraischen Function darstellt. Aehnlich, wie nun alle tieferen Fragen der Theorie der algebraischen Functionen an die Betrachtung der Riemann'schen Fläche, d. h. der Verzweigungsart der algebraischen Function anknüpfen, hat eine Reihe von Problemen, die für die Integrale linearer Differentialgleichungen aufgeworfen wurden, ein eingehenderes Studium des Systems der Fundamentalsubstitutionen erforderlich gemacht. Dabei hat es sich als nothwendig erwiesen, die Gesammtheit aller Substitutionen zu betrachten, die durch alle möglichen Umläufe der unabhängigen Variabeln entstehen, d. h. die durch Composition aus den Fundamentalsubstitutionen hervorgehen; man hat, aus später noch ausführlich darzulegenden Gründen, diese Gesammtheit die Gruppe der Differentialgleichung genannt.

Durch die Aufgaben, die das Jacobi'sche Umkehrproblem der Theorie der algebraischen Functionen stellte, sah sich Riemann veranlasst, die Frage nach der Gesammtheit aller algebraischen Functionen aufzuwerfen, deren Riemann'sche Flächen eindeutig conform auf einander bezogen werden können, oder die — wie man sich auch ausdrücken kann, indem man nur den Begriff der Riemann'schen Fläche in etwas allgemeinerer Weise fasst — dieselbe Riemann-sche Fläche haben. Diese Frage führt unmittelbar dazu, zu untersuchen, wie man algebraische Functionen construiren kann, die zu einer gegebenen Riemann'schen Fläche gehören, sie führt also auf die von Riemann zum Ausgangspunkte gewählte Problemstellung. Auch in der Theorie der linearen Differentialgleichungen waren es vorwiegend die Umkehrungsfragen, die zu ähnlichen Problemen Veranlassung gaben wie die, welche Riemann in der Theorie der algebraischen Functionen behandelt hatte. Man erkannte, dass gewisse Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen einzig und allein von der Gruppe der Differentialgleichung abhängen und warf dadurch die Frage auf nach der Gesammtheit der Differentialgleichungen, die dieselbe Gruppe haben und dem entsprechend nach der Bestimmung einer Differentialgleichung, deren Gruppe gegeben ist. Riemann selbst hatte, wie aus den aus seinem Nachlasse herausgegebenen Bemerkungen hervorgeht, ähnlich wie für seine Theorie der algebraischen Functionen, so auch für die von ihm geplante Begründung einer Theorie der linearen Differentialgleichungen (vergl. die historische Einleitung, Nr. 3), gerade die Bestimmung einer Differentialgleichung durch die Gruppe zum Ausgangspunkte gewählt: man konnte aber dem, was von Riemann's hierauf bezüglichen Gedanken in die Oeffentlichkeit gelangt ist, wenig mehr als die Bezeichnung entnehmen, welche die sämmtlichen Differentialgleichungen, die eine und dieselbe Gruppe besitzen, in eine Classe zusammenfasst. Wir werden in den folgenden Abschnitten zuvörderst den Gruppenbegriff erörtern und zwar in der allgemeinsten Form, in der er für unsere Theorie in Frage kommt; dann soll die Behandlung der eben angedeuteten Probleme in Angriff genommen werden. Dieselbe wird insbesondere auch zu einer Reihe von gewissen speciellen Typen linearer Differentialgleichungen führen, deren Untersuchung an sich von hohem analytischen Interesse ist, die aber auch für die allgemeine Theorie die grösste Wichtigkeit erlangt haben.

Berichtigungen.

S. 29, Zeile 10 v. o. ist zwischen den Worten „durch“ und „particuläre“ einzuschalten „n“.

S. 143—145 kommt in einigen Formeln i in zweierlei Bedeutung vor; einmal als Index, wo es also einen der Werthe $1, 2, \cdots n$ bedeutet, das anderemal aber als Factor in $2\pi i$, wo es wie üblich gleich $\sqrt{-1}$ zu setzen ist.

S. 161, Zeile 9 v. o. ist zu setzen $f_0^{(m-1)}$ an die Stelle von $f^{(m-1)}$.

S. 186, Zeile 9 v. o. ist an Stelle von „nur“ zu lesen „nun“.

S. 189, Zeile 13 v. o. ist zwischen (0) und vom einzuschalten „mindestens“.

S. 189, Zeile 8 v. u. ist hinzuzufügen: Ist (0) von höherem Range (was für $i > 2$ vorkommen kann), so sind diese Bedingungen zwar hinreichend aber nicht nothwendig.

S. 189, Zeile 2 v. u. ist an Stelle von $h_{r_0 - r_{\varkappa-1}}(\varrho + r_{\varkappa-1} - r_\varkappa)$ zu setzen $h_{r_0 - r_{\varkappa-1}}(r_{\varkappa-1})$.

S. 200, Zeile 3 v. o. ist zu setzen $\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha$ an die Stelle von $\sum_{n=0}^{n} r_\alpha$.