







Digitized by the Internet Archive  
in 2009 with funding from  
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/introductionla01eule>

Essai  
10

# INTRODUCTION

A

## L'ANALYSE INFINITÉSIMALE , PAR LÉONARD EULER;

Traduite du latin en français , avec des Notes et des Éclaircissemens,

PAR J. B. LABEY ,

Professeur de Mathématiques aux Écoles Centrales du Département de la Seine.

### TOME PREMIER.

---

(Imprimé en 1797.)

**A PARIS ,**

Chez BACHELIER, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, du Bureau  
des Longitudes, etc. ,

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1855.

24045  
- 41 81 92

QA  
35  
E874  
1835  
t.1



---

## A V I S.

ON paroïssoit désirer, il y a long-temps, une Traduction complète de l'Introduction à l'Analyse infinitésimale d'EULER, tant à cause de la difficulté de se procurer cet Ouvrage devenu rare depuis plusieurs années, que parce que beaucoup de jeunes Gens qui se livrent à l'étude des Mathématiques, n'entendent pas la langue dans laquelle il a été écrit. Je désire, en publiant aujourd'hui cette Traduction, avoir rempli l'attente & le vœu du Public. Au moins n'ai-je rien négligé pour la rendre la plus claire possible, & la mettre à la portée de ceux même qui ne sauroient que les Éléments ordinaires d'Algèbre. C'est dans cette vue que j'ai ajouté quelques éclaircissements & quelques notes sur différents endroits de l'Ouvrage, soit pour en faciliter l'intelligence, soit pour suppléer à des démonstrations, que l'Auteur renvoie quelquefois au Calcul différentiel. Ces notes, étant pour la plupart de simples explications, qui ne peuvent intéresser que ceux qui sont moins avancés dans la connoissance de l'Analyse, devoient être placées naturellement au bas des pages, où se trouvent les articles, auxquels elles appartiennent ;

mais comme les premières feuilles ont été imprimées, sans qu'on ait eu cette attention, j'ai été obligé de renvoyer le tout à la fin de l'Ouvrage.

Si le Public accueille favorablement la Traduction que je lui présente aujourd'hui, & manifeste le desir d'avoir dans la même langue les autres Traités du même Auteur, qui font la suite de celui-ci, savoir, son *Traité de Calcul différentiel*, celui de *Calcul intégral*, & même sa *Théorie du Mouvement des Corps durs*, j'en publierai successivement la traduction avec des additions, qui feront connoître les progrès que l'Analyse a faits depuis l'époque où ces Ouvrages ont paru. En joignant à cette précieuse collection la Mécanique analytique du C. Lagrange & la Mécanique céleste que le C. Laplace se propose de faire bientôt imprimer, on aura en français le corps de Doctrine analytique le plus complet qui ait paru jusqu'ici, & qui réunira ce que l'Analyse offre de plus ingénieux dans la théorie & de plus sublime dans l'application.

---

---

## PRÉFACE DE L'AUTEUR.

J'AI vu souvent que les difficultés, qui arrêtent les Commençans, lorsqu'ils se livrent à l'étude du Calcul infinitésimal, viennent en très-grande partie de ce qu'ils veulent s'élever à la connoissance de cette nouvelle branche de l'Analyse, n'ayant encore qu'une teinture assez légère de l'Algèbre commune. Il arrive de-là que non-seulement ils se trouvent arrêtés dès les premiers pas qu'ils font, mais encore qu'ils se forment des idées fausses de l'infini, dont la vraie notion doit les guider dans leurs opérations & dans l'objet de leurs recherches. Or quoique l'Analyse infinitésimale n'exige pas à la rigueur une connoissance approfondie de l'Analyse ordinaire, & de tous les moyens ingénieux qu'on a trouvés jusqu'à présent pour la perfectionner, on ne peut cependant nier qu'il y ait beaucoup de questions dont le développement est propre à préparer les esprits à l'étude de cette science sublime, & qu'on chercheroit en vain dans la plupart des Traités élémentaires d'Algèbre, ou qui, si elles s'y trouvent, y sont traitées d'une manière assez peu exacte. C'est pourquoi je ne doute pas que les matières que j'ai rassemblées dans les deux Livres qui composent cet Ouvrage, ne suppléent abondamment à ce défaut. Car non-seulement j'ai fait en sorte de ne rien omettre de ce qu'exige absolument l'Analyse des infinis, & de l'exposer avec plus d'étendue & plus de clarté qu'on ne le fait ordinairement; mais j'ai de plus résolu un assez bon nombre de questions, qui mettront les Lecteurs à portée de se familiariser insensiblement, & en quelque sorte contre leur attente avec l'idée de l'infini. J'ai

aussi traité par les méthodes de l'Algèbre commune plusieurs questions, qui sont ordinairement l'objet de l'Analyse infinitésimale, afin de rendre plus sensible & plus frappant l'accord parfait qu'on remarquera dans la suite entre les deux méthodes.

J'ai divisé ce Traité en deux Livres. Le premier embrasse ce qui a rapport à l'Analyse pure. Dans le second je développe plusieurs questions géométriques, dont la connoissance m'a paru nécessaire ; parce qu'ordinairement en traitant de l'Analyse infinitésimale, on en fait voir en même temps l'application à la Géométrie. J'ai supposé par-tout la connoissance des premiers Éléments ; & j'ai cru ne devoir expliquer dans ces deux Livres que ce qu'on ne trouveroit pas ailleurs, ou qui du moins *seroit traité d'une manière*, qui m'a semblé moins avantageuse, ou bien qui supposeroit des principes différents des miens.

Je me suis sur-tout étendu dans le premier Livre sur les fonctions de variables, parce qu'elles sont l'objet de l'Analyse infinitésimale. J'y ai enseigné la manière de les transformer, de les décomposer, & de les réduire en séries infinies. J'ai fait l'énumération de plusieurs especes, auxquelles on doit avoir égard, particulièrement dans la haute Analyse. Je les ai d'abord divisées en algébriques & en transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entr'elles par les opérations ordinaires de l'Algèbre, & les secondes dépendent d'autres opérations, ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois. La subdivision des fonctions algébriques, qui s'offre la première, est celle en rationnelles & en irrationnelles. Celles-là peuvent être décomposées ou en parties plus simples, ou en facteurs ; j'ai fourni les moyens de les ramener à cet état de simplicité ; & c'est une opération dont

le Calcul intégral tire un très-grand secours. J'ai fait voir ensuite comment, par des substitutions convenables, on pouvoit donner aux autres une forme rationnelle. Ces especes de fonctions peuvent être converties l'une & l'autre en séries infinies. Les fonctions transcendentes sont susceptibles de la même conversion, & même on la leur applique avec le plus grand succès. Tout le monde fait d'ailleurs de quels progrès la haute Analyse est redevable à la doctrine des séries infinies. Aussi ai-je ajouté quelques Chapitres, où je me suis attaché à découvrir les propriétés, & à trouver les sommes de plusieurs séries infinies, dont quelques-unes paroissent de nature à faire croire presque qu'elles ne pourroient être trouvées sans le secours du Calcul infinitésimal. Telles sont les séries, dont les sommes sont exprimées ou par les Logarithmes, ou par des arcs de Cercle. Ces sortes de quantités, qui sont transcendentes, puisqu'elles sont représentées par la surface de l'Hyperbole & du Cercle, font partie des matieres qu'on a coutume de traiter dans l'Analyse infinitésimale. Passant ensuite des puissances aux quantités exponentielles, qui sont elles-mêmes des puissances, dont les exposants sont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle & à la fois féconde des Logarithmes; d'où il m'a été facile de conclure leurs différens usages, en même temps que j'ai pu en déduire toutes les séries infinies, qui représentent ordinairement ces quantités; ce qui m'a donné enfin un moyen très-expéditif de construire les Tables de Logarithmes. Je me suis semblablement conduit dans l'examen des arcs de Cercle; genre de quantités, qui, quoique très-différent des Logarithmes, leur est cependant tellement lié, que lorsqu'une de ces quantités paroît devenir imaginaire, elle se change en l'autre. Après avoir rappelé ce que la Géométrie nous apprend sur la valeur des sinus

& des cosinus, tant multiples que sous-multiples, j'ai tiré de l'expression du sinus ou du cosinus d'un arc quelconque celle du sinus & du cosinus d'un arc très-petit & presque nul, ce qui m'a conduit à des séries infinies; & comme un tel arc est égal à son sinus, tandis que son cosinus est égal au rayon, j'ai pu, à l'aide des séries infinies, comparer un arc quelconque avec son sinus & son cosinus; & alors il s'est présenté naturellement une si grande variété d'expressions, soit finies soit infinies pour ces sortes de quantités, que pour les connoître à fond, on pourroit se dispenser de recourir au Calcul infinitésimal. De plus, comme les Logarithmes exigent un Algorithme particulier, dont l'usage est très-connu dans toute l'Analyse; j'ai ramené de même les quantités circulaires à une certaine forme de calcul, qui fait qu'on peut les employer aussi commodément que les Logarithmes & les quantités algébriques même. Il n'est pas douteux qu'on en doive retirer le plus grand avantage pour la solution de questions très-difficiles; on sera à portée d'en juger, en jettant les yeux sur quelques Chapitres de ce Livre, & c'est ce que d'ailleurs il seroit possible de prouver par plusieurs essais tirés de l'Analyse des infinis, s'ils n'étoient pas déjà suffisamment connus, & s'ils ne se multiplioient pas de jour en jour. Cette recherche m'a été en particulier d'un grand secours pour décomposer les fonctions fractionnaires en facteurs réels. Ce sujet m'a paru mériter quelques détails, à cause de sa grande utilité dans le Calcul intégral. J'ai examiné ensuite les séries infinies, qui résultent du développement de ces sortes de fonctions, & qui sont connues sous le nom de séries récurrentes. J'ai donné la manière de les sommer, d'en trouver les termes généraux, & d'en découvrir plusieurs autres propriétés remarquables; & comme je suis arrivé naturellement à ces résultats par une simple

décomposition

décomposition en facteurs, j'ai voulu voir comment on pouvoit réciproquement convertir en séries des produits composés d'un certain nombre, & même d'un nombre infini de facteurs. Ce travail m'a non-seulement mené à la connoissance d'une quantité innombrable de séries, mais, parce qu'on pouvoit de cette maniere changer les séries en produits composés d'une infinité de facteurs, il m'a de plus fait trouver des expressions numériques assez commodes, à l'aide desquelles il est facile de calculer les Logarithmes des sinus, des cosinus & des tangentes. La même source m'a fourni la solution de plusieurs questions, qui regardent la partition des nombres, & qui sembleroient, sans ce secours, être au-dessus des forces de l'Analyse. Cette abondance de matières auroit pu facilement fournir plusieurs volumes; mais autant qu'il m'a été possible, j'ai voulu être concis, sans pourtant cesser d'être clair, pour laisser à l'industrie du Lecteur un champ plus vaste, où il pourra exercer ses forces & reculer les bornes de l'Analyse; car je ne crains pas d'avancer, qu'indépendamment des choses neuves que ce Livre renferme, on y trouvera des sources où peuvent être puisées encore un grand nombre de belles découvertes.

J'ai suivi la même marche dans le second Livre, où je traite de ce qui a rapport à la Géométrie des Courbes. Mais, avant que de parler des Sections coniques, qui sont ailleurs presque l'unique objet de cette branche des Mathématiques, j'ai donné une théorie des Courbes en général, qu'on pût employer utilement pour en connoître la nature. Je n'ai eu besoin pour cela que de l'équation de la Courbe, qui m'a servi à en déterminer la figure, & à en déduire les principales propriétés. Je crois avoir entièrement rempli mon but, sur-tout dans les Sections coniques, qui jusqu'ici avoient été traitées par la seule Géométrie, ou quelquefois

par l'Analyse, mais d'une maniere trop imparfaite & moins naturelle. Ainsi après avoir déduit de l'équation générale des lignes du second ordre leurs propriétés générales, j'ai sous-divisé ces lignes en genres ou especes, examinant si elles avoient des branches infinies, ou si la courbe entiere étoit renfermée dans un espace fini. Mais dans le premier cas, il falloit encore avoir égard au nombre & à la nature de leurs branches, & s'assurer si elles avoient des asymptotes rectilignes ou non. J'ai obtenu de cette maniere les trois especes connues de Sections coniques. La premiere est l'ellypse qui est renfermée toute entiere dans un espace fini; la seconde est l'hyperbole, dont les quatre branches s'éloignent à l'infini en s'approchant de plus en plus de deux lignes droites; & la troisieme espece est la parabole composée de deux branches infinies sans asymptotes. Je me suis conduit d'une maniere semblable à l'égard des lignes du troisieme ordre. Après en avoir exposé les propriétés générales, je les ai divisées en seize genres, auxquels j'ai rapporté les soixante-douze especes de NEWTON; j'ai exposé ma méthode avec tant de clarté qu'on pourroit, par son moyen, diviser sans aucune peine toutes les lignes en genres, en passant successivement d'un ordre au suivant. J'en ai fait l'essai pour les lignes du quatrieme ordre. Après avoir fini ce que j'avois à dire sur les ordres des lignes, je retourne à la recherche des affections générales de toutes les lignes. J'explique la méthode de trouver les tangentes des Courbes, leurs normales & leur courbure, qui s'estime ordinairement par la grandeur du rayon osculateur: quoique ces recherches paroissent à présent du ressort du Calcul différentiel, j'ai cru cependant utile de m'en occuper ici sans emprunter d'autres secours, que celui de l'Algèbre commune, pour faciliter d'autant plus dans la suite le passage



de l'Analyse des quantités finies à celle des quantités infinies. Je me suis aussi arrêté à l'examen des points d'inflexion, des points de rebroussement, des points doubles, ou multiples des Courbes, & j'ai enseigné la maniere de déduire facilement ces points singuliers des équations mêmes. J'avoue cependant qu'il est beaucoup plus facile de résoudre ces problèmes par le moyen du Calcul différentiel. J'ai encore agité la question du point de rebroussement de la seconde espece, où deux arcs, qui se terminent en pointe, tournent leur convexité du même côté; & il me semble l'avoir traitée assez à fond pour ne laisser plus aucun doute sur cet objet. Enfin j'ai ajouté quelques Chapitres, qui apprennent à trouver des Courbes, qui sont douées de propriétés particulieres & données; & j'ai terminé le second Livre par la solution de plusieurs problèmes relatifs à certaines sections du Cercle. Après avoir ainsi parcouru les différents objets de Géométrie plane, dont la connoissance m'a paru utile pour faciliter l'étude de l'Analyse infinitésimale, j'ai ajouté en forme d'Appendice une théorie analytique des solides & de leur surface, & j'ai fait voir comment on pouvoit exprimer la nature d'une surface quelconque à l'aide d'une équation entre trois variables. Ensuite, après avoir classé les surfaces à la maniere des lignes courbes suivant le nombre de dimensions, que forment les variables dans l'équation, j'ai fait voir que la seule superficie plane appartenoit au premier ordre. Quant aux surfaces du second ordre, je les ai divisées en six especes, eu égard à leurs parties, qui s'étendent à l'infini. On pourra continuer une division semblable pour les ordres ultérieurs. J'ai considéré aussi les intersections que forment entr'elles deux surfaces; & comme elles donnent le plus souvent des Courbes, qui ne sont pas situées dans un même plan, j'ai indiqué la maniere de

les représenter par des équations. Enfin j'ai déterminé la position des plans tangents, & celle des droites, qui sont perpendiculaires aux surfaces.

Au reste, comme une grande partie de ces objets a déjà été traitée, j'aurois à m'excuser de n'avoir pas toujours fait mention honorable de ceux qui m'ont précédé dans ce même genre de travail; mais outre que j'ai voulu me resserrer dans l'espace le plus étroit possible, le détail historique de chaque problème m'auroit mené trop loin, & auroit grossi considérablement ce Traité. Cependant, comme la plupart des questions, qui ont déjà été résolues ailleurs, doivent ici leur solution à d'autres principes, je serois en droit d'en revendiquer une bonne partie. Quoi qu'il en soit, j'espère que ces différents objets, & particulièrement ceux qui paroissent ici pour la première fois, feront quelque plaisir à ceux qui aiment ce genre d'étude.



# TABLE DES CHAPITRES

du Tome premier.

CHAP. I.	<i>Des Fonctions en général,</i>	Pag. 1
CHAP. II.	<i>De la transformation des Fonctions,</i>	14
CHAP. III.	<i>De la transformation des Fonctions par substitution,</i>	35
CHAP. IV.	<i>Du développement des Fonctions en Séries infinies,</i>	45
CHAP. V.	<i>Des Fonctions de deux ou plusieurs variables,</i>	59
CHAP. VI.	<i>Des Quantités exponentielles &amp; des Logarithmes,</i>	69
CHAP. VII.	<i>Du développement des Quantités exponentielles &amp; logarithmiques en Séries,</i>	84
CHAP. VIII.	<i>Des Quantités transcendantes qui naissent du cercle,</i>	92
CHAP. IX.	<i>De la recherche des Facteurs trinomes,</i>	106
CHAP. X.	<i>De l'usage des Facteurs trouvés auparavant pour la sommation des Séries infinies,</i>	126
CHAP. XI.	<i>Des autres expressions infinies des Arcs &amp; des Sinus,</i>	141
CHAP. XII.	<i>Du développement réel des Fonctions fractionnaires,</i>	156

xiv	TABLE DES CHAPITRES.	
CHAP.	XIII. <i>Des Séries récurrentes ,</i>	Pag. 168
CHAP.	XIV. <i>De la Multiplication &amp; de la Division des Angles ,</i>	187
CHAP.	XV. <i>Des Séries résultantes du développe- ment des Facteurs ,</i>	206
CHAP.	XVI. <i>De la Partition des Nombres ,</i>	234
CHAP.	XVII. <i>De l'usage des Séries récurrentes dans la recherche des racines des Équa- tions ,</i>	257
CHAP.	XVIII. <i>Des Fractions continues ,</i>	277
	NOTES & ÉCLAIRCISSEMENTS.	305

Fin de la Table des Chapitres du Tome premier.

## ERRATA du Tome premier.

PAGE 10, lig. 26, au lieu de  $\zeta$ , mettez  $Z$

P. 18, l. 13, au lieu de  $+q\sqrt{-2t+2\sqrt{(t^2+u^2)}}$ , mettez  $-q\sqrt{-2t+2\sqrt{(t^2+u^2)}}$ ;

P. 21, lig. 10, au lieu de  $\pm v \zeta$ , mettez  $\pm v \xi$

*Ibid.* lig. 19, au lieu de  $Z + 0$ , mettez  $\zeta + 0$ ,

*Ibid.* lig. 34, au lieu de dans le numérateur que dans le dénominateur, mettez dans le dénominateur que dans le numérateur,

P. 26, lig. 24, au lieu de égale, mettez égalé

P. 29, lig. 8, au lieu de carré de  $\zeta \zeta$ , mettez carré  $\zeta \zeta$

*Ibid.* lig. 13, au lieu de de  $\zeta$ , mettez  $\zeta$ ,

P. 36, lig. 7, au lieu de  $(a+bz)^m$ , mettez  $(a+bz)^{\frac{m}{n}}$ ,

*Ibid.* lig. 22, au lieu de  $\left(\frac{a+b\zeta}{f+g\zeta}\right)^{\frac{m}{n}}$ , mettez  $\left(\frac{a+b\xi}{f+g\xi}\right)^{\frac{m}{n}}$

P. 41, lig. 7, au lieu de  $by \zeta^{\frac{6}{5}} P$ , mettez  $by \xi^{\frac{6}{5}} \frac{q}{P}$

*Ibid.* lig. dernière, au lieu de  $b x^{\frac{6}{5}}$ , mettez  $b x^{\frac{6}{5}}$

P. 42, lig. 9, au lieu de  $Cx^y$ , mettez  $Cx^y + \&c.$

P. 43, lig. 6, au lieu de qu'elles, mettez quelles

P. 44, lig. 21, au lieu de par, mettez pour

*Ibid.* lig. 22, au lieu de  $+ \sqrt{[(exx+fx+g)^2+]}$ , mettez  $\pm \sqrt{[(exx+fx+g)^2+]}$

P. 46, lig. 18, au lieu de nomme, mettez se nomme

P. 49, lig. 6, au lieu de  $Q \& R$ , mettez  $Q \& P.$

P. 50, lig. 27, au lieu de  $6a^{4.2}$ , mettez  $5a^{4.2}$

P. 52, lig. 14, au lieu de étoit, mettez étant

*Ibid.* à la marge, mettez  $(l)$ .

P. 54, lig. 11, au lieu de  $xx-x+1$ , mettez  $xx-x-1$

*Ibid.* avant-dernière ligne, au lieu de  $+ \&c.$  mettez  $-\&c.$

*Ibid.* à la marge, mettez  $(m)$ ,

P. 56, lig. 17, au lieu de  $+\frac{(m-1)}{1}a\zeta^2$ , mettez  $+\frac{(m-1)}{1}e\zeta^2$

P. 58, à la marge, mettez  $(n)$ ,

P. 64, lig. 13, au lieu de ou non, soit, mettez ou non. Soit

P. 65, lig. 15, au lieu de  $\zeta^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{u+\sqrt{(uu+1)}}{\sqrt{(u^3+1)}}\right)$ , mettez  $\zeta^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{u+\sqrt{(uu+1)}}{\sqrt{(u^3+1)}}\right)$

P. 72, lig. 10, au lieu de  $a^{-\zeta}\zeta$ , mettez  $a^{-2\zeta}$

P. 76, lig. 28, au lieu de la fraction  $\frac{P}{q}$ , mettez la fraction  $\frac{q}{P}$ .

P. 78, lig. 28, au lieu de approchée  $2^{\frac{7}{13}}$ , mettez approchée de  $2^{\frac{7}{12}}$ .

P. 90, lig. 9, au lieu de  $+\frac{2}{7 \cdot 3^7}$ , mettez  $+\frac{2}{7 \cdot 5^7}$

*Ibid.* lig. 10, au lieu de  $\frac{2}{3 \cdot 7^2} + \frac{2}{5 \cdot 7^3} + \frac{2}{7 \cdot 7^5}$ , mettez  $\frac{2}{3 \cdot 7^2} + \frac{2}{7 \cdot 7^5} + \frac{2}{5 \cdot 7^7}$

P. 94, lig. 8, au lieu de  $= \zeta$ , mettez  $-\zeta$ ,

P. 95, lig. 4, au lieu de  $-\sin.(2\zeta+\zeta)$ , mettez  $-\sin.(2y+\zeta)$ ,

*Ibid.* lig. 10, au lieu de  $\sin.(y+\zeta)$ , mettez  $\sin.(y-\zeta)$ ,

P. 100, lig. 8, au lieu de  $v - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ , mettez  $v - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ .

P. 103, lig. 12, au lieu de  $\sqrt{-1}$ . *fin.*  $\zeta$ , mettez  $\sqrt{-1}$ . *fin.*  $\zeta$ ;  
 P. 109, lig. 10, 11, 15 & 16, la lettre  $\phi$  doit être par-tout hors de la parenthèse.

P. 113, lig. 16, au lieu de  $n + \theta n$ , mettez  $n + \theta \zeta^n$ .  
*Ibid.* lig. 17, au lieu de  $-2pq \text{ cof. } \phi$ , mettez  $-2pq \zeta \text{ cof. } \phi$

P. 117, lig. 10, au lieu de  $= 2 \left( \frac{x}{i} + \right)$ , mettez  $2 \left( \frac{x}{1} + \right)$   
*Ibid.* lig. 16, au lieu de  $\frac{4 k k \pi \tau x x}{i^4}$ , mettez  $\frac{4 k k \pi \tau x x}{i^4}$

P. 119, lig. 1, au lieu de  $+$   $\frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5}$   $+$ , mettez  $\frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5}$   $-$

P. 132, lig. 16, au lieu de  $-\frac{1}{(3n-m)^3} + \frac{1}{(5n+m)^3}$ , mettez  $\frac{1}{(3n+m)^3} + \frac{1}{(5n-m)^3}$

P. 139, lig. 19, au lieu de dans cette série, mettez dans l'autre série

P. 140, lig. 21, au lieu de  $-e^{\pi\sqrt{-b}}$ , mettez  $-e^{\pi\sqrt{b}}$

P. 141, lig. 3, au lieu de  $(e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}$ , mettez  $(e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}$

P. 142, lig. 3, au lieu de  $\pm 2^{-1}$ , mettez  $\pm 2^{n-1}$

P. 193, lig. 2, au lieu de  $= 2^{n+1}$ , mettez  $= 2^{n-1}$

P. 195, lig. 3, au lieu de  $2^{n-9} y^{-8}$ , mettez  $2^{n-9} y^{n-8}$

P. 198, lig. 5, au lieu de  $-\text{cof.} \left( \frac{\zeta\pi}{n} + \zeta \right)$ , mettez  $-\text{cof.} \left( \frac{3\pi}{n} + \zeta \right)$

P. 205, lig. 16, au lieu de  $+\text{cof.} (a - \zeta)$ , mettez  $+\text{cof.} (a + \zeta)$ .

P. 206, lig. 3, au lieu de  $\text{cof. } 3\zeta$ , mettez  $\text{cof. } 2\zeta$

P. 207, lig. 28, au lieu de  $+ 13 + 15$ , mettez  $+ 13 + 14 + 15$

P. 218, lig. 15, au lieu de  $+\frac{1}{7^5}$ , mettez  $+\frac{1}{7^7}$

P. 219, lig. 21, au lieu de  $S = \frac{1}{2}$ , mettez  $S = \frac{1}{2^m}$

P. 227, lig. 21, au lieu de  $\frac{1}{7} = \frac{1}{8}$ , mettez  $\frac{1}{7} = \frac{1}{8}$

P. 269, lig. 22, au lieu de plus grande, mettez plus petite

P. 279, lig. 22, au lieu de  $+\omega\gamma$ , mettez  $+\alpha\gamma$

P. 281, lig. 20, au lieu de  $(bc + b)$ , mettez  $(bc + c)$

P. 283, lig. 2, au lieu de  $DEef$ , mettez  $CEef$

P. 284, lig. 7, au lieu de  $\frac{a^6\gamma\epsilon}{QS}$ , mettez  $\frac{a^6\gamma e}{QS}$

P. 311, lig. 2, au lieu de  $-p\zeta\zeta$ , mettez  $-r\zeta\zeta$

P. 316, lig. 22, au lieu de  $+\&c]$ , mettez le crochet après  $+\&c$ , qui termine la ligne 21,

P. 317, lig. 23, au lieu de l'exposant de  $Z$ , mettez l'exposant de  $\zeta$

P. 323, lig. 4, au lieu de des fractions, mettez des fonctions

P. 337, lig. 11, au lieu de  $\frac{1}{(1 - \zeta e^{\phi\sqrt{-1}}) (1 - \zeta e^{-\phi\sqrt{-1}})^i}$ , mettez

$\frac{1}{(1 - \zeta e^{\phi\sqrt{-1}})^i (1 - \zeta e^{-\phi\sqrt{-1}})^i}$

P. 338, lig. 7, au lieu de  $(1 + r - 3)$ , mettez  $(i + r - 3)$

*Ibid.* lig. 8, au lieu de  $(1 + r - 4)$ , mettez  $(i + r - 4)$

*Ibid.* lig. 21, au lieu de  $i(i+i)$ , mettez  $i(i+1)$

P. 339, l. 24, au lieu de  $(i+r-4)(2i-2)(2i-3)$ , mettez  $(i+r-4)(2i-1)(2i-2)(2i-3)$

P. 343, lig. 20, au lieu de  $i.(i+i)$ , mettez  $i.(i+1)$ .

Nota. Il s'est glissé aussi quelques incorrections de style, que j'ai cru inutile de rapporter ici.

INTRODUCTION

---

# A B O N A P A R T E.

---

C I T O Y E N G É N É R A L,

*C'est moins au jeune Héros qui a conquis l'Italie & pacifié le Continent, qu'au Philosophe ami & protecteur éclairé des Sciences & des Arts, que j'adresse cette Traduction. Le goût des Mathématiques, que j'ai été à portée de reconnoître en vous dans un âge moins avancé, & que vous avez conservé au milieu des travaux glorieux qui assurent à votre nom l'immortalité, m'a paru un titre suffisant pour vous en faire l'hommage. En l'agréant, vous mettez le comble à mes vœux,*

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I.

\* a

*puisque vous m'offrez l'heureuse occasion de vous exprimer  
à la fois les sentimens de ma reconnoissance, & ceux  
d'admiration que je partage avec toute l'Europe.*

**L A B E Y.**

**AVIS.**



# INTRODUCTION

A

## L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

### LIVRE PREMIER,

CONTENANT l'Explication des diverses sortes de Fonctions, leur résolution en Facteurs & leur développement en Séries infinies; avec la théorie des Logarithmes, celle des Arcs de cercle, de leurs Sinus & de leurs Tangentes, & plusieurs autres Questions propres à faciliter l'étude de l'Analyse infinitésimale.

---

### CHAPITRE PREMIER.

#### *Des Fonctions en général.*

1. *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.*

Tels sont les nombres de toute espèce, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. Lorsqu'il s'agit de représenter ces sortes de quantités par des caractères, on se sert des premières lettres de l'Alphabet *a, b, c,* &c. A la vérité, dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premières lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le sont pas, par les dernières; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie; on y envisage les quantités sous un autre aspect

EULER, *Introduction à l'Anal. infn.* Tome I.

A

particulier, les uns étant considérées comme constantes, & les autres comme variables.

2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'en suit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espèce à l'égard des individus; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernières lettres de l'Alphabet  $z$ ,  $y$ ,  $x$ , &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manières, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable  $z$  contiendra des quantités constantes, est une fonction de  $z$ . Par exemple,  $a + 3z$ ;  $az - 4zz$ ;  $az + b\sqrt{aa - zz}$ ;  $cz$ ; &c, sont des fonctions de  $z$ .

5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction  $\sqrt{9 - zz}$  ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de  $z$ ; cependant, en introduisant pour  $z$  des nombres imaginaires, tels que  $\sqrt{-1}$ , il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule  $\sqrt{9 - zz}$ . Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme  $z^0$ ;  $1z$ ;  $\frac{a^2 - az}{a - z}$ . Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

6. La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction; la Multiplication & la Division; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Equations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendentes: comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines especes de fonctions; savoir, les Multiples  $2z$ ;  $3z$ ;  $\frac{1}{2}z$ ;  $az$ , &c. & les Puissances de  $z$ ; comme  $z^2$ ;  $z^3$ ;  $z^{\frac{1}{2}}$ ;  $z^{-1}$ ; &c. quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendentes; les premières sont formées par des opérations algébriques

seulement, & les dernières supposent pour leur formation des opérations transcendantes.

Les multiples & les puissances de  $z$  sont donc des fonctions algébriques, ainsi que toutes les expressions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé; telle est la quantité  $\frac{a + b\sqrt[n]{z} - c\sqrt{(2z - \sqrt{z})}}{aa\sqrt{z} - 3b\sqrt{z}}$ . Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement; telle seroit la fonction  $Z$  de  $z$ , si elle étoit exprimée par l'équation  $Z^3 = a\sqrt{z}Z^3 - b\sqrt{z}^3Z^2 + c\sqrt{z}^3Z - 1$ . Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que  $Z$  est égal à une expression composée de la variable  $z$  & de constantes, & que par conséquent  $Z$  est une fonction quelconque de  $z$ . Pour avoir une fonction transcendante, il ne s'agit pas qu'il entre dans son expression une opération transcendante, il faut de plus qu'elle affecte la variable; car si elle n'affectoit que des constantes, la fonction n'en seroit pas moins censée algébrique. Par exemple, si  $c$  désigne la circonférence d'un cercle, dont le rayon = 1, la quantité  $c$  sera bien une quantité transcendante; cependant ces expressions  $c + z$ ;  $c\sqrt{z}$ ;  $4\sqrt{z}^c$ , &c. seront des fonctions algébriques de  $z$ . Car il importe peu de savoir si ces sortes d'expressions  $z^c$  doivent être mises au nombre des fonctions algébriques ou non. Il y a aussi des Géomètres qui ont mieux aimé donner aux puissances de  $z$ , dont les exposans étoient des nombres irrationnels, comme  $z^{\sqrt{2}}$ , le nom de fonctions interscendantes, que celui de fonctions algébriques.

8. Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dans les dernières la variable est affectée de radicaux, & dans les premières elle n'en est point affectée.

Par conséquent, les fonctions rationnelles n'admettent pas d'autres opérations que l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division & l'Élévation aux Puissances, dont les exposans sont des nombres entiers; ainsi, les quan-

tités  $a + \sqrt{z}$ ;  $a - \sqrt{z}$ ;  $a\sqrt{z}$ ;  $\frac{aa + \sqrt{z}\sqrt{z}}{a + \sqrt{z}}$ ,  $a\sqrt{z} - b\sqrt{z}^2$ , &c. sont des fonctions rationnelles de  $\sqrt{z}$ ; mais ces expressions  $\sqrt{z}$ ;  $a + \sqrt{z}$  ( $aa - \sqrt{z}\sqrt{z}$ );  $\sqrt{z}$  ( $a - 2\sqrt{z} + \sqrt{z}\sqrt{z}$ );  $\frac{aa - \sqrt{z}\sqrt{z} (aa + \sqrt{z}\sqrt{z})}{a + \sqrt{z}}$  en seront des fonctions irrationnelles.

*Celles-ci se divisent commodément en explicites & en implicites.*

Les explicites sont développées au moyen des radicaux; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la résolution des équations. Ainsi  $Z$  sera une fonction irrationnelle implicite de  $\sqrt{z}$ , si elle est représentée par cette équation  $Z^2 = a\sqrt{z}Z^2 - b\sqrt{z}^2$ . En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de  $Z$ , même en admettant les signes radicaux, par la raison que l'Algèbre n'est pas encore parvenue à ce degré de perfection.

9. *Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entières & en fractionnaires.*

Dans celles-là, il n'entre aucune puissance négative de la variable  $\sqrt{z}$ , ni aucunes fractions qui renferment cette variable dans leurs dénominateurs; d'où il suit que les fonctions fractionnaires sont celles qui ont des dénominateurs affectés de la variable  $\sqrt{z}$ , ou dans lesquelles se rencontrent des exposans négatifs de cette même variable. Ainsi la formule générale des fonctions entières sera  $a + b\sqrt{z} + c\sqrt{z}^2 + d\sqrt{z}^3 + e\sqrt{z}^4 + f\sqrt{z}^5 + \&c.$  Car on ne peut imaginer aucune fonction entière de  $\sqrt{z}$ , qui ne soit renfermée dans cette expression. Quant aux fonctions fractionnaires, comme plusieurs fractions peuvent toujours être réduites à une seule, elles seront comprises dans la formule

$$\frac{a + b\sqrt{z} + c\sqrt{z}^2 + d\sqrt{z}^3 + e\sqrt{z}^4 + f\sqrt{z}^5 + \&c.}{a + \epsilon\sqrt{z} + \gamma\sqrt{z}^2 + \delta\sqrt{z}^3 + \iota\sqrt{z}^4 + \zeta\sqrt{z}^5 + \&c.}$$

Remarquez ici que les quantités constantes  $a, b, c, d, \&c.$   $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$  soit qu'on les suppose positives ou négatives, entières ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, &c

même transcendentes, ne changent point la nature des fonctions.

10. Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions en uniformes & en multiformes.

La fonction uniforme est celle qui n'obtient qu'une seule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable  $z$ . La fonction multiforme est celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne plusieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles soit entières, soit fractionnaires, sont des fonctions uniformes, parce que ces sortes d'expressions, quelque soit le nombre qu'on substitue à la variable, n'obtiennent qu'une seule valeur; mais les fonctions irrationnelles sont toutes multiformes, à cause de l'ambiguïté des signes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a aussi parmi les fonctions transcendentes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes; tel seroit l'arc de cercle qui répondroit au sinus  $z$ , car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même sinus. Dans ce qui suit nous supposons que les lettres  $P, Q, R, S, T, \&c.$  représentent chacune des fonctions uniformes de  $z$ .

11. Une fonction biforme est celle qui, par la substitution d'une valeur déterminée de  $z$ , reçoit deux valeurs.

Telles sont les fonctions désignées par les racines quarrées, comme  $\sqrt{2z + z^2}$ ; car, quelque nombre qu'on substitue à  $z$ , on obtiendra pour l'expression  $\sqrt{2z + z^2}$  deux valeurs, l'une positive, l'autre négative. En général,  $Z$  sera une fonction biforme de  $z$ , si cette quantité est déterminée par l'équation du second degré  $Z^2 - PZ + Q = 0$ ;  $P$  &  $Q$  étant des fonctions uniformes de  $z$ . En effet,  $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ ; d'où il suit qu'à chaque valeur déterminée de  $z$ , répondent deux valeurs déterminées de  $Z$ ; mais il faut remarquer que l'une & l'autre valeur de  $Z$  est à la fois réelle ou imaginaire. D'ailleurs on fait par la théorie

des équations, que leur somme  $= P$ , & que leur produit  $= Q$ .

12. Une fonction triforme est celle qui, pour chaque valeur de  $z$ , reçoit trois valeurs déterminées.

Ces fonctions dépendent de la résolution des équations du troisième degré. En effet si  $P$ ,  $Q$  &  $R$  sont des fonctions uniformes, & qu'on ait l'équation  $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$ ,  $Z$  sera une fonction triforme de  $z$ , puisque  $Z$  reçoit trois valeurs déterminées pour chaque nombre qu'on substitue à  $z$ . Ces trois valeurs de  $Z$  seront ou toutes trois réelles, ou l'une seulement sera réelle & les deux autres imaginaires. Au reste leur somme  $= P$ , celle de leurs produits deux à deux  $= Q$ , & le produit des trois  $= R$ .

13. Une fonction quadriforme de  $z$  est celle qui, pour une valeur de cette variable, est susceptible de quatre valeurs déterminées.

Elle est renfermée dans la résolution des équations du quatrième degré. Car, si  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  &  $S$  désignant, comme ci-dessus, des fonctions uniformes, on a l'équation  $Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$ ,  $Z$  sera une fonction quadriforme de  $z$ ; chaque valeur de  $z$  donnant pour  $Z$  quatre valeurs déterminées. Or ces quatre valeurs seront toutes réelles, ou deux seront réelles & deux imaginaires, ou elles seront toutes quatre imaginaires; mais leur somme  $= P$ ; la somme de leurs produits deux à deux  $= Q$ ; celle de leurs produits trois à trois  $= R$ ; & le produit de toutes  $= S$ . Il en sera de même de la nature & de la formation des fonctions de degrés plus élevés.

14. Donc si  $Z$  est déterminé par l'équation  $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4}$ , &c.  $= 0$ ;  $Z$  sera une fonction multiforme de  $z$ , laquelle pour chaque valeur de cette variable, prendra autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant  $n$ .

Il faut faire attention que  $n$  doit être un nombre entier; & en général, pour pouvoir juger de quel degré la fonction  $Z$

est multiforme, l'équation qui la renferme, doit être rendue rationnelle; alors l'exposant de la plus haute puissance de  $Z$  indiquera le nombre cherché de valeurs de  $Z$  correspondantes à chaque valeur de  $z$ . Il ne faut pas non plus perdre de vue que les lettres  $P, Q, R, S$ , &c. doivent désigner des fonctions uniformes de  $z$ ; car, si quelqu'une d'entr'elles désignoit déjà une fonction multiforme de  $z$ , la fonction  $Z$  fourniroit pour chacune des valeurs de  $z$  beaucoup plus de valeurs correspondantes que ne l'indiqueroit le nombre des dimensions de  $Z$ . Au reste, s'il doit y avoir des valeurs imaginaires, elles seront toujours en nombre pair. Par conséquent, si  $n$  est un nombre impair, il y aura au moins une des valeurs de  $Z$ , qui sera réelle; & au contraire si  $n$  est pair, il est possible qu'il n'y en ait aucune de réelle.

15. Si  $Z$  est une fonction multiforme de  $z$ , telle qu'elle ne puisse jamais obtenir qu'une seule valeur réelle, elle se rapprochera par ce caractère des fonctions uniformes, & pourra, pour cette raison, être rangée parmi ces dernières.

Telles sont les fonctions  $\sqrt[n]{P}, \sqrt[n]{P}, \sqrt[n]{P}$ , &c. car elles n'auront jamais qu'une valeur réelle, toutes les autres étant imaginaires, pourvu que  $P$  soit une fonction uniforme de  $z$ .

C'est pour cette raison que l'expression  $P^{\frac{m}{n}}$ , toutes les fois que  $n$  sera impair, pourra être mise au nombre des fonctions uniformes,  $m$  étant un nombre pair ou impair; mais

si  $n$  est un nombre pair, alors  $P^{\frac{m}{n}}$  ou n'aura aucune valeur réelle, ou en aura deux; d'où il suit que dans ce dernier

cas, les expressions telles que  $P^{\frac{m}{n}}$  pourront, avec raison, être mises au rang des fonctions biformes; pourvu que la fraction  $\frac{m}{n}$  ne soit pas réductible à une plus simple expression.

16. Si  $y$  est une fonction quelconque de  $z$ , réciproquement  $z$  sera une fonction de  $y$ .

En



En effet, puisque  $y$  est une fonction de  $z$ , soit uniforme, soit multiforme, on aura une équation, par laquelle  $y$  sera donné en  $z$  & en constantes; mais on pourra réciproquement conclure de la même équation la valeur de  $z$  en  $y$  & en constantes. Donc  $y$  étant une quantité variable, la quantité  $z$  qui sera égale à une expression composée de  $y$  & de constantes, sera une fonction de  $y$ . Il sera facile d'en conclure le degré de la fonction, & il peut se faire que  $y$  soit une fonction uniforme de  $z$ , tandis que  $z$  sera une fonction multiforme de  $y$ . Par exemple, si la valeur de  $y$  en  $z$  est donnée par l'équation  $y^3 = ayz - bz^2$ ,  $y$  sera une fonction triforme de  $z$ , &  $z$  une fonction seulement biforme de  $y$ .

17. Si  $y$  &  $x$  sont des fonctions de  $z$ ,  $y$  sera aussi une fonction de  $x$ , & réciproquement,  $x$  une fonction de  $y$ .

Puisque  $y$  est une fonction de  $z$ ,  $z$  sera aussi une fonction de  $y$ : semblablement,  $z$  sera une fonction de  $x$ . Par conséquent la fonction de  $y$  sera égale à une fonction de  $x$ . Par cette équation la valeur de  $y$  sera donnée en  $x$ , & celle de  $x$  en  $y$ . Il est donc évident que  $y$  est une fonction de  $x$ , & que  $x$  est une fonction de  $y$ . A la vérité, le plus souvent ces fonctions ne peuvent être représentées explicitement, à cause de l'imperfection de l'Algèbre; cependant on n'en apperçoit pas moins la réciprocité des fonctions, comme s'il étoit possible de résoudre les équations de tous les degrés. Au reste les méthodes algébriques nous apprennent que de deux équations; l'une entre  $y$  &  $z$ , & l'autre entre  $x$  &  $z$ , on peut par l'élimination de  $z$ , en former une troisième qui exprimera la relation entre  $x$  &  $y$ .

18. Enfin on doit distinguer des fonctions paires & des fonctions impaires. Une fonction paire de  $z$  est celle qui donne la même valeur, soit qu'on prenne pour  $z$  une valeur déterminée  $+k$  ou  $-k$ .

Telle est la fonction  $z^2$ ; car, si l'on suppose  $z = +k$  ou  $-k$ , il en résultera toujours pour  $z^2$  la même valeur,

favoir  $+kk$ . Pareillement les puissances  $z^4, z^6, z^8$ , & en général toute puissance  $z^m$ ,  $m$  étant un nombre pair, soit positif, soit négatif, seront des fonctions paires de  $z$ . De

plus, comme la quantité  $z^{\frac{m}{n}}$  peut passer pour une fonction uniforme de  $z$ , si  $n$  est un nombre impair, il est clair que

$z^{\frac{m}{n}}$  sera une fonction paire de  $z$ , lorsque  $m$  est un nombre pair, & que  $n$  est un nombre impair. Donc toute expression composée de telles puissances, de quelque manière que ce soit, sera une fonction paire de  $z$ . Ainsi  $Z$  sera une fonction paire de  $z$ , si on a l'équation  $Z = a + b z^2 + c z^4 + d z^6 + \&c.$  ou  $Z = \frac{a + b z^2 + c z^4 + d z^6 + \&c.}{a + e z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \&c.}$ ; de même, en introduisant des exposans fractionnaires,  $Z$  sera une fonction paire de  $z$ , si l'on a  $Z = a + b z^{\frac{2}{3}} + c z^{\frac{4}{3}} + d z^{\frac{6}{3}} + \&c.$  ou  $Z = a + b z^{-\frac{2}{3}} + c z^{-\frac{4}{3}} + d z^{-\frac{6}{3}} + \&c.$ , ou bien  $Z = \frac{a + b z^{\frac{2}{3}} + c z^{-\frac{4}{3}} + d z^{\frac{8}{3}}}{a + e z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{4}{3}} + \delta z^{\frac{8}{3}}}$ . Ces expressions étant

toutes des fonctions uniformes de  $z$ , pourront être appelées fonctions paires uniformes de  $z$ .

19. Une fonction multiforme paire de  $z$ , est celle qui, pour chaque valeur particulière de  $z$ , donne plusieurs valeurs déterminées, & qui restent cependant les mêmes, soit qu'on fasse  $z = k$ , par exemple, soit qu'on fasse  $z = -k$ .

Supposons  $Z$  une fonction multiforme paire de  $z$ , puisque la nature d'une fonction multiforme consiste dans une équation entre  $Z$  &  $z$ , dans laquelle  $Z$  a autant de dimensions qu'elle renferme de valeurs distinctes; il est évident que  $Z$  sera une fonction multiforme paire, si dans l'équation qui exprime sa nature, la variable  $z$  a dans tous les termes des dimensions paires. Ainsi l'équation  $Z^2 = a Z z^4 + b z^8$  donnera une fonction biforme paire de  $z$ ; mais si l'on a  $Z^3 - a z^2 Z^2 + b z^4 Z - c z^8 = 0$ ,  $Z$  sera une fonction

triforme paire de  $z$ ; & en général si  $P, Q, R, S$ , &c. représentent des fonctions uniformes paires de  $z$ ,  $Z$  sera une fonction biforme paire, si  $Z^2 - PZ + Q = 0$ , &  $Z$  sera une fonction triforme paire de  $z$ , si  $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$ , ainsi de suite.

20. *Donc une fonction paire de  $z$ , soit uniforme, soit multiforme, sera une expression composée de la variable  $z$  & de constantes, dans laquelle le nombre des dimensions de  $z$  est un nombre pair.*

Outre les exemples des fonctions uniformes paires que nous avons donnés, on trouvera encore des exemples des fonctions dont il s'agit, dans les expressions suivantes:  $a + \sqrt{(bb - zz)}$ ;  $a z \sqrt{a^2 z^2 - b z^2}$ , &  $a z^3 + \sqrt{(z^2 + \sqrt{(a^2 - z^2)})}$  &c.

*D'où il suit que les fonctions paires peuvent être définies des fonctions de  $zz$ .*

En effet, si l'on suppose  $y = zz$ , & que  $Z$  soit une fonction de  $y$ ; en mettant  $zz$  à la place de  $y$ ,  $Z$  deviendra une fonction de  $z$ , dans laquelle  $z$  aura un nombre pair de dimensions. Il faut cependant excepter les cas, où dans l'expression il entreroit des quantités, telles que  $\sqrt{y}$ , & d'autres, dans lesquelles en faisant  $y = zz$ , le signe radical disparaîtroit. Car, quoique par exemple,  $y + \sqrt{ay}$  soit une fonction de  $y$ , cependant en faisant  $y = zz$ , la même formule ne deviendra pas une fonction paire de  $z$ ; puisqu'elle devient  $y + \sqrt{ay} = zz + z\sqrt{a}$ . Mais, ces cas exceptés, la dernière définition des fonctions paires est bonne, & peut même servir à en former.

21. *Une fonction impaire de  $z$  est celle dont la valeur, en faisant  $z$  négatif, devient aussi négative.*

Ainsi, on trouvera autant de fonctions impaires de  $z$  dans chacune des puissances de  $z$ , dont les exposans sont des nombres impairs. Telles sont les quantités  $z^1, z^3, z^5, z^7$ , &c.

&  $z^{-1}, z^{-3}, z^{-5}$ , &c. La puissance  $z^{\frac{m}{n}}$  sera encore une fonction impaire, si les deux nombres  $m$  &  $n$  sont des

nombres impairs. En général, toute expression composée de semblables puissances sera une fonction impaire de  $z$ , comme

$a z + b z^3, a z + a z^{-1}$ ; &  $z^{\frac{1}{3}} + a z^{\frac{3}{3}} + b z^{-\frac{5}{3}}$ , &c. Au reste, la nature & la formation de ces fonctions se reconnoîtront plus facilement par celles des fonctions paires.

22. *Si une fonction paire de  $z$  est multipliée par  $z$ , ou par une fonction impaire de cette variable, le produit sera une fonction impaire de  $z$ .*

Soit  $P$  une fonction paire de  $z$ , laquelle, par conséquent, reste la même, si l'on met  $-z$  à la place de  $z$ . Si dans le produit  $Pz$  on met  $-z$  au lieu de  $z$ , il en résultera la quantité  $-Pz$ . Donc  $Pz$  sera une fonction impaire de  $z$ . Soit toujours  $P$  une fonction paire de  $z$ , & supposons  $Q$  une fonction impaire de la même variable, il est clair d'après la définition, que si au lieu de  $z$  on écrit  $-z$ ,  $P$  reste le même, & que  $Q$  devient  $-Q$ ; par conséquent le produit  $PQ$  par la substitution de  $-z$  au lieu de  $z$ , se changera en  $-PQ$ , c'est-à-dire, qu'il deviendra négatif. Donc  $PQ$  est une fonction impaire de  $z$ . Ainsi la quantité  $a + \sqrt{aa + zz}$  étant une fonction paire, &  $z^3$  une fonction impaire, leur produit  $a z^3 + z^3 \sqrt{aa + zz}$  sera une fonction impaire de  $z$ . Semblablement,  $z \times \frac{a + bzz}{a + \sqrt{azz}}$  =  $\frac{az + b z^3}{a + \sqrt{azz}}$  est une fonction impaire. On voit encore par-là que si, des deux fonctions  $P$  &  $Q$ , dont la première  $P$  est paire, & la seconde  $Q$  impaire, l'une est divisée par l'autre, le quotient  $\frac{P}{Q}$  ou  $\frac{Q}{P}$  sera une fonction impaire de  $z$ .

23. *Si une fonction impaire est multipliée ou divisée par une fonction impaire, le produit ou le quotient seront des fonctions paires.*

Soient  $Q$  &  $S$  des fonctions impaires, de manière qu'en mettant  $-z$  à la place de  $z$ ,  $Q$  devienne  $-Q$ , & que  $S$  se change en  $-S$ , il est clair que ni le produit  $QS$ , ni le

quotient  $\frac{Q}{S}$  ne changent de signe par le changement de signe de  $z$ . Donc le carré d'une fonction impaire est une fonction paire; le cube une fonction impaire; la quatrième puissance une fonction paire; ainsi de suite.

24. Si  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , réciproquement  $z$  sera une fonction impaire de  $y$ .

En effet, puisque  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , si l'on écrit  $-z$  à la place de  $z$ ,  $y$  se changera en  $-y$ . Donc, si la valeur de  $z$  est donnée en  $y$ , il faut nécessairement qu'en mettant  $-y$  au lieu de  $y$ ,  $z$  devienne aussi  $-z$ , & par conséquent  $z$  sera une fonction impaire de  $y$ . Par exemple, si  $y = z^3$ ,  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , & de l'équation  $z^3 = y$ , ou  $z = y^{\frac{1}{3}}$ , on conclura de même que  $z$  est une fonction impaire de  $y$ ; & parceque, si  $y = az + bz^3$ ,  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , on verra que réciproquement la valeur de  $z$  tirée de l'équation  $bz^3 + az = y$ , est une fonction impaire de  $y$ .

25. Si la nature de la fonction  $y$  est exprimée par une équation, telle que dans chacun des termes séparément, la somme des exposans de  $y$  & de  $z$ , soit par-tout un nombre pair ou un nombre impair, dans ce cas,  $y$  sera une fonction impaire de  $z$ .

Car si dans cette équation on écrit partout  $-z$  au lieu de  $z$ , & en même temps  $-y$  au lieu de  $y$ , tous les termes de l'équation ou resteront les mêmes, ou deviendront tous négatifs. Dans les deux cas, l'équation demeurera la même. D'où il suit que  $-y$  sera déterminé par  $-z$ , de la même manière que  $+y$  l'est par  $+z$ . Par conséquent, si pour  $z$  on met  $-z$ ,  $y$  deviendra  $-y$ ; c'est-à-dire, que  $y$  sera une fonction impaire de  $z$ . Ainsi dans les deux équations  $y^2 = ayz + bzz + c$ ; &  $y^3 + ayyz = byz + cy + dz$ ,  $y$  sera une fonction impaire de  $z$ . (a)

26. Supposons que  $Z$  &  $Y$  soient respectivement des fonctions de  $z$  & de  $y$ ; & que  $Y$  soit déterminé par la variable  $y$  & par des constantes, de la même manière que  $Z$  l'est par la

variable  $z$  & par des constantes ; alors ces fonctions  $Y$  &  $Z$  sont dites des fonctions semblables de  $y$  & de  $z$ .

Par exemple, si  $Z = a + bz + cz^2$  &  $Y = a + by + cy^2$ ,  $Z$  &  $Y$  seront des fonctions semblables de  $z$  & de  $y$ . De même dans les fonctions multiformes, si  $Z^3 = azzZ + b$ , &  $Y^3 = ayyY + b$ ,  $Z$  &  $Y$  seront des fonctions semblables de  $z$  & de  $y$ . Il suit de-là que si, à la place de  $z$ , on met  $y$ , la fonction  $Z$  deviendra la fonction  $Y$ . Cette similitude des fonctions peut être rendue ainsi, en disant :  $Y$  est la même fonction de  $y$ , que  $Z$  est de  $z$  ; cette manière de s'énoncer convient également, soit que les variables dépendent ou ne dépendent pas l'une de l'autre. Par exemple, si on a les deux expressions  $ay + by^3$  &  $a(y + n) + b(y + n)^3$  ; on pourra dire : la première quantité est la même fonction de  $y$ , que la seconde est de  $y + n$ . C'est surquoi il n'y aura aucun doute, si on fait  $z = y + n$ . Il en sera de même des fractions  $\frac{a + bz + cz^2}{a + cz + z^2}$ , &  $\frac{a + by + cy^2}{a + cy + y^2}$ , qui sont des fonctions semblables de  $z$  &  $\frac{1}{z}$ . En voilà assez pour mettre à portée de reconnoître la similitude des fonctions, dont l'usage est si fréquent dans la haute Géométrie. L'application que nous en ferons dans la suite, fournira de plus amples éclaircissements.

## CHAPITRE II.

### *De la Transformation des Fonctions.*

27. *On change la forme des fonctions, ou en introduisant une nouvelle variable à la place de la première, ou en conservant la même.*

Si l'on conserve la même variable, on ne peut pas dire qu'il y ait de changement proprement dit. Mais toute transformation suppose une autre manière d'exprimer la même

fonction ; c'est ainsi que l'Algèbre nous apprend qu'une même quantité peut prendre différentes formes. On aura une idée de ces sortes de transformations, si, par exemple, au lieu de la fonction  $z - 3z + z^2$  on écrit  $(1 - z)(z - z)$ , ou  $(a + z)^3$  au lieu de  $a^3 + 3aa^2z + 3az^2 + z^3$ , ou  $\frac{a}{a-z} + \frac{a}{a+z}$  à la place de  $\frac{2aa}{aa-z^2}$ , ou  $\sqrt{(1+z^2)} + z$ , à la place de  $\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)}-z}$ . Ces expressions, quoique différentes par la forme, reviennent pourtant au même ; néanmoins parmi ces manières d'exprimer la même quantité, il y en a qui sont plus propres que les autres à remplir le but qu'on se propose ; & c'est pour cette raison qu'il est à propos de choisir celle qui est la plus commode. L'autre transformation, par laquelle on introduit au lieu de la variable  $z$  une autre variable  $y$ , qui ait avec la première un rapport donné, est dite se faire par voie de substitution ; il convient d'y recourir, pour exprimer une fonction, plus brièvement & plus commodément ; comme si dans cette fonction de  $z$ ,  $a^4 - 4a^3z + 6aa^2z^2 - 4az^3 + z^4$ , on met  $y$  pour  $a - z$  ; on aura une fonction de  $y$  beaucoup plus simple, savoir  $y^4$  ; & , si dans la fonction irrationnelle  $\sqrt{(aa + z^2)}$  on fait  $z = \frac{a^2 - y^2}{2y}$ , la fonction de  $y$ , qui en résultera, sera rationnelle &  $= \frac{a^2 + yy}{2y}$ . Mais nous remettrons à parler de cette manière de transformer les fonctions dans le Chapitre suivant, & nous nous contenterons de traiter dans celui-ci de la transformation, qui se fait sans substitution.

28. *Souvent une fonction entière de  $z$  se décompose commodément en ses facteurs, & prend par-là la forme d'un produit.*

Quand une fonction entière est ainsi décomposée en ses facteurs, on en reconnoît mieux la nature ; car on voit à la simple inspection dans quels cas sa valeur  $= 0$ . Par exemple, en mettant cette fonction de  $z$ ,  $6 - 7z + z^3$  sous la forme du produit  $(1 - z)(z - z)(z + z)$ , on apperçoit sur le

champ qu'elle devient  $= 0$  dans trois cas, savoir, lorsque  $z = 1$ , ou  $z = 2$ , ou  $z = -3$ ; propriétés, qu'il eût été moins aisé de conclure de la première forme  $6 - 7z + z^3$ . Ces sortes de facteurs, dans lesquels il n'entre aucune puissance de la variable  $z$ , sont appelés facteurs simples, pour les distinguer des facteurs composés, qui renferment le carré, ou le cube, ou une autre puissance plus élevée de la variable. Ainsi la forme générale des facteurs simples sera  $f + gz$ ; celle des facteurs doubles,  $f + gz + hz^2$ ; celle des facteurs triples,  $f + gz + hz^2 + iz^3$ , ainsi des autres. Il est clair d'ailleurs qu'un facteur double renferme deux facteurs simples; un facteur triple, trois facteurs simples, ainsi de suite. Donc une fonction entière de  $z$ , dans laquelle l'exposant de la plus haute puissance  $= n$ , contiendra  $n$  facteurs simples, & par conséquent, le nombre des facteurs, s'il y en a de doubles, ou de triples, sera en même-temps connu.

29. Les facteurs simples d'une fonction entière  $Z$  de  $z$  se trouvent, en égalant la fonction  $Z$  à zéro, & en cherchant toutes les racines de cette équation; car elles donneront chacune (b) autant de facteurs simples de la fonction  $Z$ .

En effet, soit l'équation  $Z = 0$ , laquelle ait pour racine  $z = f$ ,  $z - f$  sera un diviseur, & par conséquent un facteur de la fonction  $Z$ . Ainsi, en déterminant toutes les racines de l'équation  $Z = 0$ , que je suppose être  $z = f$ ,  $z = g$ ,  $z = h$ ; la fonction  $Z$  sera décomposée en ses facteurs simples, & prendra la forme du produit  $Z = (z - f)(z - g)(z - h)$ , &c: mais il faut observer que, si le coefficient de la plus haute puissance de  $z$  dans  $Z$  n'étoit pas l'unité, il faudroit de plus multiplier le produit par ce coefficient. (c) Par exemple, si  $Z = A z^n + B z^{n-1} + C z^{n-2} + \&c$ , on aura  $Z = A(z - f)(z - g)(z - h) \&c$ ; ou bien si  $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c$ , & que les racines  $z$  de l'équation soient  $f, g, h, i$ ; &c, on aura  $Z = A(1 - \frac{z}{f})(1 - \frac{z}{g})(1 - \frac{z}{h})(1 - \frac{z}{i}) \&c$ .



$(1 - \frac{x}{g})(1 - \frac{x}{h})$  &c. Concluons de-là réciproquement que, si l'un des facteurs de la fonction  $Z$  est  $z - f$  ou  $1 - \frac{z}{f}$ , la valeur de la fonction se réduit à zéro, si on écrit  $f$  à la place de  $z$ . Car en faisant  $z = f$ , un facteur  $z - f$  ou  $1 - \frac{z}{f}$  de la fonction  $Z$  doit s'évanouir, & par suite la fonction  $Z$  elle-même.

30. *Les facteurs simples seront donc ou réels ou imaginaires, & si la fonction  $Z$  a des facteurs imaginaires, ils seront toujours en nombre pair.*

Car, comme les facteurs simples proviennent des racines de l'équation  $Z = 0$ , les racines réelles fourniront des facteurs réels, & les racines imaginaires des facteurs imaginaires; mais comme dans toute équation, le nombre des racines imaginaires est toujours pair, il s'ensuit que la fonction  $Z$  n'aura aucun facteur imaginaire, ou qu'elle en aura deux, ou quatre, ou six, &c. Si la fonction  $Z$  renferme seulement deux facteurs imaginaires, leur produit sera réel, & donnera conséquemment un facteur double réel. Car soit  $P =$  au produit de tous les facteurs réels, le produit des facteurs imaginaires sera  $\frac{Z}{P}$ , & par conséquent réel. Semblablement, si la fonction  $Z$  renferme quatre, ou six, ou huit, &c. facteurs imaginaires, leur produit sera toujours réel & égal au quotient de la fonction  $Z$ , divisée par le produit de tous les facteurs réels.

31. *Si  $Q$  est un produit réel de quatre facteurs simples imaginaires, je dis que ce même produit pourra être résolu en deux facteurs doubles réels.*

Car la fonction  $Q$  aura cette forme  $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ . Si l'on nie qu'elle puisse être décomposée en deux facteurs doubles réels, elle pourra l'être du moins en deux facteurs doubles imaginaires, qui auront cette forme:  $z^2 - 2(p + qV - 1)z + r + sV - 1$ , &  $z^2 - 2(p - qV - 1)z + r - sV - 1$ ; car on ne peut concevoir d'autres formes

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. C

(d) imaginaires, dont le produit soit réel, c'est-à-dire,  $= \zeta^4 + A\zeta^3 + B\zeta^2 + C\zeta + D$ . Or on tirera de ces facteurs imaginaires doubles les quatre facteurs imaginaires simples de  $Q$ , comme il suit.

$$I. \zeta - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$$

$$II. \zeta - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$$

$$III. \zeta - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$$

$$IV. \zeta - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$$

Si l'on multiplie l'un par l'autre, le premier & le troisième de ces facteurs, en faisant, pour abrégé,  $t = pp - qq - r$ , &  $u = 2pq - s$ , on aura un produit réel, qui sera  $= \zeta\zeta - (2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{(r^2 + u^2)}}) \zeta + pp + qq - p\sqrt{2t + 2\sqrt{(r^2 + u^2)}} + \sqrt{(r^2 + u^2)} \zeta + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{(r^2 + u^2)}}$ ; de même le produit du second & du quatrième facteur sera réel, &  $= \zeta\zeta - (2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{(r^2 + u^2)}}) \zeta + pp + qq + p\sqrt{2t + 2\sqrt{(r^2 + u^2)}} + \sqrt{(r^2 + u^2)} \zeta + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{(r^2 + u^2)}}$ .

Donc le produit proposé  $Q$  qu'on supposoit n'être pas décomposable en deux facteurs doubles réels, se trouve par le fait décomposé en de tels facteurs.

32. *Quelque soit le nombre de facteurs simples imaginaires, dont une fonction  $Z$  de  $z$  est composée, on pourra toujours en combiner deux, de manière qu'il en résulte un produit réel.*

Le nombre des racines imaginaires étant toujours pair, supposons le  $= 2n$ , d'abord il est clair que le produit de toutes ces racines imaginaires est réel. S'il y a seulement deux racines imaginaires, leur produit sera certainement réel; & s'il y a quatre facteurs imaginaires, leur produit, comme nous venons de le voir, peut être décomposé en deux facteurs doubles de la forme  $f\zeta^2 + g\zeta + h$ . Quoique la même manière de démontrer ne s'étende pas aux puissances plus élevées, il paroît cependant hors de doute que cette propriété convient également à un nombre quelconque

de facteurs, de sorte qu'à la place de  $2n$  facteurs simples imaginaires, on pourra supposer un nombre  $n$  de facteurs doubles réels. Donc toute fonction entière de  $z$  pourra être décomposée en facteurs réels, ou simples, ou doubles. Si la vérité de cette proposition n'est pas démontrée ici en toute rigueur, elle acquerra dans la suite un nouveau degré de force, quand nous décomposerons effectivement en facteurs doubles réels les fonctions de cette forme:  $a + b z^n$ ;  $a + b z^n + c z^{2n}$ ;  $a + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n}$ , &c. (Voyez l'art. 154, & la note qui y est relative).

33. Si une fonction entière  $Z$ , en faisant  $z = a$ , prend la valeur  $A$ , & en faisant  $z = b$ , prend la valeur  $B$ ; en mettant à la place de  $z$ , des valeurs moyennes entre  $a$  &  $b$ , la fonction  $Z$  peut prendre toutes les valeurs moyennes qu'on voudra, entre  $A$  &  $B$ .

Puisque  $Z$  est une fonction uniforme de  $z$ , quelque valeur réelle qu'on donne à  $z$ , la fonction  $Z$  aura aussi une valeur réelle, & si la quantité  $Z$ , dans le premier cas, où  $z = a$ , prend la valeur  $A$ , & dans le second cas où  $z = b$ , la valeur  $B$ , elle ne pourra passer de  $A$  à  $B$ , qu'en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Donc, si l'équation  $Z - A = 0$ , & l'équation  $Z - B = 0$ , ont une racine réelle, l'équation  $Z - C = 0$ , en aura une aussi, pourvu que  $C$  soit renfermé entre  $A$  &  $B$ . Donc, si les expressions  $Z - A$  &  $Z - B$  ont un facteur simple réel, l'expression  $Z - C$  en aura un aussi, toutes les fois que  $C$  sera renfermé entre  $A$  &  $B$ .

34. Si dans la fonction entière  $Z$  l'exposant de la plus haute puissance de  $z$  est un nombre impair  $2n + 1$ , la fonction  $Z$  aura au moins un facteur simple réel.

La fonction  $Z$  aura cette forme  $z^{2n+1} + a z^{2n} + c z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \&c.$  Si l'on fait  $z = \infty$ , tous les termes disparaîtront devant le premier, & elle deviendra  $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$ . Donc  $Z - \infty$  aura un facteur simple réel, savoir,

C ii

$z - \infty$ . Mais si on suppose  $z = -\infty$ ,  $Z$  deviendra  $(-\infty)^{2n+1} = -\infty$ , & par conséquent  $Z + \infty$  aura pour facteur simple réel,  $z + \infty$ . Puis donc que  $Z - \infty$  &  $Z + \infty$  ont chacun un facteur simple réel, il s'ensuit que  $Z + C$  aura un facteur simple réel, pourvu que la valeur de  $C$  soit renfermée entre les limites  $+\infty$  &  $-\infty$ ; c'est-à-dire, pourvu que  $C$  soit un nombre réel quelconque, ou positif, ou négatif. Donc, si  $C = 0$ , la fonction  $Z$  aura un facteur simple réel  $z - c$ , & la quantité  $c$  sera comprise entre  $+\infty$  &  $-\infty$ ; c'est-à-dire, sera ou une quantité positive, ou une quantité négative, ou zéro.

35. *Donc une fonction entière  $Z$ , dans laquelle l'exposant de la plus grande puissance de  $z$  est un nombre impair, aura ou un facteur simple réel, ou trois, ou cinq, ou sept, &c.*

Il vient d'être démontré que la fonction  $Z$  avoit au moins un facteur simple réel,  $z - c$ . Supposons qu'elle en ait encore un autre  $z - d$ , & divisons cette fonction  $Z$ , dans laquelle la plus haute puissance de  $z$  est  $z^{2n+1}$ , par  $(z - c)(z - d)$ , la plus haute puissance du quotient sera  $= z^{2n-1}$ , dont l'exposant impair annonce encore un facteur simple réel. Donc, si la quantité  $Z$  a plus d'un facteur simple réel, elle en aura ou trois, ou (en continuant de raisonner de la même manière) cinq ou sept, &c. c'est-à-dire, qu'il y aura un nombre impair de facteurs simples réels; & comme le nombre de tous les facteurs simples  $= 2n + 1$ , celui des facteurs imaginaires sera pair.

36. *Une fonction entière  $Z$ , dans laquelle l'exposant de la plus haute puissance de  $z$  est un nombre pair  $2n$ , aura ou deux, ou quatre, ou six, ou, &c. facteurs simples réels.*

Car supposons que le nombre des facteurs simples réels de  $Z$  soit impair &  $= 2m + 1$ ; si on divise la fonction  $Z$  par leur produit, la plus haute puissance du quotient sera  $= z^{2n-2m-1}$ , dont l'exposant est impair. La fonction  $Z$  aura donc encore au moins un facteur simple réel. Donc le

nombre des facteurs simples réels sera au moins  $= 2m + 2$ , & par conséquent pair; & celui des facteurs imaginaires sera également pair. Donc les facteurs simples imaginaires d'une fonction entière quelconque sont toujours en nombre pair; comme nous l'avons déjà dit.

37. Si dans la fonction  $Z$  l'exposant de la plus haute puissance de  $z$  est un nombre pair, & que le terme absolu ou constant soit affecté du signe  $-$ , la fonction  $Z$  aura au moins deux facteurs simples réels.

La fonction  $Z$ , dont il s'agit ici, aura donc cette forme:  $z^{2n} \pm a z^{2n-1} \pm c z^{2n-2} \pm \dots \pm \sqrt{z} - A$ . Si l'on fait  $z = \infty$ ,  $Z$  deviendra, comme ci-dessus,  $= \infty$ , & si l'on fait  $z = 0$ ,  $Z$  deviendra  $= -A$ . Donc  $Z - \infty$  aura le facteur réel  $z - \infty$ , &  $Z + A$  le facteur réel  $z - 0$ , d'où il suit que,  $0$  étant renfermé entre les limites  $-\infty$  &  $+A$ ,  $Z + 0$  a un facteur simple réel  $z - c$ ,  $c$  étant compris entre les limites  $0$  &  $\infty$ . En faisant ensuite  $z = -\infty$ ,  $Z$  devient encore  $= \infty$ ; ainsi  $Z - \infty$  aura pour facteur  $z + \infty$ , & comme  $Z + A$  a pour facteur  $Z + 0$ , il s'ensuit que  $Z + 0$  a un facteur simple réel  $z + d$ ,  $d$  étant compris entre  $0$  &  $\infty$ ; ce qui constate la vérité de la proposition. On voit par-là que si  $Z$  est une fonction, telle qu'elle est supposée ici, l'équation  $Z = 0$  a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. Par exemple, l'équation  $z^4 + a z^3 + c z^2 + r z - aa = 0$  a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

38. Si dans une fonction fractionnaire la variable  $z$  a autant ou plus de dimensions dans le numérateur que dans le dénominateur, cette fonction pourra être décomposée en deux parties, l'une qui sera un entier, & l'autre une fraction, dans le numérateur de laquelle la variable  $z$  aura moins de dimensions que dans le dénominateur.

En effet, l'exposant de la plus haute puissance de  $z$  étant moindre dans le numérateur que dans le dénominateur, divisons à la manière ordinaire le numérateur par le déno-

minateur, jusqu'à ce que nous trouvions au quotient un exposant négatif pour  $z$ , & terminons là l'opération de la division, nous aurons un quotient composé d'une partie entière & d'une fraction, dans le numérateur de laquelle le nombre des dimensions de  $z$  sera plus petit que dans le dénominateur; & ce quotient sera égal à la fonction proposée. Prenons, pour exemple, la fonction fractionnaire  $\frac{1+z^2}{1+zz}$ ; en faisant la division, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{r} z z + 1 \quad ) \quad z^2 + 1 \quad \left( z z - 1 + \frac{2}{1+zz} \right. \\ \underline{z^2 + z z} \\ - z z + 1 \\ \underline{+ 2} \end{array}$$

Nous trouverons  $\frac{1+z^2}{1+zz} = z z - 1 + \frac{2}{1+zz}$ . Ces sortes de fonctions fractionnaires, dans lesquelles la variable  $z$  a autant ou plus de dimensions au numérateur qu'au dénominateur, peuvent être appellées, comme en Arithmétique, des fractions improprement dites, pour les distinguer des véritables fractions, dans le numérateur desquelles la variable  $z$  a moins de dimensions que dans le dénominateur. Ainsi une fonction fractionnaire improprement dite pourra être résolue en une fonction entière, & en une fonction fractionnaire proprement dite; & cette résolution se fera par la division ordinaire.

39. *Si le dénominateur d'une fonction fractionnaire est composé de deux facteurs premiers entr'eux, cette fonction pourra être décomposée en deux fractions, dont les dénominateurs soient respectivement égaux à ces deux facteurs.*

Quoique cette décomposition convienne également aux deux especes de fonctions fractionnaires, dont nous venons de parler; nous l'appliquerons particulièrement aux fonctions fractionnaires proprement dites. Ayant donc décomposé le dénominateur de la fonction en ses deux facteurs premiers entr'eux, la fonction proposée se changera en deux

autres, qui sont véritablement fractionnaires, & dont les dénominateurs seront respectivement égaux à ces deux facteurs; de plus cette résolution, pourvu qu'il s'agisse de véritables fractions, ne pourra s'effectuer que d'une seule manière. Un exemple fera mieux sentir que le raisonnement, la vérité de ce que nous avançons; soit donc proposée la fonction fractionnaire,  $\frac{1-2x+3xx-4x^3}{1+4x^4}$ , dont le dénominateur  $1+4x^4$  est égal au produit  $(1+2x+2xx)(1-2x+2xx)$ ; cette fraction se décomposera en deux autres, dont l'une aura pour dénominateur  $1+2x+2xx$ , & l'autre,  $1-2x+2xx$ . Comme ce sont de vraies fractions, supposons, pour les trouver, le numérateur de la première  $= \alpha + \epsilon x$ , & celui de la seconde  $= \gamma + \delta x$ , nous aurons par hypothèse,  $\frac{1-2x+3xx-4x^3}{1+4x^4} = \frac{\alpha + \epsilon x}{1+2x+2xx} + \frac{\gamma + \delta x}{1-2x+2xx}$ . Ajoutons ces deux fractions, après les avoir réduites au même dénominateur; leur somme aura pour

Numérateur		Dénominateur
$+ \alpha - 2 \alpha x + 2 \alpha x x$		$1 + 4x^4$
$+ \epsilon x - 2 \epsilon x x + 2 \epsilon x^3$		
$+ \gamma + 2 \gamma x + 2 \gamma x x$		
$+ \delta x + 2 \delta x x + 2 \delta x^3$		

Le dénominateur étant donc égal à celui de la fraction proposée, il est nécessaire de rendre aussi égaux les numérateurs, ce qui pourra toujours se faire, & cela d'une manière seulement, à cause qu'il y a précisément autant de lettres inconnues  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$  que de termes à égaliser. Ainsi nous aurons les quatre équations suivantes :

$$I. \alpha + \gamma = 1 \qquad III. 2\alpha - 2\epsilon + 2\gamma + 2\delta = 3$$

$$II. -2\alpha + \epsilon + 2\gamma + \delta = -2 \qquad IV. 2\epsilon + 2\delta = -4$$

A cause de  $\alpha + \gamma = 1$ , & de  $\epsilon + \delta = -2$ , les équations II & III donneront  $\alpha - \gamma = 0$ ; &  $\delta - \epsilon = \frac{1}{2}$ . D'où  $\alpha = \frac{1}{2}$ ;  $\gamma = \frac{1}{2}$ ;  $\epsilon = -\frac{1}{4}$ ;  $\delta = -\frac{3}{4}$ ; ainsi la fraction

proposée  $\frac{1-2z+3zz-4z^3}{1+4z^4}$  est transformée en ces deux-ci :

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}{1+2z+2zz} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}{1-2z+2zz}. \text{ Il est facile de voir que dans}$$

(e) tout autre cas la décomposition doit de même réussir, parce qu'il y a toujours autant de lettres inconnues qu'il est nécessaire, pour trouver chaque numérateur. Mais la théorie ordinaire des fractions nous apprend que cette résolution ne peut avoir lieu que dans les cas où les facteurs du dénominateur sont premiers entr'eux.

40. La fonction fractionnaire  $\frac{M}{N}$  pourra donc se résoudre en autant de fractions simples de la forme  $\frac{A}{p-qz}$ , que le dénominateur  $N$  renferme de facteurs simples, inégaux entr'eux.

Cette expression  $\frac{M}{N}$  représente une fonction fractionnaire quelconque proprement dite, telle que  $M$  &  $N$  soient des fonctions entières de  $z$ , & que la plus haute puissance de  $z$  dans  $M$  soit moindre que dans  $N$ . Décomposons donc le dénominateur  $N$  en ses facteurs simples, & supposons-les inégaux entr'eux, l'expression  $\frac{M}{N}$  sera transformée en autant de fractions qu'il y a de facteurs simples dans le dénominateur  $N$ , parce que chaque facteur devient le dénominateur d'une fraction partielle. Si donc  $p - qz$  est un facteur de  $N$ , il fera le dénominateur d'une des fractions partielles, & comme le nombre des dimensions de  $z$  doit être plus petit dans le numérateur que dans le dénominateur  $p - qz$ , le numérateur sera nécessairement une quantité constante. Donc chaque facteur simple  $p - qz$  du dénominateur  $N$  donnera une fraction simple  $\frac{A}{p-qz}$ , de manière que la somme de toutes ces fractions soit égale à la fraction proposée  $\frac{M}{N}$ .

EXEMPLE.



## E X E M P L E.

Soit proposée la fonction fractionnaire  $\frac{1+x^3}{x-x^3}$ ; les facteurs simples du dénominateur étant  $x$ ,  $1-x$ , &  $1+x$ , cette fonction se décomposera en ces trois fractions simples  $\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} = \frac{1+x^3}{x-x^3}$ , dont il s'agit de déterminer les numérateurs constants  $A$ ,  $B$  &  $C$ . Réduisons ces fractions au même dénominateur,  $x-x^3$ , la somme des numérateurs devra être égale à  $1+x^3$ ; d'où naît l'équation . . . . .

$$\begin{aligned} A+x-Bx+Ax^3 &= 1+x^3 = 1+0x+x^3 \\ +Cx+Bx^2 & \\ -Cx^2 & \end{aligned}$$

Nous tirerons de-là, en comparant les coefficients des puissances égales, autant d'équations qu'il y a de lettres inconnues,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , savoir,

$$\text{I. } A=1.$$

$$\text{II. } B+C=0.$$

$$\text{III. } -A+B-C=1.$$

Donc  $B-C=2$ ;  $A=1$ ;  $B=1$ , &  $C=-1$ . La fraction proposée prendra donc cette forme  $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$ . On voit semblablement que, quelque soit le nombre de facteurs simples, inégaux entr'eux, du dénominateur  $N$ , la fraction  $\frac{M}{N}$  se décomposera toujours en autant de fractions simples; mais, s'il y a quelques facteurs égaux entr'eux, on s'y prendra d'une autre manière qui sera expliquée ci-après.

41. Chaque facteur simple du dénominateur  $N$ , fournissant une fraction simple pour la résolution de la fonction proposée  $\frac{M}{N}$ , il s'agit de faire voir comment la connoissance d'un facteur simple du dénominateur  $N$  donne celle de la fraction simple correspondante.

EULER, *Introduction à l'Anal. infn.* Tome I. D

Soit  $p - qz$  un facteur simple de  $N$ , de manière que  $N = (p - qz)S$ , & que  $S$  soit une fonction entière de  $z$ ; supposons la fraction qui dérive du facteur  $p - qz$ ,  $= \frac{A}{p - qz}$ , & soit  $\frac{P}{S}$  la fraction qui résulte de l'autre facteur  $S$  du dénominateur, de manière que (art. 39)  $\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qz)S}$ . Donc  $\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz)S}$ . Pour que ces fractions soient les mêmes, il faut que  $M - AS$  soit divisible par  $p - qz$ , parce que la fonction entière  $P$  est égale au quotient de cette division. Mais, si  $p - qz$  est un diviseur de  $M - AS$ , cette expression, en faisant  $z = \frac{p}{q}$ , doit se réduire à zéro. Mettons donc, à la place de  $z$ , la valeur constante  $\frac{p}{q}$  dans  $M$  &  $S$ , nous aurons  $M - AS = 0$ . Donc  $A = \frac{M}{S}$ . Donc, par ce procédé, le numérateur  $A$  de la fraction cherchée  $\frac{A}{p - qz}$  se trouve déterminé. Si, au moyen des facteurs simples du dénominateur  $N$ , que je suppose toujours inégaux, on forme de cette manière toutes les fractions partielles, leur somme sera égale à la fonction proposée  $\frac{M}{N}$ .

## E X E M P L E.

Si dans l'exemple précédent  $\frac{1 + z^2}{z - z^3}$ , où  $M = 1 + z^2$  &  $N = z - z^3$ , on prend  $z$  pour le facteur simple; alors  $S = 1 - z^2$  & le numérateur de la fraction simple  $\frac{A}{z}$  sera  $= \frac{1 + z^2}{1 - z^2} = 1$ , à cause de  $z = 0$ , valeur qui résulte de l'hypothèse du facteur simple  $z$  égale à zéro. De même si l'on prend le facteur  $1 - z$  du dénominateur, de sorte que  $S = z + z^2$ , on aura  $A = \frac{1 + z^2}{z + z^2}$  en faisant le facteur  $1 - z = 0$ . Donc  $A = 1$ , & par conséquent la fraction partielle résultante du

facteur  $1 - z$  sera  $= \frac{1}{1-z}$ . Enfin le troisieme facteur  $1 + z$ , à cause de  $S = z - z^2$ , & de  $A = \frac{1+z}{z-z^2}$ , en faisant  $1 + z = 0$ , ou  $z = -1$ , donnera  $A = -1$ , & la fraction simple  $= \frac{-1}{1+z}$ . Ainsi en suivant cette regle, on trouve  $\frac{1+z}{z-z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$ , comme ci-dessus.

42. Une fonction fractionnaire de cette forme  $\frac{P}{(p-qz)^n}$ , dont le numérateur  $P$  ne renferme pas une aussi grande puissance de  $z$  que le dénominateur  $(p-qz)^n$ , peut être changée en une suite de fractions partielles de cette forme  $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \dots + \frac{K}{p-qz}$ , dont les numérateurs soient tous des quantités constantes.

Puisque la plus grande puissance de  $z$  dans le numérateur  $P$  est plus petite que  $z^n$ , elle sera  $z^{n-1}$ , & par conséquent  $P$  aura cette forme  $a + b z + c z^2 + d z^3 + \dots + n z^{n-1}$ . Cette suite a un nombre  $n$  de termes, & le numérateur de la somme de toutes les fractions partielles, après qu'elles auront été réduites au même dénominateur, doit lui être égal. Ce numérateur sera donc  $= A + B(p-qz) + C(p-qz)^2 + D(p-qz)^3 + \dots + K(p-qz)^{n-1}$ . La plus haute puissance de  $z$  est ici, comme dans  $P$ ,  $z^{n-1}$ , & il y a autant de lettres inconnues,  $A, B, C, \dots, K$ , (le nombre en est  $n$ ) qu'il y a de termes correspondants à comparer. Les lettres constantes  $A, B, C$ , &c. pourront donc être déterminées, de maniere qu'on ait la fonction fractionnaire  $\frac{P}{(p-qz)^n} = \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \dots + \frac{K}{p-qz}$ . Nous allons donner un moyen facile de trouver ces numérateurs.

43. Si le dénominateur  $N$  de la fonction fractionnaire  $\frac{M}{N}$

D ij

*a* pour facteur  $(p - qz)^2$ ; on trouvera de la manière suivante les fractions partielles qui résultent de ce facteur.

Nous avons montré comment on trouvoit les fractions partielles qui dériveroient des facteurs simples, inégaux entr'eux. Supposons à présent qu'il y ait deux facteurs égaux, ou, en les réunissant, qu'un facteur du dénominateur  $N$  soit  $(p - qz)^2$ . Suivant l'art. précédent, il en résultera ces deux fractions partielles  $\frac{A}{(p - qz)} + \frac{B}{p - qz}$ . Or soit  $N = (p - qz)^2 S$ , on aura  $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p - qz)^2 S} = \frac{A}{(p - qz)^2} + \frac{B}{p - qz} + \frac{P}{S}$ ,  $\frac{P}{S}$  désignant la somme de toutes les fractions simples qui proviennent du facteur  $S$  du dénominateur. Donc on aura  $\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p - qz)S}{(p - qz)^2 S}$ , &  $P = \frac{M - AS - B(p - qz)S}{(p - qz)^2}$  = à une fonction entière. Il faut donc que la quantité  $M - AS - B(p - qz)S$  soit divisible par  $(p - qz)^2$ . Elle le fera donc d'abord par  $p - qz$ , & l'expression totale  $M - AS - B(p - qz)S$  s'évanouira; si l'on fait  $p - qz = 0$ , ou  $z = \frac{p}{q}$ . Ecrivons donc par-tout  $\frac{p}{q}$  à la place de  $z$ ; nous aurons  $M - AS = 0$ , & par conséquent  $A = \frac{M}{S}$ , c'est à-dire, que la fraction  $\frac{M}{S}$  donnera la valeur constante de  $A$ , en mettant par-tout  $\frac{p}{q}$  à la place de  $z$ . Cette valeur trouvée, j'observe que la quantité  $M - AS - B(p - qz)S$  doit être aussi divisible par  $(p - qz)^2$ , ou que  $\frac{M - AS}{p - qz} - BS$  doit être encore divisible par  $p - qz$ . En faisant par-tout  $z = \frac{p}{q}$ , on aura  $\frac{M - AS}{p - qz} = BS$ , & par conséquent  $B = \frac{M - AS}{(p - qz)S} = \frac{1}{p - qz} \left( \frac{M}{S} - A \right)$ ; il faut remarquer ici que la quantité  $M - AS$  étant divisible par  $p - qz$ , on doit faire cette

division avant de faire la substitution de  $\frac{p}{q}$  à la place de  $\zeta$ ; ou bien supposé  $\frac{M-AS}{p-q\zeta} = T$ , on aura  $B = \frac{T}{S}$ , en faisant  $\zeta = \frac{p}{q}$ ; les numérateurs  $A$  &  $B$  étant ainsi trouvés, on connoitra les fractions  $\frac{A}{(p-q\zeta)^2} + \frac{B}{p-q\zeta}$ , que donne le facteur  $(p-q\zeta)^2$  du dénominateur  $N$ .

## E X E M P L E I.

Soit proposée la fonction fractionnaire  $\frac{1-\zeta\zeta}{\zeta\zeta(1+\zeta\zeta)}$ , & considérons le facteur carré de  $\zeta\zeta$  du dénominateur, nous aurons  $S = 1 + \zeta\zeta$ , &  $M = 1 - \zeta\zeta$ ; soient les fractions partielles qui en dérivent :  $\frac{A}{\zeta\zeta} + \frac{B}{\zeta}$ ; nous aurons  $A = \frac{M}{S} = \frac{1-\zeta\zeta}{1+\zeta\zeta}$ , le facteur  $\zeta$  étant supposé  $= 0$ . Donc  $A = 1$ . Ensuite  $M - AS = -2\zeta\zeta$ , quantité, qui divisée par le facteur simple de  $\zeta$ , donne  $T = -2\zeta$ , & par conséquent  $B = \frac{T}{S} = \frac{-2\zeta}{1+\zeta\zeta}$ . Donc, à cause de  $\zeta = 0$ ,  $B = 0$ ; & il ne proviendra du facteur  $\zeta\zeta$  du dénominateur que la fraction partielle  $\frac{1}{\zeta\zeta}$ .

## E X E M P L E II.

Soit proposée la fonction fractionnaire  $\frac{\zeta^3}{(1-\zeta)^2(1+\zeta^4)}$ , dont les fractions partielles qui naissent du facteur carré  $(1-\zeta)^2$ , soient  $\frac{A}{(1-\zeta)^2} + \frac{B}{1-\zeta}$ . Ici  $M = \zeta^3$ , &  $S = 1 + \zeta^4$ . Par conséquent  $A = \frac{M}{S} = \frac{\zeta^3}{1+\zeta^4} = \frac{1}{2}$ , en faisant  $1 - \zeta = 0$ , ou  $\zeta = 1$ . Donc  $M - AS = \zeta^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta^4 = -\frac{1}{2} - \zeta^3 - \frac{1}{2}\zeta^4$ , quantité, qui divisée par  $1 - \zeta$ , donne  $T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta\zeta + \frac{1}{2}\zeta^3$ , & conséquemment

$B = \frac{T}{S} = \frac{-1 - \zeta - \zeta\zeta + \zeta^3}{2 + 2\zeta^4} =$  (en faisant  $\zeta = 1$ )  $-\frac{1}{2}$ . Les fractions partielles demandées sont donc  $\frac{1}{2(1-\zeta)^2} - \frac{1}{2(1-\zeta)}$ .

44. Si le dénominateur  $N$  de la fraction  $\frac{M}{N}$  renferme un facteur, tel que  $(p - q\zeta)^3$ ; on déterminera de la manière suivante les fractions partielles qui naissent de ce facteur : savoir,  $\frac{A}{(p - q\zeta)^3} + \frac{B}{(p - q\zeta)^2} + \frac{C}{p - q\zeta}$ .

Soit  $N = (p - q\zeta)^3 S$ , & soit  $\frac{P}{S}$  la fraction qui dérive du facteur  $S$ , on aura  $P = \frac{M - AS - B(p - q\zeta)S - C(p - q\zeta)^2 S}{(p - q\zeta)^3} =$  à une fonction entière. Le numérateur  $M - AS - B(p - q\zeta)S - C(p - q\zeta)^2 S$  doit donc avant tout être divisible par  $p - q\zeta$ ; par conséquent il se réduira à zéro, en faisant  $p - q\zeta = 0$ , ou  $\zeta = \frac{p}{q}$ . Alors  $M - AS = 0$ , &  $A = \frac{M}{S}$ , en supposant  $\zeta = \frac{p}{q}$ .  $A$  ayant été déterminé de cette manière,  $M - AS$  sera divisible par  $p - q\zeta$ . Soit  $\frac{M - AS}{p - q\zeta} = T$ ;  $T - BS - C(p - q\zeta)S$  sera encore divisible par  $(p - q\zeta)^2$ , & deviendra  $= 0$ , si l'on suppose  $p - q\zeta = 0$ . Donc  $B = \frac{T}{S}$ , en mettant  $\frac{p}{q}$  à la place de  $\zeta$ . Après avoir trouvé  $B$ ;  $T - BS$  sera aussi divisible par  $p - q\zeta$ . Supposons  $\frac{T - BS}{p - q\zeta} = V$ ;  $V - CS$  reste encore divisible par  $p - q\zeta$ . Donc  $V - CS = 0$ , &  $C = \frac{V}{S}$ , en faisant toujours  $\zeta = \frac{p}{q}$ . Les numérateurs  $A, B, C$  ayant donc été ainsi déterminés, on connoîtra les fractions partielles  $\frac{A}{(p - q\zeta)^3} + \frac{B}{(p - q\zeta)^2} + \frac{C}{p - q\zeta}$ , que donne le facteur  $(p - q\zeta)^3$  du dénominateur  $N$ .

## EXEMPLE.

Soit la fraction  $\frac{\zeta\bar{\zeta}}{(1-\zeta)^3(1+\zeta\bar{\zeta})}$ , dont le dénominateur renferme le facteur cubique  $(1-\zeta)^3$ , qui donne les fractions partielles  $\frac{A}{(1-\zeta)^3} + \frac{B}{(1-\zeta)^2} + \frac{C}{1-\zeta}$ . Dans ce cas  $M = \zeta\bar{\zeta}$ , &  $S = 1 + \zeta\bar{\zeta}$ . Donc on aura d'abord  $A = \frac{\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}$ , en faisant  $1-\zeta = 0$ , ou  $\zeta = 1$ . Soit fait  $T = \frac{M-AS}{1-\zeta}$ . Donc  $T = \frac{\frac{1}{2}\zeta\bar{\zeta} - \frac{1}{2}}{1-\zeta} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta$ , & partant  $B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta}{1+\zeta\bar{\zeta}} = -\frac{1}{2}$ , en faisant  $\zeta = 1$ . Soit ensuite  $V = \frac{T-BS}{1-\zeta} = \frac{T+\frac{1}{2}S}{1-\zeta}$ ; on aura  $V = \frac{-\frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}\zeta\bar{\zeta}}{1-\zeta} = -\frac{1}{2}\zeta$ , & par conséquent  $C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}\zeta}{1+\zeta\bar{\zeta}} = -\frac{1}{4}$ , à cause de  $\zeta = 1$ . Ainsi les fractions partielles qui naissent du facteur cube  $(1-\zeta)^3$  du dénominateur, font  $\frac{1}{2(1-\zeta)^3} - \frac{1}{4(1-\zeta)^2} - \frac{1}{4(1-\zeta)}$ .

45. Si le dénominateur  $N$  de la fonction fractionnaire a pour facteur  $(p-qz)^n$ , on déterminera de la manière suivante les fractions partielles qui en résultent, savoir,  $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \dots + \frac{K}{p-qz}$ .

Soit le dénominateur  $N = (p-qz)^n Z$ , on trouvera, en raisonnant comme ci-dessus,

$$1^\circ. A = \frac{M}{Z}, \zeta \text{ étant } = \frac{p}{q}. \text{ Soit } P = \frac{M - AZ}{p - qz}; \text{ donc}$$

$$2^\circ. B = \frac{P}{Z}, \zeta \text{ étant } = \frac{p}{q}. \text{ Soit } Q = \frac{P - BZ}{p - qz}; \text{ donc}$$

$$3^\circ. C = \frac{Q}{Z}, \zeta \text{ étant } = \frac{p}{q}. \text{ Soit } R = \frac{Q - CZ}{p - qz}; \text{ donc}$$

$$4^\circ. D = \frac{R}{Z}, \zeta \text{ étant } = \frac{p}{q}. \text{ Soit } S = \frac{R - DZ}{p - qz}; \text{ donc}$$

$$5^\circ. E = \frac{S}{Z}, \zeta \text{ étant } = \frac{p}{q}. \text{ \&c.}$$

Donc, si l'on détermine de cette manière tous les numérateurs constants  $A, B, C, D, \&c.$ , on aura trouvé toutes les fractions partielles qui naissent du facteur  $(p - qz)^n$  du dénominateur  $N$ .

## E X E M P L E.

Soit proposée la fonction fractionnaire  $\frac{1+z^2}{z^2(1+z^2)}$ . Le facteur  $z^2$  du dénominateur doit donner les fractions partielles  $\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z} + \frac{E}{z}$ . Pour trouver les numérateurs constants de ces fractions, vous observerez que  $M = 1 + z^2$ ,  $Z = 1 + z^2$ , &  $\frac{P}{q} = 0$ . Faites donc le calcul suivant :

$$1^\circ. A = \frac{M}{Z} = \frac{1+z^2}{1+z^2} = 1, \text{ en faisant } z = 0.$$

$$\text{Soit } P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{z^2 - z^2}{z} = z - z^2; \text{ donc}$$

$$2^\circ. B = \frac{P}{Z} = \frac{z - z^2}{1 + z^2} = 0, \text{ à cause de } z = 0.$$

$$\text{Soit } Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - z^2}{z} = 1 - z; \text{ donc}$$

$$3^\circ. C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^2} = 1, \text{ à cause de } z = 0.$$

$$\text{Soit } R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^2}{z} = -1 - z; \text{ donc}$$

$$4^\circ. D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - z}{1 + z^2} = -1, \text{ à cause de } z = 0.$$

$$\text{Soit } S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-z - z^2}{z} = -z - z^2; \text{ donc}$$

$$5^\circ. E = \frac{S}{Z} = \frac{-z - z^2}{1 + z^2} = 0, \text{ à cause de } z = 0.$$

Les fractions cherchées sont donc  $\frac{1}{z^2} + \frac{0}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z^2}$ .

46. Donc quelle que soit la fonction rationnelle fractionnaire  $\frac{M}{N}$ , en vous y prenant de la manière suivante, vous la décomposerez en ses parties, & la ramènerez à sa forme la plus simple.

Cherchez



Cherchez tous les facteurs simples soit réels, soit imaginaires du dénominateur  $N$ ; traitez séparément ceux qui n'ont point leurs pareils, & calculez la fraction partielle qui dérive de chacun par la méthode donnée (art. 41.) Si le même facteur simple revient deux fois ou davantage, formez de leur produit une puissance qui aura la forme  $(p - qz)^n$ , & cherchez les fractions partielles qui en découlent (art. 45). Après avoir ainsi déduit de tous les facteurs simples du dénominateur les fractions partielles qui en résultent, vous en ferez une somme qui sera égale à la fonction proposée  $\frac{M}{N}$ ; à moins que cette fonction ne fût pas une fraction proprement dite; car alors il faudroit extraire la partie entière, & l'ajouter à la somme des fractions partielles que vous aurez trouvées, pour avoir sous la forme la plus simple la valeur de la fonction  $\frac{M}{N}$ . Au reste, il revient au même de chercher les fractions partielles avant ou après l'extraction de l'entier. Car chaque facteur du dénominateur fournira (f) toujours la même fraction partielle, soit que vous employiez le numérateur  $M$ , soit que vous employiez le même numérateur augmenté ou diminué d'un multiple du dénominateur  $N$ , comme il est aisé de s'en convaincre à qui-conque aura examiné les règles que nous avons données.

