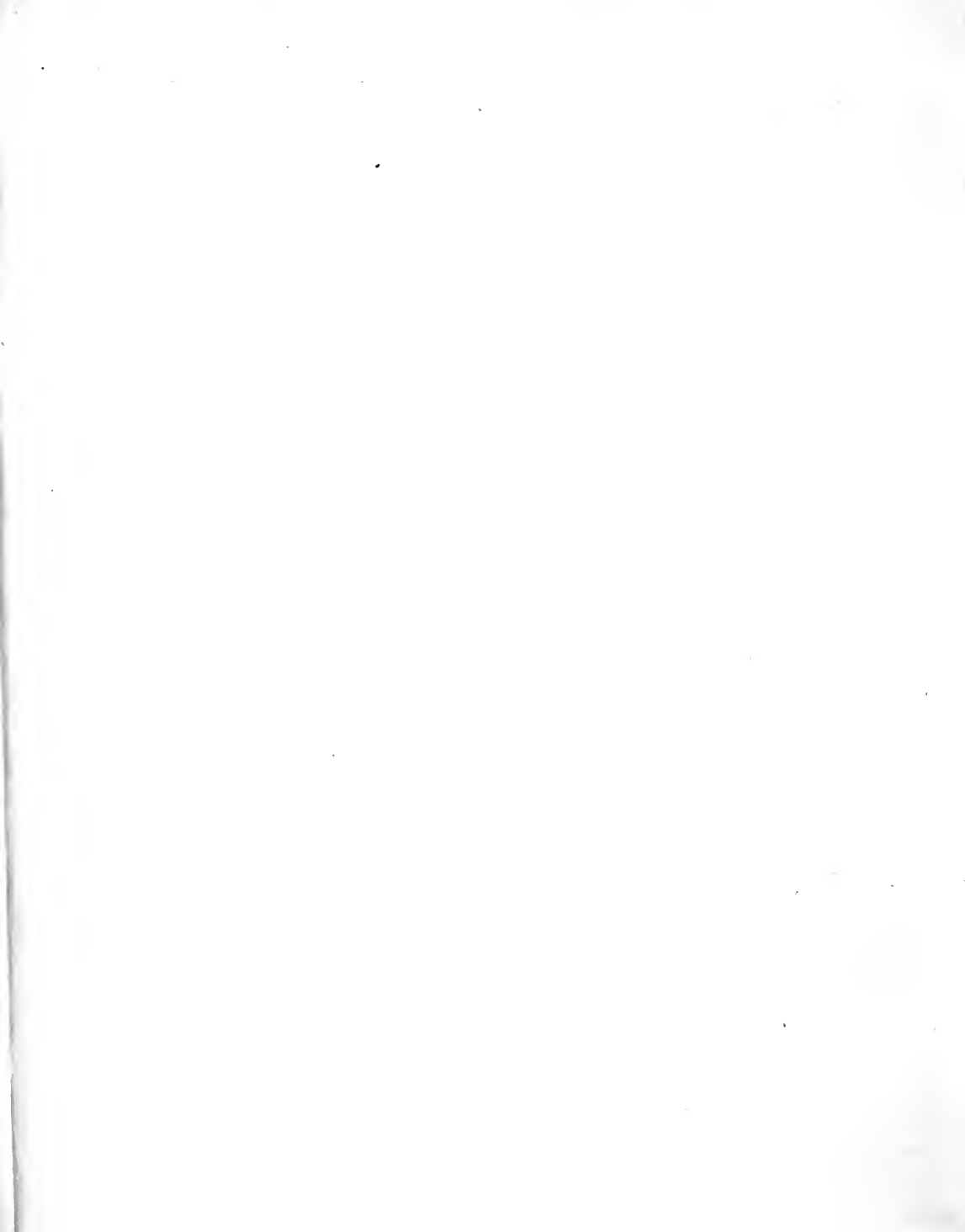


Digitized by the Internet Archive
in 2009 with funding from
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/introductionla02eule>

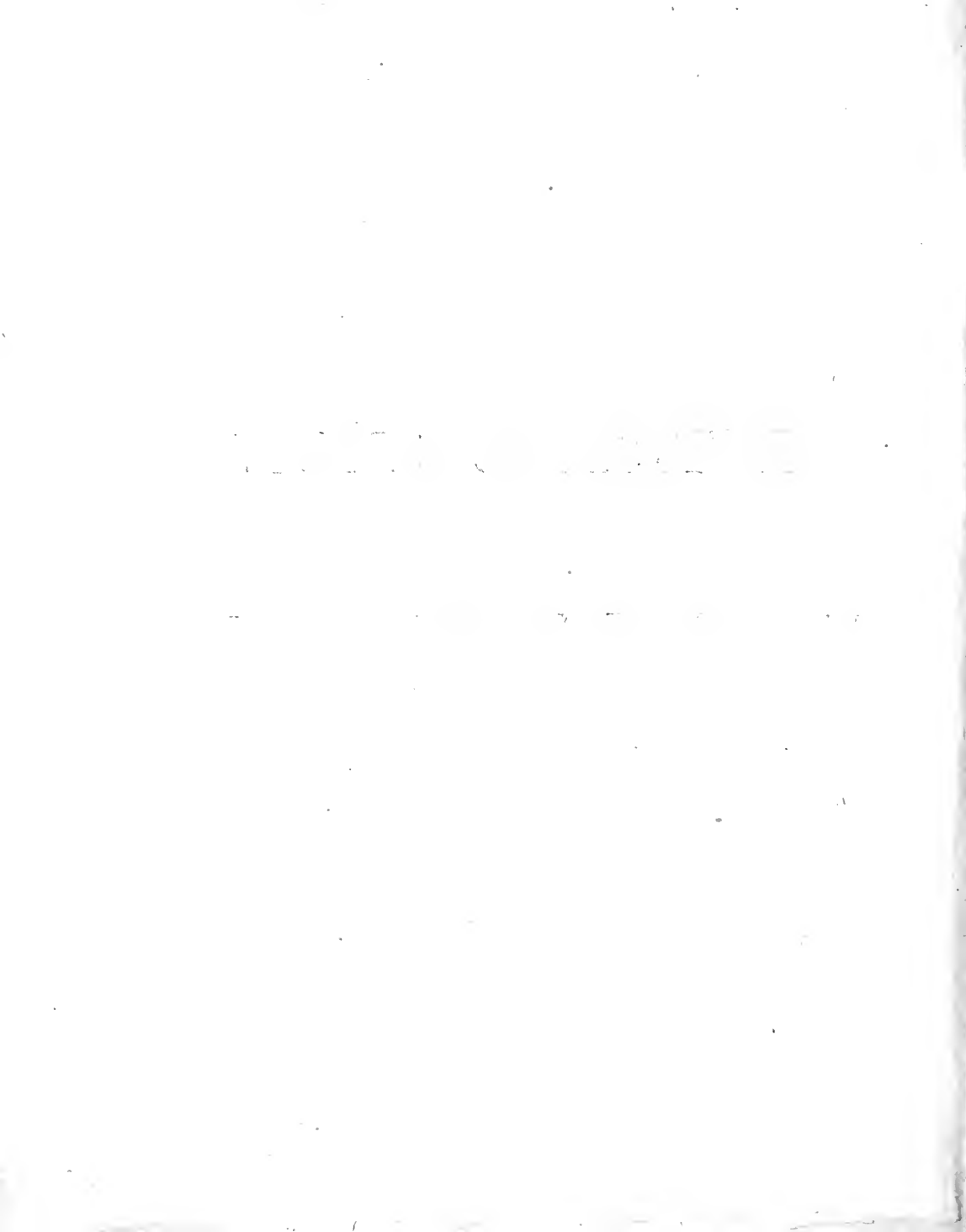




INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.



INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

PAR LÉONARD EULER;

Traduite du latin en français, avec des Notes et des Éclaircissemens,

PAR J. B. LABEY,

Professeur de Mathématiques aux Écoles Centrales du Département de la Seine.

TOME SECOND.

(Imprimé en 1797.)

A PARIS,

Chez BACHELIER, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, du Bureau
des Longitudes, etc.,

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1835.

24096
9/8/92

QA

• 05

E874

1835

t.

11/11/92
11/11/92
11/11/92
11/11/92
11/11/92

TABLE DES CHAPITRES

du Tome second.

INTRODUCTION A L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CHAP. I.	<i>Des Lignes Courbes en général,</i>	Pag. 1
CHAP. II.	<i>Du Changement des Coordonnées,</i>	10
CHAP. III.	<i>De la Division des Lignes courbes algébriques en Ordres,</i>	22
CHAP. IV.	<i>Des principales Propriétés de chaque Ordre de Lignes,</i>	51
CHAP. V.	<i>Des Lignes du second Ordre,</i>	59
CHAP. VI.	<i>De la Subdivision des Lignes du second Ordre en Genres,</i>	62
CHAP. VII.	<i>De la Recherche des Branches infinies,</i>	79
CHAP. VIII.	<i>Des Asymptotes,</i>	95
CHAP. IX.	<i>De la Subdivision des Lignes du troisième Ordre en Espèces,</i>	108
CHAP. X.	<i>Des principales Propriétés des Lignes du troisième Ordre,</i>	121
CHAP. XI.	<i>Des Lignes du quatrième Ordre,</i>	155
CHAP. XII.	<i>De la Figure des Lignes Courbes,</i>	145
CHAP. XIII.	<i>Des Affections des Lignes Courbes,</i>	152
CHAP. XIV.	<i>De la Courbure des Lignes Courbes,</i>	162

TABLE DES CHAPITRES.

CHAP. XV.	Des Courbes qui ont un ou plusieurs Diamètres,	178
CHAP. XVI.	De la Manière de trouver les Courbes par la connaissance de quelques Propriétés des Appliquées,	191
CHAP. XVII.	De la Manière de trouver les Courbes en vertu d'autres Propriétés,	208
CHAP. XVIII.	De la Similitude et de l'Affinité des Lignes Courbes,	252
CHAP. XIX.	De l'Intersection des Courbes,	245
CHAP. XX.	De la Construction des Équations,	270
CHAP. XXI.	Des Lignes Courbes transcendantes,	286
CHAP. XXII.	Solution de quelques Problèmes relatifs au Cercle,	307

TRAITÉ ABRÉGÉ DES SURFACES.

CHAP. I.	Des Surfaces des Corps en général,	325
CHAP. II.	Des Sections des Surfaces faites par des Plans quelconques,	341
CHAP. III.	Des Sections du Cylindre, du Cône et de la Sphère,	352
CHAP. IV.	Du Changement des Coordonnées,	370
CHAP. V.	Des Surfaces du second Ordre,	378
CHAP. VI.	De l'Intersection de deux Surfaces,	395
NOTES ET ECLAIRCISSEMENTS,		404

Fin de la Table des Chapitres du Tome second.

ERRATA du Tome second.

NOTA. Quelques-unes des fautes d'impression indiquées dans cet *Errata*, viennent du texte même, sur lequel j'ai corrigé presque toutes les épreuves, le temps ne m'ayant pas permis de refaire tous les calculs, à mesure que les feuilles s'imprimoient.

- Page 6, lig. 35, au lieu de & parce que la nature d'une courbe, mettez ou lorsque la nature de la courbe
- P. 13, lig. 5, au lieu de des quantités, mettez de quantités
- Ibid.* lig. 21, au lieu de t & u , mettez entre t & u ,
- P. 16, lig. 19, au lieu de est renfermée dans, mettez renferme
- P. 19, lig. 2, au lieu de $\frac{a}{6}$, mettez $\frac{a}{6}$;
- P. 31, lig. 11, au lieu de où, mettez ou
- P. 52, lig. 30, au lieu de *sin. PQM*, mettez *sin. PMQ*
- P. 53, lig. 21, après — a , mettez $= 0$,
- P. 58, lig. 1, au lieu de $CA:AP$, mettez $CA:AP$.
- P. 59, à la marge, au lieu de Fig. 31, mettez Fig. 30.
- P. 76, lig. 16, au lieu de Bi , mettez Ai
- P. 78, lig. 22, au lieu de CH^2 , mettez GH^2 .
- P. 80, lig. 18, au lieu de l'un ou l'autre, mettez l'un & l'autre
- P. 89, lig. 8, au lieu de uo , mettez ou
- P. 90, lig. 26, au lieu de $\frac{F}{g^{5t}}$, mettez $\frac{F}{g^{5,a}}$
- P. 92, lig. 12, au lieu de $ay + bx$, mettez $ay - bx$
- P. 105, à la marge, au lieu de Pl. V. mettez Pl. IV.
- P. 136, lig. 6, au lieu de c , mettez c
- P. 149, lig. 17, au lieu de alternatives, mettez alternations ;
- Ibid.* lig. 18, au lieu de, si les deux, mettez si deux
- P. 151, lig. 11, au lieu de 0,933, mettez $0,933$
- P. 153, lig. 14, au lieu de mq , mettez Mq ,
- P. 163, lig. 17, au lieu de Eu^3 , mettez Eu^2
- P. 166, lig. 26, au lieu de qu'elle lui soit parallèle, mettez à sa parallèle,
- P. 168, lig. 4, au lieu de $A.A^2E$, mettez A^2E
- Ibid.* lig. 10, au lieu de $\frac{A^2MN^3}{b^4}$, mettez $\frac{a^2MN^3}{l^4}$.
- P. 170, lig. 17, au lieu de appliquée s , mettez appliquée s négative,
- Ibid.* lig. 27, au lieu de $\sqrt{A^2 + E^2}$, mettez $\sqrt{A^2 + B^2}$
- P. 175, lig. 2, au lieu de M , mettez m ;
- P. 180, lig. 20, au lieu de Q & R ou T & S , mettez Q & T ou R & S ,
- P. 186, à la marge, dernière indication, mettez Fig. 72.
- P. 192, lig. 21, au lieu de AE , BE , mettez AE BF ,
- P. 194, lig. 29, au lieu de quarrés, mettez quariés quarrés.
- P. 199, lig. 12, au lieu de $-3\sqrt[5]{a}$, mettez $-3\sqrt[3]{a}$
- Ibid.* lig. 18, au lieu de $-3\sqrt{a}$, mettez $-3\sqrt[3]{a}$
- Ibid.* même ligne, au lieu de $-3\sqrt[5]{a}R$, mettez $-3\sqrt[3]{a}R$
- P. 201, lig. 22 & 23, au lieu de l'origine x des abscisses, mettez l'origine des abscisses x ,
- P. 204, lig. 1, au lieu de $\sqrt{a^2 + Q^2}$, mettez $\sqrt{a^2 + Q^2}$

- P. 207, lig. 26, au lieu de $\pm a^2$, mettez $\pm a^3$
P. 219, lig. 20, au lieu de $+ 6y^2$, mettez $+ 6xy$
P. 223, lig. 20, au lieu de CAM , mettez ACM
P. 230, lig. 28, au lieu de $-L^4z^4$, mettez $+L^4z^4$
P. 257, lig. 23, au lieu de $\frac{-}{r}$, mettez $\frac{-p}{r}$
P. 263, lig. 16, au lieu de $(Sp - Qs)$, mettez $(Sq - Qs)$
P. 267, lig. 1, au lieu de p^{n-1} , mettez $p y^{n-1}$
P. 268, lig. 19, au lieu de Q^2p , mettez Q^2p^2
P. 267, lig. 9, au lieu de αS , mettez αs
P. 273, lig. 6, au lieu de $-\frac{B(a^2 + b^2)}{4A^2a^2}$, mettez $-\frac{B^2(a^2 + b^2)}{4A^2a^2}$
P. 277, lig. 15, au lieu de $\frac{AA}{15}$, mettez $\frac{2AA}{16}$
P. 278, lig. 22 & 23, au lieu de $-4BE$, mettez $-4BEE$
P. 281, lig. 30, au lieu de quarante-neuvième, mettez quarante-deuxième
P. 292, lig. 15, au lieu de $\frac{u^3}{6b^2}$, mettez $\frac{u^3}{6b^3}$
P. 294, lig. 5, au lieu de $\& \frac{a}{2} + l \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, mettez $\& \frac{a}{2} + l \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$;
P. 295, lig. 33, au lieu de B , mettez C
P. 307, lig. 1, au lieu de $\frac{2v^2}{2n^2}$, mettez $\frac{v^2}{2n^2}$
P. 312, lig. 22, au lieu de ACB , mettez AEB
P. 315, à la marge, au lieu de Fig. 115, mettez Fig. 113.
P. 316, à la marge, au lieu de Fig. 24, mettez Fig. 114.
Ibid. lig. 8, au lieu de au demi-cercle, mettez à la moitié du demi-cercle
P. 319, lig. 23, au lieu de $\text{cof. } (45^\circ - \frac{1}{2})s$, mettez $\text{cof. } (45^\circ - \frac{1}{2}s)$
P. 322, lig. dernière, au lieu de 50° , mettez 5°
P. 335, lig. 6 & 7, au lieu de PQR , mettez Pqr
VIII
P. 337, lig. 8, au lieu de x, y, z , mettez x, y, x
P. 360, lig. 12, au lieu de $\text{cof. } \theta$. $\text{fin. } \phi$ au dénominateur, mettez $\text{cof. } \theta$. $\text{cof. } \phi$
Ibid. lig. 29, au lieu de $\text{cof. } n$, mettez $\text{cof. } n^2$
P. 364, avant-dernière ligne, au lieu de $-\frac{f. \text{fin. } \phi}{m}$, mettez $\frac{n^2}{m} f. \text{fin. } \phi$
P. 378, lig. 13, au lieu de celle-ci, mettez celles-ci
P. 380, lig. 10, au lieu de α au dénominateur, mettez 2α
P. 383, lig. 21, au lieu de $\alpha z =$, mettez $2\alpha z =$
P. 387, lig. 2, au lieu de ne manque. Mais, mettez ne manque, mais
P. 392, lig. 13, après genre, mettez parce qu'ils sont ou droits ou scalènes,
Ibid. lig. 20, au lieu de égal, mettez égalé
P. 400, au commencement de la ligne 20, mettez 147.
 $\frac{n-m}{n-m} \frac{m}{n-m}$
P. 413, lig. 19, au lieu de $a^n x$, mettez $a^n x^n$
P. 416, lig. 1, au lieu de $\frac{l}{k} > \frac{m}{n}$, mettez $\frac{l}{k} > \frac{m}{n}$

Fin de l'Errata du Tome second.

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

LIVRE SECOND,

CONTENANT la Théorie des Lignes courbes , avec un Traité
abrégé des Surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes en général.

1. UNE quantité variable étant une grandeur considérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées; une droite indéfinie, telle que RS , sera très-propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet, puisqu'on peut prendre sur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne présente à l'esprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer sur une ligne indéfinie RS un point A , qui sera censé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en séparera; ainsi une portion déterminée AP représentera une valeur déterminée comprise dans la quantité variable.

Pl. I. Fig. 1.

2. Soit donc x une quantité variable, représentée par la droite indéfinie RS ; il est clair que toutes les valeurs déterminées de x , pourvu qu'elles soient réelles, peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS . Par exemple,

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 A

si le point P tombe sur le point A , l'intervalle AP , devenant nul, représentera la valeur de $x=0$; mais plus le point P s'éloignera du point A , plus la valeur déterminée de x représentée par l'intervalle AP deviendra grande.

On appelle ces intervalles AP , **ABSCISSES**.

Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable x .

3. Or, comme la droite indéfinie RS s'étend à l'infini de part & d'autre du point A , on pourra aussi couper de part & d'autre toutes les valeurs de x . Mais, si nous prenons les valeurs positives de x , en allant sur la droite depuis le point A , les intervalles Ap situés sur la gauche représenteront les valeurs négatives de x . En effet, puisque plus le point P s'éloigne du point A vers la droite, plus est grande la valeur de x représentée par l'intervalle AP ; réciproquement, plus le point P s'éloigne vers la gauche, plus la valeur de x est diminuée; & si P tombe sur A , la valeur de x devient $=0$. C'est pourquoi, si le point P est reculé davantage vers la gauche, les valeurs de x deviendront plus petites que zéro, c'est-à-dire, seront négatives, & les intervalles Ap pris sur la gauche depuis le point A , représenteront les valeurs négatives de x , si les intervalles AP , situés à la droite, sont censés représenter les valeurs positives. Au reste, il est indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs positives de x ; car le côté opposé renfermera toujours les valeurs négatives.

Pl. I. Fig. 2.

4. Puisqu'une ligne droite indéfinie est propre à représenter une quantité variable x , cherchons à présent une manière très-commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x . Soit y cette fonction de x ; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour x une valeur donnée. Ayant pris une droite indéfinie RAS pour représenter les valeurs de x , il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x , élever sur cette ligne une perpendiculaire PM , égale à la valeur correspondante de y ; c'est-à-dire que, si la valeur de y est positive, il faudra la placer au-dessus de RS ; mais, si la valeur de y devient négative, il faudra la placer perpendiculairement au-dessous de la droite

RS. Car les valeurs positives de y étant prises au-dessus de la droite *RS*, celles qui deviennent nulles tomberont sur la ligne même *RS*, & celles qui sont négatives, au-dessous.

5. La figure donne donc pour y une fonction de x , telle qu'en faisant $x=0$, y a une valeur positive $=AB$; qu'en faisant $x=AP$, $y=PM$; que si $x=AD$, y devient $=0$, & que si $x=AP$, la fonction y prend une valeur négative, & par conséquent la perpendiculaire *PM* tombe au-dessous de la droite *RS*. De même les valeurs de y , qui répondent aux valeurs négatives de x , sont représentées par des perpendiculaires placées au-dessus de *RS*, si elles sont positives; & dans le cas contraire, elles doivent être placées au-dessous de la droite *RS*, comme pm : mais, si pour une valeur quelconque de x , comme $-x=AE$, y devient $=0$; alors la longueur de la perpendiculaire devient nulle.