## E X E M P L E.

Qu'il soit question d'exprimer de la manière la plus simple la valeur de la fonction  $\frac{1}{z^2(1-z)^2(1+z)}$ . Prenez d'abord le facteur simple unique  $1 + z$  du dénominateur, vous aurez  $\frac{p}{q} = -1$ ,  $M = 1$ , &  $Z = z^2 - 2z^3 + z^4$ ; donc pour déterminer la fraction  $\frac{A}{1+z}$ , vous aurez  $A = \frac{1}{z^2 - 2z^3 + z^4} = -\frac{1}{4}$ , à cause de  $z = -1$ , & par consé-

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. E

quent le facteur  $1 + z$  donnera la fraction partielle  $-\frac{1}{4(1+z)}$ . Prenez ensuite le facteur carré  $(1 - z)^2$ , lequel donne  $\frac{P}{q} = 1$ ,  $M = 1$ , &  $Z = z^3 + z^4$ . Représentez les fractions partielles qui en résultent par  $\frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$ , vous trouverez  $A = \frac{1}{z^3 + z^4} = \frac{1}{z}$ , en faisant  $z = 1$ . Soit  $P = \frac{M - \frac{1}{z}Z}{1 - z} = \frac{1 - \frac{1}{z}z^3 - \frac{1}{z}z^4}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \frac{1}{z}z^3$ . Donc  $B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z + z^2 + \frac{1}{z}z^3}{z^3 + z^4} = \frac{z}{z^4}$ , à cause de  $z = 1$ ; & les fractions partielles demandées seront  $\frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)}$ . Enfin le troisième facteur cubique  $z^3$  donne  $\frac{P}{q} = 0$ ;  $M = 1$ , &  $Z = 1 - z - z^2 + z^3$ . Supposez qu'il fournisse ces trois fractions partielles  $\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z}$ ; vous trouverez d'abord  $A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^3} = 1$ , en faisant  $z = 0$ . Soit  $P = \frac{M - \frac{1}{z}Z}{z} = 1 + z - z^2$ ; donc  $B = \frac{P}{Z} = 1$ , à cause de  $z = 0$ . Enfin, soit  $Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - z^2$ ; vous trouverez  $C = \frac{Q}{Z} = 2$ , en faisant toujours  $z = 0$ . Ainsi la fonction proposée aura pris la forme  $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1-z)}$ . Il n'y aura point d'entier à ajouter, parce que la quantité, dont il s'agit, est une véritable fraction.

## CHAPITRE III.

*De la Transformation des Fonctions  
par Substitution.*

46. Si  $y$  est une fonction quelconque de  $z$ , & que  $z$  soit exprimé par une nouvelle variable  $x$ ,  $y$  pourra l'être de même par  $x$ .

Ainsi, supposant que  $y$  soit une fonction de  $z$ , en introduisant une nouvelle variable  $x$ , on représente les deux premières au moyen de cette troisième. Par exemple, si  $y = \frac{1-zz}{1+z^2}$  & qu'on fasse  $z = \frac{1-x}{1+x}$ , cette substitution à la place de  $z$  donnera  $y = \frac{2x}{1+xx}$ . Donc une valeur quelconque déterminée, prise pour  $x$ , déterminera celle de  $y$  & de  $z$ , & fera connoître conséquemment la valeur de  $y$  correspondante à celle de  $z$ . Si l'on fait, par exemple,  $x = \frac{1}{2}$ , on aura  $z = \frac{1}{3}$ , &  $y = \frac{4}{5}$ ; on trouveroit de même  $y = \frac{4}{5}$ , si dans l'équation  $y = \frac{1-zz}{1+z^2}$ , on faisoit  $z = \frac{1}{3}$ .

Cette introduction d'une nouvelle variable a deux usages. En effet, lorsque l'expression par laquelle  $y$  est donnée en  $z$  renferme des radicaux, c'est un moyen de s'en débarrasser; ou bien, lorsque l'équation qui exprime la relation entre  $y$  &  $z$ , est d'un degré trop élevé pour qu'on en puisse tirer une fonction explicite de  $z$  égale à  $y$ , on introduit une nouvelle variable  $x$ , par le moyen de laquelle on puisse exprimer commodément &  $y$  &  $z$ . On peut donc par-là juger d'avance du grand usage des substitutions; mais la suite en fera mieux sentir encore l'importance.

47. Si  $y = \sqrt{(a+bz)}$ , on trouvera de la manière suivante la nouvelle variable  $x$ , qui rendra rationnelles les valeurs de  $y$  & de  $z$ .

Puisqu'on se propose de rendre à la fois  $y$  &  $z$  une fonction rationnelle de  $x$ , il est clair qu'on remplira ce but en faisant  $\mathcal{V}(a + bz) = bx$ . D'abord on aura  $y = bx$ , &  $a + bz = b^2x^2$ . Donc  $z = bx^2 - \frac{a}{b}$ . Ainsi  $y$  &  $z$  deviennent des fonctions rationnelles de  $x$ , lorsque  $y$  étant  $= \mathcal{V}(a + bz)$ , on fait  $z = bx^2 - \frac{a}{b}$ ; car alors  $y = bx$ .

48. Si  $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ , on trouvera de la manière suivante la nouvelle variable  $x$ , qui rendra rationnelles les valeurs de  $y$  & de  $z$ .

Soit fait  $y = x^m$ ,  $(a + bz)^{\frac{m}{n}}$  deviendra  $= x^m$ , & par conséquent  $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$ . Donc  $a + bz = x^n$ , &  $z = \frac{x^n - a}{b}$ . Donc on aura en  $x$  des valeurs rationnelles pour les quantités  $y$  &  $z$ , en faisant  $z = \frac{x^n - a}{b}$ , ce qui donne  $y = x^m$ . Ainsi quoiqu'on ne pût obtenir sous une forme rationnelle la valeur de  $y$  en  $z$ , ni celle de  $z$  en  $y$ ; cependant on est venu à bout au moyen d'une substitution convenable, de rendre ces deux quantités une fonction rationnelle d'une même variable  $x$ .

49. Si  $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}}$ , on demande une nouvelle quantité variable  $x$  qui rende rationnelles les valeurs de  $y$  & de  $z$ .

Il est évident qu'on satisfera à la question, en supposant  $y = x^m$ ; car alors  $\left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$ , & par conséquent  $\frac{a + bz}{f + gz} = x^n$ , d'où l'on tire  $z = \frac{a - fx^n}{g x^n - b}$ ; substitution qui donne  $y = x^m$ .

On voit encore par-là que si  $\left(\frac{a + cy}{v + dy}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^m$ , on aura pour  $y$  & pour  $z$  des quantités rationnelles, en supposant l'une & l'autre formule  $= x^{m/n}$ ; car on trouvera

$y = \frac{a - \gamma x^m}{\delta x^m - \epsilon}$ , &  $z = \frac{a - f x^n}{g x^n - b}$ . Ces cas ne présentent aucune difficulté.

50. Si  $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$ , on trouvera de la manière qui suit, la substitution qu'il conviendra d'employer, pour avoir  $y$  &  $z$  sous une forme rationnelle.

Soit fait  $\sqrt{(a + bz)(c + dz)} = (a + bz)x$ , on aperçoit facilement qu'il en résulte pour  $z$  une valeur rationnelle, parce que la valeur de  $z$  est donnée par une équation simple. On aura donc  $c + dz = (a + bz)x^2$ ; d'où  $z = \frac{c - ax^2}{bxx - d}$ . Donc  $a + bz$  deviendra  $= \frac{bc - ad}{bxx - d}$ , & à cause de  $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)} = (a + bz)x$ , on aura  $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$ . Donc la fonction irrationnelle  $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$  deviendra rationnelle par la substitution de  $z = \frac{c - ax^2}{bxx - d}$ ; ce qui donnera  $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$ . Par exemple, si  $y = \sqrt{aa - z^2} = \sqrt{(a + z)(a - z)}$ , à cause de  $b = +1$ ,  $c = a$ ,  $d = -1$ , soit fait  $z = \frac{a - ax^2}{1 + xx}$ , & on aura  $y = \frac{2ax}{1 + xx}$ . Toutes les fois donc que la quantité qui est après le signe  $\sqrt{\phantom{x}}$ , aura deux facteurs simples réels, la réduction en quantités rationnelles se fera de la manière qui vient d'être exposée; mais si les deux facteurs simples sont imaginaires, on s'y prendra comme il suit.

51. Soit  $y = \sqrt{p + qz + rzz}$ ; on demande quelle valeur on doit substituer à  $z$ , pour rendre la valeur de  $y$  rationnelle.

On peut arriver à ce but de plusieurs manières, suivant que  $p$  &  $r$  seront des quantités positives ou négatives. Soit d'abord  $p$  une quantité positive, & mettons  $aa$  pour  $p$ ; car quoique  $p$  ne soit pas un carré, l'irrationalité des quantités constantes ne change rien pour le moment. Soit donc :

$$1. y = \sqrt{aa + bz + cz^2}; \text{ \& supposons } y = \sqrt{(a + bz + cz^2)}$$

$= a + xz$ , nous aurons  $b + cz = 2ax + xxz$ ; d'où  $z = \frac{b-2ax}{xx-c}$ , & par conséquent  $y = a + xz = \frac{bx-axx-ac}{xx-c}$ ; expressions dans lesquelles  $z$  &  $y$  sont des fonctions rationnelles de  $x$ . Soit maintenant

II.  $y = \sqrt{(aaz + bz + c)}$ ; & supposons  $\sqrt{(aaz + bz + c)} = az + x$ , nous aurons  $bz + c = 2axz + xx$ , &  $z = \frac{xx-c}{b-2ax}$ .  
Donc  $y = az + x = \frac{-ac + bx - axx}{b - 2ax}$ .

III. Si  $p$  &  $r$  sont des quantités négatives, alors à moins qu'on n'ait  $qq > 4pr$ , la valeur de  $y$  sera toujours imaginaire; mais si  $qq > 4pr$ , l'expression  $p + qz + rz^2$  pourra être décomposée en deux facteurs; ce qui revient au cas de l'art. précédent. Au reste, il est souvent plus commode de ramener à cette forme:  $y = \sqrt{[aa + (b + cz)(d + ez)]}$ ; dans ce cas, pour faire disparaître le radical, on fera  $y = a + (b + cz)x$ , & on aura  $d + ez = 2ax + bxx + cxxz$ ; d'où  $z = \frac{d-2ax-bxx}{cxx-e}$ , &  $y = \frac{-ae + (cd-be)x - acxx}{cxx-e}$ .  
Quelquefois il est plus commode de ramener à cette autre forme:  $y = \sqrt{[aa + (b + cz)(d + ez)]}$ . Dans ce second cas, faites  $y = az + (b + cz)x$ ; vous aurez  $d + ez = 2axz + bxx + cxxz$ , &  $z = \frac{bxx-d}{e-2ax-cxx}$ , &  $y = \frac{-ad + (be-cd)x - abxx}{e-2ax-cxx}$ .

## E X E M P L E.

Soit donnée cette fonction irrationnelle de  $z$ :  $y = \sqrt{-1 + 3z - z^2}$ ; laquelle peut être ramenée à la forme  $y = \sqrt{(1 - 2 + 3z - z^2)} = \sqrt{[1 - (1 - z)(2 - z)]}$ ; faites  $y = 1 - (1 - z)x$ ; vous aurez  $-2 + z = -2x + xx - xxz$  &  $z = \frac{2-2x+xx}{1+xx}$ ; ensuite  $1 - z = \frac{-1+2x}{1+xx}$ , &  $y = 1 - (1 - z)x = \frac{1+x-xx}{1+xx}$ . Voilà à peu-près les cas que présente l'Analyse indéterminée, ou la Méthode de

Diophante, & on emploieroit inutilement une substitution rationnelle, pour ramener à une forme, qui le fût aussi, les autres cas, qui ne sont pas compris dans ceux que nous avons traités ici. C'est pourquoi je passe à l'autre usage de la substitution.

52. Si la fonction  $y$  de  $z$  est telle, que  $ay^a + bz^c + cy^y z^d = 0$ ; il s'agit de trouver une nouvelle variable  $x$ , au moyen de laquelle on puisse assigner explicitement les valeurs de  $y$  & de  $z$ .

Comme la résolution générale des équations n'est pas connue, on ne peut tirer de l'équation proposée  $ay^a + bz^c + cy^y z^d = 0$ , ni la valeur de  $y$  en  $z$ , ni celle de  $z$  en  $y$ ; pour remédier à cet inconvénient, faisons  $y = x^m z^n$ , nous aurons  $ax^{am} z^{an} + bz^c + cx^{ym} z^{yn+d} = 0$ . Il s'agit maintenant de déterminer l'exposant  $n$ , de manière que la valeur de  $z$  puisse se tirer de cette équation; ce qui peut s'effectuer de trois manières.

I. Soit  $an = c$ , & par conséquent  $n = \frac{c}{a}$ ; en divisant l'équation par  $z^{an} = z^{\frac{c}{a}}$ , on aura  $ax^{am} + b + cx^{ym} z^{yn-d} = 0$ ; d'où s'ensuit  $z = \left( \frac{-ax^{am} - b}{cx^{ym}} \right)^{\frac{1}{yn - \frac{c}{a} + d}}$ , ou  $z = \left( \frac{-ax^{am} - b}{cx^{ym}} \right)^{\frac{a}{cy - a\frac{c}{a} + ad}}$ , &  $y = x^m \left( \frac{-ax^{am} - b}{cx^{ym}} \right)^{\frac{c}{cy - a\frac{c}{a} + ad}}$ .

II. Soit  $c = y$ ;  $n + d$  ou  $n = \frac{c-d}{y}$ ; l'équation étant divisée par  $z^{\frac{c}{y}}$  donnera  $ax^{am} z^{an - \frac{y}{y}} + b + cx^{ym} = 0$ ; d'où  $z = \left( \frac{-b - cx^{ym}}{ax^{am}} \right)^{\frac{1}{an - \frac{y}{y}}} = \left( \frac{-b - cx^{ym}}{ax^{am}} \right)^{\frac{y}{a\frac{c}{y} - ad - cy}}$ , &

$y = x^m \left( \frac{-b - cx^{ym}}{ax^{am}} \right)^{\frac{c-d}{a\frac{c}{y} - ad - cy}}$ .

III. Soit  $an = \gamma n + \delta$  ou  $n = \frac{\delta}{a-\gamma}$ , en divisant l'équation par  $z^{an}$ , on aura  $ax^{am} + bz^{\frac{\delta}{a-\gamma}-an} + cx^{\gamma m} = 0$ ; d'où l'on tire  $z = \left(\frac{-ax^{am}-cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\frac{\delta}{a-\gamma}-an}} = \dots$

$$\left(\frac{-ax^{am}-cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{a-\gamma}{a\frac{\delta}{a-\gamma}-\gamma-\delta}}, \text{ \& } y = x^m \left(\frac{-ax^{am}-cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{a\frac{\delta}{a-\gamma}-\gamma-\delta}}.$$

On a donc obtenu de trois manières différentes des fonctions de  $x$  égales à  $z$  & à  $y$ . De plus, on peut prendre pour  $m$  une valeur arbitraire, excepté zéro, & par ce moyen les formules pourront être ramenées à l'expression la plus commode.

## E X E M P L E.

Supposons que la nature de la fonction  $y$  soit exprimée par cette équation  $y^3 + z^3 - cyz = 0$ , & cherchons les fonctions de  $x$  égales à  $y$  & à  $z$ . Nous aurons donc  $a = -1$ ;  $b = -1$ ;  $\alpha = 3$ ;  $\epsilon = 3$ ;  $\gamma = 1$ , &  $\delta = 1$ .

La première manière, en faisant  $m = 1$ , donnera  $z = \left(\frac{x^3+1}{cx}\right)^{-1}$ , &  $y = x \left(\frac{x^3+1}{cx}\right)^{-1}$ ; ou  $z = \frac{cx}{1+x^3}$ , &  $y = \frac{cx}{1+x^3}$ .

La seconde donnera ces valeurs:  $z = \left(\frac{cx-1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ , &  $y = x \left(\frac{cx-1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ; ou  $z = \frac{1}{x} \sqrt[3]{(cx-1)}$  &  $y = \frac{1}{x} \sqrt[3]{(cx-1)^2}$ .

La troisième fournira les résultats suivants:  $z = (cx-x^3)^{\frac{2}{3}}$ , &  $y = x(cx-x^3)^{\frac{1}{3}}$ .

53. On comprend par-là, qu'en suivant une marche rétrograde, on pourra former des équations entre  $y$  &  $z$ , & indiquer la manière de les résoudre, en introduisant une nouvelle variable  $x$ .

Car supposons que la résolution ait déjà été faite, & qu'elle



qu'elle ait donné ces valeurs  $z = \left( \frac{ax^a + bx^b + cx^c + \&c.}{A + Bx^a + Cx^b + \&c.} \right)^{\frac{p}{r}}$ ,

&  $y = x \left( \frac{ax^a + bx^b + cx^c + \&c.}{A + Bx^a + Cx^b + \&c.} \right)^{\frac{q}{r}}$ . Donc  $y^p = x^p z^q$ ,

&  $x = y z^{-\frac{q}{p}}$ . Puisque  $z^{\frac{r}{p}} = \frac{ax^a + bx^b + cx^c + \&c.}{A + Bx^a + Cx^b + \&c.}$ , si

nous mettons au lieu de  $x$  sa valeur  $y z^{-\frac{q}{p}}$ , il en résultera l'équation  $z^{\frac{r}{p}} = \frac{ay^a z^{-\frac{aq}{p}} + by^b z^{-\frac{bq}{p}} + cy^c z^{-\frac{cq}{p}} + \&c.}{A + By^a z^{-\frac{aq}{p}} + Cy^b z^{-\frac{bq}{p}} + \&c.}$ ;

qui se réduit à celle-ci:  $Az^{\frac{r}{p}} + By^a z^{\frac{r-\mu q}{p}} + Cy^b z^{\frac{r-\nu q}{p}} + \&c. = ay^a z^{\frac{-aq}{p}} + by^b z^{\frac{-bq}{p}} + cy^c z^{\frac{-cq}{p}} + \&c.$  : laquelle étant multipliée par  $z^{\frac{aq}{p}}$  deviendra  $Az^{\frac{aq+r}{p}} + By^a z^{\frac{aq-\mu q+r}{p}} + Cy^b z^{\frac{aq-\nu q+r}{p}} + \&c. \dots = ay^a + by^b z^{\frac{aq-\mu q}{p}} + cy^c z^{\frac{aq-\nu q}{p}} + \&c.$  Supposons  $\frac{aq+r}{p} = m$ , &  $\frac{aq-\mu q}{p} = n$  :  $p$  deviendra  $= a - \epsilon$ ;  $q = n$ ; &  $r = am - \epsilon m - an$ ; d'où naîtra l'équation  $Az^m + By^a z^{\frac{m-\mu n}{a-\epsilon}} + Cy^b z^{\frac{m-\nu n}{a-\epsilon}} + \&c. = ay^a + by^b z^n + cy^c z^{\frac{(a-\nu)n}{a-\epsilon}} + \&c.$  laquelle par conséquent se résoudra de manière à avoir . . . . .

$$z = \left( \frac{ax^a + bx^b + cx^c + \&c.}{A + Bx^a + Cx^b + \&c.} \right)^{\frac{a-\epsilon}{am - \epsilon m - an}} \& \dots$$

$$y = x \left( \frac{ax^a + bx^b + cx^c + \&c.}{A + Bx^a + Cx^b + \&c.} \right)^{\frac{n}{am - \epsilon m - an}} \dots$$

ou bien supposons  $\frac{aq+r}{p} = m$ , &  $\frac{aq-\mu q+r}{p} = n$ , nous aurons  $m-n = \frac{\mu q}{p}$ ; &  $\frac{q}{p} = \frac{m-n}{\mu}$ , &  $\frac{r}{p} = m - \frac{am+an}{\mu}$ . Donc  $p$  devient  $= \mu$ ,  $q = m-n$ ; &  $r = \mu m - am + an$ . Nous concluons de-là l'équation:

$$A\bar{z}^m + B y^\mu \bar{z}^n + C y^\nu \bar{z}^{\frac{\mu m - \nu(m-n)}{\mu}} + \&c. = a y^\alpha + b y^\beta \bar{z}^{\frac{(a-\beta)(m-n)}{\mu}} + c y^\gamma \bar{z}^{\frac{(a-\gamma)(m-n)}{\mu}} + \&c;$$

dont la résolution donnera . . . . .

$$\bar{z} = \left( \frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.} \right)^{\frac{\mu}{\mu m - am + an}} \& \dots \dots$$

$$y = x \left( \frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu} \right)^{\frac{m-n}{\mu m - am + an}}$$

54. Si la dépendance entre  $y$  &  $z$  est telle qu'elle soit exprimée par  $ayy + byz + czz + dy + ez = 0$ ; on rendra rationnelle la valeur de  $y$  & celle de  $z$ , de la manière qui suit.

Supposez  $y = x\bar{z}$ ; en divisant par  $\bar{z}$ , vous aurez  $axx\bar{z} + bx\bar{z} + c\bar{z} + dx + e = 0$ , & par conséquent

$$(i) \bar{z} = \frac{-dx - e}{axx + bx + c}, \& y = \frac{-dxx - ex}{axx + bx + c}.$$

On peut ramener à la forme proposée cette équation-ci entre  $y$  &  $\bar{z}$ :  $ayy + by\bar{z} + c\bar{z}\bar{z} + dy + e\bar{z} + f = 0$ , en diminuant ou en augmentant l'une & l'autre variable d'une quantité constante. On pourra donc rendre rationnelles les valeurs des variables en introduisant une nouvelle variable  $x$ .

55. Si le rapport entre  $y$  &  $z$  est donné par l'équation  $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = 0$ , on pourra avoir une expression rationnelle des deux variables  $y$  &  $z$  par le moyen d'une nouvelle variable  $x$ , en s'y prenant comme il suit:

Soit  $y = xz$ ; la substitution faite, toute l'équation pourra être divisée par  $zz$ ; d'où résultera l'équation  $ax^3z + bxxz + cxz + dz + exx + fx + g = 0$ ;

donc  $z = \frac{-exx - fx - g}{ax^3 + bxx + cx + d}$ , & par conséquent . . . . .

$$y = \frac{-ex^3 - fxx - gx}{ax^3 + bxx + cx + d}.$$

Ces cas mettront à portée de juger facilement qu'elles sont les équations plus élevées entre  $y$  &  $z$ , qui seront (k) susceptibles d'une semblable résolution; ces cas, au reste, sont renfermés dans les formules précédentes (art. 53); mais comme les formules générales ne s'appliquent pas aussi facilement à des cas de cette nature, qui reviennent plus souvent, il a paru à propos d'en traiter à part quelques-uns.

56. Si  $y$  dépend de  $z$ , tellement qu'on ait  $ayy + byz + czz = d$ , les deux quantités  $y$  &  $z$  seront exprimées de la manière suivante par la variable  $x$ .

Faites  $y = xz$ . Partant  $(axx + bx + c) z z = d$ .

Donc  $z = \sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}$ , &  $y = x \sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}$ .

Semblablement, si  $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz$ ; faites  $y = xz$ ; toute l'équation étant divisée par  $z$  donnera  $(ax^3 + bx^2 + cx + d) z z = ex + f$ .

Donc  $z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}$ , &  $y = x \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}$ .

Au reste, ces cas & ceux qui admettent de semblables solutions, sont renfermés dans l'article qui suit.

57. Si le rapport entre  $y$  &  $z$  est exprimé par l'équation  $ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \&c. = ay^n + ey^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \&c$ ; le procédé suivant vous donnera facilement en  $x$  les valeurs de  $y$  & de  $z$ .

Faites  $y = xz$ ; après la substitution toute l'équation sera divisible par  $z^n$ , en supposant  $m > n$ . Elle deviendra  $(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.) z^{m-n} = ax^n$

+  $6x^{n-1}$  +  $7x^{n-2}$  + &c. d'où vous conclurez . . .

$$z = \left( \frac{ax^n + 6x^{n-1} + 7x^{n-2} + dx^{n-3} + \&c.}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \&c.} \right)^{\frac{1}{m-n}} \&c$$

$$y = x \left( \frac{ax^n + 6x^{n-1} + 7x^{n-2} + dx^{n-3} + \&c.}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \&c.} \right)^{\frac{1}{m-n}}$$

Cette résolution a lieu toutes les fois que l'équation entre  $x$  &  $y$  renferme un nombre de dimensions double ; comme dans le cas précédent, où le nombre des dimensions dans chacun des termes est ou  $m$  ou  $n$ .

58. *Si l'on se trouve dans l'équation trois sortes de dimensions, de manière que la plus grande surpasse la moyenne, autant que celle-ci surpasse la plus petite ; on pourra toujours déterminer  $y$  &  $z$  en  $x$  par la résolution d'une équation du second degré.*

Car, si l'on fait  $y = xz$  ; après avoir divisé par la plus petite puissance de  $z$ , la valeur de  $z$  en  $x$ , dépendra de l'extraction d'une racine quarrée, comme on le verra par les exemples suivants.

#### E X E M P L E I.

Soit  $ay^3 + by^2z + cyzz + dz^3 = 2eyy + 2fyz + 2gz^2 + hy + iz$  ; faisons  $y = xz$  ; après avoir divisé par  $z$ , il restera  $(ax^3 + bxx + cx + d)zz = 2(exx + fx + g)z + hx + i$  ; d'où nous tirerons par la valeur de  $z$ .

$$z = \frac{exx + fx + g + \sqrt{(exx + fx + g)^2 + (ax^3 + bxx + cx + d)(hx + i)}}{ax^3 + bxx + cx + d}$$

ce qui donnera  $y = xz$ .

#### E X E M P L E II.

Soit  $y^5 = 2az^3 + by + cz$  ; nous ferons  $y = xz$ .  
Donc  $x^5z^4 = 2az^3 + bx + c$  ; &  $z^4 = \frac{a \pm \sqrt{(aa + bx^5 + cx^5)}}{x^5}$  ;

donc enfin  $z = \frac{\sqrt{[a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^4)]}}}{xx\sqrt{x}}$  &  $y = \frac{\sqrt{[a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^4)]}}}{x\sqrt{x}}$ .

E X E M P L E I I I .

Soit l'équation  $y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cz^4$ , dans laquelle les trois dimensions différentes sont 10, 7 & 4. Faites  $y = xz$ , divisez par  $z^3$ , & vous aurez  $x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c$ , ou  $z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}}$ ; donc  $z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{(aa + bx^9 + cx^3)}}{x^{10}}$ . Par conséquent  $z = \frac{\sqrt{[a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^3)]}}}{x^3}$  &  $y = \frac{\sqrt{[a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^3)]}}}{x^2}$ . Ces exemples sont plus que suffisants pour faire connoître l'usage des substitutions dont nous venons de parler.

C H A P I T R E I V .

*Du développement des Fonctions en Séries infinies.*

59. La formule  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c$ , en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de  $z$ ; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes. D'ailleurs une semblable série, quoique infinie, paroît plus propre à faire connoître la nature des fonctions transcendantes. En effet, si la nature d'une fonction entière est bien déterminée, lorsque cette fonction est développée suivant les différentes puissances de  $z$ , & ramenée par conséquent à la forme  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c$ ; la même forme paroît aussi la plus propre à représenter à l'esprit le caractère de toutes les

autres fonctions, quoique le nombre des termes de la suite soit infini. Au reste, il est évident qu'une fonction non entière de  $z$  ne peut être représentée par un nombre fini de termes de cette sorte:  $A + Bz + Cz^2 + \&c$ ; car si elle pouvoit l'être, elle seroit par cela même une fonction entière; & si quelqu'un doutoit qu'elle pût être exprimée par une telle série d'un nombre infini de termes, le développement même de chaque fonction ne lui laissera aucun doute; mais pour plus de généralité, outre les puissances de  $z$ , qui ont des exposans positifs & entiers, on doit admettre des puissances quelconques. Ainsi il ne restera aucun doute, que toute fonction de  $z$  ne puisse être transformée en une série infinie de cette forme:  $Az^a + Bz^c + Cz^r + Dz^s$ , les exposans  $a, c, r, s, \&c.$  exprimant des nombres quelconques.

60. On sait qu'au moyen d'une division continue, la fraction  $\frac{a}{a + \epsilon z}$  se résout en cette suite infinie:  $\frac{a}{a} - \frac{a\epsilon z}{a^2} + \frac{a\epsilon^2 z^2}{a^3} - \frac{a\epsilon^3 z^3}{a^4} + \frac{a\epsilon^4 z^4}{a^5} - \&c$ , laquelle nomme une progression géométrique, parce que chaque terme a un rapport constant  $1: \frac{\epsilon z}{a}$ , avec celui qui le suit.

Il y a une autre manière de trouver cette série; c'est de la supposer d'avance, quoique inconnue, toute développée: car, soit  $\frac{a}{a + \epsilon z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c$ . Pour produire l'égalité, cherchons les coefficients  $A, B, C, D, \&c$ ; nous aurons  $a = (a + \epsilon z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.)$  & après la multiplication faite, . . . . .  
 $a = aA + aBz + aCz^2 + aDz^3 + aEz^4 + \&c.$   
 $+ \epsilon Az + \epsilon Bz^2 + \epsilon Cz^3 + \epsilon Dz^4 + \&c.$

Par conséquent nous devons avoir  $a = aA$ , donc  $A = \frac{a}{a}$ ; il faudra ensuite évaluer à zéro la somme des coefficients de chaque puissance de  $z$ ; ce qui donnera les équations:

$aB + cA = 0$  chaque coefficient trouvé fera donc con-  
 $aC + cB = 0$  noître facilement le suivant. Car si le  
 $aD + cC = 0$  coefficient d'un terme quelconque  $= P$ ,  
 $aE + cD = 0$  & le suivant  $= Q$ ; on aura  $aQ + cP =$   
 &c.  $0$ , ou  $Q = -\frac{cP}{a}$ . Ainsi le premier

terme  $A = \frac{a}{a}$ , étant une fois déterminé, on en conclura les valeurs des lettres suivantes  $B, C, D$ , &c. qu'on trouvera les mêmes que celles que donne la division. Au reste, on voit à l'inspection, que dans la série trouvée pour  $\frac{a}{a+cz}$ ,

le coefficient de la puissance  $z^n$  sera  $= \mp \frac{a c^n}{a^n + 1}$ , le signe  $+$  ayant lieu lorsque  $n$  est un nombre pair, & le signe  $-$  lorsque  $n$  est impair, ou si l'on veut, le coefficient sera  $= \frac{a}{a} \left( \frac{-c}{a} \right)^n$ .

61. On peut de même, au moyen d'une division continue, convertir en une série infinie la fraction  $\frac{a+bz}{a+cz+cz^2}$ .

Mais comme la division est une opération ennuyeuse, & qu'elle ne fait pas connoître si facilement la nature de la série infinie, il sera plus commode de présupposer la série qu'on doit avoir, & de la déterminer de la manière précédente.

Soit donc  $\frac{a+bz}{a+cz+cz^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$   
 multipliez de part & d'autre par  $a + cz + cz^2$ , & vous aurez  
 $a + bz = aA + aBz + aCz^2 + aDz^3 + aEz^4 + \&c.$   
 $+ cAz + cBz^2 + cCz^3 + cDz^4 + \&c.$   
 $+ cAz^2 + cBz^3 + cCz^4 + \&c.$

Donc  $aA = a$ ;  $aB + cA = b$ ; d'où  $A = \frac{a}{a}$ , &  $B = \frac{b}{a} - \frac{ac}{a^2}$ . Les autres lettres seront déterminées par les équations suivantes: . . . . .

$aC + eB + \gamma A = 0$  On peut donc, au moyen de deux  
 $aD + eC + \gamma B = 0$  coefficients consécutifs quelconques,  
 $aE + eD + \gamma C = 0$  trouver le suivant. Par exemple,  
 $aF + eE + \gamma D = 0$  si les deux coefficients consécutifs sont  
 &c.  $P$  &  $Q$ , & le suivant  $R$ , on aura  
 $aR + eQ + \gamma P = 0$ , ou  $R = \frac{-eQ - \gamma P}{a}$ . Ainsi les deux  
 premières quantités  $A$  &  $B$  une fois calculées, les autres  
 dériveront successivement de celles-ci; & on aura la série  
 infinie  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c.$  égale à la fraction  
 proposée  $\frac{a + b\zeta}{a + e\zeta + \gamma\zeta^2}$ .

## E X E M P L E.

Soit la fraction  $\frac{1 + 2\zeta}{1 - \zeta - \zeta^2}$ , & prenons pour la représenter  
 la série  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c.$  à cause de  $a = 1$ ;  
 $b = 2$ ;  $e = 1$ ;  $e = -1$ ;  $\gamma = -1$ , nous aurons d'abord  $A = 1$ ;  
 &  $B = 3$ ; ensuite . . . . .  
 $C = B + A$  Donc chaque coefficient est égal à la somme  
 $D = C + B$  des deux précédents. Ainsi, en supposant  
 $E = D + C$  connus les deux coefficients consécutifs  $P$  &  $Q$ ,  
 $F = E + D$  le suivant fera  $R = P + Q$ . Puis donc  
 &c. que les deux premiers coefficients  $A$  &  $B$  sont  
 connus, la fraction proposée  $\frac{1 + 2\zeta}{1 - \zeta - \zeta^2}$  se change en cette  
 série infinie  $1 + 3\zeta + 4\zeta^2 + 7\zeta^3 + 11\zeta^4 + 18\zeta^5 + \&c.$   
 qu'on peut prolonger sans peine aussi loin qu'on voudra.

62. Ce que nous venons de dire suffit pour mettre à  
 portée de bien connoître la nature des séries infinies, qui  
 proviennent du développement des fonctions fractionnaires;  
 car elles observent une telle loi, que chaque terme peut  
 être déterminé par quelques-uns de ceux qui précédent.  
 Par exemple, si le dénominateur de la fraction proposée  
 est  $a + e\zeta$ , & qu'on imagine la série infinie



$A + Bz + Cz^2 + \dots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \&c.$ ; un coefficient quelconque  $Q$  sera formé du coefficient précédent par l'équation  $aQ + \epsilon P = 0$ . Mais si le dénominateur est un trinome  $a + \epsilon z + \gamma z^2$ , un coefficient quelconque  $R$  de la série sera déterminé, au moyen des deux précédens  $Q$  &  $P$  par l'équation  $aR + \epsilon Q + \gamma P = 0$ . De même, si le dénominateur est un quadrinome, tel que  $a + \epsilon z + \gamma z^2 + \delta z^3$ , on obtiendra la valeur d'un coefficient quelconque  $S$  de la série, au moyen des trois précédens  $R$ ,  $Q$  &  $P$ , en faisant  $aS + \epsilon R + \gamma Q + \delta P = 0$ ; il en sera de même des autres. Ainsi dans ces sortes de séries, chaque terme est déterminé par quelques-uns des termes qui précèdent, suivant une certaine loi constante, qui se conclut naturellement du dénominateur de la fraction qui produit la série. Le célèbre MOYRE, qui a examiné plus particulièrement la nature de ces séries, les appelle *Récurrentes*, par la raison qu'il faut recourir aux termes qui précèdent, pour trouver ceux qui suivent.

63. Au reste, pour la formation de ces séries, il faut que le terme constant  $a$  du dénominateur ne soit pas  $= 0$ ; car, ayant trouvé le premier terme de la série  $A = \frac{a}{a}$ , celui-ci & tous les suivans seroient infinis si  $a$  étoit  $= 0$ . Excepté donc ce cas que je traiterai dans la suite, la fonction fractionnaire, qui doit être transformée en une série infinie

récurrente, aura cette forme:  $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$ . Je

suppose le premier terme du dénominateur  $= 1$ , car une fraction peut toujours être ramenée à cet état, à moins que le premier terme ne soit  $= 0$ ; & je regarde tous les autres termes du dénominateur comme négatifs, afin que tous les termes de la série qui en dérivent soient positifs. En effet, si la série récurrente, dont il s'agit, est représentée par  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ , les coefficients se détermineront comme il suit:

EULER, *Introduction d'Anal. infin.* Tome I. G

$$A = a$$

$$B = aA + b$$

$$C = aB + cA + c$$

$$D = aC + cB + \gamma A + d$$

$$E = aD + cC + \gamma B + \delta A + e$$

&c.

Chaque coefficient est donc égal à la somme de quelques multiples des précédents, jointe à un certain nombre que donne le numérateur; mais à moins que ce numérateur n'ait une infinité de termes, cette addition cessera bientôt, & dès-lors chaque terme sera formé suivant une loi constante par quelques uns des précédents. Mais pour que la loi de la progression ne soit pas troublée, il conviendra d'employer une fonction fractionnaire proprement dite; car si on en employoit une autre, la partie entière que celle-ci contiendrait, entreroit dans la série, & interromproit la loi de la progression dans les termes qu'elle augmenteroit ou diminueroit. Par exemple, cette fraction improprement dite  $\frac{1+2x-x^2}{1-x-x^2}$ , donnera la série  $1 + 3x + 4x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 16x^5 + 26x^6 + 42x^7 + \&c$ ; où le quatrième terme fait exception à la loi, par laquelle chaque coefficient est la somme des deux précédents.

64. Les séries récurrentes méritent une attention particulière, lorsque le dénominateur de la fraction, d'où elles naissent, est une puissance. Par exemple, la fraction  $\frac{a+bx}{(1-ax)^2}$  réduite en série donnera

$$a + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + 6a^4x^4 + \&c.$$

$$+ b + 2ab + 3a^2b + 4a^3b$$

série dans laquelle le coefficient de la puissance  $x^n$  est  $(n+1)a^n + na^{n-1}b$ . Cependant cette série sera récurrente, parce que chaque terme est déterminé par les deux précédents, suivant une loi que fait appercevoir le dévelop-

pement du dénominateur  $1 - 2a\zeta + a^2\zeta^2$ . Si on fait  $a = 1$ ; &  $\zeta = 1$ , la série devient la progression arithmétique  $a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) + \&c.$  dont les différences sont constantes. Donc toute progression arithmétique est une série récurrente. En effet, soit  $A + B + C + D + E + F + \&c.$  une progression arithmétique; on trouvera  $C = 2B - A$ ;  $D = 2C - B$ ;  $E = 2D - C$  &c.

65. Ensuite cette fraction  $\frac{a + b\zeta + c\zeta^2}{(1 - a\zeta)^3}$ , à cause de  $\frac{1}{(1 - a\zeta)^3} = (1 - a\zeta)^{-3} = 1 + 3a\zeta + 6a^2\zeta^2 + 10a^3\zeta^3 + 15a^4\zeta^4 + \&c.$  se changera en cette série infinie: . . . . .

$$\begin{aligned} & a + 3a^2a + 6a^3a + 10a^4a + 15a^5a + \&c. \\ & + b\zeta + 3ab\zeta^2 + 6a^2b\zeta^3 + 10a^3b\zeta^4 + \&c. \\ & + c + 3ac + 6a^2c + \&c. \end{aligned}$$

dans laquelle la puissance  $\zeta^n$  a pour coefficient  $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a^n a + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} a^{n-2} c$ . Si on suppose  $a = 1$  &  $\zeta = 1$ , la série deviendra une progression générale du second ordre, dont les différences secondes sont constantes. Représentons cette progression par la suite  $A + B + C + D + E + \&c$ ; elle fera en même-temps une série récurrente, dont chaque terme sera formé des trois précédents, de manière à avoir  $D = 3C - 3B + A$ ;  $E = 3D - 3C + B$ ;  $F = 3E - 3D + C$  &c. Comme les différences secondes des termes en progression arithmétique sont aussi égales, savoir = 0, il s'enfuit que cette propriété convient également aux progressions arithmétiques.

66. Semblablement cette fraction  $\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3}{(1 - a\zeta)^4}$  donnera une série infinie, dans laquelle une puissance quelconque  $\zeta^n$  de  $\zeta$  aura pour coefficient:  $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} d$ . En faisant donc  $a = 1$  &  $\zeta = 1$ ,

cette série renfermera toutes les progressions algébriques du troisième ordre, dont les différences troisièmes sont constantes. Donc toutes les progressions de cet ordre que je représente par  $A + B + C + D + E + F + \&c.$  seront des séries récurrentes dépendantes du dénominateur  $1 - 4z + 6z^2 - 4z^3 + z^4$ ; d'où il s'enfuit que  $E = 4D - 6C + 4B - A$ ;  $F = 4E - 6D + 4C - B$ ; &c. propriété qui s'applique en même-temps à toutes les progressions d'ordres inférieurs.

67. On fera voir de la même manière, que toutes les progressions algébriques, de quelque ordre qu'elles soient, qui tiennent à des différences constantes, sont des séries récurrentes, dont la loi est déterminée par le développement du dénominateur  $(1 - z)^n$ , le nombre  $n$  étant plus grand que celui qui indique l'ordre de la progression. Ainsi la suite  $a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m + \&c.$  représentant une progression de l'ordre  $m$ ; on aura par la nature des séries récurrentes . . . . .  
 $0 = a^m - n(a + b)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a + 2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times$   
 $(a + 3b)^m + \dots \pm \frac{n}{1} [a + (n-1)b]^m \mp (a + nb)^m$ ;  
 expression dans laquelle on prend les signes supérieurs si  $n$  est impair, & les signes inférieurs si  $n$  est pair. Cette équation est donc toujours vraie si  $n$  est un nombre entier plus grand que  $m$ . On peut juger par-là de l'étendue de la théorie des séries récurrentes.

68. Si le dénominateur n'est pas une puissance d'un binôme, mais d'un polynôme quelconque, le développement de la série peut être autrement considéré. En effet, soit la fraction  $\frac{1}{(1 - az - bz^2 - cz^3 - \&c.)^m + 1}$ ; la série infinie, qui en résultera, sera . . . . .

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{(m+1)}{1} a \zeta + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} a^2 \zeta^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \zeta^3 \\
 + \frac{(m+1)}{1} c \zeta + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} 2 a c \zeta^2 + \&c. \\
 + \frac{(m+1)}{1} \gamma \zeta
 \end{aligned}$$

Pour voir plus à fond la nature de cette série, représentons-la par des coefficients indéterminés, de cette manière  $1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \dots + K\zeta^{n-3} + L\zeta^{n-2} + M\zeta^{n-1} + N\zeta^n + \&c$  ; un coefficient  $N$  sera déterminé par autant de coefficients précédents qu'il y a de lettres  $a, c, \gamma, \delta, \&c.$  de sorte que  $N = \frac{m+n}{n} a M + \frac{2m+n}{n} c L + \frac{3m+n}{n} \gamma K + \frac{4m+n}{n} \delta I + \&c.$

*Voiez la note de l'art. 76.*

Quoique cette loi ne soit pas constante, mais dépendante de l'exposant de la puissance de  $\zeta$  ; cependant il existe pour la même série une autre loi constante que donne le dénominateur développé, & convenable à la nature des séries récurrentes. Au reste, il faut observer que cette loi, non constante, dont nous venons de parler, n'a lieu que dans le cas où le numérateur de la fraction est l'unité ; car s'il contenoit quelques puissances de  $\zeta$ , cette loi deviendrait beaucoup plus compliquée ; ce que les principes du calcul différentiel feront mieux entendre.

69. Comme nous avons supposé jusqu'ici que le premier terme du dénominateur n'étoit pas  $= 0$ , & que nous avons pris l'unité pour ce terme, voyons à présent quelles séries nous obtiendrons, lorsqu'il n'y a pas de terme constant dans le dénominateur. Dans ce cas, la fonction fractionnaire aura cette forme  $\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + \&c}{\zeta(1 - a\zeta - b\zeta^2 - \&c)}$  ; négligeons le facteur  $\zeta$  du dénominateur, & réduisons la partie restante de la fraction  $\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + \&c}{1 - a\zeta - b\zeta^2 - \&c}$ , en une série récurrente  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c$  ; il est évident qu'on aura  $\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + \&c}{\zeta(1 - a\zeta - b\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \&c)} = \frac{A}{\zeta} + B + C\zeta + D\zeta^2 + E\zeta^3 + \&c$  ; on aura de même

54 DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

$$\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + \&c.}{\zeta^2(1 - a\zeta - b\zeta^2 - \&c.)} = \frac{A}{\zeta^2} + \frac{B}{\zeta} + C + D\zeta + E\zeta^2 + \&c;$$

& en général  $\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + \&c.}{\zeta^m(1 - a\zeta - b\zeta^2 - c\zeta^3 - \&c.)} = \frac{A}{\zeta^m} + \frac{B}{\zeta^{m-1}} + \frac{C}{\zeta^{m-2}} + \frac{D}{\zeta^{m-3}} + \&c;$  ; quelque soit le nombre  $m$ .

70. Puisqu'on peut, à la place de  $\zeta$ , introduire une autre variable  $x$  dans la fonction fractionnaire, & donner par ce moyen une infinité de formes à chaque fonction, on pourra par la même raison réduire une fraction proposée en séries récurrentes d'une infinité de manières. Soit proposée, par exemple, la fraction  $y = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta - \zeta\zeta}$ , qui donne la série récurrente  $y = 1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + 5\zeta^3 + 8\zeta^4 + \&c;$ ; en faisant  $\zeta = \frac{1}{x}$ ,  $y$  devient  $= \frac{x + x}{xx - x + 1} = \frac{-x(1 + x)}{1 + x - xx}$ . Or  $\frac{1 + x}{1 + x - xx} = 1 + 0x + xx - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 - \&c.$  Donc  $y = -x + 0x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 + \&c.$  Ou bien soit  $\zeta = \frac{1 - x}{1 + x}$ ; alors  $y = \frac{-2 - 2x}{1 - 4x - xx}$ , & par conséquent  $y = -2 - 10x - 42xx - 178x^3 - 754x^4 - \&c.$  On peut de cette manière trouver pour  $y$  autant de séries récurrentes qu'on voudra.

71. Les fonctions irrationnelles sont ordinairement transformées en séries infinies, au moyen du Théorème général:

$$(P + Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \&c:$$

en effet, à moins que  $\frac{m}{n}$

ne soit un nombre entier positif, le nombre des termes est infini. Ainsi, en mettant pour  $m$  &  $n$  des nombres déterminés, on aura . . . . .

$$(P + Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} P^{-\frac{1}{2}} Q - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} P^{-\frac{3}{2}} Q^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac{5}{2}} Q^3 + \&c.$$

$$(P + Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P^{-\frac{5}{2}} Q^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac{7}{2}} Q^3 + \&c.$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}P^{-\frac{2}{3}}Q - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}P^{-\frac{5}{3}}Q^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}P^{-\frac{8}{3}}Q^3 - \&c.$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}P^{-\frac{4}{3}}Q + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}P^{-\frac{7}{3}}Q^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}P^{-\frac{10}{3}}Q^3 + \&c.$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}P^{-\frac{1}{3}}Q - \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6}P^{-\frac{4}{3}}Q^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9}P^{-\frac{7}{3}}Q^3 - \&c.$$

72. Telle est la marche de toutes ces séries, que chaque terme peut être formé par celui qui le précède. Car, soit dans la série, qui résulte du développement de  $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$

un terme quelconque  $= MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k$ , le suivant sera  $=$

$\frac{m-kn}{(k+1)n} MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}$ . Remarquez, que dans le

terme suivant, l'exposant de  $P$  diminue, & que celui de  $Q$  augmente d'une unité. Au reste, pour rendre l'application plus facile à tous les cas, nous pouvons mettre la formule

générale  $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$  sous cette forme-ci:  $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ ;

car en développant la formule  $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$  & en multipliant

le résultat par  $P^{\frac{m}{n}}$ , nous obtiendrons la série ci-dessus. Mais

si  $m$  ne désigne pas seulement des nombres entiers, mais aussi des nombres fractionnaires, on pourra en toute sûreté prendre l'unité pour  $n$ . Cela posé, si nous écrivons  $Z$  au

lieu de  $\frac{Q}{P}$ , qui est une fonction de  $z$ , nous aurons  $(1+Z)^m$

$$= 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Z^3 + \&c.$$

Mais pour bien observer les loix suivantes des progressions, il fera bon d'avoir remarqué cette conversion en série de la

$$\text{formule générale } (1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1}Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Z^3 + \&c.$$

73. Soit d'abord  $Z = a\zeta$ ; nous aurons  $(1+a\zeta)^{m-1} =$

$1 + \frac{(m-1)}{1} a\zeta + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} a^2 \zeta^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \zeta^3$   
 $+ \&c.$  Au lieu de cette série, écrivons la formule générale  
 $1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \dots + M\zeta^{n-1} + N\zeta^n + \&c.$   
 Chaque coefficient  $N$  dépendra du précédent  $M$ , & se trouvera au moyen de l'équation  $N = \frac{m-n}{n} a M$ . Ainsi en faisant  $n = 1$ , comme  $M = 1$ , nous aurons  $N = A = \frac{m-1}{1} a$ . Faisant ensuite  $n = 2$ , à cause de  $M = A = \frac{m-1}{1} a$ , nous trouverons  $N = B = \frac{m-2}{2} a M = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} a^2$ ; & en suivant le même procédé,  $C = \frac{m-3}{3} a B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$ ; comme le fait voir la série trouvée ci-dessus.

74. Soit  $Z = a\zeta + \epsilon\zeta\zeta$ ; nous aurons  $(1 + a\zeta + \epsilon\zeta\zeta)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1} (a\zeta + \epsilon\zeta\zeta) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (a\zeta + \epsilon\zeta\zeta)^2 + \&c.$   
 Disposons donc les puissances de  $\zeta$  par ordre de grandeur, ce qui donnera  $(1 + a\zeta + \epsilon\zeta\zeta)^{m-1} = \dots$   
 $1 + \frac{(m-1)}{1} a\zeta + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} a^2 \zeta^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \zeta^3 + \&c.$   
 $+ \frac{(m-1)}{1} a \zeta^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} 2 a \epsilon \zeta^3 + \&c.$

Écrivons, pour cette série, la formule générale : . . .  
 $1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \dots + L\zeta^{n-2} + M\zeta^{n-1} + N\zeta^n + \&c$ ; chaque coefficient se déduira des deux précédents par l'équation  $N = \frac{m-n}{n} a M + \frac{2m-n}{n} \epsilon L$ ; ainsi tous les termes pourront se conclure du premier, qui est 1. En effet, on aura . . .

$$A = \frac{(m-1)}{1} a$$

$$B = \frac{(m-2)}{2} a A + \frac{(2m-2)}{2} \epsilon$$

C



$$C = \frac{(m-3)}{3} \alpha B + \frac{(2m-3)}{3} \epsilon A$$

$$D = \frac{(m-4)}{4} \alpha C + \frac{(2m-4)}{4} \epsilon B$$

&c.

75. Si  $Z = \alpha z + \epsilon z\zeta + \gamma z^2$ ; l'expression  $(1 + \alpha z + \epsilon z\zeta + \gamma z^2)^{m-1}$  fera  $= 1 + \frac{(m-1)}{1} (\alpha z + \epsilon z\zeta + \gamma z^2) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (\alpha z + \epsilon z\zeta + \gamma z^2)^2 + \&c.$  Et si tous les termes sont ordonnés suivant les puissances de  $z$ , elle se changera en cette série :

$$1 + \frac{(m-1)}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 + \&c.$$

$$+ \frac{(m-1)}{1} \epsilon z\zeta + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} 2 \alpha \epsilon z^2 + \&c.$$

$$+ \frac{(m-1)}{1} \gamma z^2 + \&c.$$

Pour mieux découvrir la loi de cette progression, écrivez en sa place,  $1 + A z + B z^2 + C z^3 + \dots + K z^{n-3} + L z^{n-2} + M z^{n-1} + N z^n + \&c$ ; chaque coefficient de cette série sera formé des trois précédents, de manière que  $N = \frac{(m-n)}{n} \alpha M + \frac{(2m-n)}{n} \epsilon L + \frac{(3m-n)}{n} \gamma K$ . Comme le premier terme  $= 1$ , &c ceux qui précèdent  $= 0$ ; on aura les équations suivantes

$$A = \frac{(m-1)}{1} \alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2} \alpha A + \frac{(2m-2)}{2} \epsilon$$

$$C = \frac{(m-3)}{3} \alpha B + \frac{(2m-3)}{3} \epsilon A + \frac{(3m-3)}{3} \gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4} \alpha C + \frac{(2m-4)}{4} \epsilon B + \frac{(3m-4)}{4} \gamma A$$

$$E = \frac{(m-5)}{5} \alpha D + \frac{(2m-5)}{5} \epsilon C + \frac{(3m-5)}{5} \gamma B$$

&c.

76. Donc, en général, si nous supposons  $(1 + a\zeta + c\zeta^2 + \gamma\zeta^3 + \delta\zeta^4 + \&c.)^{m-1} = 1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + E\zeta^5 + \&c.$ ; tous les termes de cette série seront formés des précédents, de la manière qui suit: . . . . .

$$A = \frac{(m-1)}{1} a$$

$$B = \frac{(m-2)}{2} a A + \frac{(2m-2)}{2} c$$

$$C = \frac{(m-3)}{3} a B + \frac{(2m-3)}{3} c A + \frac{(3m-3)}{3} \gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4} a C + \frac{(2m-4)}{4} c B + \frac{(3m-4)}{4} \gamma A + \frac{(4m-4)}{4} \delta$$

$$E = \frac{(m-5)}{5} a D + \frac{(2m-5)}{5} c C + \frac{(3m-5)}{5} \gamma B + \frac{(4m-5)}{5} \delta A + \frac{(5m-5)}{5} \epsilon$$

&c.

C'est à dire que chaque terme est déterminé par autant de termes précédents qu'il y a de lettres  $a, c, \gamma, \delta, \&c.$  dans la fonction de  $\zeta$ , dont la puissance est convertie en série. Au surplus, il est facile de remarquer l'accord de cette loi avec celle que nous avons exposée auparavant (art. 68), lorsque nous avons réduit en une série infinie la quantité  $(1 - a\zeta - c\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \&c.)^{-m-1}$ ; car si l'on met  $-m$  à la place de  $m$ , & si l'on prend négativement les lettres  $a, c, \gamma, \delta$ , les séries trouvées se conviendront parfaitement. Au reste, ce n'est pas ici le lieu de démontrer directement la loi de cette progression: ce qui pourra se faire facilement dans la suite par les principes du calcul différentiel; il suffira donc en attendant d'en avoir prouvé la vérité par l'application que nous en avons faite à toutes sortes d'exemples.

## C H A P I T R E V.

*Des Fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de Variables.*

77. Les quantités variables que nous avons considérées jusqu'ici, avoient entr'elles une telle liaison, qu'elles étoient toutes des fonctions d'une seule variable, & que la détermination d'une seule emportoit celle des autres; mais nous allons traiter à présent des quantités variables qui n'ont aucune dépendance réciproque, de manière qu'en substituant à l'une d'elles une valeur déterminée, les autres restent encore indéterminées & variables. Ces sortes de quantités que je représente par  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , quant à leur signification ne changent point de nature, chacune renfermant, comme à l'ordinaire, toutes les valeurs déterminées, mais en les comparant on remarquera entr'elles cette différence, que si l'on met pour  $z$ , par exemple, une valeur quelconque déterminée, les autres  $x$  &  $y$  auront une signification aussi indéfinie qu'auparavant. La différence entre les quantités variables, dépendantes ou indépendantes les unes des autres, consiste donc en ce que, pour les premières la valeur déterminée d'une seule donne celles des autres, & que pour les dernières la détermination de l'une ne limite nullement la signification de celles qui restent.

78. *Donc une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , est une expression composée de ces quantités, de quelque manière que ce soit.*

Ainsi l'expression  $x^3 + xyz + az^2$  sera une fonction des trois variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Si dans cette quantité on détermine une variable, par exemple  $z$ , en mettant un nombre constant en sa place, elle demeurera encore une quantité variable, savoir, une fonction de  $x$  & de  $y$ ; mais si, outre  $z$ ,  $y$  est

aussi déterminé, il ne restera plus qu'une fonction de  $x$ . Une fonction de plusieurs variables n'obtiendra donc une valeur déterminée, qu'après que chacune des quantités indéterminées qui la composent, aura reçu une valeur donnée. Donc une quantité variable pouvant être déterminée d'une infinité de manières, une fonction de deux variables, qui pour chaque valeur de l'une d'elles, est encore susceptible d'une infinité de valeurs, admettra une infinité de fois un nombre infini de déterminations. Le nombre de déterminations sera encore une infinité de fois plus grand dans une fonction de trois variables, & croîtra à proportion pour un plus grand nombre d'indéterminées.

79. *Les fonctions de plusieurs variables se divisent commodément comme celles d'une seule, en algébriques & en transcendantes.*

Les premières sont celles dont la composition ne dépend que d'opérations algébriques; les dernières sont celles, dans la formation desquelles il entre des opérations transcendantes. On pourroit encore à l'égard de celles-ci en distinguer de plusieurs espèces, selon que les opérations transcendantes affectent toutes les variables, ou quelques-unes seulement, ou même une seule. Ainsi l'expression  $z z + y \log. z$ , qui renferme le logarithme de  $z$ , sera bien une fonction transcendante de  $y$  & de  $z$ ; mais elle doit être regardée cependant comme moins transcendante, parce que la variable  $z$  une fois déterminée la fonction devient algébrique. Au reste, il est inutile de multiplier ces sortes de subdivisions.

80. *Les fonctions algébriques se divisent ensuite en rationnelles & en irrationnelles; & les rationnelles en entières & en fractionnaires.*

La raison de ces dénominations est suffisamment expliquée dans le premier Chapitre. La fonction rationnelle est dégagée de toute irrationnalité, qui affecte les quantités variables, dont elle est dite fonction. Elle sera entière s'il n'entre point

de fraction dans sa composition, & dans le cas contraire elle sera fractionnaire. Telle sera donc la forme générale d'une fonction entière de deux variables  $y$  &  $z$ :  $a + cy + rz + dy^2 + eyz + fz^2 + \dots + ay^2z + yz^2 + \dots + V^s =$  Donc si  $P$  &  $Q$  désignent des fonctions entières, soit de deux, soit d'un plus grand nombre de variables,  $\frac{P}{Q}$  sera la forme générale des fonctions fractionnaires. Enfin une fonction irrationnelle est ou explicite ou implicite; celle-là se reconnoît aux radicaux qu'elle met en évidence; & celle-ci est donnée par une équation insoluble. Ainsi  $V$  sera une fonction implicite irrationnelle de  $y$  & de  $z$ , si l'on a  $V^s = (ayz + z^3)V^2 + (y^4 + z^4)V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$ .

81. On peut aussi distinguer des fonctions multiformes de plusieurs variables comme d'une seule.

Ainsi les fonctions rationnelles seront uniformes, parce qu'à chaque détermination des variables elles ne reçoivent qu'une seule valeur. Soient  $P, Q, R, S$ , &c. des fonctions rationnelles ou uniformes des variables  $x, y, z$ ;  $V$  sera une fonction biforme des mêmes variables, si  $V^2 - PV + Q = 0$ ; car quelques valeurs déterminées qu'on substitue aux quantités  $x, y$  &  $z$ , la fonction  $V$  aura toujours non une simple, mais une double valeur. De même  $V$  sera une fonction triforme, si  $V^3 - PV^2 + QV - R = 0$ , & une fonction quadriforme, si  $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0$ . On assignera d'une manière semblable la forme des fonctions multiformes de degrés supérieurs.

82. Si en égalant à zéro une fonction d'une seule variable  $z$ , il en résulte, pour cette variable, une valeur déterminée, soit simple, soit multiple; de même en supposant égale à zéro une fonction de deux variables  $y$  &  $z$ , l'une sera déterminée par l'autre, & deviendra conséquemment une fonction de celle-ci, tandis qu'auparavant ces quantités étoient indépendantes l'une de l'autre. Semblablement, si une fonction de trois variables  $x, y, z$ , est égalée à zéro, une variable

sera déterminée par les deux autres, & deviendra une fonction de celles-ci. Il en seroit de même, si on égaloit la fonction non à zéro, mais à une quantité constante, ou même à une autre fonction; car, dans toute équation quelque soit le nombre de variables qu'elle renferme, la valeur d'une seule dépend toujours des autres, & en devient une fonction. De même au moyen de deux équations différentes entre les mêmes variables, deux variables sont déterminées par les autres; ainsi de suite.

83. *La division la plus remarquable des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables, est la division en homogènes & en hétérogènes.*

S'il regne par-tout un égal nombre de dimensions, la fonction est dite homogène; sinon elle est hétérogène. Chaque variable est censée former une dimension; le carré d'une variable, ou le produit de deux forme deux dimensions; le produit de trois variables répétées ou non, trois, ainsi de suite; les quantités constantes n'augmentent point le nombre des dimensions. Par exemple, dans ces formules  $ay$ ,  $cz$ , on ne compte qu'une dimension; on en compte deux dans celles-ci:  $ay^2$ ;  $cyz$ ;  $z^2$ ; trois dans ces autres  $ay^3$ ;  $cy^2z$ ;  $zyz^2$ ;  $z^3$ ; & quatre dans ces dernières:  $ay^4$ ;  $cy^3z$ ;  $zy^2z^2$ ;  $zyz^3$ ;  $z^4$ , ainsi des autres.

84. Appliquons d'abord cette distinction aux fonctions entières, & supposons qu'il n'y ait que deux variables; car ce que nous allons en dire conviendra à un plus grand nombre.

*Une fonction entière sera homogène, si chaque terme a un égal nombre de dimensions.*

Il sera donc très-commode de subdiviser ces sortes de fonctions, suivant le nombre des dimensions que forment les variables. Ainsi  $ay + cz$  sera la forme générale des fonctions entières d'une dimension;  $ay^2 + cyz + z^2$  la forme générale des fonctions entières de deux dimensions. La forme générale des fonctions de trois dimensions sera

comprise dans l'expression  $\alpha y^3 + \epsilon y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$ ; celle de quatre dimensions dans  $\alpha y^4 + \epsilon y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta y z^3 + \epsilon z^4$ , ainsi des autres. Par analogie la quantité constante  $\alpha$  sera une fonction de dimension nulle.

85. Une fonction fractionnaire homogène, est celle dont le numérateur & le dénominateur sont eux-mêmes des fonctions homogènes.

Ainsi cette fraction  $\frac{ayy + bzz}{ay + bz}$  sera une fonction homogène de  $y$  & de  $z$ . Or on connoîtra le nombre de dimensions, en soustrayant du nombre des dimensions du numérateur celui des dimensions du dénominateur; on trouvera d'après cela que la proposée est une fonction d'une dimension. Cette autre fraction  $\frac{y^2 + z^2}{yy + zz}$  sera une fonction de trois dimensions. Donc, s'il y a le même nombre de dimensions dans le numérateur & dans le dénominateur, la fraction sera une fonction de dimension nulle; comme dans la quantité  $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$ ; ou dans celles-ci:  $\frac{y}{z}$ ;  $\frac{\epsilon zz}{yy}$ ;  $\frac{\epsilon y^3}{z^3}$ . S'il y a plus de dimensions dans le dénominateur que dans le numérateur, le nombre des dimensions de la fraction sera négatif; ainsi  $\frac{y}{zz}$  sera une fonction de  $-1$  dimension;  $\frac{y + z}{y^2 + z^2}$  une fonction de  $-3$  dimensions;  $\frac{1}{y^3 + ayz^2}$  une fonction de  $-5$  dimensions, parce qu'il n'y a aucune dimension dans le numérateur. Au reste, il est évident que plusieurs fonctions homogènes, dans lesquelles il regne un même nombre de dimensions, étant ajoutées ou soustraites, donnent toujours une fonction homogène du même nombre de dimensions. Par exemple, cette expression  $\alpha y + \frac{\epsilon zz}{y} + \frac{\gamma y^2 - \delta z^2}{yyz + yzz}$  sera une fonction d'une seule dimension, & celle-ci  $\alpha + \frac{\epsilon y}{z} + \frac{\gamma z}{yy} + \frac{yy + zz}{yy - zz}$  sera une fonction de dimension nulle.

86. La nature des fonctions homogènes s'étend aussi aux

expressions irrationnelles. Car si  $P$  est une fonction quelconque homogène de  $n$  dimensions, par exemple,  $\sqrt{P}$  sera une fonction de  $\frac{1}{2}n$  dimensions;  $\sqrt[3]{P}$  sera une fonction de  $\frac{1}{3}n$  dimensions, & en général  $P^{\frac{\mu}{\nu}}$  sera une fonction de  $\frac{\mu}{\nu}n$  dimensions. Ainsi  $\sqrt{yy + zz}$  sera une fonction d'une dimension;  $\sqrt[3]{y^3 + z^3}$  sera une fonction de trois dimensions:  $(yz + zz)^{\frac{1}{4}}$  sera une fonction de  $\frac{1}{4}$  dimensions, &  $\frac{yy + zz}{\sqrt{(y^2 + z^2)}}$  sera une fonction de dimension nulle. D'après cela, & ce qui précède, on comprendra facilement que l'expression  $\frac{1}{y} + \frac{y\sqrt{yy + zz}}{z^2} - \frac{y}{z\sqrt{(y^2 - z^2)}} + \frac{y\sqrt{z}}{zz\sqrt{y + \sqrt{(y^2 + z^2)}}$  est une fonction homogène de  $-1$  dimension.

87. Il n'y a plus de difficulté pour savoir si une fonction irrationnelle implicite est homogène ou non, soit  $V$  une telle fonction &  $V^3 + PV^2 + QV + R = 0$ ,  $P$ ,  $Q$  &  $R$  étant des fonctions de  $y$  & de  $z$ . D'abord il est clair que  $V$  ne peut être une fonction homogène, si  $P$ ,  $Q$  &  $R$  ne sont pas des fonctions homogènes. De plus, si nous supposons que  $V$  soit une fonction de  $n$  dimensions;  $V^2$  sera une fonction de  $2n$ , &  $V^3$  une fonction de  $3n$  dimensions; puis donc qu'il doit y avoir par-tout un même nombre de dimensions, il faut que  $P$  soit une fonction de  $n$ ,  $Q$  de  $2n$ , &  $R$  de  $3n$  dimensions. Donc réciproquement, si les lettres  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  sont respectivement des fonctions homogènes de  $n$ ,  $2n$ ,  $3n$  dimensions, on en conclura que  $V$  sera une fonction de  $n$  dimensions. Ainsi, en supposant l'équation  $V^3 + (y^2 + z^2)V^2 + ay^3V - z^{10} = 0$ ,  $V$  sera une fonction homogène de deux dimensions des variables  $y$  &  $z$ .

88. Si  $V$  est une fonction homogène de  $n$  dimensions des variables  $y$  &  $z$ , & qu'on fasse par-tout  $y = uz$ : la fonction  $V$  se changera en un produit de la puissance  $z^n$  par une certaine fonction de la variable  $u$ .

En effet, par cette substitution de  $y = uz$ , on introduira dans chaque terme des puissances de  $z$ , égales à celles de  $y$  qu'il



qu'il renfermoit. Ainsi, puisque dans tous les termes le nombre des dimensions des variables  $y$  &  $z$ , prises ensemble est égal à  $n$ , la seule variable  $z$  aura par-tout  $n$  dimensions, & par conséquent chaque terme renfermera la puissance  $z^n$ ; la fonction  $V$  sera donc divisible par cette puissance, & le quotient sera une fonction de la seule variable  $u$ . La chose est claire pour les fonctions entières; car si on a  $V = ay^3 + \epsilon y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$  en faisant  $y = uz$ ,  $V$  deviendra  $= z^3 (au^3 + \epsilon u^2 + \gamma u + \delta)$ . La même chose est manifeste pour les fractions. En effet, soit  $V = \frac{ay + \epsilon z}{yy + zz}$ , fonction de  $-1$  dimension, en faisant  $y = uz$ ,  $V$  deviendra  $= z^{-1} \left( \frac{au + \epsilon}{u^2 + 1} \right)$ . Les fonctions irrationnelles ne sont pas plus exception; car si  $V = \frac{y + \sqrt{yy + zz}}{z \sqrt{y^2 + z^2}}$ , qui est une fonction de  $-\frac{1}{2}$  dimensions; en faisant  $y = uz$ , on obtiendra l'équation  $V = z^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{u + \sqrt{uu + 1}}{\sqrt{u^2 + 1}} \right)$ . Ainsi, de cette manière, les fonctions homogenes de deux variables seulement seront ramenées à des fonctions d'une seule variable; car la puissance de  $z$  étant un facteur, est censée ne pas altérer la fonction de  $u$ .

89. *Donc une fonction homogene V des deux variables y & z d'une dimension nulle, après la substitution de y = uz se changera en une fonction pure de la seule variable u.*

Car le nombre des dimensions étant nul, la puissance de  $z$ , qui multipliera la fonction de  $u$  fera  $z^0 = 1$ ; & dans ce cas la variable  $z$  sort tout-à-fait de l'expression. Par exemple, soit  $V = \frac{y + z}{y - z}$ , en faisant  $y = uz$ , on aura  $V = \frac{u + 1}{u - 1}$ ; & pour les fonctions irrationnelles, si on a  $V = \frac{y - \sqrt{yy + zz}}{z}$ , en supposant  $y = uz$ ,  $V$  deviendra  $= u - \sqrt{uu + 1}$ .

90. *Une fonction homogene & entiere de deux variables y & z, pourra être décomposée en autant de facteurs simples de la forme  $ay + \epsilon z$ , qu'elle aura de dimensions.*

Car la fonction étant homogène, si l'on fait  $y = u\zeta$ , elle se changera en un produit de  $\zeta^n$  par une certaine fonction entière de  $u$ , laquelle par cette raison pourra être décomposée en facteurs simples de la forme  $au + \epsilon$ . Multipliant chaque facteur par  $\zeta$ , chacun aura la forme  $au\zeta + \epsilon\zeta = ay + \epsilon\zeta$ , à cause de  $u\zeta = y$ ; mais à cause du multiplicateur  $\zeta^n$ , il y aura autant de facteurs de cette forme, que l'exposant  $n$  contient d'unités, & ces facteurs simples, seront ou réels ou imaginaires, suivant que les coefficients  $a$  &  $\epsilon$ , seront ou réels ou imaginaires.

Il suit donc de-là qu'une fonction de deux dimensions  $ayy + by\zeta + c\zeta\zeta$  renferme deux facteurs simples de la forme  $ay + \epsilon\zeta$ ; & qu'une fonction telle que  $ay^3 + by^2\zeta + cy\zeta^2 + d\zeta^3$  aura trois facteurs simples de la forme  $ay + \epsilon\zeta$ . Il en sera de même des fonctions entières homogènes, qui auront plus de dimensions.

91. Donc cette expression  $ay + \epsilon\zeta$  comprend la forme générale des fonctions entières d'une dimension, comme la quantité  $(ay + \epsilon\zeta)(\gamma y + \delta\zeta)$  exprime la forme générale des fonctions entières de deux dimensions; & toutes les fonctions entières de trois dimensions seront représentées par la formule  $(ay + \epsilon\zeta)(\gamma y + \delta\zeta)(\epsilon y + \xi\zeta)$ ; par conséquent toutes les fonctions entières homogènes pourront être exprimées par des produits composés d'autant de facteurs, tels que  $ay + \epsilon\zeta$ , que ces fonctions contiennent de dimensions. Or ces facteurs se trouvent par la résolution des équations, de la même manière dont nous avons enseigné à trouver les facteurs simples des fonctions entières d'une variable. Au reste, cette propriété des fonctions homogènes de deux variables ne s'étend point aux fonctions homogènes de trois ou de plus de variables; car la formule générale de ces sortes de fonctions de deux dimensions seulement, qui est  $ayy + by\zeta + cyx + dx\zeta + exx + f\zeta\zeta$ , ne peut être ramenée généralement à un produit de la forme (o)  $(ay + \epsilon\zeta + \gamma x)(\delta y + \epsilon\zeta + \xi x)$ ; & les fonctions d'un

plus grand nombre de dimensions font encore moins susceptibles d'être ramenées à de semblables produits.

92. On comprend par ce que nous venons de dire des fonctions homogènes, ce que c'est qu'une fonction hétérogène; c'est, comme nous l'avons dit, celle dans laquelle tous les termes n'ont pas le même nombre de dimensions. Les fonctions hétérogènes peuvent être divisées suivant la multiplicité des dimensions. Ainsi nous appellerons fonction bifide, celle qui renferme un nombre double de dimensions; elle sera par conséquent un assemblage de deux fonctions homogènes, dans lesquelles les nombres des dimensions sont différents; par exemple,  $y^5 + 2y^3z^2 + yy + zz$  sera une fonction bifide, parce qu'elle contient partie cinq, partie deux dimensions. Une fonction trifide, est celle dans laquelle il se trouve trois nombres différents de dimensions, ou qui peut être partagée en trois fonctions homogènes, comme  $y^6 + y^3z^2 + z^4 + y - z$ .

Il y a en outre des fonctions hétérogènes fractionnaires ou irrationnelles, tellement compliquées, qu'on ne peut les décomposer en fonctions homogènes; telles sont les expressions  $\frac{y^5 + 2yz}{by + zz}$ ;  $\frac{a + \sqrt{(yy + zz)}}{yy - bz}$ .

93. Quelquefois une fonction hétérogène, au moyen d'une substitution convenable, faite à la place d'une ou de deux variables, peut devenir homogène. Il n'est pas si facile d'indiquer dans quels cas ce changement a lieu. Il suffira donc de présenter quelques exemples qui en fassent connoître la possibilité. Soit proposée, en conséquence, la fonction  $y^5 + zz y + y^3 z + \frac{z^3}{y}$ ; avec une légère attention on verra qu'elle devient homogène en faisant  $z = xx$ ; car alors elle devient  $y^5 + x^4 y + y^3 x^2 + \frac{x^6}{y}$ , fonction homogène de cinq dimensions des variables  $x$  &  $y$ . De même la fonction  $y + y^2 x + y^3 x^2 + y^4 x^3 + \frac{a}{x}$  sera rendue homogène en

faisant  $x = \frac{1}{z}$ ; car elle devient la fonction d'une dimension  $y + \frac{yy}{z} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{y^3}{z^3} + az$ . Il y a d'autres cas où une substitution aussi simple ne suffit pas pour rendre la fonction homogène, & qui présentent beaucoup plus de difficultés.

94. Enfin on doit avoir égard à une autre division assez usitée des fonctions entières; je veux parler de leur division en ordres. L'ordre est déterminé par le plus grand nombre des dimensions qui se trouve dans la quantité. Par exemple,  $xx + yy + zz + ay - aa$  est une fonction du second ordre, parce qu'elle a des termes de deux dimensions; &  $y^4 + yz^3 - ay^2z + aby^2 - a^2y^2 + b^4$  appartient aux fonctions du quatrième ordre. On a égard à cette division, sur-tout dans la théorie des lignes courbes; d'où résulte encore une nouvelle division des fonctions entières.

95. Reste à parler de la division des fonctions entières en complexes & en incomplexes. Une fonction complexe, est celle qui peut être décomposée en facteurs rationnels, ou qui est le produit de deux ou d'un plus grand nombre de fonctions rationnelles; telle est la fonction  $y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byz^2 - a^2z^2 + 2abzy - b^2y^2$ , qui résulte de la multiplication de ces deux fonctions . . . . .  
 $(yy + zz - az + by)(yy - zz + az - by)$ . Nous pouvons donc conclure que toute fonction entière homogène, qui renferme seulement deux variables, est une fonction complexe, parce qu'elle a autant de facteurs simples de la forme  $ay + cz$  qu'elle contient de dimensions. Par la raison contraire une fonction entière sera in complexe, si elle ne peut se décomposer en facteurs rationnels; telle est la quantité  $yy + zz - aa$ , qui ne renferme point de facteurs rationnels, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre. Au reste, c'est par la recherche des diviseurs qu'on pourra s'assurer si une fonction donnée est complexe ou in complexe.

## C H A P I T R E V I.

*Des Quantités exponentielles & des Logarithmes.*

96. Quoique la connoissance des fonctions transcendantes doive faire un des objets du calcul intégral, cependant il sera à propos de traiter ici de quelques especes qui se présentent plus fréquemment, & qui préparent la voie à plusieurs recherches. Nous considérerons donc d'abord les quantités exponentielles, ou les puissances dont l'exposant est une quantité variable; car il est clair que ces sortes de quantités ne peuvent être rapportées aux fonctions algébriques, puisque celles-ci n'admettent que des exposans constants. On distingue plusieurs especes de quantités exponentielles, suivant que l'exposant seul, ou que l'exposant avec le nombre qu'il affecte est une quantité variable;  $a^x$  est de la première espece, &  $y^x$  de la seconde. De plus, l'exposant même peut être une quantité exponentielle, comme dans les formules  $a^{a^x}$ ;  $a^{y^x}$ ;  $y^{a^x}$ ;  $y^{y^x}$ . Nous ne multiplierons pas davantage les especes de ces grandeurs; car leur nature sera suffisamment connue, après que nous aurons traité seulement la première espece.

97. Soit donc proposée la quantité exponentielle  $a^x$ , ou ce qui revient au même, une puissance de la constante  $a$ , qui ait pour exposant la variable  $x$ . Cet exposant  $x$  renfermant tous les nombres déterminés, il est évident que si à la place de  $x$ , on substitue successivement tous les nombres entiers positifs, on obtiendra pour  $a^x$  les valeurs déterminées  $a^1$ ;  $a^2$ ;  $a^3$ ;  $a^4$ ;  $a^5$ ;  $a^6$ ; &c; & si l'on met pour  $x$  les nombres négatifs  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , &c, la quantité  $a^x$  deviendra suc-

cessivement  $\frac{1}{a}$ ;  $\frac{1}{a^2}$ ;  $\frac{1}{a^3}$ ;  $\frac{1}{a^4}$ ; &c; & si l'on fait  $x = 0$ , on aura toujours  $a^0 = 1$ . Mais si l'on substitue à  $x$  des fractions, comme  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{5}$ ;  $\frac{1}{6}$ , &c, on aura pour résultats les quantités  $\sqrt{a}$ ;  $\sqrt[3]{a}$ ;  $\sqrt[4]{a^2}$ ;  $\sqrt[4]{a}$ ;  $\sqrt[5]{a^3}$ ; &c; lesquelles considérées en elles-mêmes, ont deux ou un plus grand nombre de valeurs, puisque l'extraction des racines en fournit toujours plusieurs. Cependant on n'admet ordinairement dans ce cas, que les valeurs qui se présentent les premières, c'est-à-dire, celles qui sont réelles & positives, parce que la quantité  $a^x$  est regardée comme une fonction uniforme de  $x$ . Ainsi  $a^{\frac{1}{2}}$  tiendra un certain milieu entre  $a^2$  &  $a^3$ , & fera par conséquent une quantité du même genre; & quoique  $a^{\frac{1}{2}}$  ait la double valeur  $-aa\sqrt{a}$  &  $+aa\sqrt{a}$ , cependant on ne tient compte que de la dernière. Il en est de même si l'exposant  $x$  a des valeurs irrationnelles; mais comme il est difficile dans ce cas de concevoir le nombre de valeurs que renferme la quantité proposée, on se contente de considérer la seule valeur réelle. Ainsi  $a^{\sqrt{7}}$  fera une valeur déterminée comprise entre les limites  $a^7$  &  $a^1$ .

(p) 98 Les valeurs de la quantité exponentielle  $a^x$  dépendent sur-tout de la grandeur du nombre constant  $a$ ; car, si  $a = 1$ ,  $a^x$  sera toujours  $= 1$ , quelque valeur qu'on substitue à l'exposant  $x$ ; mais si  $a$  est  $> 1$ , la valeur de  $a^x$  sera d'autant plus grande, qu'on substituera à  $x$  un plus grand nombre, jusqu'à ce qu'elle devienne  $= \infty$ , en faisant  $x = \infty$ ; si  $x = 0$ ,  $a^x$  deviendra  $= 1$ , & si  $x$  est  $< 0$ , les valeurs de  $a^x$  deviendront plus petites que l'unité; jusqu'à ce qu'ayant fait  $x = -\infty$ ,  $a^x$  devienne  $= 0$ . Le contraire arrive, si  $a$  est  $< 1$ , & cependant un nombre positif; car alors les valeurs de  $a^x$  décroîtront, à mesure que  $x$  croîtra au-dessus de 0; & elles croîtront, si l'on prend pour  $x$  des nombres négatifs. En effet, si  $a$  est  $< 1$ ,  $\frac{1}{a}$  est  $> 1$ ; soit donc  $\frac{1}{a} = b$ ; on

aura  $a^x = b^{-x}$ , & par conséquent le second cas pourra être regardé comme une conséquence du premier.

99. Si  $a = 0$ , on remarque un grand faut dans les valeurs de  $a^x$ ; car tant que  $x$  fera un nombre positif ou plus grand que zéro, on aura toujours  $a^x = 0$ ; si  $x = 0$ ,  $a^0$  fera  $= 1$ ; mais si  $x$  est un nombre négatif,  $a^x$  obtiendra une valeur infiniment grande. Effectivement soit  $x = -3$ , alors  $a^x = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0} = \infty$ . On observera encore de plus grands fauts, si la quantité constante  $a$  a une valeur négative, par exemple,  $-2$ ; car, en substituant à  $x$  des nombres entiers, les valeurs de  $a^x$  deviendront alternativement positives & négatives, comme le fait voir la série suivante . . . .

$a^{-4}$ ;  $a^{-3}$ ;  $a^{-2}$ ;  $a^{-1}$ ;  $a^0$ ;  $a^1$ ;  $a^2$ ;  $a^3$ ;  $a^4$ ; &c.  
 $+$   $\frac{1}{16}$ ;  $-\frac{1}{8}$ ;  $+\frac{1}{4}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  $1$ ;  $-2$ ;  $+4$ ;  $-8$ ;  $+16$ .

Et si l'on donne à l'exposant  $x$  des valeurs fractionnaires, la puissance  $a^x = (-2)^x$  prendra des valeurs tantôt réelles, tantôt imaginaires; car  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ , quantité imaginaire, &  $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-2}$ ;  $= -\sqrt[4]{2}$  quantité réelle. Mais si l'on substitue à  $x$  des valeurs irrationnelles, la puissance  $a^x$  représentera-t-elle des quantités réelles ou imaginaires? C'est ce qu'il n'est pas possible de décider.

100. Après avoir ainsi fait connoître les inconvéniens qui se présentent, lorsqu'on substitue à  $a$  des nombres négatifs, prenons pour  $a$  un nombre positif, & même plus grand que l'unité, parce qu'il est aisé de ramener à ce cas celui où  $a$  exprimeroit un nombre positif plus petit que l'unité. Si donc on suppose  $a^x = y$ , en mettant à la place de  $x$  tous les nombres réels renfermés entre les limites  $+\infty$  &  $-\infty$ ,  $y$  acquerra toutes les valeurs positives, comprises entre les limites  $+\infty$  &  $0$ . Car si  $x = \infty$ ,  $y = \infty$ ; si  $x = 0$ ,  $y = 1$ ; & si  $x = -\infty$ ,  $y = 0$ . Donc réciproquement, quelque valeur

positive qu'on prenne pour  $y$ , il y aura pour  $z$  une valeur correspondante, qui satisfera à la condition  $a^z = y$ ; mais si on donnoit à  $y$  une valeur négative, l'exposant  $z$  ne pourroit avoir une valeur réelle.

101. Soit donc  $y = a^z$ ,  $y$  fera une certaine fonction de  $z$ , & on verra facilement par la nature des puissances quel rapport il y a entre  $y$  &  $z$ . En effet, quelque soit la valeur qu'on donne à  $z$ , celle de  $y$  est par-là déterminée. On a aussi  $yy = a^{2z}$ ;  $y^3 = a^{3z}$ ; & en général  $y^n = a^{nz}$ ; d'où  $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$ ;  $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z}$ ; &  $\frac{1}{y} = a^{-z}$ ;  $\frac{1}{yy} = a^{-2z}$ , &  $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$ , ainsi des autres. De plus si  $v = a^x$ , on aura  $vy = a^{x+z}$ , &  $\frac{v}{y} = a^{x-z}$ . Ces considérations sont propres à faciliter les moyens de trouver la valeur de  $y$ , celle de  $z$  étant donnée.

#### E X E M P L E.

Soit  $a = 10$ ; à cause de l'Arithmétique décimale dont nous nous servons, il sera facile d'avoir les valeurs de  $y$ , lorsqu'on prendra pour  $z$  des nombres entiers. En effet, on aura  $10^1 = 10$ ;  $10^2 = 100$ ;  $10^3 = 1000$ ;  $10^4 = 10000$ , &  $10^0 = 1$ ; de même  $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ ;  $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$ ;  $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ ; & si l'on prend pour  $z$  des fractions, les valeurs de  $y$  pourront être indiquées à l'aide de l'extraction des racines; ainsi  $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162277$  &c.

102. Si étant donné le nombre  $a$ , on peut conclure de chaque valeur de  $z$ , celle de  $y$ ; réciproquement ayant pris pour  $y$  une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour  $z$  un nombre convenable pour que  $a^z = y$ ; cette valeur de  $z$ , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de  $y$ , s'appelle ordinairement le **LOGARITHME** de



de  $y$ . La théorie des logarithmes suppose donc l'existence d'un nombre constant représenté par  $a$ , que pour cette raison on appelle la *B.ase* des logarithmes. Cette base une fois choisie, le logarithme d'un nombre  $y$  n'est autre chose que l'exposant de la puissance  $a^x$  égale à ce nombre  $y$ . On a coutume d'indiquer le logarithme du nombre  $y$  de cette manière  $ly$ . Conséquemment, si  $a^x = y$ ,  $x = ly$ . Il s'enfuit de-là que la base logarithmique, quoique arbitraire, doit cependant être plus grande que l'unité, & qu'il n'y a que les nombres positifs qui puissent avoir des logarithmes réels.

103. Ainsi, quelque nombre qu'on prenne pour la base logarithmique  $a$ ,  $l1$  sera toujours  $= 0$ ; car, si dans l'équation  $a^x = y$ , qui revient à celle-ci  $x = ly$ , on suppose  $y = 1$ , on a  $x = 0$ . Ensuite les logarithmes des nombres plus grands que l'unité seront positifs & dépendants de la valeur de la base  $a$ ; ainsi  $la = 1$ ,  $laa = 2$ ;  $la^3 = 3$ ;  $la^4 = 4$ ; &c; d'où l'on peut conclure réciproquement le nombre qu'on a pris pour la base logarithmique; c'est celui dont le logarithme  $= 1$ . Les logarithmes des nombres plus petits que l'unité, & cependant positifs seront négatifs; car  $l\frac{1}{a} = -1$ ;  $l\frac{1}{aa} = -2$ ;  $l\frac{1}{a^3} = -3$ ; &c; quant aux logarithmes des nombres négatifs, ils ne seront point réels, mais imaginaires, comme nous l'avons déjà remarqué.

104. De même, si  $ly = x$ , on aura  $lyy = 2x$ ;  $ly^3 = 3x$ , & en général  $ly^n = nx$  ou  $ly^n = nly$ , à cause de  $x = ly$ . Donc le logarithme d'une puissance de  $y$  est égal au logarithme de  $y$  même, multiplié par l'exposant de la puissance; par conséquent on aura  $l\sqrt{y} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}ly$ ;  $l\frac{1}{\sqrt{y}} = ly^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}ly$ , ainsi des autres; d'où il s'enfuit qu'étant donné le logarithme d'un nombre quelconque, on pourra  
 EULER, *Introduction à l'Anal. infr.* Tome I. K

trouver les logarithmes de toutes les puissances de ce même nombre. Supposons à présent deux logarithmes connus; savoir,  $ly = z$ , &  $lv = x$ ; puisque  $y = a^z$ , &  $v = a^x$ , nous aurons  $lv y = x + z = lv + ly$ . Donc le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes des facteurs; nous aurons de même  $l\frac{y}{v} = z - x = ly - lv$ ; donc le logarithme d'une quantité fractionnaire est égal au logarithme du numérateur diminué de celui du dénominateur. Ces règles servent à calculer les logarithmes de plusieurs nombres, lorsqu'on en connoît déjà quelques-uns.

105. D'après ce que nous venons d'exposer, il est clair qu'il n'y a de logarithmes rationnels que ceux des puissances de la base  $a$ ; car si un autre nombre  $b$  n'est pas une puissance de la base  $a$ , son logarithme ne peut être exprimé par un nombre rationnel, le logarithme de  $b$  ne fera pas non plus un nombre irrationnel; car si on avoit  $lb = \sqrt[n]{n}$ , on auroit aussi  $a^{\sqrt[n]{n}} = b$ ; ce qui est impossible, puisque les nombres  $a$  &  $b$  sont supposés rationnels. Or ce sont les logarithmes des nombres rationnels & entiers dont on a sur-tout besoin, parce qu'ils servent à trouver ceux des fractions & ceux des nombres froids. Puisqu'aucun nombre, soit rationnel, soit irrationnel, ne peut représenter les logarithmes des nombres, qui ne sont pas des puissances de la base, on a donc raison de les rapporter aux quantités transcendentes; & c'est la cause pour laquelle on a coutume de ranger les logarithmes parmi ces dernières.

106. On ne peut donc obtenir les logarithmes des nombres que par approximation au moyen des fractions décimales; & ils approcheront d'autant plus d'être exacts, qu'ils auront été calculés avec plus de chiffres décimaux. Il sera possible, de cette manière, d'avoir à-peu-près le logarithme de tout nombre, par la seule extraction d'une racine quarrée. En effet, puisqu'en supposant  $ly = z$ , &  $lv = x$ ;  $l\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$ ,

si le nombre proposé  $b$  tombe entre les limites  $a^2$  &  $a^3$ , dont les logarithmes sont 2 & 3, cherchez la valeur de  $a^{2\frac{1}{2}}$  ou  $a^2\sqrt{a}$ , &  $b$  sera renfermé entre les limites  $a^2$  &  $a^{2\frac{1}{2}}$ , ou  $a^{2\frac{1}{2}}$  &  $a^3$ . Quelque soit celui de ces deux cas, qui ait lieu, en prenant une moyenne proportionnelle, on rapprochera les limites, & on pourra, en continuant, arriver à des limites, qui ne soient pas séparées l'une de l'autre d'une quantité donnée, & avec lesquelles par conséquent le nombre proposé  $b$  pourra être confondu sans erreur, & comme les logarithmes de chacune de ces limites sont donnés, on aura à la fin le logarithme du nombre  $b$ .

E X E M P L E.

Soit la base logarithmique  $a = 10$ , qui est celle des tables ordinaires, & proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes sont 0 & 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.

$A = 1,000000$	$lA = 0,000000$	soit
$B = 10,000000$	$lB = 1,000000$	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,162277$	$lC = 0,500000$	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5,623413$	$lD = 0,750000$	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4,216964$	$lE = 0,625000$	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4,869674$	$lF = 0,687500$	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5,232991$	$lG = 0,718750$	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5,048065$	$lH = 0,703125$	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4,958069$	$lI = 0,6953125$	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5,002865$	$lK = 0,6992187$	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4,980416$	$lL = 0,6972656$	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4,991627$	$lM = 0,6982421$	$N = \sqrt{KM}$

$$\begin{aligned}
N &= 4,997242; \quad lN = 0,6987304; \quad O = \sqrt{KN} \\
O &= 5,000052; \quad lO = 0,6989745; \quad P = \sqrt{NO} \\
P &= 4,998647; \quad lP = 0,6988525; \quad Q = \sqrt{OP} \\
Q &= 4,999350; \quad lQ = 0,6989135; \quad R = \sqrt{OQ} \\
R &= 4,999701; \quad lR = 0,6989440; \quad S = \sqrt{OR} \\
S &= 4,999876; \quad lS = 0,6989592; \quad T = \sqrt{OS} \\
T &= 4,999963; \quad lT = 0,6989668; \quad V = \sqrt{OT} \\
V &= 5,000008; \quad lV = 0,6989707; \quad W = \sqrt{TV} \\
W &= 4,999984; \quad lW = 0,6989687; \quad X = \sqrt{WV} \\
X &= 4,999997; \quad lX = 0,6989697; \quad Y = \sqrt{VX} \\
Y &= 5,000003; \quad lY = 0,6989702; \quad Z = \sqrt{XY} \\
Z &= 5,000000; \quad lZ = 0,6989700;
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver  $Z = 5,000000$ , à quoi répond le logarithme cherché  $0,698970$ , en supposant la base logarithmique

$= 10$ . Par conséquent  $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$  à-peu-près. C'est de cette manière que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

107. Il y a donc autant de systèmes différents de logarithmes qu'on peut prendre de nombres différents pour la base  $a$ , & conséquemment le nombre de systèmes logarithmiques sera infini. Au reste, dans deux systèmes, les logarithmes d'un même nombre ont toujours entr'eux un même rapport. Car soit la base d'un système  $= a$ , celle d'un autre  $= b$ , le logarithme d'un nombre  $n$  dans le premier  $= p$ , dans le second  $= q$ , on aura  $a^p = n$  &  $b^q = n$ ,

donc  $a^p = b^q$ , &  $a = b^{\frac{q}{p}}$ . Il faut donc que la fraction  $\frac{p}{q}$  ait une valeur constante, quelque nombre qu'on ait pris pour  $n$ . Par conséquent si les logarithmes de tous les nombres ont été calculés pour un système, on pourra par une simple règle de

Trois obtenir facilement les logarithmes des mêmes nombres pour un autre système. Ainsi les logarithmes pour la base 10 étant donnés, on pourra trouver les logarithmes pour une autre base, par exemple, pour la base 2; car supposons que le logarithme d'un nombre, pour la base 2, =  $q$ , tandis que le logarithme du même nombre, pour la base 10, =  $p$ ; puisque pour la base 10,  $l_2 = 0,3010300$ , & que pour la base 2,  $l_2 = 1$ , nous aurons  $0,3010300 : 1 :: p : q$ . Donc  $q = \frac{p}{0,3010300} = 3,3219277 p$ . Donc, si on multiplie par le nombre 3,3219277 tous les logarithmes ordinaires, on obtiendra la table des logarithmes correspondants pour la base 2.

108. *Il suit de-là que les logarithmes de deux nombres dans quelque système que ce soit conservent le même rapport.*

Car soient deux nombres  $M$  &  $N$ , dont les logarithmes pour la base  $a$  soient  $m$  &  $n$ , on aura  $M = a^m$ , &  $N = a^n$ .

Donc  $a^{m \cdot n} = M^n = N^m$ , & partant  $M = N^{\frac{m}{n}}$ , équation qui ne renfermant plus la base  $a$ , fait voir clairement que la fraction  $\frac{m}{n}$  a une valeur indépendante de la base  $a$ . En effet, soient  $\mu$  &  $\nu$  les logarithmes des mêmes nombres  $M$  &  $N$  pour une autre base  $b$ , on en conclura pareillement que

$M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$ . Donc  $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$  &  $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$  ou  $m : n :: \mu : \nu$ . C'est ainsi que nous avons déjà vu que dans tout système de logarithmes, les logar. de différentes puissances du même nombre, comme  $y^m$ , &  $y^n$  sont entr'eux comme les exposans  $m : n$ .

109. Ainsi, pour construire une table de logarithmes pour une base quelconque  $a$ , il suffit d'avoir calculé par la méthode que nous avons donnée ci-dessus, ou par une autre plus commode, seulement les logarithmes des nombres premiers; car les logarithmes des nombres composés étant égaux à la somme des logarithmes de tous les facteurs, les logarithmes

de ces nombres se trouveront par la seule addition. Par exemple, les logarithmes des nombres 3 & 5 étant connus, on aura  $L15 = L3 + L5$ ;  $L45 = 2L3 + L5$ , & comme nous avons trouvé pour la base  $a = 10$ ,  $L5 = 0,6989700$ , & qu'en outre  $L10$  est  $= 1$ ; nous aurons  $L\frac{10}{5} = L2 = L10 - L5$ , & par conséquent  $L2 = 1 - 0,6989700 = 0,3010300$ . Or les logarithmes des nombres premiers 2 & 5 une fois trouvés donneront ceux des nombres composés de 2 & de 5; comme 4, 8, 16, 32, 64, &c; 20, 40, 80, 25, 50, &c.

110. Les tables de logarithmes sont du plus grand usage pour abrégér les calculs numériques, parce qu'elles sont connoître non-seulement le logarithme d'un nombre donné, mais aussi le nombre qui répond à un logarithme proposé. Ainsi, supposons que  $c, d, e, f, g, h$ , représentent des nombres quelconques, on pourra, sans multiplication, trouver la valeur de cette expression  $\frac{cc d \sqrt{e}}{f \sqrt{g h}}$ ; car le logarithme de cette quantité  $= 2Lc + Ld + \frac{1}{2}Le - Lf - \frac{1}{3}Lg - \frac{1}{3}Lh$ ; & cherchant le nombre qui lui correspond, on aura la valeur demandée. Les tables de logarithmes sont sur-tout d'une grande utilité pour trouver les puissances & les racines les plus compliquées, en substituant aux opérations ordinaires la multiplication & la division.

#### E X E M P L E I.

On demande la valeur de la puissance  $2^{\frac{7}{12}}$ . Son logarithme étant  $= \frac{7}{12} L2$ ; si l'on multiplie le logarithme de 2 pris dans les tables, qui est 0,3010300, par  $\frac{7}{12}$ , c'est à-dire, par  $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ ; on trouvera  $L2^{\frac{7}{12}} = 0,1756008$ ; logarithme auquel répond le nombre 1,498307, valeur approchée  $2^{\frac{7}{12}}$ .

#### E X E M P L E II.

Si le nombre des habitans d'une province s'accroît tous

les ans d'un trentième, & qu'il y ait au commencement 100000 habitans; on veut favoir combien il y en aura au bout de 100 ans. Soit, pour abrégé, le nombre donné des habitans =  $n$ , de sorte que  $n = 100000$ ; au bout d'un an le nombre des habitans fera =  $(1 + \frac{1}{30}) n = \frac{31}{30} n$ ; au bout de deux ans =  $(\frac{31}{30})^2 n$ , au bout de trois =  $(\frac{31}{30})^3 n$ ; & enfin au bout de cent ans =  $(\frac{31}{30})^{100} n = (\frac{31}{30})^{100} 100000$ . Le logarithme de ce dernier nombre =  $100 l \frac{31}{30} + l 100000$ . Or  $l \frac{31}{30} = l 31 - l 30 = 0,04240439$ ; donc  $100 l \frac{31}{30} = 4,240439$ , ajoutant  $l 100000 = 5$ , le logarithme du nombre cherché des habitans =  $6,4240439$ , auquel répond le nombre =  $2654874$ . Donc au bout de cent ans le nombre des habitans sera plus de vingt-six fois & demi plus considérable.

EXEMPLE III.

La terre ayant été repeuplée après le déluge par six hommes; supposons qu'au bout de deux cens ans le nombre des hommes se soit élevé à 1000000, on demande de quelle partie il a dû augmenter tous les ans. Supposons que pendant ce temps le nombre des hommes se soit accru tous les ans de  $\frac{x}{100}$ , le nombre des hommes pendant deux cens ans

fera nécessairement monté à  $(\frac{1+x}{100})^{200} 6 = 1000000$ , d'où

l'on tire  $\frac{1+x}{100} = (\frac{1000000}{6})^{\frac{1}{200}}$ . Donc  $l \frac{1+x}{100} = \frac{1}{200} l \frac{1000000}{6}$

=  $\frac{1}{200} \cdot 5,2218487 = 0,0261092$ ; conséquemment  $\frac{1+x}{100}$

=  $\frac{1061963}{1000000}$  &  $1000000 = 61963 x$ . Donc  $x = 16$  environ.

Ainsi, pour une aussi grande population, il auroit fallu que

le genre-humain se fût accru tous les ans d'un seizième; ce que la durée de la vie des premiers hommes rend vraisemblable. Si la même augmentation eût continué d'avoir lieu pendant 400 ans, le nombre des hommes fût monté à 1000000.  $\frac{1000000}{100} = 166666666666$ . Ce nombre d'habitans est si considérable, que toute la terre n'eût pas suffi pour les nourrir.