6. Si donc, pour chaque valeur donnée de x , on détermine de cette manière les valeurs correspondantes de y , on élèvera à chaque point *P* de la droite *RS* des perpendiculaires *PM*, qui exprimeront les valeurs de la fonction y : l'une des extrémités *P* tombera sur la droite *RS*, & l'autre *M* au-dessus de *RS*, si les valeurs de y sont positives; ou au-dessous, si elles sont négatives; ou même sur la ligne *RS*, si elles sont égales à zéro, comme il arrive aux points *D* & *E*. Les extrémités *M* de chacune des perpendiculaires représenteront une certaine ligne droite ou courbe, qui par conséquent se trouvera déterminée par la fonction y . Ainsi chaque fonction de x , rapportée de cette manière à la géométrie, donnera une ligne droite ou courbe, dont la nature dépendra de celle de la fonction y .

7. On connoît parfaitement, en suivant ce procédé, la ligne courbe qui résulte de la fonction y , puisque c'est cette fonction qui en détermine tous les points; en effet, pour chaque point *P* on a la longueur de la perpendiculaire *PM*, dont l'extrémité *M* appartient à la courbe; & on trouve ainsi tous les points de cette ligne. Or, quelle que soit la nature de la courbe, on peut mener de chacun de ses points des perpendiculaires à la droite *RS*; on a par-là les intervalles *AP*, qui

expriment les valeurs de la variable x ; & les longueurs des perpendiculaires PM , qui représentent les valeurs de la fonction y ; ainsi il n'y aura aucun point de la courbe, qui ne soit déterminé de cette manière par le moyen de la fonction y .

8. Quoiqu'on puisse décrire mécaniquement plusieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point, qui présente aux yeux la courbe dans son ensemble; nous les considérons ici principalement comme le résultat de fonctions; cette manière de les envisager étant plus analytique, plus générale & plus propre au calcul. Ainsi une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe; d'où il suit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes. Par conséquent, la nature d'une ligne courbe sera déterminée par une fonction de x , qui représentera toujours la longueur de la perpendiculaire MP , tandis que les intervalles AP pris sur la ligne RS , sur laquelle tombent les perpendiculaires MP abaissées de chaque point M de la courbe, sont indiqués par la variable x .

9. De cette idée des lignes courbes découle naturellement leur division en *continues*, & en *discontinues* ou *mixtes*. La ligne courbe continue est celle dont la nature est exprimée par une seule fonction déterminée de x . Mais, si la ligne courbe est composée de différentes portions BM , MD , DM , &c. déterminées par plusieurs fonctions de x , de manière qu'une partie BM étant le résultat d'une fonction, une autre MD soit celui d'une seconde fonction; nous appelons ces sortes de lignes courbes *discontinues*, ou *mixtes* & *irrégulières*, parce qu'elles ne sont pas formées suivant une seule loi constante, & qu'elles sont composées de portions de différentes courbes continues.

10. Il s'agit principalement en géométrie de courbes continues, & on fera voir dans la suite que les courbes, qui sont décrites mécaniquement d'un mouvement uniforme, suivant une certaine loi constante, peuvent aussi être exprimées par une fonction unique, & que par conséquent ce sont des courbes continues. Soit donc $mEBMDM$ une ligne courbe continue,

dont la nature est exprimée par une fonction quelconque y de x ; il est évident qu'en prenant sur la droite RS depuis un point fixe A des valeurs déterminées de x , les valeurs correspondantes de y donnent la longueur des perpendiculaires PM .

11. Il y a dans ce que nous venons de dire sur la nature des courbes, certains noms à retenir, & dont l'usage revient très-fréquemment dans leur théorie.

D'abord la droite RS , sur laquelle se prennent les valeurs de x , s'appelle l'AXE, ou la *directrice*.

Le point A , depuis lequel se comptent les valeurs de x , se nomme l'*origine des abscisses*.

Les parties de l'axe AP qui représentent les valeurs déterminées de x , s'appellent ordinairement ABSCISSES.

Et on a donné le nom d'APPLIQUÉES * aux perpendiculaires PM , menées des extrémités des abscisses à la courbe.

Les appliquées sont dites dans ce cas-ci *perpendiculaires* ou *orthogonales*, parce qu'elles font avec l'axe un angle droit ; & comme les appliquées PM peuvent de même faire avec l'axe un angle oblique, on les appelle alors des *appliquées obliques*. Au reste, dans l'explication que nous ferons de la nature des courbes, nous emploierons constamment des appliquées perpendiculaires, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire.

12. Si donc une abscisse quelconque AP est représentée par la variable x , de manière qu'on ait $PA = x$, alors la fonction y indiquera la grandeur de l'appliquée PM , & on aura $PM = y$. La nature de la ligne courbe, lorsqu'elle est continue, dépendra donc de celle de la fonction, ou de la manière dont les quantités x, y & les constantes sont combinées entre elles. Ainsi la portion AS prise sur l'axe RS sera le lieu des abscisses positives, & la portion AR celui des abscisses négatives ;

* Les appliquées se nomment encore ordinairement *ordonnées* ; mais Euler paroît avoir réservé la dénomination d'*ordonnées* aux droites qui partent d'un point de la courbe, & qui se terminent à un autre point de cette courbe ; c'est ce qu'il appelle aussi *cordes*, comme on le verra par la suite.

quant aux appliquées, les positives tomberont au-dessus de l'axe RS , & les négatives au-dessous.

13. Une fonction quelconque de x donnant naissance à une ligne courbe continue, il s'ensuit qu'on pourra par son moyen la connoître & la décrire. Car donnons à x des valeurs positives, qui croissent successivement depuis 0 jusqu'à ∞ , & cherchons pour chacune les valeurs correspondantes de la fonction y , qui soient représentées par des appliquées menées au-dessus ou au-dessous, suivant qu'elles sont positives ou négatives; on aura la portion de la courbe BMM . En donnant ensuite semblablement à x toutes les valeurs négatives depuis 0 jusqu'à ∞ , les valeurs correspondantes de y détermineront la portion BEm de la courbe; ainsi toute la courbe renfermée dans la fonction se trouvera décrite.

14. Puisque y est une fonction de x , il s'ensuit ou que y sera égal à une fonction explicite de x , ou qu'on aura une équation entre x & y , qui déterminera la valeur de y en x . Dans les deux cas on dit que cette équation exprime la nature de la courbe. C'est pourquoi la nature d'une ligne courbe quelconque est donnée par une équation entre deux variables x & y , dont la première x représente les abscisses comptées sur l'axe depuis leur origine A , & la seconde les appliquées perpendiculaires à l'axe. Ces abscisses & ces appliquées considérées ensemble s'appellent les COORDONNÉES *perpendiculaires*. Ainsi on dit que la nature d'une ligne courbe est exprimée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires, lorsqu'on a entre x & y une équation, qui exprime la nature de la fonction y .

15. Puisque la connoissance des lignes courbes est ramenée à celle des fonctions, il y aura autant d'espèces de lignes courbes que nous avons vu qu'il y avoit de fonctions différentes. Ainsi les courbes se divisent très-bien, de même que les fonctions, en *algébriques* & en *transcendantes*. La courbe sera algébrique, si l'appliquée y est une fonction algébrique de l'abscisse x ; & parce que la nature d'une courbe est exprimée par une équation algébrique entre les coordonnées x & y , on a coutume d'appeler aussi ces sortes de lignes des

courbes géométriques. Une courbe *transcendante* est celle dont la nature est exprimée par une équation transcendante entre x & y , ou dans laquelle y devient une fonction transcendante de x . Telle est la principale division des lignes courbes continues, qui sont ou *algébriques* ou *transcendantes*.

16. Pour décrire une ligne courbe résultante d'une fonction de x , qui donne la valeur de l'appliquée y , il faudra bien faire attention à la nature de cette fonction, pour savoir si elle est uniforme ou multiforme. Supposons d'abord que y soit une fonction uniforme de x , ou que $y = P$, P désignant une fonction quelconque uniforme de x ; comme en donnant à x une valeur quelconque déterminée, il en résulte aussi pour y une valeur déterminée; il s'ensuit qu'à chaque abscisse répondra une appliquée, & que par conséquent la courbe sera d'une forme telle que, si on élève à un point quelconque P de l'axe RS une perpendiculaire PM , cette perpendiculaire coupera toujours la courbe, & cela en un seul point M . Ainsi à chaque point de l'axe répondra un point de la courbe; & comme l'axe s'étend à l'infini des deux côtés, la courbe s'étendra aussi à l'infini de part & d'autre; ou la courbe qui naîtra d'une telle fonction, se prolongera à l'infini de part & d'autre avec l'axe par un cours continu, ainsi que le fait voir la figure 2, où la ligne courbe $mEBMDM$ s'étend à l'infini sans interruption à droite & à gauche.

17. Soit y une fonction biforme de x ; ou bien, les lettres P & Q désignant des fonctions uniformes de x , soit $y, y = 2Py - Q$, ou $y = P \pm \sqrt{PP - Q}$. On voit qu'à chaque abscisse x répond une double appliquée y ; & l'une & l'autre est ou réelle ou imaginaire, suivant que PP est $> Q$ ou $< Q$. Ainsi, tant que les deux valeurs de y seront réelles, il y aura pour chaque abscisse AP deux appliquées PM, PM ; ou la perpendiculaire élevée sur l'axe au point P coupera la courbe dans deux points M & M . Mais lorsque $PP < Q$, il n'y a plus d'appliquée, qui réponde à l'abscisse; ou la perpendiculaire à l'axe menée par ces points ne rencontrera la courbe nulle part; c'est ce qui arrive au point p . Mais comme auparavant PP étoit $> Q$; PP n'a pu devenir $< Q$, qu'en passant

Pl. I. Fig. 3.

par le cas où $PP = Q$, qui est la limite entre les appliquées réelles & imaginaires. Ainsi, lorsque les appliquées cessent d'être réelles, comme en C ou en G , y devient alors $= P \pm 0$; c'est-à-dire que les deux appliquées deviennent égales entre elles, & la courbe forme en ce point une inflexion dans son cours.

18. Il est clair, d'après l'inspection de la figure, que, tant que l'abscisse négative $-x$ est renfermée entre les limites AC & AE , l'appliquée y est imaginaire; mais qu'en avançant vers la gauche au-delà du point E , les appliquées redeviennent réelles; ce qui ne peut arriver, à moins qu'on n'ait en E , $PP = Q$, & que par conséquent les deux appliquées ne se confondent. Alors aux abscisses AP répond de nouveau une double appliquée Pm , Pm , jusqu'à ce qu'on soit arrivé en G , où les deux appliquées se confondent; & au-delà de G , elles sont encore imaginaires. Une telle courbe pourra donc être composée de deux ou de plusieurs parties séparées les unes des autres, comme $MBDBM$ & $FmHm$: cependant l'ensemble de ces parties est censé ne former qu'une ligne courbe continue ou régulière, parce que ces parties résultent d'une seule & même fonction. Ces courbes ont donc cette propriété que, si on prolonge les perpendiculaires MM élevées à chaque point de l'axe, elles ne rencontreront la courbe nulle part, ou elles la couperont en deux points, à moins que par hasard les deux points d'intersection ne se réunissent en un seul, ce qui arrive lorsque les appliquées passent par les points D , F , H & I .

19. Si y est une fonction triforme de x , ou si y est déterminé par l'équation $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$; P , Q & R étant des fonctions uniformes de x , alors, pour chaque valeur de x , l'appliquée y aura trois valeurs, qui seront toutes réelles, ou dont l'une seulement le sera, tandis que les deux autres seront imaginaires. Toutes les appliquées couperont donc la courbe ou en trois points, ou seulement en un seul, à moins que deux ou même trois points d'intersection ne se réunissent en un seul. Puisqu'il répond à chaque abscisse au moins une appliquée réelle, il s'ensuit que la courbe s'étend à l'infini avec l'axe

l'axe de part & d'autre. La courbe sera donc formée d'un seul trait continu comme dans la *figure quatrième*; ou de deux parties séparées l'une de l'autre, comme dans la *figure cinquième*; ou même d'un plus grand nombre de parties, qui pourtant ne constituent ensemble qu'une seule & même courbe continue.

20. Si y est une fonction quadriforme de x , ou si y est donné par l'équation $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$, on aura pour chaque valeur de x , ou quatre valeurs réelles correspondantes de y , ou deux seulement, ou enfin on n'en aura aucune. Ainsi, dans une courbe qui est le résultat d'une fonction quadriforme, les appliquées couperont la courbe ou en quatre points, ou en deux seulement, ou ne la couperont nulle part; ces cas sont représentés par la *figure sixième*: il faut distinguer les points I & o , où deux points d'intersection se réunissent en un seul. C'est pourquoi, tant à droite qu'à gauche, ou la courbe n'aura aucune branche qui s'étende à l'infini, ou elle en aura deux, ou elle en aura quatre. Dans le premier cas où nulle branche de la courbe ne s'étend à l'infini d'aucun côté, la courbe sera fermée de toute part, ainsi que le fait voir la *figure*, & elle renfermera un espace déterminé. On peut donc déjà conclure de ce qui précède la nature des lignes courbes, qui sont formées de fonctions multiformes d'un degré quelconque.

21. Si y est une fonction multiforme, ou est déterminé par une équation, dans laquelle n soit le plus grand exposant de la puissance y ; dans ce cas le nombre des valeurs réelles de y sera ou n , ou $n-2$, ou $n-4$, ou $n-6$, &c.; chaque appliquée coupera donc la courbe en autant de points. Ainsi, si une appliquée coupe la courbe continue en m points, toutes les autres la couperont en un nombre de points, qui différera toujours de m d'un nombre pair; la courbe ne pourra donc être coupée nulle part par une appliquée en $m+1$, ou $m-1$, ou $m\pm 1$, &c. points; c'est-à-dire, que si le nombre des intersections d'une appliquée est pair ou impair, toutes les autres appliquées couperont aussi la courbe en un nombre de points pair ou impair.

22. Par conséquent si une appliquée coupe la courbe en un

nombre de points impair, il est impossible qu'il y ait un point où elle ne puisse plus être rencontrée par une autre. La courbe aura donc, de chaque côté, au moins une branche infinie, & si de part & d'autre il y a plusieurs branches, qui s'étendent à l'infini, le nombre en doit être impair, puisque le nombre des intersections de chaque appliquée ne peut être pair; donc, si on compte de part & d'autre toutes les branches qui s'étendent à l'infini, leur nombre sera constamment pair. La même remarque a lieu, si les appliquées rencontrent la courbe en un nombre pair de points, car alors il n'y aura de part & d'autre en particulier aucune branche qui s'éloigne à l'infini, ou il y en aura deux, ou quatre, &c.; & par conséquent le nombre de toutes les branches infinies sera encore pair. Nous avons donc déjà acquis la connoissance de quelques propriétés remarquables, qui appartiennent aux courbes continues & régulières, & qui peuvent servir à les distinguer des courbes discontinues & irrégulières.

CHAPITRE II.

Du changement des Coordonnées.

23. DE même qu'au moyen de l'équation entre les coordonnées x & y , dont la première représente l'abscisse, & la seconde l'appliquée, on décrit une courbe déterminée sur un axe RS , en prenant à volonté un point A pour l'origine des abscisses; de même, réciproquement, si la courbe est déjà décrite, sa nature pourra être exprimée par une équation entre les coordonnées. Mais ici, quoique la courbe soit donnée, deux choses cependant restent indéterminées, savoir la position de l'axe RS , & l'origine A des abscisses; & comme on peut les varier d'une infinité de manières, il s'ensuit qu'on pourra avoir pour une même ligne courbe une quantité innombrable d'équations; c'est pourquoi on ne peut pas toujours de

Pl. I. Fig. 2.

la diversité des équations conclure celle des lignes courbes qu'elles renferment, quoique des courbes différentes donnent toujours des équations différentes.

24. Puisqu'en faisant varier l'axe & l'origine des abscisses, on multiplie indéfiniment les équations, qui expriment la nature d'une même courbe, il faut donc qu'elles soient toutes d'une telle forme, qu'une seule une fois donnée puisse faire trouver toutes les autres; car l'équation donnée entre les coordonnées fait connoître la courbe même, & celle-ci une fois connue, si on prend une droite quelconque pour l'axe, & sur cette ligne un point pour l'origine des abscisses, l'équation entre les coordonnées perpendiculaires sera déterminée. Nous donnerons donc dans ce chapitre une méthode, au moyen de laquelle l'équation d'une courbe étant donnée, on puisse trouver pour un autre axe quelconque, & une autre origine des abscisses, une équation entre les coordonnées, laquelle exprime la nature de la même courbe : on trouvera de cette manière toutes les équations, qui peuvent convenir à la même courbe, & il sera ainsi plus facile de juger de la diversité des lignes courbes par celle des équations.

25. Soit donc donnée une équation quelconque entre x & y , au moyen de laquelle, après avoir pris une droite RS pour l'axe, & le point A pour l'origine des abscisses, de manière que x représente l'abscisse AP , & y l'appliquée PM , on ait décrit la courbe CBM , dont la nature par conséquent est exprimée par cette équation. Conservons d'abord le même axe RS , & prenons sur cet axe un autre point D pour l'origine des abscisses, de sorte qu'à présent au point M de la courbe réponde l'abscisse DP , que je suppose $=t$, l'appliquée MP restera la même qu'auparavant & $=y$: cherchons une équation entre t & y propre à exprimer la nature de la courbe CBM . Soit $=f$ la distance AD , qui tombe à la gauche du point A du côté des abscisses négatives, on aura $DP = t = f + x$, & par conséquent $x = t - f$. Si dans l'équation donnée entre x & y on substitue par-tout pour x $t - f$, on aura une équation entre t & y , qui représentera la même ligne courbe CBM ; & comme la grandeur $AD = f$

est arbitraire, il s'en suit que nous avons déjà une infinité d'équations, qui représentent toutes la même courbe.

26. Si la courbe rencontre quelque part l'axe RS comme en C , alors en prenant ce point C pour l'origine des abscisses, on aura une équation, qui, en faisant l'abscisse $CP=0$, donnera en même temps pour l'appliquée PM une quantité nulle, pourvu qu'il n'y en ait qu'une qui réponde au point C de l'axe. Au reste, l'interfection C , s'il y en a une ou plusieurs, se trouvera, au moyen de l'équation proposée, entre x & y , en supposant $y=0$, & en cherchant, d'après cette supposition, la valeur ou les valeurs de x ; car, à l'endroit où la courbe rencontre l'axe, y devient $=0$, & réciproquement, en faisant $y=0$, on aura toutes les abscisses, ou les valeurs de x , où la courbe tombe sur l'axe.

27. On changera donc l'origine des abscisses, sans changer l'axe, en augmentant ou en diminuant l'abscisse x d'une quantité donnée, c'est-à-dire, en écrivant $t-f$ à la place de x ; la quantité f fera positive, si la nouvelle origine des abscisses D tombe à la gauche du point A , & la quantité f fera négative, si le point D tombe à la droite du même point A .

Pl. I. Fig. 8. Supposons maintenant que la courbe $LB M$ ayant été décrite au moyen d'une équation donnée entre $AP=x$ & $PM=y$, on prenne un autre axe rs parallèle au premier, & sur cet axe le point D pour l'origine des abscisses: que cet axe tombe du côté des appliquées négatives, & que sa distance AF du premier $=g$; & que l'intervalle $DF=AG=f$. Si on fait sur ce nouvel axe l'abscisse DQ , qui réponde au point $M=t$, & l'appliquée $QM=u$, on aura $t=DF+FQ=f+x$, & $u=PM+PQ=g+y$; ce qui donne $x=t-f$, & $y=u-g$. C'est pourquoi, si dans l'équation donnée entre x & y on met par-tout $t-f$ à la place de x , & $u-g$ à la place de y , on aura l'équation entre t & u , qui exprimera la nature de la même ligne courbe.

28. Puisque les grandeurs f & g sont à notre choix, & qu'il y a pour cette raison une infinité de manières de les déterminer, il y aura infiniment plus d'équations dans ce cas-ci que

dans le premier, qui toutes, cependant, appartiendront à la même ligne courbe. Donc, si deux équations, l'une entre x & y & l'autre entre t & u , diffèrent entre elles de manière cependant que l'une puisse se transformer en l'autre, en augmentant ou en diminuant les coordonnées de l'une des quantités données, les deux équations, quoique différentes, appartiendront néanmoins à la même courbe. On pourra donc former facilement de cette manière tant d'équations différentes qu'on voudra, qui toutes seront propres à exprimer la nature d'une même courbe.

29. Supposons que le nouvel axe rs soit perpendiculaire au premier RS & qu'il le coupe à l'origine des abscisses A , de manière que l'origine des abscisses soit la même pour les deux axes. Comme on a par rapport à l'axe RS l'équation de la courbe LM entre l'abscisse $AP = x$, & l'ordonnée $PM = y$; soit menée du point M de la courbe sur le nouvel axe rs la perpendiculaire MQ , & soit la nouvelle abscisse $AQ = t$, & la nouvelle appliquée $QM = u$; à cause du parallélogramme rectangle $APMQ$, on aura $t = y$ & $u = x$. Donc, au moyen de l'équation donnée entre x & y , on formera l'équation t & u , en mettant u à la place de x , & t à la place de y . Ainsi la première abscisse x devient l'appliquée $QM = u$, & la première appliquée y devient l'abscisse $AQ = t$; il n'y aura donc pour ce nouvel axe aucun autre changement dans l'équation, sinon que les coordonnées x & y sont échangées: c'est pour cela qu'on appelle ordinairement l'abscisse & l'appliquée les coordonnées, étant indifférent laquelle des deux quantités on prend pour l'abscisse ou pour l'appliquée; car une équation étant donnée entre deux coordonnées x & y , il en résulte la même courbe, si on prend x ou y pour représenter l'abscisse.