## E X E M P L E I V.

Si le nombre des hommes est doublé à chaque siècle, quel est l'accroissement annuel? Supposons que le nombre des hommes se soit accru tous les ans de sa partie  $\frac{1}{x}$ , & qu'au commencement le nombre des habitans ait été  $= n$ ; au bout de cent ans il sera  $= \left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$ , lequel devant être  $= 2 n$ , donnera l'équation  $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$  &  $l \frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} l 2 = 0,0030103$ . Donc  $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$  &  $x = \frac{10000000}{69555} = 144$  environ. Il suffit donc que le nombre des hommes ait augmenté tous les ans de  $\frac{1}{144}$ . On voit par-là combien sont ridicules les objections de ces incrédules, qui nient que toute la terre ait pu être peuplée en si peu de temps par un seul homme.

III. L'usage des logarithmes est particulièrement essentiel pour résoudre les équations, dans lesquelles l'inconnue se trouve en exposant. Si, par exemple, on arrive à l'équation  $a^x = b$ , d'où il faille tirer la valeur de l'inconnue  $x$ ; on ne pourra y parvenir qu'en employant les logarithmes. En effet, puisque  $a^x = b$ , on aura  $l a^x = x l a = l b$ , & partant  $x = \frac{l b}{l a}$ . Au reste, il importe peu ici de quel système de logarithmes on se servira, puisque dans tous les systèmes les



les logarithmes des nombres  $a$  &  $b$  ont toujours entr'eux un même rapport.

EXEMPLE I.

Si un nombre d'hommes augmente tous les ans de sa centieme partie, on veut favoir après combien d'années le nombre en fera décuple. Supposons que ce soit après  $x$  années, & que le nombre des hommes au commencement ait été  $= n$ ; après  $x$  années, il fera  $\left(\frac{101}{100}\right)^x n$ , lequel devant être  $10n$ , donne l'équation  $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$ , & par conséquent  $x \log \frac{101}{100} = \log 10$ , &  $x = \frac{\log 10}{\log \frac{101}{100}}$ ; d'où l'on conclura  $x = \frac{10000000}{43714} = 231$ . Donc au bout de 231 ans, un nombre d'hommes, dont l'accroissement annuel est de sa centieme partie, devient dix fois plus grand; au bout de 462 ans il sera devenu cent fois, & au bout de 693 ans, mille fois plus grand.

EXEMPLE II.

Un particulier doit 400000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent; il acquitte tous les ans 25000 florins; on demande après combien d'années sa dette sera entierement éteinte. Écrivons  $a$  pour la somme dûe 400000 fl. &  $b$  pour la somme 25000 fl. payée tous les ans; il devra donc au bout d'un an  $\frac{105}{100} a - b$ ; au bout de deux ans  $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$ ; au bout de trois ans  $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$ ; & en mettant, pour abrégér,  $n$  au lieu de  $\frac{105}{100}$ , il restera dû après un nombre  $x$  d'années  $n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b - \dots - b$

$= n^x a - b(1 + n + n^2 + \dots + n^{x-1})$ . Mais comme par la nature des progressions géométriques  $1 + n + n^2 + \dots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$ ; après  $x$  années, il fera dû  $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1}$ , quantité, qui égalée à zéro donnera cette équation  $n^x a = \frac{n^x b + b}{n - 1}$ , ou  $(n - 1)n^x a = n^x b + b$ , & par conséquent  $(b - na + a)n^x = b$ , &  $n^x = \frac{b}{b - (n - 1)a}$ ; d'où  $x = \frac{lb - l[b - (n - 1)a]}{l n}$ ;

mais, puisque  $a = 400000$ ,  $b = 25000$ ,  $n = \frac{105}{100}$ ; on aura  $(n - 1)a = 20000$ , &  $b - (n - 1)a = 5000$ , & le nombre  $x$  d'années, après lequel la dette est entièrement éteinte  $= \frac{l \frac{25000 - 15000}{100}}{l \frac{21}{20}} = \frac{6986700}{211893}$ : donc  $x$  fera un

peu moindre que 33; c'est-à-dire qu'au bout de 33 ans, la dette sera non-seulement acquittée, mais le créancier sera tenu de rendre  $\frac{(n^{33} - 1)}{n - 1} b - n^{33} a = \frac{(\frac{21}{20})^{33} \cdot 5000 - 25000}{\frac{1}{20}} =$

$100000 \left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000$  florins. Or  $l \frac{21}{20} = 0,0211892991$ ;

par conséquent  $l \left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0,69924687$ ; &  $l 100000 \left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5,6992469$ ; à quoi répond le nombre 500318, 8; donc au bout de 33 ans révolus le créancier doit rendre 318  $\frac{8}{10}$  florins.

112. Les logarithmes ordinaires calculés pour la base = 10, outre l'usage qui leur est commun avec tous les autres, jouissent dans l'arithmétique décimale d'un avantage particulier, & méritent par cette raison la préférence sur ceux des autres systèmes. En effet, les logarithmes de tous les nombres, excepté les puissances de 10, étant exprimés en décimales, les logarithmes des nombres compris entre 1 & 10 seront renfermés entre 0 & 1, & ceux des nombres contenus

entre 10 & 100 seront compris entre 1 & 2 ; ainsi de suite. Chaque logarithme est donc composé de deux parties ; la première est un nombre entier, & se nomme CARACTÉRISTIQUE, & la seconde est une fraction décimale. La caractéristique est moindre d'une unité que le nombre de chiffres dont chaque nombre est composé ; ainsi le logarithme de 78509 aura 4 pour caractéristique, parce que ce nombre est composé de 5 chiffres ou figures. On verra donc sur le champ à l'inspection d'un logarithme de combien de chiffres est composé le nombre correspondant. Par exemple, le nombre auquel appartient le logarithme 7,5804631 renfermera 8 figures.

113. Si deux logarithmes se conviennent par leurs parties décimales, & ne diffèrent que par la caractéristique, les nombres correspondants seront entr'eux comme une puissance de 10 à l'unité ; & s'accorderont par les figures dont ils sont composés. Par exemple, les logarithmes 4,9130187, & 6,9130187 appartiennent respectivement aux nombre 8180, & 8185000 ; le logarithme 3,9130187 répond à 8185, & le logarithme 0,9130187 au nombre 8,185. La seule partie décimale fera donc connoître les chiffres qui composent le nombre ; la caractéristique indiquera le nombre des chiffres entiers qu'on doit séparer sur la gauche, & les autres sur la droite exprimeront des décimales. Par exemple, dans le logarithme 2,7653429, la partie décimale annonce les chiffres 5758945, & la caractéristique 2 fait voir qu'il faut prendre la quantité 575,8945. Si la caractéristique étoit 0, le nombre correspondant seroit 5,758945 ; si elle étoit  $-1$ , le nombre seroit dix fois plus petit &  $= 0,5758945$  ; & à la caractéristique  $-2$ , répondroit le nombre 0,05758945 &c. Au lieu des caractéristiques  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , &c on écrit ordinairement 9, 8, 7 &c, & on ne perd pas de vue que ces logarithmes doivent être diminués d'une dizaine. On trouve tout cela expliqué fort au long dans les Introductions aux Tables des Logarithmes.

## E X E M P L E.

Si la progression 2, 4, 16, 256, &c. dont chaque terme est le quarré du précédent, est continuée jusqu'au vingt-cinquieme terme; on demande la grandeur de ce dernier terme. Il sera plus commode d'exprimer les termes de cette progression par des exposans, de cette maniere  $2^1, 2^2, 2^4, 2^8, \&c.$  Il est évident que les exposans forment une progression géométrique, & que celui du vingt-cinquieme terme sera  $2^{24} = 16777216$ ; de sorte que le terme cherché  $= 2^{16777216}$ . Son logarithme sera donc  $= 16777216 \log 2$ ; & comme  $\log 2 = 0,301029995663981195$ , le logarithme du nombre demandé sera  $= 5050445,25973367$ ; dont la caractéristique nous apprend que le nombre en question exprimé de la maniere ordinaire sera composé de 5050446 chiffres. La partie décimale 259733675932 cherchée dans la table des logarithmes donnera les premiers chiffres du nombre demandé, qui seront 181858. Quoique ce nombre ne puisse aucunement être exprimé, au moins est-il certain qu'il est composé de 5050446 chiffres, & que les six premiers sont 181858, lesquels doivent être encore suivis vers la droite de 5050440 autres, dont quelques-uns pourroient être déterminés avec des tables de logarithmes plus étendues; c'est ainsi qu'on trouveroit pour les onze premiers chiffres 18185852986.

## C H A P I T R E V I I.

*Du Développement des Quantités exponentielles  
& Logarithmiques en Séries.*

114. Puisqu'on a  $a^0 = 1$ , & qu'à mesure que l'exposant de  $a$  augmente, la valeur de la puissance augmente aussi, pourvu que  $a$  soit un nombre plus grand que l'unité; il

s'enfuit que si l'exposant surpasse infiniment peu zéro, la puissance surpassera l'unité aussi infiniment peu. Soit  $\omega$  un nombre infiniment petit, ou une fraction si petite, qu'elle diffère infiniment peu de zéro, on aura  $a^\omega = 1 + \psi$ ,  $\psi$  étant un nombre infiniment petit; car il est constant par le Chapitre précédent, que si  $\psi$  n'étoit pas infiniment petit,  $\omega$  ne pourroit pas l'être non plus.  $\psi$  fera donc ou  $= \omega$ , ou  $> \omega$ , ou  $< \omega$ , rapport qui dépendra toujours de la valeur de la lettre  $a$ . Comme ce rapport est encore inconnu, faisons  $\psi = k\omega$ , de manière que  $a^\omega = 1 + k\omega$ ; si nous prenons  $a$  pour la base logarithmique, nous aurons  $\omega = l(1 + k\omega)$ .

E X E M P L E.

Pour faire voir plus clairement comment le nombre  $k$  dépend de la base  $a$ ; supposons  $a=10$ , & cherchons au moyen des tables ordinaires, le logarithme d'un nombre qui excède de très-peu l'unité, par exemple, celui de  $1 + \frac{1}{1000000}$ , de manière que  $k\omega = \frac{1}{1000000}$ ; nous trouverons  $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = l \frac{1000001}{1000000} = 0,00000043429 = \omega$ . Donc à cause de  $k\omega = 0,00000100000$ ,  $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$  &  $k = \frac{100000}{43429} = 2,30258$ . On voit par-là que  $k$  est un nombre fini dépendant de la valeur de la base  $a$ ; car si nous eussions pris un autre nombre pour la base  $a$ , le logarithme du même nombre  $1 + k\omega$ , auroit eu un rapport donné avec le premier, & il en seroit résulté une autre valeur pour  $k$ .

115. Puisque  $a^\omega = 1 + k\omega$ , on aura  $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$ , quelque nombre qu'on prenne pour  $i$ . Donc  $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1.2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}k^3\omega^3 + \&c$ . Si l'on fait  $i = \frac{x}{\omega}$ , & que  $x$  représente un nombre quelconque fini, à

§6 DU DÉVELOPP. DES QUANTITÉS EXPONENTIELLES

cause de  $\omega$  infiniment petit,  $i$  deviendra un nombre infiniment grand, & par conséquent  $\omega = \frac{\zeta}{i}$ , étant une fraction dont le dénominateur est infini, fera une quantité infiniment petite, telle qu'elle a été supposée. Écrivons donc  $\frac{\zeta}{i}$  à la place de  $\omega$ , & nous aurons  $a^{\zeta} = \left(1 + \frac{k\zeta}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} k\zeta + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i} k^2 \zeta^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i} k^3 \zeta^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i} k^4 \zeta^4 + \&c$ ; équation, qui sera vraie, si l'on prend pour  $i$  un nombre infiniment grand, & alors  $k$  sera un nombre déterminé dépendant de la valeur de  $a$ , comme nous venons de le voir.

116. Comme  $i$  est un nombre infiniment grand; il s'ensuit que  $\frac{i-1}{i} = 1$ ; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à  $i$  sera grand, plus la valeur de la fraction  $\frac{i-1}{i}$  approchera de l'unité; donc si  $i$  est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction  $\frac{i-1}{i}$  égalera l'unité. Par une raison semblable;  $\frac{i-2}{i} = 1$ ;  $\frac{i-3}{i} = 1$  &c. Concluons de-là que  $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$ ;  $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$ ; ainsi des autres. Ces valeurs étant donc substituées, il en résultera  $a^{\zeta} = 1 + \frac{k\zeta}{1} + \frac{k^2 \zeta^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 \zeta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 \zeta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$ . à l'infini. Cette équation exprime en même-temps la relation entre les nombres  $a$  &  $k$ ; car, en supposant  $\zeta = 1$ , on aura  $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$ , & pour que  $a = 10$ , il faut que  $k$  soit environ  $= 2,30258$ ; comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

117. Supposons  $b = a^n$ , en prenant le nombre  $a$  pour la base logarithmique, nous aurons  $lb = n$ ; & puisque  $b^{\zeta} =$

$a^{n\zeta}$ , nous obtiendrons par une série infinie  $b^\zeta = 1 + \frac{k n \zeta}{1}$   
 $+ \frac{k^2 n^2 \zeta^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 n^3 \zeta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 n^4 \zeta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$ , & en écrivant  $lb$  au  
 lieu de  $n$ ,  $b^\zeta = 1 + \frac{k \zeta}{1} \cdot lb + \frac{k^2 \zeta^2}{1 \cdot 2} (lb)^2 + \frac{k^3 \zeta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (lb)^3 +$   
 $\frac{k^4 \zeta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (lb)^4 + \&c$ . Ainsi, la valeur de la lettre  $k$  étant une  
 fois connue par celle de la base  $a$ , une quantité exponen-  
 tielle quelconque  $b^\zeta$  pourra être exprimée par une série infini-  
 me, dont les termes marchent suivant les puissances de  $\zeta$ .  
 Cela posé, faisons voir à présent comment les logarithmes  
 peuvent être développés en séries infinies.

118. Comme  $a^\omega = 1 + k\omega$ ,  $\omega$  étant une fraction infini-  
 ment petite, & que la relation entre  $a$  &  $k$  est donnée par  
 cette équation:  $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c$ ; en pre-  
 nant  $a$  pour la base logarithmique, nous aurons  $\omega = l(1 + k\omega)$   
 &  $i\omega = l(1 + k\omega)^i$ ; or il est visible que plus le nombre  
 substitué à  $i$  sera grand, plus la puissance  $(1 + k\omega)^i$  sur-  
 passera l'unité, & qu'en faisant  $i =$  à un nombre infini, la  
 valeur de la puissance  $(1 + k\omega)^i$  s'élevera au-dessus de l'unité.  
 Donc si l'on suppose  $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ , on aura  $l(1 + x) =$   
 $i\omega$ . Il suit de là que le nombre  $i\omega$ , étant fini, puisqu'il est le  
 logarithme du nombre  $1 + x$ ,  $i$  doit être un nombre infiniment  
 grand; car autrement  $i\omega$  ne pourroit avoir une valeur finie.

119. Ayant fait  $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ ;  $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$ ,  
 &  $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$ ; d'où  $i\omega = \frac{i}{k} [(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1]$ . Or  $i\omega =$   
 $l(1 + x)$ ; donc  $l(1 + x) = \frac{i}{k} (1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$ ,  $i$  étant supposé

infiniment grand; mais  $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i \cdot 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}x^4 + \&c.$ ; & à cause de  $i$  infiniment grand  $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{2i-1}{3i} = \frac{1}{3}$ ;  $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$  &c. Donc  $i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$ , & par conséquent  $L(1+x) = \frac{1}{k} \left( \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c. \right)$ ,  $a$  étant toujours la base logarithmique, &  $k$  désignant le nombre relatif à cette base, de manière qu'on ait l'équation  $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$

120. Puisque nous avons trouvé une série égale au logarithme du nombre  $1+x$ , nous pourrions à son aide, la base  $a$  étant donnée, représenter la valeur du nombre  $k$ . En effet, supposons  $1+x = a$ , à cause de  $La = 1$ , nous aurons  $1 = \frac{1}{k} \left( \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c. \right)$  & par conséquent  $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.$  Série infinie, dont la valeur, en faisant  $a = 10$ , devra être à-peu-près  $= 2,30258$ , quoiqu'il soit difficile de concevoir que  $2,30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \&c.$ ; parce que les termes de cette série vont toujours en augmentant, & qu'il ne fût pas par conséquent d'en calculer quelques-uns pour en obtenir une valeur approchée. Nous remédierons tout-à-l'heure à cet inconvénient.

121. Si  $L(1+x) = \frac{1}{k} \left( \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c. \right)$ ; en faisant  $x$  négative,  $L(1-x) = -\frac{1}{k} \left( \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c. \right)$ ; & ôtant la seconde suite de la première;  $L(1+x) - L(1-x) = L \frac{1+x}{1-x} =$

$$\frac{2}{k}$$



$\frac{2}{k} \left( \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&c. \right)$ . Soit maintenant  $\frac{1+x}{1-x} = a$ , de manière que  $x = \frac{a-1}{a+1}$ , à cause de  $la = 1$ ,  $k = 2 \left( \frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \&c. \right)$ ; équation qui donne la valeur du nombre  $k$ , lorsqu'on connoît celle de la base  $a$ . Ainsi en faisant  $a = 10$ , on aura  $k = 2 \left( \frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \&c. \right)$ ; série assez convergente, pour qu'on en puisse tirer promptement la valeur approchée de  $k$ .

122. Comme on peut prendre à volonté la base  $a$  pour établir un système de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que  $k$  devienne = 1. Supposons donc  $k = 1$ ; la série trouvée ci-dessus (art. 116) deviendra  $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$ , dont les termes convertisen décimales, & ajoutés donnent pour  $a$  cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre est encore exact. Les logarithmes calculés sur cette base, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole. Au reste, pour abrégér nous désignerons constamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre  $e$ , qui indiquera par conséquent la base des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de  $k = 1$ ; c'est-à-dire, que cette lettre  $e$  exprimera la somme de la série  $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$  continuée à l'infini. (q)

123. Telle est donc la propriété des logarithmes hyperboliques, que celui du nombre  $1 + \omega = \omega$ ;  $\omega$  signifiant une quantité infiniment petite, &, comme en vertu de cette propriété,  $k = 1$ , on pourra obtenir les logarithmes hyperboliques de tous les nombres. Ainsi, en écrivant  $e$  à la place du nombre trouvé ci-dessus, on aura toujours  $e^x = 1 + \frac{x}{1}$

$$+ \frac{x^1}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \&c.$$
 Quant aux logarithmes hyperboliques, on les calculera au moyen des séries  $l(1+x)$ 

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \&c;$$
 &  $l \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$ 

$$+ \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \&c;$$
 lesquelles feront très convergentes, si l'on prend pour  $x$  une fraction très-petite. Ainsi avec la dernière série on trouvera sans peine les logarithmes des nombres, qui ne sont pas beaucoup plus grands que l'unité. En effet, en faisant  $x = \frac{1}{5}$ , on aura  $l \frac{6}{4} = l \frac{3}{2} = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{3.5^3}$ 

$$+ \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.5^7} + \&c:$$
 en faisant  $x = \frac{1}{7}$ , on trouvera  $l \frac{4}{3}$ 

$$= \frac{2}{1.7} + \frac{2}{3.7^3} + \frac{2}{5.7^5} + \frac{2}{7.7^7} + \&c,$$
 & en faisant  $x = \frac{1}{9}$ , on obtiendra pareillement  $l \frac{5}{4} = \frac{2}{1.9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7} + \&c.$ 
 Or les logarithmes de ces fractions feront trouver ceux des nombres entiers; car par la nature des logarithmes  $l \frac{3}{2} + l \frac{4}{3} = l 2$ ; alors  $l \frac{3}{2} + l 2 = l 3$ , &  $2 l 2 = l 4$ . Ensuite  $l \frac{5}{4} + l 4 = l 5$ ;  $l 2 + l 3 = l 6$ ;  $3 l 2 = l 8$ ;  $2 l 3 = l 9$ , &  $l 2 + l 5 = l 10$ .

## E X E M P L E.

Voici calculés d'après ces principes les logarithmes hyperboliques des nombres depuis 1 jusqu'à 10.

$l 1$	$= 0,$	000000000000000000000000
$l 2$	$= 0,$	6931471805599453094172321
$l 3$	$= 1,$	0986122886681096913952452
$l 4$	$= 1,$	3862943611198906188344642
$l 5$	$= 1,$	6094379124341003746007593
$l 6$	$= 1,$	7917594692280550008124773
$l 7$	$= 1,$	9459101490553133051054639
$l 8$	$= 2,$	0794415416798359282516964
$l 9$	$= 2,$	1972245773362193827904905
$l 10$	$= 2,$	3025850929940456840179914.

J'ai déduit tous ces logarithmes des trois séries précédentes excepté  $l_7$ , que j'ai calculé de cette manière : j'ai fait dans la dernière série  $x = \frac{1}{59}$  & j'ai obtenu  $l \frac{100}{98} = l \frac{50}{49} = 0,0202027073175194484078230$ , lequel étant soustrait de  $l 50 = 2 l 5 + l 2 = 3,9120230054281460586187508$ , donne pour reste  $l_{49}$ , dont la moitié donne  $l_7$ .

124. Faisons le logarithme hyperbolique de  $1 + x$  ou  $l(1 + x) = y$ , nous aurons  $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$  Preçons à présent le nombre  $a$  pour la base logarithmique, & soit dans cette hypothèse,  $= v$  le logarithme du même nombre  $1 + x$ , nous aurons, comme nous l'avons vu,  $v = \frac{1}{k} \left( \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c. \right) = \frac{y}{k}$ . Donc  $k = \frac{y}{v}$ ; ce qui fournit un moyen très-commode de déterminer la valeur de  $k$  correspondante à la base  $a$ , puisqu'elle se trouve égale au logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, divisé par le logarithme du même nombre formé sur la base  $a$ . Ainsi, en supposant ce nombre  $= a$ , on aura  $v = 1$ , & par conséquent  $k =$  au logarithme hyperbolique de la base  $a$ . Donc dans le système des logarithmes ordinaires, où  $a = 10$ ,  $k$  sera  $=$  au logarithme hyperbolique de 10, ou  $k = 2,3025850929940456840179914$ ; valeur dont nous avons déjà approché d'assez près. Si donc on divise tous les logarithmes hyperboliques par ce nombre  $k$ , ou ce qui revient au même, si on les multiplie par la fraction décimale  $0,4342944819032518276511289$ , on aura les logarithmes ordinaires, qui conviennent à la base  $a = 10$ .

125. Puisque  $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c.$ ; si l'on suppose  $a^y = e^x$ ; on aura, en prenant les logarithmes hyperboliques,  $yla = x$ , à cause de  $le = 1$ . Cette valeur substituée à  $x$  donnera  $a^y = 1 + \frac{yla}{1} + \frac{y^2 (la)^2}{1.2} + \frac{y^3 (la)^3}{1.2.3} + \&c.$  Donc une quantité exponentielle quelconque peut être con-

vertie en une série infinie, à l'aide des logarithmes hyperboliques; mais aussi,  $i$  désignant un nombre infiniment grand, les quantités exponentielles & les logarithmes peuvent être représentés par des puissances. En effet,  $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$ , & par conséquent  $a^y = \left(1 + \frac{y \log a}{i}\right)^i$ ; d'ailleurs, on a pour les logarithmes hyperboliques  $\log(1+x) = i \left[ \left(1+x\right)^{\frac{1}{i}} - 1 \right]$ . Au surplus, l'usage des logarithmes est démontré plus en détail dans le calcul intégral.

## C H A P I T R E   V I I I .

### *Des Quantités transcendantes qui naissent du Cercle.*

126. Après la considération des logarithmes & des quantités exponentielles, vient celle des arcs de cercle, & de leurs sinus & cosinus, tant parce qu'ils forment une autre espèce de quantités transcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes & des quantités exponentielles, lorsqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra plus clairement ci-après.

Supposons donc le rayon du cercle ou le sinus total = 1, il paroît assez clair que la circonférence de ce cercle ne peut être exprimée exactement en nombres rationnels \*, mais on a trouvé par approximation la demi-circonférence de ce cercle = . . . . .  
 3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2  
 8 8 4 1 9 7 1 6 9 3 9 9 3 7 5 1 0 5 8 2 0 9 7 4 9 4 4 5 9 2 3 0 7 8 1 6  
 4 0 6 2 8 6 2 0 8 9 9 8 6 4 8 0 3 4 8 2 5 3 4 2 1 1 7 0 6 7 9 8 2 1 4 8 0  
 8 6 5 1 3 2 7 2 3 0 6 6 4 7 0 9 3 8 4 4 6 +. Pour abrégér j'é-

\* Cette proposition a été démontrée par Lambert, *Mémoires de Berlin*; mais on en trouvera une démonstration plus simple dans les *Éléments de Géométrie* du C. Legendre, qui ont paru depuis peu.

écrirai  $\pi$  au lieu de ce nombre, de sorte que  $\pi =$  à la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon  $= 1$ ; ou  $\pi$  sera la longueur d'un arc de 180 degrés.

127. Soit  $\zeta$  un arc quelconque de cercle dont je suppose toujours le rayon  $= 1$ ; on a coutume de considérer plus particulièrement les sinus & cosinus de cet arc  $\zeta$ . Pour représenter dans la suite le sinus d'un arc  $\zeta$ , j'écrirai *sin.*  $A.\zeta$ , ou simplement *sin.*  $\zeta$ . Et pour représenter le cosinus j'écrirai *cos.*  $A.\zeta$ , ou seulement *cos.*  $\zeta$ . Ainsi comme  $\pi$  exprime un arc de 180°, *sin.*  $0\pi = 0$ ; *cos.*  $0\pi = 1$ ; *sin.*  $\frac{1}{2}\pi = 1$ ; *cos.*  $\frac{1}{2}\pi = 0$ ; *sin.*  $\pi = 0$ , *cos.*  $\pi = -1$ ; *sin.*  $\frac{3}{2}\pi = -1$ , *cos.*  $\frac{3}{2}\pi = 0$ ; *sin.*  $2\pi = 0$ , & *cos.*  $2\pi = 1$ . Tous les sinus & cosinus sont donc renfermés dans les limites  $+1$  &  $-1$ . Or *cos.*  $\zeta = \sin. (\frac{1}{2}\pi - \zeta)$  & *sin.*  $\zeta = \cos. (\frac{1}{2}\pi - \zeta)$ ; &  $(\sin. \zeta)^2 + (\cos. \zeta)^2 = 1$ . Outre ces dénominations il faut distinguer celles-ci : *tang.*  $\zeta$ , qui désigne la tangente de l'arc  $\zeta$ , & *cot.*  $\zeta$ , qui désigne la cotangente de l'arc  $\zeta$ ; on fait d'ailleurs que *tang.*  $\zeta = \frac{\sin. \zeta}{\cos. \zeta}$ , & que *cot.*  $\zeta = \frac{\cos. \zeta}{\sin. \zeta} = \frac{1}{\textit{tang.} \zeta}$ . Tout cela est connu par la Trigonométrie.

128. On fait aussi qu'étant donnés les deux arcs  $y$  &  $\zeta$ , *sin.*  $(y + \zeta) = \sin. y \cos. \zeta + \cos. y \sin. \zeta$ , & *cos.*  $(y + \zeta) = \cos. y \cos. \zeta - \sin. y \sin. \zeta$ ; de même *sin.*  $(y - \zeta) = \sin. y \cos. \zeta - \cos. y \sin. \zeta$ ; & *cos.*  $(y - \zeta) = \cos. y \cos. \zeta + \sin. y \sin. \zeta$ .

Par conséquent, en substituant à  $y$  les arcs  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\pi$ ;  $\frac{3}{2}\pi$ , &c. nous obtiendrons

$\sin. (\frac{1}{2}\pi + \zeta) = + \cos. \zeta$	$\sin. (\frac{1}{2}\pi - \zeta) = + \cos. \zeta$
$\cos. (\frac{1}{2}\pi + \zeta) = - \sin. \zeta$	$\cos. (\frac{1}{2}\pi - \zeta) = + \sin. \zeta$
$\sin. (\pi + \zeta) = - \sin. \zeta$	$\sin. (\pi - \zeta) = + \sin. \zeta$
$\cos. (\pi + \zeta) = - \cos. \zeta$	$\cos. (\pi - \zeta) = - \cos. \zeta$
$\sin. (\frac{3}{2}\pi + \zeta) = + \cos. \zeta$	$\sin. (\frac{3}{2}\pi - \zeta) = - \cos. \zeta$
$\cos. (\frac{3}{2}\pi + \zeta) = + \sin. \zeta$	$\cos. (\frac{3}{2}\pi - \zeta) = - \sin. \zeta$
$\sin. (2\pi + \zeta) = + \sin. \zeta$	$\sin. (2\pi - \zeta) = - \sin. \zeta$
$\cos. (2\pi + \zeta) = + \cos. \zeta$	$\cos. (2\pi - \zeta) = + \cos. \zeta$

Donc si  $n$  désigne un nombre entier quelconque, on verra que . . . . .

$\sin. \left( \frac{4n+1}{2} \pi + \zeta \right) = + \cos. \zeta$	$\sin. \left( \frac{4n+1}{2} \pi - \zeta \right) = + \cos. \zeta$
$\cos. \left( \frac{4n+1}{2} \pi + \zeta \right) = - \sin. \zeta$	$\cos. \left( \frac{4n+1}{2} \pi - \zeta \right) = + \sin. \zeta$
$\sin. \left( \frac{4n+2}{2} \pi + \zeta \right) = - \sin. \zeta$	$\sin. \left( \frac{4n+2}{2} \pi - \zeta \right) = + \sin. \zeta$
$\cos. \left( \frac{4n+2}{2} \pi + \zeta \right) = - \cos. \zeta$	$\cos. \left( \frac{4n+2}{2} \pi - \zeta \right) = - \cos. \zeta$
$\sin. \left( \frac{4n+3}{2} \pi + \zeta \right) = - \cos. \zeta$	$\sin. \left( \frac{4n+3}{2} \pi - \zeta \right) = - \cos. \zeta$
$\cos. \left( \frac{4n+3}{2} \pi + \zeta \right) = + \sin. \zeta$	$\cos. \left( \frac{4n+3}{2} \pi - \zeta \right) = - \sin. \zeta$
$\sin. \left( \frac{4n+4}{2} \pi + \zeta \right) = + \sin. \zeta$	$\sin. \left( \frac{4n+4}{2} \pi - \zeta \right) = - \sin. \zeta$
$\cos. \left( \frac{4n+4}{2} \pi + \zeta \right) = + \cos. \zeta$	$\cos. \left( \frac{4n+4}{2} \pi - \zeta \right) = + \cos. \zeta$

Ces formules sont également vraies,  $n$  étant un nombre entier positif ou négatif.

129. Soit  $\sin. \zeta = p$ , &  $\cos. \zeta = q$ ,  $\sin. y = m$ ,  $\cos. y = n$ ; on aura également  $pp + qq = 1$ ,  $mm + nn = 1$ ; & les sinus & les cosinus des arcs composés de ceux-ci se trouvent comme il suit:

$\sin. \zeta = p$	$\cos. \zeta = q$
$\sin. (y + \zeta) = mq + np$	$\cos. (y + \zeta) = nq - mp$
$\sin. (2y + \zeta) = 2mnq + (n^2 - m^2)p$	$\cos. (2y + \zeta) = (nn - mm)q - 2mnp$
$\sin. (3y + \zeta) = (3m^2n - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p$	$\cos. (3y + \zeta) = (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p$
&c.	&c.

Ces arcs  $\zeta, y + \zeta, 2y + \zeta, 3y + \zeta$ , &c. croissent en progression arithmétique, & leur sinus & cosinus forment une progression récurrente, telle qu'elle résulteroit du dénominateur  $1 - 2nx + (mm + nn)xx$ ; en effet

$\sin. (2y + \zeta) = 2n \sin. (y + \zeta) - (mm + nn) \sin. \zeta$	ou
$\sin. (2y + \zeta) = 2 \cos. y. \sin. (y + \zeta) - \sin. \zeta$	semblablement

$$\text{cof. } (2y + z) = 2 \text{ cof. } y. \text{ cof. } (y + z) - \text{cof. } z. \quad \text{De même}$$

$$\text{fin. } (3y + z) = 2 \text{ cof. } y. \text{ fin. } (2y + z) - \text{fin. } (y + z) \quad \&$$

$$\text{cof. } (3y + z) = 2 \text{ cof. } y. \text{ cof. } (2y + z) - \text{cof. } (y + z). \quad \text{De plus}$$

$$\text{fin. } (4y + z) = 2 \text{ cof. } y. \text{ fin. } (3y + z) - \text{fin. } (2y + z) \quad \&$$

$$\text{cof. } (4y + z) = 2 \text{ cof. } y. \text{ cof. } (3y + z) - \text{cof. } (2y + z) \quad \&c.$$

En suivant cette loi on pourra former promptement les sinus & les cosinus de tant d'arcs qu'on voudra , qui croissent en progression arithmétique.

130. À cause de  $\text{fin. } (y + z) = \text{fin. } y. \text{ cof. } z + \text{cof. } y. \text{ fin. } z$  & de  $\text{fin. } (y - z) = \text{fin. } y. \text{ cof. } z - \text{cof. } y. \text{ fin. } z$ , on aura , en ajoutant ou en soustrayant , ces expressions ,

$$\text{fin. } y. \text{ cof. } z = \frac{\text{fin. } (y + z) + \text{fin. } (y - z)}{2}.$$

$$\text{cof. } y. \text{ fin. } z = \frac{\text{fin. } (y + z) - \text{fin. } (y - z)}{2}.$$

De plus à cause de  $\text{cof. } (y + z) = \text{cof. } y. \text{ cof. } z - \text{fin. } y. \text{ fin. } z$ , & de  $\text{cof. } (y - z) = \text{cof. } y. \text{ cof. } z + \text{fin. } y. \text{ fin. } z$ , on aura semblablement

$$\text{cof. } y. \text{ cof. } z = \frac{\text{cof. } (y - z) + \text{cof. } (y + z)}{2}.$$

$$\text{fin. } y. \text{ fin. } z = \frac{\text{cof. } (y - z) - \text{cof. } (y + z)}{2}.$$

Soit  $y = z = \frac{1}{2} v$ , on conclura de ces dernières formules :

$$(\text{cof. } \frac{1}{2} v)^2 = \frac{1 + \text{cof. } v}{2}, \quad \& \quad \text{cof. } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + \text{cof. } v}{2}}.$$

$$(\text{fin. } \frac{1}{2} v)^2 = \frac{1 - \text{cof. } v}{2}, \quad \& \quad \text{fin. } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \text{cof. } v}{2}}.$$

donc le cosinus d'un angle quelconque étant donné , on trouvera le sinus & le cosinus de sa moitié.

131. Supposons l'arc  $y + z = a$ , &  $y - z = b$ , nous aurons  $y = \frac{a+b}{2}$ , &  $z = \frac{a-b}{2}$ , & en substituant dans les formules précédentes , nous obtiendrons , comme autant de théorèmes , les équations suivantes :

$$\text{fin. } a + \text{fin. } b = 2 \text{ fin. } \frac{a+b}{2}. \text{ cof. } \frac{a-b}{2}$$

$$\text{fin. } a - \text{fin. } b = 2 \text{ cof. } \frac{a+b}{2} \text{ fin. } \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b &= 2 \operatorname{cof}. \frac{a+b}{2} \operatorname{cof}. \frac{a-b}{2} \\ \operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a &= 2 \operatorname{sin}. \frac{a+b}{2} \operatorname{sin}. \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

Ces résultats nous donneront, à l'aide de la division, ces théorèmes :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sin}. a + \operatorname{sin}. b}{\operatorname{sin}. a - \operatorname{sin}. b} &= \operatorname{tang}. \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{cot}. \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{tang}. \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}. \frac{a-b}{2}} \\ \frac{\operatorname{sin}. a + \operatorname{sin}. b}{\operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b} &= \operatorname{tang}. \frac{a+b}{2} \\ \frac{\operatorname{sin}. a + \operatorname{sin}. b}{\operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a} &= \operatorname{cot}. \frac{a-b}{2} \\ \frac{\operatorname{sin}. a - \operatorname{sin}. b}{\operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b} &= \operatorname{tang}. \frac{a-b}{2} \\ \frac{\operatorname{sin}. a - \operatorname{sin}. b}{\operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a} &= \operatorname{cot}. \frac{a+b}{2} \\ \frac{\operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b}{\operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a} &= \operatorname{cot}. \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{cot}. \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

Enfin de ces derniers théorèmes nous déduirons ceux-ci :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sin}. a + \operatorname{sin}. b}{\operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b} &= \frac{\operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a}{\operatorname{sin}. a - \operatorname{sin}. b} \\ \frac{\operatorname{sin}. a + \operatorname{sin}. b}{\operatorname{sin}. a - \operatorname{sin}. b} \times \frac{\operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b}{\operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a} &= \left( \operatorname{cot}. \frac{a-b}{2} \right)^2 \\ \frac{\operatorname{sin}. a + \operatorname{sin}. b}{\operatorname{sin}. a - \operatorname{sin}. b} \times \frac{\operatorname{cof}. b - \operatorname{cof}. a}{\operatorname{cof}. a + \operatorname{cof}. b} &= \left( \operatorname{tang}. \frac{a+b}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

122. Puisque  $(\operatorname{sin}. \zeta)^2 + (\operatorname{cof}. \zeta)^2 = 1$ , en décomposant en facteurs, on aura  $(\operatorname{cof}. \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \zeta) (\operatorname{cof}. \zeta - \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \zeta) = 1$ . Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs  $(\operatorname{cof}. \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \zeta) (\operatorname{cof}. \gamma + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \gamma)$ , nous trouverons  $\operatorname{cof}. \gamma \operatorname{cof}. \zeta - \operatorname{sin}. \gamma \operatorname{sin}. \zeta + (\operatorname{cof}. \gamma \operatorname{sin}. \zeta + \operatorname{sin}. \gamma \operatorname{cof}. \zeta) \sqrt{-1}$ ; mais comme  $\operatorname{cof}. \gamma \operatorname{cof}. \zeta - \operatorname{sin}. \gamma \operatorname{sin}. \zeta = \operatorname{cof}. (\gamma + \zeta)$ , &  $\operatorname{cof}. \gamma \operatorname{sin}. \zeta + \operatorname{sin}. \gamma \operatorname{cof}. \zeta = \operatorname{sin}. (\gamma + \zeta)$ ; nous obtiendrons ce produit  $(\operatorname{cof}. \gamma + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \gamma) (\operatorname{cof}. \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \zeta)$



$$\{ \text{cos. } \zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta} \} = \text{cos. } (y + \zeta) \pm \sqrt{-1. \text{sin. } (y + \zeta)}.$$

Semblablement

$$\{ \text{cos. } y \pm \sqrt{-1. \text{sin. } y} \} \{ \text{cos. } \zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta} \} = \text{cos. } (y + \zeta) \pm \sqrt{-1. \text{sin. } (y + \zeta)}.$$

De même

$$\{ \text{cos. } x \pm \sqrt{-1. \text{sin. } x} \} \{ \text{cos. } y \pm \sqrt{-1. \text{sin. } y} \} \{ \text{cos. } \zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta} \} = \text{cos. } (x + y + \zeta) \pm \sqrt{-1. \text{sin. } (x + y + \zeta)}.$$

133. Il suit de-là que  $(\text{cos. } \zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^2 = \text{cos. } 2\zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } 2\zeta}$ , &  $(\text{cos. } \zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^3 = \text{cos. } 3\zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } 3\zeta}$ ; & qu'en général  $(\text{cos. } \zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^n = \text{cos. } n\zeta \pm \sqrt{-1. \text{sin. } n\zeta$ : d'où nous tirerons à cause du double signe,

$$\text{cos. } n\zeta = \frac{(\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^n + (\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^n}{2} \quad \&c$$

$$\text{sin. } n\zeta = \frac{(\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^n - (\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1. \text{sin. } \zeta})^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binomes en séries, nous aurons

$$\text{cos. } n\zeta = (\text{cos. } \zeta)^n - \frac{n(n-1)}{1.2} (\text{cos. } \zeta)^{n-2} (\text{sin. } \zeta)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} (\text{cos. } \zeta)^{n-4} (\text{sin. } \zeta)^4 - \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} (\text{cos. } \zeta)^{n-6} (\text{sin. } \zeta)^6 + \&c.$$

$$\& \text{sin. } n\zeta = \frac{n}{1} (\text{cos. } \zeta)^{n-1} \text{sin. } \zeta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (\text{cos. } \zeta)^{n-3} (\text{sin. } \zeta)^3 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} (\text{cos. } \zeta)^{n-5} (\text{sin. } \zeta)^5 - \&c.$$

134. Soit  $\zeta$  un arc infiniment petit, alors  $\text{sin. } \zeta = \zeta$ , &  $\text{cos. } \zeta = 1$ ; soit en même temps  $n$  un nombre infiniment grand, pour que l'arc  $n\zeta$  soit d'une grandeur finie, pour que  $n\zeta$ , par exemple,  $= v$ ; à cause de  $\text{sin. } \zeta = \zeta = \frac{v}{n}$ , on aura

$$\text{cos. } v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c. \quad \&c$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. N

$$\text{fin. } \nu = \nu - \frac{\nu^3}{1.2.3} + \frac{\nu^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\nu^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

Ainsi l'arc  $\nu$  étant donné, on pourra, à l'aide de ces séries, trouver son sinus & son cosinus. Pour rendre l'usage de ces formules plus général, supposons que l'arc  $\nu$  soit au quart de la circonférence ou à  $90^\circ$ , comme  $m$  est à  $n$ , ou que  $\nu = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ ; comme la valeur de  $\pi$  est connue, en la substituant dans tous les termes, on trouvera

$$\text{fin. } A \frac{m}{n} 90^\circ =$$

$$\begin{aligned} & + \frac{m}{n} \cdot 1, 5707963267948966192313216916 \\ & - \frac{m^3}{n^3} \cdot 0, 6459640975062462536557565636 \\ & + \frac{m^5}{n^5} \cdot 0, 0796926262461670451205055488 \\ & - \frac{m^7}{n^7} \cdot 0, 0046817541353186881006854632 \\ & + \frac{m^9}{n^9} \cdot 0, 0001604411847873598218726605 \\ & - \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0, 0000035988432352120853404580 \\ & + \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0, 0000000569217292196792681171 \\ & - \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0, 000000006688035109811467224 \\ & + \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0, 000000000060669357311061950 \\ & - \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0, 00000000000043770654673137\alpha \\ & + \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0, 000000000000002571422892856 \\ & - \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0, 000000000000000012538995403 \\ & + \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0, 00000000000000000051564550 \\ & - \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0, 00000000000000000000181239 \\ & + \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0, 00000000000000000000000549 \end{aligned}$$

Et *cos.* A  $\frac{m}{n} 90^\circ =$

- + 1, 00000000000000000000000000000000
- $\frac{m^2}{n^2}$  . 1, 2337005501361698273543113745
- +  $\frac{m^4}{n^4}$  . 0, 2536695079010480136365633659
- $\frac{m^6}{n^6}$  . 0, 0208634807633529608730516364
- +  $\frac{m^8}{n^8}$  . 0, 0009192602748394265802417158
- $\frac{m^{10}}{n^{10}}$  . 0, 0000252020423730606054810526
- +  $\frac{m^{12}}{n^{12}}$  . 0, 0000004710874778818171503665
- $\frac{m^{14}}{n^{14}}$  . 0, 000000063866030837918522408
- +  $\frac{m^{16}}{n^{16}}$  . 0, 0000000000656596311497947230
- $\frac{m^{18}}{n^{18}}$  . 0, 00000000000005294400200734620
- +  $\frac{m^{20}}{n^{20}}$  . 0, 0000000000000034377391790981
- $\frac{m^{22}}{n^{22}}$  . 0, 0000000000000000183599165212
- +  $\frac{m^{24}}{n^{24}}$  . 0, 0000000000000000000000820675327
- $\frac{m^{26}}{n^{26}}$  . 0, 000000000000000000000003115285
- +  $\frac{m^{28}}{n^{28}}$  . 0, 00000000000000000000000010165
- $\frac{m^{30}}{n^{30}}$  . 0, 00000000000000000000000000026

Mais comme il suffit de connoître les sinus & les cosinus des angles jusqu'à 45°, la fraction  $\frac{m}{n}$  sera toujours plus petite que  $\frac{1}{2}$ , & par conséquent à cause des puissances de la fraction  $\frac{m}{n}$ , les séries que nous venons de donner, seront très-convergentes, de sorte qu'il suffira le plus souvent d'en prendre seulement quelques termes, sur-tout si l'on n'exige

pas pour les sinus & les cosinus autant de figures.

135. Les sinus & les cosinus étant une fois trouvés, on peut calculer les tangentes & les cotangentes par les analogies ordinaires; mais comme pour des nombres aussi grands la multiplication & la division ne laissent pas d'être très-fatigantes, il sera bon d'en donner ici une expression particulière. On aura donc

$$\begin{aligned} \text{tang. } \nu &= \frac{\sin. \nu}{\cos. \nu} = \frac{\nu - \frac{\nu^3}{1.2.3} + \frac{\nu^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\nu^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.}{1 - \frac{\nu^2}{1.2} + \frac{\nu^4}{1.2.3.4} - \frac{\nu^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c;} \\ \& \text{ cot. } \nu &= \frac{\cos. \nu}{\sin. \nu} = \frac{1 - \frac{\nu^2}{1.2} + \frac{\nu^4}{1.2.3.4} - \frac{\nu^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.}{\nu - \frac{\nu^3}{1.2.3} + \frac{\nu^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\nu^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c;} \end{aligned}$$

Soit maintenant l'arc  $\nu = \frac{m}{n} 90^\circ$ , on aura de la même manière qu'auparavant,

$\begin{aligned} \text{tang. } A \frac{m}{n} 90^\circ &= \\ + \frac{2mn}{nn - mm} &. 0,6366197723675 \\ + \frac{m}{n} &. 0,2975567820597 \\ + \frac{m^3}{n^3} &. 0,0186886502773 \\ + \frac{m^5}{n^5} &. 0,0018424752034 \\ + \frac{m^7}{n^7} &. 0,0001973800714 \\ + \frac{m^9}{n^9} &. 0,0000216977245 \\ + \frac{m^{11}}{n^{11}} &. 0,0000024011370 \\ + \frac{m^{13}}{n^{13}} &. 0,0000002664132 \\ + \frac{m^{15}}{n^{15}} &. 0,0000000295864 \end{aligned}$		$\begin{aligned} \text{cot. } A \frac{m}{n} 90^\circ &= \\ + \frac{n}{m} &. 0,6366197723675 \\ - \frac{4mn}{4nn - mm} &. 0,3183098861837, \\ - \frac{m}{n} &. 0,2052888894145 \\ - \frac{m^3}{n^3} &. 0,0065510747882 \\ - \frac{m^5}{n^5} &. 0,0003450292554 \\ - \frac{m^7}{n^7} &. 0,0000202791060 \\ - \frac{m^9}{n^9} &. 0,0000012366527, \\ - \frac{m^{11}}{n^{11}} &. 0,0000000764959 \\ - \frac{m^{13}}{n^{13}} &. 0,0000000047597 \end{aligned}$
---	--	---

$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,0000000032867$	$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000002969$
$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,0000000003651$	$- \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,0000000000185$
$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} . 0,000000000405$	$- \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,0000000000011$
$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} . 0,000000000045$	
$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} . 0,000000000005$	

On expliquera plus au long dans la suite la formation de ces dernières séries. *Voyez art. 197 & suiv.*

136. Il suit de ce qui précède, que si l'on connoissoit les sinus & les cosinus des angles moindres que le demi-droit, on connoîtroit aussi ceux de tous les angles plus grands; mais il suffira de connoître les sinus & les cosinus des angles au-dessous de 30°, pour en conclure par l'addition & la soustraction seulement, les sinus & les cosinus des angles au-dessus. En effet, puisque  $\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ , en faisant  $y = 30$ , on aura (*art. 130*)  $\cos. x = \sin. (30 + x) + \sin. (30 - x)$ , &  $\sin. x = \cos. (30 - x) - \cos. (30 + x)$ . Ainsi, au moyen des sinus & des cosinus des angles  $x$  &  $30 - x$ , on trouvera  $\sin. (30 + x) = \cos. x - \sin. (30 - x)$ , &  $\cos. (30 + x) = \cos. (30 - x) - \sin. x$ . Donc les sinus & les cosinus des angles depuis 30° jusqu'à 60°, & par conséquent ceux des arcs plus grands seront déterminés.

137. On peut jouir du même avantage pour le calcul des tangentes & des cotangentes. En effet, puisque  $\text{tang. } (a+b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b}$ , on aura  $\text{tang. } 2a = \frac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } a}$  &  $\text{cot. } 2a = \frac{\text{cot. } a - \text{tang. } a}{2}$ . Par conséquent les tangentes & les cotangentes des arcs, qui sont au-dessous de 30°, donneront les cotangentes des arcs au-dessus jusqu'à 60°.

Soit à présent  $a = 30 - b$ , on aura  $2a = 60 - 2b$ ,

&  $\cot. 2a = \text{tang. } (30 + 2b)$ . Donc  $\text{tang. } (30 + 2b) \equiv \frac{\cot. (30 - b) - \text{tang. } (30 - b)}{2}$ ; ce qui donne aussi les tangentes des arcs plus grands que  $30^\circ$ .

Quant aux sécantes & aux cofécantes, on les conclut des tangentes par la seule soustraction; car on a  $\text{coféc. } \alpha \equiv \text{cot. } \frac{1}{2} \alpha - \cot. \alpha$ , & partant  $\text{séc. } \alpha = \cot. (45 - \frac{1}{2} \alpha) - \text{tang. } \alpha$ . On voit clairement par-là comment on a pu construire des tables de sinus.

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) l'arc  $\alpha$  infiniment petit, &  $n$  un nombre infiniment grand  $i$ , afin d'obtenir pour  $i\alpha$  une valeur finie  $v$ ; nous aurons donc  $n\alpha = v$ , &  $\alpha = \frac{v}{i}$ , & par conséquent  $\sin. \alpha = \frac{v}{i}$ , &  $\text{cof. } \alpha = 1$ ; ces substitutions faites donne-

$$\text{ront } \text{cof. } v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} \quad \& \quad \text{sin. } v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que  $\left(1 + \frac{\alpha}{i}\right)^i = e^\alpha$ ,  $e$  désignant la base des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour  $\alpha$ , d'une part  $+v\sqrt{-1}$  & d'une autre part  $-v\sqrt{-1}$ , on aura

$$\text{cof. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad \& \quad \text{sin. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi  $e^{+v\sqrt{-1}} = \text{cof. } v + \sqrt{-1} \text{ sin. } v$ , &  $e^{-v\sqrt{-1}} = \text{cof. } v - \sqrt{-1} \text{ sin. } v$ .

139. Supposons à présent dans les mêmes formules (art. 133)  $n$

un nombre infiniment petit, ou  $n = \frac{1}{i}$ ,  $i$  étant un nombre (s)

infiniment grand, nous aurons  $\text{cos. } n \zeta = \text{cos. } \frac{\zeta}{i} = 1$ ,

&  $\text{sin. } n \zeta = \text{sin. } \frac{\zeta}{i} = \frac{\zeta}{i}$ ; car le sinus d'un arc  $\frac{\zeta}{i}$ , qui s'évanouit, est égal à cet arc, & son cosinus = 1. Cela posé nous aurons . . . . .

$$1 = \frac{(\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta)^{\frac{1}{i}} + (\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta)^{\frac{1}{i}}}{2} \text{ \& } . . .$$

$$\frac{\zeta}{i} = \frac{(\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta)^{\frac{1}{i}} - (\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}} \text{ . Or en}$$

prenant les logarithmes hyperboliques, nous avons fait

voir (art. 125) que  $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$ , ou  $y^{\frac{1}{i}} =$

$1 + \frac{1}{i} ly$ , en mettant  $y$  à la place de  $1+x$ . Donc si nous

écrivons à présent au lieu de  $y$ , d'une part  $\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta$ , & de l'autre  $\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta$ , nous trouverons  $1 =$

$$1 + \frac{1}{i} l(\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta) + 1 + \frac{1}{i} l(\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta) = 1,$$

à cause des logarithmes qui deviennent nuls, de sorte que nous n'en pouvons rien conclure; mais l'autre équation, relative au

sinus donne  $\frac{\zeta}{i} = \frac{\frac{1}{i} l(\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta) - \frac{1}{i} l(\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta)}{2\sqrt{-1}}$

& par conséquent  $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{\text{cos. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta}{\text{cos. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ sin. } \zeta}\right)$ . On voit

d'après cela comment les logarithmes imaginaires se ramènent aux arcs circulaires.

140. A cause de  $\frac{\text{sin. } \zeta}{\text{cos. } \zeta} = \text{tang. } \zeta$ , on aura l'expression d'un arc  $\zeta$

par sa tangente de cette manière:  $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1 + \sqrt{-1} \text{ tang. } \zeta}{1 - \sqrt{-1} \text{ tang. } \zeta}$ .

Or nous avons vu ci-dessus (art. 123) que  $l \frac{1+x}{1-x} =$

$\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \&c;$  donc en supposant  $x = \sqrt{1 - \text{tang. } \zeta}$ , nous aurons  $\zeta = \frac{\text{tang. } \zeta}{1} - \frac{(\text{tang. } \zeta)^3}{3} + \frac{(\text{tang. } \zeta)^5}{5} - \frac{(\text{tang. } \zeta)^7}{7} + \&c.$  Faisons donc  $\text{tang. } \zeta = t$ , de sorte que  $\zeta$  soit l'arc dont la tangente est  $t$ , & que nous désignerons ainsi:  $A. \text{ tang. } t$ , ce qui donne  $\zeta = A. \text{ tang. } t$ . La tangente  $t$  étant connue, l'arc correspondant sera  $\zeta = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \&c.$  Puis donc qu'en supposant la tangente  $t$  égale au rayon 1, l'arc  $\zeta$  devient = à l'arc de  $45^\circ$  ou  $\zeta = \frac{\pi}{4}$ , nous trouverons  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c;$  série que LEIBNITZ a donnée le premier pour exprimer la valeur de la circonférence du cercle.

141. Mais pour obtenir promptement, au moyen d'une telle série, la longueur d'un arc de cercle, il est clair qu'on doit prendre pour la tangente  $t$  une fraction assez petite. Ainsi, on trouveroit facilement, à l'aide de cette série, la longueur de l'arc  $\zeta$ , dont la tangente  $t$  seroit  $\frac{1}{10}$ ; car cet arc seroit  $\zeta = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} - \&c.$  série dont on peut aisément obtenir la valeur par le moyen des décimales; mais la mesure d'un tel arc n'apprendroit rien pour la longueur de toute la circonférence, parce que le rapport de l'arc, dont la tangente =  $\frac{1}{10}$ , à la circonférence entière est inassignable. C'est pourquoi, dans cette recherche, on doit prendre un arc qui soit une partie aliquote de la circonférence, & dont la tangente assez petite puisse être exprimée commodément. On choisit ordinairement pour remplir ce but l'arc de  $30^\circ$  dont la tangente =  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , parce que les tangentes des arcs plus petits, qui ont un rapport commensurable avec la circonférence, sont trop irrationnelles.

Ainsi.



Ainsi, à cause de l'arc de  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ , on aura  $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \sqrt{3}} - \&c.$  &  $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \&c.$  Et c'est par le moyen de cette série, & avec un travail incroyable, qu'on est venu à bout de trouver la valeur de  $\pi$  que nous avons donnée ci dessus.

142. Ce calcul est d'autant plus pénible, que tous les termes sont irrationnels, & que chacun d'eux n'est gueres plus petit, que le tiers de celui qui précède; mais on pourra remédier ainsi à cet inconvénient: prenons toujours l'arc de  $45^\circ$  ou  $\frac{\pi}{4}$ . Quoique cet arc ait une valeur exprimée par une série à peine convergente  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c;$  conservons-le cependant, & imaginons-le partagé en deux arcs  $a$  &  $b$ , de maniere que  $a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . Puis donc que  $\text{tang.}(a + b) = 1 = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$ , nous aurons  $1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b = \text{tang. } a + \text{tang. } b$  &  $\text{tang. } b = \frac{1 - \text{tang. } a}{1 + \text{tang. } a}$ . Soit maintenant  $\text{tang. } a = \frac{1}{2}$ ; nous trouverons  $\text{tang. } b = \frac{1}{3}$ ; alors les deux arcs  $a$  &  $b$  seront exprimés par une série rationnelle beaucoup plus convergente que la précédente, & leur somme donnera la valeur de l'arc  $\frac{\pi}{4}$ . Donc . . . . .

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \&c. \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \&c. \end{array} \right\}$$

On auroit donc pu trouver de cette maniere la longueur de la demi-circonférence beaucoup plus promptement qu'on ne l'a fait, en se servant de la série que nous avons donnée auparavant.

## C H A P I T R E IX.

*De la recherche des Facteurs trinomes.*

143. Nous avons fait voir auparavant que c'étoit par la résolution des équations qu'on trouvoit les facteurs simples de chaque fonction entiere. En effet, soit proposée la fonction entiere  $a + c\zeta + r\zeta^2 + s\zeta^3 + e\zeta^4 + \&c.$ , & cherchons en les facteurs simples de la forme  $p - q\zeta$ , il est évident que si  $p - q\zeta$  est un facteur de la fonction  $a + c\zeta + r\zeta^2 + \&c.$ , en faisant  $\zeta = \frac{p}{q}$ , qui est le cas ou  $p - q\zeta = 0$ , la fonction proposée doit aussi devenir égale à zéro; d'où il suit que si  $p - q\zeta$  est un facteur ou un diviseur de la fonction  $a + c\zeta + r\zeta^2 + s\zeta^3 + e\zeta^4 + \&c.$ , cette expression  $a + c\frac{p}{q} + r\frac{p^2}{q^2} + s\frac{p^3}{q^3} + e\frac{p^4}{q^4} + \&c. = 0$ . Donc réciproquement si l'on tire toutes les racines  $\frac{p}{q}$  de cette équation, elles donneront chacune autant de facteurs simples de la fonction entiere proposée  $a + c\zeta + r\zeta^2 + s\zeta^3 + \&c.$ , savoir  $p - q\zeta$ . Or il est visible en même-temps que le nombre de ces facteurs s'estime par la plus grande puissance de  $\zeta$ .

144. Il y a souvent de la difficulté à trouver de cette maniere les facteurs imaginaires; c'est pourquoi je vais donner dans ce Chapitre une méthode particuliere, au moyen de laquelle on pourra trouver dans bien des cas les facteurs simples imaginaires. Or la nature des facteurs simples imaginaires étant telle, que le produit de deux d'entr'eux soit réel, nous les trouverons tous, en cherchant les facteurs doubles, ou de la forme  $p - q\zeta + r\zeta^2$ , qui soient réels,

mais dont les facteurs simples soient imaginaires ; car il est clair que connoissant une fois tous les facteurs doubles trinomes de la forme  $p - qz + rz^2$ , que renferme la fonction  $a + \zeta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \&c$  ; on aura en même-temps tous les facteurs imaginaires.

145. Or le trinome  $p - qz + rz^2$  aura des facteurs simples imaginaires si  $4pr > qq$ , ou  $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$ . Mais comme les sinus & les cosinus des angles sont plus petits que l'unité, la formule  $p - qz + rz^2$  aura des facteurs simples imaginaires, si  $\frac{q}{2\sqrt{pr}} =$  au sinus ou au cosinus d'un angle quelconque.

Soit donc  $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos. A\phi$ , ou  $q = 2\sqrt{pr} \cos. \phi$ , & le trinome  $p - qz + rz^2$  renfermera des facteurs simples imaginaires ; mais pour n'être gêné par aucun signe radical, je choisiss cette forme  $pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2$ , dont les facteurs imaginaires simples seront ceux-ci :  $qz - p(\cos. \phi + \sqrt{-1} \sin. \phi)$  &  $qz - p \cos. \phi - \sqrt{-1} \sin. \phi$ . On voit par-là que si  $\cos. \phi = \pm 1$ , les deux facteurs, à cause de  $\sin. \phi = 0$ , deviennent égaux & réels.

146. Étant donc proposée la fonction entière  $a + \zeta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \&c$ , ou en connoitra les facteurs simples imaginaires, si on détermine les lettres  $p$  &  $q$  avec l'angle  $\phi$ , de maniere que ce trinome  $pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2$  soit facteur de la fonction. Car alors on aura pour ces facteurs simples imaginaires :  $qz - p(\cos. \phi + \sqrt{-1} \sin. \phi)$  &  $qz - p(\cos. \phi - \sqrt{-1} \sin. \phi)$ . Par conséquent la fonction proposée se réduira à zéro, en faisant  $z = \frac{p}{q}(\cos. \phi + \sqrt{-1} \sin. \phi)$ , &  $z = \frac{p}{q}(\cos. \phi - \sqrt{-1} \sin. \phi)$ . Cette double substitution donnera donc deux équations, au moyen desquelles on pourra déterminer, & la fraction  $\frac{p}{q}$  & l'arc  $\phi$ .

147. Mais, quoique ces substitutions, qu'on doit faire à la place de  $z$  paroissent difficiles de prime-abord, cependant à l'aide des principes établis dans le Chapitre précédent, on

pourra les effectuer assez promptement; car ayant fait voir que  $(\text{cof. } \varphi \pm \sqrt{-1} \sin. \varphi)^n = \text{cof. } n \varphi \pm \sqrt{-1} \sin. n \varphi$ , il n'y aura plus qu'à écrire les formules suivantes au lieu des différentes puissances de  $z$ .

Pour le premier Facteur	Pour le second Facteur
$z = \frac{p}{q} (\text{cof. } \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi)$	$z = \frac{p}{q} (\text{cof. } \varphi - \sqrt{-1} \sin. \varphi)$
$z^2 = \frac{p^2}{q^2} (\text{cof. } 2 \varphi + \sqrt{-1} \sin. 2 \varphi)$	$z^2 = \frac{p^2}{q^2} (\text{cof. } 2 \varphi - \sqrt{-1} \sin. 2 \varphi)$
$z^3 = \frac{p^3}{q^3} (\text{cof. } 3 \varphi + \sqrt{-1} \sin. 3 \varphi)$	$z^3 = \frac{p^3}{q^3} (\text{cof. } 3 \varphi - \sqrt{-1} \sin. 3 \varphi)$
$z^4 = \frac{p^4}{q^4} (\text{cof. } 4 \varphi + \sqrt{-1} \sin. 4 \varphi)$	$z^4 = \frac{p^4}{q^4} (\text{cof. } 4 \varphi - \sqrt{-1} \sin. 4 \varphi)$
&c.	&c.

Faisons, pour abrégér,  $\frac{p}{q} = r$ , nous aurons, après la substitution faite, les deux équations suivantes.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} a + \epsilon r \text{cof. } \varphi + \gamma r^2 \text{cof. } 2 \varphi + \delta r^3 \text{cof. } 3 \varphi + \&c. \\ + \epsilon r \sqrt{-1} \sin. \varphi + \gamma r^2 \sqrt{-1} \sin. 2 \varphi + \delta r^3 \sqrt{-1} \sin. 3 \varphi + \&c. \end{array} \right\}$$

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} a + \epsilon r \text{cof. } \varphi + \gamma r^2 \text{cof. } 2 \varphi + \delta r^3 \text{cof. } 3 \varphi + \&c. \\ - \epsilon r \sqrt{-1} \sin. \varphi - \gamma r^2 \sqrt{-1} \sin. 2 \varphi - \delta r^3 \sqrt{-1} \sin. 3 \varphi - \&c. \end{array} \right\}$$

148. Si on ajoute ces deux équations, ou si on les retranche l'une de l'autre, & que dans le dernier cas on divise par  $2\sqrt{-1}$ , on obtiendra ces deux équations réelles :

$$0 = a + \epsilon r \text{cof. } \varphi + \gamma r^2 \text{cof. } 2 \varphi + \delta r^3 \text{cof. } 3 \varphi + \&c.$$

$$0 = \epsilon \sqrt{-1} \sin. \varphi + \gamma r^2 \sqrt{-1} \sin. 2 \varphi + \delta r^3 \sqrt{-1} \sin. 3 \varphi + \&c.$$

lesquelles peuvent se déduire immédiatement de la fonction proposée  $a + \epsilon z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \&c$ , en faisant d'abord pour chaque puissance de  $z$ ,  $z^n = r^n \text{cof. } n \varphi$ , & ensuite  $z^n = r^n \sin. n \varphi$ ; car, de cette manière, à cause de  $\sin. 0 \varphi = 0$ ,

& de  $\cos. 0 \varphi = 1$ , on écrit 1 dans le terme constant au lieu de  $\chi$  ou 1 pour le premier cas, & pour le second on écrit 0. Si donc on tire de ces deux équations les valeurs des inconnues  $r$  &  $\varphi$ , à cause de  $r = \frac{p}{q}$ , on aura le facteur trinome  $pp - 2pq\chi \cos. \varphi + qq\chi\chi$ , qui renferme deux facteurs imaginaires simples.

149. Si l'on multiplie la première équation par  $\sin. m \varphi$ , & la seconde par  $\cos. m \varphi$ , qu'on ajoute ou qu'on retranche les produits, on aura les équations :

$$0 = a \sin. m \varphi + \delta r \sin. (m+1) \varphi + \gamma r^2 \sin. (m+2) \varphi + \delta r^3 \sin. (m+3) \varphi + \&c.$$

$$0 = a \sin. m \varphi + \delta r \sin. (m-1) \varphi + \gamma r^2 \sin. (m-2) \varphi - \delta r^3 \sin. (m-3) \varphi + \&c.$$

Mais si l'on multiplie la première par  $\cos. m \varphi$  & la dernière par  $\sin. m \varphi$ , on trouvera par l'addition & par la soustraction ces deux autres :

$$0 = a \cos. m \varphi + \delta r \cos. (m-1) \varphi + \gamma r^2 \cos. (m-2) \varphi + \delta r^3 \cos. (m-3) \varphi + \&c.$$

$$0 = a \cos. m \varphi + \delta r \cos. (m+1) \varphi + \gamma r^2 \cos. (m+2) \varphi + \delta r^3 \cos. (m+3) \varphi + \&c.$$

Ainsi deux des équations précédentes combinées entr'elles détermineront les inconnues  $r$  &  $\varphi$ , & comme cela peut se faire le plus souvent de plusieurs manières, on obtiendra à la fois plusieurs facteurs trinomes, & par conséquent tous ceux que la fonction proposée renferme.

150. Pour faire mieux sentir l'usage de ces règles, nous allons chercher ici les facteurs trinomes de quelques fonctions qui se rencontrent plus fréquemment, afin de les avoir sur le champ, toutes les fois que l'occasion l'exigera. Soit donc proposée la fonction  $a^n + \chi^n$  dont on cherche les facteurs trinomes de la forme  $pp - 2pq\chi \cos. \varphi + qq\chi\chi$ ; en faisant  $r = \frac{p}{q}$ , on aura les deux équations  $0 = a^n + r^n \cos. n \varphi$

&  $0 = r^n \sin. n \varphi$ , dont la dernière donne  $\sin. n \varphi = 0$ . Donc l'arc  $n \varphi$  aura la forme  $(2k-1)\pi$ , ou  $2k\pi$ ,  $k$  désignant un nombre entier. Je distingue ces deux cas, parce que les

cosinus y sont différents. En effet, dans le premier cas,  $\text{cosf. } (2k+1)\pi = -1$ , & dans le second  $\text{cosf. } 2k\pi = +1$ . Or il est clair qu'on doit prendre la première forme  $n\varphi = (2k+1)\pi$ , parce qu'elle donne  $\text{cosf. } n\varphi = -1$ , d'où résulte  $a^n - r^n = 0$ , & par conséquent  $r = a = \frac{p}{q}$ .

Donc  $p = a$ ,  $q = 1$ , &  $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$ . Donc la fonction  $a^n + \zeta^n$

aura pour facteur le trinome  $aa - 2a\zeta \text{cosf. } \left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi + \zeta\zeta$ ,

& comme on peut mettre pour  $k$  un nombre entier quelconque, on obtiendra de cette manière plusieurs facteurs, dont le nombre cependant sera limité, puisqu'en supposant  $2k+1$  plus grand que  $n$ , les premiers facteurs reviennent; c'est ce que les exemples rendront plus sensible, en observant que  $\text{cosf. } (2\pi \pm \varphi) = \text{cosf. } \varphi$ . De plus, si  $n$  est un nombre impair, en faisant  $2k+1 = n$ , il en résulte le facteur carré  $(a + \zeta)^2$ ; cependant on auroit tort d'en conclure que le carré  $(a + \zeta)^2$  soit un facteur de la fonction  $a^n + \zeta^n$ , parce que (dans l'art. 148) on a pour résultat une équation unique, qui apprend seulement que  $a + \zeta$  est un diviseur

(2) de la formule  $a^n + \zeta^n$ ; cette règle devra toujours être observée, toutes les fois que  $\text{cosf. } \varphi$  devient ou  $+1$  ou  $-1$ .

#### EXEMPLE.

Développons quelques cas particuliers, pour mettre sous les yeux ces différents facteurs; & distinguons-les en deux classes, selon que le nombre  $n$  sera ou pair ou impair.

Si  $n = 1$

la formule

$$a + \zeta$$

a pour facteur

$$a + \zeta$$

Si  $n = 2$

la formule

$$a^2 + \zeta^2$$

a pour facteur

$$a^2 + \zeta^2$$

Si $n = 3$ la formule $a^3 + \zeta^3$ a pour facteurs $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{1}{3}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $a + \zeta$	Si $n = 4$ la formule $a^4 + \zeta^4$ a pour facteurs $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{1}{4}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{3}{4}\pi + \zeta\bar{\zeta}$
Si $n = 5$ la formule $a^5 + \zeta^5$ a pour facteurs $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{1}{5}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{2}{5}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{3}{5}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{4}{5}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $a + \zeta$	Si $n = 6$ la formule $a^6 + \zeta^6$ a pour facteurs $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{1}{6}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{2}{6}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{3}{6}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{4}{6}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{5}{6}\pi + \zeta\bar{\zeta}$

On voit par ces exemples, qu'on trouve tous les facteurs en mettant à la place de  $2k + 1$  tous les nombres impairs, qui ne sont pas plus grands que  $n$ , mais que dans le cas où il se trouve un facteur carré, on ne doit tenir compte que de sa racine.

151. Soit proposée la fonction  $a^n - \zeta^n$ ; on aura pour déterminer le facteur trinome  $pp - 2pq\zeta \operatorname{cof}.\varphi + qq\zeta\bar{\zeta}$ , à cause de  $r = \frac{p}{q}$ ,  $0 = a^n - r^n \operatorname{cof}.n\varphi$ , &  $0 = r^n \operatorname{fin}.n\varphi$ ; on aura donc encore  $\operatorname{fin}.n\varphi = 0$ , & par conséquent  $n\varphi = (2k + 1)\pi$ , ou,  $n\varphi = 2k\pi$ . Dans ce cas on doit prendre la seconde valeur, afin d'avoir  $\operatorname{cof}.n\varphi = +1$ ; ce qui donne  $0 = a^n - r^n$  &  $r = \frac{p}{q} = a$ . Donc  $p = a$ ,  $q = 1$ , &  $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ . Ainsi le facteur trinome de la formule proposée fera  $aa - 2a\zeta \operatorname{cof}.\frac{2k}{n}\pi + \zeta\bar{\zeta}$ , expression qui, en supposant qu'on mette, au lieu de  $2k$  tous les nombres pairs, qui ne sont pas plus grands que  $n$ , donnera

tous les facteurs à la fois ; mais il faudra faire ici à l'occasion des facteurs quarrés la même remarque que nous avons déjà faite pour le cas précédent. D'abord la supposition de  $k = 0$  donne le facteur  $aa - 2a\zeta + \zeta\zeta$ , pour lequel on doit prendre seulement la racine  $a - \zeta$ . Semblablement,  $n$  étant un nombre pair, la supposition de  $2k = n$  donne le facteur  $aa + 2a\zeta + \zeta\zeta$ , qui nous apprend que  $a + \zeta$  est un diviseur de la formule  $a^n - \zeta^n$ .

## E X E M P L E.

En suivant le même procédé qu'au paravant, on obtiendra les résultats suivants, selon que l'exposant  $n$  fera un nombre ou impair ou pair.

Si $n = 1$ la formule $a - \zeta$ a pour facteurs $a - \zeta$	Si $n = 2$ la formule $a^2 - \zeta^2$ a pour facteurs $a - \zeta$ $a + \zeta$
Si $n = 3$ la formule $a^3 - \zeta^3$ a pour facteurs $a - \zeta$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof} \cdot \frac{2}{3}\pi + \zeta\zeta$	Si $n = 4$ la formule $a^4 - \zeta^4$ a pour facteurs $a - \zeta$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof} \cdot \frac{1}{4}\pi + \zeta\zeta$ $a + \zeta$
Si $n = 5$ la formule $a^5 - \zeta^5$ a pour facteurs $a - \zeta$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof} \cdot \frac{2}{5}\pi + \zeta\zeta$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof} \cdot \frac{4}{5}\pi + \zeta\zeta$	Si $n = 6$ la formule $a^6 - \zeta^6$ a pour facteurs $a - \zeta$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof} \cdot \frac{1}{6}\pi + \zeta\zeta$ $aa - 2a\zeta \operatorname{cof} \cdot \frac{5}{6}\pi + \zeta\zeta$ $a + \zeta$



152. On voit donc par-là se confirmer ce que nous avons avancé; favoir, que toute fonction entiere est décomposable, sinon en facteurs simples réels, au moins en facteurs doubles réels. Car nous venons de voir que cette fonction de dimension indéfinie  $a^n \pm \zeta^n$  peut toujours se résoudre en facteurs doubles réels, sans compter les facteurs simples réels. Passons donc à des fonctions plus composées, telles que  $a + \epsilon \zeta^n + \gamma \zeta^{2n}$ . Si cette fonction a deux facteurs de la forme  $u + \theta \zeta^n$ , la décomposition, d'après ce qui précède, ne souffrira point de difficulté. Reste donc à enseigner la maniere de décomposer en facteurs réels, soit simples, soit doubles, la formule  $a + \epsilon \zeta^n + \gamma \zeta^{2n}$  dans le cas où elle n'a pas deux facteurs réels de la forme  $u + \theta \zeta^n$ .

153. Examinons donc cette fonction:  $a^{2n} - 2 a^n \zeta^n \cos. g + \zeta^{2n}$ , laquelle ne peut se décomposer en deux facteurs réels de la forme  $u + \theta n$ . Si nous supposons le facteur double réel de cette fonction représenté par  $pp - 2pq \cos. \phi + qq \zeta \zeta$ ; en faisant  $r = \frac{p}{q}$ , nous aurons à résoudre les deux équations suivantes  $0 = a^{2n} - 2 a^n r^n \cos. g \cos. n\phi + r^{2n} \cos. 2n\phi$  &  $0 = -2 a^n r^n \cos. g \sin. n\phi + r^{2n} \sin. 2n\phi$ ; ou bien au lieu de la premiere équation, prenons, d'après l'art. 149, (en supposant  $m = 2n$ ) celle-ci:  $0 = a^{2n} \sin. 2n\phi - 2 a^n r^n \cos. g \sin. n\phi$ . Comparée avec la seconde, elle donnera  $r = a$ ; alors nous aurons  $\sin. 2n\phi = 2 \cos. g \sin. n\phi$ ; mais  $\sin. 2n\phi = 2 \sin. n\phi \cos. n\phi$ , donc  $\cos. n\phi = \cos. g$ . Or on a toujours  $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$ ; donc  $n\phi = 2k\pi \pm g$ , &  $\phi = \frac{2k\pi \pm g}{n}$ . Le facteur général double de la formule proposée sera donc  $= a a - 2 a \zeta \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + \zeta \zeta$ ; & nous obtiendrons tous les facteurs en mettant successivement pour  $2k$  tous les nombres pairs, qui ne sont

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. P

pas plus grands que  $n$ ; ce qui deviendra facile par l'application que nous allons en faire à différents cas.

## E X E M P L E.

Considérons donc les cas où  $n$  est 1, 2, 3, 4 &c. & voyons quelle sera la formation des facteurs.

La formule

$$aa - 2a\zeta \cos. g + \zeta\zeta$$

a pour facteur unique

$$aa - 2a\zeta \cos. g + \zeta\zeta$$

La formule

$$a^4 - 2a^2\zeta^2 \cos. g + \zeta^4$$

a pour les deux facteurs

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{g}{2} + \zeta\zeta$$

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{2\pi \pm g}{2} + \zeta\zeta \text{ ou } aa + 2a\zeta \cos. \frac{g}{2} + \zeta\zeta.$$

La formule

$$a^6 - 2a^3\zeta^3 \cos. g + \zeta^6$$

a pour les trois facteurs

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{g}{3} + \zeta\zeta$$

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{2\pi - g}{3} + \zeta\zeta$$

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{2\pi + g}{3} + \zeta\zeta$$

La formule

$$a^8 - 2a^4\zeta^4 \cos. g + \zeta^8$$

a pour les quatre facteurs

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{g}{4} + \zeta\zeta$$

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{2\pi - g}{4} + \zeta\zeta$$

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{2\pi + g}{4} + \zeta\zeta$$

$$aa - 2a\zeta \cos. \frac{4\pi \pm g}{4} + \zeta\zeta \text{ ou } aa + 2a\zeta \cos. \frac{g}{4} + \zeta\zeta$$

La formule

$$a^{10} - 2 a^5 z^5 \cos. g + z^{10}$$

a pour ses cinq facteurs

$$aa - 2 a z \cos. \frac{g}{5} + z z$$

$$aa - 2 a z \cos. \frac{2\pi - g}{5} + z z$$

$$aa - 2 a z \cos. \frac{2\pi + g}{5} + z z$$

$$aa - 2 a z \cos. \frac{4\pi - g}{5} + z z$$

$$aa - 2 a z \cos. \frac{4\pi + g}{5} + z z$$

Ces exemples sont propres à confirmer que toute fonction entière peut être résolue en facteurs réels, soit simples, soit doubles.

154. Si l'on veut aller plus loin, la même décomposition aura lieu pour cette fonction  $a + \epsilon z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$ . Elle aura au moins un facteur réel de la forme  $u + \theta z^n$  dont on pourra par conséquent trouver les facteurs réels, ou simples ou doubles: quant à l'autre multiplicateur de la forme  $v + \alpha z^n + \lambda z^{2n}$ , il sera facile, de quelque manière qu'il soit composé, de le décomposer pareillement en facteurs d'après l'art. précédent. Ensuite la fonction  $a + \epsilon z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \epsilon z^{4n}$  ayant toujours deux facteurs réels de la forme  $u + \theta z^n + v z^{2n}$  se résout de même en facteurs réels, ou simples ou doubles. On peut encore aller plus loin, & considérer la formule  $a + \epsilon z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \epsilon z^{4n} + \xi z^{5n}$ . Elle aura au moins un facteur de la forme  $u + \theta z^n$  & l'autre sera de la forme précédente. Cette fonction sera donc aussi susceptible d'une décomposition en facteurs réels, soit simples, soit doubles. Ainsi, s'il restoit quelque doute sur la décomposition de

toutes les fonctions entières, il sera maintenant presque  
(u) entierement levé.

155. Au reste cette résolution en facteurs peut encore s'appliquer aux séries infinies. En effet nous avons vu auparavant que la série  $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$

$= e^x$ , & que  $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$ ,  $i$  désignant un nombre infini; il est donc clair que la série  $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$  a une infinité de facteurs simples  $1 + \frac{x}{i}$  égaux entr'eux. Mais si l'on ôte le premier

terme de cette même série, le reste  $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c. = e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1$ . Comparons cette

formule avec celle de l'art. 151, nous aurons  $a = 1 + \frac{x}{i}$ ,  $n = i$ , &  $\zeta = 1$ , & le facteur général devient  $= \left(1 + \frac{x}{i}\right)^2$

$- 2 \left(1 + \frac{x}{i}\right) \cos. \frac{2k}{i} \pi + 1$ , formule qui donnera tous les facteurs à la fois, en substituant à  $2k$  tous les nombres pairs. La supposition de  $2k = 0$  donnera le facteur quarré  $\frac{x^2}{i^2}$ , au lieu duquel on ne doit prendre pour les raisons rapportées ci-dessus que sa racine  $\frac{x}{i}$ . Donc  $x$  sera

un facteur de l'expression  $e^x - 1$ , ce qui est évident. Pour trouver les autres facteurs, il faut observer qu'à cause de

l'arc  $\frac{2k}{i} \pi$  infiniment petit, on a  $\cos. \frac{2k\pi}{i} = 1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ ,

(art. 134), les termes qui suivent, disparaissant à cause du nombre  $i$  infiniment grand. Donc le facteur général  $=$

$\frac{x^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2}{i^2} + \frac{4k^4\pi^4}{i^4} x$ , & conséquemment la formule

$e^x - 1$  sera divisible par  $1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}$ . Ainsi l'ex-

pression  $e^x - 1 = x \left( 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \&c. \right)$ ,  
 outre le facteur  $x$ , aura cette suite infinie de facteurs  
 $\left( 1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4\pi\pi} \right) \left( 1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{16\pi\pi} \right) \left( 1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{36\pi\pi} \right)$   
 $\left( 1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{64\pi\pi} \right) \&c.$

156. Mais comme chacun de ces facteurs renferme la partie  
 infiniment petite  $\frac{x}{i}$ , qui par la multiplication de tous les  
 facteurs dont le nombre est  $\frac{1}{2}i$ , produit le terme  $\frac{x}{2}$ , cette  
 partie ne peut être négligée. Ainsi pour obvier à cet incon-  
 vénient, considérons cette expression  $e^x - e^{-x} =$   
 $\left( 1 + \frac{x}{i} \right)^i - \left( 1 - \frac{x}{i} \right)^i = 2 \left( \frac{x}{i} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \right.$   
 $\left. + \&c. \right)$ , car  $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \&c.$  La  
 comparaison de cette formule, avec celle de l'art. 151,  
 donne  $n = i$ ,  $a = 1 + \frac{x}{i}$  &  $\zeta = 1 - \frac{x}{i}$ ; le facteur  
 de cette expression sera donc  $= a a - 2 a \zeta \cos. \frac{2k}{n} \pi +$   
 $\zeta \zeta = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2 \left( 1 - \frac{xx}{ii} \right) \cos. \frac{2k}{i} \pi = \frac{4xx}{ii} +$   
 $\frac{4kk\pi\pi}{ii} - \frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$ , à cause de  $\cos. \frac{2k}{i} \pi = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{ii}$ .  
 La fonction  $e^x - e^{-x}$  sera donc divisible par  $1 + \frac{xx}{kk\pi\pi}$   
 $= \frac{xx}{ii}$ . On pourra à présent négliger en toute sûreté le

terme  $\frac{xx}{ii}$ , car quoique multiplié par  $i$ , il resteroit encore  
 infiniment petit. Mais si comme auparavant on fait  $k = 0$ , on  
 trouvera le premier facteur  $= x$ . Ainsi en rangeant par  
 ordre tous ces facteurs, on aura  $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left( 1 + \frac{xx}{\pi\pi} \right)$   
 $\left( 1 + \frac{xx}{4\pi\pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{9\pi\pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{16\pi\pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{25\pi\pi} \right) \&c.$   
 $= x \left( 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c. \right)$  J'ai

donné à chaque facteur une forme convenable, pour qu'en faisant actuellement la multiplication, on ait  $x$  pour le premier terme.

157. De même, puisque  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = \frac{\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i}{2}$ , la comparaison de cette expression avec la précédente  $a^n + z^n$  donnera  $a = 1 + \frac{x}{i}$ ;  $z = 1 - \frac{x}{i}$ , &  $n = i$ ; le facteur général sera donc  $= a a - 2 a z \operatorname{cof.} \frac{2k+1}{n} \pi + z z = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2 \left(1 - \frac{xx}{ii}\right) \operatorname{cof.} \frac{2k+1}{i} \pi$ . Or  $\operatorname{cof.} \frac{2k+1}{i} \pi = 1 - \frac{(2k+1)^2 \pi \pi}{2 ii}$ ; donc la forme du facteur sera  $= \frac{4xx}{ii} + \frac{(2k+1)^2 \pi \pi}{ii}$ , le terme dont le dénominateur est  $i^2$  s'évanouissant. Mais comme tout facteur de l'expression  $1 + \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$  doit être de la forme  $1 + axx$ , pour ramener le facteur trouvé à cette forme, il faudra le diviser par  $\frac{(2k+1)^2 \pi \pi}{ii}$ . Donc le facteur de la formule proposée sera  $1 + \frac{4xx}{(2k+1)^2 \pi \pi}$ ; d'où l'on déduira tous les facteurs particuliers en écrivant successivement & à l'infini tous les nombres impairs à la place de  $2k+1$ . On aura par cette raison

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = \left(1 + \frac{4xx}{\pi \pi}\right) \left(1 + \frac{4xx}{9 \pi \pi}\right) \left(1 + \frac{4xx}{25 \pi \pi}\right) \left(1 + \frac{4xx}{49 \pi \pi}\right) \dots$$

158. Si  $x$  devient une quantité imaginaire, ces formules exponentielles se changent en sinus ou en cosinus d'un arc quelconque réel. Car soit  $x = z\sqrt{-1}$ , on aura

$$\frac{e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin. \zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{1.2.3} + \frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\zeta^7}{1.2.3 \dots 7} + \&c. \text{ Cette expression a donc ce nombre infini}$$

$$\text{de facteurs } \zeta \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{\pi \pi}\right) \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{4 \pi \pi}\right) \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{9 \pi \pi}\right) \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{16 \pi \pi}\right) \\ \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{25 \pi \pi}\right) \&c; \text{ ou bien } \sin. \zeta = \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{\pi}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{\pi}\right) \\ \left(1 - \frac{\zeta}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{3\pi}\right) \&c. \text{ Ainsi}$$

toutes les fois qu'un arc  $\zeta$  est tel qu'un des facteurs s'évanouisse; ce qui arrive, lorsque  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \pm \pi$ ,  $\zeta = \pm 2\pi$ ; & en général lorsque  $\zeta = \pm k\pi$ ,  $k$  désignant un nombre entier quelconque, le sinus de ce même arc doit être en même temps  $= 0$ ; ce qui est si évident qu'on auroit pu déduire indirectement ces facteurs de cette simple considération.

$$\text{Semblablement comme } \frac{e^{\sqrt{-1}} - 1 + e^{-\sqrt{-1}} - 1}{2} = \cos. \zeta;$$

$$\text{on aura aussi } \cos. \zeta = \left(1 - \frac{4\zeta\zeta}{\pi\pi}\right) \left(1 - \frac{4\zeta\zeta}{9\pi\pi}\right) \left(1 - \frac{4\zeta\zeta}{25\pi\pi}\right)$$

$$\left(1 - \frac{4\zeta\zeta}{36\pi\pi}\right) \&c, \text{ ou en décomposant ces facteurs en deux,}$$

$$\cos. \zeta = \left(1 - \frac{2\zeta}{\pi}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{\pi}\right) \left(1 - \frac{2\zeta}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{3\pi}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2\zeta}{5\pi}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{5\pi}\right) \&c. \text{ On voit aussi par-là que si } \zeta =$$

$$\pm \frac{(2k+1)}{2}\pi, \text{ on aura alors } \cos. \zeta = 0; \text{ ce qu'il étoit encore}$$

facile de conclure de la nature même du cercle.

159. D'après l'art. 153, on peut trouver en outre les

facteurs de cette expression  $e^x - 2 \cos. g + e^{-x} =$

$$2 \left(1 - \cos. g + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c. \right) \text{ En effet,}$$

cette expression se change en celle-ci :  $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 2 \cos. g$

$+ \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i$ , laquelle étant comparée avec la formule

citée donne  $2n = i$ ,  $a = 1 + \frac{x}{i}$ , &c  $\zeta = 1 - \frac{x}{i}$ . Le facteur général de cette formule sera donc  $aa - 2a\zeta \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + \zeta\zeta = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right) \cos. \frac{2k\pi \pm g}{i}$ . Or  $\cos. \frac{2k\pi \pm g}{i} = 1 - 2 \frac{(2k\pi \pm g)^2}{ii}$ , donc le facteur en question sera  $= \frac{4xx}{ii} + 4 \frac{(2k\pi \pm g)^2}{ii}$  ou de cette forme  $1 + \frac{xx}{(2k\pi \pm g)^2}$ . Si donc on divise l'expression proposée par  $2(1 - \cos. g)$ , afin que dans la série infinie le terme constant  $= 1$ , on trouvera, en rassemblant tous les facteurs,  $\frac{e^x - 2 \cos. g + e^{-x}}{2(1 - \cos. g)} = \left(1 + \frac{xx}{gg}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi - g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi + g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(4\pi - g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(4\pi + g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(6\pi - g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(6\pi + g)^2}\right) \&c.$  Et si au lieu de  $x$  on met  $\zeta \sqrt{-1}$ , on aura  $\frac{\cos. \zeta - \cos. g}{1 - \cos. g} = \left(1 - \frac{\zeta}{g}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{g}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{2\pi - g}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{2\pi - g}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{2\pi + g}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{2\pi + g}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{4\pi - g}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{4\pi - g}\right) \&c. = 1 - \frac{\zeta\zeta}{1.2(1 - \cos. g)} + \frac{\zeta^4}{1.2.3.4(1 - \cos. g)} - \frac{\zeta^6}{1.2. \dots .6(1 - \cos. g)} + \&c.$  On connoît donc tous les facteurs de cette série continuée à l'infini.

160. Il ne sera pas plus difficile de trouver & d'assigner tous les facteurs de cette fonction  $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ . En effet elle prend la forme  $\left(1 + \frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1 + \frac{c-x}{i}\right)^i$ . En la comparant avec celle-ci :  $a^i \pm \zeta^i$ , on obtiendra le facteur  $aa - 2a\zeta \cos. \frac{m\pi}{i} + \zeta\zeta$ ,  $m$  désignant un nombre impair, si le signe supérieur a lieu, & un nombre pair, dans



dans le cas contraire. Mais comme à cause du nombre  $i$  infiniment grand, *cesf.*  $\frac{m\pi}{i} = 1 - \frac{m\pi\pi}{2ii}$ , le facteur général  $= (a - \zeta)^2 + \frac{m\pi\pi}{ii} a\zeta$ . Or dans ce cas  $a = 1 + \frac{b+x}{i}$  &  $\zeta = 1 + \frac{c-x}{i}$ , d'où  $(a - \zeta)^2 = \frac{(b-c+2x)^2}{ii}$ , &  $a\zeta = 1 + \frac{b+c}{i} + \frac{bc + (c-b)x - xx}{ii}$ ; par conséquent en multipliant le facteur par  $ii$ , il deviendra  $= (b-c)^2 + 4(b-c)x + 4xx + m^2\pi^2$ , négligeant les termes divisés par  $i$ , ou par  $ii$ , par la raison qu'il y a déjà des termes de toute espèce, auprès desquels ceux ci doivent disparoître; & après avoir ramené les termes constants à l'unité au moyen de la division, on aura le facteur  $= 1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{mm\pi\pi + (b-c)^2}$ .

161. À présent le terme constant  $= 1$  se trouvant dans chacun des facteurs, la fonction  $e^{b+x} \pm e^{c-x}$  doit être divisée par une constante telle que le terme constant devienne  $= 1$ , ou que sa valeur devienne  $= 1$ , en supposant  $x = 0$ . Un tel diviseur ne peut être que  $e^b \pm e^c$ ; & par conséquent cette expression  $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$  pourra être représentée par un nombre infini de facteurs; on aura donc, si c'est le signe supérieur qui ait lieu,  $m$  désignant alors un nombre impair,  $\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c} = \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{\pi\pi + (b-c)^2}\right)$

$\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{9\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{25\pi\pi + (b-c)^2}\right)$  &c ;

mais si c'est le signe inférieur qui ait lieu, qu'en conséquence  $m$  désigne un nombre pair, & que dans le cas ou  $m = 0$ , on prenne la racine du facteur carré, on aura  $\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c} = \left(1 + \frac{2x}{b-c}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{4\pi\pi + (b-c)^2}\right)$

$$\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{10\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{36\pi\pi + (b-c)^2}\right) \&c.$$

162. Soit supposé  $b = 0$ , hypothèse qui peut se faire sans détruire la généralité, & on aura  $\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1 + e^c} =$

$$\left(1 - \frac{4cx + 4xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx + 4xx}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx + 4xx}{25\pi\pi + cc}\right) \&c.$$

$$\frac{e^x - e^c e^{-x}}{1 - e^c} = \left(1 - \frac{2x}{c}\right) \left(1 - \frac{4cx + 4xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx + 4xx}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx + 4xx}{36\pi\pi + cc}\right) \&c. \text{ Soit à présent}$$

$c$  une quantité négative, & nous aurons ces deux équations :  $\frac{e^x + e^{-c} e^{-x}}{1 + e^{-c}} = \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{9\pi\pi + cc}\right)$

$$\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{25\pi\pi + cc}\right) \&c ; \quad \frac{e^x - e^{-c} e^{-x}}{1 - e^{-c}} = \left(1 + \frac{2x}{c}\right)$$

$$\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{36\pi\pi + cc}\right) \&c.$$

Multiplions la première formule par la troisième, nous aurons

pour produit  $\frac{e^{2x} + e^{-2x} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}}$  ; mettons  $y$  pour  $2x$ ,

nous obtiendrons alors  $\frac{e^y + e^{-y} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}} = \dots$

$$\left(1 - \frac{2cy + yy}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{9\pi\pi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2cy + yy}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{25\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{25\pi\pi + cc}\right) \&c.$$

Si nous multiplions la première par la quatrième, le produit

fera  $\frac{e^{2x} - e^{-2x} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}}$  ; mettons  $y$  au lieu de  $2x$ ,

$$\& \text{ nous aurons } \frac{e^y - e^{-y} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}} = \left(1 + \frac{y}{c}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2cy + yy}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{9\pi\pi + cc}\right) \\ \left(1 + \frac{2cy + yy}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{25\pi\pi + cc}\right) \&c.$$

Multiplions la seconde par la troisieme, il en resultera la même equation à la différence près que  $c$  devra être pris négativement; en effet nous aurons  $\frac{e^c - e^{-c} - e^y + e^{-y}}{e^c - e^{-c} - e^{-c}} =$

$$\left(1 - \frac{y}{c}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{4\pi\pi + cc}\right) \\ \left(1 + \frac{2cy + yy}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{25\pi\pi + cc}\right) \\ \left(1 - \frac{2cy + yy}{36\pi\pi + cc}\right) \&c. \text{ Enfin multiplions la seconde par la} \\ \text{quatrieme, \& nous aurons } \frac{e^y + e^{-y} - e^c - e^{-c}}{2 - e^c - e^{-c}} =$$

$$\left(1 - \frac{yy}{cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{4\pi\pi + cc}\right) \\ \left(1 - \frac{2cy + yy}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cy + yy}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cy + yy}{36\pi\pi + cc}\right) \\ \left(1 + \frac{2cy + yy}{36\pi\pi + cc}\right) \&c.$$

163. Il sera facile à présent d'appliquer au cercle ces quatre combinaisons, en supposant  $c = g\sqrt{-1}$  &  $y = v\sqrt{-1}$ : en effet on aura  $e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} =$

$$2 \text{ cof. } v; e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \text{ sin. } v; \& \\ e^{g\sqrt{-1}} + e^{-g\sqrt{-1}} = 2 \text{ cof. } g; e^{g\sqrt{-1}} - e^{-g\sqrt{-1}} =$$

$2\sqrt{-1} \text{ sin. } g$ . D'après cela, la première combinaison donne  $\frac{\text{cof. } v + \text{cof. } g}{1 + \text{cof. } g} = 1 - \frac{v v}{1.2(1 + \text{cof. } g)} + \frac{v^4}{1.2.3.4(1 + \text{cof. } g)}$

$$- \frac{v^6}{1.2\dots 6(1 + \text{cof. } g)} + \&c. = \left(1 + \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right) \\ \left(1 - \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right) \left(1 + \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - 9g}\right) \left(1 - \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg}\right)$$

Q ij

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg}\right) \left(1 - \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg}\right) \&c. = \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right) \\
& \left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{\pi - g}\right) \left(1 + \frac{v}{\pi + g}\right) \left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right) \\
& \left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{3\pi - g}\right) \left(1 + \frac{v}{3\pi + g}\right) \&c. = \\
& \left(1 - \frac{vv}{(\pi - g)^2}\right) \left(1 - \frac{vv}{(\pi + g)^2}\right) \left(1 - \frac{vv}{(3\pi - g)^2}\right) \\
& \left(1 - \frac{vv}{(3\pi + g)^2}\right) \left(1 - \frac{vv}{(5\pi - g)^2}\right) \&c. \text{ La quatrieme} \\
& \text{combinaison donne } \frac{\text{cof. } v - \text{cof. } g}{1 - \text{cof. } g} = 1 - \frac{vv}{1.2(1 - \text{cof. } g)} \\
& + \frac{v^4}{1.2.3.4(1 - \text{cof. } g)} - \frac{v^6}{1.2\dots6(1 - \text{cof. } g)} + \&c. = \\
& \left(1 - \frac{vv}{gg}\right) \left(1 + \frac{2gv - vv}{4\pi\pi - gg}\right) \left(1 - \frac{2gv - vv}{4\pi\pi - gg}\right) \\
& \left(1 + \frac{2gv - vv}{16\pi\pi - gg}\right) \left(1 - \frac{2gv - vv}{16\pi\pi - gg}\right) \&c. = \left(1 - \frac{v}{g}\right) \\
& \left(1 + \frac{v}{g}\right) \left(1 + \frac{v}{2\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{2\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right) \\
& \left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right) \left(1 + \frac{v}{4\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{4\pi + g}\right) \&c. = \\
& \left(1 - \frac{vv}{gg}\right) \left(1 - \frac{vv}{(2\pi - g)^2}\right) \left(1 - \frac{vv}{(2\pi + g)^2}\right) \left(1 - \frac{vv}{(4\pi - g)^2}\right) \\
& \left(1 - \frac{vv}{(4\pi + g)^2}\right) \&c. \text{ La seconde combinaison donne} \\
& \frac{\text{fin. } g + \text{fin. } v}{\text{fin. } g} = 1 + \frac{v}{\text{fin. } g} - \frac{v^3}{1.2.3 \text{ fin. } g} + \frac{v^5}{1.2\dots5 \text{ fin. } g} - \&c. \\
& = \left(1 + \frac{v}{g}\right) \left(1 + \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right) \left(1 - \frac{2gv - vv}{4\pi\pi - gg}\right) \\
& \left(1 + \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg}\right) \left(1 - \frac{2gv - vv}{16\pi\pi - gg}\right) \&c. = \left(1 + \frac{v}{g}\right) \\
& \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right) \left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right) \\
& \left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{4\pi - g}\right) \&c. \text{ Et si on} \\
& \text{prend } v \text{ n\u00e9gativement, on trouvera la troisieme combinaison.}
\end{aligned}$$

164. Les expressions mêmes que nous avons trouvées d'abord (art. 162) peuvent aussi être rapportés aux arcs de cercle de cette manière : puisque

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1 + e^c} = \frac{(1 + e^{-c})(e^x + e^c e^{-x})}{2 + e^c + e^{-c}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^c e^{-x} + e^{-c} e^x}{2 + e^c + e^{-c}};$$

si nous faisons  $c = g\sqrt{-1}$ , &  $x = \zeta\sqrt{-1}$ , cette expression se change en celle-ci :  $\frac{\text{cof. } \zeta + \text{cof. } (g - \zeta)}{1 + \text{cof. } g} =$

$$\text{cof. } \zeta + \frac{\text{fin. } g \cdot \text{fin. } \zeta}{1 + \text{cof. } g}. \text{ Nous aurons donc (à cause de } \frac{\text{fin. } g}{1 + \text{cof. } g} = \text{tang. } \frac{1}{2} g) \text{cof. } \zeta + \text{tang. } \frac{1}{2} g \text{fin. } \zeta = 1 + \frac{\zeta}{1} \text{tang. } \frac{1}{2} g - \frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} - \frac{\zeta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{tang. } \frac{1}{2} g + \frac{\zeta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\zeta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} g - \&c. = \left(1 + \frac{4g\zeta - 4\zeta^2}{\pi\pi - gg}\right) \left(1 + \frac{4g\zeta - 4\zeta^2}{9\pi\pi - gg}\right) \left(1 + \frac{4g\zeta - 4\zeta^2}{25\pi\pi - gg}\right) \&c. = \left(1 + \frac{2\zeta}{\pi - g}\right) \left(1 - \frac{2\zeta}{\pi + g}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{3\pi - g}\right) \left(1 - \frac{2\zeta}{3\pi + g}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{5\pi - g}\right) \left(1 - \frac{2\zeta}{5\pi + g}\right) \&c.$$

Pareillement, l'autre expression, si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur par  $1 - e^{-c}$ , se change en celle-ci :

$$\frac{e^x + e^{-x} - e^c e^{-x} - e^{-c} e^x}{2 - e^c - e^{-c}}. \text{ Cette dernière, en faisant}$$

$$c = g\sqrt{-1} \text{ \& } x = \zeta\sqrt{-1} \text{ donne } \frac{\text{cof. } \zeta - \text{cof. } (g - \zeta)}{1 - \text{cof. } g} =$$

$$\text{cof. } \zeta - \frac{\text{fin. } g \cdot \text{fin. } \zeta}{1 - \text{cof. } g} = \text{cof. } \zeta - \frac{\text{fin. } \zeta}{\text{tang. } \frac{1}{2} g}. \text{ On aura donc}$$

$$\text{cof. } \zeta - \text{cot. } \frac{1}{2} g \cdot \text{fin. } \zeta = 1 - \frac{\zeta}{1} \text{cot. } \frac{1}{2} g - \frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} + \frac{\zeta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\text{cot. } \frac{1}{2} g + \frac{\zeta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\zeta^5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} \text{cot. } \frac{1}{2} g + \&c. = \left(1 - \frac{2\zeta}{g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{4g\zeta - 4\zeta^2}{4\pi\pi - gg}\right) \left(1 + \frac{4\zeta^2 - 4\zeta^2}{16\pi\pi - gg}\right) \left(1 + \frac{4g\zeta - 4\zeta^2}{36\pi\pi - gg}\right) \&c.$$

$$= \left(1 - \frac{2\zeta}{g}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{2\pi - g}\right) \left(1 - \frac{2\zeta}{2\pi + g}\right) \left(1 + \frac{2\zeta}{4\pi - g}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \left( 1 - \frac{2\zeta}{4\pi + g} \right) \&c. \text{ Donc si on fait } \nu = 2\zeta, \text{ ou } \zeta = \frac{1}{2}\nu; \\
& \text{on aura } -\frac{\text{cf.} \frac{1}{2}(g-\nu)}{\text{cf.} \frac{1}{2}g} = \text{cf.} \frac{1}{2}\nu + \text{tang.} \frac{1}{2}g \text{ sin.} \frac{1}{2}\nu = \\
& \left( 1 + \frac{\nu}{\pi - g} \right) \left( 1 - \frac{\nu}{\pi + g} \right) \left( 1 + \frac{\nu}{3\pi - g} \right) \left( 1 - \frac{\nu}{3\pi + g} \right) \&c. \\
& \frac{\text{cf.} \frac{1}{2}(g+\nu)}{\text{cf.} \frac{1}{2}g} = \text{cf.} \frac{1}{2}\nu - \text{tang.} \frac{1}{2}g \text{ sin.} \frac{1}{2}\nu = \left( 1 - \frac{\nu}{\pi - g} \right) \\
& \left( 1 + \frac{\nu}{\pi + g} \right) \left( 1 - \frac{\nu}{3\pi - g} \right) \left( 1 + \frac{\nu}{3\pi + g} \right) \&c. \\
& \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}(g-\nu)}{\text{sin.} \frac{1}{2}g} = \text{cf.} \frac{1}{2}\nu - \text{cot.} \frac{1}{2}g \text{ sin.} \frac{1}{2}\nu = \left( 1 - \frac{\nu}{g} \right) \\
& \left( 1 + \frac{\nu}{2\pi - g} \right) \left( 1 - \frac{\nu}{2\pi + g} \right) \left( 1 + \frac{\nu}{4\pi - g} \right) \&c. \\
& \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}(g+\nu)}{\text{sin.} \frac{1}{2}g} = \text{cf.} \frac{1}{2}\nu + \text{cot.} \frac{1}{2}g \text{ sin.} \frac{1}{2}\nu = \left( 1 + \frac{\nu}{g} \right) \\
& \left( 1 - \frac{\nu}{2\pi - g} \right) \left( 1 + \frac{\nu}{2\pi + g} \right) \left( 1 - \frac{\nu}{4\pi - g} \right) \&c.
\end{aligned}$$

La loi progressive qu'observent ces facteurs est assez simple & uniforme. Et ces dernières expressions redonneront, par le moyen de la multiplication, celles que nous avons trouvées dans l'article précédent.