30. Nous avons supposé ici que la portion As du nouvel axe rs représentoit les abscisses positives, & que la droite de l'axe rs étoit le lieu des appliquées positives; comme cela est arbitraire, on pourra les changer à volonté. Par exemple, si la portion Ar de l'axe est destinée aux abscisses positives, on aura alors $AQ = -t$; ainsi dans l'équation entre x & y il

Pl. I. Fig. 9.

faudra mettre $-t$ au lieu de y ; si on suppose ensuite que la droite de l'axe rs soit réservée pour les appliquées négatives, QM deviendra $=-u$, & on devra écrire $-u$ au lieu de x . On comprend par-là que la nature d'une ligne courbe ne change pas, quoiqu'on fasse dans son équation une des coordonnées ou toutes les deux négatives, ce qu'il sera bon de se rappeler dans tous les changemens d'équation.

Pl. II. Fig. 10.

31. Supposons que le nouvel axe rs coupe le premier RS sous un angle quelconque SAs , & que l'interfection soit faite au point A qui deviendra par-là l'origine commune des abscisses pour les deux axes. Soit donnée pour l'axe RS une équation quelconque pour la courbe LM entre l'abscisse $AP=x$, & l'appliquée $PM=y$; on veut trouver l'équation à la même courbe pour le nouvel axe rs , ou, en imaginant abaissée du point M de la courbe au nouvel axe la perpendiculaire MQ , une équation entre l'abscisse $AQ=t$, & l'appliquée $MQ=u$. Soit l'angle $SAs=q$, son sinus $=m$ & son cosinus $=n$; ayant pris l'unité pour le sinus total, de manière que $mm+nn=1$; Soient menées du point P les perpendiculaires Pp & Pq sur les nouvelles coordonnées; on aura $AP=x$, $Pp=x \cdot \sin. q$; $Ap=x \cdot \cos. q$. Ensuite, comme l'angle $PMQ=PAQ=q$, on aura, à cause de $PM=y$, $Pq=Qp=y \cdot \sin. q$; $Mq=y \cdot \cos. q$. On tirera donc de là $AQ=t=Ap-Qp=x \cdot \cos. q - y \cdot \sin. q$; & $QM=u=Mq+Pp=x \cdot \sin. q + y \cdot \cos. q$.

32. Mais, comme nous avons fait $\sin. q=m$, $\cos. q=n$, nous aurons $t=nx-my$ & $u=mx+ny$; & par suite $nt+mu=n^2x+m^2y=x$, & $nu-mt=n^2y+m^2x=y$. On trouvera donc l'équation cherchée entre t & u , si dans l'équation proposée entre x & y on écrit par-tout $mu+nt$ au lieu de x , & $nu-mt$ au lieu de y , pourvu toutefois que la portion As de l'axe renferme les abscisses positives, & que les appliquées positives tombent du côté de QM . Nous avons aussi supposé ici que l'angle SAs tomboit du côté des appliquées négatives; car si As tomboit au-dessus de AS , il faudroit faire dans le calcul l'angle $SAs=q$ négatif, & par conséquent son sinus m devoit être pris négativement,

33. Donnons à présent au nouvel axe rs une position quelconque, & prenons, à volonté, sur cet axe un point D pour l'origine des abscisses. Soit RS le premier axe pour lequel on a l'équation entre l'abscisse $AP=x$ & l'appliquée $PM=y$, laquelle exprime la nature de la courbe LM ; il s'agit d'avoir l'équation entre les autres coordonnées t & u rapportées au nouvel axe rs . Soit abaissée de chaque point M de la courbe sur le nouvel axe rs la perpendiculaire MQ ; soit faite l'abscisse $DQ=t$, & l'appliquée $QM=u$. Pour trouver l'équation cherchée, menons du point D , nouvelle origine des abscisses, la perpendiculaire DG sur le premier axe RS , & faisons $AG=f$, & $DG=g$; ensuite soit menée par le point D parallèlement au premier axe RS la ligne DO , qui soit rencontrée en O par le prolongement de la première appliquée PM ; on aura $MO=y+g$ & $DO=GP=x+f$. Enfin, soit l'angle $ODQ=q$, dont le sinus $=m$, & le cosinus $=n$, le sinus total étant toujours $=1$, de sorte que $mm+nn=1$.

34. Soient abaissées maintenant du point O sur le nouvel axe DQ & sur l'appliquée MQ les perpendiculaires Op & Oq ; à cause de l'angle $OMQ=ODQ$, de $DO=x+f$, & de $MO=y+g$, on aura $Op=Oq=(x+f)\sin. q=mx+mf$, & $Dp=(x+f)\cos. q=nx+nf$; ensuite $Oq=Op=(y+g)\sin. q=my+mg$, & $Mq=(y+g)\cos. q=ny+ng$. On conclura de là $DQ=t=mx+nf-my-mg$, & $QM=u=mx+mf+ny+ng$; on aura ainsi les nouvelles coordonnées t & u en x & en y . On en tirera $nt+mu=x+f$, & $nu-mt=y+g$, à cause de $mm+nn=1$; on aura donc $x=mu+nt-f$ & $y=nu-mt-g$, qui seront les valeurs qu'il faudra substituer dans l'équation entre x & y , au lieu de ces quantités, pour avoir l'équation entre t & u , qui exprimera la nature de la même courbe.

35. Puisqu'on ne peut imaginer aucun axe rs , pourvu qu'il soit situé dans le même plan que la courbe, qui ne se trouve compris dans cette dernière solution, il n'existera non plus pour la même courbe LM , entre les coordonnées perpendi-

culaires, aucune équation, qui ne soit renfermée dans celle qui a été trouvée entre t & u ; &, comme on peut varier d'une infinité de manières les quantités f & g , ainsi que l'angle g qui détermine m & n , il s'enfuit que toutes les équations, qui sont comprises dans celle qu'on vient d'obtenir de cette manière entre t & u , expriment la nature de la même courbe. C'est pourquoi on a coutume d'appeler cette équation entre t & u l'équation générale de la courbe LM , parce qu'elle renferme généralement toutes celles qui appartiennent à la même ligne.

36. Nous avons donné à entendre auparavant qu'il étoit difficile de juger, par la diversité de quelques équations entre les coordonnées, si elles appartenient à la même courbe ou à des courbes différentes: il se présente à présent un moyen de résoudre toutes ces sortes de questions. En effet, soient proposées deux équations, l'une entre x & y , & l'autre entre t & u ; soient supposés dans la première $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, dans laquelle m & n dépendent mutuellement l'une de l'autre, de manière que $mm + nn = 1$; alors il faudra voir si cette nouvelle équation entre t & u est renfermée dans celle qu'on a déjà; ou si les quantités f , g avec m & n peuvent être déterminées de manière qu'il en résulte l'autre équation entre t & u . Si cela peut se faire, ce sera une preuve que les deux équations expriment la même ligne courbe; sinon, elles appartiennent à des courbes différentes.

E X E M P L E.

On verra de cette manière que ces deux équations

$$yy - ax = 0$$

&

$$16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0,$$

appartiennent à la même courbe, quoiqu'elles diffèrent beaucoup entre elles. En effet, si nous supposons dans la première équation $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, elle se transformera en celle-ci :

$$\begin{aligned} n^2u^2 - 2mntu + m^2t^2 - 2ngu + 2mgt + gg \\ = 0 \\ - mau - nat + af \end{aligned}$$

Pour

Pour favoir si cette équation contient l'autre, multiplions celle-ci par nn , & la dernière par 16 , afin que les premiers termes soient les mêmes de part & d'autre, on aura :

$$16n^2u^2 - 24n^2tu + 9n^2t^2 - 55n^2au + 10n^2at = 0$$

&

$$16n^2u^2 - 32mntu + 16m^2t^2 - 32ngu + 32mgt + 16g^2 = 0$$

= 0

$$-16mau - 16nat + 16af$$

Cherchons à présent combien il y a de termes à égaler pour déterminer les quantités arbitraires f , g , m & n ; nous aurons d'abord $24n^2 = 32mn$, & $9n^2 = 16m^2$; chacune de ces équations donne $3n = 4m$, & , comme $m^2 = 1 - n^2$, on aura aussi $25n^2 = 16$, par conséquent $n = \frac{4}{5}$, & $m = \frac{3}{5}$; voilà donc déjà trois termes qui se conviennent. Le quatrième & le cinquième donnent $55n^2a = 32ng + 16ma$, & $10n^2a = 32mg - 16na$; d'où il faut favoir si l'on tirera pour g la même valeur; la première équation donne $g = \frac{55n^2a}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3}{8}a = a$, & la seconde, $g = \frac{5n^2a}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$; les deux valeurs sont les mêmes, & les cinq premiers termes s'accordent : il ne reste plus qu'à satisfaire à l'équation $gg + af = 0$, ce qui ne souffre aucune difficulté, puisque f n'a point encore été déterminée; on aura $f = -a$. On a donc fait voir que les deux équations proposées représentent la même courbe.

37. Mais, quoiqu'il puisse arriver que des équations très-différentes appartiennent à la même courbe, cependant de la différence des équations on conclut souvent en sûreté celle des lignes courbes; c'est lorsque les équations proposées sont de différens degrés, ou que les plus grandes dimensions, que forment les coordonnées x & y ou t & u , sont différentes dans les deux équations; car, à coup sûr, dans ce cas, les lignes courbes qu'elles représentent, seront aussi différentes. En effet, de quelque ordre que soit une équation entre x & y , si on fait $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, il en

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 C

réfultera entre t & u une équation du même ordre; donc, si une autre équation proposée entre t & u appartient à un autre ordre, elle exprimera aussi une autre courbe.

38. Ainsi, toutes les fois que deux équations proposées, l'une entre x & y & l'autre entre t & u , ne font pas du même ordre, on en pourra conclure sur-le-champ que les courbes qu'elles expriment sont différentes. Il ne peut donc plus y avoir de doute que pour les cas où les deux équations sont du même ordre; & alors il faudra s'aider du moyen que nous venons d'expliquer: mais, comme cette recherche est assez pénible, lorsque les équations sont d'un degré plus élevé, nous donnerons dans la suite des règles plus expéditives, qui feront juger sur-le-champ de la variété des courbes.

Pl. II. Fig. 12. 39. Ce que nous venons de prescrire, pour trouver l'équation générale, qui appartient à une ligne courbe quelconque, peut aussi s'appliquer à la ligne droite. Car, soit proposée, au lieu d'une ligne courbe, la droite LM que nous supposons parallèle à l'axe RS : dans quelque endroit qu'on place l'origine A des abscisses, l'appliquée PM sera toujours d'une grandeur constante, ou $y = a$: telle est l'équation de la ligne droite parallèle à l'axe. Cherchons à présent l'équation générale de la ligne droite, rapportée à un axe quelconque rs ; ayant fait $DG = g$, le sinus de l'angle $ODs = m$, le cosinus $= n$, & ayant appelé l'abscisse $DQ = t$, & l'appliquée $MQ = u$, à cause de $y = nu - mt - g$, on aura $nu - mt - g - a = 0$, équation générale de la ligne droite. Multiplions-la par la constante k , & supposons $nk = a$, $mk = -\ell$ & $(g + a)k = -b$, nous aurons l'équation $au + \ell t + b = 0$ pour la ligne droite; comme c'est l'équation générale du premier ordre entre t & u , il est clair qu'aucune équation du premier ordre entre deux coordonnées ne représente une ligne courbe, mais bien une ligne droite.

Pl. II. Fig. 13. 40. Toutes les fois donc qu'on aura entre les coordonnées x & y une équation de cette forme: $ax + \ell y - a = 0$, elle appartiendra à une ligne droite, dont on déterminera ainsi la position à l'égard de l'axe RS . Soit fait d'abord $y = 0$, on trouvera par-là sur l'axe le point C où cette droite le coupe;

car AC devient $= \frac{a}{c}$; soit fait ensuite $x = 0$, y deviendra $= \frac{a}{c}$, qui est la valeur de l'appliquée AB à l'origine des abscisses; & puisqu'on a deux points B & C sur la droite demandée, elle sera déterminée, & par conséquent la droite LN satisfera à l'équation proposée. Car, soit supposée une abscisse quelconque $AP = x$, & l'appliquée correspondante $MP = y$, on aura, à cause de la similitude des triangles CPM , CAB ; $CP : PM :: CA : AB$, c'est-à-dire $\frac{a}{c} - x : y :: \frac{a}{c} : \frac{a}{c}$, d'où l'on tirera $\frac{ay}{a} = \frac{a^2}{ac} - \frac{ax}{c}$ ou $ax + cy = a$, qui est l'équation proposée.

41. Si a ou $c = 0$, cette construction ne pourra plus avoir lieu; mais ces cas sont très-faciles par eux-mêmes; car soit $a = 0$, & $y = a$, il est clair que la ligne qui satisfait est une droite parallèle à l'axe, & qui en est éloignée d'une quantité $= a$; si $a = 0$, ou $y = 0$, la ligne qui satisfait se confondra avec l'axe. Mais, si $c = 0$, & $x = a$, il est évident que la ligne qui satisfait est une droite perpendiculaire à l'axe, qui est éloignée de l'origine des abscisses d'une quantité $= a$; c'est-à-dire, que dans ce cas il ne répond qu'une seule abscisse à toutes les appliquées, de sorte que l'abscisse cesse d'être une quantité variable. On voit donc clairement, d'après cela, comment les lignes droites peuvent être désignées par des équations entre des coordonnées perpendiculaires.

42. Nous avons supposé jusqu'ici que les coordonnées, qui exprimoient la nature de la courbe, étoient perpendiculaires entre elles; mais on déterminera semblablement la ligne courbe au moyen d'une équation donnée, si les appliquées sont inclinées à l'axe sous un angle quelconque; donc, réciproquement, la nature d'une courbe pourra être exprimée par une équation entre deux coordonnées obliques; & on peut, sans changer la courbe, faire varier ces équations d'une infinité de manières, en variant l'axe & l'origine des abscisses; ainsi on peut obtenir l'équation générale de la courbe pour chaque obliquité des coordonnées; mais si on suppose aussi que l'obliquité varie,

l'équation de la courbe fera encore beaucoup plus étendue, & nous l'appellerons pour cette raison l'équation la plus générale, parce qu'elle exprime la nature de la courbe, non-seulement en supposant l'équation rapportée à un axe quelconque & à une origine quelconque des abscisses, mais encore pour toute espèce d'obliquité entre les coordonnées. Ainsi cette équation la plus générale de toutes deviendra l'équation générale que nous avons donnée, si l'angle que font entre elles les coordonnées est droit.

Pl. II. Fig. 14.

43. Soit donnée pour la courbe LM une équation entre les coordonnées perpendiculaires; & sans changer l'axe RS ni l'origine A des abscisses, cherchons l'équation entre les coordonnées, qui font entre elles un angle ϕ . Du point M soit menée à l'axe RS la droite MQ , qui fasse l'angle donné MQA , dont le sinus $= \mu$ & le cosinus $= \nu$; AQ sera donc la nouvelle abscisse, & MQ , la nouvelle appliquée: en faisant $AQ = t$ & $QM = u$, on aura dans le triangle rectangle PMQ , $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t-x}{u}$. Donc $u = \frac{y}{\mu}$, & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$; & réciproquement $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Conséquemment, si dans l'équation proposée entre x & y on suppose $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$, on aura l'équation entre les coordonnées obliques t & u , qui font entre elles un angle donné ϕ .

44. Mais, si l'équation de la courbe LM est donnée entre les coordonnées obliques AQ & QM , on en pourra conclure réciproquement l'équation de la même courbe entre les coordonnées perpendiculaires AP & PM . Car, soit ϕ l'angle que les appliquées MQ font avec les abscisses AQ , dont le sinus $= \mu$ & le cosinus $= \nu$, & soit donnée l'équation entre $AQ = t$ & $QM = u$; il faudra mener du point M sur l'axe la perpendiculaire MP , & ayant fait l'abscisse $AP = x$ & l'appliquée $MP = y$; comme $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, en substituant ces valeurs dans l'équation proposée entre t & u , on obtiendra l'équation entre x & y , que l'on cherchoit.

45. Etant donnée maintenant une équation entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$ & $PM = y$, relativement à une courbe LM ; on pourra trouver de cette manière l'équation la plus générale, qui convient à cette même courbe. Soit prise une droite quelconque rs pour l'axe, & sur cette ligne un point D pour l'origine des abscisses; que les appliquées MT menées à cet axe fassent un angle $DTM = \phi$, dont le sinus $= \mu$, & le cosinus $= \nu$; on aura donc une nouvelle abscisse DT & une nouvelle appliquée TM , entre lesquelles il s'agit de trouver l'équation. Du point D soit menée sur le premier axe RS la perpendiculaire DG , & soit $AG = f$, $DG = g$; ayant mené DO parallèlement à l'axe RS , soit le sinus de l'angle $ODs = m$, & le cosinus $= n$. Abaissons, comme nous l'avons fait auparavant, du point M sur le nouvel axe rs la perpendiculaire MQ , & supposons $DQ = t$, $QM = u$; soient les coordonnées obliques $DT = r$, $TM = s$; on aura d'abord $t = r - \nu s$ & $u = \mu s$ (art. 43); ensuite $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$ (art. 36). On conclura de-là $x = nr - (n\nu - m\mu) s - f$ & $y = -mr + (\mu n + \nu m) s - g$; équations dans lesquelles la quantité $n\nu - m\mu$ exprime le cosinus de l'angle AVM , que les nouvelles appliquées font avec le premier axe RS , & la quantité $\mu n + \nu m$ exprime le sinus du même angle AVM . Donc, si dans l'équation entre x & y on substitue les valeurs qu'on a trouvées pour x & y , on aura l'équation entre les coordonnées obliques r & s , qui sera l'équation la plus générale, qui appartienne à la courbe LM .

46. Comme dans les valeurs qu'on substitue pour x & pour y , les nouvelles variables r & s n'ont qu'une dimension, il est évident que l'équation la plus générale est du même ordre que l'équation proposée entre x & y . Ainsi, de quelque manière qu'on transforme l'équation d'une courbe, en changeant, comme on voudra, l'axe & l'origine des abscisses, avec l'inclinaison mutuelle des coordonnées, l'équation restera toujours du même ordre. Donc, quoiqu'une équation entre les coordonnées, soit perpendiculaires, soit obliques, puisse varier d'une infinité de manières, sans cesser d'appartenir à la même

courbe; cependant on ne pourra jamais la ramener à un degré supérieur ou inférieur. C'est pour cela que des équations d'un ordre différent, quelque affinité qu'elles paroissent avoir d'ailleurs, représenteront toujours des courbes différentes.

CHAPITRE III.

De la Division des Lignes courbes algébriques en Ordres.

47. COMME il y a une variété infinie de lignes courbes ainsi que de fonctions, il sera impossible d'en acquérir la connoissance, à moins qu'on ne fasse de cette multitude infinie des classes bien distinctes, & qu'on n'aide & dirige, par ce moyen, l'esprit dans leur examen. Nous avons déjà divisé les courbes en *algébriques* & en *transcendantes*; mais ces deux divisions, à cause de la variété infinie des courbes, ont besoin d'une subdivision ultérieure. Au reste, nous ne considérons pour le présent que les courbes *algébriques*, qu'il s'agit ici de classer de la manière la plus avantageuse. Il faut donc d'abord fixer les caractères qui les distinguent, afin de rapporter à la même classe celles qui présentent le même caractère, & à une autre celles qui en présentent un différent.

48. Les caractères distinctifs de ces différentes classes ne peuvent donc se tirer d'ailleurs que des fonctions ou équations qui représentent la nature des lignes courbes, parce qu'il n'y a pas encore d'autre moyen d'arriver à la connoissance des courbes, & qu'aucun autre connu ne peut s'appliquer à toutes les courbes algébriques. Or, on peut distribuer de plusieurs manières, en différens genres, les fonctions & les équations entre deux coordonnées, comme nous l'avons fait dans le premier livre. Le point de vue qui se présente d'abord, & qui paroît le plus favorable pour la division des lignes courbes en différentes classes, eût de considérer les fonctions sous le rapport de leur multiformité. Il s'en suivroit

de-là que les lignes courbes, qui naissent des fonctions uniformes, seroient rapportées au premier genre; que celles qui proviennent des fonctions biformes, seroient du second genre, & que celles qui résultent des fonctions trifformes, appartiendroient au troisième genre; ainsi de suite.

49. Quoique cette division paroisse naturelle, cependant, si on y fait un peu plus d'attention, elle ne se trouvera nullement conforme à la nature & au caractère des lignes courbes. Car la multiformité des fonctions dépend principalement de la position de l'axe, laquelle est arbitraire; de sorte que si pour un axe l'appliquée est une fonction uniforme de l'abscisse, elle peut en devenir, en changeant l'axe, une fonction multiforme; de cette manière une même ligne courbe se trouveroit appartenir à différens genres, ce qui ne rempliroit pas notre but. Par exemple, la ligne courbe renfermée dans l'équation $a^3y = a^2x^2 - x^4$ appartiendroient au premier genre, parce que l'appliquée y est une fonction uniforme de x ; mais en échangeant les coordonnées, ou en prenant un axe perpendiculaire au premier, la même courbe sera représentée par l'équation $y^4 - a^2y^2 + a^3x = 0$, & appartiendroient par conséquent au quatrième genre. On ne peut donc admettre la multiformité des fonctions pour établir un caractère distinctif entre les différentes classes de lignes courbes.

50. La simplicité que les équations, qui expriment la nature des lignes courbes, peuvent présenter, eu égard au nombre de leurs termes, n'est pas plus propre à fixer leur distinction. En effet, si on rapporte au premier genre les courbes dont l'équation est composée de deux termes, comme $y^m = ax^n$; au second, celles dont l'équation renferme trois termes, comme $ay^m + cy^px^i + \gamma x^n = 0$; & ainsi de suite: il est clair que la même ligne appartiendroient encore à plusieurs genres. Car l'exemple donné art. 36 nous apprendroit que la ligne courbe, qui est représentée par l'équation $yy - ax = 0$, devroit être rapportée à la fois au premier genre & au quatrième, puisqu'en changeant l'axe, elle est aussi exprimée par cette équation:

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0.$$

Elle devroit aussi, en choisissant un autre axe & une autre ori-

gine des abscisses, appartenir en même temps au second genre, au troisième & au cinquième : cette division n'est donc pas admissible.

§ 1. Nous éviterons ces inconvénients, en prenant, pour classer les courbes, les ordres des équations qui expriment la relation entre les coordonnées. Car, pour une même courbe, l'équation restant toujours du même ordre, de quelque manière qu'on varie l'axe & l'origine des abscisses & même l'inclinaison des coordonnées, une même ligne courbe ne sera plus rapportée à différentes classes. Si on prend donc pour caractère distinctif le nombre des dimensions que les coordonnées perpendiculaires ou obliques forment dans l'équation, on ne troublera plus l'ordre des classes, en changeant l'axe ou l'origine des abscisses, ou en faisant varier l'inclinaison des coordonnées; & la même courbe sera toujours rangée dans la même classe, soit qu'on prenne chaque équation particulière entre les coordonnées, soit qu'on prenne l'équation générale, ou même la plus générale. Ainsi le caractère distinctif tiré du degré des équations convient parfaitement à la distinction des lignes courbes.

§ 2. Comme nous avons appelé *ordres* les divers genres d'équations que constitue le nombre plus ou moins grand de dimensions, nous distinguerons par le même nom les différents genres de lignes qui en résultent. Conséquemment, l'équation générale du premier ordre étant

$$0 = a + \epsilon x + \gamma y,$$

nous rapporterons au premier ordre toutes les lignes courbes qui, en prenant x & y pour coordonnées perpendiculaires ou obliques, proviennent de cette équation. Mais nous avons vu ci-dessus que cette équation renfermoit seulement la ligne droite; donc le premier ordre comprend la seule ligne droite, qui est la plus simple de toutes les lignes; & comme par cette raison le nom de courbe ne convient pas au premier ordre, nous ne distinguerons point les différents ordres par le nom de *lignes courbes*, mais simplement par le terme générique de *lignes*; ainsi le premier ordre des lignes ne renferme aucune courbe, & comprend uniquement la ligne droite.

§ 3. Au

53. Au reste, il est indifférent que les coordonnées soient perpendiculaires ou non ; car, si les appliquées sont avec l'axe un angle ϕ , dont le sinus soit μ & le cosinus ν , on ramènera l'équation aux coordonnées perpendiculaires, en faisant $y = \frac{u}{\mu}$, & $x = \frac{\nu u}{\mu} + t$ (art. 44) ; ce qui donne pour l'équation entre les perpendiculaires t & u

$$0 = \alpha + \epsilon t + \left(\frac{\epsilon \nu}{\mu} + \gamma \right) u.$$

Comme elle s'applique à autant de cas que la première, car l'une & l'autre est générale, il s'ensuit évidemment que la signification de l'équation ne se trouve pas restreinte, quoique l'angle que les appliquées font avec l'axe, soit supposé droit. Il en sera de même des équations des ordres supérieurs, qui n'en seront pas moins générales, quoique les coordonnées soient perpendiculaires. Ainsi, puisque la détermination de l'inclinaison des appliquées sur l'axe ne fait rien perdre de sa généralité à une équation générale d'un ordre quelconque, nous ne mettrons aucune restriction à ce qu'elle signifie, en supposant les coordonnées perpendiculaires ; car, quelle que soit la ligne courbe comprise dans une équation générale d'un ordre quelconque, lorsque les coordonnées sont entre elles des angles obliques, la même ligne sera renfermée dans la même équation, si elles sont des angles droits.

54. Toutes les lignes du second ordre seront comprises dans cette équation générale du second ordre

$$0 = \alpha + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 ;$$

c'est-à-dire que nous rangerons parmi les lignes du second ordre, toutes les lignes courbes que cette équation exprime, x & y désignant les coordonnées perpendiculaires. Ces lignes courbes sont donc les plus simples de toutes, puisqu'il n'y a point de lignes courbes dans le premier ordre ; c'est pour cette raison que quelques-uns les appellent les lignes courbes du premier ordre. Mais les courbes renfermées dans cette équation sont plus connues sous le nom de *Sections coniques*, parce qu'elles résultent toutes de la section d'un cône. Ces différentes espèces de lignes sont le Cercle, l'Ellipse, la

Parabole & l'Hyperbole, que nous déduirons dans la suite de l'équation générale.

55. On rapporte aux lignes du troisième ordre toutes les courbes que peut donner l'équation générale suivante du troisième ordre :

$$0 = a + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \nu y^3,$$

x & y étant pris pour les coordonnées perpendiculaires, puisque la condition de l'obliquité des appliquées ne change rien à l'expression de cette équation, comme nous l'avons déjà remarqué. Il y a dans cette équation beaucoup plus de lettres constantes que dans la précédente, & qu'on peut déterminer à volonté; aussi le nombre des espèces différentes comprises dans cet ordre est-il beaucoup plus considérable. NEWTON en a fait l'énumération.

56. On regarde comme appartenant au quatrième ordre toutes les lignes courbes, que fournit l'équation générale du quatrième ordre :

$$0 = a + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \nu y^3 + \lambda x^4 + \mu x^3 y + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + \rho y^4,$$

en prenant toujours x & y pour les coordonnées perpendiculaires; car, encore une fois, l'obliquité des appliquées n'ajoute rien à la généralité de l'équation. Il y a dans cette dernière équation quinze quantités constantes, qu'on peut déterminer à volonté; ce qui donne une variété d'espèces encore beaucoup plus considérable pour cet ordre que pour le précédent. On appelle ordinairement ces lignes du quatrième ordre les courbes du troisième ordre, parce que le second ordre des lignes en général ne forme que le premier ordre des courbes; & que pareillement les lignes du troisième ordre se confondent avec les courbes du second.

57. On comprend déjà par ce qui précède quelles sont les lignes courbes qui appartiennent au cinquième ordre, au sixième, au septième & aux suivans; mais comme il faut ajouter à l'équation générale du quatrième ordre, les termes

$$x^5; x^4 y; x^3 y^2; x^2 y^3; x y^4; y^5;$$

pour avoir l'équation générale qui renferme toutes les lignes du cinquième ordre; cette dernière sera composée de vingt &

un terme : & l'équation générale qui comprend toutes les lignes courbes du sixième ordre, aura vingt-huit termes, & ainsi des autres suivant la loi des nombres triangulaires. Ainsi l'équation générale pour les lignes de l'ordre n contiendra $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ termes, & autant de lettres constantes, qu'on peut déterminer à volonté.

58. Il ne faut pas croire que chaque détermination différente des constantes produise des courbes différentes; car nous avons vu dans le chapitre précédent qu'on pouvoit avoir pour une même ligne courbe, en changeant l'axe & l'origine des abscisses, une infinité d'équations différentes; ainsi la diversité des équations qui appartiennent au même ordre, ne mène point à la diversité des courbes indiquées par ces équations. C'est pourquoi dans l'énumération des genres & des espèces du même ordre, que l'on déduit de l'équation générale, il faut bien prendre garde de rapporter la même ligne courbe à deux espèces, ou à un plus grand nombre.

59. Puisque l'ordre de l'équation proposée entre les coordonnées fait connoître celui de la ligne courbe; étant donnée une équation algébrique quelconque entre les coordonnées x & y , on saura tout de suite à quel ordre il faudra rapporter la courbe représentée par cette équation. D'abord, si l'équation est irrationnelle, il faudra la délivrer de son irrationnalité, & s'il y a des fractions, il faudra de même les faire disparaître; cela fait, le nombre le plus grand des dimensions que forment les variables x & y , indiquera l'ordre auquel appartient la ligne courbe. Ainsi la courbe que donne cette équation $yy - ax = 0$, sera du second ordre; mais la courbe renfermée dans cette équation $yy = x\sqrt{(a^2 - x^2)}$, laquelle, débarrassée de son irrationnalité, devient du quatrième ordre, sera du quatrième ordre; & la ligne courbe que fournit cette équation $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$ sera du troisième ordre, parce que l'équation, après qu'on a fait disparaître les fractions, devient $aa y + xxx y = a^3 - axx$, où le terme $x^3 y$ renferme trois dimensions.

60. Il est possible qu'une seule & même équation donne plusieurs lignes courbes différentes, suivant que les appliquées tombent sur l'axe ou perpendiculairement, ou sous une obliquité donnée. Par exemple, cette équation $yy = ax - xx$ donne un Cercle, lorsque les coordonnées sont supposées perpendiculaires; mais, si les coordonnées sont obliques, la courbe sera une Ellypse. Cependant toutes ces courbes différentes appartiennent au même ordre, parce que le changement des coordonnées obliques en coordonnées perpendiculaires n'influe pas sur l'ordre de la courbe. Ainsi, quoique la grandeur de l'angle que forment les appliquées avec l'axe, n'ajoute ou n'ôte rien à la généralité de l'équation, qui exprime les lignes courbes de chaque ordre, cependant une équation particulière étant donnée, la courbe qu'elle renferme ne sera déterminée qu'autant que l'angle que font entre elles les coordonnées le sera aussi.

61. Pour qu'une ligne courbe se rapporte proprement à l'ordre indiqué par l'équation, il faut que cette équation ne puisse se décomposer en facteurs rationnels; car, si elle étoit composée de deux ou de plusieurs facteurs, alors elle comprendroit deux ou plusieurs équations, dont chacune engendreroit une ligne courbe particulière, & la réunion de ces courbes seroit tout ce que l'équation proposée pourroit représenter. Ces sortes d'équations qui sont décomposables en facteurs, ne renferment donc pas une seule courbe continue, mais plusieurs à la fois, dont chacune peut être exprimée par une équation particulière; ces courbes n'ont pas d'autre connexion entre elles, que celle qui résulte de la multiplication de leurs équations les unes par les autres; &, comme cette connexion est entièrement dépendante de notre volonté, de telles courbes ne peuvent pas être censées former une seule ligne continue. Ces équations que nous avons auparavant appelées complexes, produiront des lignes courbes non continues, mais composées cependant de courbes continues; c'est la raison qui les a fait appeler complexes.

62. Ainsi cette équation $y^2 = ay + xy - ax$ qui paroît appartenir à une ligne du second ordre, si on la réduit à zéro,

en faisant $yy - ay - xy + ax = 0$, sera composée de ces facteurs $(y-x)(y-a) = 0$: elle renferme donc ces deux équations $y - x = 0$ & $y - a = 0$. L'une & l'autre appartient à la ligne droite; la première forme avec l'axe à l'origine des abscisses un angle égal à la moitié d'un angle droit, & la seconde est parallèle à l'axe & menée à une distance $= a$. Ces deux lignes considérées ensemble sont comprises dans l'équation proposée $yy = ay + xy - ax$. On doit semblablement regarder comme complexe cette équation $y^4 - xy^3 - a^2x^2 - ay^3 + axxy + a^2xy = 0$; & par conséquent elle ne représente point une ligne continue du quatrième ordre; car les facteurs étant $(y-x)(y-a)(yy-ax)$, elle renfermera trois lignes distinctes, savoir deux droites & une courbe comprise dans l'équation $y^2 - ax = 0$.

63. On peut donc former à volonté des lignes complexes quelconques, qui renferment deux ou plusieurs droites ou courbes décrites, comme on voudra. Car, si la nature de chaque ligne est exprimée par une équation rapportée au même axe & à la même origine des abscisses, & qu'après avoir réduit chacune des équations à zéro, on les multiplie l'une par l'autre, il en résultera une équation complexe qui contiendra à la fois toutes les lignes supposées. Par exemple, si du centre C , & avec un rayon $CA = a$, on décrit un cercle, & qu'en outre on mène par le centre C une droite LN , on pourra pour un axe quelconque trouver une équation qui renferme en même temps le cercle & la ligne droite, comme si ces deux lignes n'en formoient qu'une.

Pl. II. Fig. 16.

64. Soit pris pour l'axe le diamètre AB , qui forme avec la droite LN un angle égal à la moitié d'un angle droit; ayant placé l'origine des abscisses en A , fait l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$; on aura pour la ligne droite $PM = CP = a - x$; & parce que le point M de la droite tombe du côté des appliquées négatives, on aura $y = -a + x$, ou $y - x + a = 0$; or, pour le cercle on a $PM^2 = AP \cdot PB$, & $BP = 2a - x$, ce qui donne $y^2 = 2ax - x^2$, ou $y^2 + x^2 - 2ax = 0$. Multiplions à présent ces deux équations l'une par l'autre, nous obtiendrons l'équation complexe du troisième ordre :

$y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2a^2x = 0$, qui représentera à la fois le cercle & la ligne droite. Ainsi on trouvera qu'à l'abscisse $AP = x$ répondent trois appliquées, deux pour le cercle & une pour la ligne droite. Soit, par exemple, $x = \frac{1}{2}a$, l'équation deviendra $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}a^2y - \frac{3}{8}a^3 = 0$; d'où l'on tire d'abord $y + \frac{1}{2}a = 0$, & en divisant par cette racine, $y^2 - \frac{3}{4}a^2 = 0$, ce qui donne les trois valeurs de y .

$$\text{I. } y = -\frac{1}{2}a;$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{2}a\sqrt{3};$$

$$\text{III. } y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

On voit donc que le tout est représenté par une équation, comme si le cercle ne formoit avec la droite LN qu'une courbe continue.

65. Cette différence entre les courbes complexes & complexes une fois bien établie, il est clair que les lignes du second ordre sont ou des courbes continues, ou des lignes complexes formées de deux lignes droites; car si l'équation générale a des facteurs, ils seront du premier ordre & désigneront par conséquent des lignes droites. Les lignes du troisième ordre seront ou complexes, ou complexes formées d'une droite & d'une ligne du second ordre, ou formées de trois lignes droites. De même les lignes du quatrième ordre seront continues, ou complexes, ou bien complexes renfermant une ligne droite & une ligne du troisième ordre, ou deux lignes du second ordre, ou enfin quatre lignes droites. Les lignes complexes du cinquième ordre & des ordres supérieurs seront susceptibles d'une combinaison analogue & d'une semblable énumération. Il suit de-là qu'un ordre quelconque de lignes renferme à la fois toutes les lignes des ordres inférieurs, c'est-à-dire, qu'elle peut contenir une ligne complexe des ordres inférieurs avec une ou plusieurs lignes droites, ou avec des

lignes du second ordre, du troisième ou des suivans, de manière que, si on fait une somme des nombres de chaque ordre, auquel appartiennent les lignes simples, il en résulte le nombre qui indique l'ordre de la ligne complexe.

CHAPITRE IV.

Des principales Propriétés de chaque Ordre de Lignes.

66. P A R M I les principales propriétés des lignes de chaque ordre, celle qui frappe d'abord est leur rencontre avec la ligne droite, ou le nombre d'intersections que ces lignes peuvent faire avec elle. Comme la ligne du premier ordre, ou une droite ne peut être coupée par une autre droite que dans un seul point, & que les lignes courbes peuvent l'être en plusieurs, on a donc raison de chercher en combien de points une courbe d'un ordre quelconque peut être rencontrée par une droite menée comme on voudra; car la solution de cette question servira à faire mieux connoître la nature des lignes courbes des différens ordres. On trouvera qu'une ligne du second ordre ne peut être coupée par une ligne droite en plus de deux points; une ligne du troisième ordre en plus de trois points, & ainsi de suite.

67. Nous avons déjà parlé de la manière dont on peut trouver en combien de points l'axe d'une courbe quelconque est coupé par cette courbe. Étant donnée une équation entre l'abscisse x & l'appliquée y , comme à l'endroit où la courbe tombe sur l'axe, l'appliquée y devient $= 0$, on fera donc l'équation $y = 0$, & l'équation résultante qui renfermera seulement x , donnera les valeurs de x , & par conséquent les points de l'axe où la courbe le coupera. Ainsi dans l'équation au cercle que nous avons trouvée ci-dessus, $yy = 2ax - xx$; si nous supposons $y = 0$, l'équation deviendra $0 = 2ax -$

Pl. II. Fig. 16.

xx , ce qui donne pour x deux valeurs, $x=0$ & $x=2a$, qui indiquent que l'axe RS rencontre le cercle d'abord à l'origine A des abscisses, & ensuite au point B , AB étant $= 2a$. De même dans les autres courbes, en faisant dans l'équation $y=0$; les racines de x indiqueront les intersections de la courbe avec l'axe.

68. Comme dans l'équation générale d'une courbe une droite quelconque fait la fonction d'un axe, en supposant dans cette équation l'appliquée $y=0$, celle qui restera fera voir en combien de points la courbe est rencontrée par une droite quelconque. Or, on aura une équation qui ne contiendra plus que l'abscisse x comme inconnue, & dont les racines feront connoître les intersections de la courbe avec l'axe. Le nombre des intersections dépendra donc de la plus grande puissance de x dans l'équation, & par conséquent il ne pourra être plus grand que l'exposant de cette plus grande puissance. Il y aura, au reste, autant d'intersections que l'exposant de la plus grande puissance de x contient d'unités, si toutes les racines de l'équation sont réelles; mais, s'il y a quelques racines imaginaires, le nombre des intersections en sera diminué d'autant.

69. Comme nous avons donné pour chaque ordre de lignes l'équation la plus générale, nous en pourrions conclure, de la manière que nous venons d'exposer, en combien de points une droite quelconque peut couper les lignes de chaque ordre. Prenons donc l'équation générale qui convient aux lignes du premier ordre, ou à la ligne droite, $0 = a + \ell x + \gamma y$; en faisant $y=0$, on a $0 = a + \ell x$, équation qui ne peut avoir plus d'une racine; d'où il suit qu'une ligne droite ne peut être coupée qu'en un point par une autre ligne droite; mais, si on suppose $\ell=0$, l'équation $0 = a$ est impossible & fait voir que dans ce cas l'axe n'est rencontré nulle part par la ligne droite; en effet ces deux droites seront parallèles entre elles; comme l'apprend l'équation $0 = a + \gamma y$, que donne la supposition de $\ell=0$.

70. Si dans l'équation générale pour les lignes du second ordre :

$$0 = a + \ell x + \gamma y + \delta xx + \epsilon xy + \zeta yy,$$

nous

nous faisons $y=0$, nous aurons l'équation :

$$0 = a + \epsilon x + \delta x^2,$$

qui renferme deux racines réelles, ou qui n'en renferme aucune, ou bien qui en renferme une seule, si $\delta=0$. Ainsi une ligne du second ordre sera coupée par une droite ou dans deux points, ou dans un seul, ou ne le sera nulle part. Ces cas peuvent être renfermés dans un seul, en disant qu'une ligne du second ordre ne peut être coupée par une ligne-droite en plus de deux points.

71. Si dans l'équation générale pour les lignes du troisième ordre, nous supposons $y=0$, nous aurons l'équation :

$$0 = a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3;$$

qui, ne pouvant avoir plus de trois racines, fait voir clairement que les lignes du troisième ordre ne peuvent être coupées par une droite en plus de trois points. Mais il peut arriver que la ligne du troisième ordre soit rencontrée par une droite en un plus petit nombre de points; savoir en deux, si $\delta=0$, & si en même temps les deux racines de l'équation $0 = a + \epsilon x + \gamma x x$ sont réelles; ou en un seul point, si deux racines de l'équation sont imaginaires, ou si on a à la fois $\delta=0$ & $\gamma=0$; ou enfin, qu'elle ne le soit nulle part, si $\delta=0$, & que les autres racines de l'équation soient imaginaires; ce qui arrivera aussi, si ϵ , γ , & δ s'évanouissent, & que a ne soit pas une quantité égale à zéro.

72. On conclura d'une manière semblable, que les lignes du quatrième ordre ne peuvent être coupées par une droite en plus de quatre points, & cette propriété s'étendra également à tous les autres ordres, de manière que les lignes de l'ordre n ne pourront être coupées par une ligne droite en plus de n points. Il ne s'ensuit pas de-là qu'une ligne droite quelconque coupe en n points toute ligne de l'ordre n ; il peut arriver que le nombre des intersections soit moindre, & même nul, ainsi que nous l'avons observé pour les lignes du second & du troisième ordre. Ainsi tout le sens de la proposition consiste en ce que le nombre des intersections ne peut jamais être plus grand que l'exposant de l'ordre, auquel la ligne courbe est rapportée.