## C H A P I T R E X.

*De l'usage des Facteurs trouvés ci-dessus, pour la sommation de Séries infinies.*

165. Si  $1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \&c. = (1 + a\zeta)(1 + e\zeta)(1 + r\zeta)(1 + d\zeta) \&c$ ; ces facteurs, quel qu'en soit le nombre fini ou infini, étant multipliés les uns par les autres, doivent redonner la suite  $1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \&c$ . Le coefficient  $A$  fera donc égal à la somme de toutes les quantités  $a + e + r + d + \dots + \&c$ . Pour le coefficient  $B$ , il fera égal à la

somme des produits des mêmes quantités prises deux à deux ; c'est-à-dire, qu'on aura  $B = a\epsilon + a\gamma + a\delta + \epsilon\gamma + \epsilon\delta + \gamma\delta + \&c$ , & en égalant le coefficient  $C$  à la somme des produits de toutes les lettres prises trois à trois, on aura  $C = a\epsilon\gamma + a\epsilon\delta + \epsilon\gamma\delta + a\gamma\delta + \&c$ . On aura de même  $D =$  à la somme des produits des lettres prises quatre à quatre, &  $E =$  à la somme des produits des lettres prises cinq à cinq, &c ; tout cela est connu par l'algèbre ordinaire.

166. Puisque la somme des quantités  $a + \epsilon + \gamma + \delta + \&c$ , & celle de leurs produits deux à deux sont données, on pourra en conclure la somme des carrés  $a^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c$  ; car elle est égale au carré de la somme des quantités simples, moins celle du double de leurs produits, en les prenant deux à deux. On peut déterminer d'une manière semblable la somme des cubes, celle des quatrièmes puissances & des autres puissances plus élevées. En effet supposons

$$P = a + \epsilon + \gamma + \delta + \epsilon + \&c.$$

$$Q = a^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \&c.$$

$$R = a^3 + \epsilon^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \epsilon^3 + \&c.$$

$$S = a^4 + \epsilon^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \epsilon^4 + \&c.$$

$$T = a^5 + \epsilon^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \epsilon^5 + \&c.$$

$$V = a^6 + \epsilon^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \epsilon^6 + \&c.$$

&c.

Les valeurs de  $A, B, C, D$  &c. étant connues, on en déduira de la manière suivante celles de  $P, Q, R, S, T, V$ , &c.

$$P = A$$

$$Q = AP - 2B$$

$$R = AQ - BP + 3C$$

$$S = AR - BQ + CP - 4D$$

$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$

$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$$

&c.

(u) Avec un peu d'attention on appercevra sans peine la vérité de ces formules ; au reste elle fera rigoureusement démontrée dans le calcul différentiel.

167. Ayant trouvé ci-dessus  $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left( 1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4.5} \right. + \frac{x^5}{1.2. \dots 7} + \&c. \left. \right) = x \left( 1 + \frac{xx}{\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{4\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{9\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{16\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{25\pi \pi} \right) \&c.$  ; on aura  $1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4.5} + \frac{x^5}{1.2.3. \dots 7} + \&c. = \left( 1 + \frac{xx}{\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{4\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{9\pi \pi} \right) \left( 1 + \frac{xx}{16\pi \pi} \right) \&c.$  Soit  $xx = \pi \pi \zeta$ , alors  $1 + \frac{\pi \pi}{1.2.3} \zeta + \frac{\pi^3}{1.2.3.4.5} \zeta^2 + \frac{\pi^5}{1.2.3. \dots 7} \zeta^3 + \&c. = \left( 1 + \zeta \right) \left( 1 + \frac{1}{4} \zeta \right) \left( 1 + \frac{1}{9} \zeta \right) \left( 1 + \frac{1}{16} \zeta \right) \left( 1 + \frac{1}{25} \zeta \right) \&c.$  ; en appliquant donc à ce cas la règle précédente , nous trouverons  $A = \frac{\pi \pi}{6}$  ;  $B = \frac{\pi^4}{120}$  ;  $C = \frac{\pi^5}{5040}$  ;  $D = \frac{\pi^8}{362880} \&c.$  Supposons donc . . .

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$$

$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \&c.$$

$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \&c.$$

$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \&c.$$

$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \&c.$$

&c.

En déterminant les valeurs de ces lettres par celles des lettres  $A, B, C, D, \&c.$  nous trouverons

$$P = \frac{\pi \pi}{6}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$



$$R = \frac{\pi^6}{945}$$

$$S = \frac{\pi^2}{9450}$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

&c.

168. Il suit donc de-là qu'on peut avoir, au moyen de la demi-circonférence  $\pi$  la somme de toutes les séries infinies comprises dans cette formule générale  $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$  toutes les fois que  $n$  sera un nombre pair; car la somme de cette série aura toujours un rapport rationnel avec  $\pi^n$ . Au reste, pour faire mieux connoître la valeur de ces suites, j'ajouterai ici plusieurs sommes de ces sortes de séries exprimées d'une manière plus commode.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. = \frac{2^2}{1.2.3} \frac{1}{1} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. = \frac{2^2}{1.2.3.4.5} \frac{1}{3} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \&c. = \frac{2^4}{1.2.3\dots7} \frac{1}{3} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \&c. = \frac{2^6}{1.2.3\dots9} \frac{3}{5} \pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \&c. = \frac{2^8}{1.2.3\dots11} \frac{5}{3} \pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \&c. = \frac{2^{10}}{1.2.3\dots13} \frac{691}{105} \pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \&c. = \frac{2^{12}}{1.2.3\dots15} \frac{35}{1} \pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \&c. = \frac{2^{14}}{1.2.3\dots17} \frac{3617}{15} \pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \&c. = \frac{2^{16}}{1.2.3\dots19} \frac{43867}{21} \pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \&c. = \frac{2^{18}}{1.2.3\dots21} \frac{1222277}{55} \pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \dots = \frac{2^{20}}{1.2.3\dots 23} \frac{854513}{3} \pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \dots = \frac{2^{22}}{1.2.3\dots 25} \frac{1181820455}{273} \pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \dots = \frac{2^{24}}{1.2.3\dots 27} \frac{76977927}{1} \pi^{26}$$

J'expliquerai ailleurs l'artifice, au moyen duquel on a pu arriver à ces résultats. Je les ai donnés d'avance, parce que la série des fractions  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots$ , &c, quoique (x) très-irrégulière au premier aspect, est d'un très-grand usage dans beaucoup d'occasions.

169. Traitons de la même manière l'équation donnée (art. 157);

$$\text{nous avons trouvé } \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots = \left(1 + \frac{4xx}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{4xx}{9\pi^2}\right) \left(1 + \frac{4xx}{25\pi^2}\right) \left(1 + \frac{4xx}{49\pi^2}\right) \dots$$

Supposant donc  $x^2 = \frac{\pi^2 \zeta}{4}$ , nous aurons  $1 + \frac{\pi^2}{1.2.4} \zeta + \frac{\pi^4}{1.2.3.4^3} \zeta^2 + \frac{\pi^6}{1.2\dots 6.4^3} \zeta^3 + \dots = (1 + \zeta) \left(1 + \frac{1}{9} \zeta\right) \left(1 + \frac{1}{25} \zeta\right) \left(1 + \frac{1}{49} \zeta\right) \dots$ ; & faisant l'application de la règle précédente,

nous trouverons  $A = \frac{\pi^2}{1.2.4}$ ;  $B = \frac{\pi^4}{1.2.3.4^3}$ ;  $C = \frac{\pi^6}{1.2.3\dots 6.4^3}$ , &c.

Donc, si nous supposons . . . . .

$$P = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$Q = 1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \dots$$

$$R = 1 + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \dots$$

$$S = 1 + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \dots$$

&c.

Nous obtiendrons pour  $P, Q, R, S, \&c.$  les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^3}{2^3}; & Q &= \frac{2}{1.2.3} \cdot \frac{\pi^4}{2^4}; \\
 R &= \frac{16}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\pi^6}{2^6}; & S &= \frac{272}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{\pi^8}{2^8}; \\
 T &= \frac{7936}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{10}}; & V &= \frac{353792}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{12}}; \\
 W &= \frac{22368256}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{14}}.
 \end{aligned}$$

170. Les mêmes sommes des puissances des nombres impairs peuvent se déduire des sommes précédentes, dans lesquelles se trouvent tous les nombres. En effet, si  $M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \&c.$  en multipliant tout par  $\frac{1}{2^n}$ , on aura  $\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$  série, qui ne contient que les nombres pairs, & qui soustraite de la première, donnera pour reste tous les nombres impairs; ainsi on aura  $M - \frac{M}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \&c.$  Mais si on soustrait de  $M$  la série  $\frac{M}{2^n}$  prise deux fois, les signes seront alternativement positifs & négatifs, & on aura  $M - \frac{2M}{2^n} = \frac{2^n - 1 - 1}{2^n - 1} \cdot M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.$  On pourra donc, au moyen des principes exposés ci-dessus, sommer ces séries . . . . .

$$\begin{aligned}
 1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} \pm \&c. \\
 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.
 \end{aligned}$$

pourvu que  $n$  soit un nombre pair; & la somme sera  $= A\pi^n$ ,  $A$  étant un nombre rationnel.

171. Les expressions trouvées (art. 164) fourniront aussi  
R ij

132 DE L'USAGE DES FACTEURS TROUVÉS CI-DESSUS, des séries également remarquables. Car, puisque  $\text{cof. } \frac{1}{2} \nu + \text{tang. } \frac{1}{2} g \sin. \frac{1}{2} \nu = \left(1 + \frac{\nu}{\pi - g}\right) \left(1 - \frac{\nu}{\pi + g}\right) \left(1 + \frac{\nu}{3\pi - g}\right) \&c$ ; si nous supposons  $\nu = \frac{x}{n} \pi$  &  $g = \frac{m}{n} \pi$ , nous aurons  $\left(1 + \frac{x}{n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{n+m}\right) \left(1 + \frac{x}{3n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{3n+m}\right) \left(1 + \frac{x}{5n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{5n+m}\right) \&c. = \text{cof. } \frac{x\pi}{2n} + \text{tang. } \frac{m\pi}{2n} \sin. \frac{x\pi}{2n} = 1 + \frac{x\pi}{2n} \times \text{tang. } \frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi x x}{2.4n^2} - \frac{\pi^3 x^3}{2.4.6n^3} + \text{tang. } \frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4 x^4}{2.4.6.8n^4} + \&c.$  Cette expression infinie comparée avec celle de l'art. 165 donnera ces valeurs - ci :  $A = \frac{\pi}{2n} \text{tang. } \frac{m\pi}{2n}$ ;  $B = -\frac{\pi\pi}{2.4n^2}$ ;  $C = -\frac{\pi^3}{2.4.6n^3} \text{tang. } \frac{m\pi}{2n}$ ;  $D = \frac{\pi^4}{2.4.6.8n^4}$ ;  $E = \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10n^5} \times \text{tang. } \frac{m\pi}{2n} \&c$ ; mais alors  $\alpha = \frac{1}{n-m}$ ;  $\epsilon = -\frac{1}{n+m}$ ;  $\gamma = \frac{1}{3n-m}$ ;  $\delta = -\frac{1}{3n+m}$ ;  $\epsilon = \frac{1}{5n-m}$ ;  $\xi = -\frac{1}{5n+m} \&c.$

172. Ainsi, d'après la règle donnée (art. 166) nous obtiendrons les séries suivantes.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \&c. \\
 Q &= \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \frac{1}{(5n-m)^2} + \frac{1}{(5n+m)^2} + \&c. \\
 R &= \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} + \frac{1}{(3n-m)^3} - \frac{1}{(3n+m)^3} + \frac{1}{(5n-m)^3} - \&c. \\
 S &= \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(3n-m)^4} + \frac{1}{(3n+m)^4} + \frac{1}{(5n-m)^4} + \&c. \\
 T &= \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} + \frac{1}{(3n-m)^5} - \frac{1}{(3n+m)^5} + \frac{1}{(5n-m)^5} - \&c. \\
 V &= \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(3n-m)^6} + \frac{1}{(3n+m)^6} + \frac{1}{(5n-m)^6} + \&c.
 \end{aligned}$$

Or en faisant  $\text{tang. } \frac{m\pi}{2n} = k$ , nous'en concluons, comme nous l'avons fait voir,

$$\begin{aligned}
 P &= A = \frac{k\pi}{2n} &= & \frac{k\pi}{2n} \\
 Q &= \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nn} &= & \frac{(2kk+2)\pi^2}{2.4.n^2} \\
 R &= \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} &= & \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2.4.6.n^3} \\
 S &= \frac{(3k^4+4kk+1)\pi^4}{48n^4} &= & \frac{(24k^4+32k^2+8)\pi^4}{2.4.6.8n^4} \\
 T &= \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} &= & \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2.4.6.8.10n^5}
 \end{aligned}$$

173. On peut traiter de même la dernière formule de l'art. 164;

$$\text{cof. } \frac{1}{2} \nu + \text{cot. } \frac{1}{2} g \cdot \text{fin. } \frac{1}{2} \nu = \left(1 + \frac{\nu}{g}\right) \left(1 - \frac{\nu}{2\pi - g}\right) \left(1 + \frac{\nu}{2\pi + g}\right)$$

$\left(1 - \frac{\nu}{4\pi - g}\right) \left(1 + \frac{\nu}{4\pi + g}\right) \&c.$  Si nous supposons  $\nu = \frac{x}{n} \pi$ ,

$g = \frac{m}{n} \cdot \pi$  &  $\text{tang. } \frac{m\pi}{2n} = k$ , de manière que  $\text{cot. } \frac{1}{2} g = \frac{1}{k}$ ;

la formule, dont il s'agit donnera  $\text{cof. } \frac{\pi x}{2n} + \frac{1}{k} \text{fin. } \frac{\pi x}{2n} =$

$$1 + \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi x \pi x}{2.4nn} - \frac{\pi^3 x^3}{2.4.6.n^2 k} + \frac{\pi^4 x^4}{2.4.6.8n^4} + \frac{\pi^5 x^5}{2.4.6.8.10n^5 k} - \&c.$$

$$= \left(1 + \frac{x}{m}\right) \left(1 - \frac{x}{2n-m}\right) \left(1 + \frac{x}{2n+m}\right) \left(1 - \frac{x}{4n-m}\right) \left(1 + \frac{x}{4n+m}\right)$$

(&c. Comparant avec la formule générale (art. 165), on

aura  $A = \frac{\pi}{2nk}$ ;  $B = -\frac{\pi\pi}{2.4nn}$ ;  $C = -\frac{\pi^3}{2.4.6n^2 k}$ ;  $D =$

$\frac{\pi^4}{2.4.6.8n^4}$ ;  $E = \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10n^5 k}$ ; &c, & les facteurs donneront,

$\alpha = \frac{1}{m}$ ;  $\epsilon = -\frac{1}{2n-m}$ ;  $\gamma = \frac{1}{2n+m}$ ;  $\delta = -\frac{1}{4n-m}$ ;  $\epsilon =$

$\frac{1}{4n+m}$  &c.

174. Ainsi, d'après la règle donnée (art. 166), nous

134 DE L'USAGE DES FACTEURS TROUVÉS CI-DESSUS, formerons les séries suivantes, & nous assignerons leurs sommes.

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \&c.$$

$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \&c.$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \&c.$$

$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \&c.$$

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \&c.$$

&c.

Or ces sommes  $P, Q, R, S$  &c. se trouveront de la manière qui suit.

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} = \frac{1\pi}{2nk}$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nkkk} = \frac{(2+2kk)\pi^2}{2 \cdot 4 \cdot n^2 k^2}$$

$$R = \frac{(kk+1)\pi^3}{8n^3 k^3} = \frac{(6+6kk)\pi^3}{2 \cdot 4 \cdot 6n^3 k^3}$$

$$S = \frac{(k^4+4kkk+3)\pi^4}{48n^4 k^4} = \frac{(24+32kk+8k^4)\pi^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8n^4 k^4}$$

$$T = \frac{(2k^5+5kkk+3)\pi^5}{96n^5 k^5} = \frac{(120+200kk+80k^4)\pi^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10n^5 k^5}$$

$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^3+15)\pi^6}{960n^6 k^6} = \frac{(720+1440kk+816k^4+96k^6)\pi^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot n^6 k^6}$$

&c.

175. Ces séries générales méritent que nous prenions quelques cas particuliers, en déterminant en nombres le rapport de  $m$  à  $n$ . Soit donc d'abord  $m = 1$  &  $n = 2$ ,  $k$  fera  $= \text{tang. } \frac{\pi}{4} = \text{tang. } 45^\circ = 1$ ; & les deux classes de séries deviendront les mêmes; on aura donc . . . . .

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{32} &= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c. \\ \frac{\pi^6}{96} &= 1 + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} - \frac{1}{9^5} + \&c. \\ \frac{5\pi^7}{1536} &= 1 - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} - \&c. \\ \frac{\pi^8}{960} &= 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Nous avons déjà trouvé (art. 140) la première de ces séries. Parmi les autres celles qui ont des exposans pairs ont été calculées (art. 169), & celles dans lesquelles les exposans sont des nombres négatifs se présentent ici pour la première fois. Il n'y a donc point de doute qu'on ne puisse assigner au moyen de la valeur de  $\pi$  les sommes de toutes ces séries :

$$1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \frac{1}{9^{n+1}} - \&c.$$

176. Soit maintenant  $m = 1, n = 3$ ; alors  $k = \text{tang. } \frac{\pi}{6} = \text{tang. } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , & les séries de l'art. 172 se changeront en celles-ci :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6\sqrt{3}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \&c. \\ \frac{\pi^2}{27} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} + \frac{1}{16^3} + \&c. \\ \frac{\pi^3}{162\sqrt{3}} &= \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} - \frac{1}{16^3} + \&c. \\ &\&c. \quad \text{ou bien} \\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \&c. \\ \frac{4\pi^2}{27} &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \&c. \\ \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Tous les nombres divisibles par trois manquent dans ces séries. Celles qui ont des dimensions paires peuvent se déduire des séries déjà trouvées, en s'y prenant de cette manière : puisque

$$\frac{\pi \pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c, \& \text{ que par conséquent}$$

$$\frac{\pi \pi}{6.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \&c. = \frac{\pi \pi}{54},$$

cette dernière série qui contient tous les nombres divisibles par trois, étant soustraite de la première, donnera pour reste tous les nombres non-divisibles par trois : & par-

tant  $\frac{8\pi\pi}{54} = \frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c$ , comme nous venons de le trouver.

177. La même hypothèse de  $m = 1$ ,  $n = 3$ , &  $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , appliquée à l'art. 174 fournira les sommations suivantes :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \&c.$$

$$\frac{\pi \pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi^2}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \&c.$$

Les dénominateurs de ces séries contiennent seulement les nombres impairs, excepté ceux qui sont divisibles par trois. Au reste, les dimensions paires peuvent se conclure de ce que nous connoissons déjà : car puisque nous avons

$$\frac{\pi \pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c, \text{ il s'enfuit que}$$

$$\frac{\pi \pi}{8.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \&c. = \frac{\pi \pi}{72},$$

série, qui contient tous les nombres impairs divisibles par trois, & qui étant soustraite de la supérieure, donnera pour reste la suite des carrés des nombres impairs non-divisibles par trois ; savoir

$$\frac{\pi \pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \&c.$$



178. Si on ajoute, ou si on soustrait l'une de l'autre les séries trouvées (art. 172 & 174), on en obtiendra d'autres également remarquables; savoir . . . . .

$$\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2nk} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \&c. = \frac{(kk+1)\pi}{2nk}$$

or  $k = \text{tang. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{\sin. \frac{m\pi}{2n}}{\cos. \frac{m\pi}{2n}}$  &  $1 + kk = \frac{1}{(\cos. \frac{m\pi}{2n})^2}$

Donc  $\frac{2k}{1+kk} = 2 \sin. \frac{m\pi}{2n} \cos. \frac{m\pi}{2n} = \sin. \frac{m\pi}{n}$ . Cette valeur étant substituée, nous aurons . . . . .

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m}$$

— &c. On aura semblablement par la soustraction . . . . .

$$\frac{\pi}{2nk} - \frac{k\pi}{2n} = \frac{(1-kk)\pi}{2nk} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m}$$

$$- \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n+m} - \&c. \text{ Or } \frac{2k}{1-kk} = \text{tang. } 2 \cdot \frac{m\pi}{2n} = \text{tang. } \frac{m\pi}{n}$$

$$= \frac{\sin. \frac{m\pi}{n}}{\cos. \frac{m\pi}{n}}$$

Donc . . . . .

$$\pi \cos. \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

$$n \sin. \frac{m\pi}{n}$$

Les séries des carrés & des autres puissances plus élevées de ces termes se trouveront plus facilement par le calcul différentiel.

179. Comme nous avons déjà traité les cas où  $m = 1$ , &  $n = 2$  ou  $3$ ; supposons à présent  $m = 1$ , &  $n = 4$ , alors  $\sin. \frac{m\pi}{n} = \sin. \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  &  $\cos. \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Donc . . . . .

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \&c. \&$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \&c.$$

Soit  $m = 1$ , &  $n = 8$ , on aura  $\frac{m\pi}{n} = \frac{\pi}{8}$ , &  $\sin. \frac{\pi}{8} =$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \text{ \& } \cos. \frac{\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \text{ \& } \frac{\cos. \frac{\pi}{8}}{\sin. \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\pi}{4\sqrt{(2-\sqrt{2})}} = 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} - \&c.$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}-1)} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \&c.$$

Soit maintenant  $m = 3$ , &  $n = 8$ ; dans ce cas  $\frac{m\pi}{n} = \frac{3\pi}{8}$ ,

$$\text{\& } \sin. \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \text{ \& } \cos. \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}; \text{ d'où}$$

$$\frac{\cos. \frac{3\pi}{8}}{\sin. \frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2+1}}; \text{ ce qui donnera les séries . . . . .}$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \&c.$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} + \&c.$$

180. En combinant ces séries, on trouvera: . . . . .

$$\frac{\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{2-1}]}{8} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{(4+2\sqrt{2})} - \sqrt{2+1}]}{8} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{2+1} + \sqrt{(4-2\sqrt{2})}]}{8} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{2+1} - \sqrt{(4-2\sqrt{2})}]}{8} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \&c.$$

On peut aller plus loin, en suivant un semblable procédé & faisant  $n = 16$  &  $m = 1$  ou  $3$  ou  $5$  ou  $7$ . On trouvera de

cette manière les sommes des séries  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$  &c. dans lesquelles les variations des signes + & - suivroient d'autres loix.

181. Si dans les séries trouvées (art. 178) on réunit deux termes en un seul; on aura . . . . .

$$\frac{\frac{\pi}{n}}{n \sin. \frac{m \pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{2m}{nn - mm} - \frac{2m}{4nn - mm} + \frac{2m}{9nn - mm} - \frac{2m}{16nn - mm} + \&c.$$

& par conséquent

$$\frac{1}{nn - mm} - \frac{1}{4nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} - \&c. = \frac{\pi}{2mn \sin. \frac{m \pi}{n}} - \frac{1}{2mm}$$

L'autre série donnera

$$\frac{\pi}{n \text{ tang. } \frac{m \pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn - mm} - \frac{2m}{4nn - mm} - \frac{2m}{9nn - mm} - \&c; \&c.$$

par conséquent

$$\frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{4nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2m n \text{ tang. } \frac{m \pi}{n}}$$

De la somme de ces deux séries résulte celle-ci: . . . . .

$$\frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \frac{1}{25nn - mm} + \&c. = \frac{\pi \text{ tang. } \frac{m \pi}{2n}}{4mn}$$

Si dans cette dernière série  $n = 1$ , &  $m = 2k$ , nombre pair quelconque; à cause de  $\text{tang. } k\pi = 0$ , on aura toujours, à moins que  $k$  ne soit  $= 0$ , . . . . .

$$\frac{1}{1 - 4kk} + \frac{1}{9 - 4kk} + \frac{1}{25 - 4kk} + \frac{1}{49 - 4kk} + \&c. = 0;$$

mais, si dans cette série on fait  $n = 2$ , &  $m$ , nombre impair quelconque  $= 2k + 1$ ; à cause de  $\frac{1}{\text{tang. } \frac{m \pi}{n}} = 0$ , on aura

$$\frac{1}{4 - (2k+1)^2} + \frac{1}{16 - (2k+1)^2} + \frac{1}{36 - (2k+1)^2} + \&c. = \frac{1}{2(2k+1)^2}$$

S ij

182. Multiplions les séries trouvées par  $nn$ ; & soit  $\frac{m}{n} = p$ ; nous obtiendrons ces résultats :

$$\frac{1}{1-pp} - \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} - \frac{1}{16-pp} + \&c. = \frac{\pi}{2p \sin.p \pi} - \frac{1}{2pp}$$

$$\frac{1}{1-pp} + \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} + \frac{1}{16-pp} + \&c. = \frac{1}{2pp} - \frac{\pi}{2p \text{tang}.p \pi}$$

Soit  $pp = a$  & ces séries deviendront . . . . .

$$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} - \frac{1}{16-a} + \&c. = \frac{\pi \sqrt{a}}{2a \sin.\pi \sqrt{a}} - \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} + \frac{1}{16-a} + \&c. = \frac{1}{2a} - \frac{\pi \sqrt{a}}{2a \text{tang}.\pi \sqrt{a}}$$

Ainsi, pourvu que  $a$  ne soit pas un nombre négatif, ni un carré entier, on pourra assigner la somme de ces séries au moyen du cercle.

183. Cependant, en ramenant, comme nous l'avons fait, les exponentielles imaginaires à des sinus & à des cosinus d'arcs circulaires, nous pourrons encore assigner les sommes de ces séries, lorsque  $a$  est un nombre négatif. En effet, puisque  $e^{x\sqrt{-1}} = \text{cos}. x + \sqrt{-1} \text{sin}. x$ ; &  $e^{-x\sqrt{-1}} = \text{cos}. x - \sqrt{-1} \text{sin}. x$ : réciproquement, en mettant  $y\sqrt{-1}$

à la place de  $x$ , on aura  $\text{cos}. y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$  &  $\text{sin}. y\sqrt{-1}$

$$= \frac{e^{-y} - e^y}{2\sqrt{-1}}$$

Donc si l'on suppose  $a = -b$ , &  $y = \pi \sqrt{b}$ ;

$$\text{alors } \text{cos}. \pi \sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi \sqrt{b}} + e^{\pi \sqrt{b}}}{2} \text{ \& } \text{sin}. \pi \sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi \sqrt{b}} - e^{\pi \sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$; \text{ \& } \text{par conséquent } \text{tang}. \pi \sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi \sqrt{b}} - e^{\pi \sqrt{-b}}}{(e^{-\pi \sqrt{b}} + e^{\pi \sqrt{b}})\sqrt{-1}}$$

$$\text{Il s'uit de-là que } \frac{\pi \sqrt{-b}}{\text{sin}. \pi \sqrt{-b}} = - \frac{2\pi \sqrt{b}}{e^{-\pi \sqrt{b}} - e^{\pi \sqrt{b}}}, \text{ \& } \frac{\pi \sqrt{-b}}{\text{tang}. \pi \sqrt{-b}} = - \frac{(e^{-\pi \sqrt{b}} + e^{\pi \sqrt{b}})\pi \sqrt{b}}{e^{-\pi \sqrt{b}} - e^{\pi \sqrt{b}}}$$

Cela posé, on aura . . . . .

$$\frac{1}{1+b} - \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} - \frac{1}{16+b} + \&c. = \frac{1}{2b} - \frac{\pi \sqrt{b}}{(e^{\pi \sqrt{b}} - e^{-\pi \sqrt{b}})_b}$$

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} + \frac{1}{16+b} + \&c. = \frac{(e^{\pi \sqrt{b}} + e^{-\pi \sqrt{b}})^{\sqrt{b}}}{2b(e^{\pi \sqrt{b}} - e^{-\pi \sqrt{b}})} - \frac{1}{2b}$$

Ces mêmes séries peuvent se déduire de l'art. 162, en employant la même méthode dont je me suis servi dans ce Chapitre. Mais, comme la manière dont j'ai opéré ici, jette un grand jour sur la transformation des sinus & des cosinus des arcs imaginaires en quantités exponentielles réelles, j'ai cru devoir lui donner la préférence.

## C H A P I T R E X I.

### *Des autres expressions infinies des Arcs & des Sinus.*

184. Nous avons vu ci-dessus, (art. 158) que  $\zeta$  désignant un arc de cercle quelconque, on avoit  $\sin. \zeta = \zeta \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{\pi \pi}\right) \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{4 \pi \pi}\right)$

$$\left(1 - \frac{\zeta \zeta}{9 \pi \pi}\right) \left(1 - \frac{\zeta \zeta}{16 \pi \pi}\right) \&c. \ \& \ \cos. \zeta = \left(1 - \frac{4 \zeta \zeta}{\pi \pi}\right) \left(1 - \frac{4 \zeta \zeta}{9 \pi \pi}\right)$$

$$\left(1 - \frac{4 \zeta \zeta}{25 \pi \pi}\right) \left(1 - \frac{4 \zeta \zeta}{49 \pi \pi}\right) \&c. \ \text{Supposons l'arc de cercle } \zeta = \frac{m \pi}{n},$$

$$\text{nous aurons } \sin. \frac{m \pi}{n} = \frac{m \pi}{n} \left(1 - \frac{m m}{n n}\right) \left(1 - \frac{m m}{4 n n}\right) \left(1 - \frac{m m}{9 n n}\right) \left(1 - \frac{m m}{16 n n}\right) \&c.$$

$$\& \ \cos. \frac{m \pi}{n} = \left(1 - \frac{4 m m}{n n}\right) \left(1 - \frac{4 m m}{9 n n}\right) \left(1 - \frac{4 m m}{25 n n}\right) \left(1 - \frac{4 m m}{49 n n}\right) \&c.$$

ou bien mettons  $2n$  à la place de  $n$ , pour avoir ces expressions :

$$\sin. \frac{m \pi}{2n} = \frac{m \pi}{2n} \left(\frac{4 n n - m m}{4 n n}\right) \left(\frac{16 n n - m m}{16 n n}\right) \left(\frac{36 n n - m m}{36 n n}\right) \&c.$$

$$\cos. \frac{m \pi}{2n} = \left(\frac{n n - m m}{n n}\right) \left(\frac{9 n n - m m}{9 n n}\right) \left(\frac{25 n n - m m}{25 n n}\right) \left(\frac{49 n n - m m}{49 n n}\right) \&c.$$

lesquelles étant décomposées en facteurs simples donnent

$$\sin. \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \left( \frac{2n-m}{2n} \right) \left( \frac{2n+m}{2n} \right) \left( \frac{4n-m}{4n} \right) \left( \frac{4n+m}{4n} \right) \left( \frac{6n-m}{6n} \right) \&c.$$

$$\cos. \frac{m\pi}{2n} = \left( \frac{n-m}{n} \right) \left( \frac{n+m}{n} \right) \left( \frac{3n-m}{3n} \right) \left( \frac{3n+m}{3n} \right) \left( \frac{5n-m}{5n} \right) \left( \frac{5n+m}{5n} \right) \&c.$$

Soit mis  $n - m$  à la place de  $m$ , à cause de  $\sin. \frac{(n-m)\pi}{2n} =$

$$\cos. \frac{m\pi}{2n} \& \text{ de } \cos. \frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin. \frac{m\pi}{2n}, \text{ on a ces autres expressions:}$$

$$\cos. \frac{m\pi}{2n} = \left( \frac{(n-m)\pi}{2n} \right) \left( \frac{n+m}{2n} \right) \left( \frac{3n-m}{2n} \right) \left( \frac{3n+m}{4n} \right) \left( \frac{5n-m}{4n} \right) \left( \frac{5n+m}{6n} \right) \&c.$$

$$\sin. \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n} \left( \frac{2n-m}{n} \right) \left( \frac{2n+m}{3n} \right) \left( \frac{4n-m}{3n} \right) \left( \frac{4n+m}{5n} \right) \left( \frac{6n-m}{5n} \right) \&c.$$

185. On a donc deux expressions du sinus & du cosinus de l'angle  $\frac{m\pi}{2n}$ ; si on les divise l'une par l'autre on aura  $1 =$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \&c, \& \text{ par conséquent } \frac{\pi}{2} =$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \&c. \text{ C'est-là l'expres-}$$

sion que WALLIS a trouvée pour la valeur de la circonférence du cercle dans son *Arithmétique des Infinis*. On peut à l'aide de la première expression du sinus en trouver une infinité d'autres semblables à la dernière; on'en conclut, en effet, que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m} \sin. \frac{m\pi}{2n} \left( \frac{2n}{2n-m} \right) \left( \frac{2n}{2n+m} \right) \left( \frac{4n}{4n-m} \right) \left( \frac{4n}{4n+m} \right) \left( \frac{6n}{6n-m} \right) \&c.$$

formule, qui par la supposition de  $\frac{m}{n} = 1$  donne celle de WALLIS.

Soit donc  $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ , à cause de  $\sin. \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on aura  $\frac{\pi}{2} =$

$$\frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17} \&c. \text{ Soit } \frac{m}{n} = \frac{1}{3}, \text{ à cause}$$

$$\text{de } \sin. \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}, \text{ on aura } \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \&c.$$

Si on divise la formule de Wallis par celle où  $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ , on

$$\text{trouvera } \sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 18}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19} \&c.$$

186. Comme la tangente d'un angle est égale au quotient du sinus divisé par le cosinus, on pourra exprimer aussi la valeur de la tangente par des facteurs infinis. Si l'on divise la première expression du sinus par la seconde du cosinus, on aura

$$\text{tang. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{n-m} \left( \frac{2n-m}{n+m} \right) \left( \frac{4n-m}{3n+m} \right) \left( \frac{4n+m}{5n-m} \right) \&c.$$

$$\text{cot. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{n} \left( \frac{n+m}{2n-m} \right) \left( \frac{3n-m}{2n+m} \right) \left( \frac{3n+m}{4n-m} \right) \left( \frac{5n-m}{4n+m} \right) \&c.$$

Semblablement pour les sécantes, & pour les cofécantes on aura

$$\text{féc. } \frac{m\pi}{2n} = \left( \frac{n}{n-m} \right) \left( \frac{n}{n+m} \right) \left( \frac{3n}{3n-m} \right) \left( \frac{3n}{3n+m} \right) \left( \frac{5n}{5n-m} \right) \left( \frac{5n}{5n+m} \right) \&c.$$

$$\text{coféc. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m} \left( \frac{n}{2n-m} \right) \left( \frac{3n}{2n+m} \right) \left( \frac{3n}{4n-m} \right) \left( \frac{5n}{4n+m} \right) \left( \frac{5n}{6n-m} \right) \&c.$$

Mais si l'on combine les autres expressions des sinus & des cosinus, on trouvera . . . . .

$$\text{tang. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n-m} \cdot \frac{1(2n-m)}{2(n+m)} \cdot \frac{3(2n+m)}{2(3n-m)} \cdot \frac{3(4n-m)}{4(3n+m)} \cdot \&c.$$

$$\text{cot. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n-m}{m} \cdot \frac{1(n+m)}{2(2n-m)} \cdot \frac{3(3n-m)}{2(2n+m)} \cdot \frac{3(3n+m)}{4(4n-m)} \cdot \&c.$$

$$\text{féc. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{n-m} \cdot \frac{2n}{n+m} \cdot \frac{2n}{3n-m} \cdot \frac{4n}{3n+m} \cdot \frac{4n}{5n-m} \cdot \&c.$$

$$\text{coféc. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{2n}{2n-m} \cdot \frac{2n}{2n+m} \cdot \frac{4n}{4n-m} \cdot \frac{4n}{4n+m} \cdot \&c.$$

187. Si on écrit  $k$  au lieu de  $m$ , & qu'on détermine d'une manière semblable le sinus & le cosinus de l'angle  $\frac{k\pi}{2n}$ , & qu'ensuite on divise par ces dernières expressions les premières, on obtiendra les formules: . . . . .

$$\frac{\sin. \frac{m\pi}{2n}}{\sin. \frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k} \cdot \frac{2n-m}{2n-k} \cdot \frac{2n+m}{2n+k} \cdot \frac{4n-m}{4n-k} \cdot \frac{4n+m}{4n+k} \cdot \&c.$$

$$\frac{\sin. \frac{m\pi}{2n}}{\cos. \frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{n-k} \cdot \frac{2n-m}{n+k} \cdot \frac{2n+m}{3n-k} \cdot \frac{4n-m}{3n+k} \cdot \frac{4n+m}{5n-k} \cdot \&c.$$

$$\frac{\text{cof. } \frac{m\pi}{2n}}{\text{cof. } \frac{k\pi}{2n}} = \left(\frac{n-m}{n-k}\right) \left(\frac{n+m}{n+k}\right) \left(\frac{3n-m}{3n-k}\right) \left(\frac{3n+m}{3n+k}\right) \left(\frac{5n-m}{5n-k}\right) \&c.$$

$$\frac{\text{cof. } \frac{m\pi}{2n}}{\text{fin. } \frac{k\pi}{2n}} = \left(\frac{n-m}{k}\right) \left(\frac{n+m}{2n-k}\right) \left(\frac{3n-m}{2n+k}\right) \left(\frac{3n+m}{4n-k}\right) \left(\frac{5n-m}{4n+k}\right) \&c.$$

Ayant donc pris pour  $\frac{k\pi}{2n}$  un angle, dont le sinus & le cosinus soient donnés, on pourra au moyen de ceux-ci déterminer le sinus & le cosinus de tout autre angle  $\frac{m\pi}{2n}$ .

188. Donc réciproquement on peut assigner les vraies valeurs de ces sortes d'expressions, qui sont composées d'une infinité de facteurs au moyen de la circonférence du cercle, ou au moyen des sinus & des cosinus d'angles donnés; ce qui ne laisse pas d'être d'une grande importance, puisque jusqu'à présent il n'y a point d'autres méthodes, qui puissent donner les valeurs de ces sortes de produits. Au reste, de telles expressions ne peuvent guere servir à obtenir par approximation les valeurs, soit de  $\pi$ , soit des sinus & des cosinus des angles  $\frac{m\pi}{2n}$ . En effet, quoiqu'on

pût sans difficulté multiplier entr'eux ces facteurs  $\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \left(1 - \frac{1}{49}\right) \&c$ , en employant les fractions décimales, il faudroit cependant prendre un trop grand nombre de termes pour en conclure la valeur exacte de  $\pi$  seulement à la dixième figure décimale près.

189. Le principal usage de ces expressions, quoique infinies, consiste dans la recherche des logarithmes; en quoi les facteurs sont si utiles, que sans eux le calcul des logarithmes seroit très-difficile. En effet, puisque  $\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \left(1 - \frac{1}{49}\right) \&c$ , on aura en prenant les logarithmes



logarithmes  $l\pi = l_4 + l\left(1 - \frac{1}{9}\right) + l\left(1 - \frac{1}{25}\right) + l\left(1 - \frac{1}{49}\right) +$   
 $\&c.$ , ou  $l\pi = l_2 - l\left(1 - \frac{1}{4}\right) - l\left(1 - \frac{1}{16}\right) - l\left(1 - \frac{1}{36}\right) -$   
 $\&c.$  quelques soient les logarithmes, tabulaires, ou hyper-  
 boliques. Mais, comme il est aisé de conclure les logarithmes  
 ordinaires des logarithmes hyperboliques, on pourra employer  
 un moyen très-expéditif d'obtenir le logarithme hyperbolique  
 de  $\pi$ .

190. Puis donc qu'en prenant les logarithmes hyperbo-  
 liques, on a  $l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \&c.$  Si nous  
 développons chaque terme de cette manière, nous aurons

$$l\pi = l_4 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{9} - \frac{1}{2 \cdot 9^2} - \frac{1}{3 \cdot 9^3} - \frac{1}{4 \cdot 9^4} - \&c. \\ -\frac{1}{25} - \frac{1}{2 \cdot 25^2} - \frac{1}{3 \cdot 25^3} - \frac{1}{4 \cdot 25^4} - \&c. \\ -\frac{1}{49} - \frac{1}{2 \cdot 49^2} - \frac{1}{3 \cdot 49^3} - \frac{1}{4 \cdot 49^4} - \&c. \\ \&c. \end{array} \right.$$

Dans ce nombre infini de séries, les termes pris en descen-  
 dant verticalement forment eux-mêmes des séries, dont  
 nous avons déjà assigné les sommes; c'est pourquoi, si pour  
 abrégér, nous supposons . . . . .

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \&c.$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \&c.$$

Nous aurons  $l\pi = l_4 - (A - 1) - \frac{1}{2}(B - 1) - \frac{1}{3}(C - 1)$   
 $- \frac{1}{4}(D - 1) - \&c.$

Or, en cherchant les valeurs approchées des sommes indiquées ci-dessus, nous trouverons . . . . .

$A$	$= 1,$	23370055013616982735431
$B$	$= 1,$	01467803160419205454625
$C$	$= 1,$	00144707664094212190647
$D$	$= 1,$	00015517902529611930298
$E$	$= 1,$	00001704136304482550816
$F$	$= 1,$	00000188584858311957590
$G$	$= 1,$	00000020924051921150010
$H$	$= 1,$	00000002323715737915670
$I$	$= 1,$	00000000258143755665977
$K$	$= 1,$	00000000028680769745558
$L$	$= 1,$	00000000003186677514044
$M$	$= 1,$	00000000000354072294292
$N$	$= 1,$	00000000000039341246691
$O$	$= 1,$	00000000000004371244859
$P$	$= 1,$	00000000000000485693682
$Q$	$= 1,$	00000000000000053965957
$R$	$= 1,$	00000000000000005096217
$S$	$= 1,$	00000000000000000666246
$T$	$= 1,$	00000000000000000074027
$V$	$= 1,$	00000000000000000008225
$W$	$= 1,$	00000000000000000000913
$X$	$= 1,$	00000000000000000000101

Ainsi, sans un calcul trop pénible, on trouve le logarithme hyperbolique de  $\pi = 1, 14472988584940017414342$ , lequel étant multiplié par  $0, 43429$  &c. donne le logarithme ordinaire de  $\pi = 0, 49714987269413385435126$ .

191. Comme nous avons de plus la valeur du sinus &

celle du cofinus de l'angle  $\frac{m\pi}{2n}$  exprimées en un nombre infini de facteurs, nous pourrons déterminer commodément le logarithme de l'un & de l'autre. Or les formules trouvées précédemment donnent . . . . .

$$l \sin. \frac{m\pi}{2n} = l\pi + l\frac{m}{2n} + l\left(1 - \frac{m}{4n}\right) + l\left(1 - \frac{m}{16n}\right) + l\left(1 - \frac{m}{36n}\right) + \&c.$$

$$l \cos. \frac{m\pi}{2n} = l\left(1 - \frac{m}{n}\right) + l\left(1 - \frac{m}{9n}\right) + l\left(1 - \frac{m}{25n}\right) + l\left(1 - \frac{m}{49n}\right) + \&c.$$

Donc il sera facile d'abord d'exprimer comme ci-dessus, les logarithmes hyperboliques en séries très-convergentes; mais pour ne pas multiplier sans nécessité les séries infinies, laissons les logarithmes des premiers termes, & nous aurons

$$l \sin. \frac{m\pi}{2n} = l\pi + lm + l(2n - m) + l(2n + m) - l8 - 3ln$$

$$\begin{aligned} & - \frac{mm}{16nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 16^3 n^4} - \frac{m^6}{3 \cdot 16^5 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 16^7 n^8} - \&c. \\ & - \frac{mm}{36nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 36^3 n^4} - \frac{m^6}{3 \cdot 36^5 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 36^7 n^8} - \&c. \\ & - \frac{mm}{64nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 64^3 n^4} - \frac{m^6}{3 \cdot 64^5 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 64^7 n^8} - \&c. \\ & \&c. \end{aligned}$$

$$l \cos. \frac{m\pi}{2n} = l(n - m) + l(n + m) - 2ln$$

$$\begin{aligned} & - \frac{mm}{9nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 9^3 n^4} - \frac{m^6}{3 \cdot 9^5 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 9^7 n^8} - \&c. \\ & - \frac{mm}{25nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 25^3 n^4} - \frac{m^6}{3 \cdot 25^5 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 25^7 n^8} - \&c. \\ & - \frac{mm}{49nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 49^3 n^4} - \frac{m^6}{3 \cdot 49^5 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 49^7 n^8} - \&c. \\ & \&c. \end{aligned}$$

192. Ces séries contiennent toutes les puissances paires de  $\frac{m}{n}$  multipliées par des séries, dont nous avons déjà assigné les sommes. Ainsi on aura . . . . .

T ij

$$\begin{aligned}
 l \int n. \frac{m\pi}{2n} &= lm + l(2n - m) + l(2n + m) - 3ln + l\pi - l8 \\
 &- \frac{mm}{nn} \left( \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^3} + \&c. \right) \\
 &- \frac{m^4}{2n^4} \left( \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \&c. \right) \\
 &- \frac{m^6}{3n^6} \left( \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{12^6} + \&c. \right) \\
 &- \frac{m^8}{4n^8} \left( \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{12^8} + \&c. \right) \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l \text{ cof. } \frac{m\pi}{2n} &= l(n - m) + l(n + m) - 2ln \\
 &- \frac{mm}{nn} \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c. \right) \\
 &- \frac{m^4}{2n^4} \left( \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c. \right) \\
 &- \frac{m^6}{3n^6} \left( \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \&c. \right) \\
 &- \frac{m^8}{4n^8} \left( \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \&c. \right) \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

On vient de donner (190) les sommes des dernières séries ; (17) on pourroit en deduire les premieres ; mais pour en faciliter l'usage, j'ajouterai pareillement ici leurs sommes.

193. Soient donc pour abrégé, . . . . .

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \&c. \\
 e &= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \&c. \\
 \gamma &= \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \&c. \\
 d &= \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \&c. \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

Les sommes approchées au moyen des décimales seront :

- $\alpha = 0, 41123351671205660911810$
- $\epsilon = 0, 06764520210694613696975$
- $\gamma = 0, 01589598534350701780804$
- $\delta = 0, 00392217717264822007570$
- $\epsilon = 0, 00097753376477325984898$
- $\zeta = 0, 00024420070472492872274$
- $\eta = 0, 00006103889453949332915$
- $\theta = 0, 00001525902225127269977$
- $i = 0, 00000381471182744318008$
- $\kappa = 0, 00000095367522617534053$
- $\lambda = 0, 00000023841863595259154$
- $\mu = 0, 00000005960464832831555$
- $\nu = 0, 00000001490116141589813$
- $\xi = 0, 00000000372529031233986$
- $\sigma = 0, 00000000093132257548284$
- $\pi = 0, 00000000023283064370807$
- $\rho = 0, 00000000005820766091685$
- $\tau = 0, 00000000001455191522858$
- $\upsilon = 0, 0000000000090949470177$
- $\phi = 0, 00000000000022737367544$
- $\chi = 0, 00000000000005684341886$
- $\psi = 0, 00000000000001421085471$
- $\omega = 0, 00000000000000355271367$

Les autres sommes décroissent en raison quadruple.

194. On aura donc à l'aide de ces valeurs, . . . .

$$l \sin. \frac{m\pi}{2n} = lm + l(2n - m) + l(2n - m) - 3ln + l\pi - l8$$

$$- \frac{mm}{nn} \left( a - \frac{1}{2^2} \right) - \frac{m^3}{2n^2} \left( c - \frac{1}{2^2} \right) - \frac{m^5}{3n^2} \left( \gamma - \frac{1}{2^6} \right) - \&c.$$

$$l \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$$

$$- \frac{m^2}{2n^2} (A-1) - \frac{m^4}{2n^4} (B-1) - \frac{m^6}{3n^6} (C-1) - \&c.$$

Ainsi, les logarithmes  $l\pi$  &  $l8$  étant donnés, on aura le logarithme hyperbolique du sinus de l'angle  $\frac{m}{n} 90^\circ =$   
 $lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln \dots$

- 0, 93471165583043575410
- $\frac{m^2}{n^2}$  • 0, 16123351671205660911
- $\frac{m^4}{n^4}$  • 0, 00257260105347306848
- $\frac{m^6}{n^6}$  • 0, 00009032844783567260
- $\frac{m^8}{n^8}$  • 0, 00000398179316205501
- $\frac{m^{10}}{n^{10}}$  • 0, 00000019425295465196
- $\frac{m^{12}}{n^{12}}$  • 0, 00000001001328748812
- $\frac{m^{14}}{n^{14}}$  • 0, 00000000053404135618
- $\frac{m^{16}}{n^{16}}$  • 0, 00000000002914859658
- $\frac{m^{18}}{n^{18}}$  • 0, 00000000000161797979
- $\frac{m^{20}}{n^{20}}$  • 0, 00000000000009097690
- $\frac{m^{22}}{n^{22}}$  • 0, 00000000000000516827
- $\frac{m^{24}}{n^{24}}$  • 0, 00000000000000029607
- $\frac{m^{26}}{n^{26}}$  • 0, 00000000000000001708
- $\frac{m^{28}}{n^{28}}$  • 0, 0000000000000000099
- $\frac{m^{30}}{n^{30}}$  • 0, 0000000000000000005

Et le logarithme hyperbolique du cosinus de l'angle  $\frac{m}{n} 90^\circ =$

$$l(n - m) + l(n + m) - 2ln$$

$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0,$	23370055013616982735
$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0,$	00733901580209602727
$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,$	00048235888031404063
$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,$	00003879475632402982
$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,$	00000340827260896510
$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,$	00000031430809718659
$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,$	00000002989150274450
$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,$	00000000290464467239
$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,$	00000000028682639518
$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,$	00000000002868076974
$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,$	0000000000028697956
$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,$	00000000000029506024
$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,$	00000000000003016249
$-\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,$	00000000000000312232
$-\frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,$	00000000000000032379
$-\frac{m^{32}}{n^{32}} \cdot 0,$	00000000000000003373
$-\frac{m^{34}}{n^{34}} \cdot 0,$	00000000000000000352
$-\frac{m^{36}}{n^{36}} \cdot 0,$	00000000000000000037
$-\frac{m^{38}}{n^{38}} \cdot 0,$	00000000000000000004

195. En multipliant ces logarithmes hyperboliques des

sinus & des cosinus, par 0,4342944819 &c, on aura leurs logarithmes ordinaires rapportés au rayon = 1. Mais comme dans les tables le logarithme du sinus total est supposé ordinairement = 10, pour avoir les logarithmes tabulaires des sinus & des cosinus, il faut, après la multiplication, ajouter 10.

Ainsi le logarithme tabulaire du sinus de l'angle  $\frac{m}{n} 90^\circ$  fera =

$$l m \div l(2n - m) \div l(2n + m) - 3 ln$$

$$\div 9, 594059885702190$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0, 070022826605901$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0, 001117266441661$$

$$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0, 000039229146453$$

$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0, 000001729270798$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0, 000000084362986$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0, 000000004348715$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0, 000000000231931$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0, 000000000012659$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0, 000000000000702$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0, 000000000000039$$

Et le logarithme tabulaire du cosinus de l'angle  $\frac{m}{n} 90^\circ$  =

$$l(n - m) \div l(n + m) - 2 ln$$

$$\div 10, 000000000000000$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0, 101494859341892$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0, 003187294065451$$



$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0, 000209485800017$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0, 000016848348597$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0, 000001480193986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0, 000000136502272$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0, 000000012981715$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0, 000000001261471$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0, 000000000124567$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0, 00000000012456$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0, 00000000001258$$

$$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0, 00000000000128$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0, 00000000000013$$

196. On peut donc, moyennant ces formules, calculer les logarithmes, soit hyperboliques, soit tabulaires des sinus & des cosinus de tous les angles, sans connoître les sinus & les cosinus mêmes. Or la connoissance des logarithmes des sinus & des cosinus donnera par la soustraction seule ceux des tangentes & des cotangentes, des sécantes & des cosécantes; ainsi, on n'aura point besoin pour ces dernières de formules particulières. Au reste, il ne faut pas perdre de vue qu'on doit prendre les logarithmes hyperboliques des nombres  $m$ ,  $n$ ,  $n - m$ ,  $n + m$ , &c, lorsqu'on cherche les logarithmes hyperboliques des sinus & des cosinus, & les logarithmes ordinaires des mêmes nombres, lorsqu'il s'agit de trouver ceux-ci au moyen des dernières formules. De plus  $m : n$  désigne le rapport de l'angle proposé à l'angle droit; ainsi, puisque les sinus des angles plus grands qu'un

demi-droit sont égaux aux cosinus d'angles moindres, & réciproquement; il s'ensuit que la fraction  $\frac{m}{n}$  ne devra jamais être plus grande que  $\frac{1}{2}$ , & que par conséquent ces termes deviendront beaucoup plus convergents, de sorte qu'il suffira pour notre objet d'en prendre la moitié.

197. Donnons, avant de finir, une manière de trouver les tangentes & les sécantes, plus commode que celle que nous avons proposée dans le Chapitre précédent. Car, quoique les tangentes & les sécantes se déterminent par les sinus & les cosinus; cependant cette détermination qui se fait par la division devient trop pénible pour de si grands nombres. Nous avons déjà donné, à la vérité (art. 136) les formules des tangentes & des cotangentes; mais nous n'avons pu en donner alors la démonstration que nous avons réservée pour ce Chapitre.

198. Tirons donc d'abord de l'art. 181 l'expression de la tangente de l'angle  $\frac{m}{2n}\pi$ . Puisque  $\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \dots = \frac{\pi}{4mn} \cdot \text{tang.} \frac{m}{2n}\pi$ , on aura  $\text{tang.} \frac{m}{2n}\pi = \frac{4mn}{\pi} \left( \frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \dots \right)$ . Ensuite, comme  $\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \dots = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn} \cdot \text{cot.} \frac{m}{2n}\pi$ , si, au lieu de  $n$ , nous écrivons  $2n$ , nous trouverons  $\text{cot.} \frac{m}{2n}\pi = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi} \left( \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{16nn-mm} + \frac{1}{36nn-mm} + \dots \right)$ . Convertissons en séries infinies ces fractions, excepté les premières, dont il est facile de tenir compte, nous aurons

$$\begin{aligned} \text{tang.} \frac{m}{2n}\pi &= \frac{mn}{nn-mm} \cdot \frac{4}{\pi} \\ &+ \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{3^2 n^2} + \frac{m^3}{3^4 n^4} + \frac{m^5}{3^6 n^6} + \dots \right) \\ &+ \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{5^2 n^2} + \frac{m^3}{5^4 n^4} + \frac{m^5}{5^6 n^6} + \dots \right) \\ &+ \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{7^2 n^2} + \frac{m^3}{7^4 n^4} + \frac{m^5}{7^6 n^6} + \dots \right) \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot. \frac{m}{2n} \cdot \pi &= \frac{n}{m} \cdot \frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4nn - mm} \cdot \frac{4}{\pi} \\ &- \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{4^2 n} + \frac{m^3}{4^4 n^3} + \frac{m^5}{4^6 n^5} + \dots \right) \\ &- \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{6^2 n} + \frac{m^3}{6^4 n^3} + \frac{m^5}{6^6 n^5} + \dots \right) \\ &- \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{8^2 n} + \frac{m^3}{8^4 n^3} + \frac{m^5}{8^6 n^5} + \dots \right) \\ &\dots \end{aligned}$$

198. Or la valeur connue de  $\pi$  donne  $\frac{1}{\pi} = 0, 318309886183790671537767926745028724$ ; viennent ensuite les mêmes séries, que nous avons désignées ci-dessus par les lettres  $A, B, C, D, \dots$ , &  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \dots$ .

Cela observé:  $\text{tang. } \frac{m}{2n} \pi = \frac{mn}{nn - mm} \cdot \frac{4}{\pi} + \frac{m}{n} \cdot \frac{4}{\pi} (A - 1)$   
 $+ \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{4}{\pi} (B - 1) + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{4}{\pi} (C - 1) + \frac{m^7}{n^7} \cdot \frac{4}{\pi} (D - 1) \dots$

&  $\text{cotang. } \frac{m}{2n} \pi = \frac{n}{m} \cdot \frac{2}{\pi} - \frac{4mn}{4nn - mm} \cdot \frac{1}{\pi} - \frac{m}{n} \cdot \frac{4}{\pi} \left( \alpha - \frac{1}{2^2} \right)$   
 $- \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{4}{\pi} \left( \epsilon - \frac{1}{2^4} \right) - \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{4}{\pi} \left( \gamma - \frac{1}{2^6} \right) - \dots$

C'est de ces formules que dérivent les expressions que nous avons données (art. 135) pour la tangente & pour la cotangente. Nous avons fait voir aussi (art. 137) comment les tangentes & les cotangentes une fois trouvées, on en pouvoit déduire seulement par l'addition & par la soustraction les sécantes & les cosécantes. On pourroit donc par le moyen de ces règles calculer une table générale des sinus, des tangentes, des sécantes & de leurs logarithmes beaucoup plus facilement que ne l'ont fait les premiers calculateurs.

## CHAPITRE XII.

*Du développement réel des Fonctions fractionnaires.*

199. Nous avons déjà donné dans le Chapitre second la méthode de décomposer une fonction fractionnaire quelconque, en autant de parties que le dénominateur renferme de facteurs simples; car ceux-ci forment les dénominateurs de ces fractions partielles; d'où il suit évidemment que, si le dénominateur contient quelques facteurs simples imaginaires, les fractions qui en résulteront seront aussi imaginaires: or, dans ce cas, il y aura peu d'avantage à décomposer la fraction réelle en imaginaires. Mais, comme on a fait voir que toute fonction entière, telle que le dénominateur d'une fraction quelconque, peut toujours, quelque soit le nombre de facteurs imaginaires qu'elle renferme, se décomposer en facteurs réels doubles ou de deux dimensions, on pourra par-là éviter les quantités imaginaires dans la décomposition des fractions, en prenant pour les dénominateurs des fractions partielles, non pas les facteurs simples du dénominateur principal, mais les facteurs réels doubles.

200. Soit donc proposée la fonction fractionnaire  $\frac{M}{N}$ , de laquelle on extraira, suivant la méthode donnée auparavant, autant de fractions simples, que le dénominateur  $N$  renferme de facteurs simples réels; mais, au lieu de facteurs imaginaires, prenons cette expression  $pp - 2pqz \cdot \cos. \phi + qqz^2$ , pour facteur de  $N$ , & comme il faut avoir ici le numérateur & le dénominateur sous une forme développée, soit proposée la fraction

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.}{(pp - 2pqz \cdot \cos. \phi + qqz^2)(a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c)},$$

& supposons la fraction partielle que fournit le dénominateur

$$pp - 2pqz \cos. \varphi + qqz^2 \text{ représentée par } \frac{A + Az}{pp - 2pqz \cos. \varphi + qqz^2}.$$

En effet, la variable  $z$ , ayant deux dimensions dans le dénominateur, pourra bien en avoir une au numérateur, mais non davantage; autrement la quantité renfermeroit une fonction entiere, qu'il faudroit extraire séparément.

201. Soit, pour abrégér, le numérateur  $A + Bz + Cz^2 + \&c. = M$  & l'autre facteur du dénominateur  $a + bz + cz^2 + \&c. = Z$ ; soit supposée la 2<sup>e</sup> partie, qui résulte du facteur  $Z$  du dénominateur,  $= \frac{Y}{Z}$ ; on aura  $Y = \frac{M - AZ - AZz}{pp - 2pqz \cos. \varphi + qqz^2}$ ; expression qui doit être une fonction entiere de  $z$ ; par conséquent il est nécessaire que  $M - AZ - AZz$  soit divisible par  $pp - 2pqz \cos. \varphi + qqz^2$ . Ainsi la quantité  $M - AZ - AZz$  s'évanouira, si l'on fait  $pp - 2pqz \cos. \varphi + qqz^2 = 0$ , c'est a-dire, si on fait  $z = \frac{p}{q} (\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi)$ , ou  $z = \frac{p}{q} (\cos. \varphi - \sqrt{-1} \sin. \varphi)$ ; soit  $\frac{p}{q} = f$ , alors  $z^n = f^n (\cos. n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin. n\varphi)$ . Cette double substitution de la valeur de  $z$ , donnera deux équations, au moyen desquelles on pourra déterminer les deux inconnues constantes  $A$  &  $\Lambda$ .

202. Ayant donc fait cette substitution, l'équation  $M = AZ + \Lambda Zz$  étant développée donnera ces deux-ci: . . .

$$\left. \begin{aligned} A + Bf \cos. \varphi + Cff \cos. 2\varphi + Df^3 \cos. 3\varphi + \&c. \\ \pm (Bf \sin. \varphi + Cff \sin. 2\varphi + Df^3 \sin. 3\varphi + \&c.) \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &A (a + b \cos. \varphi + \gamma ff \cos. 2\varphi + \delta f^3 \cos. 3\varphi + \&c.) \\ &\pm A (b \sin. \varphi + \gamma ff \sin. 2\varphi + \delta f^3 \sin. 3\varphi + \&c.) \sqrt{-1}. \\ &+ \Lambda (a f \cos. \varphi + b ff \cos. 2\varphi + \gamma f^3 \cos. 3\varphi + \&c.) \\ &\pm \Lambda (a f \sin. \varphi + b ff \sin. 2\varphi + \gamma f^3 \sin. 3\varphi + \&c.) \sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Soit pour abrégé le calcul,

$$\begin{aligned} A + Bf \operatorname{cos} \varphi + Cff \operatorname{cos} 2\varphi + Df^3 \operatorname{cos} 3\varphi + \&c. &= P \\ Bf \operatorname{sin} \varphi + Cff \operatorname{sin} 2\varphi + Df^3 \operatorname{sin} 3\varphi + \&c. &= P \\ \alpha + \epsilon f \operatorname{cos} \varphi + \gamma ff \operatorname{cos} 2\varphi + \delta f^3 \operatorname{cos} 3\varphi + \&c. &= Q \\ \epsilon f \operatorname{sin} \varphi + \gamma ff \operatorname{sin} 2\varphi + \delta f^3 \operatorname{sin} 3\varphi + \&c. &= Q \\ \sigma f \operatorname{cos} \varphi + \epsilon ff \operatorname{cos} 2\varphi + \gamma f^3 \operatorname{cos} 3\varphi + \&c. &= R \\ \sigma f \operatorname{sin} \varphi + \epsilon ff \operatorname{sin} 2\varphi + \gamma f^3 \operatorname{sin} 3\varphi + \&c. &= R \end{aligned}$$

cela posé,

$$P \pm P\sqrt{-1} = A Q \pm A Q\sqrt{-1} + A R \pm A R\sqrt{-1}$$

203. A cause du double signe, on aura les deux équations

$$P = A Q + A R$$

$$P = A Q - A R$$

d'où l'on tirera les valeurs des inconnues A & A,  $\therefore$  ?

$$A = \frac{PR - PR}{QR - QR} \quad \& \quad A = \frac{PQ - PQ}{QR - QR}$$

Étant donc proposée la fraction  $\frac{M}{(pp - 2pqz \operatorname{cos} \varphi + qqz^2)Z}$ , on trouvera, en observant la règle qui suit, la fraction partielle  $\frac{A + Az}{pp - 2pqz \operatorname{cos} \varphi + qqz^2}$  qui en résulte. Faisons  $f = \frac{p}{q}$ , & après avoir développé chacun des termes, supposons

$$\begin{aligned} \text{qu'en faisant } z^n &= f^n \operatorname{cos} n\varphi, & M & \text{ devienne } = P \\ \dots\dots\dots z^n &= f^n \operatorname{sin} n\varphi, & M & = P \\ \dots\dots\dots z^n &= f^n \operatorname{cos} n\varphi, & Z & = Q \\ \dots\dots\dots z^n &= f^n \operatorname{sin} n\varphi, & Z & = Q \\ \dots\dots\dots z^n &= f^n \operatorname{cos} n\varphi, & zZ & = R \\ \dots\dots\dots z^n &= f^n \operatorname{sin} n\varphi, & zZ & = R \end{aligned}$$

Ayant trouvé de cette manière les valeurs P, Q, R, p, q, r,

$$\text{on aura } A = \frac{PR - PR}{QR - QR} \quad \& \quad A = \frac{PQ - PQ}{QR - QR}$$

E X E M P L E I.

Prenons la fonction fractionnaire  $\frac{\sqrt{-1}}{(1-\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})}$ , & cherchons la partie qui provient du facteur  $1-\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}$  du dénominateur, laquelle nous représentons par  $\frac{A+\Lambda\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$ . Ce facteur comparé avec la formule générale  $pp-2pq\sqrt{-1}\cos\varphi+qq\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ , donne  $p=1, q=1$ , &  $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ ; d'où  $\varphi=60^\circ=\frac{\pi}{3}$ ; ainsi, puisque  $M=\sqrt{-1}\sqrt{-1}, Z=1+\sqrt{-1}$  &  $f=1$ , nous aurons

$$P = \cos\frac{\pi}{3}\pi = -\frac{1}{2}; P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q = 1 + \cos\frac{\pi}{3}\pi = \frac{3}{2}; Q = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = 1; R = 0.$$

Donc  $A = -1$ , &  $\Lambda = 0$ , & partant la fraction cherchée  $= \frac{-1}{1-\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$ ; & le complément de cette fraction sera  $\frac{1+\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$ , qu'on peut de même réduire, par la raison que le dénominateur  $1+\sqrt{-1}$  a pour facteurs  $1+\sqrt{-1}\sqrt{2}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}$  &  $1-\sqrt{-1}\sqrt{2}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ ; alors  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , & dans le premier cas  $f = -1$ , & dans le second  $f = +1$ .

E X E M P L E II.

Supposons donc qu'il s'agisse de décomposer la fraction  $\frac{1+\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}}{(1+\sqrt{-1}\sqrt{2}+\sqrt{-1}\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1}\sqrt{2}+\sqrt{-1}\sqrt{-1})}$ ; on aura  $M=1+\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ ; & pour le premier facteur,  $f=-1$ ;  $\varphi=\frac{\pi}{4}$ , &  $Z=1-\sqrt{-1}\sqrt{2}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ ; par conséquent . . . . .

$$P = 1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$P = -\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = 1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$Q = +\sqrt{2} \sin. \frac{\pi}{4} + \sin. \frac{2\pi}{4} = 2$$

$$R = -\cos. \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \cos. \frac{2\pi}{4} - \cos. \frac{3\pi}{4} = 0$$

$$R = -\sin. \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin. \frac{2\pi}{4} - \sin. \frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

D'après cela, on trouvera  $QR - QR = -4\sqrt{2}$ ;  $A = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ ,  
 &  $\Lambda = 0$ ; par conséquent le facteur  $1 + \sqrt{2}z + z^2$  du  
 dénominateur donnera la fraction partielle  $\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}z + z^2}$ ;  
 pareillement l'autre facteur donnera celle-ci:  $\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}z + z^2}$ .  
 Ainsi, la fonction proposée d'abord  $\frac{\sqrt{2}z}{(1 - \sqrt{2}z + z^2)(1 + \sqrt{2}z)}$  se résoud  
 en ces fractions  $\frac{-1}{1 - \sqrt{2}z + z^2} + \frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}z + z^2} + \frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}z + z^2}$ .

### EXEMPLE III.

Soit encore donnée à résoudre la fraction  $\frac{1 + 2z + z^2}{(1 - \frac{2}{3}z + z^2)(1 + 2z + 3z^2)}$ ;  
 représentons la fraction qui résultera du facteur  $1 - \frac{2}{3}z + z^2$   
 du dénominateur par  $\frac{A + Az}{1 - \frac{2}{3}z + z^2}$ ; nous aurons  $p = 1$ ,  $q = 1$ ;  
 $\cos. \varphi = \frac{4}{5}$ ; par conséquent  $f = 1$ ;  $M = 1 + 2z + z^2$ ;  $Z =$   
 $1 + 2z + 3z^2$ . Mais comme ici le rapport de l'angle  $\varphi$  à l'angle  
 droit n'est pas déterminé, il faut calculer à part les sinus & les  
 cosinus des angles multiples. Ainsi, à cause de . . . . .

$$\cos. \varphi = \frac{4}{5}; \text{ on aura } \sin. \varphi = \frac{3}{5}.$$

$$\cos. 2\varphi = \frac{7}{25}; \quad \sin. 2\varphi = \frac{24}{25}.$$

$$\cos. 3\varphi = \frac{-44}{125}; \quad \sin. 3\varphi = \frac{117}{125};$$

Par



Par conséquent . . . . .

$$P = 1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$$

$$P = + 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$$

$$Q = 1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{7}{25} = \frac{86}{25}$$

$$Q = + 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{24}{25} = \frac{102}{25}$$

$$R = \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{7}{25} - 3 \cdot \frac{44}{125} = \frac{38}{125}$$

$$R = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{24}{25} + 3 \cdot \frac{117}{125} = \frac{666}{125}$$

& conséquemment  $Q_R - Q R = \frac{53400}{25 \cdot 125} = \frac{2136}{125}$ . Donc

$$A = \frac{1836}{2136} = \frac{153}{178}; \quad A = -\frac{540}{2136} = -\frac{45}{178}.$$

Ainsi la fraction qui proviendra du facteur  $1 - \frac{8}{5}\zeta + \zeta\zeta$  sera  $\frac{9(17-5\zeta):178}{1 - \frac{8}{5}\zeta + \zeta\zeta}$

Cherchons de même la fraction correspondante à l'autre facteur;

nous aurons  $p=1, q=-\sqrt{3}$ , &  $\text{cof. } \phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; donc  $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

$M = 1 + 2\zeta + \zeta\zeta$  &  $Z = 1 - \frac{8}{5}\zeta + \zeta\zeta$ . Or à cause

$$\text{de } \text{cof. } \phi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ sin. } \phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cof. } 2\phi = -\frac{1}{3}, \text{ sin. } 2\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{cof. } 3\phi = -\frac{5}{3\sqrt{3}}, \text{ sin. } 3\phi = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

Conséquemment . . . . .

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. X

$$Q = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{45}$$

$$Q = + \frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$R = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{135}$$

$$R = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

Donc  $QR - QR = -\frac{712\sqrt{2}}{675}$ , & partant . . . . .

$$A = \frac{100}{712} = \frac{25}{178}; \quad A = \frac{540}{712} = \frac{135}{178}$$

Ainsi la fraction proposée  $\frac{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})}$  se décompose  
 (ac) en ces deux-ci:  $\frac{9(17 - 5\sqrt{2}) : 178}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{5(5 + 27\sqrt{2}) : 178}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}$

204. Remarquons qu'on peut conclure des lettres Q & Q les valeurs des lettres R & R. En effet, puisque . . . . .

$$Q = a + \epsilon f \cos. \phi + \gamma f^2 \cos. 2\phi + \delta f^3 \cos. 3\phi + \&c.$$

$$Q = \epsilon f \sin. \phi + \gamma f^2 \sin. 2\phi + \delta f^3 \sin. 3\phi + \&c;$$

on aura . . . . .

$$Q \cos. \phi - Q \sin. \phi = a \cos. \phi + \epsilon f \cos. 2\phi + \gamma f^2 \cos. 3\phi + \&c.$$

& par conséquent  $R = f(Q \cos. \phi - Q \sin. \phi)$ ;

on aura ensuite . . . . .

$$Q \sin. \phi + Q \cos. \phi = a \sin. \phi + \epsilon f \sin. 2\phi + \gamma f f \sin. 3\phi + \&c.$$

donc  $R = f(Q \sin. \phi + Q \cos. \phi)$

par conséquent . . . . .

$$QR - QR = (Q + Q) f \sin. \phi$$

$$PR - PR = (PQ + PQ) f \sin. \phi + (PQ - PQ) f \cos. \phi$$

donc . . . . .

$$A = \frac{PQ + PQ}{Q + Q} + \frac{PQ - PQ}{Q + Q} \cos. \phi$$

$$A = \frac{PQ + PQ}{(Q + Q) f \sin. \phi}$$

Ainsi le facteur  $pp - 2pqz \operatorname{cos} \phi + qqz^2$  du dénominateur donnera la fraction partielle

$$\frac{(PQ + pQ) f \sin \phi + (PQ - pQ) (f \operatorname{cos} \phi - z)}{(pp - 2pqz \operatorname{cos} \phi + qqz^2)(QQ + QQ) f \sin \phi}$$

ou, à cause de  $f = \frac{p}{q}$ , celle-ci :

$$\frac{(PQ + pQ) f \sin \phi + (PQ - pQ) (f \operatorname{cos} \phi - z)}{(pp - 2pqz \operatorname{cos} \phi + qqz^2)(QQ + QQ) f \sin \phi}$$

205. Cette dernière fraction est donc la fraction partielle que donne le facteur  $pp - 2pqz \operatorname{cos} \phi + qqz^2$  du dénominateur de la fonction proposée  $\frac{M}{(pp - 2pqz \operatorname{cos} \phi + qqz^2)Z}$ , & les lettres P, p, Q & q se trouvent de la manière suivante au moyen des fonctions M & Z :

ayant supposé  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \operatorname{cos} n \phi$ , soit  $M = P$  ;  
&  $Z = Q$  ;

& ayant supposé  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \sin n \phi$ , soit  $M = p$  ;  
&  $Z = q$  ;

Remarquez qu'avant de faire cette substitution il faut développer les fonctions M & Z, afin d'avoir des expressions de la forme suivante :

$$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$$

$$\& Z = \alpha + \epsilon z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \&c.$$

on aura . . . . .

$$P = A + B \frac{p}{q} \operatorname{cos} \phi + C \frac{p^2}{q^2} \operatorname{cos} 2 \phi + D \frac{p^3}{q^3} \operatorname{cos} 3 \phi + \&c.$$

$$p = B \frac{p}{q} \sin \phi + C \frac{p^2}{q^2} \sin 2 \phi + D \frac{p^3}{q^3} \sin 3 \phi + \&c.$$

$$Q = \alpha + \epsilon \frac{p}{q} \operatorname{cos} \phi + \gamma \frac{p^2}{q^2} \operatorname{cos} 2 \phi + \delta \frac{p^3}{q^3} \operatorname{cos} 3 \phi + \&c.$$

$$q = \epsilon \frac{p}{q} \sin \phi + \gamma \frac{p^2}{q^2} \sin 2 \phi + \delta \frac{p^3}{q^3} \sin 3 \phi + \&c.$$

206. On voit au reste par ce qui précède que cette résolution ne peut réussir, si la fonction  $Z$  renferme encore le même facteur  $pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2$ . En effet, après avoir fait, en ce cas, dans l'équation  $M = AZ + AZ^2$  la substitution  $z^n = f^n (\cos. n\phi \pm \sqrt{-1} \sin. n\phi)$ , la quantité  $Z$  s'évanouiroit elle-même, & par conséquent on n'en pourroit rien conclure. Donc, si le dénominateur de la fonction fractionnaire  $\frac{M}{N}$  a pour facteur  $(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^2$  ou une puissance plus élevée, on aura besoin d'une résolution particulière. Soit donc  $N = (pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^2 Z$ ; le facteur  $(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^2$  du dénominateur donnera deux fractions partielles de cette forme; . . .

$$\frac{A + Az}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^2} + \frac{B + Bz}{pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2}$$

dans lesquelles il s'agit de déterminer les lettres constantes  $A, A, B, B$ .

207. Cela posé, . . . . .

$$\frac{M - (A + Az)Z - (B + Bz)Z(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^2}$$

doit être une fonction entière, & par cette raison le numérateur sera divisible par le dénominateur. Il faudra donc que cette expression  $M - AZ - AZ^2$  soit divisible d'abord par  $pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2$ . Ce cas étant le même que le précédent, on déterminera aussi de la même manière les valeurs des lettres  $A$  &  $A$ . C'est pourquoi . . . . .

en faisant  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \cos. n\phi$ , supposons  $M = P$   
 &  $Z = N$

& en faisant  $z^n = \frac{r^n}{q^n} \cdot \sin. n\phi$ , supposons  $M = P$   
 &  $Z = N$ ;

en suivant la règle précédente, il est bien clair que nous aurons

$$A = \frac{PN + PN}{N^2 + N^2} + \frac{PN - PN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi}$$

$$A = \frac{-PN + PN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{q}{p \sin. \phi}$$

208. Ayant donc trouvé de cette manière A & A, la quantité  $\frac{M - (A + A')Z}{pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2}$  deviendra une fonction entière, que j'appelle P; l'expression  $P - BZ - B'Z$  restera encore divisible par  $pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2$ , & comme elle est semblable à la précédente, si . . . . .

en faisant  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \cos. n \phi$ , on suppose  $P = R$

& en faisant  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \sin. n \phi$ , on suppose  $P = R$ ,

$$\text{on aura } B = \frac{RN + RN'}{N^2 + N'^2} + \frac{RN - RN'}{N^2 + N'^2} \cdot \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi}$$

$$B' = \frac{-RN + RN'}{N^2 + N'^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \sin. \phi}$$

209. On est maintenant en état de conclure en général la manière de procéder, lorsque le dénominateur de la fonction proposée  $\frac{M}{N}$  a un facteur tel que  $(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^k$ . En effet, soit  $N = (pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^k Z$ , de sorte qu'on ait à résoudre la fonction fractionnaire.

$$\frac{M}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^k Z}$$

Supposons que le facteur  $(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^k$  du dénominateur fournisse ces fractions partielles:

$$\frac{A + A'z}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^k} + \frac{B + B'z}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^{k-1}}$$

$$+ \frac{C + C'z}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^{k-2}} + \frac{D + D'z}{(pp - 2pqz \cos. \phi + qqz^2)^{k-3}} + \&c.$$

En faisant  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \cos. n \phi$ , soit  $M = M$ ,  
&  $Z = N$ ;

& en faisant  $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \sin. n \phi$ , soit  $M = M$ ,  
&  $Z = N$ ;

nous aurons . . . . .

$$A = \frac{MN + MN'}{N^2 + N'^2} + \frac{MN - MN'}{N^2 + N'^2} \cdot \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi}$$

$$A' = \frac{-MN + MN'}{N^2 + N'^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \sin. \phi}$$

Soit ensuite  $\frac{M - (A + A')Z}{PP - 2Pq\zeta \cdot \text{cof. } \varphi + qq\zeta\zeta} = P;$  &

faisant  $\zeta^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \text{cof. } n \varphi$ , soit  $P = P$ ,

& faisant  $\zeta^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \text{sin. } n \varphi$ , soit  $P = P$ ;

nous obtiendrons

$$B = \frac{PN + PN}{N^2 + N^2} + \frac{PN - PN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{\text{cof. } \varphi}{\text{sin. } \varphi}$$

$$B = \frac{-PN + PN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \text{sin. } \varphi}$$

faisons à présent  $\frac{P - (B + B')Z}{PP - 2Pq\zeta \cdot \text{cof. } \varphi + qq\zeta\zeta} = Q$  &

supposant  $\zeta^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \text{cof. } n \varphi$ , soit  $Q = Q$ ,

& supposant  $\zeta^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \text{sin. } n \varphi$ , soit  $Q = Q$ ,

nous en concluons

$$C = \frac{QN + QN}{N^2 + N^2} + \frac{QN - QN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{\text{cof. } \varphi}{\text{sin. } \varphi}$$

$$C = \frac{-QN + QN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \text{sin. } \varphi}$$

Soit enfin  $\frac{Q - (C + C')Z}{PP - 2Pq\zeta \cdot \text{cof. } \varphi + qq\zeta\zeta} = R$ , &

faisant  $\zeta^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \text{cof. } n \varphi$ , supposons  $R = R$ ,

& faisant  $\zeta^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \text{sin. } n \varphi$ , supposons  $R = R$ ,

nous trouverons

$$D = \frac{RN + RN}{N^2 + N^2} + \frac{RN - RN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{\text{cof. } \varphi}{\text{sin. } \varphi}$$

$$D = \frac{-RN + RN}{N^2 + N^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \text{sin. } \varphi}$$

On continuera de suivre le même procédé, jusqu'à ce qu'on ait déterminé le numérateur de la dernière fraction, dont le dénominateur est  $PP - 2Pq\zeta \cdot \text{cof. } \varphi + qq\zeta\zeta$ .

## E X E M P L E.

Soit donnée la fonction fractionnaire  $\frac{x - x^3}{(1 + x^2)^2 (1 + x)}$ ,  
& concevons que les fractions partielles, qui naissent du  
facteur  $(1 + x^2)^2$  soient . . . . .

$$\frac{A + Ax}{(1 + x^2)^2} + \frac{B + Bx}{(1 + x^2)^2} + \frac{C + Cx}{(1 + x^2)^2} + \frac{D + Dx}{1 + x}.$$

En comparant, on trouvera  $p = 1$ ,  $q = 1$ , *cof.*  $\phi = 0$ ,  
& par conséquent  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ; puis  $M = x - x^3$  &  $Z = 1$   
+  $x^2$ . On aura donc  $M = 0$ ;  $M = 2$ ;  $N = 2$ ;  $N = 0$ ,  
& *fin.*  $\phi = 1$  . . . . .

Donc . . . . .

$$A = -\frac{1}{4}, \quad 0 = 0, \quad \& \quad A = 1.$$

& par conséquent  $A + Ax = x$ ; nous aurons . . . .

$$P = \frac{x - x^3 - x - x^3}{1 + x^2} = -x^3, \quad \& \quad P = 0, \quad P = 1: \text{ ce qui donne}$$

$$B = 0, \quad \& \quad B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } B + Bx = \frac{1}{2}x, \quad \& \quad Q = \frac{-x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3}{1 + x^2} =$$

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3; \text{ d'où } Q = 0, \quad \& \quad Q = 0; \quad \& \quad \text{conséquemment}$$

$$C = 0, \quad \& \quad C = 0.$$

$$\text{Donc } R = \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3}{1 + x^2} = -\frac{1}{2}x; \text{ nous conclurons}$$

de-là que  $R = 0$ ,  $R = -\frac{1}{2}$ ; ce qui donne enfin

$$D = 0, \quad \& \quad D = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi les fractions cherchées sont . . . . .

$$\frac{x}{(1 + x^2)^2} + \frac{x}{2(1 + x^2)^2} - \frac{x}{4(1 + x^2)^2}. \text{ Quant au numérateur}$$

$$\text{de la fraction restante, il sera } S = \frac{R - (D + Dx)Z}{1 + x^2} = -\frac{1}{4}x$$

$$+ \frac{1}{4}x^3, \quad \& \quad \text{la fraction sera } = \frac{-x + x^3}{4(1 + x^2)}.$$

210. Cette méthode donne en même-temps la fraction  
du complément, qui, ajoutée à celles qui ont été trouvées

auparavant, produit la fraction proposée même. En effet, lorsque pour la fraction  $\frac{M}{(pp - 2pqz \cos \phi + qqz^2)^k Z}$ , on aura trouvé toutes les fractions partielles, qui proviennent du facteur  $(pp - 2pqz \cos \phi + qqz^2)^k$ , en calculant les valeurs des fonctions  $P, Q, R, S, T$ ; si l'on continue la série de ces lettres, celle qui suivra la dernière dont on aura eu besoin pour trouver les numérateurs, sera le numérateur de la fraction restante, qui a  $Z$  pour dénominateur. Par exemple, si  $k = 1$ , la fraction restante sera  $\frac{P}{Z}$ ; si  $k = 2$ , elle sera  $\frac{Q}{Z}$ ; si  $k = 3$ , elle sera  $\frac{R}{Z}$ ; ainsi de suite; & lorsqu'on aura déterminé la fraction restante, qui a  $Z$  pour dénominateur, on pourra la décomposer suivant les règles que nous venons d'expliquer.

## CHAPITRE XIII.

### *Des Séries récurrentes.*

211. Je rapporte ici à cette espèce de série que MOIVRE appelle *Récurrentes*, toutes les séries qui proviennent du développement d'une fonction fractionnaire quelconque par le moyen de la division. Car nous avons déjà fait voir que ces séries étoient tellement formées, que chaque terme se déterminoit par quelques-uns des termes précédents suivant une certaine loi, qui dépend du dénominateur de la fonction fractionnaire. Mais, comme je viens d'enseigner à convertir une fonction fractionnaire quelconque en d'autres plus simples, la série récurrente pourra aussi être décomposée en d'autres plus simples. Il est donc question dans ce Chapitre de décomposer en séries récurrentes plus simples les séries récurrentes d'un degré quelconque.



212. Soit proposée la fraction suivante :

$$\frac{a + b\zeta + c\zeta\zeta + d\zeta^3 + \&c.}{1 - a\zeta - c\zeta\zeta - d\zeta^3 - \&c.}$$

qui se change par la division en cette série récurrente

$$A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + E\zeta^4 + F\zeta^5 + \&c.$$

dont nous avons appris à déterminer les coefficients & la loi qu'ils suivoient. Si cette fonction fractionnaire est décomposée en ses fractions simples, & que chacune soit convertie en une série récurrente, il est évident que la somme de toutes ces séries, qui naissent des fractions partielles, doit être égale à la série récurrente.

$$A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + E\zeta^4 + F\zeta^5 + \&c.$$

Les fractions partielles que nous avons appris à trouver, donneront donc des séries partielles, dont il sera aisé, à cause de leur simplicité, de connoître la nature; or la somme de toutes ces séries partielles produira la série récurrente proposée; par conséquent la nature de cette dernière sera par-là mieux déterminée.

213. Soient les séries récurrentes, qui naissent de chacune des fractions partielles.

$$a + b\zeta + c\zeta\zeta + d\zeta^3 + e\zeta^4 + \&c.$$

$$a' + b'\zeta + c'\zeta\zeta + d'\zeta^3 + e'\zeta^4 + \&c.$$

$$a'' + b''\zeta + c''\zeta\zeta + d''\zeta^3 + e''\zeta^4 + \&c.$$

$$a''' + b'''\zeta + c'''\zeta\zeta + d'''\zeta^3 + e'''\zeta^4 + \&c.$$

&c.

Comme ces séries prises ensemble doivent être égales à celle-ci :

$$A + B\zeta + C\zeta\zeta + D\zeta^3 + E\zeta^4 + \&c.$$

il s'ensuit nécessairement que

$$A = a + a' + a'' + a''' + \&c.$$

$$B = b + b' + b'' + b''' + \&c.$$

$$C = c + c' + c'' + c''' + \&c.$$

$$D = d + d' + d'' + d''' + \&c.$$

&c.

Donc, si on peut déterminer pour chacune des séries, que

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I.

Y

donnent les fractions partielles, les coefficients de la puissance  $\zeta^n$ , leur somme donnera le coefficient de la puissance  $\zeta^n$  dans la série récurrente  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c.$

214. On pourroit ici former le doute, si, dans le cas où deux séries sont égales entr'elles, lors, par exemple, que  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c. = A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c.$ , il s'ensuit nécessairement que les coefficients des puissances semblables soient égaux entr'eux, ou que  $A = A$ ;  $B = B$ ;  $C = C$ ;  $D = D$ ; &c. Mais ce doute disparaîtra bientôt, si on fait attention que cette égalité doit avoir lieu, quelque soit la valeur de la variable  $\zeta$ . Soit donc  $\zeta = 0$ ; alors il est clair que  $A = A$ . Retranchant donc de part & d'autre ces termes égaux, & divisant l'équation restante par  $\zeta$ , on aura  $B + C\zeta + D\zeta^2 + \&c. = B + C\zeta + D\zeta^2 + \&c.$ ; d'où  $B = B$ , on fera voir pareillement que  $C = C$ ,  $D = D$ , ainsi de suite à l'infini.

215. Considérons donc les séries qui proviennent des fractions partielles résultantes de la décomposition d'une fraction quelconque: il est d'abord évident que la fraction  $\frac{A}{1-p\zeta}$  donne la série  $A + Ap\zeta + Ap^2\zeta^2 + Ap^3\zeta^3 + \&c.$  dont le terme général est  $A p^n \zeta^n$ ; car on a coutume d'appeller cette expression *Terme général*, par la raison qu'en mettant successivement tous les nombres à la place de  $n$ , on a tous les termes de la série. Ensuite la fraction  $\frac{A}{(1-p\zeta)^2}$  donne la série  $A + 2Ap\zeta + 3Ap^2\zeta^2 + 4Ap^3\zeta^3 + \&c.$  dont le terme général est  $(n+1)Ap^n\zeta^n$ . Et la fraction  $\frac{A}{(1-p\zeta)^3}$  donnera la série  $A + 3Ap\zeta + 6Ap^2\zeta^2 + 10Ap^3\zeta^3 + \&c.$  dont le terme général est  $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} Ap^n \zeta^n$ . En général la fraction  $\frac{A}{(1-p\zeta)^k}$  fournit cette série  $A + kAp\zeta + \frac{k(k+1)}{1.2} Ap^2\zeta^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3} Ap^3\zeta^3 + \&c.$  dont le terme

général est  $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} A p^n z^n$ . La progression de la série fait voir aussi que ce même terme =  $\frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} A p^n z^n$ . Or cette expression est égale à la première, comme il est facile de s'en convaincre en multipliant en croix. En effet, on aura  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot (n+1) \dots (n+k-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1) k \dots (k+n-1)$  équation identique.

216. Ainsi toutes les fois que dans la résolution des fonctions fractionnaires, on arrivera à des fractions partielles de la forme  $\frac{A}{(1-pz)^i}$ , on pourra assigner le terme général de la série récurrente  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots$ , qui résulte de la décomposition de la fonction; puisqu'il sera la somme des termes généraux des séries, qui proviennent des fractions partielles.

E X E M P L E I.

Trouver le terme général de la série récurrente, qui naît de la fraction  $\frac{1-z}{1-z-2zz}$ .

Cette série sera  $1 + 0z + 2zz + 2z^3 + 6z^4 + 10z^5 + 22z^6 + 42z^7 + 86z^8 + \dots$ . Pour trouver le coefficient de la puissance générale  $z^n$ , décomposons la fraction  $\frac{1-z}{1-z-2zz}$  en celles-ci:  $\frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ , & nous aurons pour le terme général cherché  $[\frac{2}{3}(-1)^n - \frac{1}{3} \cdot 2^n] z^n = \frac{2^n - 2}{3} z^n$ , où le signe + a lieu, si  $n$  est un nombre pair, & le signe -, si  $n$  est un nombre impair.

E X E M P L E II.

Trouver le terme général de la série récurrente, qui résulte

Y ij

de la fraction  $\frac{1-z}{1-5z+6z^2}$ ; ou de cette série  $1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5 + \dots$ .

A cause du dénominateur  $(1-2z)(1-3z)$  la fraction se décompose en celles-ci  $\frac{-1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z}$ ; d'où résulte le terme général  $2 \cdot 3^n z^n - 2^n z^n = (2 \cdot 3^n - 2^n) z^n$ .

### EXEMPLE III.

Trouver le terme général de cette série  $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + 29z^6 + 47z^7 + \dots$ , que donne le développement de la fraction  $\frac{1+2z}{1-z-2z^2}$ .

A cause des facteurs du dénominateur  $1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z$  &  $1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}z$ , on aura les fractions partielles  $\frac{2}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z} +$

$\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z}$ , lesquelles donnent le terme général  $=$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^{n+1}.$$

### EXEMPLE IV.

Trouver le terme général de la série  $a + (2a+b)z + (a^2a+ab+ca)z^2 + (a^3a+a^2b+2ca+cb)z^3 + \dots$  résultante de la fraction  $\frac{a+bz}{1-az-6z^2}$ .

Par la décomposition des facteurs on trouvera ces deux fractions

$$\frac{[a(a+\sqrt{aa+4c})+2b]:2\sqrt{aa+4c}}{1-\left[\frac{a+\sqrt{aa+4c}}{2}\right]z} +$$

$$\frac{[a(\sqrt{aa+4c}-a)-2b]:2\sqrt{aa+4c}}{1-\left[\frac{a-\sqrt{aa+4c}}{2}\right]z} \text{ \& par conséquent}$$

le terme général sera  $\frac{a[\sqrt{(aa+4\phi)}+a]+2b}{2\sqrt{(aa+4\phi)}}\left(\frac{a+\sqrt{(aa+4\phi)}}{2}\right)^n \zeta^n$   
 $+\frac{a[\sqrt{(aa+4\phi)}-a]-2b}{2\sqrt{(aa+4\phi)}}\left(\frac{a-\sqrt{(aa+4\phi)}}{2}\right)^n \zeta^n$ . On peut donc  
 trouver d'une manière expéditive les termes généraux de  
 toutes les séries récurrentes, dont chaque terme est déter-  
 miné par les deux qui le précédent.

E X E M P L E V.