73. Le nombre des intersections qu'une ligne droite quelconque fait avec une ligne donnée, ne pourra donc déterminer l'ordre auquel une ligne courbe appartient. Car, si le nombre des intersections $= n$, il ne s'enfuit pas que la courbe appartienne à l'ordre n ; mais elle peut être rapportée aussi à quelque ordre supérieur: il peut se faire même que la courbe ne soit pas algébrique, mais transcendante. Ce cas excepté, on peut toujours affirmer en toute sûreté qu'une ligne courbe, qui est coupée par une droite en n points, ne peut appartenir à aucun ordre inférieur de lignes. Ainsi, lorsqu'une droite coupe quatre points une courbe proposée, il est certain qu'elle n'appartient ni au second, ni au troisième ordre; mais doit-elle être rapportée au quatrième ordre, ou à un ordre supérieur, ou bien est-elle transcendante? C'est ce qu'on ne peut décider.

74. Les équations générales, que nous avons données pour les lignes de chaque ordre, contiennent plusieurs quantités constantes arbitraires, qui détermineront entièrement la ligne courbe, si on leur donne des valeurs déterminées; & elles seront décrites sur un axe donné, de manière que toutes les autres courbes, qui étoient renfermées dans la même équation générale, se trouvent par-là exclues. Ainsi, quoique l'équation du premier ordre $0 = \alpha + \epsilon x + \gamma y$ ne convienne qu'à la ligne droite, on peut varier à son égard, d'une infinité de manières, la position de l'axe, suivant la diversité infinie des valeurs qu'on peut donner aux constantes α , ϵ , γ . Mais, dès qu'une fois ces quantités constantes ont une valeur déterminée, la position de la ligne droite est fixée; & il n'y en a plus aucune autre qui puisse satisfaire à l'équation.

75. Cette équation $0 = \alpha + \epsilon x + \gamma y$ pourroit paroître susceptible de trois déterminations, à cause des trois constantes arbitraires α , ϵ & γ . Mais on fait par la nature des équations, que pour qu'elle soit déterminée, il suffit de connoître le rapport entre ces constantes, c'est-à-dire le rapport de deux d'entre elles à la troisième; ainsi cette équation sera seulement susceptible de deux déterminations. En effet, si on détermine ϵ & γ par la lettre α , de manière que $\epsilon = -\alpha$, & $\gamma = 2\alpha$,

l'équation $0 = a - ax + 2ay$, à cause que a sort par la division, fera entièrement déterminée. Par une raison semblable, l'équation générale des lignes du second ordre, qui contient six constantes arbitraires, est susceptible seulement de cinq déterminations; l'équation générale des lignes du troisième ordre seulement de neuf; & généralement, l'équation générale pour les lignes de l'ordre n admettra $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ déterminations.

76. En déterminant ces constantes arbitraires, on peut assujettir la ligne courbe à passer par un point donné, ce qui donnera déjà une détermination. Car, soit proposée l'équation générale d'un ordre quelconque de lignes, qu'il s'agisse de déterminer en faisant passer la ligne courbe par le point B . Ayant pris à volonté un axe & sur cette ligne un point A pour l'origine des abscisses, soit abaissée du point B sur l'axe la perpendiculaire Bb , il est évident que si la courbe passe par le point B , en prenant l'intervalle Ab pour x , la perpendiculaire Bb donne la valeur de l'appliquée y . C'est pourquoi, si dans l'équation générale proposée on substitue Ab au lieu de x & Bb au lieu de y , il en résultera une équation qui pourra déterminer une des constantes a, b, c, d, e , &c.; cela fait, toutes les courbes qui sont comprises dans l'équation générale déterminée de cette manière, passeront par le point donné B .

Pl. II. Fig. 17.

77. Si la ligne courbe doit passer, en outre, par le point C , ayant abaissé de ce point une perpendiculaire Cc à l'axe, & fait dans l'équation $x = Ac$ & $y = Cc$, la nouvelle équation qui en proviendra, déterminera pareillement une des quantités constantes a, b, c, d , &c. On conçoit de même que, si on assigne trois points B, C, D , par où la ligne courbe doit passer, cette condition déterminera trois constantes, & qu'avec quatre points B, C, D, E , quatre constantes se trouvent déterminées. Donc, si on propose autant de points, par où la courbe doit passer, qu'il y a de déterminations dont l'équation générale soit susceptible, la ligne courbe sera entièrement déterminée, & elle sera par conséquent la seule qui puisse passer par tous les points proposés.

78. Puisque l'équation générale pour les lignes du premier ordre, ou pour la ligne droite, n'est susceptible que de deux déterminations ; si on propose deux points par où la ligne du premier ordre ou une droite soit assujettie à passer, cette ligne est entièrement déterminée, & par deux points on ne pourra pas mener plus d'une ligne droite; ce qui, à la vérité, est connu par les élémens. Mais si on ne donnoit qu'un point, alors, comme l'équation ne seroit pas déterminée, on pourroit mener encore une infinité de lignes droites par ce même point.

79. L'équation générale pour les lignes du second ordre admet cinq déterminations ; par conséquent, si on propose cinq points par lesquels une ligne courbe doit passer, la ligne du second ordre est entièrement déterminée. C'est pourquoi on ne peut faire passer qu'une seule ligne du second ordre par cinq points donnés ; mais, si on propose seulement quatre points ou un moindre nombre, comme l'équation n'est pas alors déterminée, il y aura une infinité de lignes toutes du second ordre qu'on pourra faire passer par ces points. S'il arrivoit que de ces cinq points trois fussent en ligne droite, comme une ligne du second ordre ne peut être rencontrée par une droite en trois points, on n'aura aucune courbe continue, mais bien une ligne complexe, savoir deux lignes droites, qui, comme nous en avons déjà prévenu, sont renfermées dans l'équation générale du second ordre.

80. L'équation générale pour les lignes du troisième ordre étant susceptible de neuf déterminations, en prenant neuf points à volonté, on pourra toujours y faire passer une ligne du troisième ordre, & ce fera la seule. Mais, si le nombre des points est au-dessous de neuf, on pourra faire passer par ces points une infinité de lignes du troisième ordre. Semblablement, par quatorze points donnés on ne pourra faire passer qu'une ligne du quatrième ordre, & par vingt points qu'une ligne du cinquième ordre, ainsi de suite ; & en général, les lignes d'un ordre n seront déterminées par autant de points que cette formule $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ con-

tient d'unités ; de sorte que , si le nombre des points donnés est moindre , on peut alors faire passer par ces points une infinité de lignes de l'ordre n .

81. A moins qu'on ne propose un nombre de points plus grand que $\frac{n(n+3)}{2}$, il y aura toujours une ligne ou une infinité de lignes de l'ordre n qu'on pourra faire passer par ces points ; savoir une , si le nombre des points donnés $= \frac{n(n+3)}{2}$, & une infinité , s'il est moindre. Au reste , de quelque manière que ces points soient disposés , la solution ne deviendra jamais impossible ; car la détermination des coefficients α , ϵ , γ , δ , &c. n'exige jamais la résolution d'une équation du second degré ou d'un degré supérieur , mais s'achève toute entière par des équations simples ; on n'aura donc jamais de valeurs imaginaires pour les quantités α , ϵ , γ , &c. , ni de valeurs multiformes : c'est pourquoi on aura toujours une ligne réelle qui passera par les points proposés ; & cette ligne sera unique , si on propose autant de points que l'équation générale peut recevoir de déterminations.

82. Comme la position de l'axe est arbitraire , la détermination des coefficients deviendra plus facile , si on fait passer l'axe par un des points donnés , & qu'on y place en même temps l'origine A des abscisses ; car en supposant $x=0$, on devra avoir $y=0$, ce qui fait voir tout de suite que dans l'équation générale :

$$0 = \alpha + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \dots ,$$

α devient $= 0$. On peut ensuite faire aussi passer l'axe par un autre point proposé ; par ce moyen le nombre des quantités , qui fixent la position des points donnés , sera diminué. Enfin , au lieu d'appliquées perpendiculaires , on peut choisir des appliquées obliques , de manière que celle qui passe par l'origine des abscisses , passe en même temps par un autre point donné ; car il n'y a pas plus de difficulté pour connoître & construire la courbe , lorsque les appliquées sont inclinées à l'axe , que lorsqu'elles sont perpendiculaires.

83. Si pour trouver une ligne du second ordre , qui passe Pl. II. Fig. 18.

par les cinq points donnés A, B, C, D & E , on mène l'axe par les deux points A & B , & qu'on place l'origine des abscisses à un de ces points A ; on joindra alors ce point A avec un troisième C , & on prendra l'angle CAB pour marquer l'obliquité des appliquées. Il faudra donc mener des autres points D & E sur l'axe les appliquées Dd, Ee parallèles à AC . Ensuite on fera $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$ & $eE = f$; si on prend l'équation générale des lignes du second ordre :

$$0 = a + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2,$$

il est évident

qu'en supposant		on aura
$x = 0$		$y = 0$
$x = 0$		$y = b$
$x = a$		$y = 0$
$x = c$		$y = d$
$x = e$		$y = f$
d'où résultent les cinq équations		

- I. $0 = a$
- II. $0 = a + \gamma b + \zeta b^2$
- III. $0 = a + \epsilon a + \delta a^2$
- IV. $0 = a + \epsilon c + \gamma d + \delta e^2 + \epsilon cd + \zeta d^2$
- V. $0 = a + \epsilon e + \gamma f + \delta e^2 + \epsilon ef + \zeta f^2$.

On aura donc $a = 0$; $\gamma = -\zeta b$; $\epsilon = -\delta a$; ces valeurs substituées dans les autres équations donnent :

$$0 = -\delta ac - \zeta bd + \delta c^2 + \epsilon cd + \zeta dd$$

$$0 = -\delta ae - \zeta bf + \delta e^2 + \epsilon ef + \zeta ff;$$

multiplions la première par ef & la seconde par cd , & retranchons l'une de l'autre pour éliminer ϵ , nous aurons :

$$0 = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef + \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdf,$$

ou

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdf}{acde - acef - cdee + ccf}$$

d'où l'on conclut :

$$\delta = df(be - bc - de + cf)$$

$$\zeta = ce(ad - af - de + cf);$$

& par conséquent tous les coefficients seront déterminés.

84. Après avoir trouvé de cette manière tous les coefficients de l'équation générale $0 = ax + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \&c.$; on décrira la ligne courbe sur l'axe donné & sous l'angle choisi pour l'obliquité des appliquées , en déterminant , au moyen de l'équation, autant de points qu'on voudra ; & cette ligne courbe passera par tous les points proposés. Si l'équation générale est susceptible de plus de déterminations qu'il n'y a de points donnés, on prendra les autres à volonté, & on aura à décrire, au moyen d'une équation entièrement déterminée, une ligne courbe qui passera par chacun des points proposés. Au reste, on donne à l'abscisse x successivement des valeurs tant positives que négatives, comme 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ; & $-1, -2, -3, -4, \&c.$; & l'on tire de l'équation pour chacune de ces valeurs, celles de l'appliquée y qui conviennent ; par ce moyen on aura un grand nombre de points assez voisins, par où passera la courbe, & qui par conséquent rendront sensible le cours de cette ligne.

CHAPITRE V.

Des Lignes du second Ordre.

85. COMME le premier ordre des lignes ne comprend que la ligne droite dont la nature est déjà assez connue par les éléments de géométrie, passons aux lignes du SECOND ORDRE, & examinons-les avec un peu plus d'attention, tant parce que ce sont les courbes les plus simples, que parce qu'elles ont un usage très-étendu dans toute la haute géométrie. Ces lignes, qu'on désigne aussi sous le nom de SECTIONS CONIQUES, jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, qui étoient connues des anciens géomètres, ou qui ont été découvertes par les modernes. La connoissance en est jugée si nécessaire, que la plupart des auteurs

ont accoutumé de les expliquer immédiatement après la géométrie élémentaire. Mais, comme toutes ces propriétés ne peuvent pas dériver d'un seul principe; qu'il y en a qui se tirent de l'équation de ces courbes, & d'autres de leur génération par la section d'un cône; & qu'il y en a d'autres enfin qui se concluent de la manière dont elles sont décrites; nous nous contenterons d'examiner ici celles qu'on peut déduire de leur équation, sans recourir à d'autres moyens.

86. Considérons donc cette équation générale :

$$0 = a + \zeta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

qui, comme nous l'avons fait voir, est propre à représenter toutes les lignes du second ordre, quelle que soit l'inclinaison sous laquelle les appliquées rencontrent l'axe. Donnons-lui cette forme :

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \zeta x + a}{\zeta} = 0;$$

elle apprend clairement que pour chaque abscisse x on a deux appliquées y , ou qu'on n'en a aucune, suivant que les deux racines de y seront réelles ou imaginaires. Si $\zeta = 0$, alors il n'y aura plus qu'une appliquée qui répondra à chaque abscisse; l'autre deviendra infinie: ainsi ce cas ne peut nuire à la recherche dont nous nous occupons.

Pl. II. Fig. 19.

87. Toutes les fois que les deux valeurs de y sont réelles; ce qui a lieu, lorsque l'appliquée PMN coupe la courbe en deux points M & N , on aura la somme des racines $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$
 $= \frac{-\varepsilon \cdot AP - \gamma}{\zeta}$; en prenant la droite AEF pour l'axe des abscisses, A pour leur origine, & l'angle arbitraire APN pour marquer l'inclinaison des appliquées à l'égard de l'axe. Si on mène sous le même angle une autre appliquée quelconque npm , dont la valeur pm est négative, on aura de même $pn - pm = \frac{-\varepsilon \cdot AP - \gamma}{\zeta}$. En retranchant cette équation de la première, le résultat sera $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon(AP - AP)}{\zeta}$
 $= \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta}$. Menons des points m & n des droites parallèles à l'axe,

l'axe, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la première appliquée aux points μ & ν ; nous aurons $M\mu + N\nu = \frac{\epsilon \cdot Pp}{\zeta}$, ou la somme $M\mu + N\nu$ dans le rapport constant de ϵ à ζ avec Pp , ou $m\mu$, ou $n\nu$. Ainsi ce rapport fera toujours le même, quelles que soient les droites MN & mn qu'on mènera dans la courbe, pourvu qu'elles fassent avec l'axe un angle constant, & que les droites $n\nu$ & $m\mu$ soient parallèles à l'axe.

88. Si l'appliquée PMN est reculée jusqu'à ce que les points M & N coïncident, alors elle touchera la courbe; car, lorsque les deux points d'intersection coïncident, la sécante devient tangente. Soit donc KCI une telle tangente, à laquelle soient menées parallèlement tant de droites qu'on voudra MN , mn , qui rencontrent la courbe de part & d'autre. On appelle ordinairement ces droites CORDES & ORDONNÉES; & soient menées des points M , N , m , n , à la tangente les droites MI , NK , & mi , nk , parallèles à l'axe qu'on a choisi d'abord. Comme les intervalles CK , Ck , tombent à présent en sens contraire du point C , on devra les prendre négativement. On aura donc $CI - CK : MI :: \epsilon : \zeta$; & $Ci - Ck : mi :: \epsilon : \zeta$; donc $CI - CK : MI :: Ci - Ck : mi$, ou $MI : mi :: CI - CK : Ci - Ck$.

Pl. II. Fig. 20:

89. La position de l'axe à l'égard de la courbe étant arbitraire, on pourra mener à volonté les droites MI , NK , mi , nk , pourvu qu'elles soient parallèles entre elles; & on aura toujours $MI : mi :: CI - CK : Ci - Ck$. Donc, si les parallèles MI & NK sont menées de manière que $CI = CK$, ce qui arrivera, si les lignes MI & NK sont menées parallèlement à la droite CL , qui, partant du point de contact C , divise l'ordonnée MN en deux parties égales au point L : alors, à cause de $CI - CK = 0$, on aura aussi $Ci - Ck = \frac{mi}{MI} (CI - CK) = 0$. Donc, si on prolonge CL jusqu'en l , comme, à cause des lignes mi & nk aussi parallèles à CL , on a $ml = Ci$, & $nl = Ck$, on aura pareillement $ml = nl$. D'où il suit qu'une droite CLl , qui, menée du point de contact C divise en deux parties égales une ordonnée MN paral-

lèle à la tangente, coupe aussi de la même manière toutes les ordonnées $m n$ parallèles à la même tangente.

90. Par la raison que la droite CLl divise en deux parties égales toutes les ordonnées qui sont parallèles à la tangente ICK , cette ligne CLl s'appelle ordinairement le **DIAMÈTRE** de la ligne du second ordre ou de la section conique. On peut donc mener dans chaque ligne du second ordre une infinité de diamètres, puisqu'il n'y a aucun point de la courbe où l'on ne puisse imaginer une tangente. En effet, quelle que soit la tangente donnée ICK , on n'a qu'à lui mener parallèlement une ordonnée quelconque MN , & la diviser en deux également au point L , la droite CL fera un diamètre de la ligne du second ordre, qui coupera en deux parties égales toutes les ordonnées parallèles à la tangente IK .

91. Il suit aussi de ce qui précède, que, si une droite Ll divise en deux parties égales deux ordonnées parallèles quelconques MN & mn , elle partagera de la même manière toutes les autres ordonnées parallèles à celles-ci; car la courbe aura quelque part une tangente IK parallèle à ces ordonnées, & par conséquent la droite dont il s'agit fera un diamètre. Voilà donc une nouvelle manière de trouver pour une ligne donnée du second ordre une infinité de diamètres: il suffira de mener à volonté deux ordonnées ou cordes MN & mn parallèles entre elles, de les diviser en deux également aux points L & l ; la droite qui passera par ces deux points, divisera semblablement toutes les autres ordonnées parallèles à celles-ci, on aura par ce moyen un diamètre; & si par le point C , où le diamètre prolongé rencontre la courbe, on mène une droite IK parallèlement aux ordonnées, cette droite touchera la courbe au point C .

92. Nous avons été conduits à cette propriété par la simple considération de la somme des racines de y dans l'équation:

Pl. II. Fig. 19.

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \zeta x + a}{\zeta} = 0.$$

Mais il est constant, par la même équation, que le produit des deux racines $PM.PN = \frac{\delta xx + \zeta x + a}{\zeta}$. Cette expression

$\frac{\delta x^2 + \zeta x + \alpha}{\zeta}$ a deux facteurs simples réels, ou n'en a point. Le premier cas a lieu, si l'axe coupe la courbe en deux points E & F ; car, comme on a pour ces points $y = 0$, on aura aussi $\frac{\delta x^2 + \zeta x + \alpha}{\zeta} = 0$; les racines de x seront AE & AF , & les facteurs $(x - AE)(x - AF)$; de sorte que $\frac{\delta x^2 + \zeta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta} (x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta} . PE . PF$, à cause de $x = AP$. On aura donc $PM . PN = \frac{\delta}{\zeta} . PE . PF$, ou le rectangle $PM . PN$ sera au rectangle $PE . PF$ dans le rapport constant de $\delta : \zeta$, par-tout où sera menée l'appliquée PMN , pourvu que l'angle NPF soit égal à celui qui désigne l'inclinaison des appliquées à l'axe. Donc, si on imagine une ordonnée mn , à cause que les quantités ep & pm deviennent négatives, on aura semblablement $pm . pn = \frac{\delta}{\zeta} . pE . pF$.

93. Ayant donc tiré une droite quelconque PEF qui coupe la ligne du second ordre aux deux points E & F , si on mène à cette ligne des ordonnées quelconques NMP , npm , parallèles entre elles, on aura toujours $PM . PN : PE . PF :: pm . pn : pE . pF$; car les deux rapports de cette proportion sont égaux à $\delta : \zeta$. Semblablement, comme la position de l'axe est arbitraire, en prenant la droite PMN pour l'axe, & menant parallèlement à PEF une autre ligne quelconque eqf , on aura $PM . PN : PE . PF :: qM . qN : qe . qf :: pm . pn : pE . pF$, & alternant, $qe . qf : pE . pF :: qM . qN : pm . pn$. Étant donc données deux ordonnées parallèles ef , EF , si on en imagine deux autres quelconques MN & mn aussi parallèles entre elles, & qui coupent les premières aux points P, p, q, r , on aura cette suite de rapports égaux $PM . PN : PE . PF :: pm . pn : pE . pF :: qM . qN : qe . qf :: rm . rn : re . rf$. C'est - là une seconde propriété générale des lignes du second ordre.

Pl. III. Fig. 21.

94. Donc, si les deux points M & N de la courbe coïncident, la droite PMN deviendra tangente au point de

Pl. III. Fig. 24. concours de ces deux points, & le rectangle $PM.PN$ deviendra le carré de PM ou de PN ; ce qui donne une nouvelle propriété des tangentes. En effet, supposons la droite CPp qui touche la ligne du second ordre au point C , & menons tant de lignes que nous voudrons PMN , pmn , parallèles entre elles, & qui par conséquent fassent toutes avec la tangente un même angle, nous aurons, par la propriété qui vient d'être trouvée :

$$PC^2 : PM.PN :: pC^2 : pm.pn;$$

c'est-à-dire, que, quelle que soit l'ordonnée qu'on mène à la tangente sous un angle donné, le rapport du carré de la droite CP au rectangle $PM \times PN$ sera constant.

Pl. II. Fig. 20. 95. Il suit de-là en même temps que, si dans une ligne du second ordre on mène un diamètre quelconque CD , qui coupe en deux parties égales toutes les cordes MN , mn , & que ce diamètre rencontre la courbe en deux points C & D , on aura :

$$CL.LD : LM.LN :: Cl.lD : lm.ln.$$

Mais, comme $LM = LN$ & $lm = ln$, on aura $LM^2 : lm^2 :: CL.LD : Cl.lD$, ou le carré de la demi-ordonnée LM fera continuellement au rectangle $CL.LD$ dans un rapport constant. Ainsi, en prenant le diamètre CD pour axe, les demi-ordonnées LM pour appliquées, on trouvera l'équation aux lignes du second ordre; car, soit le diamètre $CD = a$, l'abscisse $CL = x$, & l'appliquée $LM = y$, LD sera $a - x$, & on aura y^2 à $ax - xx$ dans un rapport constant, que je supposerai celui de h à k : ce qui donnera pour les lignes du second ordre l'équation $yy = \frac{h}{k}(ax - x^2)$.

Pl. III. Fig. 22. 96. Les deux propriétés des lignes du second ordre, que nous avons déjà trouvées, pourront nous en faire découvrir plusieurs autres. Supposons dans une ligne du même ordre deux ordonnées AB & CD parallèles entre elles, & achevons le quadrilatère $ACDB$; si nous menons par un point quelconque M de la courbe une ordonnée MN parallèle à AB & à CD , & qui coupe les droites AC & BD aux points P

& Q , les parties PM & QN feront égales entre elles. Car la droite qui coupe en deux parties égales les deux ordonnées AB & CD parallèles entre elles, coupera de la même manière l'ordonnée MN ; mais, comme on le fait par la géométrie élémentaire, la même droite qui partage également les deux côtés AB & CD , divisera aussi en deux parties égales la portion PQ . Ainsi, puisque les lignes MN & PQ sont divisées également au même point, il s'en suit nécessairement que $MP = NQ$, & $MQ = NP$. On pourra donc, étant donné, outre les quatre points A, B, C & D , un cinquième M , en trouver, au moyen de ce dernier, un sixième N , en prenant $NQ = MP$.

97. Puisque $MQ \cdot QN$ est à $BQ \cdot QD$ dans un rapport constant, à cause de $QN = MP$, $MP \cdot MQ$ sera aussi à $BQ \cdot QD$ dans le même rapport; c'est-à-dire, que si on prend un autre point quelconque de la courbe, comme c , & que par ce point on imagine la droite GcH parallèle aux lignes AB & CD , jusqu'à ce qu'elle rencontre les côtés AC, BD , aux points G & H , on aura aussi le même rapport constant pour celui de $cG \cdot cH$ à $BH \cdot DH$, & par conséquent $cG \cdot cH : BH \cdot DH :: MP \cdot MQ : BQ \cdot DQ$. Mais, si on mène par M parallèlement à la base BD une ligne RMS , qui rencontre les ordonnées parallèles AB, CD , en R & en S , à cause de $BQ = MR$, & de $DQ = MS$, le rapport $MP \cdot MQ : MR \cdot MS$ sera aussi constant. Donc, si par un point M quelconque de la courbe on mène deux droites, l'une MPQ parallèle aux côtés AB, CD , & l'autre RMS parallèle à la base BD , les intersections P, Q, R & S seront tellement disposées, que le rapport de $MP \cdot MQ$ à $MR \cdot MS$ sera constant.

98. Si au lieu de l'ordonnée CD , qui est supposée parallèle à AB , on en mène une autre quelconque Dc du point D , & qu'on tire la corde Ac : de manière que les droites MQ & RMS menées, comme auparavant, par le point M , parallèlement aux côtés AB & BD , coupent les côtés du quadrilatère $ABDc$ aux points p, Q, R & s ; une semblable propriété aura lieu. En effet, on a $MP \cdot MQ : BQ \cdot DQ$

$:: cG.cH : BH.DH$, ou $MP.MQ : MR.MS :: cG.cH : BH.DH$, à cause de la droite RS parallèle & égale à BD ; mais les triangles semblables APp , AGc , & DSs , cHD , donnent, savoir les premiers, la proportion $Pp : AP :: Gc : AG$, ou, parce que $AP : AG :: BQ : BH$, celle-ci : $Pp : BQ :: Gc : BH$, & les derniers, la proportion $DS(MQ) : Ss :: cH : DH$; &, en multipliant par ordre, on aura $MQ.Pp : MR.Ss :: cG.cH : BH.DH$, à cause de $BQ = MR$. Cette dernière proportion comparée avec celle qui a été trouvée ci-dessus, donne :

$$MP.MQ : MR.MS :: Pp.MQ : MR.Ss,$$

& prenant la somme des antécédens & celle des conséquens :

$$MP.MQ : MR.MS :: Mp.MQ : MR.Ms;$$

ainsi, dans quelque endroit de la courbe qu'on prenne les points c & M , le rapport de $Mp.MQ$ à $MR.Ms$, sera toujours le même, pourvu que les droites MQ & Rs , qui passent par M , soient parallèles aux cordes AB & BD . Il suit de la proportion précédente que $MP : MS :: Mp.Ms$; donc, puisqu'en faisant varier le point c on ne fait que changer les points p & s , le rapport de Mp à Ms sera constant, quelle que soit la position du point c , pourvu que le point M reste fixe.

99. Si on prend quatre points A, B, C, D , sur une ligne du second ordre, & qu'on les joigne par des droites, afin d'avoir le trapèze inscrit $ABDC$, on déduira de ce qui précède une propriété des sections coniques beaucoup plus générale; c'est que, si d'un point quelconque M de la courbe on mène à chacun des côtés du trapèze, sous des angles donnés, les droites MP, MQ, MR & MS , les rectangles formés par les deux lignes menées aux côtés opposés seront toujours entre eux dans le même rapport, c'est-à-dire, que $MP.MQ$ sera à $MR.MS$ dans un rapport constant, quelle que soit la position du point M sur la courbe, pourvu que les angles en P, Q, R & S , ne changent pas. Pour le faire voir, menons par le point M deux droites Mq & rs , la première parallèle au côté AB , la seconde au côté BD ; & marquons les points d'intersection p, q, r & s , avec les côtés du trapèze; suivant

ce que nous avons vu, $Mp.Mq$ fera à $Mr.Ms$ dans un rapport constant; mais, comme les angles sont tous donnés, les rapports $MP : Mp$; $MQ : Mq$; $MR : Mr$ & $MS : Ms$, seront aussi donnés; d'où il suit que $MP.MQ$ fera à $MR.MS$ encore dans un rapport constant.

100. Comme nous avons vu ci-dessus que, si on prolonge les ordonnées parallèles MN , mn , jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente CPp en P & p , on aura $PM.PN : CP^2 :: pm.pn : Cp^2$; si on marque les points L & l , de manière que PL soit moyenne proportionnelle entre PM & PN , & qu'il en soit de même de pl à l'égard de pm & pn , on aura $PL^2 : CP^2 :: pl^2 : Cp^2$; & par conséquent $PL : CP :: pl : Cp$; d'où il suit que tous les points L , l , sont situés sur la ligne droite qui passe par le point de contact C . Donc, si une appliquée PMN est partagée au point L de manière que $PL^2 = PM.PN$, la droite CLD menée par les points C & L divisera aussi toutes les autres appliquées pmn en l , de façon que pl soit moyenne proportionnelle entre pm & pn ; ou bien, si on coupe deux appliquées PN & pn aux points L & l , de sorte que $PL^2 = PM.PN$, & $pl^2 = pm.pn$, la droite qui passe par L & l étant prolongée, passera par le point de contact C , & coupera dans le même rapport toutes les autres appliquées parallèles à celles-ci.

Pl. III. Fig. 24;

101. Après avoir exposé ces propriétés des lignes du second ordre, qui découlent immédiatement de la forme de l'équation, passons à la recherche d'autres propriétés plus cachées. Soit, pour cet effet, proposée l'équation générale des lignes du second ordre :

Pl. III. Fig. 25;

$$yy + \frac{(ex+\gamma)}{\zeta}y + \frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0;$$

comme il répond à chaque abscisse $AP = x$ deux appliquées y , savoir PM & PN , on pourra déterminer la position du diamètre qui coupe en deux parties égales toutes les ordonnées MN . Car, soit IG ce diamètre qui doit couper l'ordonnée MN au milieu L , qui tombera par conséquent sur le diamètre cherché. Faisons $PL = \zeta$, puisque $\zeta = \frac{1}{2}PM + \frac{1}{2}PN$,

nous aurons $\zeta = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta}$, ou $2\zeta\zeta + \varepsilon x + \gamma = 0$, qui est l'équation demandée pour déterminer la position du diamètre IG .

102. On pourra déduire de-là la longueur du diamètre IG , qui indique sur la courbe les deux endroits où les points M & N coïncident, ou bien dans quels points $PM = PN$. L'équation donne $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$ & $PM \cdot PN = \frac{\delta x^2 + \zeta x + \alpha}{\zeta}$, & par conséquent $(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM \cdot PN = \frac{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)x^2 + 2(\varepsilon\gamma - 2\zeta^2)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{\zeta^2} = 0$, ou $x^2 - \frac{2(2\zeta^2 - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} = 0$; les racines de cette équation sont donc AK & AH , de sorte que $AK + AH = \frac{4\zeta^2 - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $AK \cdot AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. Il suit de-là que $(AH - AK)^2 = KH^2 = \frac{4(2\zeta^2 - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)^2}$. Mais $IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta^2}{4\zeta^2} KH^2$, si toutefois les appliquées sont perpendiculaires à l'axe.

103. Supposons que les appliquées que nous avons considérées ici soient perpendiculaires à l'axe, & cherchons à présent l'équation qui convient aux appliquées obliques. Menons, en conséquence, d'un point quelconque M de la courbe à l'axe une appliquée Mp , qui fasse avec cet axe l'angle oblique MpH , dont le sinus soit $= \mu$ & le cosinus $= v$. Soit la nouvelle abscisse $Ap = t$, la nouvelle appliquée $pM = u$, on aura $\frac{y}{u} = \mu$, & $\frac{pp}{u} = v$; d'où $y = \mu u$ & $x = t + vu$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation entre x & y : $0 = \alpha + \zeta x + \gamma y + \delta x x + \varepsilon xy + \zeta y y$; donnent :

$$0 = \alpha + \zeta t + v\zeta u + \delta t^2 + 2v\delta tu + vv\delta u^2 + \mu\gamma u + \mu\varepsilon tu + \mu v\varepsilon u^2 + \mu\mu\zeta u^2,$$

$$\text{ou} \\ \alpha u + \frac{((\mu\varepsilon + 2v\delta)t + \mu\gamma + v\zeta)u + \delta t^2 + \zeta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu v\varepsilon + vv\delta} = 0.$$

104. Chaque appliquée aura donc encore ici deux valeurs, pM & pn ; ainsi on pourra déterminer, comme auparavant, le diamètre ilg des ordonnées Mn . En effet, ayant coupé en deux parties égales l'ordonnée Mn en l , le point l appartiendra au diamètre. Soit donc $pl = v$; on aura $v = \frac{pM + pn}{2} =$

$\frac{-(\mu\varepsilon + 2v\delta)t - \mu\gamma - v\epsilon}{2(\mu\mu\zeta + \mu v\varepsilon + v v\delta)}$. Abaissons du point l sur l'axe $\hat{A}H$ la perpendiculaire lq , & faisons $Aq = p$, $ql = q$, nous aurons $\mu = \frac{q}{v}$

& $v = \frac{pq}{v} = \frac{p-t}{v}$, & par conséquent $v = \frac{q}{\mu}$ & $t = p - vv = p - \frac{vq}{\mu}$. Substituons ces valeurs dans l'équation trouvée entre

$$t \text{ \& } v, \text{ \& nous aurons } \frac{q}{\mu} = \frac{-\mu\varepsilon p - 2v\delta p + v\varepsilon q + 2vv\delta q - \mu - \mu\gamma - v\epsilon}{2\mu\mu\zeta + 2\mu v\varepsilon + 2vv\delta}$$

ou

$$(2\mu\mu\zeta + \mu v\varepsilon)q + (\mu\mu\varepsilon + 2\mu v\delta)p + \mu\mu\gamma + \mu v\epsilon = 0,$$

ou enfin

$$(2\mu\zeta + v\varepsilon)q + (\mu\varepsilon + 2v\delta)p + \gamma\mu + v\epsilon = 0,$$

équation qui détermine la position du diamètre ilg .

105. Le premier diamètre IG , dont la position est déterminée par cette équation $2\zeta\zeta + \varepsilon x + \gamma = 0$, étant prolongé, rencontrera l'axe en O , & on aura $AO = \frac{-\gamma}{\varepsilon}$, &

par conséquent $PO = \frac{-\gamma}{\varepsilon} - x$. La tangente de l'angle LOP sera $= \frac{\zeta}{PO} = \frac{-\varepsilon\zeta}{\varepsilon x + \gamma} = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, & la tangente de l'angle

MLG , sous lequel le diamètre IG coupe les ordonnées MN sera $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$. L'autre diamètre ig prolongé rencontrera l'axe

en o , & on aura $AO = \frac{-\mu\gamma - v\epsilon}{\mu\varepsilon + 2v\delta}$, & la tangente de l'angle Aol sera $= \frac{\mu\varepsilon + 2v\delta}{2\mu\zeta + v\varepsilon}$. Comme celle de l'angle $AOL = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$,

les deux diamètres se couperont en un certain point C , & feront entre eux un angle $OCO = Aol - AOL$, don: la tangente par conséquent est $= \frac{4v\delta\zeta - v\varepsilon\varepsilon}{4\mu\mu\zeta + 2v\delta\varepsilon + 2\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon}$. Mais

l'angle sous lequel cet autre diamètre coupe ses ordonnées, est $Ml o = 180^\circ - l p o - A o l$, dont la tangente =

$$\frac{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\nu\zeta - \nu\nu\varepsilon}$$

106. Cherchons maintenant le point C où ces deux diamètres se coupent mutuellement. Pour cela, imaginons une perpendiculaire CD abaissée de ce point sur l'axe ; appelons $AD = g$, $CD = h$: d'abord, en tant que le point C appartient au diamètre IG , nous aurons $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$, & ensuite, en tant qu'il appartient au diamètre ig , nous aurons $(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\varepsilon = 0$. Retranchons de cette dernière équation la première, après l'avoir multipliée par μ , & il nous restera $\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\varepsilon = 0$, ou $\varepsilon h + 2\delta g + \varepsilon = 0$; d'où l'on tire $h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \varepsilon}{\varepsilon}$, & par conséquent $(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)g = 2\varepsilon\zeta - \gamma\varepsilon$; $g = \frac{2\varepsilon\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $h = \frac{2\gamma\delta - \varepsilon\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. Comme les quantités μ & ν , d'où dépend l'obliquité des appliquées $p M n$, n'entrent pas dans ces expressions, il s'ensuit évidemment que le point C reste le même, quelle que soit cette obliquité.

107. Puisque tous les diamètres IG & ig se coupent mutuellement dans un même point C ; dès qu'il sera un fois trouvé, on aura un point par où passeront tous les diamètres ; & réciproquement toutes les droites menées par ce point seront autant de diamètres qui couperont toutes les ordonnées qu'on aura tirées sous un certain angle ; & comme ce point où tous les diamètres s'entrecoupent, est unique dans chaque ligne du second ordre, on a coutume de le nommer le CENTRE de la section conique. On le trouvera au moyen de l'équation proposée entre x & y ,

$$0 = a + \varepsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 ;$$

en prenant $AD = \frac{2\varepsilon\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$, & $CD = \frac{2\gamma\delta - \varepsilon\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$.

108. Nous avons trouvé ci-dessus que $AK + AH = \frac{4\varepsilon\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$; mais IK & GH sont des perpendiculaires abais-

fées des extrémités du diamètre IG sur l'axe, ce qui fait voir que $AD = \frac{AK + AH}{2}$; & par conséquent le point D fera le milieu entre les points K & H . C'est pourquoi le centre C fera aussi placé au milieu du diamètre IG ; & comme cela doit également s'entendre de tout autre diamètre, il s'ensuit que non-seulement tous les diamètres se coupent les uns les autres en un même point C , mais qu'ils s'y coupent réciproquement en deux parties égales.

Pl. III. Fig. 26.

109. Prenons à présent un diamètre quelconque AI pour l'axe, auquel les ordonnées MN soient appliquées sous un angle $APM = \gamma$, dont le sinus $= m$ & le cosinus $= n$. Soit l'abscisse $AP = x$ & l'appliquée $PM = y$; comme celle-ci a deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative, & que par conséquent leur somme $= 0$, l'équation générale pour la ligne du second ordre prendra cette forme: $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$, laquelle donnera, en faisant $y = 0$, les deux points G & I où la courbe traverse l'axe. Ainsi les racines de l'équation $xx + \frac{\epsilon}{\gamma}x + \frac{a}{\gamma} = 0$, seront $x = AG$ & $x = AI$; & par conséquent on aura $AG + AI = -\frac{\epsilon}{\gamma}$ & $AG \cdot AI = \frac{a}{\gamma}$. Puis donc que le centre C est placé au milieu du diamètre GI , on trouvera facilement le centre C de la section conique; car on aura $AC = \frac{AG + AI}{2} = -\frac{\epsilon}{2\gamma}$.

110. Le centre C de la section conique étant maintenant connu, on pourra très-bien le prendre pour l'origine des abscisses. Soit en conséquence $CP = t$, comme $PM = y$ reste la même, à cause de $x = AC - CP = -\frac{\epsilon}{2\gamma} - t$, on aura cette équation entre les coordonnées t & y :

$$yy = a - \frac{\epsilon t}{\gamma} + \frac{\epsilon t}{4\gamma} - \epsilon t + \epsilon t + \gamma t^2$$

ou

$$yy = a - \frac{\epsilon t}{4\gamma} + \gamma t t.$$

On aura donc, en écrivant x au lieu de t , l'équation générale

rale pour les lignes du second ordre, un diamètre quelconque étant pris pour axe, & les abscisses étant comptées du centre; & si on change la forme des constantes, elle deviendra $yy = a - \mathcal{C}xx$. En faisant $y = 0$, on aura $CG = CI = \sqrt{\frac{a}{\mathcal{C}}}$, & par conséquent le diamètre entier GI fera $= 2\sqrt{\frac{a}{\mathcal{C}}}$.

111. Soit fait $x = 0$, & on trouvera l'ordonnée EF qui passe par le centre; on aura $CE = CF = \sqrt{a}$, & conséquemment toute l'ordonnée $EF = 2\sqrt{a}$; & comme elle passe par le centre, elle sera aussi un diamètre qui fera avec le premier GI un angle $ECG = q$. Or, cet autre diamètre EF coupera également toutes les ordonnées parallèles au diamètre GI ; car, ayant fait l'abscisse CP négative, l'appliquée aM qui tombera du côté de I sera égale à la première PM ; & comme elle lui est en même temps parallèle, les deux points M joints ensemble donneront une ligne parallèle au diamètre GI , & qui devra par conséquent être divisée en deux parties égales par le diamètre EF . Ces deux diamètres GI & EF sont donc tellement disposés entre eux, que l'un coupe en deux également toutes les ordonnées parallèles à l'autre, & réciproquement; & c'est à cause de cette propriété que ces deux diamètres se nomment CONJUGUÉS. Donc, si on mène par les extrémités G & I du diamètre GI des droites parallèles à l'autre diamètre EF , elles toucheront la courbe; & de même, si par les points E & F on mène des droites parallèles au diamètre GI , elles toucheront la courbe aux points E & F .

112. Soit menée à présent une appliquée oblique quelconque MQ qui fasse l'angle $AQM = \phi$, dont le sinus $= \mu$ & le cosinus $= \nu$; soit l'abscisse $CQ = t$, & l'appliquée $MQ = u$; comme l'angle $PMQ = \phi - q$, & partant $\sin. PQM = \mu n - \nu m$, on aura, dans le triangle PMQ , $y : u : PQ$ $:: \mu : m : \mu n - \nu m$; donc $y = \frac{\mu u}{m}$ & $PQ = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$, & par conséquent $x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Substituons ces valeurs dans l'équation donnée ci-dessus $yy = a - \mathcal{C}xx$, ou $yy + \mathcal{C}xx - a = 0$, & nous aurons :

$(\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2)u u - 2\mathcal{E}m(\mu n - v m)u + \mathcal{E}m^2 t^2 - a m^2 = 0$,
 équation qui donne pour l'appliquée u deux valeurs QM & Qn , & par conséquent $QM - Qn = \frac{2\mathcal{E}m(\mu n - v m)t}{\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2}$. Si
 on coupe en deux parties égales l'ordonnée Mn en p , la
 droite Cp sera un nouveau diamètre qui coupera par le mi-
 lieu toutes les ordonnées parallèles à Mn , & on aura $Qp =$
 $\frac{\mathcal{E}m(\mu n - v m)t}{\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2}$.

113. On trouve par-là que la tangente de l'angle $GCg =$
 $\frac{\mu Qp}{CQ + v \cdot Qp}$, ou que $\text{tang. } GCg = \frac{\mathcal{E}m(\mu n - v m)}{\mu + n\mathcal{E}(\mu n - v m)}$, & que
 $\text{tang. } Mp g = \frac{\mu \cdot CQ}{rQ + v \cdot CQ} = \frac{\mu v + \mathcal{E}(\mu n - v m)(v n + \mu m)}{\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2}$; c'est
 l'angle sous lequel les nouvelles ordonnées Mn sont coupées par
 le diamètre gi . Au reste, $Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2v \cdot CQ$.
 $Qp = \frac{\mu^2 + 2\mathcal{E}\mu^2 n(\mu n - v m) + \mathcal{E}^2 \mu(\mu n - v m)^2}{(\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2)^2} t t$ & $Cp = \mu t$.
 $\sqrt{(\mu^2 + 2\mathcal{E}\mu n(\mu n - v m) + \mathcal{E}^2(\mu n - v m)^2)}$. Si on fait $Cp = r$ &

$pM = s$, on aura $t = \frac{(\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\mathcal{E}\mu n(\mu n - v m) + \mathcal{E}^2(\mu n - v m)^2)}}$ &
 $u = s + Qp = s + \frac{\mathcal{E}m(\mu n - v m)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\mathcal{E}\mu n(\mu n - v m) + \mathcal{E}^2(\mu n - v m)^2)}}$;

Ces valeurs donnent :

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\mathcal{E}(\mu n - v m)r}{\sqrt{(\dots\dots\dots)}}$$

$$x = -\frac{(\mu n - v m)s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\dots\dots\dots)}}$$

d'où l'on conclura, en substituant dans l'équation $yy + \mathcal{E}xx$
 $- a$, $\frac{(\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2)ss}{mm} + \frac{\mathcal{E}(\mu\mu + \mathcal{E}(\mu n - v m)^2)rr}{\mu\mu + 2\mathcal{E}\mu n(\mu n - v m) + \mathcal{E}^2(\mu n - v m)^2}$
 $- a = 0$.