Trouver le terme général de la série  $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+\dots$ , qui résulte de la fraction  
 $\frac{1}{1-z-z^2+z^3} = \frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$ .

Quoique la loi de la progression paroisse au premier abord  
 assez manifeste pour n'avoir pas besoin d'éclaircissement,  
 cependant au moyen des fractions résultantes de la décom-  
 position, savoir  $\frac{\frac{1}{2}}{(1-\zeta)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\zeta} + \frac{\frac{1}{4}}{1+\zeta}$ , on trouvera pour  
 terme général:  $\frac{1}{2}(n+1)\zeta^n + \frac{1}{4}\zeta^n + \frac{1}{4}(-1)^n\zeta^n = \frac{2n+3\pm 1}{4}\zeta^n$ .  
 Le signe supérieur aura lieu, si  $n$  est un nombre pair, &  
 l'inférieur, si  $n$  est un nombre impair.

217. On peut obtenir de cette manière les termes géné-  
 raux de toutes les séries récurrentes, parce que toutes les  
 fractions peuvent se réduire en fractions partielles de cette  
 forme; mais, si on veut éviter les expressions imaginaires, on  
 arrivera souvent à des fractions partielles de la forme suivante:

$$\frac{A+Bp\zeta}{1-2p\zeta\cos\phi+pp\zeta^2}; \frac{A+Bp\zeta}{(1-2p\zeta\cos\phi+pp\zeta^2)^2}; \&c. \frac{A+Bp\zeta}{(1-2p\zeta\cos\phi+pp\zeta^2)^3}$$

Cherchons la forme des séries, qui naissent de leur dévelop-  
 pement; d'abord à cause de  $\cos. n\phi = 2\cos.\phi.\cos.(n-1)\phi$

$- \cos.(n-2)\phi$ , la fraction  $\frac{A}{1-2p\zeta\cos\phi+pp\zeta^2}$  étant déve-

$$A + 2Ap\zeta\cos.\phi + 2App\zeta^2\cos.\phi + 2Ap^2\zeta^3\cos.\phi + 2Ap^3\zeta^4\cos.\phi + \dots$$

$$+ Ap\zeta\zeta + \pm 2Ap^2\zeta^2\cos.\phi + 2Ap^3\zeta^3\cos.\phi + \dots$$

$$\pm Ap^4\zeta^4.\&c.$$

(bb) Série dont le terme général n'est pas si aisé à reconnoître.

218. Pour arriver au but, considérons les deux séries :

$$Pp^1 \zeta^1 \sin. \varphi + Pp^2 \zeta^2 \sin. 2\varphi + Pp^3 \zeta^3 \sin. 3\varphi + Pp^4 \zeta^4 \sin. 4\varphi + \&c.$$

$$Q + Qp^2 \zeta^2 \cos. \varphi + Qp^4 \zeta^4 \cos. 2\varphi + Qp^6 \zeta^6 \cos. 3\varphi + Qp^8 \zeta^8 \cos. 4\varphi + \&c.$$

lesquelles proviennent routes deux du développement d'une fraction, dont le dénominateur est  $1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2$ .

En effet, la premiere résulte de la fraction  $\frac{Pp^1 \zeta^1 \sin. \varphi}{1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2}$ ,

& la seconde de celle-ci:  $\frac{Q - Qp\zeta \cos. \varphi}{1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2}$ . Ajoutons ces deux

séries & leur somme  $\frac{Q + Pp^1 \zeta^1 \sin. \varphi - Qp\zeta \cos. \varphi}{1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2}$  donnera une série

dont le terme général sera  $= (P \sin. n\varphi + Q \cos. n\varphi) p^n \zeta^n$ .

Égalons cette fraction à la proposée  $\frac{A + Bp\zeta}{1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2}$ , nous

aurons  $Q = A$ , &  $P = A \cot. \varphi + B \cos. \varphi$ . Le terme général

de la série résultante de la fraction  $\frac{A + Bp\zeta}{1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2}$  sera

$$\text{donc} = \frac{A \cos. \varphi \sin. n\varphi + B \sin. n\varphi + A \sin. \varphi \cos. n\varphi}{\sin. \varphi} p^n \zeta^n =$$

$$\frac{A \sin. (n+1)\varphi + B \sin. n\varphi}{\sin. \varphi} p^n \zeta^n$$

219. Pour trouver le terme général, lorsque le dénominateur de la fraction est une puissance, telle que  $(1 - 2p\zeta \cos. \varphi + pp\zeta^2)^k$ , il sera à propos de décomposer cette fraction en deux autres, quoique imaginaires,

$$\frac{a}{[1 - (\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi) p \zeta]^k}$$

$$+ \frac{b}{[1 - (\cos. \varphi - \sqrt{-1} \sin. \varphi) p \zeta]^k}$$

lesquelles ajoutées ensemble donneront pour le terme général de la série résultante :

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} (\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \sin. n\varphi) a p^n \zeta^n$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} (\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \sin. n\varphi) b p^n \zeta^n$$

Soit  $a + b = f$ ;  $a - b = \frac{g}{\sqrt{-1}}$ , de maniere que  $a = \frac{f\sqrt{-1} + g}{2\sqrt{-1}}$ ,

&  $b = \frac{f\sqrt{-1} - g}{2\sqrt{-1}}$ ; alors cette expression . . . . .

$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} (f \cdot \cos. n\varphi + g \cdot \sin. n\varphi) p^n \zeta^n$  sera le terme général de la série, qui naît de ces fractions :

$$\frac{\frac{1}{2}f + \frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1 - (\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)p\zeta]^k} + \frac{\frac{1}{2}f - \frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1 - (\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)p\zeta]^k}$$

ou de la fraction unique

$$\frac{f - kfp\zeta \cos.\varphi + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} fp^2 \zeta^2 \cos. 2\varphi - \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} fp^3 \zeta^3 \cos. 3\varphi + kgp\zeta \sin.\varphi - \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} gp^2 \zeta^2 \sin. 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} gp^3 \zeta^3 \sin. 3\varphi}{(1 - 2p\zeta \cos.\varphi + p^2 \zeta^2)^k}$$

220. Ainsi en supposant  $k = 2$ , le terme général de la série résultante de la fraction  $\frac{f - 2p\zeta(f \cos.\varphi - g \sin.\varphi) + p^2 \zeta^2 (f \cos. 2\varphi - g \sin. 2\varphi)}{(1 - 2p\zeta \cos.\varphi + p^2 \zeta^2)^2}$  sera  $= (n+1)(f \cos. n\varphi + g \sin. n\varphi) p^n \zeta^n$ . Or celui de la série, que donne la fraction  $\frac{a}{1 - 2p\zeta \cos.\varphi + p^2 \zeta^2}$ , ou celle-ci :  $\frac{a - 2ap\zeta \cos.\varphi + ap^2 \zeta^2}{(1 - 2p\zeta \cos.\varphi + p^2 \zeta^2)^2}$  est  $= \frac{a \sin.(n+1)\varphi}{\sin.\varphi} p^n \zeta^n$ .

Ajoutons ces deux fractions & faisons  $a + f = A$ ;  $2a \cos.\varphi + 2f \cos.\varphi - 2g \sin.\varphi = -B$ , &  $a + f \cos. 2\varphi - g \sin. 2\varphi = 0$ ; il s'ensuivra que  $g = \frac{B + 2A \cos.\varphi}{2 \sin.\varphi}$ ,  $a = \frac{A + B \cos.\varphi}{1 - \cos. 2\varphi} = \frac{A + B \cos.\varphi}{2 (\sin.\varphi)^2}$  &  $f = \frac{-A \cos. 2\varphi - B \cos.\varphi}{2 (\sin.\varphi)^2}$  &  $g = \frac{B \sin.\varphi + A \sin. 2\varphi}{2 (\sin.\varphi)^2}$ . Par conséquent le terme général de la série provenante de la fraction  $\frac{A + Bp\zeta}{(1 - 2p\zeta \cos.\varphi + p^2 \zeta^2)^2}$  est  $\frac{A + B \cos.\varphi}{2 (\sin.\varphi)^2} \cdot \sin.(n+1)\varphi p^n \zeta^n + \frac{(n+1)(B \sin.\varphi \sin. n\varphi + A \sin. 2\varphi \sin. n\varphi - B \cos. 2\varphi \cos. n\varphi - A \cos. 2\varphi \cos. n\varphi)}{2 (\sin.\varphi)^2} p^n \zeta^n$ ,  $= -\frac{(n+1)(A \cos.(n+2)\varphi + B \cos.(n+1)\varphi)}{2 (\sin.\varphi)^2} p^n \zeta^n + \frac{(A + B \cos.\varphi) \sin.(n+1)\varphi}{2 (\sin.\varphi)^2} p^n \zeta^n = \frac{\frac{1}{2}(n+3) \sin.(n+1)\varphi - \frac{1}{2}(n+1) \sin.(n+3)\varphi}{2 (\sin.\varphi)^2} A p^n \zeta^n +$

$\frac{1}{2}(n+2) \sin. \varphi - \frac{1}{2} n. \sin. (n+2) \varphi$   $B p^n \zeta^n$ . Donc le terme général cherché, c'est-à-dire, celui de la série, qui naît de la fraction

$$\frac{A + B p \zeta}{(1 - 2 p \zeta \cos. \varphi + p^2 \zeta^2)^2}$$

est  $= \frac{(n+3) \sin. (n+1) \varphi - (n+1) \sin. (n+3) \varphi}{4 (\sin. \varphi)^2} \times$   
 $A p^n \zeta^n + \frac{(n+2) \sin. (n \varphi) - n \sin. (n+2) \varphi}{4 (\sin. \varphi)^2} \cdot B p^n \zeta^n.$

221. Soit  $k = 3$ , & le terme général de la série, qui viendra de la fraction

$$\frac{f - 3 p \zeta (f \cos. \varphi - g \sin. \varphi) + 3 p p \zeta \zeta (f \cos. 2 \varphi - g \sin. 2 \varphi) - p^3 \zeta^3 (f \cos. 3 \varphi - g \sin. 3 \varphi)}{(1 - 2 p \zeta \cos. \varphi + p^2 \zeta^2)^3}$$

sera  $= \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} (f \cos. n \varphi + g \sin. n \varphi) p^n \zeta^n$ . De plus celui de la série, qui vient de la fraction

$$\frac{a + b p \zeta}{(1 - 2 p \zeta \cos. \varphi + p^2 \zeta^2)^3}$$

ou de celle-ci:  $a - 2 a p \zeta \cos. \varphi + a p p \zeta \zeta \dots$   
 $+ b p \zeta \dots - 2 b p p \zeta \zeta \cos. \varphi + b p^3 \zeta^3$  est

$$\frac{(n+3) \sin. (n+1) \varphi - (n+1) \sin. (n+3) \varphi}{4 (\sin. \varphi)^3} a p^n \zeta^n + \frac{(n+2) \sin. (n \varphi) - n \sin. (n+2) \varphi}{4 (\sin. \varphi)^3} \cdot b p^n \zeta^n$$

Ajoutons ces fractions, & supposons le numérateur = A, nous aurons  $a + f = A$ ;  $3 f \cos. \varphi - 3 g \sin. \varphi + 2 a \cos. \varphi - b = 0$ ;  $3 f \cos. 2 \varphi - 3 g \sin. 2 \varphi + a - 2 b \cos. \varphi = 0$ ; &  $b = f \cos. 3 \varphi - g \sin. 3 \varphi$ ;

& par conséquent  $a = \frac{f \cos. 3 \varphi - g \sin. 3 \varphi - 3 f \cos. \varphi + 3 g \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi} =$

$2 g (\sin. \varphi)^2 \operatorname{tang.} \varphi - f - 2 f (\sin. \varphi)^2$ . On trouve ensuite  $\frac{f}{g} =$

$\frac{\sin. 5 \varphi - 2 \sin. 3 \varphi + \sin. \varphi}{\cos. 5 \varphi - 2 \cos. 3 \varphi + \cos. \varphi}$  &  $a + f = A = 2 g (\sin. \varphi)^2 \operatorname{tang.} \varphi - 2 f (\sin. \varphi)^2$

Donc  $\frac{A}{2 (\sin. \varphi)^2} = \frac{g \sin. \varphi - f \cos. \varphi}{\cos. \varphi}$ ; d'où l'on tire enfin  $f =$

$A \frac{(\sin. \varphi - 2 \sin. 3 \varphi + \sin. 5 \varphi)}{16 (\sin. \varphi)^3}$ ,  $g = A \frac{(\cos. \varphi - 2 \cos. 3 \varphi + \cos. 5 \varphi)}{16 (\sin. \varphi)^3}$ ;

à cause de  $16 (\sin. \varphi)^3 = \sin. 5 \varphi - 5 \sin. 3 \varphi + 10 \sin. \varphi$ , on aura

$a = A \frac{(9 \sin. \varphi - 3 \sin. 3 \varphi)}{16 (\sin. \varphi)^3}$  &  $b = A \frac{(-\sin. 2 \varphi + \sin. 2 \varphi)}{16 (\sin. \varphi)^3}$

$= 0$ . Or  $3 \sin. \varphi - \sin. 3 \varphi = 4 (\sin. \varphi)^3$ ; donc  $a = \frac{3 A}{4 (\sin. \varphi)^2}$

Donc



Donc le terme général fera  $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} p^n \tilde{x}^n A \times$   
 $\left( \frac{\sin.(n+1)\varphi - 2\sin.(n+3)\varphi + \sin.(n+5)\varphi}{16(\sin.\varphi)^5} \right) +$   
 $3 A p^n \tilde{x}^n \cdot \left( \frac{(n+3)\sin.(n+1)\varphi - (n+1)\sin.(n+3)\varphi}{16(\sin.\varphi)^5} \right) =$   
 $\frac{A p^n \tilde{x}^n}{16(\sin.\varphi)^5} \left( \frac{(n+4)(n+5)}{1.2} \sin.(n+1)\varphi - 2 \frac{(n+1)(n+5)}{1.2} \sin.(n+3)\varphi \right.$   
 $\left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \sin.(n+5)\varphi \right).$

222. Donc le terme général de la série résultante de la

fraction  $\frac{A + Bp\tilde{x}}{(1 - 2p\tilde{x} \cos.\varphi + p^2\tilde{x}^2)^3}$  fera  
 $\frac{A p^n \tilde{x}^n}{16(\sin.\varphi)^5} \left( \frac{(n+5)(n+4)}{1.2} \sin.(n+1)\varphi - 2 \frac{(n+1)(n+5)}{1.2} \sin.(n+3)\varphi \right.$   
 $\left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \sin.(n+5)\varphi \right) + \frac{B p^n \tilde{x}^n}{16(\sin.\varphi)^5} \left( \frac{(n+4)(n+3)}{1.2} \sin.n\varphi - \right.$   
 $\left. 2 \frac{n(n+4)}{1.2} \sin.(n+2)\varphi + \frac{n(n+1)}{1.2} \sin.(n+4)\varphi \right);$  & en procé-  
 dant de la même manière on trouvera, que le terme général  
 de la série qui tire son origine de la fraction . . . .

$\frac{A + Bp\tilde{x}}{(1 - 2p\tilde{x} \cos.\varphi + p^2\tilde{x}^2)^4}$  fera  
 $\frac{A p^n \tilde{x}^n}{64(\sin.\varphi)^7} \left( \frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1.2.3} \sin.(n+1)\varphi - 3 \frac{(n+1)(n+7)(n+6)}{1.2.3} \right.$   
 $\sin.(n+3)\varphi + 3 \frac{(n+1)(n+2)(n+7)}{1.2.3} \sin.(n+5)\varphi - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$   
 $\sin.(n+7)\varphi \left. + \frac{B p^n \tilde{x}^n}{64(\sin.\varphi)^7} \left( \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1.2.3} \sin.n\varphi - \right.$   
 $\left. 3 \frac{n(n+6)(n+5)}{1.2.3} \sin.(n+2)\varphi + 3 \frac{n(n+1)(n+6)}{1.2.3} \sin.(n+4)\varphi \right.$   
 $\left. - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \sin.(n+6)\varphi \right).$  Ces formules mettent à (cc)

portée de voir la loi que suivent les termes généraux pour  
 les puissances plus élevées; mais pour connoître plus parti-  
 culièrement la nature de ces expressions, il est bon de  
 remarquer que . . . . .

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. Z

$$\begin{aligned} \sin. \varphi &= \sin. \varphi \\ 4 (\sin. \varphi)^3 &= 3 \sin. \varphi - \sin. 3\varphi \\ 16 (\sin. \varphi)^5 &= 10 \sin. \varphi - 5 \sin. 3\varphi + \sin. 5\varphi \\ 64 (\sin. \varphi)^7 &= 35 \sin. \varphi - 21 \sin. 3\varphi + 7 \sin. 5\varphi - \sin. 7\varphi \\ 256 (\sin. \varphi)^9 &= 126 \sin. \varphi - 84 \sin. 3\varphi + 36 \sin. 5\varphi - 9 \sin. 7\varphi + \sin. 9\varphi \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

223. Toute fonction fractionnaire pouvant donc être décomposée de cette manière en fractions partielles réelles, il s'en suit qu'il sera possible d'obtenir en expressions réelles les termes généraux de toutes les séries récurrentes. Pour rendre cette vérité plus sensible, on a ajouté les exemples suivans.

## E X E M P L E I.

La fraction  $\frac{1}{(1-\tau)(1-\tau\tau)(1-\tau^3)} = \frac{1}{1-\tau-\tau\tau+\tau^2+\tau^3-\tau^6}$  donne naissance à la série récurrente  $1 + \tau + 2\tau^2 + 3\tau^3 + 4\tau^4 + 5\tau^5 + 7\tau^6 + 8\tau^7 + 10\tau^8 + 12\tau^9 + \text{\&c.}$ ; dont on demande le terme général. La fraction proposée étant ordonnée par rapport à ses facteurs devient  $= \frac{1}{(1-\tau)^3(1+\tau)(1+\tau+\tau\tau)}$  & se change en ces fractions  $\frac{1}{6(1-\tau)^3} + \frac{1}{4(1-\tau)^2} + \frac{17}{72(1-\tau)} + \frac{1}{8(1+\tau)} + \frac{(2+\tau)}{9(1+\tau+\tau\tau)}$ . La première de ces fractions donne le terme général  $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{6} \tau^n = \frac{n^2+3n+2}{12} \cdot \tau^n$ . La seconde  $\frac{1}{4(1-\tau)^2}$  donne  $\frac{n+1}{4} \cdot \tau^n$ , la troisième  $\frac{17}{72(1-\tau)}$  donne  $\frac{17}{72} \tau^n$ : la quatrième  $\frac{1}{8(1+\tau)}$  donne  $\frac{1}{8} (-1)^n \tau^n$ ; mais si l'on compare la cinquième  $\frac{2+\tau}{9(1+\tau+\tau\tau)}$  avec la formule  $\frac{A+Bp\tau}{1-2p\tau \cdot \text{cof. } \varphi + pp\tau\tau}$ , on aura (art. 218)  $p = -1$ ;  $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ;  $A = +\frac{2}{9}$ ; &  $B = -\frac{1}{9}$ ; d'où résulte le terme général  $+ \frac{2 \sin. (n+1)\varphi - \sin. n\varphi}{9 \sin. \varphi} \cdot (-1)^n \tau^n = +$

\* Voyez la fin du Chapitre XIV.

$$\frac{4fn.(n+1)\frac{\pi}{3} - 2fn.n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} \times (-1)^n \zeta^n = + \frac{4fn.(n+1)\frac{\pi}{3} - 2fn.n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} \cdot (-1)^n \zeta^n.$$

Faisons une somme de routes ces expressions, & nous aurons le terme général cherché de la série en question,

$$= \left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \zeta^n \pm \frac{1}{8} \zeta^n \pm \frac{4fn.(n+1)\frac{\pi}{3} - 2fn.n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} \zeta^n, \text{ où il}$$

faut prendre les signes supérieurs, si  $n$  est un nombre pair, & les signes inférieurs, si  $n$  est un nombre impair. Remarquons ici que si  $n$  est un nombre de la forme  $3m$ , on

$$\text{aura } \frac{4fn.\frac{1}{3}(n+1)\pi - 2fn.\frac{1}{3}n\pi}{9\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{9}, \text{ que si } n = 3m + 1,$$

cette expression deviendra  $= \mp \frac{1}{9}$ ; & que si  $n = 3m + 2$ ,

elle aura pour valeur  $\mp \frac{1}{9}$ , suivant que  $n$  fera un nombre pair ou impair; cela posé, la nature de la série pourra être ainsi déterminée, de manière que . . . . .

si	on aura pour terme général
$n = 6m + 0$	$\left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + 1 \right) \zeta^n$
$n = 6m + 1$	$\left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12} \right) \zeta^n$
$n = 6m + 2$	$\left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{2}{3} \right) \zeta^n$
$n = 6m + 3$	$\left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right) \zeta^n$
$n = 6m + 4$	$\left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{2}{3} \right) \zeta^n$
$n = 6m + 5$	$\left( \frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12} \right) \zeta^n$

Par exemple, si  $n = 50$ , la forme  $n = 6m + 2$  a lieu, & le terme de la série sera  $= 234 \zeta^{50}$ .

*E X E M P L E II.*

La fraction  $\frac{1 + \zeta + \zeta^2}{1 - \zeta - \zeta^2 + \zeta^3}$  produit la série récurrente  
Z ij

$1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 7x^8 + \dots$   
 dont il s'agit de déterminer le terme général. La fraction  
 proposée se ramène à cette forme  $\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)}$ , & se  
 décompose par conséquent en ces fractions partielles  $\frac{3}{4(1-x)^2} +$   
 $\frac{3}{8(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)} - \frac{1+x}{4(1+x)}$ . La première de ces fractions,  
 savoir  $\frac{3}{4(1-x)^2}$ , donne le terme général  $\frac{3(n+1)}{4} x^n$ ; la seconde  
 $\frac{3}{8(1-x)}$  donne  $\frac{3}{8} x^n$ ; la troisième donne  $\frac{1}{8} (-1)^n x^n$ , & la  
 quatrième  $\frac{-1+x}{4(1+x)}$  comparée avec la formule  $\frac{A+Bp^q}{1-2p^r \cos \phi - p^p x^q}$ ,  
 donne  $p = 1$ ;  $\cos \phi = 0$ ; &  $\phi = \frac{1}{2}\pi$ ;  $A = -\frac{1}{4}$ ;  $B = +\frac{1}{4}$ ; d'où  
 résulte le terme général  $= (-\frac{1}{4} \sin. \frac{1}{2}(n+1)\pi + \frac{1}{4} \sin. \frac{1}{2}n\pi) x^n$ .  
 Donc en rassemblant ces résultats, on aura le terme général  
 demandé  $= (\frac{3}{4}n + \frac{3}{8}) x^n \pm \frac{1}{8} x^n - \frac{1}{4} (\sin. \frac{1}{2}(n+1)\pi - \sin. \frac{1}{2}n\pi) x^n$ .  
 Concluons de-là, que . . . . .

si	on aura pour terme général
$n = 4m + 0$	$(\frac{3}{4}n + 1) x^n$
$n = 4m + 1$	$(\frac{3}{4}n + \frac{5}{4}) x^n$
$n = 4m + 2$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{2}) x^n$
$n = 4m + 3$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{4}) x^n$

Par exemple si  $n = 50$ ; ce fera la formule  $n = 4m + 2$   
 qui aura lieu, & le terme cherché fera  $= 39 x^{50}$ .

224. Étant donc proposée une série récurrente, comme  
 il fera facile de connoître la fraction qui l'a produite, on  
 en trouvera le terme général, en suivant les règles que  
 nous venons de donner. Or la loi de la série récurrente,  
 d'après laquelle chaque terme se conclut des précédents, fait  
 connoître sur le champ le dénominateur de la fraction, dont  
 les facteurs donneront la forme du terme général; car le  
 numérateur ne sert qu'à déterminer les coefficients. Soit  
 proposée, par exemple, cette série récurrente. . . . .

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \dots$$

dont chaque terme est formé de quelques-uns des précédents suivant une certaine loi, de manière à donner pour le dénominateur de la fraction la quantité  $1 - az - bz^2 - cz^3$ ; & par conséquent  $D = aC + bB + cA$ ;  $E = aD + bC + cB$ ;  $F = aE + bD + cC$ ; &c. Ce sont ces multiplicateurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , que MOIVRE appelle *Échelle de relation*. La loi de la progression consiste donc dans l'échelle de relation, & cette échelle donne sur le champ le dénominateur de la fraction dont la résolution forme la série récurrente proposée.

225. Ainsi pour trouver le terme général ou le coefficient de la puissance indéfinie  $z^n$ , il faut chercher les facteurs simples, ou doubles, si l'on veut éviter les facteurs imaginaires, du dénominateur  $1 - az - bz^2 - cz^3$ . Supposons d'abord tous les facteurs simples, inégaux entr'eux & réels, tels que  $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$ ; la fraction génératrice de la série se changera en celles-ci:  $\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz}$ ; ce qui donnera,

pour le terme général de la série:  $(Ap^n + Bq^n + Cr^n)z^n$ . S'il y a deux facteurs égaux, par exemple, si  $q = p$  le terme général sera de cette forme:  $\{ (An + B)p^n + Cr^n \} z^n$ , & si de plus  $r = p = q$ ; le terme général sera de la forme  $(An^2 + Bn + C)p^n z^n$ ; mais si le dénominateur a un facteur double de manière qu'il soit  $(1 - pz)(1 - 2qz \cos \phi + q^2 z^2)$ ; alors le terme général sera  $= (Ap^n + \frac{B \sin(n+1)\phi + C \sin n\phi}{\sin \phi} q^n) z^n$ .

Donc, puisqu'en supposant successivement pour  $n$  les nombres 0, 1, 2, on doit obtenir les termes  $A, Bz, Cz^2$ , il sera facile de déterminer les valeurs des lettres A, B, C.

226. Supposons une échelle de relation à deux termes, c'est-à-dire, que chaque coefficient soit déterminé par les deux précédents, de manière que  $C = aB - bA$ ;  $D = aC - bB$ ;  $E = aD - bC$  &c. Il est évident que la série récurrente  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots + Pz^n +$

$Qz^{n+1} + \dots$  &c. vient d'une fraction dont le dénominateur est  $1 - az + cz^2$ . Soient les facteurs de ce dénominateur;  $(1 - pz)(1 - qz)$ ; on aura  $p + q = a$ , &  $pq = c$ ; & le terme général de la série sera  $(Ap^n + Bq^n)z^n$ . En faisant  $n = 0$ , on aura  $A = A + B$ , & en faisant  $n = 1$ ,  $B = Ap + Bq$ ; d'où  $Aq - B = A(q - p)$ , &  $A = \frac{Aq - B}{q - p}$  &  $B = \frac{Ap - B}{p - q}$ . Or les valeurs de  $A$  & de  $B$  étant une fois trouvées, on aura  $P = Ap^n + Bq^n$ , &  $Q = Ap^{n+1} + Bq^{n+1}$ . Et alors  $AB = \frac{BB - aAB + cAA}{4c - a^2}$ .

227. On peut déduire de-là la manière de former un terme quelconque du seul terme qui le précède, tandis que la loi de la progression en exige deux. En effet, puisque . . .

$$P = Ap^n + Bq^n \quad \& \quad Q = Ap^{n+1} + Bq^{n+1}$$

on aura . . . . .

$$Pq - Q = A(q - p)p^n \quad \& \quad Pp - Q = B(p - q)q^n$$

Multiplions l'une par l'autre ces deux expressions; le produit sera  $P^2pq - (p + q)PQ + QQ + AB(p - q)^2p^nq^n = 0$ ; mais  $p + q = a$ ;  $pq = c$ ;  $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = a^2 - 4c$ , &  $p^nq^n = c^n$ . La substitution faite, on aura pour résultat:  $cP^2 - aPQ + QQ = (cAA - aAB + BB)c^n$  ou  $\frac{QQ - aPQ + cPP}{BB - aAB + cAA} = c^n$ ; propriété remarquable des séries récurrentes, dont chaque terme est déterminé par les deux précédents. Mais le terme  $P$  étant une fois connu, le suivant  $Q$  sera  $= \frac{1}{2}aP + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - c)P^2 + (B^2 - aAB + cAA)c^n}$ ; expression, qui, quoiqu'elle se présente sous une forme irrationnelle, est cependant toujours rationnelle, puisqu'il n'entre dans la série aucun terme irrationnel.

228. Au reste, deux termes consécutifs quelconques  $Pz^n$  &  $Qz^{n+1}$  étant donnés, on peut assigner facilement le

terme beaucoup plus éloigné  $X\chi^{2^n}$ . Car supposons . . .

$$X = fP^2 + gPQ - hAB\epsilon^n. \text{ A cause de } . . . . .$$

$$P = Ap^n + Bq^n \text{ \& de } Q = ApP^n + BqQ^n, \text{ \& de}$$

$$X = Ap^{2^n} + Bq^{2^n}; \text{ on aura, comme il suit :}$$

$$\begin{aligned} fP^2 &= fA^2p^{2^n} + fB^2q^{2^n} + 2fAB\epsilon^n \\ gPQ &= gA^2pp^{2^n} + gB^2qq^{2^n} + gABa\epsilon^n \\ - hAB\epsilon^n &= \\ \hline X &= Ap^{2^n} + Bq^{2^n} \end{aligned}$$

On aura donc  $f + gp = \frac{1}{A}$ ;  $f + gq = \frac{1}{B}$ ; &  $h = 2f + ga$ ,

d'où  $g = \frac{B-A}{AB(p-q)}$  &  $f = \frac{Ap - Bq}{AB(p-q)}$ . Mais  $B - A = \frac{aA - 2B}{p - q}$ ;

$Ap - Bq = \frac{aB - 2A^2}{p - q}$ . Donc  $f = \frac{aB - 2A^2}{AB(a^2 - 4\epsilon^2)}$  &  $g =$

$\frac{aA - 2B}{AB(a^2 - 4\epsilon^2)}$ , ou  $f = \frac{2A^2 - aB}{BB - aAB + \epsilon AA}$  &  $g = \frac{2B - aA}{BB - aAB + \epsilon AA}$ ,

& par conséquent  $h = \frac{(4\epsilon^2 - aa)A}{BB - aAB + \epsilon AA}$ .

On trouvera donc . . . . .

$$X = \frac{(2A^2 - aB)P^2 + (2B - aA)PQ}{BB - aAB + \epsilon AA} - A\epsilon^n.$$

On trouvera d'une maniere semblable . . . . .

$$X = \frac{[a^2A - (aa - 2\epsilon)B]P^2 + (2B - aA)Q^2}{a(BB - aAB) + \epsilon AA} - \frac{2B\epsilon^n}{a}; \text{ (dd)}$$

Et si on joint ces deux valeurs par l'élimination du terme  $\epsilon^n$ , on en conclura . . . . .

$$X = \frac{(\epsilon A - aB)P^2 + 2BPQ - AQ^2}{BB - aAB + \epsilon AA}.$$

229. Pareillement, si nous voulons déterminer les termes qui viennent à la suite dans la série  $A + B\chi + C\chi^2 + \dots + P\chi^n + Q\chi^{n+1} + R\chi^{n+2} + \dots + X\chi^{2^n} + Y\chi^{2^n+1} + Z\chi^{2^n+2}$ .





$$= \frac{3PP \pm 10 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}; \text{ \& par conséquent } X = \frac{-PP \mp 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}. \text{ Donc un terme quelconque } Pz^n \text{ de la série donnera ceux-ci : } \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{n+1} \text{ \& } \frac{-PP \mp 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{2n}.$$

230. Semblablement dans les séries récurrentes, dont chaque terme dépend des trois précédents, on peut déterminer un terme quelconque, par le moyen des deux qui le précédent. En effet, soit la série récurrente  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \dots$  dont l'échelle de relation soit  $a, -\epsilon, +\gamma$ ; ou qui résulte d'une fraction, dont le dénominateur  $= 1 - az + \epsilon z^2 - \gamma z^3$ . Si l'on exprime de même les termes  $P, Q, R$  par les facteurs de ce dénominateur que je suppose,  $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$ , de sorte que  $P = Ap^n + Bq^n + Cr^n$ ;  $Q = App^n + Bqq^n + Crr^n$ , &  $R = Ap^2.p^n + Bq^2.q^n + Cr^2.r^n$ : à cause de  $p + q + r$  (ee)  $= a$ ;  $pq + pr + qr = \epsilon$  &  $pqr = \gamma$ ; on trouvera la proportion suivante:

$$\left. \begin{array}{l} R^3 - 2aQ \\ + \epsilon P \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} R^2 + (aa + \epsilon)Q^2 \\ - (\alpha\epsilon + 3\gamma)PQ \\ + \alpha\gamma P^2 \end{array} \right\} R + (\alpha\gamma + \epsilon\epsilon)PQ^2 - 2\epsilon\gamma P^2Q + \gamma\gamma P^3 : \gamma^n =$$

$$\left. \begin{array}{l} C^3 - 2aB \\ + \epsilon A \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} C^2 + (a^2 + \epsilon)B^2 \\ - (\alpha\epsilon + 3\gamma)AB \\ + \alpha\gamma A^2 \end{array} \right\} C + (\alpha\gamma + \epsilon\epsilon)AB^2 - 2\epsilon\gamma A^2B + \gamma\gamma A^3 : 1.$$

Le terme  $R$  dépend donc des deux précédents  $P$  &  $Q$ , & pour le trouver il faudra résoudre une équation du troisième degré.

231. Après ces observations sur les termes généraux des EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 A

féries récurrentes, il nous reste encore à chercher les sommes de ces féries. D'abord il est clair que la somme d'une férie récurrente continuée à l'infini, est égale à la fraction qui l'a fait naître, & comme le dénominateur de la fraction est connu par la loi de la progression, il n'y a plus que le numérateur à déterminer. Soit donc proposée la férie

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \&c;$$

dont la loi de progression donne le dénominateur  $1 - az + cz^2 - \gamma z^3 + \delta z^4$ . Supposons la fraction, qui exprime la

somme de cette férie infinie  $= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - az + cz^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$ ; comme la férie proposée en dérive, on aura, en comparant, . . .

$$a = A$$

$$b = B - aA$$

$$c = C - aB + cA$$

$$d = D - aC + cB - \gamma A:$$

Donc la somme demandée fera . . . . .

$$\frac{A + (B - aA)z + (C - aB + cA)z^2 + (D - aC + cB - \gamma A)z^3}{1 - az + cz^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$$

232. On comprend aisément après cela comment on trouve la somme d'une férie récurrente continuée jusqu'à un terme donné. En effet, supposons qu'il soit question de trouver la somme de la férie proposée jusqu'au terme  $Pz^n$ , & faisons

$$s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots + Pz^n.$$

Comme la somme de cette férie prolongée à l'infini est connue, cherchons celle des termes qui suivent le dernier  $Pz^n$  à l'infini, laquelle nous supposons . . . . .

$$t = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} + \&c.$$

cette férie étant divisée par  $z^{n+1}$  donne une férie récurrente parfaitement conforme à la première, dont la somme fera par conséquent  $t =$  . . . . .

$$\frac{Qz^{n+1} + (R - aQ)z^{n+2} + (S - aR + cQ)z^{n+3} + (T - aS + cR - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - az + cz^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$$

On en conclura que la somme cherchée  $s \equiv$  . . . .  
 $+ A + (B - aA)\zeta + (C - aB + aA)\zeta^2 + (D - aC + aB - aA)\zeta^3$   
 $- Q\zeta^{n+1} - (R - aQ)\zeta^{n+2} - (S - aR + aQ)\zeta^{n+3} - (T - aS + aR - aQ)\zeta^{n+4}$   
 $\frac{1 - a\zeta + a^2\zeta^2 - a^3\zeta^3 + a^4\zeta^4}{1 - a\zeta + a^2\zeta^2 - a^3\zeta^3 + a^4\zeta^4}$

233. Donc si l'échelle de relation est à deux termes  $a - \epsilon$  ;  
 la somme de la série  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \dots + P\zeta^n$ ,  
 qui résulte de la fraction  $\frac{A + (B - aA)\zeta}{1 - a\zeta + \epsilon\zeta^2}$  fera . . . .  
 $\frac{A + (B - aA)\zeta - Q\zeta^{n+1} - (R - aQ)\zeta^{n+2}}{1 - a\zeta + \epsilon\zeta^2}$

Mais, par la nature de la série,  $R = aQ - \epsilon P$ ; donc nous  
 aurons pour somme :  $\frac{A + (B - aA)\zeta - Q\zeta^{n+1} + \epsilon P\zeta^{n+2}}{1 - a\zeta + \epsilon\zeta^2}$ .

E X E M P L E .

Soit proposée la série  $1 + 3\zeta + 4\zeta^2 + 7\zeta^3 + \dots + P\zeta^n$  ;  
 dans laquelle  $a = 1$  ;  $\epsilon = -1$  ;  $A = 1$  ;  $B = 3$  ; la somme  
 de cette série fera  $\frac{1 + 2\zeta - Q\zeta^{n+1} - P\zeta^{n+2}}{1 - \zeta - \zeta^2}$ . Or si l'on  
 fait  $\zeta = 1$ , la somme deviendra  $1 + 3 + 4 + 7 + 11 +$   
 $\dots + P = P + Q - 3$ . Donc la somme du dernier terme  
 & du suivant excède de trois la somme de la série ; &  
 comme  $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$ , la somme de la série  
 $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + \dots + P = \frac{3P - 6 + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$ .

La somme peut donc être exprimée par le moyen du dernier  
 terme seulement.

C H A P I T R E X I V .

*De la multiplication & de la division des Angles.*

234. Si dans un cercle dont le rayon = 1, on suppose  
 un angle ou un arc quelconque  $\equiv \zeta$ , son sinus =  $x$ , son  
 2 A ij

cosinus =  $y$ , & la tangente =  $t$ ; on aura  $xx + yy = 1$ , &  $t = \frac{x}{y}$ . Ainsi puisque les sinus & les cosinus des angles  $\zeta$ ;  $2\zeta$ ;  $3\zeta$ ;  $4\zeta$ ; forment, comme nous l'avons observé, une série récurrente, dont l'échelle de relation est  $2y - 1$ , on obtiendra d'abord pour les sinus de ces arcs les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{sin. } 0\zeta &= 0 \\ \text{sin. } 1\zeta &= x \\ \text{sin. } 2\zeta &= 2xy \\ \text{sin. } 3\zeta &= 4xy^2 - x \\ \text{sin. } 4\zeta &= 8xy^3 - 4xy \\ \text{sin. } 5\zeta &= 16xy^4 - 12xy^2 + x \\ \text{sin. } 6\zeta &= 32xy^5 - 32xy^3 + 6xy \\ \text{sin. } 7\zeta &= 64xy^6 - 80xy^4 + 24xy^2 - x \\ \text{sin. } 8\zeta &= 128xy^7 - 192xy^5 + 80xy^3 - 8xy \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$(ff) \text{ sin. } n\zeta = x \left[ 2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5}y^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-7}y^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9}y^{n-9} - \dots \right]$$

235. Si nous faisons l'arc  $n\zeta = s$ ; nous aurons  $\text{sin. } n\zeta = \text{sin. } s = \text{sin. } (\pi - s) = \text{sin. } (2\pi + s) = \text{sin. } (3\pi - s)$  &c. car tous ces sinus sont égaux entr'eux. Nous tirons de là plusieurs valeurs pour  $x$ , savoir,

$$\text{sin. } \frac{s}{n}; \text{ sin. } \frac{\pi - s}{n}; \text{ sin. } \frac{2\pi + s}{n}; \text{ sin. } \frac{3\pi - s}{n}; \text{ sin. } \frac{4\pi + s}{n}; \text{ \&c.}$$

lesquelles, par conséquent conviennent toutes également à l'équation trouvée. Or on obtiendra pour  $x$  autant de valeurs différentes que  $n$  contient d'unités. Elles seront conséquemment les racines de l'équation dont il s'agit. Il faut donc avoir l'attention de ne pas regarder comme égales les valeurs qui doivent être considérées comme les mêmes, en n'ad-

mettant que les expressions alternatives. Les racines de (gg) l'équation étant donc ainsi déterminées, quoique d'une manière indirecte, leur comparaison avec les termes de l'équation nous fournira des propriétés remarquables. Mais, comme pour cet objet, il faut avoir une équation qui ne renferme que l'inconnue  $x$ , on devra substituer à  $y$  sa valeur  $\sqrt{1 - xx}$ ; ce qui exigera deux opérations, suivant que  $n$  sera un nombre pair, ou un nombre impair.

236. Soit  $n$  un nombre impair; comme la différence des arcs  $-\zeta, +\zeta, +3\zeta, +5\zeta$ ; &c. est  $2\zeta$ , & que le cosinus de cette différence =  $1 - 2xx$ , l'échelle de relation de la progression des sinus sera  $2 - 4xx, -1$ . Donc . . .

$$\text{sin. } -\zeta = -x$$

$$\text{sin. } \zeta = x$$

$$\text{sin. } 3\zeta = 3x - 4x^3$$

$$\text{sin. } 5\zeta = 5x - 20x^3 + 16x^5$$

$$\text{sin. } 7\zeta = 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7$$

$$\text{sin. } 9\zeta = 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9$$

Donc . . . . .

$$\text{sin. } n\zeta = n x - \frac{n(n-1)}{1.2.3} x^3 + \frac{n(n-1)(n-9)}{1.2.3.4.5} x^5 - \frac{n(n-1)(n-9)(n-25)}{1.2.3.4.5.6.7} x^7 + \&c. \quad (hh)$$

pourvu que  $n$  soit un nombre impair. Les racines de cette équation sont . . . . .

$$\text{sin. } \zeta; \text{sin. } \left(\frac{2\pi}{n} + \zeta\right); \text{sin. } \left(\frac{4\pi}{n} + \zeta\right); \text{sin. } \left(\frac{6\pi}{n} + \zeta\right); \text{sin. } \left(\frac{8\pi}{n} + \zeta\right) \&c;$$

dont le nombre est  $n$ .

237. L'équation  $0 = 1 - \frac{nx}{\text{sin. } n\zeta} + \frac{n(n-1)x^3}{1.2.3.\text{sin. } n\zeta} - \frac{n(n-1)(n-9)x^5}{1.2.3.4.5.\text{sin. } n\zeta} \dots \pm \frac{2^{n-1}x^n}{\text{sin. } n\zeta}$ ; (en prenant le signe supérieur, lorsque  $n$  est surpassé d'une unité par un multiple de quatre, & le signe inférieur

dans le cas contraire) a donc pour facteurs  $(1 - \frac{x}{\sin. \zeta})$

$$\left(1 - \frac{x}{\sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta)}\right) \left(1 - \frac{x}{\sin. (\frac{4\pi}{n} + \zeta)}\right) \&c. \text{ On}$$

conclut de-là que . . . . .

$$\frac{n}{\sin. n \zeta} = \frac{1}{\sin. \zeta} + \frac{1}{\sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta)} + \frac{1}{\sin. (\frac{4\pi}{n} + \zeta)} + \frac{1}{\sin. (\frac{6\pi}{n} + \zeta)} + \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait un nombre  $n$  de termes. Pour le produit de tous ces facteurs, on aura . . . . .

$$\mp \frac{2^n - 1}{\sin. n \zeta} = \frac{1}{\sin. \zeta. \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta). \sin. (\frac{4\pi}{n} + \zeta). \sin. (\frac{6\pi}{n} + \zeta) \&c.}, \text{ ou}$$

$$\sin. n \zeta = \mp 2^{n-1} \sin. \zeta. \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta). \sin. (\frac{4\pi}{n} + \zeta). \sin. (\frac{6\pi}{n} + \zeta) \&c.$$

&, à cause que l'avant dernier terme manque, on a . . .

$$0 = \sin. \zeta + \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta) + \sin. (\frac{4\pi}{n} + \zeta) + \sin. (\frac{6\pi}{n} + \zeta) + \&c.$$

E X E M P L E I.

Si donc  $n = 3$ , on aura les équations suivantes :

$$0 = \sin. \zeta + \sin. (120^\circ + \zeta) + \sin. (240^\circ + \zeta) = \sin. \zeta + \sin. (60^\circ - \zeta) - \sin. (60^\circ + \zeta);$$

$$\frac{3}{\sin. 3\zeta} = \frac{1}{\sin. \zeta} + \frac{1}{\sin. (120^\circ + \zeta)} + \frac{1}{\sin. (240^\circ + \zeta)} = \frac{1}{\sin. \zeta} + \frac{1}{\sin. (60^\circ - \zeta)} - \frac{1}{\sin. (60^\circ + \zeta)};$$

$$\sin. 3\zeta = -4 \sin. \zeta. \sin. (120^\circ + \zeta) \sin. (240^\circ + \zeta) = 4 \sin. \zeta. \sin. (60^\circ - \zeta) \sin. (60^\circ + \zeta);$$

On en conclura, comme nous l'avons déjà remarqué,

$$\sin. (60^\circ + \zeta) = \sin. \zeta + \sin. (60^\circ - \zeta) \&$$

$$3 \operatorname{cosec}. 3 \zeta = \operatorname{cosec}. \zeta + \operatorname{cosec}. (60^\circ - \zeta) - \operatorname{cosec}. (60^\circ + \zeta).$$

E X E M P L E II.

Supposons  $n = 5$ , & nous aurons ces équations :

$$0 = \sin. \zeta + \sin. (\frac{2\pi}{5} + \zeta) + \sin. (\frac{4\pi}{5} + \zeta) + \sin. (\frac{6\pi}{5} + \zeta) + \sin. (\frac{8\pi}{5} + \zeta)$$

$$\text{ou } 0 = \sin. \zeta + \sin. (\frac{3\pi}{5} + \zeta) + \sin. (\frac{1}{5}\pi - \zeta) - \sin. (\frac{3}{5}\pi + \zeta) - \sin. (\frac{2}{5}\pi - \zeta);$$

$$\text{ou } 0 = \sin. \zeta + \sin. (\frac{1}{5}\pi - \zeta) - \sin. (\frac{3}{5}\pi + \zeta) - \sin. (\frac{2}{5}\pi - \zeta) + \sin. (\frac{3}{5}\pi + \zeta);$$

Puis . . . . .

$$\frac{1}{\sin. \zeta} = \frac{1}{\sin. \zeta} + \frac{1}{\sin. (\frac{1}{2}\pi - \zeta)} - \frac{1}{\sin. (\frac{1}{2}\pi + \zeta)} - \frac{1}{\sin. (\frac{3}{2}\pi - \zeta)} + \frac{1}{\sin. (\frac{3}{2}\pi + \zeta)}$$

$$\sin. \zeta = 16. \sin. \zeta \sin. (\frac{1}{2}\pi - \zeta) \sin. (\frac{1}{2}\pi + \zeta) \sin. (\frac{3}{2}\pi - \zeta) \sin. (\frac{3}{2}\pi + \zeta)$$

**E X E M P L E I I I.**

D'après cela , si nous faisons  $n = 2m + 1$ , nous trouverons

$$\epsilon = \sin. \zeta + \sin. (\frac{\pi}{n} - \zeta) - \sin. (\frac{\pi}{n} + \zeta) - \sin. (\frac{2\pi}{n} - \zeta) + \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta) +$$

$$\sin. (\frac{3\pi}{n} - \zeta) - \sin. (\frac{3\pi}{n} + \zeta) - \dots - \sin. (\frac{m\pi}{n} - \zeta) \mp \sin. (\frac{m\pi}{n} + \zeta)$$

Les signes supérieurs sont pour le cas où  $m$  est un nombre impair , & les signes inférieurs pour celui où  $m$  est un nombre pair. L'autre équation sera . . . . .

$$\frac{1}{\sin. n\zeta} = \frac{1}{\sin. \zeta} + \frac{1}{\sin. (\frac{\pi}{n} - \zeta)} - \frac{1}{\sin. (\frac{\pi}{n} + \zeta)} - \frac{1}{\sin. (\frac{2\pi}{n} - \zeta)} + \frac{1}{\sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta)}$$

$$\mp \frac{1}{\sin. (\frac{3\pi}{n} - \zeta)} - \frac{1}{\sin. (\frac{3\pi}{n} + \zeta)} - \dots - \frac{1}{\sin. (\frac{m\pi}{n} - \zeta)} \mp \frac{1}{\sin. (\frac{m\pi}{n} + \zeta)}$$

laquelle se ramene facilement aux cosécantes. On a en troisieme lieu ce produit : . . . . .

$$\sin. n\zeta = 2^m \sin. \zeta \sin. (\frac{\pi}{n} - \zeta) \sin. (\frac{\pi}{n} + \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{n} - \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta) \sin. (\frac{3\pi}{n} - \zeta)$$

$$\sin. (\frac{3\pi}{n} + \zeta) \dots \times \sin. (\frac{m\pi}{n} - \zeta) \sin. (\frac{m\pi}{n} + \zeta)$$

238. Soit à présent  $n$  un nombre pair ; à cause de  $y = \sqrt{1 - xx}$  & de  $\cos. 2\zeta = 1 - 2xx$ , ce qui donne , comme ci-dessus , l'échelle de relation,  $2 - 4xx, -1$ , on aura . . . . .

$$\sin. 0\zeta = 0$$

$$\sin. 2\zeta = 2x\sqrt{1 - xx}$$

$$\sin. 4\zeta = (4x - 8x^3)\sqrt{1 - xx}$$

$$\sin. 6\zeta = (6x - 32x^3 + 32x^5)\sqrt{1 - xx}$$

$$\sin. 8\zeta = (8x - 80x^3 + 192x^5 - 128x^7)\sqrt{1 - xx}$$

& en général . . . . .

$$(\therefore) \sin. n \zeta = [ nx - \frac{n(nn-4)}{1.2.3} x^3 + \frac{n.(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5} x^5 - \frac{n.(nn-4)(nn-16)(nn-36)}{1.2.3.4.5.6.7} x^7 + \dots \pm 2^{-1} x^{n-1} ] \sqrt{1-xx},$$

*n* désignant un nombre quelconque pair.

239. Pour rendre cette équation rationnelle, prenons de part & d'autre les quarrés, & nous aurons une équation de cette forme :

$$(\sin. n \zeta)^2 = nnxx + Px^4 + Qx^6 + \dots - 2^{2n-2} x^{2n},$$

ou  $x^{2n} \dots - \frac{nn}{2^{2n-2}} xx + \frac{1}{2^{2n-2}} (\sin. n \zeta)^2 = 0$ ; dont les racines

seront à la fois positives & négatives; favoir  $\pm \sin. \zeta$ ,  $\pm \sin. (\frac{\pi}{n} - \zeta)$ ;  $\pm \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta)$ ;  $\pm \sin. (\frac{3\pi}{n} - \zeta)$ ;  $\pm \sin. (\frac{4\pi}{n} + \zeta)$  &c.

prenant toujours un nombre *n* de ces expressions; & comme le dernier terme est le produit de toutes les racines, en extrayant la racine quarrée des deux membres, on aura

$$\sin. n \zeta = \pm 2^{n-1} \sin. \zeta \cdot \sin. (\frac{\pi}{n} - \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{n} + \zeta) \sin. (\frac{3\pi}{n} - \zeta) \dots$$

Les cas particuliers apprendront de quel signe on doit faire usage.

**E X E M P L E.**

Ainsi, en substituant pour *n* successivement les nombres 2, 4, 6, &c, & choisissant un nombre *n* de sinus différens, on aura

$$\begin{aligned} \sin. 2 \zeta &= 2 \sin. \zeta \sin. (\frac{\pi}{2} - \zeta) \\ \sin. 4 \zeta &= 8 \sin. \zeta \sin. (\frac{\pi}{4} - \zeta) \sin. (\frac{\pi}{4} + \zeta) \sin. (\frac{\pi}{2} - \zeta) \\ \sin. 6 \zeta &= 32 \sin. \zeta \sin. (\frac{\pi}{6} - \zeta) \sin. (\frac{\pi}{6} + \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{6} - \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{6} + \zeta) \sin. (\frac{3\pi}{6} - \zeta) \\ \sin. 8 \zeta &= 128 \sin. \zeta \sin. (\frac{\pi}{8} - \zeta) \sin. (\frac{\pi}{8} + \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{8} - \zeta) \sin. (\frac{2\pi}{8} + \zeta) \times \\ &\quad \sin. (\frac{3\pi}{8} - \zeta) \sin. (\frac{3\pi}{8} + \zeta) \sin. (\frac{4\pi}{8} - \zeta) \end{aligned}$$



240. Il suit donc de-là qu'en général . . . . .

$$\sin. n\gamma = 2^n + 1 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{n} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{\pi}{n} + \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} + \gamma\right) \\ \sin. \left(\frac{3\pi}{n} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{3\pi}{n} + \gamma\right) \dots \times \sin. \left(\frac{1}{2}\pi - \gamma\right)$$

en supposant  $n$  un nombre pair. Or, si on compare cette expression, avec la précédente qui a lieu, lorsque  $n$  est un nombre impair, on remarquera entr'elles une telle ressemblance, qu'on pourra les réduire à une seule. On aura donc, soit qu'on suppose  $n$  un nombre pair, soit qu'on le suppose un nombre impair,

$$\sin. n\gamma = 2^n - 1 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{n} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{\pi}{n} + \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} + \gamma\right) \times \\ \sin. \left(\frac{3\pi}{n} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{3\pi}{n} + \gamma\right) \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait pris autant de facteurs que le nombre  $n$  contient d'unités.

241. Ces formules, au moyen desquelles on exprime en facteurs les sinus des angles multiples, peuvent être utiles pour calculer les logarithmes des sinus des angles multiples, &c pour trouver plusieurs expressions des sinus en facteurs, tels que nous les avons donnés (art. 184). Au reste, on aura  
 $\sin. \gamma = 1 \sin. \gamma.$

$$\sin. 2\gamma = 2 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\sin. 3\gamma = 4 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)$$

$$\sin. 4\gamma = 8 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{4} - \gamma\right)$$

$$\sin. 5\gamma = 16 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{5} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{\pi}{5} + \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{5} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{5} + \gamma\right)$$

$$\sin. 6\gamma = 32 \sin. \gamma \sin. \left(\frac{\pi}{6} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{6} - \gamma\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{6} + \gamma\right) \times$$

$$\sin. \left(\frac{3\pi}{6} - \gamma\right)$$

&c.

242. De plus, à cause de  $\frac{\sin. 2n\zeta}{\sin. n\zeta} = 2 \cos. n\zeta$ , les cosinus des angles multiples seront exprimés en facteurs d'une manière semblable.

$$\text{Cos. } \zeta = 1. \sin. \left( \frac{\pi}{2} - \zeta \right)$$

$$\text{Cos. } 2\zeta = 2. \sin. \left( \frac{\pi}{4} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{\pi}{4} + \zeta \right)$$

$$\text{Cos. } 3\zeta = 4. \sin. \left( \frac{\pi}{6} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{\pi}{6} + \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{6} - \zeta \right)$$

$$\text{Cos. } 4\zeta = 8. \sin. \left( \frac{\pi}{8} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{\pi}{8} + \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{8} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{8} + \zeta \right)$$

$$\text{Cos. } 5\zeta = 16. \sin. \left( \frac{\pi}{10} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{\pi}{10} + \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{10} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{10} + \zeta \right) \times \\ \sin. \left( \frac{5\pi}{10} - \zeta \right)$$

& en général

$$\text{Cos. } n\zeta = 2^{n-1} \sin. \left( \frac{\pi}{2n} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{\pi}{2n} + \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{2n} - \zeta \right) \sin. \left( \frac{3\pi}{2n} + \zeta \right) \times$$

$$\sin. \left( \frac{5\pi}{2n} - \zeta \right) \text{ \&c.}$$

jusqu'à ce qu'on ait autant de facteurs que  $n$  contient d'unités.

243. Les mêmes expressions se déduisent de la considération des cosinus des arcs multiples. En effet, si l'on fait  $\cos. \zeta = y$ , on trouvera, comme il suit :

$$\text{Cos. } 0\zeta = 1$$

$$\text{Cos. } 1\zeta = y$$

$$\text{Cos. } 2\zeta = 2yy - 1$$

$$\text{Cos. } 3\zeta = 4y^3 - 3y$$

$$\text{Cos. } 4\zeta = 8y^4 - 8yy + 1$$

$$\text{Cos. } 5\zeta = 16y^5 - 20y^3 + 5y$$

$$\text{Cos. } 6\zeta = 32y^6 - 48y^4 + 18yy - 1$$

$$\text{Cos. } 7\zeta = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$$

& en général

$$\text{Cof. } n\zeta = 2^{n-1}y^n - \frac{n}{1} 2^{n-2}y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-3}y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-4}y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-5}y^{n-8} - \dots \quad (kk)$$

Cette équation, à cause de  $\text{cof } n\zeta = \text{cof. } (2\pi - n\zeta) = \text{cof. } (2\pi + n\zeta) = \text{cof. } (4\pi \pm n\zeta) = \text{cof. } (6\pi \pm n\zeta)$  &c, aura pour ses racines  $y$ :  $\text{cof. } \zeta$ ;  $\text{cof. } (\frac{2\pi}{n} \pm \zeta)$ ;  $\text{cof. } (\frac{4\pi}{n} \pm \zeta)$ ;  $\text{cof. } (\frac{6\pi}{n} \pm \zeta)$  &c, & on choisira pour  $y$  autant de ces expressions qu'il y a de racines, c'est-à-dire, autant que  $n$  contient d'unités.

244. D'abord, il est donc évident, qu'à cause du second terme, qui manque, on aura toujours, excepté le cas où  $n=1$ , la somme de toutes ces racines = 0. Par conséquent,

$$0 = \text{cof. } \zeta + \text{cof. } (\frac{2\pi}{n} - \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{n} + \zeta) + \text{cof. } (\frac{4\pi}{n} - \zeta) + \text{cof. } (\frac{4\pi}{n} + \zeta) \text{ &c.}$$

en prenant autant de termes que  $n$  contient d'unités: au reste, cette égalité se présente d'elle-même, si  $n$  est un nombre pair, parce que chaque terme est détruit par un autre négatif qui lui est égal. Considérons donc les nombres impairs en excluant l'unité, & nous aurons, à cause de  $\text{cof. } \nu = -\text{cof. } (\pi - \nu)$

$$0 = \text{cof. } \zeta - \text{cof. } (\frac{\pi}{3} - \zeta) - \text{cof. } (\frac{\pi}{3} + \zeta)$$

$$0 = \text{cof. } \zeta - \text{cof. } (\frac{\pi}{5} - \zeta) - \text{cof. } (\frac{\pi}{5} + \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{5} - \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{5} + \zeta)$$

$$0 = \text{cof. } \zeta - \text{cof. } (\frac{\pi}{7} - \zeta) - \text{cof. } (\frac{\pi}{7} + \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{7} - \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{7} + \zeta) - \text{cof. } (\frac{3\pi}{7} - \zeta) - \text{cof. } (\frac{3\pi}{7} + \zeta)$$

& généralement  $n$  étant un nombre impair quelconque;

$$0 = \text{cof. } \zeta - \text{cof. } (\frac{\pi}{n} - \zeta) - \text{cof. } (\frac{\pi}{n} + \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{n} - \zeta) + \text{cof. } (\frac{2\pi}{n} + \zeta)$$

$$- \text{cof. } (\frac{3\pi}{n} - \zeta) - \text{cof. } (\frac{3\pi}{n} + \zeta) + \text{cof. } (\frac{4\pi}{n} - \zeta) + \text{cof. } (\frac{4\pi}{n} + \zeta) - \dots \text{ &c.}$$

ayant soin de prendre toujours autant de termes que  $n$  contient d'unités: mais, il est nécessaire que  $n$  soit un nombre impair plus nous en avons déjà averti.

245. Quant au produit de toutes les racines, on obtient à la vérité différentes expressions, suivant que  $n$  est un nombre ou impair, ou impairement pair, ou pairement pair; mais elles sont toutes comprises dans l'expression générale trouvée ci-dessus (art. 242), en changeant les sinus en cosinus. Ainsi, on aura . . . . .

$$\text{cos. } \zeta = 1, \text{cos. } \zeta$$

$$\text{cos. } 2\zeta = 2, \text{cos. } \left(\frac{\pi}{4} + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{\pi}{4} - \zeta\right)$$

$$\text{cos. } 3\zeta = 4, \text{cos. } \left(\frac{2\pi}{6} + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{2\pi}{6} - \zeta\right) \text{cos. } \zeta$$

$$\text{cos. } 4\zeta = 8, \text{cos. } \left(\frac{3\pi}{8} + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{3\pi}{8} - \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{\pi}{8} + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{\pi}{8} - \zeta\right)$$

$$\text{cos. } 5\zeta = 16, \text{cos. } \left(\frac{4\pi}{10} + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{4\pi}{10} - \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{2\pi}{10} + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{2\pi}{10} - \zeta\right) \text{cos. } \zeta$$

& en général

$$\text{cos. } n\zeta = 2^{n-1} \text{cos. } \left(\frac{n-1}{2n}\pi + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{n-1}{2n}\pi - \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{n-3}{2n}\pi + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{n-3}{2n}\pi - \zeta\right)$$

$$\text{cos. } \left(\frac{n-5}{2n}\pi + \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{n-5}{2n}\pi - \zeta\right) \text{cos. } \left(\frac{n-7}{2n}\pi + \zeta\right) \text{ \&c.}$$

en prenant autant de facteurs que  $n$  contient d'unités.

246. Soit  $n$  un nombre impair, & commençons l'équation par l'unité; nous aurons  $0 = 1 \mp \frac{ny}{\text{cos. } n\zeta} + \text{\&c}$ , équation dans laquelle il faudra prendre le signe supérieur, si  $n$  est un nombre impair de la forme  $4m + 1$ , & l'inférieur, si  $n = 4m - 1$ . Nous tirerons de-là . . . . .

$$\pm \frac{1}{\text{cos. } \zeta} = \frac{1}{\text{cos. } \zeta}$$

$$\pm \frac{3}{\text{cos. } 3\zeta} = \frac{1}{\text{cos. } \zeta} - \frac{1}{\text{cos. } \left(\frac{\pi}{3} - \zeta\right)} - \frac{1}{\text{cos. } \left(\frac{\pi}{3} + \zeta\right)}$$

$$\pm \frac{5}{\text{cos. } 5\zeta} = \frac{1}{\text{cos. } \zeta} - \frac{1}{\text{cos. } \left(\frac{\pi}{5} - \zeta\right)} - \frac{1}{\text{cos. } \left(\frac{\pi}{5} + \zeta\right)} + \frac{1}{\text{cos. } \left(\frac{2\pi}{5} - \zeta\right)} + \frac{1}{\text{cos. } \left(\frac{2\pi}{5} + \zeta\right)}$$

& généralement, en supposant  $n = 2m + 1$ ,

$$\frac{n}{\operatorname{cof}. n\zeta} = \frac{2m+1}{\operatorname{cof}. (2m+1)\zeta} = \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m}{n}\pi + \zeta\right)} + \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m}{n}\pi - \zeta\right)} - \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m-1}{n}\pi + \zeta\right)} \\ - \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m-1}{n}\pi - \zeta\right)} + \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m-2}{n}\pi + \zeta\right)} + \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m-2}{n}\pi - \zeta\right)} - \frac{1}{\operatorname{cof}. \left(\frac{m-3}{n}\pi + \zeta\right)} - \dots$$

en prenant autant de termes qu'il y a d'unités dans  $n$ .

247. Donc, à cause de  $\frac{1}{\operatorname{cof}. v} = \operatorname{féc}. v$ , on en conclura pour les sécantes ces propriétés remarquables : savoir,

$$\operatorname{féc}. \zeta = \operatorname{féc}. \zeta \\ 3\operatorname{féc}. 3\zeta = \operatorname{féc}. \left(\frac{\pi}{3} + \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{\pi}{3} - \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{0\pi}{3} + \zeta\right) \\ 5\operatorname{féc}. 5\zeta = \operatorname{féc}. \left(\frac{2\pi}{5} + \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{2\pi}{5} - \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{\pi}{5} + \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{\pi}{5} - \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{0\pi}{5} + \zeta\right) \\ 7\operatorname{féc}. 7\zeta = \operatorname{féc}. \left(\frac{3\pi}{7} + \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{3\pi}{7} - \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{2\pi}{7} + \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{2\pi}{7} - \zeta\right) + \\ \operatorname{féc}. \left(\frac{\pi}{7} + \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{\pi}{7} - \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{0\pi}{7} + \zeta\right)$$

& généralement, en faisant  $n = 2m + 1$ ; on aura

$$n\operatorname{féc}. n\zeta = \operatorname{féc}. \left(\frac{m}{n}\pi + \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{m}{n}\pi - \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{m-1}{n}\pi + \zeta\right) - \\ \operatorname{féc}. \left(\frac{m-1}{n}\pi - \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{m-2}{n}\pi + \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{m-2}{n}\pi - \zeta\right) - \\ \operatorname{féc}. \left(\frac{m-3}{n}\pi + \zeta\right) - \operatorname{féc}. \left(\frac{m-3}{n}\pi - \zeta\right) + \operatorname{féc}. \left(\frac{m-4}{n}\pi + \zeta\right) + \dots \pm \operatorname{féc}. \zeta$$

248. Quant aux cofécantes, on trouvera d'après ce que nous avons vu (art 237)

$$\operatorname{coféc}. \zeta = \operatorname{coféc}. \zeta \\ 3\operatorname{coféc}. 3\zeta = \operatorname{coféc}. \zeta + \operatorname{coféc}. \left(\frac{\pi}{3} - \zeta\right) - \operatorname{coféc}. \left(\frac{\pi}{3} + \zeta\right) \\ 5\operatorname{coféc}. 5\zeta = \operatorname{coféc}. \zeta + \operatorname{coféc}. \left(\frac{\pi}{5} - \zeta\right) - \operatorname{coféc}. \left(\frac{\pi}{5} + \zeta\right) - \operatorname{coféc}. \left(\frac{2\pi}{5} - \zeta\right) \\ \pm \operatorname{coféc}. \left(\frac{2\pi}{5} + \zeta\right)$$

$$7 \operatorname{cofc.} \cdot 7 \zeta = \operatorname{cofc.} \cdot \zeta + \operatorname{cofc.} \left( \frac{\pi}{7} - \zeta \right) - \operatorname{cofc.} \left( \frac{\pi}{7} + \zeta \right) - \operatorname{cofc.} \left( \frac{2\pi}{7} - \zeta \right) \\ + \operatorname{cofc.} \left( \frac{2\pi}{7} + \zeta \right) + \operatorname{cofc.} \left( \frac{3\pi}{7} - \zeta \right) - \operatorname{cofc.} \left( \frac{3\pi}{7} + \zeta \right)$$

& généralement en supposant  $n = 2m + 1$ , on aura

$$n \operatorname{cofc.} \cdot n \zeta = \operatorname{cofc.} \cdot \zeta + \operatorname{cofc.} \left( \frac{\pi}{n} - \zeta \right) - \operatorname{cofc.} \left( \frac{\pi}{n} + \zeta \right) - \operatorname{cofc.} \left( \frac{2\pi}{n} - \zeta \right) \\ + \operatorname{cofc.} \left( \frac{2\pi}{n} + \zeta \right) + \operatorname{cofc.} \left( \frac{3\pi}{n} - \zeta \right) - \operatorname{cofc.} \left( \frac{3\pi}{n} + \zeta \right) - \\ \dots \mp \operatorname{cofc.} \left( \frac{m\pi}{n} - \zeta \right) \pm \operatorname{cofc.} \left( \frac{m\pi}{n} + \zeta \right).$$

Les signes supérieurs conviennent aux cas où  $m$  est un nombre pair, & les inférieurs à ceux où  $m$  est un nombre impair.

249. Nous avons vu auparavant que  $\operatorname{cof.} n \zeta \pm \sqrt{-1}$ .  
 $\operatorname{fin.} n \zeta = (\operatorname{cof.} \zeta \pm \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n$  donc  $\operatorname{cof.} n \zeta =$   
 $(\operatorname{cof.} \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n + (\operatorname{cof.} \zeta - \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n$  ;  $\operatorname{fin.} n \zeta =$   
 $\frac{(\operatorname{cof.} \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n - (\operatorname{cof.} \zeta - \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n}{2 \sqrt{-1}}$  ; &  $\operatorname{tang.} n \zeta =$   
 $\frac{(\operatorname{cof.} \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n - (\operatorname{cof.} \zeta - \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n}{(\operatorname{cof.} \zeta + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n \sqrt{-1} + (\operatorname{cof.} \zeta - \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \zeta)^n \sqrt{-1}}$ . Faisons  $\operatorname{tang.} \zeta =$   
 $\frac{\operatorname{fin.} \zeta}{\operatorname{cof.} \zeta} = t$ , nous aurons  $\operatorname{tang.} n \zeta = \frac{(1 + t \sqrt{-1})^n - (1 - t \sqrt{-1})^n}{(1 + t \sqrt{-1})^n \sqrt{-1} + (1 - t \sqrt{-1})^n \sqrt{-1}}$  ;

ce qui donne pour les tangentes des angles multiples les expressions suivantes :

$$\operatorname{tang.} \zeta = t$$

$$\operatorname{tang.} 2 \zeta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\operatorname{tang.} 3 \zeta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$\operatorname{tang.} 4 \zeta = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$\operatorname{tang.} 5 \zeta = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}$$

& en général

$$\text{tang. } n\zeta = \frac{n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} t^5 - \&c.}{1 - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} t t + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^3 - \&c.}$$

A présent, puisque  $\text{tang. } n\zeta = \text{tang.}(\pi + n\zeta) = \text{tang.}(2\pi + n\zeta) = \text{tang.}(3\pi + n\zeta) \&c$ ; les valeurs de  $t$  ou les racines de l'équation feront  $\text{tang. } \zeta$ ;  $\text{tang.}(\frac{\pi}{n} + \zeta)$ ;  $\text{tang.}(\frac{2\pi}{n} + \zeta)$ ;  $\text{tang.}(\frac{3\pi}{n} + \zeta)$ ; &c. jusqu'à ce qu'on en ait un nombre  $n$ .

250. Si l'équation commence par l'unité, on aura . . .

$$0 = 1 - \frac{n t}{\text{tang. } n\zeta} - \frac{n \cdot (n-1) t t}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1)(n-2) t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{tang. } n\zeta} + \&c.$$

& par conséquent la comparaison des coefficients avec les racines donnera . . . . .

$$n \cot. n\zeta = \cot. \zeta + \cot. \left(\frac{\pi}{n} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{2\pi}{n} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{3\pi}{n} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{4\pi}{n} + \zeta\right) + \dots + \cot. \left(\frac{n-1}{n} \pi + \zeta\right).$$

On aura ensuite la somme des quarrés de toutes ces cotangentes  $= \frac{n n}{(\text{fn. } n\zeta)^2} - n$ . Les puissances supérieures peuvent être assignées d'une manière semblable. Au reste, en mettant pour  $n$  des nombres déterminés, on trouvera . . . . .

$$\begin{aligned} \cot. \zeta &= \cot. \zeta \\ 2 \cot. 2\zeta &= \cot. \zeta + \cot. \left(\frac{\pi}{2} + \zeta\right) \\ 3 \cot. 3\zeta &= \cot. \zeta + \cot. \left(\frac{\pi}{3} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{2\pi}{3} + \zeta\right) \\ 4 \cot. 4\zeta &= \cot. \zeta + \cot. \left(\frac{\pi}{4} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{2\pi}{4} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{3\pi}{4} + \zeta\right) \\ 5 \cot. 5\zeta &= \cot. \zeta + \cot. \left(\frac{\pi}{5} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{2\pi}{5} + \zeta\right) + \cot. \left(\frac{3\pi}{5} + \zeta\right) \\ &\quad + \cot. \left(\frac{4}{5} \pi + \zeta\right). \end{aligned}$$

251. Mais comme  $\cot. \nu = - \cot. (\pi - \nu)$ , on aura

$$\begin{aligned} \cot. \zeta &= \cot. \zeta \\ 2 \cot. 2 \zeta &= \cot. \zeta - \cot. \left( \frac{\pi}{2} - \zeta \right) \\ 3 \cot. 3 \zeta &= \cot. \zeta - \cot. \left( \frac{\pi}{3} - \zeta \right) + \cot. \left( \frac{\pi}{3} + \zeta \right) \\ 4 \cot. 4 \zeta &= \cot. \zeta - \cot. \left( \frac{\pi}{4} - \zeta \right) + \cot. \left( \frac{\pi}{4} + \zeta \right) - \cot. \left( \frac{2\pi}{4} - \zeta \right) \\ 5 \cot. 5 \zeta &= \cot. \zeta - \cot. \left( \frac{\pi}{5} - \zeta \right) + \cot. \left( \frac{\pi}{5} + \zeta \right) - \cot. \left( \frac{2\pi}{5} - \zeta \right) + \cot. \left( \frac{2\pi}{5} + \zeta \right) \\ &\text{\& en général} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \cot. n \zeta &= \cot. \zeta - \cot. \left( \frac{\pi}{n} - \zeta \right) + \cot. \left( \frac{\pi}{n} + \zeta \right) - \cot. \left( \frac{2\pi}{n} - \zeta \right) \\ &+ \cot. \left( \frac{2\pi}{n} + \zeta \right) - \cot. \left( \frac{3\pi}{n} - \zeta \right) + \cot. \left( \frac{3\pi}{n} + \zeta \right) - \&c. \end{aligned}$$

jusqu'à ce qu'on ait pris autant de termes que le nombre  $n$  contient d'unités.

252. Commençons l'équation que nous avons trouvée, par la plus haute puissance, & distinguons les cas où  $n$  est un nombre pair, ou un nombre impair. Soit d'abord  $n$  un nombre impair  $= 2m + 1$ , on aura

$$\begin{aligned} 1 - \text{tang. } \zeta &= 0 \\ t^3 - 3 t t \text{ tang. } 3 \zeta - 3 t + \text{tang. } 3 \zeta &= 0 \\ t^5 - 5 t^4 \text{ tang. } 5 \zeta - 10 t^3 + 10 t t \text{ tang. } 5 \zeta + 5 t - \text{tang. } 5 \zeta &= 0 \\ &\text{\& en général} \end{aligned}$$

$$t^n - n t^{n-1} \text{ tang. } n \zeta - \dots - \mp \text{ tang. } n \zeta = 0$$

le signe supérieur  $-$  a lieu, si  $m$  est un nombre pair, & l'inférieur  $+$  si  $m$  est un nombre impair. On aura donc, à cause du coefficient du second terme

$$\begin{aligned} \text{tang. } \zeta &= \text{tang. } \zeta \\ 3 \text{ tang. } 3 \zeta &= \text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{3} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{3} + \zeta \right) \\ 5 \text{ tang. } 5 \zeta &= \text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{5} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{5} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{5} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{4\pi}{5} + \zeta \right) \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$



253. Comme  $\text{tang. } \nu = -\text{tang. } (\pi - \nu)$ , les angles plus grands qu'une angle droit se ramènent à ceux qui sont plus petits, & on a . . . . .

$$\begin{aligned} \text{tang. } \zeta &= \text{tang. } \zeta \\ 3 \text{ tang. } 3 \zeta &= \text{tang. } \zeta - \text{tang. } \left(\frac{\pi}{3} - \zeta\right) + \text{tang. } \left(\frac{\pi}{3} + \zeta\right) \\ 5 \text{ tang. } 5 \zeta &= \text{tang. } \zeta - \text{tang. } \left(\frac{\pi}{5} - \zeta\right) + \text{tang. } \left(\frac{\pi}{5} + \zeta\right) - \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{5} - \zeta\right) + \\ &\quad \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{5} + \zeta\right) \\ 7 \text{ tang. } 7 \zeta &= \text{tang. } \zeta - \text{tang. } \left(\frac{\pi}{7} - \zeta\right) + \text{tang. } \left(\frac{\pi}{7} + \zeta\right) - \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{7} - \zeta\right) + \\ &\quad \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{7} + \zeta\right) - \text{tang. } \left(\frac{3\pi}{7} - \zeta\right) + \text{tang. } \left(\frac{3\pi}{7} + \zeta\right), \end{aligned}$$

& généralement si  $n = 2m + 1$ , on aura . . . . .

$$\begin{aligned} n \text{ tang. } n \zeta &= \text{tang. } \zeta - \text{tang. } \left(\frac{\pi}{n} - \zeta\right) + \text{tang. } \left(\frac{\pi}{n} + \zeta\right) - \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{n} - \zeta\right) \\ &+ \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{n} + \zeta\right) - \text{tang. } \left(\frac{3\pi}{n} - \zeta\right) + \dots - \text{tang. } \left(\frac{m\pi}{n} - \zeta\right) + \text{tang. } \left(\frac{m\pi}{n} + \zeta\right). \end{aligned}$$

254. Quant au produit de toutes ces tangentes, il fera  $= \text{tang. } n \zeta$ , parce que le nombre des signes négatifs, qui se trouve alternativement pair & impair, fait disparaître l'ambiguïté des signes ci-dessus. Ainsi on aura . . . . .

$$\begin{aligned} \text{tang. } \zeta &= \text{tang. } \zeta \\ \text{tang. } 3 \zeta &= \text{tang. } \zeta \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{3} - \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{\pi}{3} + \zeta\right) \\ \text{tang. } 5 \zeta &= \text{tang. } \zeta \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{5} - \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{\pi}{5} + \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{5} - \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{5} + \zeta\right) \\ &\quad \text{et en général si } n = 2m + 1, \dots \\ \text{tang. } n \zeta &= \text{tang. } \zeta \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{n} - \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{\pi}{n} + \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{n} - \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{n} + \zeta\right) \times \\ &\quad \text{tang. } \left(\frac{3\pi}{n} - \zeta\right) \dots \times \text{tang. } \left(\frac{m\pi}{n} - \zeta\right) \text{tang. } \left(\frac{m\pi}{n} + \zeta\right). \end{aligned}$$

255. Soit maintenant  $n$  un nombre pair, & commençons par la plus grande puissance, nous aurons . . . . .

$$\begin{aligned} t t + 2 t \cot. 2 \zeta - 1 &= 0 \\ t^4 + 4 t^3 \cot. 4 \zeta - 6 t t - 4 t \cot. 4 \zeta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 C

& en général, si  $n = 2m$ ,  
 $t^n + n t^{n-1} \cot. n \zeta - \dots - 1 = 0$   
 le signe supérieur — a lieu, si  $m$  est un nombre impair, & l'inférieur + si  $m$  est pair. En comparant donc les racines avec le coefficient du second terme, nous trouverons

$$\begin{aligned}
 -2 \cot. 2 \zeta &= \text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{2} + \zeta \right) \\
 -4 \cot. 4 \zeta &= \text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{4} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{4} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{4} + \zeta \right) \\
 -6 \cot. 6 \zeta &= \text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{6} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{6} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{6} + \zeta \right) \\
 &\quad + \text{tang. } \left( \frac{4\pi}{6} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{5\pi}{6} + \zeta \right) \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

256. A cause de  $\text{tang. } \nu = -\text{tang. } (\pi - \nu)$ , on formeræ les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 2 \cot. 2 \zeta &= -\text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{2} - \zeta \right) \\
 4 \cot. 4 \zeta &= -\text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{4} - \zeta \right) - \text{tang. } \left( \frac{\pi}{4} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{4} - \zeta \right) \\
 6 \cot. 6 \zeta &= -\text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{6} - \zeta \right) - \text{tang. } \left( \frac{\pi}{6} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{6} - \zeta \right) \\
 &\quad - \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{6} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{6} - \zeta \right)
 \end{aligned}$$

& en général, si  $n = 2m$ , on a

$$\begin{aligned}
 n \cot. n \zeta &= -\text{tang. } \zeta + \text{tang. } \left( \frac{\pi}{n} - \zeta \right) - \text{tang. } \left( \frac{\pi}{n} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{n} - \zeta \right) \\
 &\quad - \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{n} + \zeta \right) + \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{n} - \zeta \right) - \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{n} + \zeta \right) + \dots + \text{tang. } \left( \frac{m\pi}{n} - \zeta \right)
 \end{aligned}$$

257. Ces formules font disparôître encore l'ambiguité des signes du produit de toutes les racines; & on aura par cette raison

$$\begin{aligned}
 1 &= \text{tang. } \zeta \cdot \text{tang. } \left( \frac{\pi}{2} - \zeta \right) \\
 1 &= \text{tang. } \zeta \cdot \text{tang. } \left( \frac{\pi}{4} - \zeta \right) \cdot \text{tang. } \left( \frac{\pi}{4} + \zeta \right) \cdot \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{4} - \zeta \right) \\
 1 &= \text{tang. } \zeta \cdot \text{tang. } \left( \frac{\pi}{6} - \zeta \right) \cdot \text{tang. } \left( \frac{\pi}{6} + \zeta \right) \cdot \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{6} - \zeta \right) \cdot \text{tang. } \left( \frac{2\pi}{6} + \zeta \right) \cdot \text{tang. } \left( \frac{3\pi}{6} - \zeta \right) \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

au surplus, la raison pour laquelle ces équations ont lieu, est sensible & fautive d'abord aux yeux; puisqu'il y a toujours deux angles complémens l'un de l'autre. Les tangentes de deux de ces angles donnent donc toujours un produit = 1, & par conséquent le produit de toutes doit être égal à l'unité.

258. Comme les sinus & les cosinus des angles en progression arithmétique forment une série récurrente, on pourra assigner par le Chapitre précédent la somme d'autant de ces sinus & de ces cosinus qu'on voudra. Soient les angles en progression arithmétique . . . . .

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, a + 5b \text{ \&c,}$$

& cherchons d'abord la somme des sinus de ces angles, en supposant la progression infinie. Soit donc . . . . .

$$s = \sin. a + \sin. (a + b) + \sin. (a + 2b) + \sin. (a + 3b) + \text{\&c.}$$

& comme cette série est une série récurrente, dont l'échelle de relation est  $2 \cos. b - 1$ , elle provient du développement d'une fraction, dont le dénominateur est  $1 - 2\zeta \cos. b + \zeta\zeta$ , en faisant  $\zeta = 1$ . Or cette fraction sera =  $\frac{\sin. a + \zeta [\sin. (a + b) - 2 \sin. a \cos. b]}{1 - 2\zeta \cos. b + \zeta\zeta}$ . Donc en supposant  $\zeta = 1$ ,

$$\text{on aura } s = \frac{\sin. a + \sin. (a + b) - 2 \sin. a \cos. b}{2 - 2 \cos. b} = \frac{\sin. a - \sin. (a - b)}{2(1 - \cos. b)}$$

à cause de  $2 \sin. a \cos. b = \sin. (a + b) + \sin. (a - b)$ . Mais, comme  $\sin. f - \sin. g = 2 \cos. \frac{f+g}{2} \sin. \frac{f-g}{2}$ , il s'en suit que  $\sin. a - \sin. (a - b) = 2 \cos. (a - \frac{1}{2} b) \sin. \frac{1}{2} b$ : d'ailleurs  $1 - \cos. b = 2 (\sin. \frac{1}{2} b)^2$ ; ce qui donne  $s = \frac{\cos. (a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin. \frac{1}{2} b}$ .

259. Concluons de-là qu'on pourra assigner la somme d'un certain nombre de sinus, dont les arcs sont en progression arithmétique. En effet, qu'il s'agisse d'avoir la somme de cette progression . . . . .

$\sin. a + \sin. (a + b) + \sin. (a + 2b) + \sin. (a + 3b) + \dots + \sin. (a + nb)$ ;  
 Comme la somme de cette progression continuée à l'infini  
 est  $\frac{\cos. (a - \frac{1}{2}b)}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$ ; considérons les termes qui suivent le dernier  
 à l'infini: savoir,  $\sin. [a + (n + 1)b] + \sin. [a + (n + 2)b]$   
 $+ \sin. [a + (n + 3)b] + \dots$  leur somme sera  $= \frac{\cos. [a + (n + \frac{1}{2})b]}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$ ;  
 retranchons celle-ci de la première, & il restera la somme  
 demandée, c'est-à-dire, que si on suppose  $s = \sin. a + \sin. (a + b)$   
 $+ \sin. (a + 2b) + \dots + \sin. (a + nb)$ ; on aura  
 $s = \frac{\cos. (a - \frac{1}{2}b) - \cos. [a + (n + \frac{1}{2})b]}{2 \sin. \frac{1}{2}b} = \frac{\sin. (a + \frac{1}{2}nb) \sin. \frac{1}{2}(n + 1)b}{\sin. \frac{1}{2}b}$ .

260. Pareillement, si on veut avoir la somme des cosinus,  
 & qu'on fasse  
 $s = \cos. a + \cos. (a + b) + \cos. (a + 2b) + \cos. (a + 3b) + \dots$   
 à l'infini, on trouvera  $s = \frac{\cos. a + \gamma [\cos. (a + b) - 2 \cos. a \cos. b]}{1 - 2\gamma \cos. b + \gamma^2}$ ,  
 en supposant  $\gamma = 1$ . Donc à cause de  $2 \cos. a \cos. b = \cos. (a - b)$   
 $+ \cos. (a + b)$ ,  $s$  deviendra  $= \frac{\cos. a - \cos. (a - b)}{2(1 - \cos. b)}$ . Or  $\cos. f - \cos. g$   
 $= 2 \sin. \frac{f + g}{2} \sin. \frac{g - f}{2}$ ; par conséquent,  $\cos. a - \cos. (a - b) =$   
 $= 2 \sin. (a - \frac{1}{2}b) \sin. \frac{1}{2}b$ , & à cause de  $1 - \cos. b = 2 (\sin. \frac{1}{2}b)^2$   
 on aura  $s = \frac{\sin. (a - \frac{1}{2}b)}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$ ; & comme on a d'une manière  
 semblable la somme de la série  
 $\cos. [a + (n + 1)b] + \cos. [a + (n + 2)b] + \cos. [a + (n + 3)b] + \dots$   
 $= \frac{\sin. [a + (n + \frac{1}{2})b]}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$ , en retranchant cette dernière de l'autre,  
 le reste sera la somme de cette série  
 $s = \cos. a + \cos. (a + b) + \cos. (a + 2b) + \cos. (a + 3b) + \dots + \cos. (a + nb)$ ;  
 & conséquemment  $s = \frac{\sin. (a - \frac{1}{2}b) + \sin. [a + (n + \frac{1}{2})b]}{2 \sin. \frac{1}{2}b} =$   
 $\frac{\cos. (a + \frac{1}{2}nb) \sin. [\frac{1}{2}(n + 1)b]}{\sin. \frac{1}{2}b}$ .

261. On pourroit, à l'aide des principes précédents,

réfoudre beaucoup d'autres questions relatives aux sinus & aux tangentes; comme, par exemple, trouver la somme des quarrés, ou des puissances plus élevées des sinus & des tangentes; mais comme cela se déduit des autres coefficients des équations ci-dessus, en suivant un procédé analogue, je ne m'arrêterai pas davantage sur cet objet. Quant à ces dernières formations, il faut remarquer qu'une puissance quelconque de sinus & de cosinus peut être développée en sinus & en cosinus d'arcs multiples; c'est ce que, pour plus de clarté, nous allons exposer ici brièvement.

262. Pour cet effet, il conviendra de tirer de ce qui précède les lemmes suivans :

$$2 \sin. a. \sin. x = \cosf. (a - x) - \cosf. (a + x)$$

$$2 \cosf. a. \sin. x = \sin. (a + x) - \sin. (a - x)$$

$$2 \sin. a. \cosf. x = \sin. (a + x) + \sin. (a - x)$$

$$2 \cosf. a. \cosf. x = \cosf. (a - x) + \cosf. (a + x)$$

On en conclura d'abord les puissances des sinus :

$$\sin. x = \sin. x$$

$$2 (\sin. x)^2 = 1 - \cosf. 2x$$

$$4 (\sin. x)^3 = 3 \sin. x - \sin. 3x$$

$$8 (\sin. x)^4 = 3 - 4 \cosf. 2x + \cosf. 4x$$

$$16 (\sin. x)^5 = 10 \sin. x - 5 \sin. 3x + \sin. 5x$$

$$32 (\sin. x)^6 = 10 - 15 \cosf. 2x + 6 \cosf. 4x - \cosf. 6x$$

$$64 (\sin. x)^7 = 35 \sin. x - 21 \sin. 3x + 7 \sin. 5x - \sin. 7x$$

$$128 (\sin. x)^8 = 35 - 56 \cosf. 2x + 28 \cosf. 4x - 8 \cosf. 6x + \cosf. 8x$$

$$256 (\sin. x)^9 = 126 \sin. x - 84 \sin. 3x + 36 \sin. 5x - 9 \sin. 7x + \sin. 9x$$

La loi que suivent ces coefficients est la même que celle des derniers coefficients numériques du binome, excepté que dans les puissances paires, le nombre constant n'est que la moitié de celui que donne le binome. <sup>(11)</sup>

263. On aura pareillement les puissances des cosinus :

$$\cos. z = \cos. z$$

$$2(\cos. z)^2 = 1 + \cos. 2z$$

$$4(\cos. z)^3 = 3\cos. z + \cos. 3z$$

$$8(\cos. z)^4 = 3 + 4\cos. 2z + \cos. 4z$$

$$16(\cos. z)^5 = 10\cos. z + 5\cos. 3z + \cos. 5z$$

$$32(\cos. z)^6 = 10 + 15\cos. 2z + 6\cos. 4z + \cos. 6z$$

$$64(\cos. z)^7 = 35\cos. z + 21\cos. 3z + 7\cos. 5z + \cos. 7z.$$

&c.

Il faut faire ici à l'égard de la loi de la progression la même remarque, que nous avons faite pour les sinus.

## CHAPITRE XV.

### *Des Séries résultantes du développement des Facteurs.*

264. Soit proposé un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs, fini ou infini, de cette manière  $(1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)(1 + ez)(1 + fz)$  &c. lequel, étant développé par la multiplication, donne

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \text{\&c.};$$

il est évident que les coefficients  $A, B, C, D, E$  &c. sont formés des nombres  $a, b, c, d, e, f$ , &c. de sorte que  $A = a + b + c + d + e + f + \text{\&c.}$  = à leur somme.

$B$  = à la somme de ces nombres combinés deux à deux.

$C$  = à la somme de ces nombres combinés trois à trois.

$D$  = à la somme de ces nombres combinés quatre à quatre.

$E$  = à la somme de ces nombres combinés cinq à cinq.

&c.

jusqu'à ce qu'on soit arrivé au produit de tous.

265. Donc, si on fait  $\zeta = 1$ , ce produit . . . . .

$$(1 + \alpha) (1 + \epsilon) (1 + \gamma) (1 + \delta) (1 + \epsilon) \&c.$$

fera égal à l'unité, plus à la suite de tous les nombres, qu'on peut former avec les lettres  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon$ , en les prenant séparément, ou en les multipliant deux à deux, ou en plus grand nombre; & si le même nombre peut résulter de leur combinaison de deux ou d'un plus grand nombre de manières, il se trouvera dans la série deux fois ou davantage.

266. Si on suppose  $\zeta = -1$ , ce produit . . . . .

$$(1 - \alpha) (1 - \epsilon) (1 - \gamma) (1 - \delta) (1 - \epsilon) \&c.$$

fera égal à l'unité ajoutée à la suite de tous les nombres, qui résulteroient des quantités  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$  &c. en les prenant séparément, ou en les combinant deux à deux, ou en plus grand nombre, comme dans le cas précédent; mais avec cette différence que les nombres, que donneroit chacune des lettres, ou leur combinaison trois à trois, cinq à cinq, ou en nombre impair, sont négatifs, & qu'au contraire ceux qu'on obtiendrait de leurs produits distincts, en les prenant deux à deux, quatre à quatre, ou six à six, ou en nombre pair, sont positifs.

267. Écrivons pour  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$  &c. tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, alors ce produit . . . . .

$$(1 + 2) (1 + 3) (1 + 5) (1 + 7) (1 + 11) (1 + 13) \&c. = P$$

vaudra l'unité, plus la suite de tous les nombres premiers, & de ceux que donnent les produits de ceux-ci, en ne prenant qu'une fois chacun d'eux dans leur combinaison. Ainsi

$$P = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13 + 15 + 17 + \&c.$$

série qui renferme tous les nombres naturels, excepté les puissances, ou ceux qui sont divisibles par des puissances. On n'y trouvera donc point les nombres 4, 8, 9, 12, 16, 18 &c; parce qu'ils sont ou des puissances, comme 4, 8, 9, 16 &c., ou divisibles par des puissances, comme 12, 18 &c.

268. Il en fera de même, si on met pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$  des puissances quelconques des nombres premiers; si l'on fait, par exemple,

$$P = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \left(1 + \frac{1}{5^n}\right) \left(1 + \frac{1}{7^n}\right) \left(1 + \frac{1}{11^n}\right) \&c.$$

En effet, en faisant la multiplication, on aura

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

Ces fractions renferment tous les nombres, excepté ceux qui sont des puissances, ou qui sont divisibles par quelque puissance. Car tous les nombres entiers étant eux-mêmes ou des nombres premiers, ou des nombres formés de ceux-ci par la multiplication, il n'y aura d'exclus ici que ceux dans la formation desquels le même nombre premier entre deux ou plusieurs fois.

269. Si nous prenons négativement les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \&c.$ ; comme nous avons fait ci-dessus (art. 266), & que nous supposons

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c.$$

nous aurons

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{15^n} - \&c.$$

où se trouve encore tous les nombres, à l'exception des puissances & des nombres divisibles par les puissances. Mais les nombres premiers, & ceux qui sont formés de leur combinaison, en les prenant trois à trois, cinq à cinq, ou en nombre impair, sont précédés du signe  $-$ , tandis que ceux qui résultent de leur multiplication, deux à deux, quatre à quatre, six à six, ou en nombre pair, ont le signe  $+$ .

Ainsi le terme  $\frac{1}{30^n}$  se trouvera dans cette série, parce que  $30 = 2. 3. 5$ , & ne renferme point par conséquent de puissance; & de plus ce même terme  $\frac{1}{30^n}$  aura le signe  $-$ , parce



parce que 30 est le produit de trois nombres premiers.

270. Considérons maintenant cette expression . . .

$$\frac{1}{(1 - a\zeta)(1 - b\zeta)(1 - \gamma\zeta)(1 - \delta\zeta)(1 - \epsilon\zeta) \&c.}$$

dont le développement par la division donne la série :

$$1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + E\zeta^5 + F\zeta^6 + \&c.$$

il est clair que les coefficients  $A, B, C, D, E$  &c. sont formés des nombres  $a, b, \gamma, \delta, \epsilon$  &c. de la manière suivante, de sorte que . . .

$A$  = à la somme de chacun d'eux.

$B$  = à la somme de leurs produits deux à deux.

$C$  = à la somme de leurs produits trois à trois.

$D$  = à la somme de leurs produits quatre à quatre.

&c.

} les mêmes  
facteurs n'étant  
plus exclus.

271. Donc, si  $\zeta = 1$ , cette expression . . .

$$\frac{1}{(1 - a)(1 - b)(1 - \gamma)(1 - \delta)(1 - \epsilon) \&c.}$$

sera égale à l'unité ajoutée à la suite de tous les nombres, que ceux-ci  $a, b, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$  &c. peuvent donner, en les prenant séparément, ou en les multipliant entr'eux deux à deux, ou en plus grand nombre, les mêmes pouvant être pris plusieurs fois dans leur combinaison. Il y a donc cette différence entre cette suite & la précédente (art. 265), que dans la dernière on ne pouvoit prendre que des facteurs différents, & que dans celle-ci, au contraire, le même facteur peut revenir deux ou plusieurs fois; c'est-à-dire, qu'on trouve ici tous les nombres qui peuvent provenir de la multiplication de ceux-ci:  $a, b, \gamma, \delta$  &c.

272. Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque soit le nombre des facteurs, infini ou fini. Par exemple, on aura . . .

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \&c.$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 D

férie, où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux; c'est-à-dire, toutes les puissances de deux. On aura ensuite

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \&c.$$

On ne trouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 & 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 & 3.

273. Donc, si au lieu de  $a, c, \gamma, \delta$  &c. on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, & qu'on suppose

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13}) \&c.}$$

on aura . . . . .

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \&c.$$

Série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers, que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or comme tous les nombres sont ou des nombres premiers, ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs.

274. La même chose arrive, si on prend des puissances quelconques des nombres premiers. En effet, si on suppose

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n}) \&c.}$$

on aura . . . . .

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

Série dans laquelle se trouvent tous les nombres naturels sans exception. Mais si dans les facteurs on met par-tout le signe +, de manière que . . . . .

$$P = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n}) \&c.}$$

alors . . . . .

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \&c.$$

Ici les nombres premiers ont le signe — ; ceux qui sont le produit de deux nombres premiers, les mêmes ou non, ont le signe +, & en général les nombres qui sont formés par un nombre pair de facteurs premiers, ont le signe +, & ceux qui sont composés d'un nombre impair de facteurs

premiers, sont précédés du signe —. Ainsi le terme  $\frac{1}{240^n}$ , à cause que  $240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ , aura le signe +, comme il est facile de le voir par l'art. 270, en faisant  $\gamma = -1$ .

275. En comparant ces résultats avec les précédents, on trouvera deux séries, dont le produit est égal à l'unité. Car soit

$$P = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n}) \&c.}$$

$$Q = (1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n}) \&c.$$

on aura . . . . .

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

$$Q = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} \&c. \text{ (art. 269) } \&$$

il est évident qu'on aura  $PQ = 1$ .

276. Mais si on suppose . . . . .

$$P = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n}) \&c.}$$

$$Q = (1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n}) \&c.$$

2 D ij

on aura . . . . .

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \&c.$$

$$Q = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

&c., de même qu'auparavant,  $PQ = 1$ . La somme d'une des séries étant donc connue, celle de la seconde le sera aussi.

277. Réciproquement, étant données les sommes de ces séries, on pourra assigner les valeurs de produits composés d'une infinité de facteurs. En effet, soit . . . . .

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c.$$

&c on aura . . . . .

$$M = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c.}$$

$$N = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{7^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{11^{2n}}\right) \&c.}$$

On obtient par la division . . . . .

$$\frac{M}{N} = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \left(1 + \frac{1}{5^n}\right) \left(1 + \frac{1}{7^n}\right) \left(1 + \frac{1}{11^n}\right) \&c.$$

Enfin on aura . . . . .

$$\frac{MM}{N} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n + 1}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n + 1}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n + 1}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n + 1}{11^n - 1} \cdot \&c.$$

Par conséquent  $M$  &  $N$  étant une fois connues, on aura, outre les valeurs de ces produits, les sommes de ces séries :

$$\frac{1}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \&c.$$

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} - \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} - \frac{1}{11^{2n}} - \&c.$$

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

$$\frac{N}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \&c.$$

Et la combinaison de celles-ci peut en donner plusieurs autres.

*E X E M P L E I.*

Soit  $n = 1$  ; comme nous avons démontré auparavant que

$$l \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \&c ; \text{ on aura, en}$$

supposant  $x=1$ ,  $l \frac{1}{1-1} = l \infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c$  ;  
 mais le logarithme d'un nombre infini  $\infty$  est lui-même infiniment grand ; donc

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c. = \infty.$$

Donc, à cause de  $\frac{1}{M} = \frac{1}{\infty} = 0$ , on aura

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \&c$$

En prenant les produits, on trouvera

$$M = \infty = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \&c.}$$

ce qui donne

$$\infty = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \&c.$$

&

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{19} \&c.$$

Ensuite, d'après la sommation des séries que nous avons donnée auparavant, \* nous aurons \* (167)

$$N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = \frac{\pi^2}{6}$$

D'où nous concluons ces sommes de séries

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \&c.$$

$$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \&c.$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \&c.$$

Et, si nous employons les facteurs, ils nous donneront

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdot \&c.$$

ou

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{121}{120} \cdot \frac{169}{168} \cdot \&c.$$

Et à cause de  $\frac{M}{N} = \infty$ , ou de  $\frac{N}{M} = 0$ , on aura

$$\infty = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \&c.$$

ou

$$0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \&c.$$

&

$$\infty = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{20}{18} \cdot \&c.$$

ou

$$0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \&c.$$

Les numérateurs de ces fractions, (j'en excepte la première) sont moindres que les dénominateurs d'une unité; & les sommes des numérateurs & des dénominateurs de chaque fraction donnent constamment les nombres premiers

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, &c.

EXEMPLE II.

Soit  $n = 2$  ; d'après ce que nous avons vu, \* (167)

$$M = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi\pi}{6}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

On aura d'abord ces sommes de séries :

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \dots$$

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} - \dots$$

$$\frac{15}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots$$

$$\frac{\pi\pi}{15} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} \dots$$

Et ensuite ces valeurs des produits suivants :

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \dots$$

$$\frac{90}{\pi^4} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \dots$$

$$\frac{15}{\pi\pi} = \frac{2^2+1}{2^2} \cdot \frac{3^2+1}{3^2} \cdot \frac{5^2+1}{5^2} \cdot \frac{7^2+1}{7^2} \cdot \frac{11^2+1}{11^2} \dots$$

Où

$$\frac{\pi\pi}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{121}{122} \cdot \frac{169}{170} \dots$$

&c

$$\frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2^2-1} \cdot \frac{3^2+1}{3^2-1} \cdot \frac{5^2+1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2+1}{7^2-1} \cdot \frac{11^2+1}{11^2-1} \dots$$

Où

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \dots$$

Où

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \dots$$

Dans ces fractions les numérateurs surpassent d'une unité

les dénominateurs, & pris ensemble ils forment les carrés des nombres premiers  $3^2, 5^2, 7^2, 11^2, \&c.$

E X E M P L E III.

Comme, d'après ce que nous avons vu, on ne peut avoir les valeurs de  $M$ , qu'entant que  $n$  est un nombre pair, supposons  $n = 4$ , nous aurons \*

$$M = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \&c. = \frac{\pi^4}{90}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \&c. = \frac{\pi^8}{9450}$$

On a d'abord les sommes des séries suivantes :

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} \&c.$$

$$\frac{9450}{\pi^8} = 1 - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8} - \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} - \frac{1}{7^8} + \frac{1}{10^8} - \frac{1}{11^8} \&c.$$

$$\frac{105}{\pi^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{11^4} \&c.$$

$$\frac{\pi^4}{105} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} - \frac{1}{8^4} + \frac{1}{9^4} \&c.$$

Ensuite on obtient aussi les valeurs des produits, qui suivent :

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \cdot \frac{3^4}{3^4 - 1} \cdot \frac{5^4}{5^4 - 1} \cdot \frac{7^4}{7^4 - 1} \cdot \frac{11^4}{11^4 - 1} \&c.$$

$$\frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8 - 1} \cdot \frac{3^8}{3^8 - 1} \cdot \frac{5^8}{5^8 - 1} \cdot \frac{7^8}{7^8 - 1} \cdot \frac{11^8}{11^8 - 1} \&c.$$

$$\frac{105}{\pi^4} = \frac{2^4 + 1}{2^4} \cdot \frac{3^4 + 1}{3^4} \cdot \frac{5^4 + 1}{5^4} \cdot \frac{7^4 + 1}{7^4} \cdot \frac{11^4 + 1}{11^4} \&c.$$

$$\frac{7}{6} = \frac{2^4 + 1}{2^4 - 1} \cdot \frac{3^4 + 1}{3^4 - 1} \cdot \frac{5^4 + 1}{5^4 - 1} \cdot \frac{7^4 + 1}{7^4 - 1} \cdot \frac{11^4 + 1}{11^4 - 1} \&c.$$

OU

$$\frac{35}{34} = \frac{41}{40} \cdot \frac{313}{312} \cdot \frac{1201}{1200} \cdot \frac{7321}{7320} \&c.$$

Dans ces facteurs les numérateurs surpassent d'une unité les dénominateurs, & ajoutés ensemble ils forment les quatrièmes



quatrièmes puissances des nombres premiers impairs . . .  
3, 5, 7, 11, &c.

278. Après avoir ici transformé en facteurs la somme de la série

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \&c.$$

il fera facile d'y appliquer les logarithmes. En effet, puisque

$$M = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c.}$$

on aura

$$lM = -l\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - l\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - l\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) - l\left(1 - \frac{1}{7^n}\right) - \&c.$$

Donc, en prenant les logarithmes hyperboliques, on aura

$$\begin{aligned} lM = &+ 1 \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \&c. \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \&c. \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \&c. \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \&c. \right) \\ &\&c. \end{aligned}$$

Si nous supposons de plus,

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \&c.$$

de sorte que

$$N = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{7^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{11^{2n}}\right) \&c.}$$

On aura de même, en prenant les logarithmes hyperboliques,

$$\begin{aligned} lN = &+ 1 \left( \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \&c. \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \&c. \right) \end{aligned}$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 E

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{6n}} + \frac{1}{3^{6n}} + \frac{1}{5^{6n}} + \frac{1}{7^{6n}} + \frac{1}{11^{6n}} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2^{8n}} + \frac{1}{3^{8n}} + \frac{1}{5^{8n}} + \frac{1}{7^{8n}} + \frac{1}{11^{8n}} + \&c. \right) \\
 & \quad \&c.
 \end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on obtiendra  $lM - \frac{1}{2} lN =$

$$\begin{aligned}
 & + 1 \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2^{5n}} + \frac{1}{3^{5n}} + \frac{1}{5^{5n}} + \frac{1}{7^{5n}} + \frac{1}{11^{5n}} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2^{7n}} + \frac{1}{3^{7n}} + \frac{1}{5^{7n}} + \frac{1}{7^{7n}} + \frac{1}{11^{7n}} + \&c. \right) \\
 & \quad \&c.
 \end{aligned}$$

279. Si  $n = 1$ ; on aura  $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$   
 $= l\infty$ , &  $N = \frac{\pi\pi}{6}$ , on en conclura  $l.l\infty - \frac{1}{2} l \frac{\pi\pi}{6} =$

$$\begin{aligned}
 & + 1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{11^5} + \&c. \right) \\
 & + \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{11^7} + \&c. \right) \\
 & \quad \&c.
 \end{aligned}$$

Or ces séries, à l'exception de la première, non seulement ont des sommes finies, mais encore toutes réunies, elles ne forment qu'une somme finie, & même assez petite; d'où il s'enfuit nécessairement que la somme de la première série  
 ( *mm* )  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \&c.$  est infiniment grande, & qu'elle diffère assez peu du logarithme hyperbolique de la série  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \&c.$

280. Soit  $n = 2$  ; on aura  $M = \frac{\pi\pi}{6}$ , &  $N = \frac{\pi^4}{90}$  ;  
d'où il s'enfuit que

$$\begin{aligned}
 31\pi - 16 &= 1 \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \&c. \right) \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41\pi - 190 &= 1 \left( \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{11^8} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \frac{1}{11^{12}} + \&c. \right) \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \text{ l } \frac{5}{2} &= 1 \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \&c. \right) \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

281. Quoique la loi, que suivent les nombres premiers, ne soit pas connue, cependant il ne sera pas difficile d'avoir à-peu-près la somme des puissances un peu élevées de ces séries. En effet, soit la série

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$

& celle-ci

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \&c.$$

on aura

$$S_1 = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \&c.$$

&amp; parce que

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \&c.$$

on aura

$$S = M - \frac{M}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \&c.$$

ou

$$S = (M-1) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{27^n} - \&c.$$

&amp; à cause de

$$M \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \&c.$$

on obtiendra

$$S = (M-1) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} - \&c.$$

Ainsi, comme on connoît la somme  $M$ , on trouvera facilement la valeur de  $S$ , pourvu que  $n$  soit un nombre passablement grand.

( $nn$ ) 282. Au reste, les sommes des plus hautes puissances étant trouvées, on peut aussi, à l'aide des formules précédentes, assigner les sommes des puissances moins élevées; & c'est par cette méthode que nous avons obtenu les sommes suivantes de la série

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c.$$

Si la somme de la série sera

$$n = 2; \quad 0,452247420041222$$

$$n = 4; \quad 0,076993139764252$$

$$n = 6; \quad 0,017070086850639$$

$$n = 8; \quad 0,004061405366515$$

$$n = 10; \quad 0,000993603573633$$

$$n = 12; \quad 0,000246026470033$$

$$n = 14; \quad 0,000061244396725$$

$n = 16;$	0,000015282026219
$n = 18;$	0,000003817278702
$n = 20;$	0,000000953961123
$n = 22;$	0,00000 238450446
$n = 24;$	0,000000 55608184
$n = 26;$	0,000000014901555
$n = 28;$	0,000000003725333
$n = 30;$	0,000000000931323
$n = 32;$	0,000000000232830
$n = 34;$	0,000000000058207
$n = 36;$	0,000000000014551

Les autres sommes des puissances paires décroissent en raison quadruple.

283. Cette conversion de la série  $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$  en un produit infini, peut aussi s'effectuer directement, en s'y prenant de la manière suivante : soit

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

retranchez

$$\frac{1}{2^n} A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

vous aurez

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) A = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \&c. = B;$$

ainsi tous les termes divisibles par 2 ont disparu.

$$\text{Retranchez } \frac{1}{3^n} B = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \&c.$$

vous aurez

$$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) B = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \&c. = C;$$

De cette manière, vous n'aurez plus de termes divisibles par 3 ;

Retranchez  $\frac{1}{5^n} C = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} + \frac{1}{55^n} + \&c.$

il vous restera

$$\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) C = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c;$$

ainsi tous les termes divisibles par 5, auront aussi disparu. Vous ferez disparaître d'une manière semblable tous les termes divisibles par 7, 11 & par les autres nombres premiers; or il est clair qu'après avoir fait disparaître tous les termes divisibles par les nombres premiers, il ne restera plus que l'unité. Par conséquent, en mettant pour  $B, C, D, E$  & leurs valeurs, vous aurez enfin

$$A \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c. = 1,$$

d'où vous conclurez la somme de la série proposée =

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c.}$$

ou

$$A = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \&c.$$

284. Cette méthode pourra encore être employée avantageusement pour transformer en produits infinis les autres séries, dont nous avons auparavant déterminé les sommes. Or nous avons trouvé (art. 175) les sommes de ces séries

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \&c.$$

lorsque  $n$  est un nombre impair; car leur somme est  $= N \pi^n$ ; & nous avons donné les valeurs de  $N$  dans l'endroit cité. Mais il faut observer que parmi les nombres impairs, qui sont les seuls, qui se présentent ici, ceux de la forme  $4m + 1$  ont le signe +, & que les autres de la forme  $4m - 1$  ont le signe -. Soit donc

$$A = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{15^n} + \&c.$$

$$\frac{1}{3^n} A = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} - \&c. \text{ Ajoutez, vous aurez.}$$

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) A = 1 + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c. = B$$

$$\frac{1}{5^n} B = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \&c; \text{ retranchez, il vous restera}$$

$$\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) B = 1 - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \&c. = C;$$

résultat, dans lequel les nombres divisibles par 3 & par 5, manquent ;

$$\frac{1}{7^n} C = \frac{1}{7^n} - \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \&c; \text{ ajoutez, vous aurez}$$

$$\left(1 + \frac{1}{7^n}\right) C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \&c. = D;$$

par cette opération les nombres divisibles par 7 ont disparu.

$$\frac{1}{11^n} D = \frac{1}{11^n} - \frac{1}{121^n} + \&c; \text{ ajoutez, la somme fera}$$

$$\left(1 + \frac{1}{11^n}\right) D = 1 + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \&c. = E.$$

Par ce moyen, les nombres divisibles par 11 ont aussi disparu ; & continuant de faire disparaître de cette manière tous les autres nombres divisibles par les autres nombres premiers, vous obtiendrez à la fin

$$A \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 + \frac{1}{7^n}\right) \left(1 + \frac{1}{11^n}\right) \left(1 - \frac{1}{13^n}\right) \&c. = 1,$$

ou

$$A = \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n + 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \frac{17^n}{17^n - 1} \cdot \&c.$$

Les numérateurs renferment les puissances de tous les nombres premiers, lesquelles se trouvent aussi dans les dénominateurs, mais augmentées ou diminuées d'une unité, suivant que les nombres premiers sont de la forme  $4m - 1$ , ou  $4m + 1$ .

285. Ayant fait  $n = 1$ , on aura, à cause de  $A = \frac{\pi}{4}$ ,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \&c.$$

\* (277) Or nous avons trouvé ci-dessus \*

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7^2}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11^2}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13^2}{12 \cdot 14} \cdot \frac{17^2}{16 \cdot 18} \cdot \frac{19^2}{18 \cdot 20} \cdot \&c.$$

Divisons cette seconde expression par la première, nous aurons pour quotient

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \&c.$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \&c.$$

Ici les nombres premiers forment les numérateurs, & les dénominateurs sont les nombres impairement pairs, qui diffèrent d'une unité des numérateurs. Enfin, si on divise cette dernière par la première  $\frac{\pi}{4}$ , on aura

$$2 = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{24}{22} \cdot \&c.$$

ou

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \&c.$$

Ces fractions proviennent des nombres premiers impairs 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c, en partageant chacun en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant les parties paires pour les numérateurs, & les parties impaires pour les dénominateurs.

286. Comparons ces expressions avec celle de *Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11} \cdot \&c.$$

ou

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \&c.$$

comme



comme on a \*

\*(185)

$$\frac{\pi \pi}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \&c.$$

en divisant celle-là par celle-ci, le quotient donnera

$$\frac{3^2}{\pi^2} = \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{15 \cdot 15}{14 \cdot 16} \cdot \frac{21 \cdot 21}{20 \cdot 22} \cdot \frac{25 \cdot 25}{24 \cdot 26} \&c.$$

réfultat, dans lequel les numérateurs renferment tous les nombres impairs non premiers.

287. Soit maintenant  $n = 3$ , on aura  $A = \frac{\pi^2}{3^2}$ ; d'où

$$\frac{\pi^2}{3^2} = \frac{3^2}{3^2 + 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 + 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 + 1} \cdot \frac{13^2}{13^2 - 1} \cdot \frac{17^2}{17^2 - 1} \cdot \&c.$$

Mais la série \*

\*(167)

$$\frac{\pi^6}{145} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \&c.$$

donne

$$\frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6}{2^6 - 1} \cdot \frac{3^6}{3^6 - 1} \cdot \frac{5^6}{5^6 - 1} \cdot \frac{7^6}{7^6 - 1} \cdot \frac{11^6}{11^6 - 1} \cdot \frac{13^6}{13^6 - 1} \&c.$$

ou

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6 - 1} \cdot \frac{5^6}{5^6 - 1} \cdot \frac{7^6}{7^6 - 1} \cdot \frac{11^6}{11^6 - 1} \cdot \frac{13^6}{13^6 - 1} \&c.$$

Cette dernière série étant divisée par la première, donnera

$$\frac{\pi^2}{30} = \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 + 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \cdot \frac{13^2}{13^2 + 1} \cdot \frac{17^2}{17^2 + 1} \&c.$$

Et enfin celle-ci divisée par la première, donnera l'équation

$$\frac{16}{15} = \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5^2 + 1} \cdot \frac{7^2 + 1}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2 + 1}{11^2 - 1} \cdot \frac{13^2 - 1}{13^2 + 1} \cdot \frac{17^2 - 1}{17^2 + 1} \&c.$$

ou

$$\frac{16}{15} = \frac{14}{13} \cdot \frac{62}{63} \cdot \frac{172}{171} \cdot \frac{666}{665} \cdot \frac{1098}{1099} \cdot \&c.$$

Ces fractions sont formées des cubes des nombres premiers impairs, en partageant chacun en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant les parties paires pour les numérateurs, & les impaires pour les dénominateurs.

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 F

288. On peut tirer encore de ces expressions de nouvelles séries, dans lesquelles tous les nombres naturels forment les dénominateurs. En effet, puisque \*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \&c.$$

on aura

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right) \&c.}$$

dont le développement donnera la série suivante

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \&c.$$

dans laquelle on observera pour la loi que suivent les signes, que le nombre deux a le signe —, les nombres premiers de la forme  $4m - 1$ , signe —, & ceux de la forme  $4m + 1$ , le signe +; quant aux nombres composés, ils auront le signe, qui leur convient, à raison de leur composition par la multiplication des nombres premiers; c'est ainsi qu'on trouvera

facilement que la fraction  $\frac{1}{60}$ , à cause de  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$  aura le signe —. On aura semblablement

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right) \&c.}$$

ce qui donnera la série

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \&c.,$$

dans laquelle le nombre deux est précédé du signe +, les nombres premiers de la forme  $4m - 1$  sont précédés du signe —, & ceux de la forme  $4m + 1$ , du signe +; & un nombre quelconque composé aura le signe, qui lui convient à raison de sa composition, d'après les règles de la multiplication.

289. Ensuite, puisqu'on a \*

\*(285)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \&c.}$$

on trouvera, en développant,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \&c.$$

Il n'y a dans cette série que les nombres impairs, & la loi des signes est telle, que les nombres premiers de la forme  $4m - 1$  sont précédés du signe +, tandis que les nombres premiers de la forme  $4m + 1$  le sont du signe -. Ce qui détermine, en même temps, les signes des nombres composés. Au surplus, on peut tirer de-là deux autres séries qui renferment tous les nombres. En effet, on aura

$$\pi = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \&c.}$$

dont le développement donne la suite

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \&c.$$

dans laquelle le nombre deux a le signe +, les nombres premiers de la forme  $4m - 1$  ont le signe +, & les nombres premiers de la forme  $4m + 1$ , le signe -.

On aura aussi

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \&c.}$$

&, en développant,

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \&c.$$

où le nombre deux a le signe -, les nombres premiers de la forme  $4m - 1$ , le signe +, & les nombres premiers de la forme  $4m + 1$ , le signe -.

290. Concluons de-là qu'on peut varier à l'infini les signes entr'eux, de manière que la somme de la série

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8} \text{ \&c.}$$

soit assignable. Par exemple, puisque

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \text{ \&c.}}$$

Multiplions cette expression par  $\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = 2$ , nous aurons

$$\pi = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \text{ \&c.}}$$

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \text{ \&c.}$$

Le nombre deux a le signe +; le nombre trois le signe +; & tous les autres nombres premiers de la forme  $4m - 1$ , le signe -; mais les signes premiers de la forme  $4m + 1$  ont le signe +; d'où dépend la loi des signes pour les nombres composés. Semblablement, puisque

$$\pi = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \text{ \&c.}}$$

en multipliant par  $\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{3}{2}$ , on aura

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \left(1 + \frac{1}{17}\right) \text{ \&c.}}$$

&, en faisant le développement,

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{ \&c.}$$

Ici le nombre deux a le signe +; les nombres premiers de la forme  $4m - 1$  ont aussi le signe +; & les nombres premiers de la forme  $4m + 1$ , excepté cinq, ont le signe -.

291. On peut aussi trouver une infinité de séries de cette forme, dont la somme soit = 0. En effet, puisqu'on a \* \* (277)

$$0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \text{ \&c.}$$

il s'enfuit que

$$0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \text{ \&c.}}$$

& qu'en conséquence, comme nous l'avons déjà vu,

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \text{ \&c.}$$

Tous les nombres premiers ont le signe —, & les signes des nombres composés suivent la règle de la multiplication.

Multiplions à présent cette expression par  $\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$ , nous aurons pareillement

$$0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \text{ \&c.}}$$

& conséquemment, en développant,

$$0 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ \&c.}$$

expression dans laquelle le nombre deux a le signe +, & tous les autres nombres premiers le signe —. Semblablement, on aura

$$0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \text{ \&c.}}$$

d'où naît la série

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ \&c.}$$

dans laquelle tous les nombres premiers, excepté 3 & 5, ont le signe —.

Remarquez qu'en général toutes les fois que tous les nombres premiers, à l'exception de quelques-uns seulement, ont

le signe  $-$ , la somme de la série est  $= 0$ , & qu'au contraire toutes les fois que tous les nombres premiers, excepté quelques-uns seulement, ont le signe  $+$ , la somme de la série est infiniment grande.

292. Nous avons donné (art. 176) la somme de la série

$$A = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} \text{ \&c.}$$

lorsque  $n$  est un nombre impair : nous avons donc

$$\frac{1}{2^n} A = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{8^n} - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{14^n} - \text{\&c.}; \text{ ajoutons, nous aurons}$$

$$B = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) A = 1 - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} + \frac{1}{25^n} - \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{5^n} B = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \text{ \&c. nous aurons, en ajoutant,}$$

$$C = \left(1 + \frac{1}{5^n}\right) B = 1 + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{7^n} C = \frac{1}{7^n} + \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \text{\&c.}$$

en faisant la soustraction, il restera

$$D = \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \text{\&c.}$$

enfin, nous concluons,

$$A \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \left(1 + \frac{1}{11^n}\right) \left(1 - \frac{1}{13^n}\right) \text{ \&c.} = 1;$$

résultat, dans lequel les nombres premiers, qui surpassent d'une unité les multiples de six, ont le signe  $-$ , & ceux, qui en font surpassés d'une unité, le signe  $+$ ; Donc

$$A = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n + 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \text{ \&c.}$$

293. Supposons  $n = 1$ , auquel cas  $A = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ , & nous aurons

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3!} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \text{ \&c.}$$

expression, dans les numérateurs de laquelle se trouvent tous

les nombres premiers après 3, & dont les dénominateurs diffèrent d'une unité des numérateurs, & sont tous divisibles par 6. Maintenant, à cause de \*

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \text{ \&c.}$$

on aura, en divisant cette dernière expression par l'autre ,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \text{ \&c.}$$

où les dénominateurs ne sont pas divisibles par 6. Ou bien on aura

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \text{ \&c.}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \text{ \&c.}$$

La dernière de ces formules étant divisée par la précédente, donne

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{24}{22} \text{ \&c.}$$

ou

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{11} \text{ \&c.}$$

Chacune des fractions est formée des nombres premiers 5, 7, 11, &c, en partageant chacun des nombres premiers en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant constamment pour les numérateurs les parties divisibles par 3.

294. Ayant vu ci-dessus \* que \*(285)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \text{ \&c.}$$

ou

$$\frac{\pi}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \text{ \&c.}$$

Si on divise par celle-ci les expressions supérieures  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$  &  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ , on aura

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \text{ \&c.}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{30}{29} \text{ \&c.}$$

Dans la première expression, les fractions sont formées des nombres premiers de la forme  $12m + 6 \pm 1$ , & dans la dernière, des nombres premiers de la forme  $12m \pm 1$ , en partageant chacun en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant les parties paires pour les numérateurs, & les impaires pour les dénominateurs.

295. Examinons encore la série que nous avons trouvée (art. 179) & qui étoit ainsi exprimée :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{\&c} = A, \text{ on aura}$$

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \text{\&c}, \text{ \& en faisant la soustraction,}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{\&c} = B.$$

$$\frac{1}{5}B = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \text{\&c}; \text{ ajoutez, \& vous aurez}$$

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)B = -\frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \text{\&c} = C:$$

& en suivant le même procédé, vous arriverez enfin à cette expression :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{13}\right) \left(1 - \frac{1}{17}\right) \left(1 - \frac{1}{19}\right) \text{\&c} = 1;$$

dans laquelle les signes sont tellement combinés, que les nombres premiers de la forme  $8m + 1$ , ou  $8m + 3$  ont le signe  $-$ , & les nombres premiers de la forme  $8m + 5$  ou  $8m + 7$ , le signe  $+$ . Ainsi, on aura

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{\&c.}$$

où tous les dénominateurs sont ou divisibles par 8, ou sont seulement



seulement les nombres impairement pairs. Puis donc qu'on a

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \&c.$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \&c. * \quad * (285)$$

& par conséquent

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \cdot \&c.$$

où en conclura

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \cdot \&c.$$

où il n'y a plus de dénominateurs divisibles par 8, mais où se trouvent les nombres pairement pairs, toutes les fois qu'ils diffèrent d'une unité des numérateurs; & si on divise la première expression par la dernière, le quotient donnera

$$1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdot \&c.$$

Ces fractions sont formées des nombres premiers en partageant chacun en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant pour les numérateurs les parties paires, à moins qu'elles ne soient pairement paires.

296. Pareillement, les autres séries que nous avons trouvées pour les expressions d'arcs du cercle (art. 179 & suiv.) peuvent être transformées en facteurs formés des nombres premiers. On peut ainsi trouver beaucoup d'autres propriétés, tant de ces facteurs que de ces séries infinies; mais comme j'ai rapporté ici les principales, je ne m'arrêterai pas plus long-temps sur cet objet, & je vais passer à un autre sujet, qui a quelque rapport avec celui que je viens de traiter. En effet, ayant envisagé dans ce Chapitre la formation des nombres, en tant qu'ils naissent de la multiplication, j'examinerai dans le suivant leur génération, en tant qu'elle se fait par voie d'addition.

## CHAPITRE XVI.

*De la partition des Nombres.*

297. Proposons-nous cette expression :

$$(1 + x^a z)(1 + x^b z)(1 + x^c z)(1 + x^d z)(1 + x^e z) \&c.$$

& cherchons la forme qu'elle prendra, étant développée par la multiplication. Supposons qu'elle devienne

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.$$

il est évident que  $P$  sera la somme des puissances

$x^a + x^b + x^c + x^d + x^e + \&c.$  Ensuite  $Q$  sera la somme des produits de deux puissances différentes, ou un assemblage de plusieurs puissances de  $x$ , dont les exposants sont les sommes de deux termes différents de cette série

$$a, b, c, d, e, \xi, n, \&c.$$

Semblablement  $R$  sera un assemblage de puissances de  $x$ , dont les exposants sont les sommes de trois termes différents; &  $S$  sera un assemblage de puissances de  $x$ , dont les exposants sont les sommes de quatre termes différents de la même série  $a, b, c, d, e, \&c.$ , ainsi de suite.

298. Chacune des puissances de  $x$ , qui sont comprises dans les valeurs des lettres  $P, Q, R, S$ , aura l'unité pour coefficient, si leurs exposants ne peuvent être formés que d'une manière par les quantités  $a, b, c, d, \&c.$ ; mais si l'exposant de la même puissance peut être de plusieurs manières la somme de deux, de trois ou de plusieurs termes de la série  $a, b, c, d, e, \&c.$ , alors cette puissance aura un coefficient qui contiendra l'unité autant de fois. Par exemple, si  $Nx^n$  se trouve dans la valeur de  $Q$ , ce sera une preuve que  $n$  peut être d'un nombre  $N$  de manières diffé-

rentes la somme de deux termes différens de la série  $a, b, \gamma, \&c$ ; & si on trouve dans le développement des facteurs proposés le terme  $Nx^n \zeta^m$ , son coefficient  $N$  indiquera de combien de manières différens le nombre  $n$  peut être la somme de  $m$  termes différens de la série  $a, b, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \&c$ .

299. Ainsi, le produit proposé

$$(1 + x^a \zeta)(1 + x^b \zeta)(1 + x^\gamma \zeta)(1 + x^\delta \zeta) \&c.$$

étant effectivement développé par la multiplication, le résultat fera voir sur le champ de combien de manières différens un nombre donné peut être la somme d'autant de termes différens, qu'on voudra, de la série  $a, b, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \&c$ . Par exemple, si on cherche de combien de manières différens le nombre  $n$  peut être la somme de  $m$  termes différens de cette série, il faut chercher le terme  $x^n \zeta^m$  dans l'expression développée, & le coefficient de ce terme donnera le nombre demandé.

300. Pour rendre tout cela plus sensible, prenons ce produit composé d'une infinité de facteurs

$(1 + x \zeta)(1 + x^2 \zeta)(1 + x^3 \zeta)(1 + x^4 \zeta)(1 + x^5 \zeta) \&c$ .  
lequel étant effectué par la multiplication donne

$$\begin{aligned} & 1 + \zeta(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \&c.) \\ & + \zeta^2(x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \&c.) \\ & + \zeta^3(x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \&c.) \\ & + \zeta^4(x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + 15x^{12} + \&c.) \\ & + \zeta^5(x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + 18x^{13} + \&c.) \\ & + \zeta^6(x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + 20x^{14} + \&c.) \\ & + \zeta^7(x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + 21x^{15} + \&c.) \\ & + \zeta^8(x^8 + x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 7x^{13} + 11x^{14} + 15x^{15} + 22x^{16} + \&c.) \end{aligned}$$

&c.

Au moyen de ces séries, on peut trouver tout de suite de

combien de manieres différentes un nombre proposé peut résulter d'un nombre déterminé de termes différents de cette série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. Voulez-vous savoir, par exemple, de combien de manieres différentes le nombre 35 peut être la somme de sept termes différents de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c? Cherchez dans la série, qui multiplie  $x^7$ , la puissance  $x^{35}$ , & son coefficient 15 vous apprendra que le nombre proposé 35 peut être de quinze manieres différentes la somme de sept termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

301. Mais, si vous supposez  $x = 1$ , & que vous fassiez une somme des puissances semblables de  $x$ , ou, ce qui revient au même, si vous développez cette expression infinie

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

vous aurez la suite

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\&c.$$

dans laquelle chaque coefficient indique de combien de manieres différentes l'exposant de la puissance correspondante de  $x$ , peut résulter par addition des termes différents de la série, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Ainsi, il est visible qu'il y a six manieres de former le nombre 8 par l'addition de différents nombres. Les voici :

$$\begin{array}{ll} 8 = 8 & 8 = 5 + 3 \\ 8 = 7 + 1 & 8 = 5 + 2 + 1 \\ 8 = 6 + 2 & 8 = 4 + 3 + 1 \end{array}$$

Il faut remarquer ici qu'on doit mettre aussi en ligne de compte le nombre proposé, parce que le nombre des termes n'est pas déterminé, & que par conséquent on peut n'en prendre qu'un.

302. On voit, par ce qui précède, comment chaque nombre est produit par l'addition de nombres différents. Mais cette condition qui suppose des nombres différents n'aura

plus lieu, si nous transportons ces facteurs au dénominateur. En effet, soit proposée cette expression

I

$$(1 - x^a \zeta) (1 - x^b \zeta) (1 - x^c \zeta) (1 - x^d \zeta) (1 - x^e \zeta) \text{ \&c.}$$

laquelle étant développée par la division donne la série

$$1 + P \zeta + Q \zeta^2 + R \zeta^3 + S \zeta^4 + \text{\&c.};$$

il est clair que  $P$  fera la somme des puissances de  $x$ , dont les exposants sont compris dans cette série

$$a, b, c, d, e, \xi, \eta, \text{ \&c.}$$

Ensuite  $Q$  fera un assemblage de puissances de  $x$ , dont les exposants sont les sommes de deux termes, répétés ou non, de cette série. De plus,  $R$  fera la somme des puissances de  $x$ , dont les exposants sont formés par l'addition de trois termes, &  $S$  la somme des puissances, dont les exposants sont formés par l'addition de quatre termes contenus dans cette série; ainsi des autres.

303. Par conséquent, si on suppose que l'expression ait été entièrement développée, & qu'on ait rassemblé les termes semblables, on verra de combien de manières différentes un nombre proposé  $n$  peut être formé par l'addition de  $m$  termes, différents ou non, de la série  $a, b, c, d, e, \xi, \text{ \&c.}$  Cherchons, par exemple, dans l'expression développée le terme  $x^n \zeta^m$ , & son coefficient que je suppose  $N$ , de sorte que le terme total soit  $= N x^n \zeta^m$ ; ce coefficient  $N$  nous apprendra de combien de manières différentes le nombre  $n$  peut être formé par l'addition de  $m$  termes contenus dans la suite  $a, b, c, d, e, \text{ \&c.}$  On aura donc ainsi la solution d'une question analogue à la première que nous avons considérée auparavant.

304. Faisons l'application de ce que nous venons de dire à un cas plus remarquable, & prenons cette expression

I

$$(1 - x \zeta) (1 - x^2 \zeta) (1 - x^3 \zeta) (1 - x^4 \zeta) (1 - x^5 \zeta) \text{ \&c.}$$

dont le développement effectué par la division donnera

$$\begin{aligned}
 & 1 + \zeta (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \&c.) \\
 & + \zeta^2 (x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + \&c.) \\
 & + \zeta^3 (x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \&c.) \\
 & + \zeta^4 (x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + 15x^{12} + \&c.) \\
 & + \zeta^5 (x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + 18x^{13} + \&c.) \\
 & + \zeta^6 (x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + 20x^{14} + \&c.) \\
 & + \zeta^7 (x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + 21x^{15} + \&c.) \\
 & + \zeta^8 (x^8 + x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 7x^{13} + 11x^{14} + 15x^{15} + 22x^{16} + \&c.) \\
 & \&c.
 \end{aligned}$$

On peut donc, à l'aide de ces séries, trouver sur le champ de combien de manières différentes un nombre proposé peut être formé par l'addition d'un nombre donné de termes de cette série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Veut-on savoir, par exemple, de combien de manières différentes le nombre 13 peut résulter de l'addition de cinq nombres entiers? Il faudra chercher le terme  $x^{13}\zeta^5$ , dont le coefficient 18 apprend que le nombre en question 13 peut être de dix-huit manières le résultat de cinq nombres ajoutés.

305. Si on suppose  $\zeta = 1$ , & qu'on réunisse en une somme les puissances semblables de  $x$ , cette expression

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\&c.}$$

se changera en cette série

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + \&c.$

dans laquelle chaque coefficient marque de combien de manières différentes l'exposant de la puissance correspondante peut être formé par l'addition de nombres entiers, soit égaux soit inégaux. Par exemple, le terme  $11x^6$  fait voir que le nombre 6 peut être produit de onze manières par l'addition des nombres entiers. Les voici :

$$6 = 6$$

$$6 = 3 + 1 + 1 + 1$$

$$6 = 5 + 1$$

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$6 = 4 + 2$$

$$6 = 2 + 2 + 1 + 1$$

$$6 = 4 + 1 + 1$$

$$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$6 = 3 + 3$$

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$6 = 3 + 2 + 1$$

Remarquez aussi que le nombre proposé étant contenu dans la série des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. fournit lui-même une manière.

306. Cela posé en général, cherchons une méthode facile, qui nous donne chacune des compositions, dont vous venons de parler, & prenons d'abord en considération celle qui n'admet que des nombres entiers différents, & dont il a été question en premier lieu. Soit donc proposée, à cet effet, l'expression suivante

$$Z = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z) \&c.$$

qui développée & ordonnée par rapport aux puissances de  $z$ , donne la série

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \&c.$$

pour laquelle il s'agit de trouver une méthode expéditive d'obtenir les fonctions  $P, Q, R, S, T$ , &c. de  $x$ ; car on aura, par ce moyen, satisfait d'une manière convenable à la question proposée.

307. Or il est clair que si on écrit  $xz$  pour  $z$ , on aura

$$(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z) \&c. = \frac{Z}{1 + xz}.$$

Donc, en substituant  $xz$  à  $z$ , la valeur du produit, qui étoit  $Z$ ,

se changera en  $\frac{Z}{1 + xz}$ ; ainsi, puisque

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.$$

on aura

$$\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c.$$

Multiplions donc par  $1+xz$ , & nous obtiendrons

$$Z = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c. \\ + xz + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \&c.$$

Cette valeur de  $Z$  comparée avec la première donnera

$$P = \frac{x}{1-x}; Q = \frac{Px^2}{1-x^2}; R = \frac{Qx^3}{1-x^3}; S = \frac{Rx^4}{1-x^4} \&c.$$

On aura donc pour  $P, Q, R, S, \&c.$  les valeurs suivantes

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$T = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

&amp;c.

308. Nous pouvons donc obtenir séparément chacune des séries des puissances de  $x$ , qui doit nous apprendre de combien de manières différentes un nombre proposé peut être formé par l'addition d'un nombre donné de parties entières. Au reste, il est visible que toutes ces séries sont récurrentes, parce qu'elles sont le résultat du développement d'une fonction fractionnaire de  $x$ . En effet, la première expression  $P = \frac{x}{1-x}$  donne la progression géométrique

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.$$

laquelle fait voir évidemment que chaque nombre est contenu une fois dans la suite des nombres entiers.



309. La seconde expression  $\frac{x^2}{(1-x)(1-xx)}$  donne la série

$$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \&c.$$

dans laquelle le coefficient de chaque terme apprend de combien de manières l'exposant de  $x$  peut être partagé en deux parties inégales. Par exemple, le terme  $4x^9$  marque que le nombre 9 peut être partagé de quatre manières en deux parties inégales. Si nous divisons cette série par  $x^3$ , nous aurons celle qui provient de la fraction  $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ , savoir :

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \&c.$$

dont nous supposons le terme général  $= Nx^n$ . D'après la génération de cette série, on fait que le coefficient  $N$  indique de combien de manières différentes l'exposant  $n$  peut être formé par l'addition des nombres 1 & 2 ; & puisque le terme général de la première série  $= Nx^{n+3}$ , nous en concluons ce théorème :

*On pourra partager le nombre  $n+3$  en deux parties inégales d'autant de manières différentes, qu'on pourra former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1 & 2.*

310. La troisième expression  $\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ , étant réduite en série, donnera

$$x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \&c.$$

Le coefficient de chaque terme de cette série marque de combien de manières différentes l'exposant de la puissance correspondante de  $x$  peut être partagé en trois parties inégales. Mais le développement de la fraction  $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$  donnera cette autre série

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \&c.$$

dont nous supposons le terme général  $= Nx^n$ . Ce coefficient  $N$  indiquera de combien de manières différentes

le nombre  $n$  peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3; ainsi le terme général de la série précédente étant  $Nx^{n+6}$ , nous en déduirons le théorème suivant.

*On pourra partager le nombre  $n + 6$  en trois parties inégales, d'autant de manières qu'on pourra former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2 & 3.*

311. La quatrième expression développée en série donnera

$$x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + \&c.$$

où le coefficient de chaque terme fera connoître de combien de manières différentes l'exposant de la puissance correspondante peut être partagé en quatre parties inégales; mais, si on fait le développement de cette expression

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

on obtiendra la première série divisée par  $x^{10}$ , c'est-à-dire,

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + \&c.$$

dont nous supposons le terme général  $= Nx^n$ ; il suit de-là que le coefficient  $N$  indique de combien de manières différentes le nombre  $n$  peut être formé par l'addition de ces quatre nombres 1, 2, 3, 4. Puis donc que le terme général de la série précédente doit être  $= Nx^{n+10}$ ; nous en concluons le théorème qui suit :

*On peut partager le nombre  $n + 10$  en quatre parties inégales, d'autant de manières différentes qu'on peut former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2, 3 & 4.*

312. Donc, en général, si cette expression

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^m)}$$

est convertie en série; & que le terme général soit  $= Nx^n$ , le coefficient  $N$  indiquera de combien de manières différentes le nombre  $n$  peut être formé par l'addition des

nombres 1, 2, 3, 4, . . . . . m. Mais, si cette expression

$$\frac{m(m+1)}{x^2}$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^m)$$

est changée en série, le terme général sera  $= Nx^n + \frac{m(m+1)}{2}$ , dont le coefficient  $N$  marque de combien de manières différentes le nombre  $n + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$  peut être partagé en  $m$  parties inégales; d'où s'ensuit le théorème :

*Le nombre de manières différentes dont on peut former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2, 3, 4, . . . . . m, est le même que celui dont on peut partager le nombre  $n + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$  en  $m$  parties inégales.*

313. Après avoir exposé la partition des nombres en parties inégales, examinons à présent celle qui n'exclut pas l'égalité des parties, & qui résulte de cette expression

$$Z = \frac{1}{(1-x\zeta)(1-x^2\zeta)(1-x^3\zeta)(1-x^4\zeta)(1-x^5\zeta)\&c.}$$

Supposons qu'après le développement fait par la division, on ait

$$Z = 1 + P\zeta + Q\zeta^2 + R\zeta^3 + S\zeta^4 + T\zeta^5 + \&c.$$

Or il est clair que si on met  $x\zeta$  au lieu de  $\zeta$ , on aura

$$\frac{1}{(1-x^2\zeta)(1-x^3\zeta)(1-x^4\zeta)(1-x^5\zeta)\&c.} = (1-x\zeta)Z;$$

le même changement ayant donc été fait dans la série développée, le résultat fera

$$(1-x\zeta)Z = 1 + Px\zeta + Qx^2\zeta^2 + Rx^3\zeta^3 + Sx^4\zeta^4 + \&c.$$

Multiplions également la première série par  $1 - x\zeta$ , & nous aurons

$$(1-x\zeta)Z = 1 + P\zeta + Q\zeta^2 + R\zeta^3 + S\zeta^4 + \&c. \\ - x\zeta - Px\zeta^2 - Qx^2\zeta^3 - Rx\zeta^4 - \&c.$$

2 H ij

En comparant, on trouvera

$$P = \frac{x}{1-x}; \quad Q = \frac{Px}{1-x^2}; \quad R = \frac{Qx}{1-x^3}; \quad S = \frac{Rx}{1-x^4}; \quad \&c.$$

ce qui donnera pour  $P, Q, R, S, \&c.$ , les valeurs suivantes

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$\&c.$

314. Ces expressions ne diffèrent de celles que nous avons données plus haut, qu'en ce que les numérateurs ont ici de moindres exposants que dans le cas précédent; & c'est pourquoi les séries qui naissent de leur développement, s'accordent parfaitement par les coefficients; accord qu'il a déjà été facile de saisir par comparaison (art. 300 & 304) & dont la raison est à présent connue. On en conclura donc les théorèmes analogues que voici :

*Autant qu'il y a de manières différentes de former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2, autant il y a de manières différentes de partager le nombre  $n + 2$  en deux parties.*

*Autant qu'il y a de manières différentes de former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2, 3; autant il y a de manières différentes de partager le nombre  $n + 3$  en trois parties.*

*Autant qu'il y a de manières différentes de former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2, 3, 4; autant il y a de manières différentes de partager le nombre  $n + 4$  en quatre parties. Et, en général, on aura ce théorème.*

*Autant qu'il existe de manières différentes de former le nombre  $n$  par l'addition des nombres 1, 2, 3, . . . .  $m$ , autant il y a de manières différentes de partager le nombre  $n + m$  en  $m$  parties.*

315. Qu'on ait donc à trouver en combien de manières un nombre donné peut être partagé, soit en un nombre  $m$  de parties inégales, soit en un nombre  $m$  de parties, tant égales qu'inégales; ces deux questions seront résolues, si on fait de combien de manières chaque nombre peut être formé par l'addition des nombres  $1, 2, 3, 4, \dots, m$ , comme on le verra par les théorèmes suivants, qui dérivent de ceux qui précèdent.

*Le nombre  $n$  peut être partagé en  $m$  parties inégales, d'autant de manières que le nombre  $n - \frac{m(m+1)}{2}$  peut être formé par l'addition des nombres  $1, 2, 3, 4, \dots, m$ .*

*Le nombre  $n$  peut être partagé en  $m$  parties, soit égales, soit inégales, d'autant de manières que le nombre  $n - m$  peut être formé par l'addition des nombres  $1, 2, 3, \dots, m$ .*

Nous en déduirons ces autres théorèmes.

*Le nombre  $n$  peut être partagé en  $m$  parties inégales, d'autant de manières que le nombre  $n - \frac{m(m-1)}{2}$  peut être partagé en  $m$  parties, soit égales, soit inégales.*

*Le nombre  $n$  peut être partagé en  $m$  parties, soit égales, soit inégales, d'autant de manières que le nombre  $n + \frac{m(m-1)}{2}$  peut être partagé en  $m$  parties inégales.*

316. Or la formation des séries récurrentes nous apprend de combien de manières différentes un nombre donné  $n$  peut être formé par l'addition des nombres  $1, 2, 3, 4, \dots, m$ . Il faudra, pour cela, développer la fraction

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^m)}$$

& continuer la série récurrente jusqu'au terme  $Nx^n$ , dont le coefficient  $N$  indiquera de combien de manières le nombre  $n$  peut être formé par l'addition des nombres  $1, 2, 3, 4, \dots, m$ . Mais, ce moyen d'arriver ne laissera pas d'être laborieux, pour peu que les nombres  $m$  &  $n$  soient grands; car l'échelle de relation que fournit le dénominateur

développé par la multiplication, est alors composé d'un plus grand nombre de termes, ce qui rend pénible la continuation de la série poussée un peu loin.

317. Au reste, cette recherche donnera moins de peine, si on traite d'abord les cas les plus simples; car il sera facile de passer de ceux-ci aux cas plus composés. En effet, supposons que la série, qui naît de la fraction

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots(1-x^m)}$$

ait un terme général =  $Nx^n$ , & que celle qui provient de la formule

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots(1-x^m)}$$

ait pour terme général la quantité  $Mx^n$ , dont le coefficient  $M$  indiquera de combien de manières différentes le nombre  $n - m$  peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3, . . . .  $m$ . Retranchons cette dernière expression de la première, nous aurons pour reste :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots(1-x^{m-1})}$$

Or il est évident que le terme général de la série résultante fera  $(N - M)x^n$ . Donc le coefficient  $N - M$  fera connoître de combien de manières différentes le nombre  $n$  peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3, . . . .  $(m - 1)$ .

318. Nous tirerons donc de-là la règle suivante :

Soit  $L$  le nombre de manières, dont le nombre  $n$  peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3, . . . .  $(m - 1)$ .

Soit  $M$  le nombre de manières, dont le nombre  $n - m$  peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3, . . . .  $m$ .

Et soit  $N$  le nombre de manières, dont le nombre  $n$  peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3, . . . .  $m$ .

Cela posé, on aura, comme nous venons de voir,  $L = N - M$ , & par conséquent  $N = L + M$ . Donc, si

nous trouvons de combien de manières différentes les nombres  $n$  &  $n - m$ , peuvent être formés par addition, le premier avec les nombres  $1, 2, 3, \dots, (m - 1)$ ; & le second avec les nombres  $1, 2, 3, \dots, m$ , il s'ensuivra que nous connoîtrons aussi de combien de manières différentes le nombre  $n$  peut être formé par addition avec les nombres  $1, 2, 3, \dots, m$ . On pourra, à l'aide de ce théorème, passer des cas les plus simples, qui ne présentent aucune difficulté, aux cas de plus en plus composés; & c'est de cette manière qu'a été calculée la Table ci-jointe \*, dont voici l'usage.

Voulez-vous savoir de combien de manières différentes le nombre 50 peut être partagé en 7 parties inégales? Prenez dans la première colonne verticale le nombre  $50 - \frac{7 \cdot 8}{2} = 22$ , & dans la rangée horizontale supérieure le chiffre romain VII, le nombre 522 placé dans l'angle vous donnera le nombre de manières, que vous demandiez. Voulez-vous à présent connoître de combien de manières différentes le même nombre 50 peut être partagé en 7 parties, soit égales, soit inégales? Prenez dans la première colonne verticale le nombre  $50 - 7 = 43$ , le nombre 8946, qui lui correspond dans la 7<sup>e</sup> colonne, sera le nombre cherché.

319. Les séries verticales de cette Table, quoique récurrentes, ont cependant, avec les nombres naturels, triangulaires, pyramidaux & suivants, une grande connexion, que nous allons exposer en peu de mots. En effet, comme la

fraction  $\frac{1}{(1-x)(1-xx)}$  donne la série . . . . .

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \&c.$$

& conséquemment la fraction  $\frac{x}{(1-x)(1-xx)}$  celle-ci

$$x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + \&c.$$

Si on ajoute ces deux séries, leur somme donnera cette autre,

\* Voyez page 252.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \&c.$$

que fournit le développement de la fraction  $\frac{1+x}{(1-x)(1-xx)} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

Ce qui fait voir clairement que les termes numériques de la dernière série forment la suite des nombres naturels. Donc en ajoutant deux termes consécutifs de la seconde série de la Table, on obtiendra la suite des nombres naturels, en supposant  $x = 1$ .

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + \&c.$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \&c.$$

Donc réciproquement la série des nombres naturels donnera la série supérieure, en retranchant chaque terme de la série supérieure du terme suivant de la série inférieure.

320. La troisième série verticale provient de la fraction  $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$ . Mais comme  $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)(1+x+xx)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$ , il est évident qu'en ajoutant (oo) d'abord trois termes de cette série, ensuite deux termes de la série résultante, on doit obtenir les nombres triangulaires; ce dont il est aisé de s'assurer par ce qui suit:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 19 + \&c.$$

$$1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + 36 + 42 + 49 + \&c.$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + \&c.$$

Réciproquement on voit comment on peut tirer la suite supérieure de celle des nombres triangulaires.

321. Pareillement, comme la quatrième série provient de la fraction  $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)}$ , on aura  $\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{1}{(1-x)^4}$ . Si dans la quatrième série on ajoute d'abord quatre termes, ensuite trois



trois dans la série résultante, & enfin deux dans cette dernière, on trouvera la suite des nombres pyramidaux, comme le fait voir le calcul suivant.

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + 23 + 27 + \&c.$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + 67 + 83 + \&c.$$

$$1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + 161 + 203 + \&c.$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + 286 + 364 + \&c.$$

Semblablement la cinquième série conduira aux nombres pyramidaux du second ordre, la sixième à ceux du troisième ordre; ainsi de suite.

322. Donc, réciproquement on pourra, au moyen des nombres figurés, former les séries qui se trouvent dans les tables par des opérations, que le calcul suivant rendra faciles à saisir.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \&c.$$

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + \&c. \text{ II.}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + \&c.$$

$$1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + \&c.$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + \&c. \text{ III.}$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + \&c.$$

$$1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + \&c.$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + \&c.$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + \&c. \text{ IV.}$$

$$1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + 210 + 330 + 495 + 715 + \&c.$$

$$1 + 4 + 11 + 24 + 46 + 80 + 130 + 200 + 295 + 420 + \&c.$$

$$1 + 3 + 7 + 14 + 25 + 41 + 64 + 95 + 136 + 189 + \&c.$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 12 + 18 + 27 + 38 + 53 + 71 + \&c.$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 10 + 13 + 18 + 23 + \&c. \text{ V.}$$

&c.

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I.

2 I

Dans ces différents groupes de séries, les premières sont les nombres figurés, & en retranchant chaque terme de la seconde série du terme suivant de la première on forme la seconde. Puis on ajoute deux termes de la troisième série, qu'on retranche du terme suivant de la seconde, & on obtient la troisième; & en continuant ainsi de soustraire la somme de trois, de quatre termes, ou d'un plus grand nombre, de la série ultérieure, du terme suivant de la série, qui précède, on formera les autres séries, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à celle qui commence par  $1 + 1 + 2$  &c; & ce sera la série de la Table.

323. Toutes les séries verticales de la Table commencent de la même manière, & ont continuellement un plus grand nombre de termes communs; d'où il s'ensuit qu'à l'infini ces séries deviendront identiques. On aura alors la série, qui provient de la fraction.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \&c.}$$

Comme cette série est récurrente, considérons d'abord le dénominateur de la fraction pour en déduire l'échelle de relation. Or si les facteurs du dénominateur sont continuellement multipliés entr'eux, on trouvera la suite

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \&c.$$

& si on examine avec un peu plus d'attention la nature de cette suite, on verra qu'elle ne renferme d'autres puissances de  $x$ , que celles dont les exposants sont compris dans cette (PP) formule  $\frac{3^n n \pm n}{2}$ . Si  $n$  est un nombre impair, les puissances seront négatives, & elles seront positives, si  $n$  est un nombre pair.

324. Donc l'échelle de relation étant

$$+ 1, + 1, 0, 0, - 1, 0, - 1, 0, 0, 0, 0, + 1, 0, 0, + 1, 0, 0, \&c.$$

La série récurrente que donnera le développement de la fraction

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \&c.}$$

fera celle-ci :

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \\ 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + \\ 135x^{14} + 176x^{15} + 231x^{16} + 297x^{17} + 385x^{18} + \\ 490x^{19} + 627x^{20} + 792x^{21} + 1002x^{22} + 1255x^{23} + \\ 1575x^{24} \&c.$$

Par conséquent dans cette série, chaque coefficient indique de combien de manières différentes l'exposant de  $x$  peut se former par l'addition des nombres entiers. Ainsi le nombre 7 peut être formé de quinze manières par addition.

$$\begin{array}{l|l|l} 7 = 7 & 7 = 4 + 2 + 1 & 7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 7 = 6 + 1 & 7 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 & 7 = 2 + 2 + 2 + 1 \\ 7 = 5 + 2 & 7 = 3 + 3 + 1 & 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ 7 = 5 + 1 + 1 + 1 & 7 = 3 + 2 + 2 & 7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 7 = 4 + 3 & 7 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 & 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

325. Si on développe ce produit

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

on aura la série qui suit,

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \\ 8x^9 + 10x^{10} + \&c.$$

dans laquelle chaque coefficient marque de combien de manières différentes l'exposant de  $x$  peut être formé par l'addition de nombres inégaux. Ainsi le nombre 9 peut être de huit manières différentes la somme de nombres inégaux.

$$\begin{array}{l|l} 9 = 9 & 9 = 6 + 2 + 1 \\ 9 = 8 + 1 & 9 = 5 + 4 \\ 9 = 7 + 2 & 9 = 5 + 3 + 1 \\ 9 = 6 + 3 & 9 = 4 + 3 + 2 \end{array}$$

326. Afin de pouvoir comparer ces formules entr'elles, supposons

$$P = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \&c.$$

&

$$Q = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

nous aurons

$$PQ = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12}) \&c.$$

Comme tous ces facteurs sont contenus dans  $P$ , divisons  $P$  par  $PQ$ , le quotient sera  $\frac{1}{Q} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \&c.$

& par conséquent

$$Q = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \&c.}$$

Le développement de cette fraction produira une série, dans laquelle chaque coefficient apprendra de combien de manières différentes l'exposant de  $x$  peut être formé par l'addition des nombres impairs. Puis donc que cette expression est égale à celle que nous avons considérée dans l'article précédent, nous en concluons le théorème suivant.

*Autant qu'il y a de manières de former par addition un nombre donné, avec tous les nombres entiers inégaux entr'eux; autant il y a de manières de former le même nombre, par addition, avec les nombres seulement impairs, soit égaux soit inégaux.*

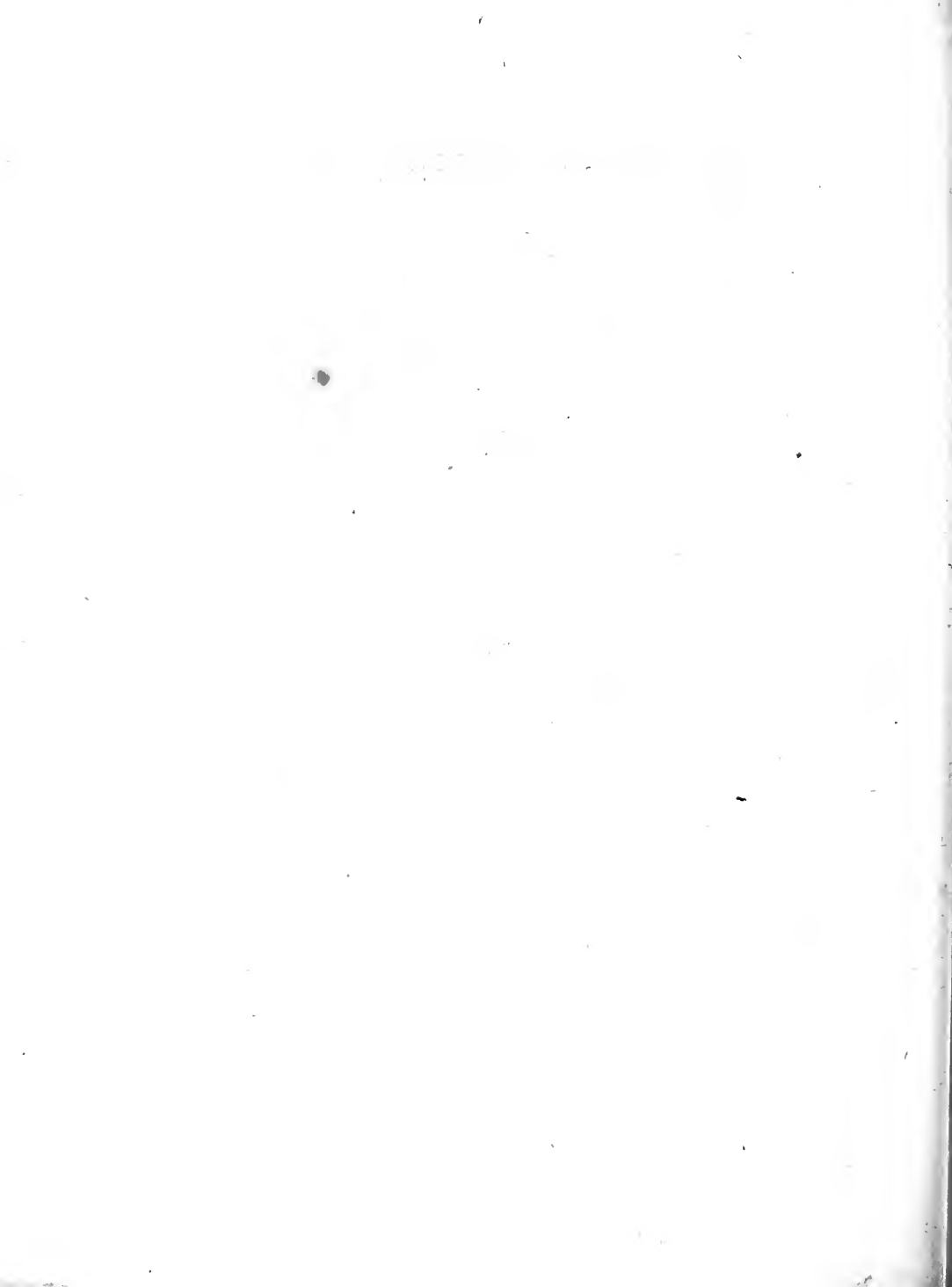
327. Comme nous avons vu ci-dessus que

$$P = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \&c.$$

on aura en mettant  $xx$  pour  $x$ ,

$$PQ = 1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + x^{44} + x^{52} - \&c..$$





& en divisant cette expression par la première

$$Q = \frac{1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{18} - x^{20} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^3 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{18} + x^{26} - \&c.}$$

Donc la série  $Q$  sera aussi récurrente, & sera égale à la série  $\frac{1}{P}$ , en multipliant celle-ci par  $1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{18} \&c.$  Ainsi, puisque (art. 324)

$$\frac{1}{P} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \&c.$$

Si on multiplie ce résultat par

$$1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - \&c.$$

on trouvera pour produit

$$\begin{aligned} 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \&c. \\ - x^2 - x^4 - 2x^4 - 3x^5 - 5x^6 - 7x^7 - 11x^8 - 15x^9 - \&c. \\ - x^4 - x^5 - 2x^6 - 3x^7 - 5x^8 - 7x^9 - \&c. \end{aligned}$$

ou

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + \&c. = Q.$$

Donc avec la formation des nombres par l'addition des nombres, tant égaux qu'inégaux, on aura celle des nombres par l'addition des nombres inégaux, & conséquemment celle des nombres par l'addition des nombres seulement impairs.

328. Reste encore à traiter & à expliquer quelques cas particuliers, qui ne sont pas sans utilité pour faire connoître la nature des nombres. Considérons, par exemple, cette expression

$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32}) \&c.$ , dans laquelle les exposants de  $x$  croissent en raison double. Si on développe cette expression, on trouvera, à la vérité, la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \&c.$$

Mais, comme on peut douter si cette série continuera de suivre la même loi, & si elle formera à l'infini une progression géométrique, examinons-la plus particulièrement. Soit à cet effet

$$P = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^{16}) \&c.$$

& supposons que le développement de cette quantité donne la série

$$P = 1 + ax + \epsilon x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \xi x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \&c.$$

Or il est clair que si au lieu de  $x$  on écrit  $xx$ , on aura le produit

$$(1+xx)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^{16})(1+x^{32}) \&c. = \frac{P}{1+x};$$

ayant donc fait dans la série la même substitution, on aura  $\frac{P}{1+x} = 1 + ax^2 + \epsilon x^4 + \gamma x^5 + \delta x^3 + \epsilon x^{10} + \xi x^{12} + \&c.$  & multipliant par  $1+x$ ,

$$P = 1 + x + ax^2 + ax^3 + \epsilon x^4 + \epsilon x^5 + \gamma x^6 + \gamma x^7 + \delta x^8 + \delta x^2 + \&c.$$

Cette valeur de  $P$  comparée avec la précédente, donnera

$$a = 1; \epsilon = a; \gamma = a; \delta = \epsilon; \epsilon = \epsilon; \xi = \gamma; \eta = \gamma, \&c.$$

Donc tous les coefficients seront  $= 1$ ; & par conséquent le produit  $P$ , dont il est question, étant développé, fournira la série géométrique

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.$$

329. Puisque toutes les puissances de  $x$  se trouvent dans cette suite, & chacune une fois; concluons, d'après la forme du produit  $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \&c.$  que tout nombre entier peut être formé par l'addition de termes différents de la progression géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c., & cela d'une manière seulement. Cette propriété est connue de ceux qui sont dans l'habitude de faire des pesées; car ils



savent qu'avec des poids seulement de 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. livres, ils peuvent faire toutes les pesées possibles, tant qu'il n'y aura pas de fractions de livre. Ainsi, avec ces dix poids, savoir 1<sup>tt</sup>, 2<sup>tt</sup>, 4<sup>tt</sup>, 8<sup>tt</sup>, 16<sup>tt</sup>, 32<sup>tt</sup>, 64<sup>tt</sup>, 128<sup>tt</sup>, 256<sup>tt</sup>, 512<sup>tt</sup>, on peut peser jusqu'à 1024<sup>tt</sup>, & si on y ajoute un poids de 1024<sup>tt</sup>, on pourra peser jusqu'à 2048<sup>tt</sup>.

330. On fait de plus dans la pratique qu'avec un moindre nombre de poids, & qui croissent en raison géométrique, savoir, 1, 3, 9, 27, 81, &c. on peut pareillement faire toutes les pesées possibles, à moins qu'on n'ait besoin de fractions. Observez que dans ce dernier cas, on ne place pas les poids d'un seul côté de la balance, mais des deux côtés, à la fois, s'il est nécessaire. Cette pratique est fondée sur ce qu'en prenant toujours des termes différents de la progression géométrique triple, 1, 3, 9, 27, 81, &c; on peut, par l'addition & par la soustraction, former tous les nombres entiers imaginables. En effet

$$\begin{array}{l|l|l}
 1 = 1 & 5 = 9 - 3 + 1 & 9 = 9 \\
 2 = 3 - 1 & 6 = 9 - 3 & 10 = 9 + 1 \\
 3 = 3 & 7 = 9 - 3 + 1 & 11 = 9 + 3 - 1 \\
 4 = 3 + 1 & 8 = 9 - 1 & 12 = 9 + 3 \\
 & & \text{\&c.}
 \end{array}$$

331. Pour démontrer cette vérité, je prends ce produit composé d'un nombre infini de facteurs

$$(x^{-1} + 1 + x^1) (x^{-3} + 1 + x^3) (x^{-9} + 1 + x^9) \\
 (x^{-27} + 1 + x^{27}) \text{\&c.} = P,$$

lequel étant développé, ne donnera d'autres puissances de  $x$  que celles dont les exposants peuvent être formés par les nombres 1, 3, 9, 27, 81, &c, soit en les ajoutant, soit en les soustrayant. Mais obtiendra-t-on toutes les puissances,

& chacune d'elles seulement une fois ? C'est ce que je cherche de la manière suivante. Soit

$$P = \&c. + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + ax^1 + \epsilon x^2 \\ + \gamma x^3 + \delta x^4 + e x^5 + \&c.$$

Or il est évident, que, si au lieu de  $x$  on écrit  $x^3$ , on aura

$$\frac{P}{x^{-3} + 1 + x^3} = \&c. + bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + ax^3 + \epsilon x^6 \\ + \gamma x^9 + \&c.$$

$$\text{Donc } P = \&c. +$$

$$ax^{-4} + ax^{-1} + ax^2 + x^{-1} + 1 + x + ax^2 + ax^3 + \\ ax^4 + \epsilon x^5 + \epsilon x^6 + \epsilon x^7 + \&c.$$

Cette expression comparée avec la supposée donnera

$$a = 1; \epsilon = a; \gamma = a; \delta = a; e = \epsilon; \xi = \epsilon, \&c.$$

$$a = 1; b = a; c = a; d = a; e = b, \&c.$$

d'où nous concluons

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c. \\ + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \&c.$$

On voit par-là clairement que toutes les puissances de  $x$  tant positives que négatives, se trouvent dans cette série; & que par conséquent, on peut former tous les nombres, soit en ajoutant, soit en soustrayant les termes de la progression géométrique triple, & que de plus il n'y a qu'une manière de former chacun des nombres.

## C H A P I T R E X V I I .

### *De l'usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Équations.*

332. Le célèbre DANIEL BERNOUILLI a indiqué un bel usage des séries récurrentes, relatif à la recherche des racines d'une équation d'un degré quelconque, dans les *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, Tome III*, où il enseigne comment on peut, à l'aide des séries récurrentes, assigner les valeurs approchées des racines d'une équation algébrique quelconque, quelqu'en soit le nombre de dimensions. Cette méthode pouvant être d'une très-grande utilité, j'ai jugé à propos de l'expliquer ici avec quelque détail, afin qu'on puisse savoir dans quel cas on peut l'employer. Car il arrive quelquefois qu'on est trompé dans son attente, & qu'on ne peut obtenir aucune racine de l'équation par le moyen de cette méthode. C'est pourquoi, pour en mieux faire sentir l'esprit & la nature, il convient d'examiner, d'après les propriétés des séries récurrentes, les fondements, sur lesquels elle porte.

333. Toute série récurrente pouvant être regardée comme le développement d'une fraction rationnelle quelconque, prenons la fraction

$$= \frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4 + \&c.}{1 - a\zeta - b\zeta^2 - c\zeta^3 - d\zeta^4 - \&c.}$$

laquelle donne naissance à la série récurrente suivante :

$$A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + E\zeta^4 + F\zeta^5 + \&c.$$

dont les coefficients  $A, B, C, D, \&c.$  sont déterminés, ainsi qu'il suit :

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I.    2 K

$$A = a$$

$$B = aA + b$$

$$C = aB + eA + c$$

$$D = aC + eB + \gamma A + d$$

$$E = aD + eC + \gamma B + \delta A + c$$

&c.

Or le terme général ou le coefficient de la puissance  $\zeta^n$ , se trouve en décomposant la fraction proposée en fractions simples, dont les dénominateurs soient les facteurs du dénominateur  $1 - a\zeta - e\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \dots$ , comme on l'a vu (Chap. XIII.)

334. Quant à la forme du terme général, elle dépend principalement de la nature des facteurs simples du dénominateur, suivant qu'ils sont réels ou imaginaires, inégaux entre eux, ou égaux deux à deux, ou en plus grand nombre. Pour parcourir ces différents cas par ordre, supposons d'abord que tous les facteurs simples du dénominateur soient réels & inégaux entr'eux. Soient donc tous les facteurs simples du dénominateur  $(1 - p\zeta)(1 - q\zeta)(1 - r\zeta)(1 - s\zeta)$  &c; au moyen desquels la fraction proposée puisse être décomposée en ces autres fractions simples  $\frac{A}{1 - p\zeta} +$

$$\frac{B}{1 - q\zeta} + \frac{C}{1 - r\zeta} + \frac{D}{1 - s\zeta} + \dots$$

Celles-ci étant connues, le terme général de la série récurrente sera  $= \zeta^n (Ap^n + Bq^n + Cr^n + Ds^n + \dots)$  que nous ferons  $= P\zeta^n$ , c'est-à-dire, que  $P$  sera le coefficient de la puissance  $\zeta^n$ , & ceux des puissances suivantes seront  $Q, R, \dots$ , de manière que la série récurrente deviendra

$$A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \dots + P\zeta^n + Q\zeta^{n+1} + R\zeta^{n+2} + \dots$$

335. Supposons à présent  $n$  un nombre très-grand, ou la série récurrente continuée jusqu'à un très-grand nombre

de termes ; comme les puissances des nombres inégaux sont elles-mêmes d'autant plus inégales , qu'elles sont plus élevées , il y aura une si grande différence entre les puissances  $A p^n$ ,  $B q^n$ ,  $C r^n$ , que celle, qui résultera du plus grand des nombres  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , &c, surpassera beaucoup en grandeur les autres, & que celles-ci deviendront absolument nulles à l'égard de la première, si  $n$  est un nombre infiniment grand. Les nombres  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , &c, étant donc inégaux entr'eux , supposons  $p$  le plus grand de tous ; par conséquent, si  $n$  est un nombre infini, on aura  $P = A p^n$  ; mais si  $n$  est seulement un nombre très-grand, on aura à-peu-près  $P = A p^n$  ; on aura pareillement  $Q = A p^{n+1}$ , & par conséquent  $\frac{Q}{P} = p$ . Il suit de-là évidemment que, si la série récurrente est prolongée suffisamment, le coefficient de chaque terme divisé par le précédent, exprimera la valeur approchée de la plus grande lettre  $p$ .

336. Donc, si dans la fraction proposée

$$\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + \&c.}{1 - a\zeta - b\zeta^2 - c\zeta^3 - d\zeta^4 - \&c.}$$

le dénominateur ne renferme que des facteurs simples réels inégaux entr'eux, la série récurrente qui en naîtra, pourra faire connoître un des facteurs simples, savoir, celui  $1 - p\zeta$ , dans lequel la lettre  $p$  a la plus grande valeur de toutes. On ne fait point entrer ici dans le calcul les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , &c. du numérateur ; car quels qu'ils soient, il en résultera toujours la même vraie valeur pour la plus grande quantité  $p$ . A la vérité, on ne tireroit la véritable valeur de  $p$ , que lorsque la série auroit été prolongée à l'infini ; cependant, si on a déjà calculé plusieurs termes de cette suite, on aura la valeur de  $p$  d'autant plus approchée, que le nombre des termes sera plus grand, & que cette lettre  $p$  surpassera en grandeur les autres  $q$ ,  $r$ ,  $s$ , &c. Au reste, il est indifférent que cette lettre  $p$  soit affectée du signe  $+$

ou du signe —, car dans les deux cas, les puissances augmentent également.

337. Il est assez facile à présent de voir comment se peut faire l'application de ces principes à la recherche des racines d'une équation algébrique quelconque. En effet, les facteurs du dénominateur  $1 - a\zeta - c\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \&c.$  étant connus, on assignera facilement les racines de cette équation

$$1 - a\zeta - c\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \&c. = 0,$$

de sorte que si un des facteurs est  $1 - p\zeta$ , une des racines de cette équation sera  $\zeta = \frac{1}{p}$ . Puis donc que la série récurrente fait connoître le plus grand nombre  $p$ , on obtiendra en même temps la plus petite racine de l'équation  $1 - a\zeta - c\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \&c. = 0$ ; ou bien, si on fait  $\zeta = \frac{1}{x}$ , pour avoir l'équation

$$x^m - ax^{m-1} - cx^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \delta x^{m-4} - \&c. = 0,$$

on aura, à l'aide de la même méthode, la plus grande racine de cette dernière équation, savoir  $x = p$ .

338. Soit donc proposée cette équation

$$x^m - ax^{m-1} - cx^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \delta x^{m-4} - \&c. = 0,$$

laquelle ne renferme que des racines réelles & inégales entr'elles, on trouvera de la manière suivante la plus grande de ces racines. Formons des coefficients de cette équation la fraction

$$\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + \&c.}{1 - a\zeta - c\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \&c.}$$

& de cette fraction, une série récurrente, en prenant à volonté le numérateur, ou, ce qui revient au même, en prenant arbitrairement les premiers termes; de manière qu'elle soit

$$A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \dots + P\zeta^n + Q\zeta^{n+1};$$

la fraction  $\frac{Q}{P}$  donnera la valeur de la plus grande racine  $x$

DANS LA RECHERCHE DES RACINES DES ÉQUAT. 261  
de l'équation d'autant plus approchée, que  $n$  sera un plus grand nombre.

E X E M P L E I.

Soit proposée l'équation  $xx - 3x - 1 = 0$ , dont il s'agit de trouver la plus grande racine.

Formons la fraction  $\frac{a + bx}{1 - 3x - 3x^2}$ ; en prenant pour premiers termes 1, 2, nous aurons la série récurrente

1, 2, 7, 23, 76, 251, 829, 2738, &c.

Donc la quantité  $\frac{2738}{829}$  approchera de la valeur de la plus grande racine de l'équation proposée. Or la valeur de cette fraction exprimée en décimales est

3,3027744

tandis que la plus grande racine de l'équation  $= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} =$

3,3027756

laquelle surpasse la précédente seulement d'un millionième.

Remarquez au reste que les fractions  $\frac{P}{Q}$  sont alternativement plus grandes & plus petites que la vraie racine. (99)

E X E M P L E II.

Soit proposée l'équation  $3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$ , dont les racines représentent les sinus de trois arcs, dont les triples ont un sinus  $= \frac{1}{2}$ .

Ayant ramené l'équation à la forme  $0 = 1 - 6x + 8x^3$ , cherchons-en, pour nous en tenir aux nombres entiers, la plus petite racine, de manière qu'il ne soit pas nécessaire de mettre  $\frac{1}{2}$  pour  $x$ . Formons donc en conséquence la fraction

$$\frac{a + bx + cxx}{1 - 6x + 8x^3}$$

& comme les trois premiers termes sont à notre choix,

nous prendrons 0, 0, 1, pour rendre, par ce moyen, le calcul plus expéditif; ce qui nous donnera, en omettant les puissances de  $x$ , parce que nous n'avons besoin que des coefficients, la série récurrente suivante

$$0; 0; 1; 6; 36; 208; 1200; 6912; 39808; 229248.$$

La valeur approchée de la plus petite racine de l'équation sera donc  $= \frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0,1736460$ , laquelle conséquemment devrait être le sinus de l'angle de  $10^\circ$ ; mais, suivant les Tables, ce sinus est 0,1736482; quantité, qui surpasse la racine trouvée auparavant de  $\frac{22}{1000000}$ . Au reste, cette même racine peut se trouver plus facilement en faisant  $x = \frac{1}{2}y$ , pour avoir l'équation  $1 - 3y * + y^3 = 0$ . Traitée de la même manière que la précédente, elle donnera la série

$$0, 0, 1, 3, 9, 26, 75, 216, 622, 1791, 5157, \&c.$$

On aura donc pour la valeur approchée de la plus petite racine  $y = \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0,3472949$ . Donc  $x = \frac{1}{2}y = 0,1736479$ ; valeur dix fois plus approchée que la précédente.

### E X E M P L E III.

*On veut connoître la plus grande racine de la même équation proposée  $0 = 1 - 6x * + 8x^3$ .*

Soit  $x = \frac{y}{2}$ ; on aura  $y^3 * - 3y + 1 = 0$ . On trouvera la plus grande racine de cette équation par une série récurrente, dont l'échelle de relation est 0, 3, -1, d'où résulte, les trois premiers termes ayant été pris à volonté, la série

$$1, 1, 1, 2, 2, 5, 4, 13, 7, 35, 8, 98, -11, \&c.$$

Et comme on arrive à des termes négatifs, c'est une preuve



que la plus grande racine est négative; en effet  $x = -\sin. 70^\circ = -0,9396926$ . Il faut donc avoir égard à cette circonstance dans le choix des premiers termes, en cette manière :

$$1 - 2 + 4 - 7 + 14 - 25 + 49 - 89 + 172 - 316 + 605 - \&c.$$

d'où l'on tire  $y = \frac{-605}{316}$  &  $x = \frac{-605}{632} = -0,957$ , valeur, qui s'écarte beaucoup de la vérité.

339. La raison de cette différence vient sur-tout de ce que les racines de l'équation proposée étant  $\sin. 10^\circ$ ,  $\sin. 50^\circ$ , &  $-\sin. 70^\circ$ , les deux plus grandes diffèrent si peu l'une de l'autre, que dans les puissances, jusqu'auxquelles nous avons continué la série, la seconde racine  $\sin. 50^\circ$  a encore un rapport sensible avec la plus grande, & qu'elle ne disparoît pas à l'égard de celle-ci. Le faut, que nous observons, vient aussi de ce que les valeurs trouvées deviennent alternativement trop grandes & trop petites. Ainsi, en prenant

$$y = \frac{-316}{172}, x \text{ devient } = \frac{-158}{172} = \frac{-79}{86} = -0,918.$$

En effet, comme les puissances de la plus grande racine deviennent alternativement positives & négatives, les puissances de la seconde racine sont aussi alternativement ajoutées & retranchées : c'est pourquoi, pour rendre cette différence insensible, on doit continuer la série beaucoup plus loin.

340. Mais on peut remédier d'une autre manière à cet inconvénient, en transformant, au moyen d'une substitution convenable, l'équation en une autre, dont les racines ne soient pas si voisines. Par exemple, si dans l'équation  $0 = 1 - 6x + 8x^3$  dont les racines sont  $-\sin. 70^\circ$ ,  $+\sin. 50^\circ$   $+\sin. 10^\circ$ , on fait  $x = y - 1$ , l'équation  $0 = 8y^3 - 24yy + 18y - 1$ , aura pour racines  $1 - \sin. 70^\circ$ ;  $1 + \sin. 50^\circ$ ;  $1 + \sin. 10^\circ$ ; & par conséquent la plus petite racine

fera  $1 - \sin. 70^\circ$ , tandis qu'auparavant celle-ci  $\sin. 70^\circ$  étoit la plus grande de l'équation précédente ; & à présent  $1 + \sin. 50^\circ$  est la racine la plus grande, lorsque précédemment la racine  $\sin. 50^\circ$  étoit la moyenne. Ainsi, une racine quelconque pourra, par le moyen d'une substitution, devenir la plus grande ou la plus petite d'une nouvelle équation, & être en conséquence déterminée par la méthode que nous venons de donner. De plus, comme dans notre exemple la racine  $1 - \sin. 70^\circ$  est beaucoup plus petite que les deux autres, il sera facile d'en avoir la valeur approchée par une série récurrente.

## E X E M P L E I V.

Trouver la plus petite racine de l'équation  $0 = 8y^3 - 24y^2 + 18y - 1$ , qui étant soustraite de l'unité donnera pour reste le sinus de l'angle de  $70^\circ$ .

Soit  $y = \frac{1}{2}z$ , pour avoir  $0 = z^3 - 6zz + 9z - 1$ , dont la plus petite racine se trouvera par une série récurrente, dont l'échelle de relation est  $9, -6, +1$ , & la plus grande, en prenant l'échelle de relation  $6, -9, +1$ . Pour avoir la plus petite, formons donc cette série

1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861; &c.

nous aurons à-peu-près  $z = \frac{17593}{145861} = 0,12061483$  &  $y = 0,06030741$ , &  $\sin. 70^\circ = 1 - y = 0,93969258$ , valeur qui ne s'écarte pas de la vérité, même dans le dernier chiffre. On comprend donc par-là combien il peut être avantageux de transformer, par une substitution convenable, une équation, pour en trouver les racines, & que par ce moyen la méthode que nous avons expliquée, ne s'applique pas seulement à la recherche des plus grandes & des plus petites racines, mais qu'elle peut les donner toutes.

341. Ayant donc trouvé par approximation une racine quelconque d'une équation proposée, de manière que le nombre  $k$ , par exemple, diffère très-peu d'une des racines,

nous

nous ferons  $x - k = y$ , ou  $x = y + k$ , & par ce moyen nous aurons une équation, dont la plus petite racine sera  $= x - k$ ; & si nous la cherchons par une série récurrente, ce qui sera très-facile, puisque cette racine est beaucoup plus petite que les autres, en l'ajoutant à  $k$ , nous aurons une des vraies racines  $x$  de l'équation proposée. L'usage de ce procédé est si général, qu'il auroit encore lieu, quand même l'équation contiendroit des racines imaginaires.

342. On ne peut sur-tout se passer de cet artifice pour trouver une racine, lorsque l'équation en renferme une autre égale à celle qu'on cherche, mais affectée d'un signe contraire. Par exemple, si une équation dont la plus grande racine soit  $p$ , avoit aussi  $-p$  pour racine, on auroit beau continuer la série, même jusqu'à l'infini, on n'en pourroit jamais déduire cette racine  $p$ . Proposons-nous, pour éclaircir ce que nous avançons, l'équation  $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$ , dont la plus grande racine est  $\sqrt[3]{5}$ , & qui a en même temps  $-\sqrt[3]{5}$  pour racine; si nous suivons la méthode que nous avons prescrite, pour trouver la plus grande racine, & que nous formions une série récurrente, dont l'échelle de relation soit  $1, + 5, - 5$ , nous aurons la suite

1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, &c.

dans laquelle on n'arrive à aucun rapport constant. Mais il en est autrement du rapport des termes pris alternativement, & si l'un de ces termes est divisé par le précédent, le quotient exprimera le carré de la plus grande racine. En effet, on a à-peu-près  $5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}$ . Ainsi, toutes les fois qu'en prenant seulement les termes alternatifs, leur rapport tend à l'égalité, on obtient la valeur approchée du carré de la racine cherchée. Au reste, la racine  $x = \sqrt[3]{5}$  se trouve en faisant  $x = y + 2$ ; ce qui donne l'équation  $1 - 3y - 5yy - y^3 = 0$ , dont la plus petite racine se conclura de la série

1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, &c.

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 L

Car elle sera à-peu-près  $= \frac{2585}{10945} = 0,2361$ ; or  $2,2361$  est à-peu-près  $= \sqrt{5}$ , qui est la plus grande racine de l'équation.

343. Quoique le numérateur de la fraction qui forme la série récurrente, soit arbitraire, cependant la forme qu'on lui donne, peut contribuer beaucoup à trouver plus promptement la valeur approchée de la racine. En effet, ayant pris, comme ci-dessus (art. 334) les facteurs du dénominateur; soit le terme général de la série récurrente  $= z^n (A p^n + B q^n + C r^n + \&c.)$  ces coefficients  $A, B, C, \&c.$  se déterminent par le numérateur de la fraction; par conséquent il peut arriver que  $A$  ait une valeur grande ou petite; dans le premier cas, la plus grande racine  $p$  se trouve plutôt, & dans le second, plus tard; on peut même prendre un numérateur qui fasse disparaître entièrement  $A$ ; alors la série, quoique continuée à l'infini, ne donnera jamais la plus grande racine  $p$ . Or cela arrive, lorsque le numérateur qu'on a choisi, a lui-même pour facteur,  $1 - pz$ , car alors ce facteur sortira entièrement de l'expression. Par exemple, si on propose l'équation  $x^2 - 6xx + 10x - 3 = 0$ , dont la plus grande racine  $= 3$ , & qu'on en forme la fraction

$$\frac{1 - 3z}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$$

de sorte que l'échelle de relation soit  $6, -10, +3$ , on obtiendra la série

$$1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, \&c.$$

dans laquelle le rapport de deux termes n'approche nullement de  $1 : 3$ . La raison en est que la même série provient de la fraction  $\frac{1}{1 - 3z + z^2}$ , & qu'elle donne par conséquent la plus grande racine de l'équation  $x^2 - 3x + 1 = 0$ .

344. Il est encore possible de prendre un numérateur, qui fasse connoître par la série récurrente telle racine qu'on

voudra de l'équation ; il faut pour cela que le numérateur soit le produit de tous les facteurs du dénominateur , excepté celui , auquel répond la racine cherchée. Ainsi , en prenant dans le premier exemple le numérateur  $1 - 3x + 3x^2$  ; la fraction  $\frac{1 - 3x + 3x^2}{1 - 6x + 10x^2 - 3x^3}$  donnera cette série récurrente 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c, laquelle formant une progression géométrique donne tout de suite la racine  $x = 3$  ; car cette fraction est égale à cette fraction simple  $\frac{1}{1 - 3x}$ .

Il suit de-là que si les premiers termes qu'on peut prendre à volonté , sont tels qu'ils forment une progression géométrique , dont l'exposant soit égal à une racine de l'équation , toute la série récurrente sera géométrique , & donnera par conséquent cette racine , quoiqu'elle ne soit ni la plus grande ni la plus petite.

345. Ainsi , pour n'être pas exposés , lorsque nous cherchons la plus grande ou la plus petite racine , à trouver , contre notre attente , une autre racine par la série récurrente , il faut choisir un numérateur qui n'ait aucun facteur commun avec le dénominateur ; ce qui se fera , en prenant l'unité pour numérateur. Donc le premier terme de la série sera  $= 1$  , & avec celui-là , on déterminera tous les autres , d'après l'échelle de relation. De cette manière on sera toujours sûr de trouver la racine de l'équation , la plus grande ou la plus petite , selon qu'on le desire. Ainsi , s'étant proposé l'équation  $y^3 - 3y + 1 = 0$  , dont on veut connoître la plus grande racine , au moyen de l'échelle de relation 0, + 3, - 1, on formera , en commençant par l'unité , la série récurrente suivante

$$1 - 0 + 3 - 1 + 9 - 6 + 28 - 27 + 90 - 109 + 297 - 417 + 1000 - 1548 + 3417 - 5644 + \&c.$$

laquelle tend manifestement à un rapport constant , & fait voir que la plus grande racine  $y$  est négative , & qu'elle est

à-peu-près  $y = \frac{-5644}{3417} = -1,651741$ , tandis qu'elle devoit être  $= -1,86793852$ . On a vu auparavant la raison pour laquelle on arrive si lentement à la vraie valeur, c'est que l'autre racine n'est pas beaucoup moindre que la plus grande, & que d'ailleurs elle est positive.

346. Après avoir bien examiné ce que nous avons dit en général, & à l'occasion des exemples que nous avons rapportés, on reconnoîtra sans peine la grande utilité de cette méthode pour trouver les racines des équations. Nous avons suffisamment indiqué les moyens qui peuvent abrégier les opérations, & les rendre plus faciles, de sorte que nous n'aurions rien à ajouter, s'il ne restoit à examiner les cas, où l'équation a des racines égales ou imaginaires. Supposons donc que le dénominateur de la fraction

$$\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + \&c.}{1 - a\zeta - c\zeta^2 - r\zeta^3 - d\zeta^4 - \&c.}$$

renferme le facteur  $(1 - p\zeta)^2$ , outre les autres facteurs  $1 - q\zeta$ ,  $1 - r\zeta$ , &c. Le terme général de la série qui en proviendra, sera donc  $= \zeta^n [n+1]Ap^n + Bp^n + Cq^n + \&c]$ . Pour savoir quelle valeur en résultera, lorsque  $n$  est un nombre très-grand, distinguons deux cas, celui où  $p$  est un nombre plus grand que les autres  $q$ ,  $r$ , &c, & celui où  $p$  ne donne pas la plus grande racine. Dans le premier cas, où  $p$  est la racine la plus grande, à cause du coefficient  $(n+1)$ , les autres termes  $Bp^n + Cq^n$  &c, ne s'évanouiront pas à l'égard du premier, aussi-tôt qu'auparavant; & si  $q$  est  $> p$ , le terme  $(n+1)Ap^n$  ne disparaîtra que tard devant  $Cq^n$ , & par conséquent, on aura beaucoup plus de peine à trouver la plus grande racine.

#### E X E M P L E I.

*Soit proposée l'équation  $x^3 - 3xx + 4 = 0$ , dans laquelle la plus grande racine se trouve deux fois.*

Cherchons donc la plus grande racine suivant la méthode

que nous avons exposée ci-dessus, en développant la fraction

$$\frac{1}{1 - 3z + 4z^2}$$

en une série récurrente; qui sera

$$1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593, \&c.$$

Il est visible que chaque terme divisé par le précédent, donne un quotient plus grand que deux. La raison s'en déduit très-facilement du terme général; car en rejettant les puissances  $Cq^n$ , &c, on aura le terme correspondant à la puissance  $z^n$ ,  $= (n+1)Ap^n + Bp^n$ , & le suivant  $= (n+2)Ap^{n+1} + Bp^{n+1}$ , lequel étant divisé par le premier, donne  $\frac{(n+2)A+B}{(n+1)A+B}p > p$ , à moins que  $n$  ne soit infini.

E X E M P L E II.

Soit proposée maintenant l'équation  $x^3 - xx - 5x - 3 = 0$ , dont la plus grande racine  $= 3$ , & les deux autres égales  $= -1$ .

Cherchons la plus grande racine par le moyen d'une série récurrente, dont l'échelle de relation est  $1 + 5 + 3$ ; ce qui donne

$$1, 1, 6, 14, 47, 135, 412, 1228, \&c.$$

On trouve assez-tôt la valeur 3, parce que les puissances de la plus grande racine  $-1$ , quoique multipliées par  $(n+1)$  disparaissent de bonne heure auprès des puissances de 3.

E X E M P L E III.

Mais, si on se proposoit l'équation  $x^3 + xx - 8x - 12 = 0$ , dont les racines sont 3,  $-2$ ,  $-2$ ; on trouvera beaucoup plus tard la plus grande racine. En effet, on aura la série

$$1, -1, 9, -5, 65, 3, 457, 347, 3345, 4915, \&c.$$

qu'on devrait continuer encore bien au-delà, avant de s'apercevoir que la racine qui doit en résulter,  $= 3$ .

347. Semblablement, s'il y a dans l'équation trois facteurs égaux, de sorte qu'un facteur du dénominateur soit  $(1 - p\zeta)^3$ , & les autres  $1 - q\zeta$ ,  $1 - r\zeta$ , &c, le terme général de la série sera  $= \zeta^n \left( \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} A p^n + (n+1) B p^n + C p^n + D q^n + C r^n + \&c \right)$ . Donc si  $p$  est la plus grande racine, & que  $n$  soit un nombre assez grand, pour que les puissances  $q^n$ ,  $r^n$ , &c, disparaissent devant  $p^n$ , alors la série récurrente donnera la racine  $=$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)A + (n+2)B + C}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A + (n+1)B + C} p,$$

qui n'indiquera la vraie racine de  $p$ , que lorsque  $n$  sera un nombre très-grand & presque infini. Or cette valeur de la

$$\text{racine} = p + \frac{(n+2)A + B}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A + (n+1)B + C} p.$$

Mais, si  $p$  n'est pas la racine la plus grande, on éprouvera beaucoup plus d'embarras à la trouver, d'où il suit que les équations, qui renferment des racines égales, se résolvent par les séries récurrentes, en suivant cette méthode beaucoup plus difficilement, que si toutes les racines étoient inégales entr'elles.

348. Examinons maintenant la nature d'une série récurrente continuée à l'infini, lorsque le dénominateur de la fraction contient des facteurs imaginaires. Soit donc la fraction

$$\frac{a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + \&c.}{1 - a\zeta - b\zeta^2 - c\zeta^3 - d\zeta^4 - \&c.}$$

dont le dénominateur ait pour facteurs réels,  $1 - q\zeta$ ,  $1 - r\zeta$ , &c, & de plus le facteur trinôme  $1 - 2p\zeta \cos \phi + pp\zeta\zeta$ , qui renferme deux facteurs simples imaginaires. Donc, si la série récurrente, qui résulte de cette fraction, est

$A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \dots + P\zeta^n + Q\zeta^{n+1}$ ,  
on aura, suivant ce que nous avons exposé plus haut, le



coefficient  $P = \frac{A.\text{fin.}(n+1)\varphi + B.\text{fin.}n\varphi}{\text{fin.}\varphi} p^n + Cq^n + Dr^n +$   
 &c. Donc, si le nombre  $p$  est plus petit que chacun des  
 autres,  $q, r, \&c.$ , de manière que la plus grande racine de  
 l'équation

$$x^m - a x^{m-1} - b x^{m-2} - c x^{m-3} - \&c. = 0$$

soit réelle, elle se trouvera par les séries récurrentes, comme  
 si aucune racine n'étoit imaginaire.

349. Donc l'existence des racines imaginaires n'empêchera  
 point de trouver la plus grande racine réelle, pourvu que  
 le produit des deux d'entr'elles, qui composent un facteur  
 réel, ne soit pas plus grand que le carré de la plus grande  
 racine. Mais, si le produit de deux de ces racines imagi-  
 naires égale ou surpasse le carré de la plus grande racine  
 réelle, alors la méthode précédente n'apprendra rien, (uu)  
 puisque la puissance  $p^n$  ne disparaît jamais devant une puis-  
 sance semblable de la plus grande racine, quoique la série  
 soit prolongée à l'infini. Pour plus d'éclaircissement, nous  
 avons jugé à propos de donner quelques exemples.

#### E X E M P L E I.

Soit proposée l'équation  $x^3 - 2x - 4 = 0$ , dont il s'agit  
 de trouver la plus grande racine.

Cette équation se décompose en deux facteurs  
 $(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$ ; ce qui nous apprend qu'elle a  
 une racine réelle 2 & deux autres imaginaires, dont le  
 produit 2 est moindre que le carré de la racine réelle. La  
 racine réelle pourra donc se trouver en suivant la même  
 marche qu'auparavant. Formons en conséquence une série  
 récurrente avec l'échelle de relation 0, + 2, + 4, elle sera

$$1, 0, 2, 4, 4, 16, 24, 48, 112, 192, 416, 832, \&c.$$

d'où l'on peut conclure assez facilement la racine réelle 2.

## E X E M P L E II.

Soit proposée l'équation  $x^3 - 4xx + 8x - 8 = 0$ , dont une racine réelle est 2, & le produit des deux imaginaires = 4, & est par conséquent égal au carré de la racine réelle 2.

Cherchons donc cette racine par une série récurrente, & pour plus de facilité, faisons  $x = 2y$ , afin d'avoir  $y^3 - 2yy + 2y - 1 = 0$ ; ce qui donnera la série récurrente

1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, &c.

Comme les mêmes termes reviennent continuellement, on n'en peut rien conclure, sinon ou que la plus grande racine n'est pas réelle, ou qu'il y a des imaginaires dont le produit égale ou surpasse le carré de la racine réelle.

## E X E M P L E III.

Soit encore proposée l'équation  $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ , dont la racine réelle est 1, & le produit des imaginaires = 2.

Formons donc avec l'échelle de relation 3, - 4, + 2, la série

1, 3, 5, 5, 1, - 7, - 15, - 15, 1, 33, 65, 65, 1, &c.

Comme les termes y sont tantôt positifs, & tantôt négatifs, on n'en pourra nullement déduire la racine réelle 1. Mais ces retours successifs de signes apprennent toujours, que la racine que doit donner la série, est imaginaire; car ici les racines imaginaires sont plus grandes en puissance que la racine réelle 1.

350. Supposons donc dans la fraction générale le produit  $pp$  de deux racines imaginaires plus grand que le carré d'aucune racine réelle, de manière que les autres puissances  $q^n$ ,  $r^n$ , &c, disparaissent à l'égard de  $p^n$ , si  $n$  est un nombre infini. Dans ce cas,  $P$  deviendra =

$$\frac{A \sin(n+1)\varphi + B \sin n\varphi}{\sin \varphi} p^n \text{ \& } Q = \frac{A \sin(n+2)\varphi + B \sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} p^{n+1},$$

&c

& par conséquent  $\frac{Q}{P} = \frac{A. \sin. (n+2)\phi + B. \sin. (n+1)\phi}{A. \sin. (n+1)\phi + B. \sin. n\phi} P$ .

Cette expression n'aura jamais une valeur constante, quoique  $n$  soit un nombre infini; car les sinus des angles varient continuellement, de sorte qu'ils sont tantôt positifs & tantôt négatifs.

351. Cependant, si on prend de même les fractions suivantes  $\frac{R}{Q}$ ,  $\frac{S}{R}$ , & qu'on élimine  $A$  &  $B$ , le nombre  $n$  sortira en même temps du calcul. En effet, on trouvera  $Pp\dot{p} + R = 2Qp \cdot \text{cos. } \phi$ ; & par conséquent  $\text{cos. } \phi = \frac{Pp\dot{p} + R}{2Qp}$ ; mais on aura de même  $\text{cos. } \phi = \frac{Qpp + S}{2Rp}$ ; & en comparant ces deux valeurs, on trouvera  $p = \sqrt{\frac{RR - QS}{QQ - PR}}$  &  $\text{cos. } \phi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(Q^2 - PR)(R^2 - QS)}}$ . Donc, si la série récurrente a été assez prolongée, pour que les puissances des autres racines s'évanouissent à l'égard de  $p^n$ , on pourra trouver de cette manière le facteur trinome  $1 - 2p\dot{z} \text{cos. } \phi + PP\dot{z}\dot{z}$ .