114. Faisons à présent le demi-diamètre $CG = f$ & le demi-
 conjugué $CE = CF = g$; nous aurons $f = \sqrt{-\frac{a}{\mathcal{E}}}$, & $g =$
 \sqrt{a} , ou $a = g^2$ & $\mathcal{E} = \frac{g^2}{f^2}$; d'où résulte l'équation $yy +$
 $\frac{f\mathcal{E}}{ff}xx = g g$. Supposons l'angle $GCg = p$, nous aurons $\text{tang. } p$
 $= \frac{\mathcal{E}m(\mu n - v m)}{\mu + n\mathcal{E}(\mu n - v m)}$. Mais à cause de l'angle $GCE = q$, si on

fait l'angle $E C e = \pi$, on aura $A Q M = \phi = q + \pi$, & par conséquent $\mu = \sin. (q + \pi)$, $\nu = \cos. (q + \pi)$, $m = \sin. q$ & $n = \cos. q$. Donc $\text{tang. } p = \frac{\sin. q \cdot \sin. \pi}{\sin. (q + \pi) + \cos. q \cdot \sin. \pi}$
 $= \frac{\sin. q \cdot \text{tang. } \pi}{\text{tang. } q + \text{tang. } \pi + \sin. q \cdot \text{tang. } \pi}$; $\sin. p = \frac{\sqrt{(\mu^2 + \nu^2 \cos. \mu n (\mu - \nu m) + \sin. \pi (\mu n - \nu m)^2)}}{\sin. q \cdot \sin. \pi}$
 & $\mu \mu + \nu \nu = (\mu n - \nu m)^2 = (\sin. (q + \pi))^2 + \cos. (\sin. \pi)^2$. Ces valeurs étant substituées, on obtiendra, pour l'équation entre r & s , $\frac{((\sin. q + \pi)^2 + \cos. (\sin. \pi)^2) r s}{(\sin. q)^2} + \frac{\cos. ((\sin. q + \pi)^2 + \cos. (\sin. \pi)^2) r r (\sin. p)^2}{\cos. (\sin. q)^2 (\sin. \pi)^2}$
 $- a = 0$; mais $\frac{\text{tang. } p \cdot \sin. (q + \pi)}{(\sin. q - \cos. q \cdot \text{tang. } p) \sin. \pi} = \frac{\text{tang. } \pi (\text{tang. } q + \text{tang. } p)}{(\sin. q - \cos. q \cdot \text{tang. } p) \sin. \pi}$
 $= \frac{e g}{f f} = \frac{\cot. \pi \cdot \text{tang. } q + 1}{\cot. p \cdot \text{tang. } q - 1}$, ou $\text{tang. } q = \frac{f f + g g}{g g \cdot \cot. p - f f \cdot \cot. \pi}$, d'où l'on peut déduire plusieurs corollaires; au reste, on aura $\frac{e g}{f f} =$
 $\frac{\sin. p \cdot \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi \sin. (q - p)}$.

115. Soit le demi-diamètre $C g = a$, & son demi-conjugué $C e = b$, on trouvera, par l'équation donnée ci-dessus, $a = \frac{\sin. q \sin. \pi \cdot \sqrt{a^2}}{g g \sin. q \cdot \sin. \pi}$
 $\frac{\sin. p \cdot \sqrt{((\sin. q + \pi)^2 + \cos. (\sin. \pi)^2)}}{f f \sin. q} = \frac{\sin. p \cdot \sqrt{(f f (\sin. (q + \pi))^2 + g g (\sin. \pi)^2)}}{f f \sin. q}$
 & $b = \frac{\sin. \pi \cdot \sqrt{(f f (\sin. (q + \pi))^2 + g g (\sin. \pi)^2)}}{f f \sin. q}$, on aura donc $a : b :: g \sin. \pi : f \cdot \sin. p$. Mais $(\sin. (q + \pi))^2 + \frac{g g}{f f} (\sin. \pi)^2 = \frac{\sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p)}$
 $(\sin. (q - p) (\sin. (q + \pi) + \sin. p \cdot \sin. \pi)) = \frac{\sin. q \cdot \sin. (q + \pi) \sin. (q + \pi - p)}{\sin. (q - p)}$;
 donc $a = \frac{g g \sin. \pi}{f \cdot \sin. p} \sqrt{\frac{\sin. q \cdot \sin. (q - p)}{\sin. (q + \pi) \sin. (q + \pi - p)}}$; ou, à cause de $\frac{g g}{f f} = \frac{\sin. p \cdot \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi \sin. (q - p)}$, $a = f \sqrt{\frac{\sin. q \cdot \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p) \sin. (q + \pi - p)}}$ & $b = g \sqrt{\frac{\sin. q \cdot \sin. (q - p)}{\sin. (q + \pi) \sin. (q + \pi - p)}}$; donc $a : b :: f \cdot \sin. (q + \pi) : g \cdot \sin. (q - p)$ & $a b = \frac{f g \cdot \sin. q}{\sin. (q + \pi - p)}$.

116. Donc, si dans une section conique on conçoit les diamètres conjugués $G I$, $E F$ & $g i$, $e f$, on aura d'abord:
 $C g : C c :: C E \cdot \sin. E C e : C G \cdot \sin. G C g$,
 donc
 $\sin. G C g : \sin. E C e :: C E \cdot C e : C G \cdot C g$;

&, si on imagine des cordes Ee & Gg , le triangle CGg deviendra = au triangle CEe ; on aura ensuite $Cg : Ce :: CG \cdot \sin. G Ce : CE \cdot \sin. g CE$, ou $Ce \cdot CG \cdot \sin. G Ce = CE \cdot Cg \cdot \sin. g CE$; donc, si on mène des cordes Ge & gE , les triangles $G Ce$ & $g CE$ seront égaux entre eux, ou bien, en prenant ceux qui sont opposés, le triangle ICf sera = au triangle $i CF$. La dernière équation $ab \cdot \sin. (q + \pi - p) = fg \cdot \sin. q$ donnera $Cg \cdot Ce \cdot \sin. g Ce = CG \cdot CE \cdot \sin. G Ce$. Donc, si on mène des cordes $\dot{E}G$ & eg , ou à l'opposé FI & fi , les triangles ICF & $i Cf$ seront pareillement égaux; d'où il suit que tous les parallélogrammes construits autour des deux diamètres conjugués sont égaux.

117. On a donc trois paires de triangles égaux entre eux, savoir :

- I. Le triangle FCf égal au triangle ICi ;
- II. Le triangle fCI égal au triangle FCi ;
- III. Le triangle FCI égal au triangle fCi ;

d'où il suit que les trapèzes $FfCI$ & $iICf$ seront égaux entre eux; si on en retranche le même triangle fCI , le triangle FI sera = au triangle Ifi ; &, comme ils ont même base fI , il est nécessaire que la corde Fi soit parallèle à fI . On aura donc encore le triangle FIi = au triangle ifF ; & si on leur ajoute les triangles égaux FCI & fCi , il en résultera les deux trapèzes égaux entre eux $FCIi = iCfF$.

118. On conclut aussi de-là une méthode de mener une tangente MT à un point quelconque M d'une ligne du second ordre. Car ayant pris pour axe un diamètre GI , dont le demi-conjugué soit EC , menons du point M à l'axe, parallèlement à CE , la ligne MP qui sera une demi-ordonnée, & qui donnera $PN = PM$; ayant tiré ensuite le demi-diamètre CM , cherchons son demi-conjugué CK , & la tangente demandée MT lui sera parallèle. Soit l'angle $GCE = q$, $GC M = p$

Pl. III. Fig. 27.

& $ECK = \pi$, on aura, comme nous l'avons vu, $\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\sin. p \cdot \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi \cdot \sin. (q - p)}$ & $MC = CG \sqrt{\frac{\sin. q \cdot \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p) \sin. (q + \pi - p)}}$. Mais

dans le triangle $CM P$ on a $MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2PM \cdot CP \cdot \text{cof. } q$; de plus, $MP : MC :: \text{fin. } p : \text{fin. } q$ & $MP : CP :: \text{fin. } p : \text{fin. } (q - p)$. En outre, dans le triangle CMT , dont les angles sont donnés, on aura $CM : CT : MT :: \text{fin. } (q + \pi) : \text{fin. } (q + \pi - p) : \text{fin. } p$. Donc, en éliminant les angles, on aura $MC = CG \sqrt{\frac{MC \cdot CM}{CP \cdot CT}}$ ou $CG^2 = CP \cdot CT$; donc $CP : CG :: CG : CT$; ce qui donne un moyen expéditif de trouver la position de la tangente. Cette proportion donnera aussi, *dividendo*, $CP : PG :: CG : TG$, & *componendo*, à cause de $CG = CI$, $CP : IP :: CG : TI$.

119. Puisqu'on a $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\text{fin. } p \cdot \text{fin. } (q + \pi)}{\text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q - p)}$; $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\text{fin. } p \cdot \text{fin. } (q - p)}{\text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q + \pi)}$;
 $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\text{fin. } q \cdot \text{fin. } (q + \pi)}{\text{fin. } (1 - p) \text{fin. } (q + \pi - p)}$, & $\frac{CK^2}{CL^2} = \frac{\text{fin. } q \cdot \text{fin. } (q - p)}{\text{fin. } (q + \pi) \text{fin. } (q + \pi - p)}$;
 il s'enfuit que $\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\text{fin. } p \cdot \text{fin. } (q + \pi) + \text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q - p)}{\text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q - p)}$, &
 $\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\text{fin. } p \cdot \text{fin. } (q - p) + \text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q + \pi)}{\text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q + \pi)}$. Mais $\text{fin. } A \cdot \text{fin. } B = \frac{1}{2} \text{cof. } (A - B) - \frac{1}{2} \text{cof. } (A + B)$; & réciproquement
 $\frac{1}{2} \text{cof. } A - \frac{1}{2} \text{cof. } B = \text{fin. } \frac{A + B}{2} \text{fin. } \frac{B - A}{2}$. On aura donc
 $\text{fin. } p \cdot \text{fin. } (q + \pi) + \text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q - p) = \frac{1}{2} \text{cof. } (q + \pi - p) - \frac{1}{2} \text{cof. } (q + \pi + p) + \frac{1}{2} \text{cof. } (q - \pi - p) - \frac{1}{2} \text{cof. } (q + \pi - p) = \frac{1}{2} \text{cof. } (q - \pi - p) - \frac{1}{2} \text{cof. } (q + \pi + p) = \text{fin. } q \cdot \text{fin. } (p + \pi)$. De même $\text{fin. } p \cdot \text{fin. } (q - p) + \text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q + \pi) = \frac{1}{2} \text{cof. } (q - 2p) - \frac{1}{2} \text{cof. } q + \frac{1}{2} \text{cof. } q - \frac{1}{2} \text{cof. } (q + 2\pi) = \frac{1}{2} \text{cof. } (q - 2p) - \frac{1}{2} \text{cof. } (q + 2\pi) = \text{fin. } (q + \pi - p) \text{fin. } (p + \pi)$. On aura donc :

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\text{fin. } q \cdot \text{fin. } (p + \pi)}{\text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q - p)},$$

&c

$$\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\text{fin. } (q + \pi - p) \text{fin. } (p + \pi)}{\text{fin. } \pi \cdot \text{fin. } (q + \pi)};$$

d'où

d'où l'on tire $\frac{CE^2 + CG^2}{CA^2 + CB^2} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{\sin. q. \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p) \sin. (q + \pi - p)} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{CM^2}{CG^2}$. donc $CE^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2$, & par conséquent la somme des quarrés de deux diamètres conjugués est toujours constante dans une même ligne du second ordre.

120. Les deux demi-diamètres conjugués CG & CE étant donnés, si on prend à volonté un demi-diamètre CM , on trouve tout de suite son demi-conjugué CK , en prenant $CK = \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$. Mais, par les propriétés des sections coniques trouvées auparavant, $TG.TI : TM^2 :: CG.CI : CK^2 :: CG^2 : CK^2 :: CG^2 : CE^2 + CG^2 - CM^2$; & par conséquent $TM = \frac{1}{CG} \sqrt{(TG.TI.(CE^2 + CG^2 - CM^2))}$. Si, en supposant l'ordonnée MN prolongée, on imagine la tangente NT , les deux tangentes MT & NT rencontreront l'axe TI au même point T ; car on aura pour l'une & pour l'autre $CP : CG :: CG : CT$. Mais, si on mène la droite CN , on aura $TN = \frac{1}{CG} \cdot \sqrt{(TG.TI.(CE^2 + CG^2 - CN^2))}$, & conséquemment $TM^2 : TN^2 :: CE^2 + CG^2 - CM^2 : CE^2 + CG^2 - CN^2$; & comme MN est divisée en deux parties égales en P , on aura $\sin. CTM : \sin. CTN :: TN : TM :: \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CN^2)} : \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$.

121. Menons aux extrémités A & B du diamètre les tangentes AK, BL , & soit prolongée une autre tangente quelconque MT , jusqu'à ce qu'elle rencontre les deux premières aux points K & L ; soit de plus le diamètre conjugué ECF , auquel les appliquées MP & les tangentes AK & BL seront parallèles. Puisque par la nature de la tangente $CP : CA :: CA : CT$, à cause de $CB = CA$, on aura $CP : AP :: CA : AT$, & $CP : BP :: CA : BT$; donc $CP : CA :: CA : CT :: AP : AT :: BP : BT$; d'où $AT : BT :: AP : BP$; mais $AT : BT :: AK : BL$; donc $AK : BL :: AP : BP$. On a ensuite $AT = \frac{CA \cdot AP}{CP}$, $BT = \frac{CA \cdot BP}{CP}$, $PT = \frac{CA \cdot AP}{CP} + AP = \frac{AP \cdot BP}{CP}$; donc $AT : PT :: CA : BP$.

$AK : PM$. On a semblablement $BT : PT :: CA : AP$
 $BL : PM$; d'où l'on tire $AK = \frac{AC \cdot PM}{BP}$, $BL = \frac{AC \cdot PM}{AP}$
 & $AK \cdot BL = \frac{C^2 \cdot PM^2}{AP \cdot BP}$. Mais $AP \cdot BP : PM^2 :: AC^2 : CE^2$; d'où l'on conclut cette belle propriété $AK \cdot BL = CE^2$. Il suit de-là que $AK = CE \sqrt{\frac{AP}{BP}}$, & $BL = CE \sqrt{\frac{BP}{AP}}$; $AP : BP :: AK^2 : CE^2 :: CE^2 : BL^2 :: KM : ML$,
 & $AK : BL :: KM : LM$.

122. Donc, si on mène à un point quelconque M de la courbe une tangente qui en rencontre deux autres AK, BL , parallèles entre elles, en K & en L , le demi-diametre CE parallèle aux tangentes AK & BL fera toujours moyen proportionnel entre AK & BL , ou $CE^2 = AK \cdot BL$. Donc, si on mène d'une manière semblable à un autre point quelconque m de la courbe une tangente kml , on aura aussi $CE^2 = Ak \cdot Bl$; & par conséquent $AK : Ak :: Bl : BL$, & $AK : Kk :: Bl : Ll$. Si les tangentes se coupent en o , on aura $AK : Bl :: Ak : BL :: Kk : Ll :: ko : lo :: Ko : Lo$. Telles sont les principales propriétés des sections coniques, au moyen desquelles NEWTON a résolu un grand nombre de problèmes remarquables dans ses *Principes*.

123. Puisqu'on a $AK : Bl :: Ko : Lo$, si on prolonge la tangente LB jusqu'en I de manière que $BI = AK$, le point I fera le point où la tangente menée de l'autre côté parallèlement à KL doit rencontrer cette tangente LB , comme le point K sur la tangente LK est celui où elle est coupée par la tangente AK parallèle à BL . La droite IK passera donc par le centre C , & y fera partagée en deux également. Donc, si deux tangentes quelconques BL, ML , sont prolongées, ainsi qu'on vient de le prescrire, jusqu'en I & en K , & qu'elles soient coupées par une troisième lmo aux points l & o , on aura $BI : Bl :: Ko : Lo$, & *componendo*, $IB : Il :: Ko : KL$; ainsi, quel que soit le point par où la troisième tangente lmo passera, on aura toujours $IB \cdot KL = Il \cdot Ko$. Ayant donc mené une quatrième tangente quelconque $\lambda\mu\omega$, qui

coupe les deux premières IL & KL en λ & en ω , on aura pareillement $IB.KL = I\lambda.K\omega$, & par conséquent $Il.Ko = I\lambda.K\omega$, ou $Il : I\lambda :: Ko : K\omega$. Donc, si on imagine les deux droites $l\omega$, λo , coupées dans un rapport quelconque, la droite, qui passera par les points de division, partagera IK dans le même rapport. Conséquemment, si les droites $l\omega$ & λo sont coupées par le milieu, la droite qui passera par les deux points d'intersection divisera aussi la droite IK en deux parties égales, & passera par conséquent par le centre de la section conique.

Pl. IV. Fig. 31.

124. On démontrera ainsi par la géométrie, que si $Il : I\lambda :: K\omega : Ko$, ou $I\lambda : \lambda l :: Ko : o\omega$, la droite nmH , qui coupe les droites $l\omega$, λo dans un rapport donné, doit couper dans le même rapport la ligne KI . Supposons que la ligne mn coupe les deux autres $l\omega$ & λo dans le rapport de $m : n$, ou que $\lambda m : m o :: l n : n \omega :: m : n$; & que prolongée elle rencontre les tangentes IL & KL en Q & en R , on aura $\sin. Q : \sin. R :: \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} :: \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{m o}{R o} :: \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega}$. Donc $Ql : R\omega :: Q\lambda : Ro$, & *dividendo*, $l\lambda : o\omega :: Q\lambda : Ro :: Ql : R\omega$; mais, comme on a $l\lambda : o\omega :: I\lambda : Ko$, on aura aussi $QI : RK :: l\lambda : o\omega$, & $\sin. Q : \sin. R :: \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$. Or, on a encore $\sin. Q : \sin. R :: \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} :: \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}$; d'où il suit que $HI : HK :: m : n = \lambda m : m o :: l n : n \omega$.

Pl. III. Fig. 27.

125. Etant donc donnés deux demi-diamètres conjugués CG , CE , qui font un angle oblique $GCE = q$, on pourra toujours en trouver deux autres CM & CK , qui forment entre eux un angle droit MCK . Soit l'angle $GCM = p$; en supposant $ECK = \pi$, on aura $q + \pi - p = 90^\circ$, & par conséquent $\sin. \pi = \cos. (q - p)$ & $\sin. (q + \pi) = \cos. p$; d'où (art. 119) $\frac{CG^2}{CE^2} = \frac{\sin. p \cdot \cos. p}{\sin. 2p} = \frac{\sin. 2(q-p)}{\sin. 2q \cdot \cos. 2p - \cos. 2q \cdot \sin. 2p}$; donc $\frac{CG^2}{CE^2} = \sin. 2q \cdot \cos. 2p - \cos. 2q$, d'où l'on tire $\cos. 2GCM = \cos. 2q + \frac{CG^2}{CE^2 \cdot \sin. 2q}$, équation qui présente une solution

toujours possible; mais on aura $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin. q \cos. p}{\sin. (q-p)}$ & $\frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\frac{\tan. p}{\tan. q}}{\frac{CG^2}{CA^2} \cdot \tan. q}$; donc $\tan. p = \tan. q - \frac{CG^2}{CA^2} \cdot \tan. q$; & comme on a $CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2$ & $CK \cdot CM = CG \cdot CE \cdot \sin. q$, on aura $CM + CK = \sqrt{(CG^2 + 2 CG \cdot CE \sin. q + CE^2)}$ & $CM - CK = \sqrt{(CG^2 - 2 CG \times CE \sin. q + CE^2)}$; au moyen de quoi on trouvera les diamètres conjugués qui sont perpendiculaires entre eux.

El. III. Fig. 29.

126. Soient donc CA & CE deux demi-diamètres conjugués d'une section conique, qui se coupent au centre C à angle droit; on les nomme ordinairement DIAMÈTRES PRINCIPAUX. Soit l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, nous aurons, comme nous l'avons vu, $yy = a - \ell xx$; & en supposant les demi-diamètres principaux $AC = a$, $CE = b$, nous trouverons $a = bb$, & $\ell = \frac{b^2}{a^2}$; ce qui donne $yy = bb - \frac{bbxx}{a^2}$. On voit par cette équation, qui ne change point, soit

qu'on prenne les x & les y positivement, soit qu'on les prenne négativement, que la courbe sera composée de quatre portions semblables & égales situées de part & d'autre autour des diamètres AC & EF ; c'est-à-dire, que le quart $AC E$ sera semblable & égal au quart $AC F$; & les deux autres parties pareilles à celles-ci sont situées de l'autre côté du diamètre EF .