352. Comme ce calcul pourroit embarrasser les Commencans, je vais le faire ici tout au long. De la valeur trouvée de  $\frac{Q}{P}$ , on conclura  $A.Pp \sin.(n+2)\phi + B.Pp \sin.(n+1)\phi = A.Q \sin.(n+1)\phi + B.Q \sin. n\phi$ . Donc  $\frac{A}{B} = \frac{Q \sin. n\phi - Pp \sin.(n+1)\phi}{Pp \sin.(n+2)\phi - Q \sin.(n+1)\phi}$ . Par la même raison, on aura  $\frac{A}{B} = \frac{R \sin.(n+1)\phi - Qp \sin.(n+2)\phi}{Qp \sin.(n+3)\phi - R \sin.(n+2)\phi}$ . En égalant ces deux valeurs, on aura  $0 = QQp \sin. n\phi \sin.(n+3)\phi - QR \sin. n\phi \sin.(n+2)\phi - PQQp \sin.(n+1)\phi \sin.(n+3)\phi - QQp \sin.(n+1)\phi \sin.(n+2)\phi + QR \sin.(n+1)\phi \sin.(n+1)\phi + PQQp \sin.(n+2)\phi \sin.(n+2)\phi$ . Mais, comme  $\sin. a \sin. b = \frac{1}{2} \text{cos. } (a-b) - \frac{1}{2} \text{cos. } (a+b)$ , on

aura  $0 = \frac{1}{2} Q Q P (\text{cof. } 3\phi - \text{cof. } \phi) + \frac{1}{2} Q R (1 - \text{cof. } 2\phi) + \frac{1}{2} P Q P P (1 - \text{cof. } 2\phi)$ , & en divisant par  $\frac{1}{2} Q$ ,  $(P P P + R) (1 - \text{cof. } 2\phi) = Q P (\text{cof. } \phi - \text{cof. } 3\phi)$ . Mais  $\text{cof. } \phi = \text{cof. } 2\phi \text{cof. } \phi + \text{sin. } 2\phi \text{sin. } \phi$ , &  $\text{cof. } 3\phi = \text{cof. } 2\phi \text{cof. } \phi - \text{sin. } 2\phi \text{sin. } \phi$ , & partant  $\text{cof. } \phi - \text{cof. } 3\phi = 2 \text{sin. } 2\phi \text{sin. } \phi = 4 \text{sin. } \phi^2 \text{cof. } \phi$  &  $1 - \text{cof. } 2\phi = 2 \text{sin. } \phi^2$ . Donc  $P P P + R = 2 Q P \text{cof. } \phi$  &  $\text{cof. } \phi = \frac{P P P + R}{2 Q P}$ , & de même  $\text{cof. } \phi = \frac{Q P P + S}{2 R P}$ , d'où l'on déduit les valeurs indiquées ci-dessus, savoir :  $p = \sqrt{\frac{R R - Q S}{Q Q - P R}}$  &  $\text{cof. } \phi = \frac{Q R - P S}{2 \sqrt{(Q^2 - P R)(R R - Q S)}}$ .

353. Si le dominateur de la fraction qui forme la série récurrente, renferme plusieurs facteurs trinomes égaux entr'eux, on voit par la forme générale que nous avons donnée auparavant que la recherche des racines devient beaucoup plus incertaine. Cependant, si on a déjà une valeur approchée d'une racine réelle quelconque, en transformant l'équation, on obtiendra toujours une valeur de la même racine beaucoup plus approchée. Il faudra faire  $x$  égale à la valeur déjà trouvée,  $+ y$ , & chercher pour  $y$  la plus petite racine de la nouvelle équation, laquelle ajoutée à la première, donnera la vraie valeur de  $x$ .

#### E X E M P L E.

Soit proposée l'équation  $x^3 - 3xx + 5x - 4 = 0$ , dont on fait qu'une des racines est à-peu-près  $= 1$ , puisqu'en faisant  $x = 1$ , il en résulte l'équation  $x^3 - 3xx + 5x - 4 = -1$ .

Soit  $x = 1 + y$ , l'équation deviendra  $1 - 2y - y^3 = 0$ , & pour trouver la plus petite racine, formons une série récurrente dont l'échelle de relation soit  $2, 0, + 1$ , & qui sera

1, 2, 4, 9, 20, 44, 97, 214, 472, 1041, 2296, &c.

Par conséquent la plus petite racine de  $y$  fera à - peu près  $\frac{1041}{2296} = 0,453397$ ; de sorte que  $x = 1,453397$ , valeur, qu'il seroit bien difficile d'avoir plus approchée par une autre méthode.

354. Si une série récurrente quelconque devient à la fin à très-peu de chose près une progression géométrique, alors la loi de la progression fera connoître facilement l'équation, qui aura pour racine le quotient, qui résulte de la division d'un terme par celui qui précède. Soient

$$P, Q, R, S, T, \&c.$$

des termes de la série récurrente déjà très-éloignés de l'origine, tels qu'ils se confondent avec une progression géométrique, & soit  $T = aS + eR + \gamma Q + \delta P$ , ou, soit l'échelle de relation,  $a, e, \gamma, \delta$ . Supposons la valeur de la fraction  $\frac{Q}{P} = x$ , on aura  $\frac{R}{P} = xx$ ;  $\frac{S}{P} = x^3$  &  $\frac{T}{P} = x^4$ .

Ces quantités substituées dans l'équation précédente donneront

$$x^4 = ax^3 + ex^2 + \gamma x + \delta$$

d'où il suit que le quotient  $\frac{Q}{P}$  donne une racine de l'équation trouvée. C'est ce que nous indique la méthode précédente, en même temps qu'elle nous apprend que  $\frac{Q}{P}$  exprime la plus grande racine de l'équation.

355. Cette méthode peut encore être employée quelquefois utilement, pour trouver des racines d'une équation, dont le nombre de termes est infini. Pour en donner un exemple, soit proposée l'équation  $\frac{1}{x} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \&c$ , dont la plus petite racine  $x$  exprime un arc de  $30^\circ$ , ou le sixième de la demi-circonférence d'un cercle.

Ramenons donc l'équation à cette forme

$$1 - 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{2520} - \&c. = 0$$

formons-en une série récurrente, dont l'échelle de relation est infinie, favoir

$$2, 0, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{60}, 0, -\frac{1}{2520}, 0 \&c.$$

Cette série récurrente fera

$$1, 2, 4, \frac{23}{3}, \frac{44}{3}, \frac{1681}{60}, \frac{2408}{45} \&c.$$

On aura donc à-peu-près  $x = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0,52356$ . Mais par le rapport connu de la circonférence au diamètre, on devrait avoir  $x = 0,523598$ ; de manière que la racine trouvée diffère de la véritable seulement de  $\frac{3}{100000}$ . Au reste, on a pu faire usage de la méthode dans cette équation, parce que toutes ses racines sont réelles, & que les autres ne laissent pas de différer de la plus petite. Mais comme cette condition a rarement lieu dans les équations infinies, il y aura peu de cas, où cette méthode puisse être employée pour les résoudre.

## C H A P I T R E   X V I I I .

### *Des Fractions continues.*

356. Après avoir traité assez au long dans les Chapitres précédents des séries infinies, & des produits composés de facteurs infinis, il convient de dire un mot d'une troisième espece de formules infinies, que donnent les divisions ou fractions continues. Car quoique cette partie ait été peu cultivée jusqu'à présent, je ne doute pas que l'usage n'en devienne très-grand dans l'analyse infinitésimale. Quelques essais que j'en ai faits m'autorisent à le croire. Cette théorie ne laissera pas d'être particulièrement d'un assez grand secours pour l'Arithmétique & l'Algebre ordinaire; c'est ce que je me propose d'exposer & d'expliquer en peu de mots dans ce Chapitre.

357. J'appelle fraction continue une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier & une fraction formée de la même manière que les précédentes, ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il n'y en ait qu'un nombre fini.

Telles sont les expressions suivantes :

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \dots}}}}} \quad \text{ou} \quad a + \frac{a}{b + \frac{c}{c + \frac{y}{d + \frac{\delta}{e + \frac{e}{f + \dots}}}}}$$

Dans la première, les numérateurs de toutes les fractions sont l'unité; c'est celle que nous considérerons principale-

ment ; & dans la seconde, les numérateurs sont des nombres quelconques.

358. Après avoir ainsi donné la forme des fractions continues, voyons d'abord comment on peut obtenir leur valeur sous la forme ordinaire. Pour faciliter cette recherche, allons, par degrés, & interrompons la suite : d'abord à la première, ensuite à la seconde, puis à la troisième fraction ; cela posé, il est clair qu'on aura

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}} = \frac{abcde + abc + ade + cde + abc + a + c + e}{bcde + bc + de + bc + 1}$$

&c.

359. Quoique dans ces fractions ordinaires, on ne reconnoisse pas facilement la loi suivant laquelle le numérateur & le dénominateur sont composés des lettres  $a, b, c, d$ , &c. cependant, avec un peu d'attention, on pourra découvrir comment chaque fraction dérive des précédentes. En effet, chaque numérateur est la somme du dernier numérateur multiplié par une nouvelle lettre, & de l'avant-dernier numérateur simple ; & la même loi s'observe pour les dénominateurs. Ayant donc écrit par ordre les lettres  $a, b, c, d$ , &c.



on en formera facilement les fractions, de cette manière :

$$\frac{a}{1} ; \frac{a}{1} ; \frac{ab+1}{b} ; \frac{abc+a+c}{bc+1} ; \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

Chaque numérateur se trouve en multipliant le dernier par la lettre qui est écrite au-dessus de celui-ci, & en ajoutant au produit l'avant-dernier. Il en est de même des dénominateurs ; mais pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans la loi, j'ai écrit à la tête la fraction  $\frac{1}{1}$ , qui, quoiqu'elle ne dérive pas de la fraction continue, est propre pourtant à rendre plus sensible la loi de la progression. Au reste, chaque fraction exprime la valeur de la fraction continue en supposant qu'elle ait été continuée inclusivement jusqu'à la lettre écrite au-dessus du terme qui précède.

360. On obtiendra semblablement pour l'autre formule des fractions continues, savoir :

$$a + \frac{a}{b + \frac{c}{c + \frac{y}{d + \frac{d}{c + \frac{1}{f + \dots}}}}}$$

les résultats suivants, selon le nombre de termes qu'on prendra,

$$\begin{aligned} a &= a \\ a + \frac{a}{b} &= \frac{ab+a}{b} \\ a + \frac{a}{b + \frac{c}{c}} &= \frac{abc+ca+ac}{bc+c} \\ a + \frac{a}{b + \frac{c}{c + \frac{y}{d}}} &= \frac{abcd+cad+acd+yab+ay}{bcd+cd+yb} \end{aligned}$$

&c.

Chacune de ces fractions se trouvera au moyen des deux

précédentes, comme on le voit ici :

$$\frac{1}{0}; \frac{a}{1}; \frac{ab+a}{b}; \frac{abc+ca+ac}{bc+c}; \frac{abcd+cad+acd+gab+ay}{bcd+cd+gb}$$

$\alpha$     $\beta$     $\gamma$     $\delta$     $\epsilon$

361. Pour former ces fractions, écrivez au-dessus les indices  $a, b, c, d, \&c.$  écrivez encore la première fraction  $\frac{1}{0}$ , & la seconde  $\frac{a}{1}$ ; vous aurez alors chacune des suivantes en multipliant le numérateur de la dernière par l'indice supérieur, & celui de l'avant-dernière par l'indice inférieur correspondant; la somme de ces produits sera le numérateur de la fraction demandée. De même le dénominateur sera formé du produit du dénominateur précédent par l'indice supérieur, & de celui de l'avant-dernier par l'indice inférieur; & chaque fraction trouvée de cette manière donnera la valeur de la fraction continue, en supposant qu'on l'ait continuée inclusivement jusqu'au dénominateur qui est écrit au-dessus de la fraction précédente.

362. Donc, si l'on poursuit la formation de ces fractions jusqu'à ce que la fraction continue ne fournisse plus d'indices, la dernière fraction, qu'on obtiendra, donnera la vraie valeur de la fraction continue. Les fractions précédentes approcheront de plus en plus de cette valeur, & donneront par conséquent une approximation très-suffisante. En effet, supposons la vraie valeur de la fraction continue

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\epsilon}{e + \&c.}}} = x$$

Il est évident que la première fraction  $\frac{1}{0}$  est plus grande que  $x$ ; mais la seconde  $\frac{a}{1}$  sera plus petite; la troisième  $a + \frac{\alpha}{b}$  fera

sera de nouveau plus grande, & la quatrième plus petite; ainsi, ces fractions seront alternativement plus grandes & plus petites que  $x$ . Au reste, il est clair que chaque fraction approche plus près de la vraie valeur de  $x$ , qu'aucune des précédentes; d'où il suit qu'on peut, de cette manière, avoir facilement & promptement la valeur approchée de  $x$ , quand même la fraction continue seroit prolongée à l'infini, pourvu que les numérateurs  $a, c, e, g, \dots$ , ne croissent pas trop; mais si tous les numérateurs égalent l'unité, l'approximation ne peut manquer d'avoir lieu.

363. Pour faire mieux sentir comment on approche de la vraie valeur de la fraction continue, prenons les différences des fractions trouvées ci-dessus. D'abord, en négligeant la première  $\frac{a}{b}$ , la différence entre la seconde & la troisième  $= \frac{a}{b}$ ; la quatrième soustraite de la troisième donne pour reste  $\frac{a^2}{b(bc+e)}$ , & la quatrième soustraite de la cinquième donne  $\frac{a^2e}{(bc+e)(bcd+ed+gb)}$ , &c. Ainsi la valeur de la fraction continue sera représentée par une suite de la forme ordinaire, de manière que

$$x = a + \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b(bc+e)} + \frac{a^2e}{(bc+b)(bcd+ed+gb)} - \dots$$
 série qui sera limitée, toutes les fois que la fraction continue ne se prolongera pas à l'infini.

364. Nous avons donc un moyen de convertir une fraction continue en une série, dont les termes ont alternativement les signes + & - lorsque le premier  $a$  manque.

En effet, soit

$$x = \frac{a}{b} + \frac{c}{c} + \frac{e}{d} + \frac{g}{e} + \frac{i}{f} + \dots$$

on aura, par ce qui précède

$$x = \frac{a}{b} - \frac{a\epsilon}{b(bc+\epsilon)} + \frac{a\epsilon\gamma}{(bc+\epsilon)(bcd+\epsilon d+\gamma b)} - \frac{a\epsilon\gamma\delta}{(bcd+\epsilon d+\gamma b)(bcde+\epsilon de+\gamma be+\delta bc+\epsilon\delta)} + \&c.$$

D'où il fuit que si les numérateurs  $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$  ne croissent pas, si, par exemple, ils sont égaux à l'unité, & que les dénominateurs  $a, b, c, d, \&c.$  soient des nombres entiers quelconques positifs, la valeur de la fraction continue sera donnée par une série très-convergente.

365. Cela posé, on pourra réciproquement changer en fraction continue une suite de termes qui ont alternativement des signes différens, ou trouver une fraction continue, dont la valeur soit égale à la somme de la série proposée. Par exemple, si on a l'équation

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

la comparaison de cette suite avec les termes correspondants de la série, qui représente la fraction continue, donnera les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{b}; & a &= Ab \\ \frac{B}{A} &= \frac{\epsilon}{bc+\epsilon}; & \epsilon &= \frac{Bbc}{A-B} \\ \frac{C}{B} &= \frac{\gamma b}{bcd+\epsilon d+\gamma b}; & \text{Donc} & \gamma = \frac{Cd(bc+\epsilon)}{b(B-C)} \\ \frac{D}{C} &= \frac{\delta(bc+\epsilon)}{bcde+\epsilon de+\gamma be+\delta bc+\epsilon\delta}; & \delta &= \frac{Dc(bcd+\epsilon d+\gamma b)}{(bc+b)(C-D)}. \\ & & & \&c. \end{aligned}$$

Mais puisque  $\epsilon = \frac{Bbc}{A-B}$ , on aura  $bc + \epsilon = \frac{Abc}{A-B}$ ; d'où  $\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$ . Ensuite  $bcd + \epsilon d + \gamma b = (bc + \epsilon)d + \gamma b = \frac{Abcd}{A-B} + \frac{ACbcd}{(A-B)(B-C)} = \frac{ABbcd}{(A-B)(B-C)}$ ; donc

$\frac{bcd + \varpi d + \gamma b}{bc + \varpi} = \frac{Bd}{B-C}$  &  $\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$ ; on trouve de même  $\varepsilon = \frac{DEcf}{(C-D)(D-E)}$ , ainsi de suite.

366. Pour mettre cette loi plus en évidence, supposons

$$P = b$$

$$Q = bc + \epsilon$$

$$R = bcd + ed + \gamma b$$

$$S = bcde + ede + \gamma be + \delta bc + \epsilon \delta$$

$$T = bcdef + \&c.$$

$$V = bcdefg + \&c.$$

La loi que suivent ces expressions nous apprend que

$$Q = Pc + \epsilon$$

$$R = Qd + \gamma P$$

$$S = Re + \delta Q$$

$$T = Sf + \epsilon R$$

$$V = Tg + \xi S$$

&c.

Et par conséquent, en introduisant ces nouvelles lettres, on aura

$$x = \frac{a}{P} - \frac{a\varpi}{PQ} + \frac{a\varpi\gamma}{QR} - \frac{a\varpi\gamma\delta}{RS} + \frac{a\varpi\gamma\delta\epsilon}{ST} - \&c.$$

367. Ainsi, puisque nous supposons

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

nous aurons

$$A = \frac{a}{P}; \quad a = AP$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\epsilon}{Q}; \quad \varpi = \frac{BQ}{A}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma P}{R}; \quad \gamma = \frac{CR}{BP}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta Q}{S}; \delta = \frac{DS}{CQ}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{\epsilon R}{T}; \epsilon = \frac{ET}{DR}$$

&c. &c.

Et en prenant les différences

$$A - B = a \frac{(Q - \epsilon)}{PQ} = \frac{ac}{Q} = \frac{APc}{Q}$$

$$B - C = a\epsilon \frac{(R - \gamma P)}{PQR} = \frac{a\epsilon d}{PR} = \frac{BQd}{R}$$

$$C - D = a\epsilon\gamma \frac{(S - \delta Q)}{QRS} = \frac{a\epsilon\gamma\epsilon}{QS} = \frac{CRE}{S}$$

$$D - E = a\epsilon\gamma\delta \frac{(T - \epsilon R)}{RST} = \frac{a\epsilon\gamma\delta f}{RT} = \frac{DSf}{T}$$

&c. &c. &c.

Si nous multiplions ces résultats deux à deux, nous aurons les produits

$$(A - B)(B - C) = ABCd \frac{P}{R}, \quad \& \quad \frac{R}{P} = \frac{ABcd}{(A - B)(B - C)}$$

$$(B - C)(C - D) = BCde \frac{Q}{S}, \quad \& \quad \frac{S}{Q} = \frac{BCde}{(B - C)(C - D)}$$

$$(C - D)(D - E) = CDef \frac{R}{T}, \quad \& \quad \frac{T}{R} = \frac{CDef}{(C - D)(D - E)}$$

&c.

Ainsi, puisque  $P = b$ ,  $Q = \frac{ac}{A - B} = \frac{Abc}{A - B}$ ; il s'en suit que

$$a = Ab$$

$$\epsilon = \frac{Bbc}{A - B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A - B)(B - C)}$$

$$\delta = \frac{BDde}{(B - C)(C - D)}$$

$$\epsilon = \frac{CEef}{(C - D)(D - E)}$$

&c.

368. Les valeurs des numérateurs  $a, \epsilon, \gamma, \delta$ , &c. étant donc trouvées, les dénominateurs  $b, c, d, e$ , &c. restent arbitraires; il convient seulement de les prendre tels qu'étant eux-mêmes des nombres entiers, ils donnent aussi des nombres entiers pour  $a, \epsilon, \gamma, \delta$ , &c; ce qui dépend encore de la nature des nombres  $A, B, C$ , &c. suivant qu'ils sont entiers ou fractionnaires. Supposons d'abord qu'ils soient entiers, on satisfera à la condition demandée en faisant

$$\begin{array}{ll} b = 1 & a = A \\ c = A - B & \epsilon = B \\ d = B - C & \text{d'où } \gamma = AC \\ e = C - D & \delta = BD \\ f = D - E & \epsilon = CE \\ & \text{\&c.} \end{array}$$

Par conséquent, si

$$x = A - B + C - D + E - F + \text{\&c.}$$

la même valeur de  $x$  pourra être exprimée par une fraction continue de cette manière,

$$x = \frac{A}{1 + \frac{B}{A - B + \frac{AC}{B - C + \frac{BD}{C - D + \frac{CE}{D - E + \text{\&c.}}}}}}$$

369. Mais si tous les termes de la série sont des nombres fractionnaires, de sorte que

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \text{\&c.}$$

on aura pour  $a, \epsilon, \gamma, \delta$ , &c. les valeurs suivantes :

$$a = \frac{b}{A}; \quad \epsilon = \frac{Abc}{B - A}; \quad \gamma = \frac{B^2cd}{(B - A)(C - B)};$$

$$\delta = \frac{C^2 de}{(C-B)(D-C)} ; \epsilon = \frac{D^2 ef}{(D-C)(E-D)} ; \&c.$$

Faisons donc

$$\begin{array}{ll} b = A ; & a = 1 \\ c = B - A ; & \epsilon = AA \\ d = C - B ; & \gamma = BB \\ e = D - C ; & \delta = CC \end{array} \quad \& \text{ par conséquent}$$

&c.

& la fraction continue fera

$$x = \frac{1}{A + \frac{AA}{B-A + \frac{BB}{C-B + \frac{CC}{D-C + \&c.}}}}$$

### EXEMPLE I.

Il s'agit de transformer en fraction continue la série infinie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.$$

Donc  $A=1$ ,  $B=2$ ;  $C=3$ ;  $D=4$ , &c; & comme la valeur de la série proposée =  $l_2$ , on aura

$$l_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \frac{9}{1 + \frac{16}{1 + \frac{25}{1 + \&c.}}}}}}$$

### EXEMPLE II.

Qu'il s'agisse de transformer la série infinie  $\frac{\pi}{4} =$



$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$  dans laquelle  $\pi$  exprime la circonférence d'un cercle dont le diamètre = 1

En substituant pour  $A, B, C, D, \dots$  les nombres 1, 3, 5, 7, &c. on aura

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \dots$$

& en renversant la fraction,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \dots$$

Expression que BROUNCKER a donnée le premier pour la quadrature du cercle.

### E X E M P L E I I I.

Soit proposée la série infinie

$$x = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \dots$$

à cause de  $A = m$ ;  $B = m + n$ ;  $C = m + 2n$ , &c. elle se change en cette fraction continue,

$$x = \frac{1}{m} + \frac{m}{n} + \frac{(m+n)^2}{n} + \frac{(m+2n)^2}{n} + \frac{(m+3n)^2}{n} + \dots$$

d'où l'on conclut, en renversant,

$$\frac{1}{x} - m = \frac{m m}{n + \frac{(m+n)^2}{n + \frac{(m+2n)^2}{n + \frac{(m+3n)^2}{n + \dots}}}} \&c.$$

### EXEMPLE IV.

Nous avons trouvé auparavant (art. 178) l'équation

$$\frac{\pi. \text{ cof. } \frac{m \pi}{n}}{n. \text{ fin. } \frac{m \pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \&c.$$

Ainsi, nous aurons, pour former la fraction continue,  $A = m$ ;  $B = n - m$ ;  $C = n + m$ ;  $D = 2n - m$ ;  $\&c$ ; & conséquemment

$$\frac{\pi. \text{ cof. } \frac{m \pi}{n}}{n. \text{ fin. } \frac{m \pi}{n}} = \frac{1}{m + \frac{m m}{n - 2m + \frac{(n-m)^2}{2m + \frac{(n+m)^2}{n - 2m + \frac{(2n-m)^2}{2m + \frac{(2n+m)^2}{n - 2m + \dots}}}}} \&c.$$

370. S'il entre des facteurs continus dans la formation de la série proposée; qu'on ait, par exemple,

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \&c.$$

on aura les égalités suivantes:

$$a = \frac{b}{A}; \quad c = \frac{bc}{B-1}; \quad \gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}; \quad \delta = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)};$$

$$\epsilon = \frac{Def}{(D-1)(E-1)}, \quad \&c.$$

Soit

Soit donc

$$\begin{array}{ll}
 b = A; & \alpha = 1 \\
 c = B - 1; & \epsilon = A \\
 d = C - 1; & \text{\& partant } \gamma = B \\
 e = D - 1; & \delta = C \\
 f = E - 1; & \nu = D \\
 & \text{\&c.}
 \end{array}$$

il s'enfuivra que

$$x = \frac{1}{A} + \frac{A}{B-1} + \frac{B}{C-1} + \frac{C}{D-1} + \frac{D}{E-1} + \text{\&c.}$$

### EXEMPLE I.

En supposant que  $e$  représente le nombre dont le logarithme = 1; nous avons trouvé auparavant

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \text{\&c.}$$

ou

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \text{\&c.}$$

Cette série sera changée en fraction continue, en faisant  $A=1$ ;  $B=2$ ;  $C=3$ ;  $D=4$ , &c; & par conséquent

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \text{\&c.}}$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 20

ou bien, en renverfant, & formant par là une fuite parfaitement fymétrique dès fon origine,

$$\frac{1}{c-1} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \&c.$$

E X E M P L E I I.

Nous avons auffi trouvé que le cofinus d'un arc fupposé égal au rayon  $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 30} + \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 56} - \&c.$

Si donc on fait  $A=1, B=2; C=12; D=30; E=56, \&c.$  & le cofinus de l'arc égal au rayon  $=x$ , on aura

$$x = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{11} + \frac{12}{29} + \frac{30}{55} + \&c.$$

ou

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{1} + \frac{2}{11} + \frac{12}{29} + \frac{30}{55} + \&c.$$

371. Supposons à préfent une férie combinée avec une progression géométrique, par exemple,

$$x = A - B\zeta + C\zeta^2 - D\zeta^3 + E\zeta^4 - F\zeta^5 + \&c.$$

dans ce cas

$$a = Ab; \epsilon = \frac{Bbc\zeta}{A-B\zeta}; \gamma = \frac{ACcd\zeta}{(A-B\zeta)(B-C\zeta)}; \\ \delta = \frac{BDde\zeta}{(B-C\zeta)(C-D\zeta)}; \epsilon = \frac{CEef\zeta}{(C-D\zeta)(D-E\zeta)}; \&c.$$

Supposons

$$\begin{array}{ll} b = 1, & a = A \\ c = A - B\zeta & \& \text{par conséquent} \quad \epsilon = B\zeta \\ d = B - C\zeta & \gamma = AC\zeta \\ e = C - D\zeta & \delta = BD\zeta \end{array}$$

nous en concluons

$$x = \frac{A}{1} + \frac{B\zeta}{A-B\zeta} + \frac{AC\zeta}{B-C\zeta} + \frac{BD\zeta}{C-D\zeta} + \&c.$$

372. Mais pour traiter ce sujet avec plus de généralité, supposons qu'on ait

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{M\zeta} + \frac{Cy^2}{N\zeta^2} - \frac{Dy^3}{O\zeta^3} + \frac{Ey^4}{P\zeta^4} - \&c.$$

nous trouverons, en comparant,

$$\begin{aligned} a &= \frac{Ab}{L}; \quad \epsilon = \frac{BLbcy}{AM\zeta - BLy}; \quad \gamma = \frac{ACM^2cdy\zeta}{(AM\zeta - BLy)(BN\zeta - CMy)}; \\ \delta &= \frac{BDN^2dey\zeta}{(BN\zeta - CMy)(CO\zeta - DNy)}; \quad \&c. \end{aligned}$$

Déterminons les valeurs  $b, c, d, \&c.$  de la manière suivante:

$$\begin{array}{ll} b = L; & a = A \\ c = AM\zeta - BLy; & \epsilon = BLLy \\ d = BN\zeta - CMy; & \text{donc} \quad \gamma = ACM^2y\zeta \\ e = CO\zeta - DNy; & \delta = BDN^2y\zeta \\ f = DP\zeta - EOy; & \epsilon = CEO^2y\zeta \\ & \&c. \end{array}$$

Nous concluons de là que la série proposée sera exprimée par la fraction continue suivante

$$x = \frac{A}{L} + \frac{BLLy}{AM\zeta - BLy} + \frac{ACMMY\zeta}{BN\zeta - CMY} + \frac{BDNNy\zeta}{CO\zeta - DNy} + \&c.$$

2 O ij

373. Supposons enfin que la série proposée soit de cette forme

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LM\zeta} + \frac{ABCy^2}{LMN\zeta^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNO\zeta^3} + \&c.$$

nous aurons les équations qui suivent :

$$\begin{aligned} a &= \frac{Ab}{L}; \quad \epsilon = \frac{Bbcy}{M\zeta - By}; \quad \gamma = \frac{CMcdy\zeta}{(M\zeta - By)(N\zeta - Cy)}; \\ \delta &= \frac{DNdey\zeta}{(N\zeta - Cy)(O\zeta - Dy)}; \quad \epsilon = \frac{EOefv\zeta}{(O\zeta - Dy)(P\zeta - Ey)}; \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

Faisons donc, pour trouver des nombres entiers,

$$\begin{aligned} b &= L\zeta; & a &= A\zeta \\ c &= M\zeta - By; & \epsilon &= BLy\zeta \\ d &= N\zeta - Cy; & \text{d'où} \quad \gamma &= CM y \zeta \\ e &= O\zeta - Dy; & \delta &= DN y \zeta \\ f &= P\zeta - Ey; & \epsilon &= EO y \zeta \\ & \quad \&c. & \quad \&c. \end{aligned}$$

La série proposée deviendra

$$x = \frac{A\zeta}{L\zeta} + \frac{B Ly \zeta}{M\zeta - By} + \frac{CM y \zeta}{N\zeta - Cy} + \frac{DN y \zeta}{O\zeta - Dy} + \&c.$$

ou bien pour que la loi de la progression soit mise en évidence dès le commencement,

$$\frac{A\zeta}{x} - Ay = L\zeta - Ay + \frac{B Ly \zeta}{M\zeta - By} + \frac{CM y \zeta}{N\zeta - Cy} + \frac{DN y \zeta}{O\zeta - Dy} + \&c.$$

374. On pourra trouver de cette manière une infinité de fractions continues infinies, dont la vraie valeur est assignable. Car comme on peut disposer pour cela, d'après ce que nous venons de dire, les séries infinies dont on connoît la somme;

chacune pourra être convertie en une fraction continue, dont la valeur par conséquent est égale à la somme de cette série. Les exemples, que nous avons donnés ci-dessus, fussent pour indiquer cet usage. Mais il seroit à désirer qu'on découvrit une méthode, au moyen de laquelle, étant proposée une fraction continue quelconque, on pût en trouver immédiatement la valeur. En effet, quoiqu'une fraction continue puisse être transformée en une série, qu'on peut chercher à sommer par les méthodes connues, cependant ces sortes de séries sont le plus souvent si compliquées, qu'il paroît à peine possible d'en trouver la somme quoiqu'elle soit assez simple.

375. Pour faire voir plus clairement qu'il y a des fractions continues, dont on peut d'ailleurs obtenir facilement la valeur sans qu'on puisse rien conclure des séries infinies qui en dérivent; prenons pour exemple cette fraction continue

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2} + \&c.}}}$$

dont tous les dénominateurs sont égaux entr'eux. En effet, si, en suivant le procédé exposé ci-dessus, nous formons les fractions

$$0, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2$$

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{12}{29}, \quad \frac{29}{70}, \quad \&c.$$

nous en déduirons la série

$$x = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 12} - \frac{1}{12 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 70} - \&c,$$

ou, en ajoutant deux termes, celle-ci :

$$x = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 29} + \frac{2}{29 \cdot 169} + \&c.$$

Où

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2 \cdot 12} - \frac{2}{12 \cdot 70} - \&c.$$

De plus, puisque

$$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} + \&c.$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} + \&c.$$

on aura aussi,

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{1 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 12} + \frac{1}{5 \cdot 29} - \frac{1}{12 \cdot 70} \&c.$$

Et quoique ces séries soient très-convergentes, leur valeur cependant ne peut pas se conclure de leur forme.

376. Au reste, pour ces sortes de fractions continues, dans lesquelles les dénominateurs restent les mêmes, ou reviennent périodiquement dans le même ordre, de manière qu'après avoir ôté quelques termes à la fraction elle demeure encore égale à elle-même, il y a un moyen facile d'en avoir la somme. En effet, puisque dans l'exemple proposé,

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \&c;$$

on aura  $x = \frac{1}{2+x}$ , & par conséquent  $xx + 2x = 1$  &

$x + 1 = \sqrt{2}$ , de sorte que la valeur de la fraction continue  $= \sqrt{2} - 1$ . Or, les fractions que nous avons déduites auparavant de la fraction continue, approchent toujours de plus en plus de cette valeur, & même si rapidement, qu'on trouveroit difficilement un moyen plus expéditif d'obtenir la valeur approchée de cette quantité incommensurable en nombres rationnels. En effet,  $\sqrt{2} - 1$  diffère si peu de  $\frac{20}{70}$ , que l'erreur est insensible, puisqu'en extrayant la racine quarrée on trouvera

$$\sqrt{2} - 1 = 0,41421356238,$$



tandis que

$$\frac{22}{70} = 0,41428571428,$$

de forte que l'erreur n'est que dans les cent millièmes.

377. Si les fractions continues fournissent, comme nous venons de le voir, un moyen facile d'avoir par approximation  $\sqrt{2}$ , elles serviront de même à trouver les racines approchées des autres nombres. Pour cet effet, soit

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots$$

on aura  $x = \frac{1}{a+x}$ , &  $xx + ax = 1$ , d'où  $x =$

$$-\frac{1}{2}a + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}a^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 + 4)} - a}{2}. \text{ Cette fraction}$$

continue servira donc à trouver la valeur de la racine quarrée du nombre  $aa + 4$ ; & par conséquent en mettant successivement à la place de  $a$  les nombres 1, 2, 3, 4, &c, on trouvera les valeurs  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{29}$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{53}$ , &c, ces racines ayant été ramenées à leur forme la plus simple. On aura donc

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{12}, \frac{2}{29}, \dots = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{3}, \frac{3}{10}, \frac{3}{33}, \frac{3}{109}, \dots = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$

$$\frac{4}{1}, \frac{4}{4}, \frac{4}{17}, \frac{4}{72}, \frac{4}{305}, \dots = \sqrt{5} - 2$$

&c.

Remarquez que l'approximation est d'autant plus prompte, que le nombre  $a$  est plus grand; ainsi, dans le dernier exemple,  $\sqrt{5} = 2 \frac{205}{1.92}$ , de manière que l'erreur n'est pas de  $\frac{1}{1.92 \cdot 5473}$ , 5473 étant le dénominateur de la fraction suivante  $\frac{1.92}{5473}$ .

378. On ne peut avoir de cette manière que les racines des nombres qui font la somme de deux carrés. Mais, pour étendre cette méthode d'approximation aux autres nombres, supposons

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$$

nous aurons

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b+x} = \frac{b+x}{ab+1+ax}, \text{ \& par conséquent}$$

$$axx + abx = b$$

\&

$$x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}\right)} = \frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2a}$$

On pourra donc trouver à présent les racines de tous les nombres. Soit, par exemple,  $a = 2$ ;  $b = 7$ , on aura  $x = \frac{-14 + \sqrt{14 \cdot 18}}{4} = \frac{-7 + 3\sqrt{7}}{2}$ . Et la valeur de  $x$  sera exprimée à-peu-près par les fractions suivantes,

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{2}, \frac{2}{15}, \frac{7}{32}, \frac{2}{239}, \frac{7}{510}, \text{ \&c.}$$

on aura donc à-peu-près,  $\frac{-7 + 3\sqrt{7}}{2} = \frac{239}{510}$ , \&  $\sqrt{7} = \frac{2024}{765}$

$\frac{2324}{737} = 2,6457516$ ; or on a véritablement  $\sqrt{7} = 2,64575131$ , de manière que l'erreur n'est pas de  $\frac{3}{1000000}$ .

379. Allons plus loin, & supposons

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \&c.$$

nous en concluons

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c+x} = \frac{1}{a} + \frac{c+x}{bx+bc+1} = \frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c};$$

donc  $(ab+1)xx = (abc+a-b+c)x = bc+1$  &

$$x = \frac{-abc-a+b-c + \sqrt{[(abc+a+b+c)^2+4]}}{2(ab+1)},$$

expression dans laquelle la quantité, qui est sous le radical, est encore la somme de deux carrés. Donc, cette nouvelle formule ne peut servir qu'à trouver les racines des nombres pour lesquels la première auroit suffi. De même, si les quatre lettres  $a, b, c, d$  continuellement répétées forment les dénominateurs de la fraction continue, la formule, qui en résultera, n'aura pas d'autre usage que la seconde, qui renfermoit seulement deux lettres, ainsi de suite.

380. Puisque les fractions continues peuvent être employées si utilement pour l'extraction de la racine carrée, elles serviront donc en même temps à la résolution des équations du second degré; ce qui est évident par le calcul même, puisque  $x$  est déterminée par une équation de ce degré; & réciproquement la racine d'une équation du second degré peut être aisément représentée par une fraction continue,

de cette maniere. Soit proposée l'équation

$$x x = a x + b ;$$

puisque  $x = a + \frac{b}{x}$ , en substituant dans le dernier terme la valeur de  $x$  déjà trouvée, on aura

$$x = a + \frac{b}{a + \frac{b}{x}},$$

& en procédant d'une maniere semblable, on trouvera par une fraction continue infinie

$$x = a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a} + \dots}}}$$

expression qui ne peut être employée si commodément, attendu que les numérateurs  $b$  ne sont pas égaux à l'unité.

381. Pour montrer à présent l'usage des fractions continues en Arithmétique, remarquons d'abord que toute fraction ordinaire peut être convertie en une fraction continue. En effet, soit proposée la fraction  $x = \frac{A}{B}$ , dans laquelle  $A$  soit  $> B$ ; divisez  $A$  par  $B$ , & soit le quotient  $= a$  & le reste  $C$ ; divisez par le reste  $C$  le diviseur précédent  $B$ , soit  $b$ , le quotient &  $D$  le reste, par lequel il faudra encore diviser le reste, qui précède; continuez ainsi jusqu'à la fin ce procédé, qui est celui qu'on suivroit pour trouver le plus grand commun diviseur de  $A$  & de  $B$  comme on le voit ici :

$$\begin{array}{r} B) A(a \\ \hline C) B(b \\ \hline D) C(c \\ \hline E) D'd \\ \hline F \text{ \&c.} \end{array}$$

vous aurez par la nature de la division ;

$$A = aB + C; \quad \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B};$$

$$B = bC + D; \quad \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}; \quad \frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}$$

& partant

$$C = cD + E; \quad \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}; \quad \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}$$

$$D = dE + F; \quad \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}; \quad \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}}$$

&c.

&c.

&c.

Concluons de là , en substituant dans les premières expressions les valeurs qui font à la suite

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}}, \quad \&$$

par conséquent, en exprimant  $x$  par les seuls quotients  $a, b, c, d,$  &c, comme il suit,

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \dots}}}}}$$

### EXEMPLE I.

Soit proposée la fraction  $\frac{1461}{59}$ , qu'on changera de la manière suivante en une fraction continue, dont tous les numérateurs seront égaux à l'unité. Procédons en conséquence comme s'il étoit question de trouver le plus grand commun diviseur des nombres 59 & 1461.

$$\begin{array}{r}
 59 \overline{) 1461} \quad (24 \\
 \underline{118} \\
 281 \\
 \underline{236} \\
 45 \overline{) 59} \quad (1 \\
 \underline{45} \\
 14 \overline{) 45} \quad (3 \\
 \underline{42} \\
 3 \overline{) 14} \quad (4 \\
 \underline{12} \\
 2 \overline{) 3} \quad (1 \\
 \underline{2} \\
 1 \overline{) 2} \quad (2 \\
 \underline{2} \\
 0
 \end{array}$$

On formera donc avec les quotients l'équation

$$\frac{1461}{59} = 24 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}.$$

### EXEMPLE II.

Les fractions décimales pourront aussi être transformées de la même manière; car soit proposée

$$\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000},$$

ce qui nous conduit aux opérations suivantes :



8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	1408590857704	10
139312557916	1398639960710	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	

&amp;c.

Et si, ayant pris une valeur plus exacte de  $\epsilon$ , on continue le calcul de la même manière, on obtiendra les quotients

1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, &c. :

qui forment tous, excepté le premier, une progression arithmétique, d'où s'enfuit évidemment l'équation

$$\frac{\epsilon - 1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \frac{1}{22} + \frac{1}{\&c.}$$

(yy) Résultat dont la raison peut se donner par le calcul infini-tésimal.

382. Puis donc qu'il est possible de tirer de ces sortes d'expressions des fractions, qui menent très-prompement à un résultat exact, cette méthode pourra être employée pour changer les fractions décimales en fractions ordinaires, qui en diffèrent très-peu. De plus, si on propose une fraction dont le numérateur & le dénominateur soient des nombres très-grands, on pourra trouver des fractions exprimées par de moindres termes, lesquelles, sans être entièrement égales à la proposée, en différeront cependant le moins possible. On peut par là résoudre facilement le problème autrefois traité par *WALLIS*, qui consiste à trouver les fractions composées



de moindres termes, qui approchent tellement de la valeur d'une fraction exprimée par de plus grands termes, qu'il ne soit pas possible d'en approcher davantage sans employer de plus grands nombres. Car les fractions obtenues par notre méthode donnent la valeur de la fraction continue tellement approchée, qu'on tenteroit en vain d'en avoir une plus exacte sans employer des termes plus grands. (77)

## E X E M P L E I.

Qu'il soit question d'avoir le rapport du diamètre à la circonférence en nombres si petits, qu'il ne soit pas possible de l'avoir plus exactement, sans employer des nombres plus grands. Développons, en continuant de diviser suivant la méthode que nous venons d'exposer, la fraction décimale connue

$$3, 1415926535, \&c.$$

nous trouverons les quotients suivants

$$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \&c.$$

qui formeront les fractions ci-après :

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{100}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \&c.$$

La seconde fraction fait déjà voir que le diamètre est à la circonférence comme 1 : 3 ; & certainement il n'est pas possible d'avoir ce rapport plus approché avec des nombres qui ne soient pas plus grands. La troisième fraction donne le rapport d'*Archimède*, 7 : 22 ; & la cinquième celui de *Méius*, lequel diffère si peu du véritable que l'erreur n'est pas de  $\frac{1}{1133102}$ . Au reste, ces fractions sont alternativement plus grandes & plus petites que la vraie valeur.

## E X E M P L E I I.

Proposons-nous d'exprimer, par les plus petits nombres possibles, le rapport approché du jour à l'année solaire

moyenne. Comme cette année est de  $365^j 5^h 48' 55''$ , elle renfermera en fraction  $365 \frac{10215}{80400}$  jours. Il suffit donc de développer cette fraction, ce qui donnera les quotients suivans :

4, 7, 1, 6, 1, 2, 2, 4

D'où se tirent les fractions

$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{31}, \frac{55}{227}, \frac{61}{260}, \frac{181}{747}, \&c.$

Ainsi, les heures avec les minutes & les secondes, qui surpassent 365 jours, font environ un jour en quatre ans; c'est là l'origine du calendrier *Julien*, ou plus exactement, 33 ans donnent 8 jours, ou 747 ans 181 jours; ce qui fait en 400 ans une augmentation de 97 jours. Aussi, tandis que dans cet intervalle le calendrier *Julien* intercale 100 jours, le *Grégorien* change-t-il dans la durée de quatre siècles trois années bissextiles en années communes.

FIN DU TOME PREMIER.

NOTES

## NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENTS

*Sur quelques endroits du premier Livre de l'Introduction à l'Analyse Infinitésimale.*

## CHAPITRE I.

(a) ART. 25. L'équation  $y^2 = ayz + bz^2 + c$  donne  $y = \frac{y^2 - bz^2 - c}{az}$  &  $z = \frac{y^2 - bz^2 - c}{ay}$ . Or, quelles que soient les valeurs de  $y$  ou de  $z$ , positives ou négatives, il est évident que ni  $y^2$  ni  $z^2$  ne peuvent changer de signes. Donc, si on écrit  $-z$  à la place de  $+z$ ,  $y$  devient  $-y$ ; & si l'on met  $-y$  au lieu de  $+y$ ,  $z$  devient  $-z$ . Le même raisonnement s'applique manifestement à l'équation  $y^2 + ayz = byz^2 + cy + dz$ , qui donne  $y = \frac{ayz - dz}{bz^2 + c - y^2}$  ou  $z = \frac{byz^2 + cy - y^2}{ay^2 - d}$  & à toutes celles qui seront dans les cas énoncés tant dans cet article que dans le précédent.

## CHAPITRE II.

(b) ART. 29. On sait qu'une équation d'un degré quelconque, a autant de racines soit réelles soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de l'inconnue. Descartes a donné une règle pour trouver le nombre des racines positives & celui des racines négatives, lorsqu'elles sont toutes réelles. La règle que ce célèbre Géomètre avoit donnée sans démonstration, a été démontrée depuis par l'abbé de Gua, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1741, & ensuite par Segner, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1756. Comme tout le monde n'est pas à portée de consulter ces précieuses Collections, je vais faire connoître en peu de mots la démonstration de Segner; je la donne de préférence à

EULER, *Introduction à l'Anal. infn.* Tome I. 2 Q

celle de l'abbé de Gua, parce qu'elle est plus simple & plus directe.

Si une équation toute ordonnée ne manque d'aucun terme, ou, en cas qu'elle en manque, si l'on conçoit écrit en sa place  $\pm 0$ , il est évident qu'il y aura autant de racines dans l'équation qu'on pourra former de combinaisons de deux signes, en joignant chacun d'eux à celui qui le suit immédiatement. Ainsi dans l'équation  $x^5 + ax^4 - bx^3 - cx^2 + dx + e = 0$ , il y a cinq racines & autant de combinaisons distinctes de deux signes pris consécutivement; savoir  $++$ ,  $+-$ ,  $-+$ ,  $---$ ,  $++$ ,  $+-$ ,  $+-$ , en effet cette équation a six termes; & en général une équation du degré  $m$  a  $m + 1$  termes, ce qui donne  $m$  combinaisons de deux signes, en les prenant consécutivement, comme nous venons de le faire. Mais dans quelque ordre que se trouvent les signes d'une équation, si on la multiplie par un facteur simple, qui contienne une racine négative, par  $x + p$ , par exemple,

$$x^m + ax^{m-1} - bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} \dots \mp kx + p$$

$$\begin{aligned} &+ x^{m+1} + ax^m - bx^{m-1} - cx^{m-2} + dx^{m-3} \dots \mp kx \quad (A) \\ &+ px^m + apx^{m-1} - bpx^{m-2} - cpx^{m-3} + dpx^{m-4} \dots \mp kp \quad (B) \end{aligned}$$

Il est visible, par la nature même de la multiplication, que les deux suites (A) & (B) ont les mêmes signes, & que les termes de la seconde doivent être plus avancés d'un rang vers la droite, de sorte que le signe d'un terme quelconque de la suite (B) est le même que celui du terme, qui précède d'un rang dans la série (A); mais si on multiplie la même équation ou toute autre par un facteur, qui contienne une racine positive, tel que  $x - q$ ,

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} - dx^{m-4} \dots \mp kx - q$$

$$\begin{aligned} &+ x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1} - cx^{m-2} - dx^{m-3} \dots \mp kx \quad (A) \\ &- qx^m - aqx^{m-1} - bqx^{m-2} + cqx^{m-3} + dqx^{m-4} \dots \pm kq \quad (B) \end{aligned}$$

Les signes de la série (B) seront différents des signes de la série (A), en sorte que si on prend un signe quelconque

de la série (*B*), il différera du signe plus avancé d'un rang dans la série (*A*). Il est facile de voir que les signes du produit dépendent de ceux des deux séries (*A*) & (*B*) & du rapport qu'il y a entre les grandeurs des termes correspondants, qui sont affectés de signes contraires. D'abord il est clair que le premier terme du produit aura le même signe que le premier terme de la série (*A*), & que cette même série (*A*) continuera de fournir les signes du produit jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un terme au-dessous duquel s'en trouve un, qui ayant un signe contraire soit plus grand dans la série (*B*); après quoi, laissant la série (*A*), on doit prendre la suite des signes de la série (*B*), jusqu'à ce qu'on revienne de nouveau à un terme au-dessus duquel s'en trouve un plus grand avec le signe contraire dans la série (*A*). On écrira ensuite le signe de ce terme supérieur, au lieu de celui de l'inférieur, & les signes suivans de la même série, jusqu'à ce qu'on soit obligé de repasser à la série inférieure, & ainsi de suite alternativement; de manière pourtant qu'on s'arrête à la fin à la série (*B*), dont le dernier terme n'en ayant aucun au-dessus de lui, dans la série (*A*), donnera nécessairement un signe semblable à celui, dont il est affecté, pour le dernier terme du produit. Il suit delà que pour avoir les signes du produit, on doit passer au moins une fois de la série (*A*) à la série (*B*), & quel que soit le nombre de ces passages successifs de l'une à l'autre, le nombre des retours de (*B*) à (*A*) sera toujours moindre d'une unité que le nombre des passages de (*A*) à (*B*).

Si on fait attention à présent que lorsque le multiplicateur renferme une racine négative, on a, à chaque fois qu'on passe de la série (*A*) à la série (*B*), une permanence de plus dans le produit; puisqu'on passe nécessairement une fois de plus de la série (*A*) à la série (*B*), qu'on ne revient de la série (*B*) à la série (*A*), nous devons en conclure, sans nous embarrasser de ce qui arrive à chaque retour de (*B*) à (*A*), que le nombre des permanences est augmenté au moins d'une unité. De même, dans le second cas, c'est-à-dire, lorsque le multi-

plicateur renferme une racine positive ; puisque chaque passage de la série (*A*) à la série (*B*) donne dans le produit une variation de plus, & que le nombre des passages de la série (*A*) à la série (*B*) surpasse d'une unité le nombre des retours de la série (*B*) à la série (*A*), nous sommes également en droit d'en conclure qu'il y aura dans le produit au moins une variation de plus que dans le multiplicande.

Ainsi, comme une équation d'un degré quelconque, peut être regardée comme le résultat de la multiplication d'autant de facteurs binomes simples, qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de l'inconnue, & que pour la multiplication quelconque d'une équation, au moyen de laquelle une nouvelle racine réelle négative y est introduite, une permanence tout au moins des signes semblables  $++$  ou  $--$  est ajoutée au nombre de celles qui se trouvent dans l'équation multipliée, le nombre de ces permanences dans une équation quelconque ne sera pas moindre que le nombre de ses racines négatives. Par la même raison, le nombre des variations des signes contraires  $+ -$  ou  $- +$ , ne pourra pas non plus être moindre que le nombre des racines réelles positives d'une équation quelconque. C'est pourquoi si dans une équation tous les termes sont précédés du signe  $+$  ou du signe  $-$ , aucune racine réelle de l'équation ne sera positive ; car s'il y en avoit seulement une, il se trouveroit au moins une variation de signes. De même aussi, si dans une équation tous les termes ont successivement des signes dissemblables, elle n'aura point de racine réelle négative, puisque si elle en avoit une seule, on y verroit au moins une permanence de signes. Concluons donc qu'en général dans toute équation dont toutes les racines sont réelles, le nombre des variations de signes  $+ -$  &  $- +$  est égal au nombre de ses racines positives, & le nombre des permanences  $++$  &  $--$  égal au nombre des racines négatives de la même équation. En effet, soient  $n$  le nombre des racines négatives &  $N$  le nombre des permanences  $++$  &  $--$  de cette équation ; soient  $m$  le nombre de ses racines positives &  $M$  le nombre

des variations + - & - + ; on aura  $n + m = N + M$  ; or  $N$  ne peut pas être moindre que  $n$  ; si donc on suppose  $N > n$ , on aura  $M < m$  ; ce qui ne peut avoir lieu, comme nous venons de le voir. Donc  $N = n$  &  $m = M$ . Donc s'il arrive que le nombre des racines réelles négatives de l'équation ne soit pas égal au nombre  $N$ , & que pareillement le nombre des racines réelles positives de la même équation ne soit pas égal au nombre  $M$ , c'est une preuve qu'elle renferme des racines imaginaires.

En réunissant tout ce qui vient d'être exposé, il en résulte manifestement la démonstration de la règle de Descartes, savoir, que dans toute équation qui n'a point de racines imaginaires, le nombre des racines positives est égal au nombre de variations de signes, & le nombre des racines négatives égal au nombre de permanences.

(c) ART. 29. La fonction  $Z = A\zeta^n + B\zeta^{n-1} + C\zeta^{n-2} + \&c.$ , ne peut être que le résultat du produit de plusieurs facteurs simples, tels que  $a\zeta - m, a'\zeta - m', a''\zeta - m'', a'''\zeta - m''', \&c.$ , de manière que

$$Z = (a\zeta - m) (a'\zeta - m') (a''\zeta - m'') (a'''\zeta - m''') \&c. = a a' a'' a''' \&c. \left(\zeta - \frac{m}{a}\right) \left(\zeta - \frac{m'}{a'}\right) \left(\zeta - \frac{m''}{a''}\right) \left(\zeta - \frac{m'''}{a'''}\right) \&c. = A \left(\zeta - \frac{m}{a}\right) \left(\zeta - \frac{m'}{a'}\right) \left(\zeta - \frac{m''}{a''}\right) \left(\zeta - \frac{m'''}{a'''}\right) \&c. = A(\zeta - f)(\zeta - g)(\zeta - h) \&c.$$

en désignant par  $f, g, h, i, \&c.$  les racines  $\frac{m}{a}, \frac{m'}{a'}, \frac{m''}{a''}, \frac{m'''}{a'''}, \&c.$  de l'équation, ou les valeurs de  $\zeta$ . De même si  $Z = A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c.$  ; on pourra supposer  $A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + \&c. = (m - a\zeta)(m' - a'\zeta)(m'' - a''\zeta) \&c. = m m' m'' \&c. \left(1 - \frac{a\zeta}{m}\right) \left(1 - \frac{a'\zeta}{m'}\right) \left(1 - \frac{a''\zeta}{m''}\right) \&c. = A \left(1 - \frac{\zeta}{f}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{g}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{h}\right) \&c. f, g, h, \&c.$  étant les valeurs de  $\zeta$  dans l'équation  $0 = Z = A + B\zeta + C\zeta^2 + \&c.$

(d) ART. 31. Soit  $\zeta^2 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta + D$ , le produit de deux facteurs imaginaires du second degré, tels que  $\zeta^2 - 2(p + q\sqrt{-1})\zeta + r + s\sqrt{-1}$ , &  $\zeta^2 - 2(m + n\sqrt{-1})\zeta + k + l\sqrt{-1}$ . Ce sont là les formes les plus générales, qu'on puisse donner à deux facteurs de cette nature. On

pourra s'affurer fans peine que le produit de ces deux facteurs ne peut être réel, qu'autant que  $m = p$ ;  $n = -q$ ;  $k = r$ , &  $l = -s$ ; ce qu'on trouvera, en égalant séparément à zéro la somme des coefficients imaginaires de chaque puissance de  $\zeta$ .

(e) ART. 39. Lorsqu'il s'agit de décomposer une fonction fractionnaire proprement dite, dont le dénominateur ne renferme que des facteurs premiers entr'eux, en autant de fractions partielles, qu'il y a de facteurs dans ce dénominateur, il est visible que la décomposition ne peut s'effectuer que d'une manière; mais il en est autrement lorsque la fonction renferme un entier; car alors on peut supposer indifféremment que l'une quelconque des fractions partielles résultantes de la décomposition contienne cet entier.

Si la fraction supposée irréductible, ce qui est toujours permis, renfermoit dans son dénominateur des facteurs égaux, tels que  $(p - q\zeta)^n$  & qu'on l'égalât à la somme des fractions  $\frac{A}{p - q\zeta} + \frac{B}{p - q\zeta} + \frac{C}{p - q\zeta} + \dots + \frac{K}{S}$ . En les réduisant à un dénominateur commun & égal à celui de la fraction proposée, le numérateur de la fraction résultante auroit nécessairement le facteur  $p - q\zeta$  commun avec le dénominateur. Donc cette dernière fraction pourroit être réduite à une plus simple expression, & ne pourroit, par conséquent, être égale à la première, qui, par hypothèse est irréductible.

(f) ART. 46. Prenons au lieu de  $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p - q\zeta)^2 S}$  ( $N$  étant  $= (p - q\zeta)^2 S$ ) la quantité  $\frac{M \pm kN}{N}$  ou plutôt  $\frac{M \pm k(p - q\zeta)^2 S}{(p - q\zeta)^2 S}$ ; égalons cette quantité à  $\frac{A}{(p - q\zeta)^2} + \frac{B}{p - q\zeta} + \frac{p}{S}$ . Donc  $\frac{p}{S} = \frac{M \pm k(p - q\zeta)^2 S}{(p - q\zeta)^2 S} - \frac{A}{(p - q\zeta)^2} - \frac{B}{p - q\zeta} = \frac{M \pm k(p - q\zeta)^2 S - AS - (p - q\zeta)BS}{(p - q\zeta)^2 S}$ . Il est clair qu'en divisant par  $p - q\zeta$ , & faisant  $\zeta = \frac{p}{q}$ , on aura pour déterminer  $A$  l'équation  $M - AS = 0$ , comme si le numérateur eut été simplement  $= M$ .



CHAPITRE III.

(g) ART. 51. Soit  $y = \sqrt{-p + qz - pz^2}$ . Pour savoir dans quel cas la valeur de  $y$  sera réelle ou imaginaire, j'observe, 1°. que pour qu'elle soit réelle, la quantité  $-p + qz - rz^2$ , qui est sous le radical, doit être  $> 0$ , ou  $rz^2 - qz < -p$ , ou  $z^2 - \frac{q}{r}z + \frac{qq}{4rr} < \frac{q^2 - 4pr}{4rr}$ , ou enfin  $(z - \frac{q}{2r})^2 < \frac{q^2 - 4pr}{4r^2}$ . Or, le premier membre étant le carré d'une quantité réelle est nécessairement positif. Donc à plus forte raison le second doit l'être aussi. Donc  $q^2$  doit être  $> 4pr$ . 2°. Pour que la valeur de  $y$  soit imaginaire, il faut que  $-p + qz - rz^2$  soit  $< 0$  ou  $(z - \frac{q}{2r})^2 > \frac{q^2 - 4pr}{4r^2}$ .

(h) ART. 53. En faisant  $\frac{aq+r}{p} = m$ , &  $\frac{aq-\epsilon q}{p} = n$ , on peut prendre pour quantités inconnues les rapports  $\frac{q}{p}$  &  $\frac{r}{p}$ , qu'on trouve, savoir le premier  $\frac{q}{p} = \frac{n}{a-\epsilon}$ , & le second  $\frac{r}{p} = \frac{am - \epsilon m - an}{a - \epsilon}$ ; substituant ces valeurs dans l'équation

$$Az^p + By^\mu z^{\frac{aq-\mu q+r}{p}} + Cy^\nu z^{\frac{aq-\nu q+r}{p}} + \&c. = ay^a + by^\epsilon z^{\frac{aq-\epsilon q}{p}} + cy^\gamma z^{\frac{aq-\gamma q}{p}} + \&c. \text{ elle se changera en}$$

$$Az^m + By^\mu z^{m - \frac{\mu n}{a-\epsilon}} + Cy^\nu z^{m - \frac{\nu n}{a-\epsilon}} + \&c. = ay^a + by^\epsilon z^n + cy^\gamma z^{\frac{(a-\gamma)n}{a-\epsilon}} + \&c.$$

D'ailleurs  $p, q$  &  $r$  sont des nombres entiers, qu'on peut même supposer premiers entr'eux. Cela posé, si on faisoit  $p = k(a - \epsilon)$ , à cause de  $\frac{q}{p} = \frac{n}{a - \epsilon}$ , on auroit  $q = kn$ , & par conséquent  $r = k(am - \epsilon m - an)$ . Donc  $p, q$  &  $r$  auroient un facteur commun  $k$ ; ce qui est contre l'hypothèse.

Donc  $k = 1$  ; donc  $p = a - \epsilon$  ;  $q = n$  ; &  $r = a m - \epsilon m - a n$ . \* Un raisonnement semblable aura lieu pour la seconde supposition  $\frac{a q + r}{p} = m$  &  $\frac{a q - a q + r}{p} = n$ .

(i) ART. 54. Au lieu d'augmenter ou de diminuer l'une & l'autre variable d'une constante, il suffira d'augmenter ou de diminuer seulement l'une des variables  $y$  ou  $z$  d'une quantité quelconque, qu'on déterminera après la substitution, en égalant à zéro la somme des termes constants ; ce qui est toujours permis, puisque la constante est arbitraire.

(k) ART. 55. Ces cas, & tous ceux où la somme des exposants des variables de chaque terme donne deux dimensions différentes, sont renfermés dans la formule de l'Article 53 ; il n'y a qu'à supposer  $q = p = n = a - \epsilon$ .

#### C H A P I T R E I V.

(l) ART. 66. Pour avoir en général l'expression du coefficient de  $z^n$  dans la série, qui résulte du développement de la fraction  $\frac{1}{(1-z)^n}$  ; on se rappellera que  $\frac{1}{(1-z)^n} = (1-z)^{-n} = 1 + m z + m \cdot \frac{m+1}{2} z^2 + m \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} z^3 + m \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdot \frac{m+3}{4} z^4 + \&c.$  Donc le coefficient d'un terme quelconque sera . . . .  

$$\frac{m \cdot m+1 \cdot m+2 \cdot m+3 \dots m+n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m-1 \cdot m \dots n} = \frac{m \cdot m+1 \cdot m+2 \dots n \cdot n+1 \dots n+m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m-1 \cdot m \dots n-1 \cdot n}$$
  

$$= \frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \dots n+m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m-2 \cdot m-1}$$

Il est aisé de conclure de-là l'expression générale du coefficient d'un terme de la série, qui provient de la fraction  $\frac{a + b z + \dots + k z^{m-1}}{(1 - a z)^n}$ .

ART. 67. Soit  $y$ , une fonction de la variable  $x$ , & représentés par  $y', y'', y''', y''', \&c$ , les nouvelles fonctions qui résultent de la première, par la substitution de  $x+b$ ,  $x+2b$ ,  $x+3b$ ,  $x+4b$ , &c, à la place de  $x$ . La suite des différences premières sera  $y' - y$ ,  $y'' - y'$ ,  $y''' - y''$ ,  $y'''' - y'''$ , &c ; ou, en désignant

\* On ne fait point  $a - \epsilon = n$ , parce que cela donneroit  $p = q$  ; ce qui est un cas particulier, & que dans la formule générale on suppose  $p$  différent de  $q$ .

désignant par  $\Delta$  la différence d'une fonction variable quelconque, ou l'accroissement qu'elle reçoit par la substitution de  $x + b$  au lieu de  $x$ , sera  $\Delta y, \Delta y', \Delta y'', \Delta y''', \Delta y^{IV}, \&c.$  On aura donc  $\Delta y = y' - y; \Delta y' = y'' - y'; \Delta y'' = y''' - y''; \&c.$  Or la différence seconde que je représente par  $\Delta\Delta y$  ou  $\Delta^2 y, = (y'' - y') - (y' - y) \&c. y'' - y' = \Delta y'$ . Donc  $\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y$ . De même la différence troisième  $\Delta^3 y = [(y''' - y'') - (y'' - y')] - [(y'' - y') - (y' - y)] = [\Delta y'' - \Delta y'] - [\Delta y' - \Delta y]$ ; donc, à cause de  $\Delta y'' - \Delta y' = \Delta^2 y'$ , on aura  $\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y$ . On trouvera pareillement  $\Delta^4 y = \Delta^3 y' - \Delta^3 y$ .

Cela posé, soit  $y = x^m$ ; comme  $y' = (x + b)^m; y'' = (x + 2b)^m; y''' = (x + 3b)^m, \&c.$ ; en développant les puissances, nous aurons

$$y = x^m$$

$$y' = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$y'' = x^m + \frac{m}{1} \cdot 2 x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} 4 x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 8 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$y''' = x^m + \frac{m}{1} \cdot 3 x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} 9 x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 27 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$y^{IV} = x^m + \frac{m}{1} \cdot 4 x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} 16 x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 64 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

&c.

Donc

$$\Delta y = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta y' = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} 3 x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 7 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta y'' = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} 5 x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 19 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta y''' = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m, m-1}{1, 2} 7 x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 37 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

&c.

$$\Delta^2 y = m, m - 1. x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 6 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta^2 y' = m, m - 1. x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 12 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta^2 y'' = m, m - 1. x^{m-2} b^2 + \frac{m, m-1, m-2}{1, 2, 3} 18 x^{m-3} b^3 + \&c.$$

&c.

$$\Delta^3 y = m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot x^{m-3} b^3 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 36 x^{m-4} b^4 + \&c.$$

$$\Delta^3 y' = m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot x^{m-3} b^3 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 60 x^{m-4} b^4 + \&c.$$

&c.

$$\Delta^4 y = m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot x^{m-4} b^4 + \&c.$$

&c.

On voit à présent, sans aller plus loin, que la différence  $m^e$  de  $y$  est une quantité constante  $m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 b^m$ . Donc la suite  $a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m + \&c$ , représente une progression de l'ordre  $m$ .

(*m*) ART. 71. Comme la plupart des traités d'Algebre ne donnent la démonstration du binome de Newton que pour le cas où l'exposant de la puissance est un nombre entier positif, on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici que la même formule s'applique aux cas où l'exposant  $m$  est un nombre fractionnaire positif, ou un nombre négatif quelconque. Nous nous contenterons de considérer le binome  $1 + x$ , parce qu'il est facile de ramener tous les autres à cette forme. Pour abréger le calcul, représentons par  $[m]$  la fonction de  $x$ , qui seroit le développement de la puissance  $m$  de  $1 + x$ , si  $m$  étoit un nombre entier ; c'est-à-dire, soit  $[m] = 1 + mx + m \cdot \frac{m-1}{2} x^2 + \&c$ ,  $m$  étant un nombre quelconque. Soit, par la même raison,  $[n]$  une fonction semblable de  $x$ , ou une suite, qui exprimeroit la puissance  $n$  développée de  $1 + x$ , si  $n$  étoit un nombre entier. Comme en général la forme du produit d'autant de polynomes, qu'on voudra, est indépendante de la valeur des quantités littérales, c'est-à-dire que la combinaison des lettres, qui entrent dans les termes du produit reste la même, quelque soit la valeur de ces lettres, il est évident que si on peut obtenir la forme du produit de  $[m] \times [n]$ , lorsque  $m$  &  $n$  expriment des nombres entiers, la même forme conviendra aux cas où  $m$  &  $n$  sont des nombres fractionnaires. Or dans le cas où  $m$  &  $n$  sont des nombres entiers, on a  $[m] = (1 + x)^m$  &  $[n] = (1 + x)^n$ . Donc, dans ce dernier cas  $[m] \times [n] = (1 + x)^m \times (1 + x)^n = (1 + x)^{m+n}$ .

$$= 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} x^2 + \&c. = [m+n].$$

Donc aussi  $[m] \times [n] = [m+n]$  dans le cas où  $m$  &  $n$  sont fractionnaires. Par la même raison, on aura  $[m] \times [n] \times [p] = [m+n+p]$ , & en général  $[m] \times [n] \times [p] [q] \times \&c. = [m+n+p+q+\&c.]$ . Soit à présent  $m=n=p=q=\&c$  ; &  $k$  le nombre des facteurs  $[m]$ ,  $[n]$  &c : on aura évidemment  $[m]^k = [km]$ . Mais comme  $k$  est un nombre entier pris arbitrairement, on peut le supposer tel que  $km$  soit un nombre entier, & alors  $[km] = (1+x)^{km}$ . Donc  $[m]^k = (1+x)^{km}$ , & extrayant de part & d'autre la racine  $k$  ;  $[m] = (1+x)^m$ ,  $m$  étant une fraction. Pour démontrer le cas où  $m$  est un nombre négatif, il suffit de reprendre l'équation  $[m] \times [n] = [m+n]$ , qui, en supposant  $n = -m$ , devient  $[m] \times [-m] = [m-m] = 1 + (m-m)x + \frac{(m-m)(m-m-1)}{2} x^2 + \&c. = 1$ . Donc  $[-m] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$ .

On peut faire voir encore assez facilement, par le moyen des logarithmes, que la même formule du binome de Newton s'applique au cas où l'exposant  $m$  est irrationnel. En effet, soit  $(1+x)^{\sqrt{m}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$  ; on aura aussi  $(1+x+y)^{\sqrt{m}} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \&c.$  Divisant la seconde équation par la première, & faisant attention que le second membre de la seconde équation  $= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c. + y(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \&c.) + y^2 \times \&c.$  ; on trouvera  $(1 + \frac{y}{1+x})^{\sqrt{m}} = 1 + \frac{y(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\&c.)+y^2 \times \&c. + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.}$  ; & en prenant les logarithmes de part & d'autre  $\sqrt{m} (\frac{y}{1+x} - \frac{y^2}{2(1+x)^2} + \&c.) = \frac{y(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\&c.)+y^2 \times \&c. + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.} - y^2 \times \&c. + \&c.$  Divisant par  $y$  ; supposant ensuite  $y = 0$  & faisant disparaître les dénominateurs, on aura  $\sqrt{m} + A\sqrt{m}.x + B\sqrt{m}.x^2 + C\sqrt{m}.x^3 + D\sqrt{m}.x^4 + \&c. =$

$$\left. \begin{aligned} &A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c. \\ &+ Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \&c. \end{aligned} \right\} \text{Donc } A =$$

$$\sqrt[m]{m}; B = \frac{A(\sqrt[m]{m-1})}{2} = \frac{\sqrt[m]{m} \cdot \sqrt[m]{m-1}}{2}; C = \frac{B(\sqrt[m]{m-2})}{3} = \frac{\sqrt[m]{m} \cdot \sqrt[m]{m-1} \cdot \sqrt[m]{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$D = \frac{C(\sqrt[m]{m-3})}{4} = \frac{\sqrt[m]{m} \cdot \sqrt[m]{m-1} \cdot \sqrt[m]{m-2} \cdot \sqrt[m]{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ \&c.} \text{ Donc } (1+x)^{\sqrt[m]{m}} =$$

$$1 + \sqrt[m]{m} \cdot x + \frac{\sqrt[m]{m} \cdot \sqrt[m]{m-1}}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\sqrt[m]{m} \cdot \sqrt[m]{m-1} \cdot \sqrt[m]{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{\&c.}$$

Il est inutile de faire observer que la même démonstration subsisteroit quand même  $\sqrt[m]{m}$  seroit imaginaire, donc la formule du binome de Newton a toute la généralité qu'on puisse désirer.

(a) ART. 76. Sans recourir expressément au Calcul différentiel, voici comment on peut démontrer la loi de cette progression. Soit  $\frac{1}{(1 - a\zeta - b\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \text{\&c.})^{m+1}} = 1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \text{\&c.}$ ; on aura par la même raison . . .

$$\frac{1}{(1 - a(\zeta+y) - b(\zeta+y)^2 - \gamma(\zeta+y)^3 - \text{\&c.})^{m+1}} = 1 + A(\zeta+y) + B(\zeta+y)^2 + C(\zeta+y)^3 + D(\zeta+y)^4 + \text{\&c.},$$

quelque soit la valeur de  $\gamma$ .  
 Faisons, pour abrégér,  $Z = 1 - a\zeta - b\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \text{\&c.}$ ;  
 la premiere équation deviendra  $\frac{1}{Z^{m+1}}$  ou  $Z^{-m-1} = 1 + A\zeta +$

$B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \text{\&c.}$ , & la seconde équation, qui est la même chose que

---


$$[1 - a\zeta - b\zeta^2 - \gamma\zeta^3 - \delta\zeta^4 - \text{\&c.} - y(a + 2b\zeta + 3\gamma\zeta^2 + 4\delta\zeta^3 + \text{\&c.}) - y^2 \times \text{\&c.} - \text{\&c.}]^{m+1}$$

$$= 1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \text{\&c.} + y[A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + \text{\&c.}] + y^2 \times \text{\&c.}$$

+ &c deviendra  $[Z - y(a + 2b\zeta + 3\gamma\zeta^2 + 4\delta\zeta^3 + \text{\&c.}) - y^2 \times \text{\&c.} - \text{\&c.}]^{-m-1}$   
 ou  $Z^{-m-1} + (m+1)Z^{-m-2}[y(a + 2b\zeta + 3\gamma\zeta^2 + 4\delta\zeta^3 + \text{\&c.}) + y^2 \times \text{\&c.} + \text{\&c.}$   
 $+ y^2 \times \text{\&c.} + \text{\&c.}] = Z^{-m-1} + y(A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + \text{\&c.}) + y^2 \times \text{\&c.} + \text{\&c.}$   
 Retranchant de part & d'autre la quantité  $Z^{-m-1}$ , divisant le reste par  $y$ , qui est facteur commun, & supposant  $y=0$ , ce qui est permis, puisque l'équation est vraie indépendamment de la valeur de  $y$ ; on aura  $(m+1)Z^{-m-2}(a + 2b\zeta + 3\gamma\zeta^2 + 4\delta\zeta^3 + \text{\&c.}) = A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + \text{\&c.}$ ;  
 multipliant ensuite chaque membre par  $Z$  & substituant pour  $Z^{-m-1}$  & pour  $Z$  leurs valeurs respectives  $1 + A\zeta + B\zeta^2$

+  $Cz^3 + Dz^4 + \dots$ ; &  $1 - \alpha z - \epsilon z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \dots$ ,  
la dernière équation deviendra

$$(m+1)(\alpha + 2\epsilon z + 3\gamma z^2 + 4\delta z^3 + \dots)(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots) \\ = (1 - \alpha z - \epsilon z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \dots)(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \dots)$$

Effectuant les multiplications & ordonnant par rapport à  $z$ , nous aurons

$$\left. \begin{aligned} (m+1)\alpha + (2m+2)\epsilon z + (3m+3)\gamma z^2 + (4m+4)\delta z^3 + \dots \\ + (m+1)\alpha Az + (2m+2)\epsilon Az^2 + (3m+3)\gamma Az^3 + \dots \\ + (m+1)\alpha Bz^2 + (2m+2)\epsilon Bz^3 + \dots \\ + (m+1)\alpha Cz^3 + \dots \\ + \dots \end{aligned} \right\} =$$

$$\begin{aligned} A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \dots \\ - \alpha Az - \epsilon Az^2 - \gamma Az^3 - \dots \\ - 2\alpha Bz^2 - 2\epsilon Bz^3 - \dots \\ - 3\alpha Cz^3 - \dots \\ - \dots \end{aligned}$$

Donc

$$A = (m+1)\alpha$$

$$B = \frac{(m+2)\alpha A + (2m+2)\epsilon}{2}$$

$$C = \frac{(m+3)\alpha B + (2m+3)\epsilon A + (3m+3)\gamma}{3}$$

$$D = \frac{(m+4)\alpha C + (2m+4)\epsilon B + (3m+4)\gamma A + (4m+4)\delta}{4}$$

&c.

Et en général,  $n$  étant l'exposant de  $Z$  dans le terme  $Nz^n$ ,  
$$N = \frac{m+n}{n} \alpha M + \frac{2m+n}{n} \epsilon L + \frac{3m+n}{n} \gamma K + \frac{4m+n}{n} \delta I + \frac{5m+n}{n} H + \dots$$

## CHAPITRE V.

(o) ART. 91. Pour que la quantité  $ay^2 + byz + cyx + dxz + ex^2 + fz^2$  pût être représentée par le produit  $(y + \epsilon z + \gamma x)$  ( $\delta y + \epsilon z + \zeta x$ ); il faudroit qu'on eût l'équation de condition  $ad^2 + eb^2 + fc^2 - 4aef - bcd = 0$ . On peut s'en convaincre, en faisant la multiplication indiquée, égalant les coefficients des produits semblables des variables, & traitant suivant les

regles ordinaires de l'Algebre les fix équations, qu'on trouvera. Mais il sera plus commode de décomposer la quantité  $ay^2 + by\zeta + cxy + dx\zeta + exx + f\zeta\zeta$  en deux facteurs, en la traitant comme une équation du second degré & regardant  $y$ , par exemple, comme l'inconnue; ce qui donnera les deux facteurs  $y + \frac{b\zeta + cx}{2a} \mp \frac{\sqrt{[(c^2 - 4ae)x^2 + 2x(bc - 2ad)\zeta + (b^2 - 4af)\zeta^2]}}{2a}$  ou  $y + \frac{b\zeta + cx}{2a} \mp \frac{1}{2a} \sqrt{[c^2 - 4ae] \left( x^2 + 2x\zeta \frac{bc - 2ad}{c^2 - 4ae} + \frac{b^2 - 4af}{c^2 - 4ae} \zeta^2 \right)}$ .

Or, pour que ces facteurs puissent être ramenés à la forme  $\alpha y + \epsilon \zeta + \gamma x$ ; &  $\delta y + \epsilon \zeta + \zeta x$ , il faut qu'il n'y ait sous le radical ni  $x$  ni  $\zeta$ ; ce qui exige que  $x^2 + 2x\zeta \frac{bc - 2ad}{c^2 - 4ae} \zeta + \frac{b^2 - 4af}{c^2 - 4ae} \zeta^2$  soit un carré, & que par conséquent  $\frac{b^2 - 4af}{c^2 - 4ae} \zeta \zeta = \left( \frac{bc - 2ad}{c^2 - 4ae} \right)^2 \zeta^2$  ou que  $a d^2 + e b^2 + f c^2 - 4 a e f - b c d = 0$ . Ainsi la quantité dont il s'agit seroit  $= \left[ ay + \left( \frac{b}{2} - \frac{bc - 2ad}{2\sqrt{c^2 - 4ae}} \right) \zeta + \left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ae}}{2} \right) x \right] \times \left[ y + \left( \frac{b}{2a} + \frac{bc - 2ad}{2a\sqrt{c^2 - 4ae}} \right) \zeta + \left( \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a} \right) x \right]$ . Ce qui donne  $\alpha = a$ ;  $\epsilon = \frac{b}{2} - \frac{bc - 2ad}{2\sqrt{c^2 - 4ae}}$ ;  $\gamma = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ae}}{2}$ ;  $\delta = 1$ ;  $\epsilon = \frac{b}{2a} + \frac{bc - 2ad}{2a\sqrt{c^2 - 4ae}}$ ;  $\zeta = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}$ .

## C H A P I T R E V I.

(p) ART. 97. On fait qu'en général l'expression  $a^{\frac{m}{n}}$  ou  $\sqrt[n]{a^m}$ ,  $m$  &  $n$  étant des nombres entiers, renferme un nombre  $n$  de valeurs différentes. Mais une quantité irrationnelle, telle que  $\sqrt{7}$  n'est pas exprimable par une quantité de la forme  $\frac{m}{n}$ ; on n'en peut obtenir qu'une valeur approchée au moyen des décimales; on ne peut donc pas dire que le nombre de valeurs renfermées dans  $a^{\sqrt{7}}$ , par exemple, soit déterminé ou assignable.

De plus, puisqu'il n'y a pas de raison de concevoir pour la valeur d'une quantité irrationnelle, quelque approchée qu'on



la suppose, une fraction dont le dénominateur soit plutôt pair qu'impair, ou réciproquement, il s'en suit que  $a$  étant une quantité négative &  $\gamma$  une quantité irrationnelle, on ne peut savoir si dans ce cas  $a^3$  représente une quantité réelle ou non.

CHAPITRE VII.

(q) ART. 122. \* Dans l'hyperbole équilatère, dont la puissance = 1, on a l'équation  $xy = 1$ , ou  $y = \frac{1}{x}$ . Si on veut avoir l'espace asymptotique terminé par deux ordonnées, dont la plus voisine du centre = 1, par la portion de la courbe correspondante & par la partie  $\gamma$  de l'abscisse totale  $x$ , comprise entre ces ordonnées; on imaginera cet espace partagé en une infinité de petits rectangles, dont les bases prises sur la ligne des abscisses soient égales entr'elles & infiniment petites; je les représente par  $e$ ; il est clair que la surface du premier, à compter de l'ordonnée = 1, sera  $\frac{e}{1+e}$ , celle du second  $\frac{e}{1+2e}$ , celle du troisième  $\frac{e}{1+3e}$ , &c. Donc l'espace total =  $e \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1+2e} + \frac{1}{1+3e} \dots + \frac{1}{1+\gamma} \right)$  = (en réduisant chaque fraction en série)  $e (1 + 1 + 1 + 1 + \dots) - e^2 (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \frac{\gamma}{e}) + e^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + \frac{\gamma^2}{e^2}) - e^4 (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + \frac{\gamma^3}{e^3}) + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$ , lorsque  $n = \infty$ . En effet, le terme général de cette suite =  $n^m$ . Si on désigne par  $s$  la somme de tous les termes, & par  $s'$  la somme de tous les termes, excepté le dernier, & qu'on fasse  $s = An^{m+1}$ ; il est évident qu'on aura  $s' = A(n-1)^{m+1}$ ; mais  $s - s' = (m+1)An^m = n^m$ ; donc  $A = \frac{1}{m+1}$ ; donc  $s = \frac{n^{m+1}}{m+1}$ . L'espace asymptotique,

\* Cette note suppose qu'on a vu les Sections coniques.

dont il s'agit, fera donc  $= e \cdot \frac{x}{e} - \frac{e^2 x^2}{2e^2} + \frac{e^3 x^3}{3e^3} - \frac{e^4 x^4}{4e^4} + \&c.$   
 $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \&c. = l(1+x) = l.x.$  Donc les  
 espaces asymptotiques comptés depuis l'ordonnée  $= 1$ , sont  
 exprimés par les logarithmes des abscisses totales correspon-  
 dantes.

### C H A P I T R E V I I I.

(r) ART. 137. Puisqu'on a  $\cot z = \frac{\cot \frac{1}{2} z - \tan \frac{1}{2} z}{2}$ ; on en  
 conclura  $2 \cot z = \cot \frac{1}{2} z - \frac{1}{\cot \frac{1}{2} z}$  ou  $(\cot \frac{1}{2} z)^2 - 2 \cot z \cdot \cot \frac{1}{2} z$   
 $= 1$ . Donc  $\cot \frac{1}{2} z = \cot z + \sqrt{1 + (\cot z)^2} = \cot z + \operatorname{cosec} z$ .  
 Donc  $\operatorname{cosec} z = \cot \frac{1}{2} z - \cot z$ .

(s) ART. 139. Il n'y a pas de doute que la formule  
 $(\operatorname{cosec} z \pm \sqrt{1 - \sin z})^n = \operatorname{cosec} n z \pm \sqrt{1 - \sin n z}$ , ne s'applique  
 aussi aux cas où  $n$  est une fraction. En effet, soit  $n = \frac{1}{m}$ ,

$n z$  deviendra  $\frac{z}{m}$ ; soit  $z'$  ce dernier arc; on aura  $z = m z'$ ,  
 & la formule deviendra  $(\operatorname{cosec} m z' \pm \sqrt{1 - \sin m z'})^{\frac{1}{m}} = (\operatorname{cosec} z'$   
 $\pm \sqrt{1 - \sin z'})$ ; ou  $\operatorname{cosec} m z' \pm \sqrt{1 - \sin m z'} = (\operatorname{cosec} z' \pm \sqrt{1 - \sin z'})^m$ ;  
 équation vraie qui légitime la supposition faite.

La même formule aura encore lieu pour le cas où  $n$  est  
 négative. En effet,  $(\operatorname{cosec} z + \sqrt{1 - \sin z})^{2n} (\operatorname{cosec} z - \sqrt{1 - \sin z})^{2n}$   
 $= [(\operatorname{cosec} z)^2 + (\sin z)^2]^{2n} = 1$ . Donc  $\frac{1}{(\operatorname{cosec} z + \sqrt{1 - \sin z})^{2n}}$  ou  $(\operatorname{cosec} z$   
 $\pm \sqrt{1 - \sin z})^{-2n} = (\operatorname{cosec} z \mp \sqrt{1 - \sin z})^{2n}$ ; & extrayant la  
 racine carrée de part & d'autre  $(\operatorname{cosec} z \pm \sqrt{1 - \sin z})^{-n}$   
 $= (\operatorname{cosec} z \mp \sqrt{1 - \sin z})^n = \operatorname{cosec} n z \mp \sqrt{1 - \sin n z} = \operatorname{cosec}$   
 $(-n z) \pm \sqrt{1 - \sin(-n z)}$ . Enfin la formule  $(\operatorname{cosec} z \pm \sqrt{1 - \sin z})^n$   
 $= \operatorname{cosec} n z \pm \sqrt{1 - \sin n z}$  a aussi lieu lorsque  $n$  est irrationnelle,  
 puisque l'une & l'autre expression se réduit à  $e^{\pm n \mp \sqrt{1 - \sin z}}$ .

### C H A P I T R E I X.

(t) ART. 150. On n'a trouvé dans l'Article cité 148 deux  
 équations

équations différentes, que parce qu'on y a supposé l'existence d'un facteur double; par conséquent, s'il arrive que les substitutions ne donnent qu'une équation, on n'a pas le droit d'en conclure plus d'un facteur simple.

(u) ART. 154. Ce seroit ici le lieu de prouver qu'en général toute fonction entière peut être résolue en facteurs réels, simples ou doubles. Dalember a démontré le premier, cette proposition importante, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, que pourront consulter ceux qui seront curieux de connoître sa démonstration; mais elle suppose la théorie des courbes. On en trouvera à la fin de la note suivante (v) une beaucoup plus simple, que j'ai extraite des leçons du C. Laplace, imprimées dans le Journal des Séances des Ecoles normales.

CHAPITRE X.

(v) ART. 166. On pourra trouver ces formules de la manière suivante: soit  $Z = 1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \&c.$   $= (1 + a\zeta)(1 + c\zeta)(1 + \gamma\zeta) \&c;$  &  $Z'$  ce que deviennent ces quantités en mettant  $\zeta + y$  à la place de  $\zeta$ . On aura

$$\frac{Z'}{Z} = l \frac{1+a\zeta+ay}{1+a\zeta} + l \frac{1+c\zeta+cy}{1+c\zeta} + l \frac{1+\gamma\zeta+\gamma y}{1+\gamma\zeta} + \&c. =$$

$$l\left(1 + \frac{ay}{1+a\zeta}\right) + l\left(1 + \frac{cy}{1+c\zeta}\right) + l\left(1 + \frac{\gamma y}{1+\gamma\zeta}\right) + \&c. \text{ Or, } Z' = Z + y$$

$$(A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + \&c.) + y^2 \times \&c. + \&c. \text{ Donc } \frac{Z'}{Z}$$

$$= 1 + \frac{y(A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + \&c.) + y^2 \times \&c. + \&c.}{Z} \& \text{ l. } \frac{Z'}{Z}$$

$$= \frac{y(A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + \&c.) + y^2 \times \&c. + \&c.}{Z} - \frac{y^2}{Z} (A^2 + \&c.) + \&c.$$

$$= \frac{ay}{1+a\zeta} - \frac{a^2 y^2}{2(1+a\zeta)^2} + \&c. + \frac{cy}{1+c\zeta} - \frac{c^2 y^2}{2(1+c\zeta)^2} + \&c. + \frac{\gamma y}{1+\gamma\zeta}$$

$$- \frac{\gamma^2 y^2}{2(1+\gamma\zeta)^2} + \&c. + \&c. \text{ Divisant par } y \& \text{ supposant } y = 0,$$

ce qui est permis, puisque l'équation est vraie indépendamment de la valeur de  $y$ , on aura

$$\frac{A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + 5E\zeta^4 + \&c.}{Z} = \frac{a}{1+a\zeta} + \frac{c}{1+c\zeta} + \frac{\gamma}{1+\gamma\zeta} + \frac{d}{1+d\zeta} + \&c.$$

EULER, Introduction à l'Anal. infin. Tome I. 2 S

ou  $A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \dots = Z \left( \frac{a}{1+az} + \frac{c}{1+cz} + \frac{e}{1+ez} + \frac{g}{1+gz} + \dots \right)$  ou bien (en mettant à la place de  $Z$  sa valeur, en développant les fractions en séries, & ordonnant par rapport à  $z$ ) = . . . . .

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots \times \left\{ \begin{array}{l} a - a^2z + a^3z^2 - a^4z^3 + a^5z^4 - a^6z^5 + \dots \\ + c - c^2z + c^3z^2 - c^4z^3 + c^5z^4 - c^6z^5 + \dots \\ + e - e^2z + e^3z^2 - e^4z^3 + e^5z^4 - e^6z^5 + \dots \\ + g - g^2z + g^3z^2 - g^4z^3 + g^5z^4 - g^6z^5 + \dots \\ + \dots - \dots \\ + \dots \end{array} \right\}$$

=  $(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots)(P - Qz + Rz^2 - Sz^3 + Tz^4 - Vz^5 + \dots)$

Donc enfin

$$\begin{aligned} A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \dots &= P + APz + BPz^2 + CPz^3 + DPz^4 + EPz^5 + \dots \\ &\quad - Qz - AQz^2 - BQz^3 - CQz^4 - DQz^5 - \dots \\ &\quad + Rz^2 + ARz^3 + BRz^4 + CRz^5 + \dots \\ &\quad - Sz^3 - ASz^4 - BSz^5 - \dots \\ &\quad + Tz^4 + ATz^5 + \dots \\ &\quad - Vz^5 - \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

D'où l'on conclut

- $P = A$
- $Q = AP - 2B$
- $R = AQ - BP + 3C$
- $S = AR - BQ + CP - 4D$
- $T = AS - BR + CQ - DP + 5E$
- $V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$
- $\dots = \dots$

Et en général, si on représente par  $s^{(n)}, s^{(n-1)} \dots s$ , la somme des puissances  $n, n-1, \dots, 1$ ; on aura l'équation

$s^{(n)} = As^{(n-1)} - Bs^{(n-2)} + Cs^{(n-3)} \dots \mp Ls \pm nM$ ;  
 $L$  marquant la somme des produits différents qu'on peut former avec les lettres  $a, c, e, g, \dots$ , prises  $n-1$  à  $n-1$ , chacune des lettres n'entrant qu'une fois dans chaque combinaison; &  $M$  marquant la somme des produits différents qu'on peut former avec les mêmes lettres, en les prenant  $n$  à  $n$ . Le

signe — convient aux cas où  $n$  est pair, & le signe + aux cas où  $n$  est impair.

Il est aisé de voir que les coefficients  $A, B, C, D$ , &c. de l'équation proposée, sont des fractions invariables de ces quantités  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ , &c; c'est-à-dire, des fonctions, qui restent les mêmes, lorsqu'on y change ces quantités l'une en l'autre; par exemple,  $\alpha$  en  $\epsilon$  & réciproquement;  $\alpha$  en &c. On voit encore que les puissances entières & positives du même ordre de ces mêmes quantités, savoir  $P, Q, R, S$ , &c, en sont aussi des fonctions invariables, & que de plus ces puissances sont des fonctions rationnelles des coefficients  $A, B, C$ , &c. Il est inutile d'observer que si au lieu de l'équation précédente, on avoit celle-ci :  $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots + h = 0$ ; la même chose auroit lieu à l'égard des coefficients comparés aux racines  $a, b, c, d$ , &c, de l'équation; & à l'égard des puissances semblables des racines comparées aux coefficients  $p, q, r, s$ , &c. Je remarque à présent que  $a, b, c, d$ , &c, désignant toujours les racines de l'équation proposée, on pourra obtenir la somme des termes de la forme  $a^m b^{m'}$ , ou  $a^m b^{m'} c^{m''}$ , ou &c, en fonction rationnelle des coefficients de l'équation. Cherchons d'abord la somme des termes de la forme  $a^m b^{m'}$ ; je multiplie la somme des puissances  $a^m$  par la somme des puissances  $a^{m'}$ ; le produit sera formé de la somme des puissances  $a^{m+m'}$ , & de la somme des produits de la forme  $a^m b^{m'}$ . On obtiendra donc cette dernière somme au moyen de celle des puissances, & par conséquent en fonction rationnelle des coefficients  $p, q, r, s$ , &c, de l'équation.

Pour avoir la somme des termes de la forme  $a^m b^{m'} c^{m''}$ , je multiplie la somme des termes  $a^m b^{m'}$  par la somme des puissances  $a^{m''}$ ; le produit sera composé de trois parties, savoir, 1°. De la somme des termes de la forme  $a^{m''} b^{m'+m''}$ ; 2°. De la somme des termes de la forme  $a^m b^{m'+m''}$ ; 3°. De la somme des termes de la forme  $a^m b^{m'} c^{m''}$ . On pourra donc avoir cette dernière somme en fonction rationnelle des coefficients de l'équation; ainsi de suite.

Cela posé, nous allons passer à la démonstration annoncée dans la note précédente.

Prenons une équation du degré  $2^i k$ ,  $k$  étant un nombre impair, & supposons que ses différentes racines soient  $a, b, c, \&c$ ; il est clair que le nombre en fera  $2^i k$ ; & que celui des sommes différentes, ou des produits différents qu'elles donneront en les prenant deux à deux sera exprimé, d'après la théorie des combinaisons, par  $2^{i-1} k (2^i k - 1)$ . Par conséquent l'équation, qui aura pour racines  $a + b + mab$ ,  $m$  étant un nombre quelconque, sera du degré  $2^{i-1} k$ ,  $k$  étant un nombre impair. De plus, les coefficients de cette nouvelle équation seront rationnels, puisqu'il n'entrera dans leur formation que des puissances des racines  $a, b, c, \&c$ , & des produits de la forme donnée ci-dessus;  $a^m b^{m'}$ ,  $a^m b^{m'} c^{m''}$ , &c; lesquels sont, comme nous l'avons vu, des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation primitive.

Si  $i = 1$ , l'équation du degré  $k$ , qui dérive de la première, sera d'un degré impair, & aura par conséquent au moins une racine réelle; & comme on peut supposer à  $m$  une infinité de valeurs différentes, il y aura aussi une infinité de fonctions de la forme  $a + b + mab$  qui auront des valeurs réelles; & parmi ces fonctions, il s'en trouvera nécessairement qui renfermeront les mêmes racines de la proposée. Supposons  $a$  &  $b$  ces racines,  $a + b + mab$  &  $a + b + m'ab$  deux fonctions, dont les valeurs soient réelles; leur différence  $(m - m')ab$  sera aussi réelle. Donc  $ab$  &  $a + b$  seront séparément des quantités réelles. Donc, dans ce cas, la proposée aura un facteur réel du second degré  $x^2 - (a + b)x + ab$ .

Je dis à présent qu'en général la proposée aura un facteur réel du second degré, si toute équation du degré  $2^{i-1} k$  a un facteur réel du second degré. En effet, on sait que les racines imaginaires d'une équation du second degré sont de la forme  $a \pm \epsilon \sqrt{-1}$ , & de plus, que de quelque manière qu'on combine des quantités de cette forme par les opérations ordinaires de l'Algebre, on arrive toujours à des résultats de

la même forme : d'ailleurs on en peut voir la démonstration ci-dessous. Donc on aura, dans le cas présent, une infinité de fonctions  $a + b + mab$ , dont la valeur est de la forme  $g \pm f\sqrt{-1}$ . On prouvera en raisonnant comme ci-dessus, qu'il y a deux racines  $a$  &  $b$  telles, que  $a + b$  &  $ab$  soient de la même forme. Le facteur  $x^2 - (a+b)x + ab$  prend alors la forme  $x^2 + \alpha x + \epsilon + \sqrt{-1} \cdot (a'x + \epsilon')$ , ou  $x^2 + \alpha x + \epsilon - \sqrt{-1} \cdot (a'x + \epsilon')$ . Donc l'équation proposée sera divisible ou par  $x^2 + \alpha x + \epsilon + \sqrt{-1} \cdot (a'x + \epsilon')$ , ou par  $x^2 + \alpha x + \epsilon - \sqrt{-1} \cdot (a'x + \epsilon')$ . Mais comme une équation divisible par l'un de ces facteurs l'est aussi nécessairement par l'autre ; & que leur produit est un facteur réel du quatrième degré, qui, comme on fait, est toujours résoluble en deux facteurs réels du second degré, il s'ensuit que la proposée est décomposable en deux facteurs réels du second degré, du moins s'ils n'ont point de diviseur commun.

Si les deux facteurs précédents avoient un diviseur commun, il ne pourroit être que  $a'x + \epsilon'$ , puisqu'il devoit diviser leur différence ; mais après la division le quotient seroit une fonction d'un degré impair, qui auroit par conséquent un facteur simple réel. Donc la fonction proposée auroit encore dans ce dernier cas un facteur réel du second degré, qui seroit le résultat du produit de ces deux facteurs du premier.

Ainsi toute équation du degré  $2^i k$  a un facteur réel du second degré, si toute équation du degré  $2^{i-1} k'$  a un tel facteur. De même toute équation du degré  $2^{i-1} k'$  aura un facteur réel du second degré, si toute équation du degré  $2^{i-2} k''$  a aussi un facteur réel du second degré. On peut continuer le même raisonnement jusqu'à ce qu'on soit arrivé à l'équation du degré  $2^h$ ,  $h$  étant un nombre impair ; mais on vient de voir que celle-ci avoit nécessairement un facteur réel du second degré. Nous en concluons donc, en rétrogradant, qu'une équation du degré  $2^i k$  a un facteur réel du second degré. Donc, toute fonction entière d'un degré quelconque, est résoluble en facteurs réels, soit simples soit doubles.

On voit en même-temps, par ce qui précède, que les racines imaginaires des équations des degrés supérieurs peuvent être ramenées à la forme  $A + B\sqrt{-1}$ . D'Alembert l'avoit démontré dans les Mémoires de l'Académie de Berlin; & sa démonstration s'étend aux autres quantités algébriques, quelque soit leur composition. En effet, il n'y a point de difficulté pour les cas, où les imaginaires sont combinées entr'elles par voie d'addition, de soustraction, de multiplication & de division. Car, 1°.  $a + b\sqrt{-1} \pm c \pm g\sqrt{-1} = a \pm c + (b \pm g)\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$ . 2°.  $(a + b\sqrt{-1})(c + g\sqrt{-1}) = \begin{cases} ac + bc\sqrt{-1} \\ -bg + ag\sqrt{-1} \end{cases} = A + B\sqrt{-1}$ . 3°.  $\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + g\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c - g\sqrt{-1})}{(c + g\sqrt{-1})(c - g\sqrt{-1})} = \frac{ac + bc\sqrt{-1} - bg - ag\sqrt{-1}}{c^2 + g^2} = A + B\sqrt{-1}$ . Il y a un cas qui présente plus de difficulté, & pour lequel le célèbre Géomètre que je viens de citer a employé le calcul différentiel; c'est celui où l'on auroit une puissance imaginaire de la forme  $(a + b\sqrt{-1})^{s + h\sqrt{-1}}$ . En voici une démonstration qui ne suppose que les principes exposés dans l'Introduction à l'Analyse infinitésimale.

Je fais  $(a + b\sqrt{-1})^{s + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$ ;  $A$  &  $B$  étant supposés des quantités réelles, qu'il s'agit de déterminer. En prenant de part & d'autre les logarithmes, on aura  $l(A + B\sqrt{-1}) = (g + h\sqrt{-1})l(a + b\sqrt{-1})$ . Or,  $l(A + B\sqrt{-1}) = lA + l(1 + \frac{B}{A}\sqrt{-1}) = lA + \frac{B}{A}\sqrt{-1} + \frac{B^2}{2A^2} - \frac{B^3}{3A^3}\sqrt{-1} - \frac{B^4}{4A^4} + \frac{B^5}{5A^5}\sqrt{-1} + \dots$ ;  $gl(a + b\sqrt{-1}) = g(la + \frac{b}{a}\sqrt{-1} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5}\sqrt{-1} + \dots)$  &  $h\sqrt{-1} \cdot l(a + b\sqrt{-1}) = h\sqrt{-1}(la + \frac{b}{a}\sqrt{-1} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5}\sqrt{-1} + \dots)$



Donc

$$lA + \frac{B^2}{2A^2} - \frac{B^4}{4A^4} + \frac{B^6}{6A^6} - \&c. + \frac{B}{A} \sqrt{-1} - \frac{B^3}{3A^3} \sqrt{-1} + \frac{B^5}{5A^5} \sqrt{-1} - \&c. = g \left( la + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^4}{4a^4} + \&c. \right) - h \left( \frac{b}{a} - \frac{b^3}{3a^3} + \frac{b^5}{5a^5} - \&c. \right) + g \sqrt{-1} \left( \frac{b}{a} - \frac{b^3}{3a^3} + \frac{b^5}{5a^5} - \&c. \right) + h \sqrt{-1} \left( la + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^6}{6a^6} - \&c. \right) \text{ ou } lA + \frac{1}{2} l \left( 1 + \frac{B^2}{A^2} \right) + \sqrt{-1}.$$

$$\text{Ang. Tang. } \frac{B}{A} = g \left( la + \frac{1}{2} l \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right) - h. \text{ Ang. Tang. } \frac{b}{a} + g \sqrt{-1} \left( \text{Ang. Tang. } \frac{b}{a} \right) + h \sqrt{-1} \left( la + \frac{1}{2} l \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right).$$

Mais lorsque les deux membres d'une équation renferment des quantités réelles & des quantités imaginaires, la somme des quantités réelles du premier membre est égale à celle des quantités réelles du second membre, & par conséquent celle des quantités imaginaires est aussi égale de part & d'autre.

$$\text{Donc } l\sqrt{A^2+B^2} = g l\sqrt{a^2+b^2} - h. \text{ Ang. Tang. } \frac{b}{a} = g l\sqrt{a^2+b^2} - h. \text{ Ang. Tang. } \frac{b}{a} e, e \text{ étant le nombre dont le logarithme hyperbolique} = 1; \& \text{ Ang. Tang. } \frac{B}{A} = g \left( \text{Ang. Tang. } \frac{b}{a} \right) + h l\sqrt{a^2+b^2}; \text{ ou enfin } A^2+B^2 = (a^2+b^2)^e \times e^{-2h \text{ Ang. Tang. } \frac{b}{a}}, \& \frac{B}{A} = \text{Tang. Ang. } (g \times \text{Ang. Tang. } \frac{b}{a} + h l\sqrt{a^2+b^2}); \text{ ce qui donne évidemment des valeurs réelles pour } A \& \text{ pour } B. \text{ Donc une quantité algébrique, composée d'autant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours être ramenée à la forme } A + B \sqrt{-1}.$$

(x) ART. 168. On a, comme on le voit à l'article 181,

$$\text{l'équation } \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \&c. = \frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2mn \text{ tang. } \frac{m}{n} \pi};$$

ce qui donne, en faisant  $m = 1$ ,

$$\frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{4n^2-1} + \frac{1}{9n^2-1} + \frac{1}{16n^2-1} + \frac{1}{25n^2-1} + \&c. = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2n \text{ tang. } \frac{\pi}{n}}$$

En réduisant chacune de ces fractions en séries, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^8} + \frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^{12}} + \&c. \\ \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4^3n^4} + \frac{1}{4^5n^6} + \frac{1}{4^7n^8} + \frac{1}{4^9n^{10}} + \frac{1}{4^{11}n^{12}} + \&c. \\ \frac{1}{9n^2-1} &= \frac{1}{9n^2} + \frac{1}{9^3n^4} + \frac{1}{9^5n^6} + \frac{1}{9^7n^8} + \&c. \\ \frac{1}{16n^2-1} &= \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{16^3n^4} + \&c. \\ \&c. &= \&c. \end{aligned}$$

Faisant ensuite une somme des termes de chaque colonne, & supposant, pour cet effet,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c &= A \pi^2 \\ 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \&c &= B \pi^4 \\ 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \&c &= C \pi^6 \\ 1 + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{9^7} + \frac{1}{16^7} + \frac{1}{25^7} + \&c &= D \pi^8, \\ \&c. & \end{aligned}$$

$$\text{l'équation deviendra } \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}} = \frac{A\pi^2}{n^2} + \frac{B\pi^4}{n^4} + \frac{C\pi^6}{n^6} + \frac{D\pi^8}{n^8} + \&c.$$

Soit à présent  $\frac{\pi}{n} = x$  pour faire disparaître à la fois les

lettres  $\pi$  &  $n$ , on aura  $\frac{1}{2} - \frac{x}{2 \operatorname{tang} x}$  ou  $\frac{\sin x - x \operatorname{cosec} x}{2 \sin x} = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \&c$ , que pour abrégér, je représenterai par  $s$ . Ainsi  $s = \frac{\sin x - x \operatorname{cosec} x}{2 \sin x}$  ou  $s \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \operatorname{cosec} x$ . Or,  $\sin x = ax - cx^3 + ex^5 - gx^7 + ix^9 - \&c$ , en supposant  $a = 1$ ,  $c = \frac{1}{1.2.3}$ ,  $e = \frac{1}{1.2.3.4.5}$ ,  $g = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$  &c. & comme  $\operatorname{cosec} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7} - \&c$ ; on aura  $\operatorname{cosec} x = a - 3cx^2 + 5ex^4 - 7gx^6 + 9ix^8 - \&c$ . Donc  $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \operatorname{cosec} x = cx^3 - 2ex^5 + 3gx^7 - 4ix^9 + 5ix^{11} - \&c = s \cdot \sin x$ . Or, la valeur de  $s$  étant multipliée par celle de  $\sin x$ , donnera

$s \sin x$

$$\begin{aligned}
 s \sin x &= aAx^3 + aBx^5 + aCx^7 + aDx^9 + aEx^{11} + aFx^{13} + \&c. \\
 &\quad - \epsilon A - \epsilon B - \epsilon C - \epsilon D - \epsilon E - \&c. \\
 &\quad \quad + \gamma A + \gamma B + \gamma C + \gamma D + \&c. \\
 &\quad \quad \quad - \delta A - \delta B - \delta C - \&c. \\
 &\quad \quad \quad \quad + \epsilon A + \epsilon B + \&c. \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad - \zeta A - \&c. \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + \&c.
 \end{aligned}$$

expression, qui doit être égale à la première. Par conséquent, en égalant les coefficients des puissances égales, on aura, pour trouver les indéterminées  $A, B, C, \&c.$ , les équations suivantes, qu'on pourra continuer tant qu'on voudra.

$$\begin{aligned}
 A &= \epsilon, \text{ à cause de } a = 1 \\
 B &= \epsilon A - 2\gamma \\
 C &= \epsilon B - \gamma A + 3\delta \\
 D &= \epsilon C - \gamma B + \delta A - 4\epsilon \\
 E &= \epsilon D - \gamma C + \delta B - \epsilon A + 5\zeta \\
 F &= \epsilon E - \gamma D + \delta C - \epsilon B + \zeta A - 6\eta. \\
 \&c. &= \&c.
 \end{aligned}$$

(y) ART. 183. Les mêmes séries peuvent se déduire de l'art. 162. En effet, la seconde combinaison de l'art. 162, en faisant  $y = v\sqrt{-1}$ , &  $c = g\sqrt{-1}$ , donne comme on le voit à l'article 163,

$$\frac{\sin g + \sin v}{\sin g} = 1 + \frac{v}{g} - \frac{v^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \sin g} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 \sin g} - \&c. = \left(1 + \frac{v}{g}\right) \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right) \left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right) \left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right) \left(1 - \frac{v}{4\pi - g}\right) \&c. \text{ Donc}$$

$$\frac{1}{\sin g} = \frac{1}{g} + \frac{2g}{\pi^2 - g^2} - \frac{2g}{4\pi^2 - g^2} + \frac{2g}{9\pi^2 - g^2} - \frac{2g}{16\pi^2 - g^2} + \&c. \& \frac{g}{2 \sin g} - \frac{1}{2} = \frac{g^3}{\pi^2 - g^2} - \frac{g^3}{4\pi^2 - g^2} + \frac{g^3}{9\pi^2 - g^2} - \frac{g^3}{16\pi^2 - g^2} + \&c.$$

Faisant  $g = b\pi\sqrt{-1}$ , & par conséquent  $g^2 = -b^2\pi^2$ , on aura

$$\frac{b\pi\sqrt{-1}}{2 \sin b\pi\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{4+b^2} - \frac{1}{9+b^2} + \frac{1}{16+b^2} - \&c. \text{ Donc}$$

$$\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{4+b^2} + \frac{1}{9+b^2} - \frac{1}{16+b^2} + \&c. = \frac{1}{2b^2} - \frac{b\pi\sqrt{-1}}{2b^2 \sin b\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2b^2} - \frac{\pi b}{(e^{b\pi} - e^{-b\pi})b^2}, \text{ à cause de } 2 \sin b\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-b\pi} - e^{b\pi}}{\sqrt{-1}};$$

& enfin en écrivant  $b$  au lieu de  $b^2$  &  $\sqrt{b}$  au lieu de  $b$ ,

$$\frac{1}{1+b} - \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} - \frac{1}{16+b} + \dots = \frac{1}{2b} - \frac{\pi\sqrt{b}}{(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})b}.$$

La première formule de l'art. 162  $\frac{e^{\infty} - e^{-\infty}}{1 + e^c} = (164)$

$\frac{e^{\infty} - e^{-\infty}}{1 + e^c} = \frac{e^{c-\infty} - e^{-c+\infty}}{1 + e^c}$ , & en faisant  $c = g\sqrt{-1}$ , &  $x = \sqrt{-1}$  ; elle se change en

$\frac{\cos\gamma + \cos(g-\gamma)}{1 + \cos g} = \cos\gamma + \frac{\sin g \sin \gamma}{1 + \cos g} = 1$   
 $+ \gamma \frac{\sin g}{1 + \cos g} - \frac{\gamma^2}{1.2} - \dots = \left(1 + \frac{2\gamma}{\pi - g}\right) \left(1 - \frac{2\gamma}{\pi + g}\right) \left(1 + \frac{2\gamma}{3\pi - g}\right)$   
 $\left(1 - \frac{2\gamma}{3\pi + g}\right) \left(1 + \frac{2\gamma}{5\pi - g}\right) \left(1 - \frac{2\gamma}{5\pi + g}\right) \dots$  &c. Donc

$\frac{\sin g}{1 + \cos g} = \frac{2}{\pi - g} - \frac{2}{\pi + g} + \frac{2}{3\pi - g} - \frac{2}{3\pi + g} + \frac{2}{5\pi - g} - \frac{2}{5\pi + g} + \dots$  &c.

ou  $\frac{\sin g}{1 + \cos g} = \frac{4g}{\pi^2 - g^2} + \frac{4g}{9\pi^2 - g^2} + \frac{4g}{25\pi^2 - g^2} + \dots$  &c. Retranchant la

série  $\frac{1}{g} = \frac{1}{g} + \frac{2g}{\pi^2 - g^2} - \frac{2g}{4\pi^2 - g^2} + \dots$  &c de celle-ci ; on aura

$\frac{\sin g}{1 + \cos g} - \frac{1}{\sin g} = -\frac{1}{g} + \frac{2g}{\pi^2 - g^2} + \frac{2g}{4\pi^2 - g^2} + \frac{2g}{9\pi^2 - g^2} + \dots$  &c ou

$\frac{g(\sin^2 g - 1 - \cos g)}{\sin g(1 + \cos g)} = -\frac{g \cos g (\cos g + 1)}{\sin g(1 + \cos g)} = -\frac{g \cos g}{\sin g} = -1 + \frac{2g^2}{\pi^2 - g^2}$

$+ \frac{2g^2}{4\pi^2 - g^2} + \frac{2g^2}{9\pi^2 - g^2} + \dots$  &c. Soit  $g = b\pi\sqrt{-1}$  & par conséquent

$g^2 = -b^2\pi^2$ , on aura  $\frac{b\pi\sqrt{-1}}{2b^2} \frac{\cos b\pi\sqrt{-1}}{\sin b\pi\sqrt{-1}} - \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{4+b^2}$

$+ \frac{1}{9+b^2} + \dots = \frac{b\pi\sqrt{-1}}{2b^2} \sqrt{-1} \cdot \frac{e^{-\pi b} + e^{\pi b}}{e^{-\pi b} - e^{\pi b}} - \frac{1}{2b^2} = \frac{b\pi}{2b^2} \cdot \frac{e^{-\pi b} + e^{\pi b}}{e^{-\pi b} - e^{\pi b}}$

$\rightarrow \frac{1}{2b^2}$ , à cause de  $2 \cos b\pi\sqrt{-1} = e^{-b\pi} + e^{b\pi}$  & de  $2\sqrt{-1} \cdot \sin b\pi\sqrt{-1} = e^{-\pi b} - e^{\pi b}$ . Donc enfin en écrivant  $b$  pour  $b^2$ ,

on aura  $\frac{1}{1+b} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} + \frac{1}{16+b} + \dots = \frac{e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})}$

$\times \pi \sqrt{b} - \frac{1}{2b}$ . Ces résultats, comme on voit, s'accordent exactement avec ceux qu'Euler a donnés.

CHAPITRE XI.

(z) ART. 179. Il ne faut qu'une légère attention pour voir que la série  $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \&c$ , peut se déduire de la série  $\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \&c$ , en retranchant celle-ci de la série  $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \&c$ .

CHAPITRE XII.

(aa) ART. 203. Il ne faut pas croire que la méthode donnée ici par Euler, soit toujours la plus commode & la plus expéditive. On arrivera plus promptement au but, en faisant dans le premier exemple  $\frac{\gamma \gamma}{(1-\gamma+\gamma^2)(1+\gamma^2)} = \frac{A+B\gamma}{1-\gamma+\gamma^2} + \frac{C+D\gamma+E\gamma^2+F\gamma^3}{1+\gamma^2}$ . Après avoir réduit les deux membres au même dénominateur & fait passer tous les termes d'un même côté, on égalera à zéro, séparément, la somme des coefficients des mêmes puissances de  $\gamma$ ; ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues, lesquelles on traitera suivant les règles ordinaires. On pourroit semblablement faire dans le second exemple  $\frac{1+\gamma+\gamma^2}{(1+\gamma\sqrt{2+\gamma^2})(1-\gamma\sqrt{2+\gamma^2})} = \frac{A+B\gamma}{1+\gamma\sqrt{2+\gamma^2}} + \frac{C+D\gamma}{1-\gamma\sqrt{2+\gamma^2}}$ ; & dans le troisième  $\frac{1+2\gamma+\gamma^2}{(1-\frac{2}{3}\gamma+\gamma^2)(1+2\gamma+3\gamma^2)} = \frac{A+B\gamma}{1-\frac{2}{3}\gamma+\gamma^2} + \frac{C+D\gamma}{1+2\gamma+3\gamma^2}$ . Le calcul seroit plus simple & plus facile. Il en fera de même des autres cas, où le nombre des indéterminées ne fera pas trop grand. Cette dernière méthode consiste, comme on voit, à égaliser la fonction fractionnaire à autant d'autres fractions partielles qu'il y a de facteurs dans son dénominateur, & à donner à chacune de ces fractions un numérateur dans lequel le plus grand exposant de la variable soit moindre d'une unité que celui du dénominateur.

(bb) ART. 217. Quoiqu'on n'aperçoive pas du premier coup-d'œil quel est le terme général de la série, on voit cependant, en y regardant de plus près, que pour les termes où l'exposant de  $\zeta$  est impair, le terme général est  $2Ap^n (\cos. \varphi + \cos. 3\varphi + \cos. 5\varphi + \dots + \cos. n\varphi)$ , & que pour ceux où l'exposant est pair, le terme général est  $2Ap^n (\cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi + \dots + \cos. n\varphi + \frac{1}{2})$ ; or, (art. 260) la somme des cosinus d'un certain nombre d'arcs, qui forment une progression arithmétique, & dont le premier est  $a$ , la différence  $b$  & le dernier  $a + kb = \frac{\cos(a + \frac{1}{2}kb) \sin \frac{1}{2}(k+1)b}{\sin \frac{1}{2}b}$ . En substituant dans cette dernière formule au lieu de  $a, b$  &  $k$ , les valeurs qui conviennent; c'est-à-dire, pour le premier cas, faisant  $a = \varphi, b = 2\varphi, (n-1)\varphi = k \cdot 2\varphi$ , ou  $k = \frac{n-1}{2}$ ; & pour le second,  $a = 0, b = 2\varphi$ , &  $k = \frac{n}{2}$ , ou plus simplement, faisant attention que la somme dont on vient de parler est égale au produit du cosinus de la moitié de la somme du plus grand & du plus petit arc multiplié par le sinus de la moitié de la différence des mêmes arcs augmentée de la raison de la progression, & divisé par le sinus de la moitié de la raison, il sera facile de ramener les deux premières expressions à la forme générale  $\frac{A \sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$ .

(cc) ART. 222. Je vais détailler ici le calcul qu'il faut faire en suivant un procédé analogue aux précédents pour trouver le terme général de la série, qui résulte du développement de la fraction  $\frac{A + Bp\zeta}{(1 - 2p\zeta \cos \varphi + p^2 \zeta^2)^2}$ ; & cela afin de mettre ceux que sa longueur ne rebutera pas, à portée de s'exercer utilement. 1°. La quantité suivante, que je désigne par  $(A)$

$$\frac{f \cdot 4p\zeta (f \cos \varphi - g \sin \varphi) + 6p^2 \zeta^2 (f \cos 2\varphi - g \sin 2\varphi) - 4p^3 \zeta^3 (f \cos 3\varphi - g \sin 3\varphi) + p^4 \zeta^4 (f \cos 4\varphi - g \sin 4\varphi)}{(1 - 2p\zeta \cos \varphi + p^2 \zeta^2)^2}$$

à pour terme général;  $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (f \cos n\varphi + g \sin n\varphi) p^n \zeta^n \cdot (C)$

2°.  $\frac{a + b p \zeta + c p^2 \zeta^2}{(1 - 2 p \zeta \cos \phi + p^2 \zeta^2)^3}$  ou  $\frac{(a + b p \zeta + c p^2 \zeta^2) (1 - 2 p \zeta \cos \phi + p^2 \zeta^2)}{(1 - 2 p \zeta \cos \phi + p^2 \zeta^2)^4}$ , ou enfin

$$\frac{a + b p \zeta + c p^2 \zeta^2 - 2 a p \zeta \cos \phi - 2 b p^2 \zeta^2 \cos \phi - 2 c p^3 \zeta^3 \cos \phi + a p^2 \zeta^2 + b p^3 \zeta^3 + c p^4 \zeta^4}{(1 - 2 p \zeta \cos \phi + p^2 \zeta^2)^4} (B) \text{ a pour terme}$$

général

$$\frac{a p^2 \zeta^n}{16 (\sin \phi)^5} \left( \frac{(n+5)(n+4)}{1 \cdot 2} \sin.(n+1)\phi - 2 \frac{(n+1)(n+5)}{1 \cdot 2} \sin.(n+3)\phi + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \sin.(n+5)\phi \right) \\ + \frac{b p^3 \zeta^n}{16 (\sin \phi)^5} \left( \frac{(n+4)(n+3)}{1 \cdot 2} \sin. n \phi - 2 \frac{n \cdot (n+4)}{1 \cdot 2} \sin.(n+2)\phi + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \sin.(n+4)\phi \right) \\ + \frac{c p^4 \zeta^n}{16 (\sin \phi)^5} \left( \frac{(n+3)(n+2)}{1 \cdot 2} \sin.(n-1)\phi - 2 \frac{(n-1)(n+3)}{1 \cdot 2} \sin.(n+1)\phi + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \sin.(n+3)\phi \right)$$

lequel je représente par (D). Soit (A) + (B) =  $\frac{A}{(1 - 2 p \zeta \cos \phi + p^2 \zeta^2)^4}$ .

Donc  $\frac{A}{(1 - 2 p \zeta \cos \phi + p^2 \zeta^2)^4}$  aura pour terme général (C) + (D).

Cela posé, on aura pour trouver les cinq indéterminées  $a, b, c, f, g$ , les cinq équations suivantes : 1°.  $a + f = A$  ; 2°.  $4 f \cos \phi - 4 g \sin \phi + 2 a \cos \phi - b = 0$  ; 3°.  $6 f \cos \phi - 6 g \sin \phi - 2 b \cos \phi + a + c = 0$  ; 4°.  $4 f \cos \phi - 4 g \sin \phi + 2 c \cos \phi - b = 0$  ; 5°.  $f \cos \phi - g \sin \phi + c = 0$ . Si on élimine suivant les règles ordinaires  $a, b, c$ , &  $g$ , en observant qu'en général  $2 \cos \phi \cdot \cos m \phi = \cos (m+1)\phi + \cos (m-1)\phi$ , & que  $2 \cos \phi \sin m \phi = \sin (m+1)\phi + \sin (m-1)\phi$ , on arrivera à l'équation  $f [(3 \sin 2 \phi - 3 \sin 4 \phi + \sin 6 \phi) (2 \cos \phi - 3 \cos 3 \phi + \cos 5 \phi) - (3 \cos 2 \phi - 3 \cos 4 \phi + \cos 6 \phi - 1) (4 \sin \phi - 3 \sin 3 \phi + \sin 5 \phi)] = A [4 \sin \phi - 3 \sin 3 \phi + \sin 5 \phi - 2 \cos \phi (3 \sin 2 \phi - 3 \sin 4 \phi + \sin 6 \phi)]$ . Faisant les multiplications indiquées, & réduisant, en mettant à la place des produits de sinus & de cosinus, leurs valeurs en sinus ou en cosinus d'arcs multiples, on trouvera, après toute réduction faite, pour le multiplicateur de  $f$ , la quantité  $35 \sin \phi - 21 \sin 3 \phi + 7 \sin 5 \phi - \sin 7 \phi = 64 (\sin \phi)^2$ , & pour celui de  $A$ , la

quantité  $\sin. \varphi - 3 \sin. 3 \varphi + 3 \sin. 5 \varphi - \sin. 7 \varphi$ . Donc, on aura pour  $f, g, a, b, c$ , les valeurs suivantes :

$$f = A \left( \frac{\sin. \varphi - 3 \sin. 3 \varphi + 3 \sin. 5 \varphi - \sin. 7 \varphi}{64 (\sin. \varphi)^7} \right)$$

$$g = A \left( \frac{\cos. \varphi - 3 \cos. 3 \varphi + 3 \cos. 5 \varphi - \cos. 7 \varphi}{64 (\sin. \varphi)^7} \right)$$

$$a = 2A \left( \frac{17 \sin. \varphi - 9 \sin. 3 \varphi + 2 \sin. 5 \varphi}{64 (\sin. \varphi)^7} \right)$$

$$b = 2A \left( \frac{2 \sin. 2 \varphi - \sin. 4 \varphi}{64 (\sin. \varphi)^7} \right)$$

$$c = 2A \left( \frac{\sin. 3 \varphi - 3 \sin. \varphi}{64 (\sin. \varphi)^7} \right)$$

Donc  $\frac{A}{(1 - 2p^2 \cos. \varphi + p^2 \zeta^2)^4}$  a pour terme général

$$\begin{aligned} & \frac{Ap^2 \zeta^n}{64 (\sin. \varphi)^7} \left[ \left( \frac{n+5}{1} \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \sin. (n+1) \varphi - 2 \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+5}{2} \cdot \sin. (n+3) \varphi + \right. \right. \\ & \left. \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \sin. (n+5) \varphi \right) \left( \frac{34 \sin. \varphi - 18 \sin. 3 \varphi + 4 \sin. 5 \varphi}{16 (\sin. \varphi)^5} \right) + \left( \frac{n+4}{1} \cdot \frac{n+3}{2} \cdot \right. \\ & \left. \sin. n \varphi - 2 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \sin. (n+2) \varphi + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \sin. (n+4) \varphi \right) \left( \frac{4 \sin. 2 \varphi - 2 \sin. 4 \varphi}{16 (\sin. \varphi)^5} \right) \\ & \left. + \left( \frac{n+3}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \sin. (n-1) \varphi - 2 \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n+3}{2} \cdot \sin. (n+1) \varphi + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \sin. (n+3) \varphi \right) \right. \\ & \left. \left( \frac{2 \sin. 3 \varphi - 6 \sin. \varphi}{16 (\sin. \varphi)^5} \right) + \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdot \left( \sin. (n+1) \varphi - 3 \sin. (n+3) \varphi \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \sin. (n+5) \varphi - \sin. (n+7) \varphi \right) \right], \text{ \& en mettant pour } 34 \sin. \varphi - \end{aligned}$$

$18 \sin. 3 \varphi + 4 \sin. 5 \varphi, 4 \sin. 2 \varphi - 2 \sin. 4 \varphi, \text{ \& } 2 \sin. 3 \varphi - 6 \sin. \varphi$  leurs valeurs  $64 (\sin. \varphi)^5 - 8 (\sin. \varphi)^3, 2 \cos. \varphi \cdot 8 (\sin. \varphi)^1, - 8 (\sin. \varphi)^3$ , le terme général deviendra

$$\begin{aligned} & \frac{Ap^2 \zeta^n}{64 (\sin. \varphi)^7} \left[ \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \left( \sin. (n+1) \varphi - 3 \sin. (n+3) \varphi \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \sin. (n+5) \varphi - \sin. (n+7) \varphi \right) + 4 \cdot \frac{n+5}{1} \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \sin. (n+1) \varphi \right. \\ & \left. - 8 \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+5}{2} \cdot \sin. (n+3) \varphi + 4 \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \sin. (n+5) \varphi \right. \\ & \left. + \frac{8 (\sin. \varphi)^3}{16 (\sin. \varphi)^5} \left( - \frac{n+5}{1} \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \sin. (n+1) \varphi + 2 \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+5}{2} \cdot \sin. (n+3) \varphi \right) \right] \end{aligned}$$



$$-\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \sin. (n+5) \phi + \left( \frac{n+4}{1} \cdot \frac{n+3}{2} \cdot \sin. n \phi - 2 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \right.$$

$$\sin. (n+2) \phi + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \sin. (n+4) \phi \Big) 2 \cos. \phi - \frac{n+3}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot$$

$$\sin. (n-1) \phi + 2 \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n+3}{2} \cdot \sin. (n+1) \phi - \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot$$

$$\sin. (n+3) \phi \Big]. \text{ La partie } \frac{8(\sin. \phi)^4}{16(\sin. \phi)^4} \left( -\frac{n+5}{1} \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \sin. (n+1) \phi \right.$$

$$+ \&c. + \left( \frac{n+4}{1} \cdot \frac{n+3}{2} \cdot \sin. n \phi - \&c. \right) 2 \cos. \phi - \frac{n+3}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot$$

$$\sin. (n-1) \phi + \&c. \Big), \text{ après les transformations \& réductions nécessaires, se change à la fin en } -6 \sin. (n+1) \phi$$

$$- 2n \sin. (n+1) \phi + 2n \sin. (n+3) \phi + 2 \sin. (n+3) \phi. \text{ En ajoutant cette partie à la première, \& réduisant, on trouvera enfin pour le terme général de } \frac{A}{(1-2p\tau \cos. \phi + p^2 \tau^2)^4}, \text{ la quan-}$$

$$\text{tité } \frac{A p^n \tau^n}{64 (\sin. \phi)^7} \left[ \frac{n+7}{1} \cdot \frac{n+6}{2} \cdot \frac{n+5}{3} \cdot \sin. (n+1) \phi - 3 \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+6}{2} \cdot \frac{n+7}{3} \cdot \right.$$

$$\sin. (n+3) \phi + 3 \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+7}{3} \cdot \sin. (n+5) \phi - \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdot$$

$$\sin. (n+7) \phi \Big]. \text{ D'où il est facile de conclure le terme gé-}$$

$$\text{néral de la fraction } \frac{A+Bp\tau}{(1-2p\tau \cos. \phi + p^2 \tau^2)^4}.$$

En examinant avec un peu d'attention la manière dont les termes généraux trouvés jusqu'ici sont composés, on en déduira aisément par induction les termes généraux ultérieurs. On en conclura, par exemple, que le terme général de la fraction  $\frac{A}{(1-2p\tau \cos. \phi + p^2 \tau^2)^5}$  sera  $\frac{A p^n \tau^n}{256 (\sin. \phi)^9} \left[ \frac{n+9}{1} \cdot \frac{n+8}{2} \cdot \frac{n+7}{3} \cdot \right.$ 

$$\frac{n+6}{4} \cdot \sin. (n+1) \phi - 4 \cdot \frac{n+9}{1} \cdot \frac{n+8}{2} \cdot \frac{n+7}{3} \cdot \frac{n+1}{4} \cdot \sin. (n+3) \phi$$

$$+ 6 \cdot \frac{n+9}{1} \cdot \frac{n+8}{2} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot \frac{n+2}{4} \cdot \sin. (n+5) \phi - 4 \cdot \frac{n+9}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot$$

$$\frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} \cdot \sin. (n+7) \phi + \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdot \frac{n+4}{4} \cdot \sin. (n+9) \phi \Big].$$

Cependant, pour ne laisser aucune incertitude sur la légi-

timité de cette conclusion, nous allons chercher directement une formule générale, après avoir établi auparavant deux propositions qui nous seront nécessaires.

## I.

Si  $y$  est une fonction d'un nombre quelconque de facteurs variables, &  $y', y'', y''', y''', y',$  &c, ce que devient cette fonction, lorsqu'on met successivement à la place de la variable de chaque facteur, cette variable, augmentée de sa différence, prise une, deux, trois, quatre, cinq, &c. fois, & que je suppose ici constante. La différence première de la fonction sera évidemment  $y' - y$ ; la différence seconde sera  $(y'' - y') - (y' - y) = y'' - 2y' + y$ ; la différence troisième sera  $[(y''' - y'') - (y'' - y')] - [(y'' - y') - (y' - y)] = y''' - 3y'' + 3y' - y$ . La différence quatrième sera de même  $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y$ ; & en général, la différence  $n^e$  sera  $\pm (y - ny' + n \cdot \frac{n-1}{2} y'' - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y''' + \&c.)$  suivant que  $n$  sera un nombre pair ou impair.

## I I.

Si on a un nombre  $m$  de facteurs variables,  $p, q, r, s, t,$  &c, dont les différences constantes soient  $a, b, c, d, e,$  &c; je dis que la différence  $n^e$ , du produit de ce nombre  $m$  de facteurs, sera zéro, si  $n$  est  $> m$ . Pour abrégér & faciliter le calcul, prenons pour  $m$  un nombre déterminé, 3, par exemple, & soient les facteurs  $p, q, r,$  dont les différences constantes sont  $a, b, c$ ; la différence  $n^e$  sera, par la première proposition,

$$\begin{aligned} & pqr \\ & -n \cdot (pqr + a \cdot qr + b \cdot pr + c \cdot pq + ab \cdot r + ac \cdot q + bc \cdot p + abc) \\ & + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (pqr + 2a \cdot qr + 2b \cdot pr + 2c \cdot pq + 2^2 ab \cdot r + 2^2 ac \cdot q + 2^2 bc \cdot p + 2^3 abc) \\ & - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot (pqr + 3a \cdot qr + 3b \cdot pr + 3c \cdot pq + 3^2 ab \cdot r + 3^2 ac \cdot q + 3^2 bc \cdot p + 3^3 abc) \\ & + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot (pqr + 4a \cdot qr + 4b \cdot pr + 4c \cdot pq + 4^2 ab \cdot r + 4^2 ac \cdot q + 4^2 bc \cdot p + 4^3 abc) \\ & - \&c. \end{aligned}$$

Or,

Or, suivant ce qu'on a vu Chapitre IV, Article 67, la somme des termes, qui forment chaque colonne verticale, est égale à zéro tant que  $n$  est plus grande que les exposants des coefficients 1, 2, 3, 4, &c. Donc, si  $n$  est elle-même plus grande que  $m$ , la totalité sera zéro. Donc, en général, la différence  $n$  d'un nombre  $m$  de facteurs est nulle, pourvu que  $n$  soit plus grande que  $m$ .

Cela posé, on pourra déterminer par la méthode suivante, que je dois à l'amitié du C. Laplace, le coefficient de  $\zeta^n$  dans le développement de la fonction  $\frac{1}{(1-2\zeta \cos \varphi + \zeta^2)^i}$ .

Je mets cette fonction sous la forme  $\frac{1}{(1-\zeta e^{\varphi\sqrt{-1}})(1-\zeta e^{-\varphi\sqrt{-1}})^i}$ ,

$e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbole est 1.

Or,  $\frac{1}{(1-\zeta e^{\pm\varphi\sqrt{-1}})^i}$  ou  $(1-\zeta e^{\pm\varphi\sqrt{-1}})^{-i} = 1 + \frac{i}{1}\zeta e^{\pm\varphi\sqrt{-1}} +$

$\frac{i}{1} \cdot \frac{i+1}{2} \cdot \zeta^2 e^{\pm 2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{i}{1} \cdot \frac{i+1}{2} \cdot \frac{i+2}{3} \cdot \zeta^3 e^{\pm 3\varphi\sqrt{-1}} + \frac{i}{1} \cdot \frac{i+1}{2} \cdot \frac{i+2}{3} \cdot \frac{i+3}{4} \cdot \zeta^4 e^{\pm 4\varphi\sqrt{-1}} + \&c.$  Donc (art. 215) le coefficient de  $\zeta^n$

dans la fonction  $\frac{1}{(1-2\zeta \cos \varphi + \zeta^2)^i}$ , en ne conservant que les puissances positives de  $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ , sera

$$(a) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i-1} \left\{ \begin{array}{l} (n+1)(n+2)\dots(n+i-1) e^{n\varphi\sqrt{-1}} \\ + \frac{i}{1}n \cdot (n+1) \dots (n+i-2) e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}} \\ + \frac{i}{1} \frac{i+1}{2} (n-1)n \dots (n+i-3) e^{(n-4)\varphi\sqrt{-1}} \\ + \frac{i}{1} \frac{i+1}{2} \frac{i+2}{3} (n-2)(n-1) \dots (n+i-4) e^{(n-6)\varphi\sqrt{-1}} \\ + \&c. \end{array} \right.$$

Si on multiplie ce second facteur, par la suite,  $e^{(2i-1)\varphi\sqrt{-1}} - \frac{2i-1}{1} e^{(2i-3)\varphi\sqrt{-1}} + \frac{2i-1}{1} \cdot \frac{2i-2}{2} e^{(2i-5)\varphi\sqrt{-1}} - \frac{2i-1}{1} \cdot \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{2i-3}{3} e^{(2i-7)\varphi\sqrt{-1}} + \dots$

$\frac{2i-3}{3} e^{(2i-7)\varphi\sqrt{-1}} + \frac{2i-1}{1} \cdot \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{2i-3}{3} \cdot \frac{2i-4}{4} e^{(2i-9)\varphi\sqrt{-1}} \dots \&c,$   
 laquelle exprime la valeur de  $(e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}})^{2i-1} =$   
 $(2\sqrt{-1})^{2i-1} (\sin \varphi)^{2i-1}$ ; on aura pour le coefficient de  
 $e^{(n+2i-2r-1)\varphi\sqrt{-1}}$

$$\frac{1}{1, 2, 3, \dots, (i-1), 1, 2, 3, \dots, r} \times \left\{ \begin{aligned} & i(i+1)(i+2) \dots (i+r-1)(n-r+1)(n-r+2) \dots (n+i-r-1) \\ & - \frac{r}{1} i(i+1)(i+2) \dots (i+r-2)(n-r+2)(n-r+3) \dots (n+i-r)(2i-1) \\ & + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} i(i+1)(i+2) \dots (1+r-3)(n-r+3)(n-r+4) \dots (n+i-r+1)(2i-1)(2i-2) \\ & - \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} i(i+1)(i+2) \dots (1+r-4)(n-r+4)(n-r+5) \dots (n+i-r+2) \\ & \quad (2i-1)(2i-2)(2i-3) \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

(a')

On doit observer dans cette fonction, d'écrire l'unité au lieu du produit  $i(i+1)(i+2) \dots (i+r-1)$ , si  $r=0$ , c'est-à-dire, si le facteur  $i+r-1$  est plus petit que  $i$ . Dans ce cas & dans les cas semblables, cela indique que le produit de ces facteurs se réduit à l'unité.

Maintenant, si on suppose dans la fonction (a'),  $n=s-2i$ , elle deviendra

$$\frac{\pm 1}{1, 2, 3, \dots, (i-1), 1, 2, 3, \dots, r} \left\{ \begin{aligned} & i(i+1)(i+2) \dots (i+r-1)(i+r-s+1) \dots (2i+r-s-1) \\ & - \frac{r}{1} i(i+1) \dots (i+r-2)(i+r-s) \dots (2i+r-s-2)(2i-1) \\ & + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} i(i+1) \dots (i+r-3)(i+r-s-1) \dots (2i+r-s-3)(2i-1)(2i-2) \\ & - \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} i(i+1) \dots (i+r-4)(i+r-s-2) \dots (2i+r-s-4)(2i-1)(2i-2)(2i-3) \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

J'ai mis au commencement le double signe  $\pm$ , parce qu'ayant changé les signes des facteurs, dans lesquels se trouve la lettre  $s$ , leur produit seroit négatif, lorsqu'ils seroient en nombre impair; & si on fait  $s=$  ou  $> 1$ , mais  $< r+1$ , on pourra la représenter par

$$\frac{\pm i(i+1) \dots (2i-1)}{1, 2, 3, \dots, i-1, 1, 2, 3, \dots, r} \left\{ \begin{aligned} & (i+r-s+1) \dots (i+r-1) 2i, (2i+1) \dots (2i+r-s-1) \\ & - r, (i+r-s) \dots (i+r-2) (2i-1) 2i \dots (2i+r-s-2) \\ & + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} (i+r-s-1) \dots (i+r-3) (2i-2) (2i-1) \dots (2i+r-s-3) \\ & - \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} (i+r-s-2) \dots (i+r-4) (2i-3) (2i-2) \dots (2i+r-s-4) \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

Le second facteur de cette quantité, est la différence finie  $r$  du nombre  $r - 1$  de facteurs  $i + r - s + 1, i + r - s + 2, \dots, i + r - 1; 2i, 2i + 1, \dots, 2i + r - s - 1$ . Cette différence est donc nulle, comme on vient de le voir. Ainsi la fonction ( $a'$ ) a pour facteurs  $n + 2i - s, s$  étant  $=$  ou  $> 1$  &  $< r + 1$ . Elle a donc pour facteur le produit  $(n + 2i - 1)(n + 2i - 2)(n + 2i - 3) \dots (n + 2i - r)$ . D'ailleurs, tous les facteurs sont multipliées par le produit  $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \dots (n + i - r - 1)$ , comme il est aisé de s'en assurer, en observant que le coefficient de  $e^{n+2i-2r-1}$  sera composé d'un nombre  $r + 1$  de termes, & que par conséquent, le dernier terme aura pour un de ses facteurs,  $n - r + r + 1$ , ou  $n + 1$ . Donc cette fonction est de la forme  $Q(n + 1)(n + 2) \dots (n + i - r - 1)(n + 2i - 1)(n + 2i - 2) \dots (n + 2i - r); (b)$ ;  $Q$  étant une fonction de  $i$  & de  $r$ , indépendante de  $n$ , puisque dans la fonction ( $b$ ) la plus haute dimension est  $(i - 1)$ , comme dans la fonction ( $a'$ ). Pour déterminer  $Q$ , nous ferons  $n$  infinie; en comparant alors les deux fonctions ( $b$ ) & ( $a'$ ), & ne considérant que les coefficients de  $n^{i-1}$ , nous aurons

$$Q = \frac{1}{1.2.3 \dots (i-1)1.2.3 \dots r} \left\{ \begin{array}{l} i(i+1)(i+2) \dots (i+r-1) \\ - \frac{r}{1} i(i+1) \dots (i+r-2)(2i-1) \\ + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} i(i+1) \dots (i+r-3)(2i-1)(2i-2) \\ - \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} i(i+1) \dots (i+r-4)(2i-2)(2i-3) \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

Ce qui donne, en supposant  $i =$  ou  $< r$  &  $=$  ou  $> 1$ ,

$$Q = \frac{i(i+1) \dots (2i-1)}{1.2.3 \dots (i-1)1.2.3 \dots r} \left\{ \begin{array}{l} 2i(2i+1) \dots (i+r-1) \\ - \frac{r}{1} (2i-1)2i \dots (i+r-2) \\ + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} (2i-2)(2i-1) \dots (i+r-3) \\ - \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

Ce dernier facteur est la différence finie  $r$  d'un nombre  $r - i$  de facteurs; elle est donc nulle, & par conséquent  $Q$  a pour facteurs  $(i - 1)(i - 2) \dots (i - r)$ ; il est donc

de la forme  $\frac{P(i-i)(i-2)(i-3)\dots(i-r)}{1.2.3\dots(i-1)1.2.3\dots r}$ ,  $P$  étant une fonction de  $r$  indépendante de  $i$ .

Pour la déterminer, nous supposons  $i$  infini dans les deux expressions de  $Q$ , & nous aurons, en n'ayant égard qu'à la puissance la plus élevée de  $i$ ,  $P = 1 - r. 2 + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot 2^2 - \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot 2^3 + \dots$  ou  $P = (-1)^r$ .  
Donc la fonction ( $a'$ ) =

$$\frac{(-1)^r (i-1)(i-2)(i-3)\dots(i-r)(n+1)(n+2)\dots(n+i-r-1)(n+2i-1)(n+2i-2)\dots(n+2i-r)}{1.2.3\dots(i-1)1.2.3\dots r}$$

Maintenant il est aisé de voir que dans le produit de la quantité

$$(a) \text{ par } e^{(2i-1)\phi\sqrt{-1}} - (2i-1)e^{(2i-3)\phi\sqrt{-1}} + \frac{(2i-1)(2i-2)}{1 \cdot 2} e^{(2i-5)\phi\sqrt{-1}} - \dots$$

le coefficient de  $\sin. (n + 2i - 2r - 1)\phi$  est

$$\frac{(-1)^r 2^{r-1} (i-1)(i-2)\dots(i-r)(n+1)(n+2)\dots(n+i-r-1)(n+2i-1)(n+2i-2)\dots(n+2i-r)}{1.2.3\dots(i-1)1.2.3\dots r - (n+2i-2r-1)\phi\sqrt{-1}}$$

parce qu'il est évident que  $-e^{(n+2i-2r-1)\phi\sqrt{-1}}$  aura le

même coefficient que  $e^{(n+2i-2r-1)\phi\sqrt{-1}}$  & que l'on a

$$2\sqrt{-1} \cdot \sin. (n + 2i - 2r - 1)\phi = e^{(n+2i-2r-1)\phi\sqrt{-1}} - e^{-(n+2i-2r-1)\phi\sqrt{-1}}$$

On aura donc, en ne perdant pas

$$\text{de vue que } e^{(2i-1)\phi\sqrt{-1}} - (2i-1)e^{(2i-3)\phi\sqrt{-1}} + \dots =$$

$$(2\sqrt{-1})^{2i-1} (\sin. \phi)^{2i-1}, \dots$$

$$\frac{(\pm 1)(-1)^r (i-1)(i-2)\dots(i-r)(n+1)(n+2)\dots(n+i-r-1)(n+2i-1)(n+2i-2)\dots(n+2i-r)}{2^{2i-2} (\sin. \phi)^{2i-1} \cdot 1.2.3\dots i-1.1.2.3\dots r}$$

pour le coefficient de  $z^n \sin. (n + 2i - 2r - 1)\phi$  dans le développement de la fonction proposée. Le signe positif de  $(\pm 1)$  a lieu, lorsque  $i$  est un nombre impair, & le signe négatif, lorsque  $i$  est un nombre pair. Il sera facile de con-

clure de-là que le terme multiplié par  $\zeta^n$  fera, en faisant successivement  $2i - 2r - 1 = 1, = 3, = 5, \&c.$

$$\frac{1}{1.2.3 \dots (i-1) 2^{2i-2} (f^n \cdot \varphi)^{2i-1}} \left\{ \begin{array}{l} (n+2i-1)(n+2i-2) \dots (n+i+1) f^n \cdot (n+1) \varphi \\ -(i-1)(n+2i-1) \dots (n+i+2)(n+1) f^n \cdot (n+3) \varphi \\ + \frac{i-1}{1} \cdot \frac{i-2}{2} (n+2i-1) \dots (n+i+3)(n+1)(n+2) f^n \cdot (n+5) \varphi \\ - \&c. \end{array} \right\}$$

ce qui donne la formule générale qu'Euler paroît avoir conclue par induction.

(dd) ART. 228. Au lieu de supposer  $X$  représenté par une expression de la forme  $fP^2 + gPQ - hAB\epsilon^n$ , rien n'empêche de faire  $X = fP^2 + gQ^2 - hAB\epsilon^n$ , & en opérant d'une manière semblable, on trouve la seconde valeur  $X =$

$$\frac{(\alpha \epsilon A - (\alpha \alpha - 2 \epsilon) B) P^2 + (2B - \alpha A) QQ - \frac{2B \epsilon^n}{\alpha}}{\alpha (BB - \alpha AB + \epsilon AA)}$$

d'où l'on conclut par l'élimination de  $\epsilon^n$  la valeur de  $X = \frac{(\epsilon A - \alpha B) P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \epsilon AA}$ ; expression qu'on auroit pû trouver

tout de suite en substituant dans la première valeur de  $X = \frac{(2A\epsilon - \alpha B) P^2 + (2B - \alpha A) PQ}{BB - \alpha AB + \epsilon AA} - A\epsilon^n$  la valeur de  $\epsilon^n =$

$$\frac{QQ - \alpha PQ + \epsilon PP}{BB - \alpha AB + \epsilon AA}$$

(ee) ART. 230. Les équations  $A + B + C = A, Ap + Bq + Cr = B$  &  $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = C$  donnent  $A = \frac{Aqr - B(q+r) + C}{(p-q)(p-r)}$ ;  $B = \frac{Apr - B(p+r) + C}{(q-p)(q-r)}$ ;  $C = \frac{Apq - B(p+q) + C}{(r-p)(r-q)}$ .

Par la même raison, les équations  $Ap^n + Bq^n + Cr^n = P$ ;  $Ap \cdot p^n + Bq \cdot q^n + Cr \cdot r^n = Q$ ;  $Ap^2 \cdot p^n + Bq^2 \cdot q^n + Cr^2 \cdot r^n = R$  donnent  $A p^n = \frac{Pqr - Q(q+r) + R}{(p-q)(p-r)}$ ;  $B q^n = \frac{Ppr - Q(p+r) + R}{(q-p)(q-r)}$ ;

$C r^n = \frac{Ppq - Q(p+q) + R}{(r-p)(r-q)}$ . Donc, en multipliant, on aura la proportion

$$(Pqr - Q(q+r) + R)(Ppr - Q(p+r) + R)(Ppq - Q(p+q) + R) : (Aqr - B(q+r) + C)(Apr - B(p+r) + C)(Apq - B(p+q) + C) ::$$

$p^n q^n r^n$  : 1. Effectuant les multiplications, réduisant, & se rappelant que  $p + q + r = a$ ,  $p q + p r + q r = c$  &  $p q r = \gamma$ , on arrivera au résultat indiqué.

### C H A P I T R E X I V.

(ff) ART. 234. Cherchons directement l'expression de  $\sin. n \zeta$ . Pour cela, je fais

$$\sin. n \zeta = x (A^{[n]} y^{n-1} - B^{[n]} y^{n-3} + C^{[n]} y^{n-5} - D^{[n]} y^{n-7} + E^{[n]} y^{n-9} - \&c).$$

La lettre  $n$ , mise entre deux crochets, indique la multiplicité de l'arc, auquel le coefficient, qu'elle affecte, appartient. En suivant la même notation, on aura

$$\begin{aligned} \sin. (n-1) \zeta &= x (A^{[n-1]} y^{n-2} - B^{[n-1]} y^{n-4} + C^{[n-1]} y^{n-6} - D^{[n-1]} y^{n-8} + E^{[n-1]} y^{n-10} - \&c) \\ \& \sin. (n-2) \zeta &= x (A^{[n-2]} y^{n-3} - B^{[n-2]} y^{n-5} + C^{[n-2]} y^{n-7} - D^{[n-2]} y^{n-9} + E^{[n-2]} y^{n-11} - \&c.) \end{aligned}$$

Or  $\sin. n \zeta = 2y \sin. (n-1) \zeta - \sin. (n-2) \zeta$ ; donc on aura cette seconde valeur,

$$\begin{aligned} \sin. n \zeta &= x (2A^{[n-1]} y^{n-1} - 2B^{[n-1]} y^{n-3} + 2C^{[n-1]} y^{n-5} - 2D^{[n-1]} y^{n-7} + 2E^{[n-1]} y^{n-9} - \&c) \\ &+ x ( \quad \quad \quad - A^{[n-2]} y^{n-3} + B^{[n-2]} y^{n-5} - C^{[n-2]} y^{n-7} + D^{[n-2]} y^{n-9} - \&c.) \end{aligned}$$

Comparant cette seconde valeur de  $\sin. n \zeta$  à la première, & égalant les coefficients des puissances semblables de  $y$ , on aura pour déterminer  $A^{[n]}$ ,  $B^{[n]}$ ,  $C^{[n]}$ ,  $D^{[n]}$ ,  $E^{[n]}$ , &c; les équations suivantes :

$$A^{[n]} = 2 A^{[n-1]}.$$

$$B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2 B^{[n-1]}.$$

$$C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2 C^{[n-1]}.$$

$$D^{[n]} = C^{[n-2]} + 2 D^{[n-1]}.$$

$$E^{[n]} = D^{[n-2]} + 2 E^{[n-1]}.$$

Or, par la même raison que  $A^{[n]} = 2 A^{[n-1]}$ ,  $A^{[n-1]} = 2 A^{[n-2]}$ , ainsi des autres. Donc  $A^{[n]} = 2 A^{[n-1]} = 2^2 A^{[n-2]} = 2^3 A^{[n-3]} = \dots$ , en général,  $2^x A^{[n-x]}$ . Mais si on suppose  $n - x = 1$ ,  $x = n - 1$ , &  $A^{[n-x]}$  devient  $A^{[1]} = 1$ ; donc  $A^{[n]} = 2^{n-1}$ .



L'équation  $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2B^{[n-1]}$ , à cause de  $B^{[n-1]} = A^{[n-3]} + 2B^{[n-2]}$ , donne  $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2B^{[n-1]} = A^{[n-2]} + 2A^{[n-3]} + 2^2B^{[n-2]}$ , en continuant de substituer,  $A^{[n-2]} + 2A^{[n-3]} + 2^2A^{[n-4]} + 2^3B^{[n-3]}$ , & en général,  $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2A^{[n-3]} + 2^2A^{[n-4]} + 2^3A^{[n-5]} + \dots + 2^x A^{[n-x-2]} + 2^{x+1}B^{[n-x-1]}$ .

Mais, si on fait  $n - x - 1 = 2$ , ou  $n - x - 2 = 1$ , alors  $B^{[n-x-1]} = B^{[2]} = 0$ , &  $A^{[1]} = 1$ , &  $x = n - 3$ . Donc  $B^{[n]} = (n - 2) 2^{n-3}$ . De même  $C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2B^{[n-3]} + 2^2B^{[n-4]} + \dots + 2^x B^{[n-x-2]} + 2^{x+1}C^{[n-x-1]}$ .

Faisant  $n - x - 1 = 4$  ou  $n - x - 2 = 3$ , ce qui donne  $x = n - 5$ , & observant que  $C^{[4]} = 0$  &  $B^{[3]} = 1$ , on aura  $C^{[n]} = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 4) 2^{n-5} = \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5}$ .  $D^{[n]} = C^{[n-2]} + 2C^{[n-3]} + 2^2C^{[n-4]} + \dots + 2^x C^{[n-x-2]} + 2^{x+1}D^{[n-x-1]}$  & en faisant  $n - x - 1 = 6$ , ou  $n - x - 2 = 5$ , ce qui donnera  $x = n - 7$ ; considérant de plus que  $D^{[6]} = 0$ , &  $C^{[5]} = 1 = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$ , on aura  $D^{[n]} = \left( \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(n-6)(n-5)}{1 \cdot 2} \right) 2^{n-7}$ .

Or le terme général de la suite  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots$  est  $t \cdot (t + 1) = t^2 + t$ . Donc  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-6)(n-5) = S. t^2 + S. t = \frac{t \cdot (t+1)(t+2)}{3}$ . Donc  $D^{[n]} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-7}$ .

$E^{[n]} = D^{[n-2]} + 2D^{[n-3]} + 2^2D^{[n-4]} + \dots + 2^x D^{[n-x-2]} + 2^{x+1}E^{[n-x-1]}$ . Soit  $n - x - 1 = 8$  ou  $n - x - 2 = 7$ , auquel cas  $x = n - 9$ ,  $E^{[8]} = 0$ , &  $D^{[7]} = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ , on aura

$$E^{[n]} = \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) 2^{n-9}$$

Mais le terme général de la suite  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-8)(n-7)(n-6) = t \cdot (t+1)(t+2)$  ou  $t^3 + 3t^2 + 2t$ . Donc cette suite =  $S \cdot t^3 + 3 \cdot S \cdot t^2 + 2S \cdot t$ . Or  $S \cdot t^3 = \frac{1}{4} t^2 (t^2 + 2t + 1)$ ;  $3 \cdot S \cdot t^2 = \frac{t \cdot (t+1)(2t+1)}{2}$ ;  $2S \cdot t = t \cdot (t+1)$ . Donc

$$E^{(1)} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9} \&c.$$

*Nota.* La détermination des lettres  $B^{[n]}$ ,  $C^{[n]}$ ,  $D^{[n]}$ ,  $E^{[n]}$ , &c. suppose, comme on vient de le voir, qu'on fait trouver en général la somme d'un nombre quelconque de termes dans une progression des puissances des nombres naturels. C'est ce qui est expliqué dans la plupart des Traités d'Algebre.

(gg) ART. 235. Dans la suite  $\sin \frac{s}{n}$ ,  $\sin \frac{\pi-s}{n}$ ,  $\sin \frac{2\pi+s}{n}$ ,  $\sin \frac{3\pi-s}{n}$  &c; il est à propos de distinguer les cas où  $n$  est un nombre impair ou un nombre pair. Si  $n$  est un nombre impair, il faudra prendre pour  $x$  alternativement les termes de cette suite, & si  $n$  est un nombre pair, il faudra, au contraire, prendre les termes consécutifs, jusqu'à ce qu'on en ait autant qu'il y a d'unités dans  $n$ . Il est d'abord évident que les mêmes sinus reviendront, & dans le même ordre, lorsqu'on sera arrivé à  $\sin \frac{2n\pi+s}{n}$ ; il y aura un nombre  $2n$  de sinus, qui précéderont celui-ci, & qui feront égaux deux à deux. Ce sont ceux dont les arcs ajoutés =  $\pi$  ou  $3\pi$ , lorsque  $n$  est un nombre impair. Par exemple, si  $n = 5$ , on aura  $\sin \frac{s}{5} = \sin \frac{5\pi-s}{5}$ ;  $\sin \frac{\pi-s}{5} = \sin \frac{4\pi+s}{5}$ ;  $\sin \frac{2\pi+s}{5} = \sin \frac{3\pi-s}{5}$ ;  $\sin \frac{6\pi+s}{5} = \sin \frac{9\pi-s}{5}$ ;  $\sin \frac{7\pi-s}{5} = \sin \frac{8\pi+s}{5}$ . Si  $n$  est un nombre pair, les  $n$  premiers termes seront égaux aux  $n$  derniers termes pris négativement;

négativement; par exemple si  $n = 6$ , on aura  $\sin. \frac{s}{6}$   
 $= -\sin. \frac{6\pi+s}{6}$ ;  $\sin. \frac{\pi-s}{6} = -\sin. \frac{7\pi-s}{6}$ ;  $\sin. \frac{2\pi+s}{6} = -$   
 $\sin. \frac{8\pi+s}{6}$ ;  $\sin. \frac{3\pi-s}{6} = -\sin. \frac{9\pi-s}{6}$ ;  $\sin. \frac{4\pi+s}{6} = -\sin.$   
 $\frac{10\pi+s}{6}$ ;  $\sin. \frac{5\pi-s}{6} = -\sin. \frac{11\pi-s}{6}$ . En général, les sinus,  
 qui sont égaux, aux signes près, appartiennent à des arcs  
 dont la différence est  $\pi$ .

(hh). ART. 236. Pour trouver directement la formule gé-  
 nérale  $\sin. n\zeta = n x - n \frac{(n-1)}{1, 2, 3} x^3 + \&c$ , on pourroit suivre  
 un procédé analogue à celui que nous avons employé pour  
 l'article 234. On trouveroit pour déterminer  $A^{[n]}$ ,  $B^{[n]}$ ,  $C^{[n]}$  &c,  
 les équations  $A^{[n]} = 2A^{[n-2]} - A^{[n-4]}$ ;  $B^{[n]} = 2B^{[n-2]} - B^{[n-4]} + 4A^{[n-2]}$ ;  
 $C^{[n]} = 2C^{[n-2]} - C^{[n-4]} + 4B^{[n-2]}$ ;  $D^{[n]} = \&c$ ; mais il sera  
 beaucoup plus simple de substituer dans la valeur de  $\sin. n\zeta$   
 donnée (art. 133) à la place de  $(\cos. \zeta)^{n-1}$ ,  $(\cos. \zeta)^{n-3}$ , &c;

leurs valeurs  $(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$ ,  $(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}$ , &c. développées en  
 séries; en désignant par  $a, b, c, d, e$  &c les coefficients  
 de  $x, x^3, x^5$ , &c, d'abord il sera facile de voir qu'ils  
 renferment successivement 1, 2, 3, 4, &c. termes. Soient  
 ces termes, pour le premier,  $A$ ; pour le second,  $B, B'$ ;  
 pour le troisième  $C, C', C''$ ; ainsi de suite; on aura

$$a = A$$

$$b = B + B'$$

$$c = C + C' + C''$$

$$d = D + D' + D'' + D'''$$

$$e = E + E' + E'' + E''' + E''''$$

$$f = \&c.$$

Ces équations sont les mêmes, que les suivantes, qui sont  
 connoître la loi, suivant laquelle les coefficients  $a, b, c$ , &c,  
 dépendent les uns des autres.

$$a = A$$

$$b = \frac{n-1}{2} \cdot A + B'$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} B + \frac{n-3}{2} \cdot B' + C''$$

$$d = \frac{1}{3} \cdot \frac{n-5}{2} \cdot C + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-5}{2} C' + \frac{n-5}{2} C'' + D'''$$

$$e = \frac{1}{4} \cdot \frac{n-7}{2} D + \frac{1}{3} \cdot \frac{n-7}{2} D' + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-7}{2} D'' + \frac{n-7}{2} D''' + E''''$$

$$f = \frac{1}{5} \cdot \frac{n-9}{2} E + \frac{1}{4} \cdot \frac{n-9}{2} E' + \frac{1}{3} \cdot \frac{n-9}{2} E'' + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-9}{2} E''' + \frac{n-9}{2} E'''' + F'''''$$

&c.

Si on fait attention que  $A = n$ ,  $B' = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ,  $C'' = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$  &c, on trouvera sans peine en faisant le calcul,

$$a = n$$

$$b = \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$c = \frac{n \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$d = \frac{n \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 9)(n^2 - 25)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7}$$

$$e = \frac{n \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 9)(n^2 - 25)(n^2 - 49)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9}$$

&c.

Il est inutile, sans doute, d'observer, que les valeurs de  $b, d, f$ , &c, c'est-à-dire, les coefficients de rang pair, doivent être pris négativement.

(ii) ART. 238. La formule générale  $\sin. n\zeta = (n x - \frac{n \cdot (n^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \pm 2^{n-1} x^{n-1}) \sqrt{1-x^2}$  peut aussi se déduire de la formule donnée (Art. 133). Il ne s'agira que de développer les puissances fractionnaires  $(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}$ ,  $(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}$ ,  $(1-x^2)^{\frac{n-6}{2}}$ , &c; de substituer leurs valeurs

& de multiplier ensuite le tout par  $\sqrt{1-xx}$ . En désignant, comme dans la note précédente, les coefficients de  $x, x^3, x^5, \&c$  par  $a, b, c, d, \&c$ , & les termes dont ils sont composés par  $A, B + B', C + C' + C'', \&c$ ; on aura

$$a = A$$

$$b = \frac{n-2}{2} A + B'$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-4}{2} B + \frac{n-4}{2} B' + C''$$

$$d = \frac{1}{3} \cdot \frac{n-6}{2} C + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-6}{2} C' + \frac{n-6}{2} C'' + D'''$$

&c.

On trouvera, comme ci-dessus,

$$a = n$$

$$b = \frac{n \cdot (n^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$c = \frac{n \cdot (n^2 - 4) \cdot (n^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$d = \frac{n \cdot (n^2 - 4) \cdot (n^2 - 16) \cdot (n^2 - 36)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$e = \&c.$$

Même remarque, qu'auparavant, pour les signes de  $b, d, f, \&c$ , ou des coefficients de rang pair.

(kk) ART. 243. Pour trouver la valeur générale de  $\text{coef. } n \zeta$ , on pourra s'y prendre de la même manière que dans l'art. 234.

En conséquence, soit

$$\text{coef. } n \zeta = A^{[n]} y^n - B^{[n]} y^{n-2} + C^{[n]} y^{n-4} - D^{[n]} y^{n-6} + E^{[n]} y^{n-8} - \&c; \text{ à cause de } \text{coef. } n \zeta = 2 y \text{coef. } (n-1) \zeta - \text{coef. } (n-2) \zeta, \text{ on aura aussi}$$

$$\text{coef. } n \zeta = 2 A^{[n-1]} y^n - 2 B^{[n-1]} y^{n-2} + 2 C^{[n-1]} y^{n-4} - 2 D^{[n-1]} y^{n-6} + 2 E^{[n-1]} y^{n-8} - \&c.$$

$$- A^{[n-2]} y^{n-2} + B^{[n-2]} y^{n-4} - C^{[n-2]} y^{n-6} + D^{[n-2]} y^{n-8} - \&c.$$

Egalant les coefficients des puissances semblables de  $y$  dans les deux valeurs de  $\text{coef. } n \zeta$ , on aura pour déterminer  $A^{[n]}, B^{[n]}, C^{[n]}, D^{[n]}, \&c$ .

$$A^{[n]} = 2 A^{[n-1]}$$

$$B^{[n]} = A^{[n-1]} + 2 B^{[n-1]}$$

$$C^{[n]} = B^{[n-1]} + 2 C^{[n-1]}$$

$$D^{[n]} = C^{[n-1]} + 2 D^{[n-1]}$$

$$E^{[n]} = \&c.$$

La première équation  $A^{[n]} = 2 A^{[n-1]}$  donne aussi  $A^{[n]} = 2^2 A^{[n-2]} = 2^3 A^{[n-3]}$ , &c en général  $A^{[n]} = 2^x A^{[n-x]}$ . Or si  $n - x = 1$ ,  $A^{[1]} = 1$ , &c  $x = n - 1$ . Donc  $A^{[n]} = 2^{n-1}$ .

L'équation  $B^{[n]} = A^{[n-1]} + 2 B^{[n-1]}$  se change en  $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2 A^{[n-3]} + 2^2 A^{[n-4]} + \dots + 2^x A^{[n-x-2]} + 2^{x+1} B^{[n-x-1]}$ . Si on fait  $n - x - 1 = 2$ , ou  $n - x - 2 = 1$ , ce qui donne  $x = n - 3$ ,  $A^{[1]} = 1$  &c  $2^{x+1} B^{[n-x-1]} = 2^{n-2} B^{[2]} = 2^{n-2} \times 1 = 2^{n-2} \cdot 2$ ; on aura  $B^{[n]} = 2^{n-3} (2 + n - 2) = n \cdot 2^{n-3}$ . De même,  $C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2 B^{[n-3]} + 2^2 B^{[n-4]} + \dots + 2^x B^{[n-x-2]} + 2^{x+1} C^{[n-x-1]}$ . Or si on fait  $n - x - 1 = 4$ , ou  $n - x - 2 = 3$ , on aura  $x = n - 5$ ,  $2^x B^{[n-x-2]} = 2^{n-5} \cdot 3$  &c  $2^{x+1} C^{[n-x-1]} = 2^{n-4} \times 1 = 2^{n-5} \times 2$ . Donc  $C^{[n]} = (2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n - 2) 2^{n-5} = \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-5}$ .  $D^{[n]} = C^{[n-1]} + 2 C^{[n-2]} + 2^2 C^{[n-3]} + \dots + 2^x C^{[n-x-1]} + 2^{x+1} D^{[n-x-1]}$ . Soit  $n - x - 1 = 6$ , ou  $n - x - 2 = 5$ ; ce qui donne  $x = n - 7$ , on aura pour  $C^{[n-x-2]}$  ou  $C^{[5]} = \frac{2 \cdot 5}{2}$  &c pour  $D^{[6]} = 1$ ; par conséquent  $2^{x+1} D^{[n-x-1]} = 2^{n-6} \times 1 = 2^{n-7} \times 2 = 2^{n-7} \cdot \frac{1 \cdot 4}{2}$ . Donc  $D^{[n]} = \left( \frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{(n-5)(n-2)}{2} \right) 2^{n-7}$ . Or le terme général de la série  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \&c. = t \cdot (t + 3) = t^2 + 3t$  &c  $S \cdot t^2 = t \cdot \frac{(t+1)(2t+1)}{2 \cdot 3}$  &c  $3 \cdot S \cdot t = 3 \cdot t \cdot \frac{t+1}{2}$ . Donc  $S \cdot t^2 + 3 \cdot S \cdot t = t \cdot \frac{(t+1)(t+5)}{3}$ . Donc  $D^{[n]} = n \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ . On aura encore

$$E^{[n]} = D^{[n-1]} + 2D^{[n-2]} + 2^2 D^{[n-3]} + \dots + 2^x D^{[1-x+2]} + 2^{x+1} E^{[1-x+1]}.$$

Soit  $n - x - 1 = 8$ , ou  $n - x - 2 = 7$ , ce qui donne  $x =$

$$n - 9, 2^x D^{[n-x+2]} = 2^{n-9} D^{[7]} = 2^{n-9} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \& 2^{x+1} E^{[8]} = 2^{n-8} \times 1 =$$

$$2^{n-9} \times 2 = 2^{n-9} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \text{ on aura}$$

$$E^{[n]} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{(n-7)(n-6)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \text{ Or le}$$

terme général de la suite  $1 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + \dots$ ,

est  $t \cdot (t+1)(t+5) = t^3 + 6t^2 + 5t$ . D'ailleurs  $S \cdot t^3 =$

$$\frac{1}{4} t^2 (t+1)^2; 6 \cdot S \cdot t^2 = t(t+1)(2t+1); \& 5 \cdot S \cdot t =$$

$$5 \cdot t \cdot \frac{t+1}{2}. \text{ Donc } S \cdot t^3 + 6S \cdot t^2 + 5S \cdot t = t \cdot \frac{t+1}{4} \cdot (t+2)(t+7).$$

Donc

$$E^{[n]} = \frac{n \cdot (n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9}$$

&c.

(II) ART. 262. Pour faire voir que cette loi est générale,

j'observe qu'on a  $2V - 1 \sin. \zeta = e^{\zeta V - 1} - e^{-\zeta V - 1}$  &  $(2V - 1)^n$

$$(\sin \zeta)^n = (e^{\zeta V - 1} - e^{-\zeta V - 1})^n = e^{n \zeta V - 1} - n \cdot e^{(n-2) \zeta V - 1}$$

$$+ \frac{n \cdot (n-1)}{2} e^{(n-4) \zeta V - 1} - \dots - n e^{(-n+2) \zeta V - 1} \pm e^{-n \zeta V - 1},$$

suivant que  $n$  est pair ou impair. On fait par la formation du

binôme de Newton que lorsque  $n$  est un nombre impair tel

que  $2m + 1$ , le nombre des termes est pair, & de plus que

les termes extrêmes, & les termes à égale distance des ex-

trêmes ont des coefficients numériquement égaux. Or la somme

de deux de ces termes, abstraction faite de leurs coefficients,

étant divisée par  $2V - 1$ , est l'expression du sinus d'un arc

multiple déterminé par l'exposant de  $e$ . Donc on aura, pour

le cas où  $n$  est un nombre impair,

$$\pm 2^{n-1} (\sin. \zeta)^n = \sin. n\zeta - n \sin. (n-2)\zeta + n \cdot \frac{n-1}{2} \sin. (n-4)\zeta - \dots$$

$$\pm k \sin. \zeta, k \text{ exprimant chacun des coefficients des termes}$$

moyens de la suite; prenant d'ailleurs le signe + lorsque dans la valeur de  $n = 2m + 1$ ,  $m$  est un nombre pair, & le signe — lorsque  $m$  est impair.

Lorsque  $n$  est un nombre pair, le nombre des termes est impair, & alors on a

$$\pm 2^{n-1} (\sin. \zeta)^n = \text{cof. } n \zeta - n. \text{cof. } (n-2) \zeta + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \text{cof. } (n-4) \zeta - \dots \\ \pm \frac{k}{2}; \text{ parce que dans ce cas les termes extrêmes, \& ceux qui} \\ \text{sont à égale distance des extrêmes, ont des coefficients égaux} \\ \text{avec le même signe, ce qui donne, en divisant leur somme} \\ \text{par 2, des expressions de cosinus, \& } \frac{k}{2} \text{ pour le terme moyen.}$$

On trouvera d'une manière semblable l'expression générale des puissances des cosinus, en développant la puissance  $(e^{i\sqrt{-1}} + e^{-i\sqrt{-1}})^n = (2 \text{cof. } \zeta)^n$ , & en faisant les mêmes observations qu'à l'égard des sinus.

### C H A P I T R E X V.

(*mm*). ART. 279. La somme de toutes ces séries réunies, excepté la première, ne peut faire qu'une quantité assez petite. En effet, il est évident qu'elle est sensiblement moindre que la somme de ces suites :

$$1 \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \&c \right) \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \&c \right) \\ + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \&c \right) \\ + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2^4} + \&c \right) \\ + \&c.$$

Or la somme de ces dernières séries =  $lN$  (art. 278) =  $l \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c. \right)$  & cette dernière série  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c = \frac{\pi^2}{6}$ , dont le logarithme =  $2 l \pi - l 6$  est une quantité assez peu considérable.



(nn) ART. 282. Quand on a les sommes des puissances un peu considérables, on peut employer, pour trouver les sommes des puissances moins élevées, les formules précédentes, (art. 278), savoir :

$$LM - \frac{1}{2} LN = S + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \&c \right) \\ + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2^{5n}} + \frac{1}{3^{5n}} + \frac{1}{5^{5n}} + \frac{1}{7^{5n}} + \&c \right) \\ + \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2^{7n}} + \frac{1}{3^{7n}} + \frac{1}{5^{7n}} + \frac{1}{7^{7n}} + \&c \right) \\ + \&c.$$

$$\text{ou } LM = S + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c \right) \\ + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \&c \right) \\ + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \&c \right) \\ + \&c.$$

### CHAPITRE XVI.

(oo) ART. 320. La fraction  $\frac{1}{(1-x)^3}$  donne la suite des nombres triangulaires & la fraction  $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$  donne la troisième suite verticale de la table; or, en supposant  $\frac{X}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)^3}$  on trouvera  $X = (1+x)(1+x+x^2)$ . Donc on devra multiplier d'abord la suite que donne  $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ , savoir  $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 10x^8 + \&c$  par  $1 + x + x^2$ ; ce qui donnera une nouvelle série, dans laquelle le coefficient de chaque puissance de  $x$  sera évidemment la somme du coefficient de la même puissance de  $x$  dans la première série & des coefficients des deux termes précédents, ou  $1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 9x^4 + 12x^5 + 16x^6 + \&c$ ; ensuite

il faudra multiplier cette dernière série par  $1+x$ , ce qui donnera pour le coefficient de chacune des puissances de  $x$  de la série résultante, la somme des coefficients du terme correspondant & de celui qui précède.

On peut faire un raisonnement analogue pour les autres nombres figurés; ce qui fait connoître la connexion de ceux-ci avec ceux de la Table.

(pp) ART. 323. On a (art. 306)  $Z = (1+xz)(1+x^2z)$   
 $(1+x^3z) \times (1+x^4z)(1+x^5z) \times \&c. = 1 + Pz + Qz^2$   
 $+ Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \&c.$ , & par conséquent en faisant  
 $z = -1, (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \times \&c.$   
 $= 1 - P + Q - R + S - T + \&c.$  Mais (art. 307)  $P =$   
 $\frac{x}{1-x}; Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}; R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}; S =$   
 $\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}; T = \&c.$  Donc  $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \times \&c.$   
 $= 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$   
 $- \&c.$  Or la nature du premier membre de cette équation

fait voir clairement que le second, qui se présente sous la forme de plusieurs fonctions fractionnaires, doit se convertir en une fonction entière. Voici un moyen assez simple d'arriver au but, & dont l'idée m'a été donnée par le C. Legendre. J'écris le second membre de l'équation ci-dessus

$$\text{sous cette forme } 1 - \frac{-x+x^2}{1-x} - \frac{-x^2(1-x^2)+x^3-x^4}{(1-x)(1-x^2)} +$$

$$\frac{x^5(1-x^3)-x^6+x^7}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{-x^8(1-x^4)+x^{10}-x^{11}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \frac{x^{12}(1-x^5)-x^{15}+x^{16}}{(1-x)\dots(1-x^5)} - \&c.$$

En faisant les divisions, les deux termes, qui ont pour diviseurs, l'un  $1-x$ , & l'autre  $(1-x)(1-x^2)$ , perdent leur forme fractionnaire & deviennent les deux entiers  $-x-x^2$ ; de plus, le premier & le dernier facteur des dénominateurs des fractions, qui restent, disparaissent, & la quantité devient

$$1 - x - x^2 + \frac{x^3}{1-x^2} - \frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{x^{20}}{(1-x^2)\dots(1-x^5)} + \frac{x^{27}}{(1-x^3)\dots(1-x^9)} - \&c. \text{ Je transforme} \\
 \text{de même la suite} & \frac{x^5}{1-x^2} - \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)} + \&c. \text{ en } \frac{x^5-x^7}{1-x^2} + \\
 & \frac{x^7(1-x^2)-x^9+x^{12}}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{x^{12}(1-x^3)+x^{14}-x^{18}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \frac{x^{18}(1-x^5)-x^{20}+x^{25}}{(1-x^2)\dots(1-x^5)} \\
 & - \&c, \text{ ou en } x^5 + x^7 - \frac{x^{12}}{1-x^2} + \frac{x^{18}}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{x^{25}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \&c.
 \end{aligned}$$

En suivant un procédé semblable, on obtiendra à chaque fois deux nombres entiers de plus, qui ont l'un & l'autre un même signe, mais différent de celui des deux termes précédents, & les facteurs extrêmes des dénominateurs des fractions restantes continueront à disparaître.

Cela posé j'écris, comme on le voit ici, les suites que fournissent les exposans de  $x$ , en commençant par l'exposant de  $x$  du dernier entier, que donne chaque réduction successive,

0,	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	&c
	2,	5,	9,	14,	20,	27,	35,		&c
		7,	12,	18,	25,	33,	42,		&c
			15,	22,	30,	39,	49,		&c
				26,	35,	45,	56,		&c
					40,	51,	63,		&c
						57,	70,		&c
							77,		&c.

Si on vouloit continuer cette Table, on remarquera que chacune des suites a un terme de moins que la précédente, & que chacune des colonnes verticales forme une progression arithmétique, dont les différences sont successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. D'ailleurs, d'après les opérations précédentes & la formation de ces différentes suites, il est évident qu'il n'y a que les deux premiers termes de chacune, qui fassent partie des exposans de  $x$  dans la série

cherchée. J'écris maintenant la suite naturelle des nombres, en commençant par 0, & à côté le terme général  $n$ ; je place au-dessous les séries précédentes dans l'ordre qui suit, avec le terme général de chacune,  $n$  représentant toujours le nombre correspondant de la première suite.

$$\begin{array}{r}
 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \&c. \dots n \\
 \\
 0, 1, \overbrace{3, 6, 10, 15, 21}, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} \\
 2, 5, 9, 14, 20, 27, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} + n \\
 7, 12, 18, 25, 33, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} + 2n \\
 15, 22, 30, 39, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} + 3n \\
 26, 35, 45, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} + 4n \\
 40, 51, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} + 5n \\
 57, \&c. n \cdot \frac{n+1}{2} + 6n \\
 \&c.
 \end{array}$$

D'où il suit que le premier terme de chaque suite fera représenté par  $n \cdot \frac{n+1}{2} + n^2 = \frac{3nn+n}{2}$ ; & comme le second terme de la suite précédente doit faire partie des exposants de  $x$ , & qu'il est représenté par  $n \cdot \frac{n+1}{2} + (n-1)n = \frac{3n^2-n}{2}$ , il est clair qu'il n'y aura d'autres puissances de  $x$ , que celles qui sont renfermées dans la formule  $\frac{3nn \pm n}{2}$ .

A présent qu'on a un moyen facile & infailible de trouver les termes de la série, qui résulte de la multiplication du nombre infini de facteurs  $1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3, \&c.$ , & qu'on est assuré, qu'elle n'admet pour exposants de  $x$  que ceux qui sont renfermés dans la formule  $\frac{3nn \pm n}{2}$ ; je ne

puis m'empêcher de m'arrêter un moment sur une question traitée ailleurs par Euler, & faite pour piquer la curiosité. Je veux parler de la maniere de trouver la somme des diviseurs des nombres; on fera étonné de voir combien la solution de ce problème est étroitement liée à ce qui précède. Reprenons en conséquence l'équation

$$P = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \times \&c. = \\ 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.$$

Soit  $P'$  ce que devient chacune de ces expressions en augmentant  $x$  d'une quantité quelconque  $y$ , la premiere valeur de  $P$  deviendra

$$P' = (1-[x+y])(1-[x+y]^2)(1-[x+y]^3)(1-[x+y]^4)(1-[x+y]^5) \times \&c., \\ \& \text{ la seconde valeur de } P \text{ deviendra}$$

$$P' = 1 - (x+y) - (x+y)^2 + (x+y)^5 + (x+y)^7 - (x+y)^{12} - (x+y)^{15} + \&c.$$

Nous aurons d'abord, en prenant les logarithmes des premieres valeurs de  $P$  & de  $P'$ , les deux équations suivantes:

$$lP = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \&c.$$

$$lP' = l(1-x-y) + l(1-x^2-2xy) + l(1-x^3-3x^2y) + l(1-x^4-4x^3y) + \&c.$$

Je néglige les puissances de  $y$  supérieures à la premiere, parce que dans la supposition que nous ferons de  $y = 0$ , elles donneroient des quantités nulles. En retranchant la seconde équation de la premiere, j'aurai

$$l \cdot \frac{P'}{P} = l\left(1 - \frac{y}{1-x}\right) + l\left(1 - \frac{2yx}{1-x^2}\right) + l\left(1 - \frac{3y x^2}{1-x^3}\right) + l\left(1 - \frac{4y x^3}{1-x^4}\right) + \&c;$$

$$l \frac{P'}{P} = \text{ou} \\ = -\frac{y}{1-x} - \frac{2yx}{1-x^2} - \frac{3yx^2}{1-x^3} - \frac{4yx^3}{1-x^4} - \frac{5yx^4}{1-x^5} - \&c.$$

Multipliant chaque membre par  $\frac{x}{y}$ , supposant  $y = 0$ , & désignant par  $t$  le résultat, nous aurons pour premiere valeur de  $-t$ ,

$$-t = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \&c. \\ \text{2 Y ij}$$

Nous aurons ensuite, en divisant la seconde valeur de  $P'$  par la seconde de  $P$ , & négligeant, comme auparavant & par la même raison, les termes, qui seroient affectés de  $y^2, y^3, \&c.$ , le quotient . . . . .

$$\frac{P'}{P} = 1 - \frac{y - 2yx + 5yx^2 + 7yx^3 - 12yx^{11} - 15yx^{14} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \&c.}$$

& en prenant les logarithmes de part & d'autre,

$$l. \frac{P'}{P} = \frac{-y - 2yx + 5yx^2 + 7yx^3 - 12yx^{11} - 15yx^{14} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

Multipliant comme auparavant les deux membres par  $\frac{x}{y}$ , & faisant  $y = 0$ , nous aurons cette autre valeur de  $-t$ ,

$$-t = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}}$$

La première valeur de  $-t$  donne, en développant en séries chaque terme,

$$\begin{aligned} -t = & x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \&c. \\ & + 2 \quad + 2 \quad + 2 \quad + 2 \quad + 2 \\ & + 3 \quad + 3 \quad + 3 \\ & + 4 \quad + 4 \\ & + 5 \quad + 5 \\ & + 6 \quad + 6 \\ & + 7 \quad + 7 \\ & + 8 \quad + 8 \\ & + 9 \quad + 9 \\ & + 10 \quad + 10 \end{aligned}$$

expression, dans laquelle il est manifeste que le coefficient de chaque puissance de  $x$  est la somme des diviseurs de l'exposant correspondant; donc, si nous désignons par  $f_n$  la somme des diviseurs du nombre  $n$ , cette dernière expression se changera en celle-ci:

$$-t = xf_1 + x^2f_2 + x^3f_3 + x^4f_4 + x^5f_5 + x^6f_6 + x^7f_7 + x^8f_8 + \&c.$$

Comparant cette dernière valeur de  $t$  avec celle trouvée en

$$\text{second lieu } t = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \&c.}$$

& faisant disparaître le dénominateur, nous aurons

$$\begin{aligned} x^5 f_1 + x^2 f_2 + x^3 f_3 + x^4 f_4 + x^5 f_5 + x^6 f_6 + x^7 f_7 + x^8 f_8 + x^9 f_9 + x^{10} f_{10} + \&c. \\ - f_1 - f_2 - f_3 - f_4 - f_5 - f_6 - f_7 - f_8 - f_9 - \&c \\ - f_1 - f_2 - f_3 - f_4 - f_5 - f_6 - f_7 - f_8 - \&c \\ + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \&c \\ + f_1 + f_2 + f_3 + \&c \\ = x + 2x^2 \quad - 5x^5 \quad - 7x^7 \end{aligned}$$

ce qui donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 = 1, f_2 = f_1 + 2, f_3 = f_2 + f_1, f_4 = f_3 + f_2, f_5 = f_4 + f_3 \\ - 5, f_6 = f_5 + f_4 - f_1, f_7 = f_6 + f_5 - f_2 - 7, f_8 = f_7 + f_6 \\ - f_3 - f_1, f_9 = f_8 + f_7 - f_4 - f_2, f_{10} = f_9 + f_8 - f_5 - f_3, \\ f_{11} = f_{10} + f_9 - f_6 - f_4, f_{12} = f_{11} + f_{10} - f_7 - f_5 + 12 \&c. \end{aligned}$$

lesquelles reviennent évidemment à celles-ci :

$$\begin{array}{l|l} f_1 = 1 & f_7 = f(7-1) + f(7-2) - f(7-5) - 7 \\ f_2 = f(2-1) + 2 & f_8 = f(8-1) + f(8-2) - f(8-5) - f(8-7) \\ f_3 = f(3-1) + f(3-2) & f_9 = f(9-1) + f(9-2) - f(9-5) - f(9-7) \\ f_4 = f(4-1) + f(4-2) & f_{10} = f(10-1) + f(10-2) - f(10-5) - f(10-7) \\ f_5 = f(5-1) + f(5-2) - 5 & f_{11} = f(11-1) + f(11-2) - f(11-5) - f(11-7) \\ f_6 = f(6-1) + f(6-2) - f(6-5) & f_{12} = f(12-1) + f(12-2) - f(12-5) - f(12-7) + 12 \end{array}$$

&c.

Il est clair que les nombres à soustraire continuellement du nombre proposé, & des diviseurs duquel on cherche la somme, forment la suite 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, &c, la même que celle des exposants de  $x$  dans la série, qui exprime la valeur du produit de  $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^5)$  &c. Donc on a, en général,

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) - f(n-5) - f(n-7) + f(n-12) + f(n-15) - f(n-22) - \&c$$

en prolongeant la série, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre négatif sous le signe  $f$ , & ayant l'attention de prendre pour  $f(n - n)$ , lorsqu'on arrive à un résultat de cette forme, le nombre même  $n$ .

### C H A P I T R E X V I I.

(*qq*) ART. 338. Les fractions  $\frac{Q}{P}$  sont alternativement plus grandes & plus petites que la vraie racine. En effet  $\frac{Q}{P} = \frac{A p^{n+1} + B q^{n+1}}{A p^n + B q^n} = p - \frac{B q^n (p - q)}{A p^n + B q^n}$ . Or dans cet exemple  $q$  est négatif, & par conséquent  $\frac{B q^n (p - q)}{A p^n + B q^n}$  est alternativement positif & négatif.

Donc &c.

(*rr*) ART. 339. Puisque dans ce cas-ci  $\frac{Q}{P} = \frac{A p^{n+1} + B q^{n+1} + C r^{n+1}}{A p^n + B q^n + C r^n}$ , il est clair que si  $n + 1$  est un nombre pair, la puissance  $q^{n+1}$  est de même signe que  $p^{n+1}$ , & qu'elle est de signe différent, si  $n + 1$  est un nombre impair; circonstance, qui contribue manifestement à rendre plus lente l'approximation de la plus grande racine qu'on cherche.

(*ss*) ART. 342. Dans l'exemple cité on a  $\frac{Q}{P} = \frac{A p^{n+1} + B (-p)^{n+1} + C q^{n+1}}{A p^n + B (-p)^n + C q^n}$ , quantité, qui lorsque  $C q^{n+1}$  disparoit devant les autres termes  $A p^{n+1}$  &  $B (-p)^{n+1}$ , prend la forme  $\frac{(A \pm B) p^{n+1}}{(A \mp B) p^n}$ , & qui par conséquent ne peut donner  $p$ ; mais si on prend  $\frac{R}{P}$ , on aura  $\frac{A p^{n+2} + B (-p)^{n+2} + C q^{n+2}}{A p^n + B (-p)^n + C q^n}$ , expression qui devient de la forme  $\frac{(A \pm B) p^{n+2}}{(A \pm B) p^n} = p^2$ .

(*tt*) ART. 346. A cause de  $\frac{Q}{P} = \frac{(n+2)A p^{n+1} + B p^{n+1} + C q^{n+1} + \&c}{(n+1)A p^n + B p^n + C q^n + \&c}$ ,



il ne faut qu'une légère attention pour voir que les coefficients  $n + 2$ ,  $n + 1$ , empêcheront que cette quantité ne se réduise sitôt à  $p$ .

(*uu*) ART. 349. Il est bien clair que pour que les racines imaginaires n'empêchent pas de trouver la plus grande racine  $q$ , il faut que  $p$  soit  $< q$ ; mais dans le facteur trinôme  $1 - 2p\zeta \cos\varphi + p^2\zeta^2$ , qui ne peut provenir que du produit de deux facteurs simples de la forme  $1 - (a + \epsilon\sqrt{-1})\zeta$  &  $1 - (a - \epsilon\sqrt{-1})\zeta$ ,  $p^2$  est le produit des deux imaginaires  $a + \epsilon\sqrt{-1}$ , &  $a - \epsilon\sqrt{-1}$ ; donc  $q^2$  doit être plus grand que le produit des deux racines imaginaires, qui composent un facteur réel.

### CHAPITRE XVIII.

(*vv*) ART. 362. Il n'est pas généralement vrai que chaque fraction approche plus près de la véritable valeur de  $x$  qu'aucune des précédentes. L'exemple le plus simple peut en convaincre. Soit  $x = a + \frac{a}{b + \frac{a}{c}} = \frac{abc + a^2 + ac}{bc + a}$ , la première va-

leur approchée de  $x = a$ , la seconde  $= \frac{ab+a}{b}$ . La différence de  $\frac{abc + a^2 + ac}{bc + a}$  à  $a = \frac{ac}{bc + a}$ , & la différence de  $\frac{ab+a}{b}$  à  $\frac{abc + a^2 + ac}{bc + a} = \frac{a^2}{b(bc + a)}$ . Or il est possible que  $\frac{ac}{bc + a}$  soit  $< \frac{a^2}{b(bc + a)}$ ; il suffit pour cela que  $c$  soit  $< \frac{a}{b}$  ou  $\epsilon > bc$ ; mais cet inconvénient n'aura plus lieu, si les numérateurs  $a$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , &c, sont tous égaux à l'unité.

Reprenons l'équation  $x = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \&c.$  & supposons

$$b' = b + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \&c, \quad c' = c + \frac{1}{d} + \frac{1}{c} + \&c, \quad d' = d + \frac{1}{c} + \frac{1}{f} + \&c, \\ e' = e + \frac{1}{f} + \&c; \quad f' = f + \frac{1}{g} + \&c;$$

on aura pour les

valeurs approchées de $x$	valeurs vraies de $x$
$x = a$	$x = \frac{ab'+1}{b'}$
$x = \frac{ab+1}{b}$	$x = \frac{abc'+a+c'}{bc'+1}$
$x = \frac{abc+a+c}{bc+1}$	$x = \frac{abc'd'+ab+ad'+cd'+1}{bc'd'+b+d'}$
$x = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$	$x = \&c.$
$x = \&c.$	$x = \&c.$

ou bien en faisant

$A = a$	$A' = 1$
$B = bA + 1$	$B' = b$
$C = cB + A$	$C' = cB' + A'$
$D = dC + B$	$D' = dC' + B'$
$E = eD + C$	$E' = eD' + C'$
$\&c.$	$\&c.$

les valeurs approchées & successives de  $x$  seront  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ ,  $\frac{C}{C'}$ ,  $\frac{D}{D'}$ ,  $\frac{E}{E'}$ , &c, & les vraies valeurs seront  $x = \frac{A'+1}{A'}$ ;  $x = \frac{Bc'+A}{B'c'+A'}$ ;  $x = \frac{Cd'+B}{C'd'+B'}$ ;  $x = \frac{De'+C}{D'e'+C'}$ ;  $x = \&c$ ; & si on considère, qu'en multipliant en croix les termes des fractions voisines dans la suite  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ ,  $\frac{C}{C'}$ , &c, on a en général  $BA' - AB' = 1$ ,  $CB' - BC' = -1$ ,  $DC' - CD' = 1$ ,  $ED' - DE' = -1$ , &c, les vraies valeurs de  $x$  deviendront  $x = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'b'}$ ;  $x = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c'+A')}$ ;  $x = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd'+B')}$ ;  $x = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e'+C')}$ ;  $x = \&c.$  Donc les valeurs approchées  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ ,  $\frac{C}{C'}$ ,  $\frac{D}{D'}$ , &c, sont successivement plus petites & plus grandes que  $x$ .

Cela

Cela posé, comme  $b' > b$ ,  $c' > c$ ,  $d' > d$ , &c. on aura  $b' > B'$ ,  $B'c' + A' > B'c + A'$  ou  $> C'$ ;  $C'd' + B' > C'd + B'$  ou  $> D'$ ; &c. De même, comme  $b' < b + 1$ ,  $c' < c + 1$ ,  $d' < d + 1$ , &c; on aura  $b' < B' + A'$ ;  $B'c' + A' < B'(c + 1) + A' < C' + B'$ ;  $C'd' + B' < C'(d + 1) + B' < C' + D'$ ; &c. Donc en prenant  $\frac{A'}{A'}$  pour  $x$ , l'erreur est  $> \frac{1}{A'(B' + A')}$ , & prenant  $\frac{B'}{B'}$ , l'erreur est  $< \frac{1}{B'C'}$  ou  $< \frac{1}{B'(B'c + A')}$ . Or  $B' =$  ou  $> A'$ , &  $B'c + A' > B' + A'$ ; donc  $\frac{B'}{B'}$  approche plus de la vraie valeur de  $x$ , que  $\frac{A'}{A'}$ . De même l'erreur en prenant  $\frac{B'}{B'}$  est  $> \frac{1}{B'(C' + B')}$ , & en prenant  $\frac{C'}{C'}$ , l'erreur est  $< \frac{1}{C'D'}$  ou  $< \frac{1}{C'(C'd + B')}$ ; or  $C' > B'$ , &  $C'd + B' > C' + B'$ ; donc  $\frac{C'}{C'}$  approche plus de la vraie valeur que  $\frac{B'}{B'}$ . On fera un raisonnement semblable pour les autres expressions. Donc chaque fraction successive approche plus de la vraie valeur de  $x$  qu'aucune des précédentes.

De plus, la différence entre deux fractions voisines est la plus petite possible, de sorte qu'il ne peut tomber entre ces deux fractions une autre fraction plus petite, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand. En effet, supposons qu'il existe une fraction  $\frac{m}{n}$  dont la valeur tombe entre celles de  $\frac{D}{D'}$  & de  $\frac{E}{E'}$ , par exemple, dont la différence est  $\frac{1}{D'E'}$ ; on auroit la différence entre  $\frac{m}{n}$  &  $\frac{D}{D'}$ , savoir  $\frac{mD' - nD}{nD'}$  ou  $\frac{nD - mD'}{nD'}$  plus petite que  $\frac{1}{D'E'}$ ; mais la première ne peut être plus petite que  $\frac{1}{nD'}$ , quantité plus grande que  $\frac{1}{D'E'}$ , si  $n$  est plus petite que  $E'$ . De même la différence entre  $\frac{m}{n}$  &  $\frac{E}{E'}$  ne peut être plus petite que  $\frac{1}{nE'}$ , quantité encore plus grande que  $\frac{1}{D'E'}$ .

EULER, *Introduction à l'Anal. infn.* Tome I. 2 Z

si  $n$  est plus petite que  $D'$ . Donc toute fraction, dont la valeur tombe entre deux fractions voisines de la série  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$  &c aura nécessairement un dénominateur plus grand. Or, la vraie valeur de  $x$  tombe toujours entre deux fractions consécutives de cette série. Donc il est impossible d'avoir une valeur plus approchée de  $x$ , que celle qu'on trouvera de cette manière, à moins que la fraction n'ait un dénominateur plus grand.

Ceux qui voudront avoir plus de détails sur les fractions continues, peuvent consulter les excellentes additions du célèbre Lagrange, qui se trouvent imprimées à la fin du second volume de l'Algèbre d'Euler, & dont j'ai extrait ce qu'on vient de lire.

(xx) ART. 363. Soient  $a, a', a'', a''', a^{iv}, a^v, a^{vi}, \&c$ , les valeurs approchées & successives de  $x$ ; &  $d, d', d'', d''', d^{iv}, \&c$ , les différences de ces valeurs, on aura  $a < x, a' > x, a'' < x, \&c$ , &  $a' - a = d, a'' - a' = d', a''' - a'' = d'', a^{iv} - a''' = d''', a^v - a^{iv} = d^{iv}, a^{vi} - a^v = d^{v}, \&c$ . Donc  $a + d = d' - d'' + d''' - d^{iv} + d^v - \&c. + x$ , ou  $x = a + d - d' + d'' - d''' + d^{iv} - d^v + \&c$ , ou  $x = a + \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b(bc+d)} + \&c$ .

(yy) ART. 381. Soit la fonction  $1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z \cdot z + 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{a^4}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c$ , que je représente par  $\phi(z)$ , & par conséquent  $1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} + \&c. = \phi(z+1)$ ; on aura  $\phi(z) - \phi(z+1) = \frac{a}{z \cdot z + 1} + \frac{a^2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c. = \frac{a}{z \cdot z + 1} \left( 1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z+2 \cdot z+3} + \&c. \right) = \frac{a}{z \cdot z + 1} \phi(z+2)$ . Divisons par  $\phi$

$(\zeta + 1)$  & soit  $\psi(\zeta) = \frac{a}{\zeta} \cdot \frac{\phi(\zeta+1)}{\phi(\zeta)}$ ; nous aurons  $\frac{\phi(\zeta)}{\phi(\zeta+1)}$   
 $= \frac{a}{\zeta \psi(\zeta)}$ , &  $\frac{\phi(\zeta+2)}{\phi(\zeta+1)} = \frac{(\zeta+1)\psi(\zeta+1)}{a}$ ; & en substituant,  
 $\psi(\zeta) = \frac{a}{\zeta + \psi(\zeta+1)}$ . Par la même raison,  $\psi(\zeta+1) =$   
 $\frac{a}{\zeta+1 + \psi(\zeta+2)}$ ;  $\psi(\zeta+2) = \frac{a}{\zeta+2 + \psi(\zeta+3)}$  &c.

Donc  $\psi(\zeta) = \frac{a}{\zeta} + \frac{a}{\zeta+1} + \frac{a}{\zeta+2} + \frac{a}{\zeta+3} + \frac{a}{\&c.}$  , ou

$$\frac{a}{\zeta} + \frac{a}{\zeta+1} + \frac{a}{\zeta+2} + \frac{a}{\zeta+3} + \&c. = \frac{a}{\zeta} \cdot \frac{\phi(\zeta+1)}{\phi(\zeta)} =$$

$$\frac{a}{\zeta} \cdot \frac{1 + \frac{a}{\zeta+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\zeta+1 \cdot \zeta+2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{\zeta+1 \cdot \zeta+2 \cdot \zeta+3} + \&c.}{1 + \frac{a}{\zeta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\zeta \cdot \zeta+1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{\zeta \cdot \zeta+1 \cdot \zeta+2} + \&c.}$$

Soit  $\zeta = \frac{1}{2}$ , la fraction continue deviendra  $\frac{2a}{1} + \frac{4a}{3} + \frac{4a}{5} + \&c.$  , &

sa valeur en suite ordinaire fera

$$2a \cdot \frac{1 + \frac{4a}{2 \cdot 3} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.} = (\text{art. 156 \& 157})$$

$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \sqrt{a}$ ; de forte qu'en faisant  $4a = x^2$ , ou  $2\sqrt{a} = x$ ,

on aura  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{7} + \&c.}$  & si on

suppose  $x = \frac{1}{2}$ , on aura  $\frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots}$

ou  $\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots$ , ou bien  $\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots$

$= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots = \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}$ ; & enfin

$\frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{e - 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \dots}$

Cette démonstration est tirée d'une des Notes intéressantes que le citoyen Legendre a mises à la fin de ses *Éléments de Géométrie*, ouvrage supérieur à la plupart des autres Traités du même genre, & dont la lecture ne peut être trop recommandée aux jeunes Géomètres, pour les accoutumer de bonne heure aux démonstrations rigoureusement exactes.

(77) ART. 382. Ce seroit ici le cas de faire voir que les différentes valeurs des fractions continues trouvées par les méthodes précédentes, sont approchées de manière qu'il seroit impossible d'en avoir une valeur plus exacte en moindres termes; c'est ce qui a été démontré d'avance à la fin de la note relative à l'article 362.

*Fin des Notes & des Éclaircissements.*