127. Si du centre C , que nous avons pris pour l'origine des abscisses, nous menons la droite CM , elle sera $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + xx)}$; ce qui fait voir que, si $b = a$ ou $CE = CA$, on aura $CM = \sqrt{bb} = b = a$; dans ce cas toutes les droites menées du centre C à la courbe seront donc égales entre elles; & comme c'est-là la propriété du cercle, il est clair que la section conique dont les deux diamètres conjugués principaux sont égaux entre eux, est un cercle dont l'équation rapportée aux coordonnées perpendiculaires sera, en faisant $CP = x$ & $PM = y$, $yy = a^2 - x^2$; & le rayon de ce cercle sera $CA = a$.

128. Mais si b n'est pas $= a$, on ne pourra jamais avoir pour.

CM une expression rationnelle en x . Cependant il y aura sur l'axe un autre point D d'où toutes les droites DM menées à la courbe peuvent être exprimées d'une manière rationnelle; pour le trouver, faisons $CD = f$; à cause de $DP = f - x$, on aura $DM^2 = ff - 2fx + x^2 + b^2 - \frac{l^2 x^2}{a^2} = b^2 + f^2 - 2fx + \frac{(a^2 - l^2)x^2}{a^2}$; expression qui deviendra un carré, si $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{a^2}$, ou $0 = aa - bb - ff$; ce qui donne $f = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Il y aura donc sur l'axe AC un double point tel que nous le cherchons, & l'un & l'autre sera à une distance du centre $CD = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. On aura $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(a^2 - b^2)} + \frac{(aa - bb)x^2}{a^2}$, & $DM = a - \frac{x\sqrt{(a^2 - l^2)}}{a} = AC - \frac{CD \cdot CP}{AC}$. Si on fait $CP = 0$, DM deviendra $= DE = a = AC$; mais, si on fait l'abscisse $CP = CD$, ou $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, la droite DM deviendra l'appliquée DG , & on aura $DG = \frac{l^2}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, ou DG troisième proportionnelle à AC & CE .

129. Cette propriété remarquable, qui convient aux points D déterminés comme nous venons de le faire, a paru digne d'attention; & comme ces mêmes points du diamètre principal ont encore beaucoup d'autres propriétés qui les distinguent, on leur a donné pour cette raison des noms particuliers. On les appelle les FOYERS* de la section conique, &, parce qu'ils sont situés sur le plus grand diamètre a , on l'a distingué de son conjugué b en appelant le premier l'axe principal & *transverse*, & l'autre b simplement l'axe *conjugué*. L'appliquée perpendiculaire, qui passe par l'un ou l'autre foyer, a été nommée le DEMI-PARAMÈTRE; car le PARAMÈTRE entier est l'ordonnée qui passe par D , ou le double de DG . On l'appelle aussi *latus rectum*. Le demi-axe conjugué CE est donc moyen proportionnel entre le demi-paramètre DG & le demi-axe transverse AC . Les extrémités de l'axe transverse, où il est rencontré par la

* On les a appelés aussi les *Umbilics*, du latin *Umbilicus*.

courbe, se nomment les SOMMETS; tel est le point A ; & la tangente menée par ces deux points de la courbe a la propriété d'être perpendiculaire à l'axe principal AC .

130. Supposons le demi-paramètre $DG = c$, la distance du foyer au sommet $AD = d$, nous aurons $CD = a - d = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, d'où $bb = ac$ & $a - d = \sqrt{(aa - ac)}$; donc $ac = 2ad - dd$, $a = \frac{dd}{2d - c}$ & $b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. Ainsi, lorsque la distance du foyer au sommet $AD = d$, & le demi-paramètre $DG = c$, sont donnés, la section conique est déterminée. Soit à présent $CP = x$, DM fera $= a - \frac{(a-d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c-d)x}{d}$. Soit aussi $DP = t$, x fera $= CD - t = \frac{(c-d)d}{2d - c} - t$; donc DM devient $= c + \frac{(c-d)t}{d}$. Faisons l'angle $ADM = v$, nous aurons $\frac{t}{DM} = -\text{cof. } v$, & par conséquent $d \cdot DM = cd + (d - c) DM \cdot \text{cof. } v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c) \text{cof. } v}$ & $\text{cof. } v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c)DM}$.

CHAPITRE VI.

De la Subdivision des Lignes du second Ordre en Genres.

131. LES propriétés que nous avons développées dans le chapitre précédent, conviennent également à toutes les lignes du second ordre, & nous n'avons fait mention d'aucune variété qui les distinguât les unes des autres. Mais, quoique toutes ces propriétés soient communes à toutes les lignes du second ordre, cependant elles diffèrent beaucoup entre elles par leur figure; c'est pourquoi il convient de les distribuer en genres, afin d'avoir plus de facilité pour en distinguer les

différentes figures, & pour découvrir les propriétés qui conviennent à chaque genre en particulier.

132. Nous avons donné, en changeant seulement l'axe & l'origine des abscisses, une forme telle à l'équation générale des lignes du second ordre, qu'elles sont renfermées dans l'équation $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$, dans laquelle x & y représentent les coordonnées perpendiculaires; & puisque pour chaque abscisse x l'appliquée y a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, cet axe, sur lequel se comptent les abscisses x , divisera la courbe en deux parties égales & semblables; il en sera par conséquent un diamètre orthogonal; donc on peut dire que toute ligne du second ordre a un diamètre orthogonal, qui n'est rien autre chose que l'axe sur lequel je compte ici les abscisses.

133. Il entre dans cette équation trois quantités constantes a , ϵ & γ , qui, pouvant être variées d'une infinité de manières, indiquent une variété infinie de lignes courbes, qui différeront plus ou moins entre elles par la forme qu'elles auront. Car la même figure peut résulter une infinité de fois de l'équation proposée $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$; il n'y a qu'à changer l'origine des abscisses, ce qui se fait en augmentant ou en diminuant l'axe d'une quantité donnée. De plus, la même figure comprise dans l'équation peut être plus ou moins grande, de sorte qu'il y a une infinité de lignes courbes, qui diffèrent entre elles seulement en grandeur; tels sont les cercles décrits avec différens rayons. Il suit de-là que toute variation dans les lettres a , ϵ & γ , ne produit pas une variété d'espèces ou de genres dans les lignes du second ordre.

134. La plus grande différence des lignes courbes renfermées dans l'équation $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$, dépend de la nature du coefficient γ , suivant qu'il a une valeur positive ou négative. Car si γ a une valeur positive, en faisant x infini, dans ce cas le terme γxx deviendra infiniment plus grand que les autres $a + \epsilon x$, & par conséquent l'expression $a + \epsilon x + \gamma xx$ obtient une valeur positive; l'appliquée y aura pareillement une double valeur infiniment grande, l'une positive, l'autre négative; la même chose arrive si on fait $x = -\infty$;

dans ce dernier cas, l'expression $a + \epsilon x + \gamma x x$ aura encore une valeur infinie positive. C'est pourquoi, lorsque γ est une quantité positive, la courbe a quatre branches qui s'étendent à l'infini; deux qui répondent à l'abscisse $x = +\infty$, & deux à l'abscisse $x = -\infty$. Ces sortes de courbes qui ont quatre branches infinies, sont censées constituer un genre de lignes du second ordre, & sont connues sous le nom d'HYPERBOLES.

135. Mais si le coefficient γ a une valeur négative; en faisant $x = +\infty$, ou $x = -\infty$, l'expression $a + \epsilon x + \gamma x x$ aura une valeur négative, & par conséquent l'appliquée y deviendra imaginaire. Dans ce cas, ni l'abscisse ni l'appliquée ne pourront donc être infinies, & conséquemment aucune portion de la courbe ne s'étendra à l'infini; mais elle sera renfermée toute entière dans un espace fini & déterminé. Cette seconde espèce des lignes du second ordre a obtenu le nom d'ELLYPSES, & elles sont comprises dans cette équation $yy = a + \epsilon x + \gamma x x$, γ étant supposé une quantité négative.

136. Puisque la valeur de γ , suivant qu'elle est positive ou négative, introduit dans les lignes du second ordre une si grande différence, qu'elle a donné lieu à la distinction de deux genres; si on fait $\gamma = 0$, qui est la valeur qui tient le milieu entre les valeurs positives & les valeurs négatives, la courbe qui en résultera, constituera aussi une espèce moyenne entre les Hyperboles & les Ellypsés, qu'on appelle PARABOLES, dont la nature sera exprimée par l'équation $yy = a + \epsilon x$. Il est indifférent ici que ϵ soit une quantité positive ou négative, parce que la nature d'une courbe ne change point, lorsqu'on fait l'abscisse négative. Soit donc ϵ une quantité positive; il est évident que, si l'abscisse x croît à l'infini, l'appliquée y sera aussi une quantité infinie positive & négative; d'où il suit que la Parabole a deux branches infinies; mais elle n'en peut avoir plus de deux, parce qu'en faisant $x = -\infty$, la valeur de l'appliquée y devient imaginaire.

137. Nous avons donc trois espèces de lignes du second ordre, l'Ellypse, la Parabole & l'Hyperbole, qui diffèrent tellement entre elles, qu'il est impossible de les confondre ensemble,

ensemble. Car leur différence essentielle consiste dans le nombre de leurs branches infinies; l'Ellypse n'en a aucune & est renfermée toute entière dans un espace fini, la Parabole en a deux, & l'Hyperbole quatre. Ainsi, après avoir considéré en général, dans le chapitre précédent, les propriétés des sections coniques, il nous reste à examiner les propriétés particulières de chaque espèce.

138. Commençons par l'Ellypse dont l'équation est $yy = \alpha + \epsilon x - \gamma x x$, les abscisses étant prises sur le diamètre orthogonal. Comme l'origine des abscisses est arbitraire, si nous

Pl. IV. Fig 31.

l'éloignons d'un intervalle $\frac{\epsilon}{2\gamma}$, nous aurons une équation de

cette forme $yy = a - \gamma x x$, dans laquelle les abscisses sont comptées du centre de la figure. Soit donc C le centre, & AB l'axe, l'abscisse sera $CP = x$, & l'appliquée $PM = y$. On

aura donc $y = 0$, en prenant $x = \pm \sqrt{\frac{a}{\gamma}}$; & si x passe ces

limites $+\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$, l'appliquée deviendra imaginaire; ce

qui indique que la courbe entière est renfermée entre ces li-

mites. On aura donc $CA = CB = \sqrt{\frac{a}{\gamma}}$; faisant ensuite $x = 0$,

on aura $CD = CE = \sqrt{a}$. Supposons donc le demi-diamètre

ou le demi-axe principal $CA = CB = a$, & le demi-axe

conjugué $CD = CE = b$, nous aurons $a = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$;

d'où résulte pour l'Ellypse cette équation $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$

$$= \frac{bb}{aa} (aa - xx),$$

139. Quand les demi-axes conjugués a & b deviennent

égaux entre eux, alors l'Ellypse se change en cercle à cause

de $yy = aa - x^2$, ou $yy + xx = aa$; car on aura $CM =$

$\sqrt{(xx + yy)} = a$; & par conséquent tous les points M de

la courbe seront également éloignés du centre C ; ce qui est

la propriété du cercle. Mais, si les demi-axes a & b sont inégaux

entre eux, la courbe sera allongée; car ou AB sera plus grand

que DE , ou DE plus grand que AB . Mais, comme on peut

échanger les axes conjugués AB & DE , & qu'il est indifférent sur lequel des deux on prend les abscisses, supposons que AB soit le plus grand, ou que a soit plus grand que b ; on trouvera sur cet axe les foyers de l'Ellypse F & G , en prenant $CF = CG = \sqrt{(a^2 - b^2)}$; le demi-paramètre sera $= \frac{bb}{a}$; lequel exprime la grandeur de l'appliquée élevée à l'un ou à l'autre foyer F ou G .

140. Si on mène de chaque foyer à un point M de la courbe les droites FM & GM ; nous avons vu ci-dessus qu'on auroit $FM = AC - \frac{CF \cdot CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(a^2-l^2)}}{a}$; & par conséquent $FM + GM = 2a$.

Donc, si à un point quelconque M de la courbe on mène des deux foyers les droites FM & GM , leur somme sera toujours égale au plus grand axe $AB = 2a$; ce qui nous fait connoître une propriété remarquable des foyers, & nous fournit en même temps un moyen facile de décrire mécaniquement l'Ellypse.

141. Soit menée au point M la tangente TMt qui rencontre les axes aux points T & t ; on aura, comme nous l'avons démontré auparavant, $CP : CA :: CA : CT$; donc $CT = \frac{aa}{x}$, on aura de même, en échangeant les coordonnées, $Ct = \frac{bb}{y}$. Donc $TP = \frac{aa}{x} - x$, $TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ & $TA = \frac{aa}{x} - a$. TP deviendra donc $= \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(l^4x^2 + a^4y^2)}}{bbx}$; donc $\text{tang. } CTM = \frac{bbx}{aay}$; $\text{sin. } CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(l^4x^2 + a^4y^2)}}$ & $\text{cos. } CTM = \frac{aay}{\sqrt{(l^4x^2 + a^4y^2)}}$. Par conséquent, si on élève au point A une perpendiculaire AV à l'axe, laquelle touchera en même temps la courbe, on aura $AV = \frac{a(a-x) \cdot \frac{bbx}{aay}}{\frac{bbx}{aay}} = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, à cause de $ay = b\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

142. Puisque $FT = \frac{a^2 - x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{x}$ & $FM = \frac{a^2 - x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$;

on aura $FT : FM :: a : x$; on aura femblablement, à cause que $GT = \frac{a^2 + x\sqrt{(a^2 - l^2)}}{x}$ & $GM = \frac{a^2 + x\sqrt{(a^2 - l^2)}}{a}$, $GT : GM :: a : x$; donc $FT : FM :: GT : GM$. Mais $FT : FM :: \sin. FMT : \sin. CTM$, & $GT : GM :: \sin. GMt : \sin. CTM$; donc on aura $\sin. FMT = \sin. GMt$; & par conséquent l'angle FMT fera = à l'angle GMt . Donc les deux droites menées des foyers à un point quelconque M de la courbe sont également inclinées à l'égard de la tangente menée par ce point M ; ce qui est la principale propriété des foyers.

143. Puisqu'on a $GT : GM :: a : x$, à cause de $CT = \frac{at}{x}$, on aura aussi $CT : CA :: a : x$; dou l'on tire $GT : GM :: CT : CA$. Donc, si du centre C on mène parallèlement à GM la ligne CS qui rencontre la tangente en S , on aura $CS = CA = a$. De même, si du point C on mène une parallèle à FM terminée à la tangente, elle fera aussi égale à $CA = a$. Puisqu'on a $TM = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^2xx + a^2y^2)}$, on aura aussi, à cause de $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$, $TM = \frac{y}{bx} \sqrt{(a^2 - x^2(a^2 - b^2))}$; mais $FT.GT = \frac{a^4 - x^2(a^2 - l^2)}{xx}$; donc $TM = \frac{y}{b} \sqrt{FT.GT}$. Comme $TG : TC :: TM : TS$, TS fera $= \frac{TM.CT}{TG}$; & par conséquent $TS = \frac{y.CT}{b} \sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.CT.FT}{b\sqrt{FT.GT}} = \frac{y^2.CT.FT}{l^2.TM}$. Ensuite $PT = \frac{a^2y^2}{l^2x} = \frac{CT.yy}{l^2}$; donc $TS = \frac{PT.FT}{TM}$, & conséquemment $TM : PT :: FT : TS$; ce qui fait voir que les triangles TMP & TFS sont semblables, & que par conséquent la droite FS menée du foyer à la tangente lui est perpendiculaire. On aura d'ailleurs $SV = \frac{AF.MV}{GM}$, comme on peut le conclure de ce qui précède.

144. Donc, si de l'un des foyers F on mène sur la tangente la perpendiculaire FS , & qu'on joigne le point S & le centre C par la droite CS , cette droite CS fera toujours égale au demi-grand axe $AC = a$; mais comme $TM : y :: TF : FS$,

$FS = \frac{y \cdot TF}{TM} = \frac{b \cdot TF}{\sqrt{FT \cdot GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$. Donc $GT : FT :: GM : FM :: CD^2 : FS^2$; mais la perpendiculaire abaissée de l'autre foyer sur la tangente sera $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$; par conséquent le demi-petit axe $CD = b$ sera moyen proportionnel entre ces perpendiculaires. Abaissons à présent du centre C sur la tangente la perpendiculaire CQ , nous aurons $TF : FS :: CT : CQ$. Donc $CQ = \frac{b \cdot CT}{\sqrt{FT \cdot GT}} = \frac{bx \cdot CT}{a\sqrt{FM \cdot GM}} = \sqrt{\frac{ab}{FM \cdot GM}}$. Donc $CQ - FS = \frac{b \cdot CF}{\sqrt{FT \cdot GT}} = CX$, FX étant menée parallèlement à la tangente. On conclura de-là que $CQ - CX = \frac{b \cdot TF}{\sqrt{FT \cdot GT}}$ & $CQ + CX = \frac{b \cdot TG}{\sqrt{FT \cdot GT}}$; donc $CQ^2 - CX^2 = b^2$, & $CX = \sqrt{(CQ^2 - b^2)}$. Donc le petit axe étant donné, on trouve sur la perpendiculaire CQ le point X où doit être élevée la perpendiculaire qui passe par le foyer F .

145. Après avoir exposé les propriétés relatives aux foyers, passons à celles de deux diamètres conjugués quelconques. On fait que CM étant un demi-diamètre, on trouvera son conjugué, si on mène du centre parallèlement à la tangente TM la ligne CK . Soit $CM = p$, $CK = q$, & l'angle $MCK = CMT = s$, on aura d'abord $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$, & ensuite $p \cdot q \sin. s = ab$, comme nous l'avons vu ci-dessus; mais $p^2 = x^2 + y^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)xx}{a^2}$, & $q^2 = a^2 + b^2 - p^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2)xx}{a^2} = FM \cdot GM$; de même $p^2 = FK \cdot GK$. D'ailleurs, puisque $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$, on aura $\sin. CMQ = \sin. s = \frac{ab}{p\sqrt{FM \cdot GM}}$. On aura ensuite $TM : TP :: \frac{y}{b}\sqrt{FT \cdot GT} : \frac{a^2 y^2}{b^2 x} :: \sqrt{FM \cdot GM} : \frac{ay}{b} :: CK : CR$; donc $CR = \frac{ay}{b}$ & $KR = \frac{bx}{a}$, & par conséquent $CR \cdot KR = CP \cdot PM$. De plus, on trouvera $\sin. FMS = \frac{b}{\sqrt{GM \cdot FM}} = \frac{b}{q}$; & comme $x = CP = \frac{a\sqrt{(p^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$ & $y = \frac{b\sqrt{(a^2 - p^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = PM$, $CR = \frac{a\sqrt{(a^2 - p^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$ & $KR = \frac{b\sqrt{(p^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

on aura $\text{tang. } ACM = \frac{y}{x}$, & $\text{tang. } 2 ACM = \frac{2yx}{x^2 - y^2} = \frac{2ab\sqrt{(a^2 - f^2)(f^2 - b^2)}}{(a^2 + b^2)f^2 - 2a^2b^2}$. Or $ab = pq \sin. s$, $a^2 + b^2 = p^2 + q^2$ & $\sqrt{(a^2 - p^2)(p^2 - b^2)} = -pq \cos. s$; donc $\text{tang. } 2 ACM = \frac{2q^2 \sin. s \cdot \cos. s}{p^2 + q^2 \cos. 2s}$, à cause que $\cos. s$ est négatif. Enfin $CK^2 =$

$MT.Mt$; mais on tire de ce qui précède $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$

& $AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}}$; donc on aura $AV : MV :: b : q :: CE : CK$;

donc, si on mène des droites AM & EK , elles seront parallèles.

146. Puisque $p q \sin. s = ab$, on aura $p q$ plus grand que ab , & à cause que $pp + qq = aa + bb$, les quantités p & q approchent plus de la raison d'égalité que a & b ; donc, parmi tous les diamètres conjugués, ceux qui sont perpendiculaires diffèrent le plus l'un de l'autre; il y aura donc deux diamètres conjugués égaux entre eux. Pour les trouver, soit $q = p$,

on aura $2pp = a^2 + b^2$ & $p = q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, $\sin. s = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

& $\cos. s = \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$; donc $\sin. \frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}}$, $\cos. \frac{1}{2}s =$

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}}$; ce qui donne $\text{tang. } \frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = \text{tang. } CEB$, & MCK

$= 2CEB = AEB$. De plus $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $PM = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Donc

les deux demi-diamètres conjugués CM , CK , égaux entre

eux, seront parallèles aux cordes AE & BE .

147. Si on compte les abscisses du sommet A , & qu'on

fasse $AP = x$, $PM = y$, comme ce qui étoit auparavant

x est à présent $a - x$, on aura cette équation $yy = \frac{l^2}{a^2}$

$(2ax - x^2) = \frac{2l^2}{a}x - \frac{l^2}{a^2}xx$, dans laquelle il est évident que

$\frac{2l^2}{a}$ exprime le paramètre de l'Ellypse. Supposons le demi-pa-

ramètre ou l'appliquée au foyer $= c$, & la distance AF du

foyer au sommet $= d$, on aura $\frac{l^2}{a} = c$ & $a - \sqrt{(a^2 - b^2)} = d$

$= a - \sqrt{(a^2 - ac)}$, d'où l'on tire $2ad - d^2 = ac$ & $a = \frac{d^2}{2d - c}$.

On aura donc $yy = 2cx - \frac{c(2d-c)xx}{dd}$ pour l'équation à l'Ellypse entre les coordonnées perpendiculaires x & y , en comptant les abscisses x sur l'axe principal AB depuis le sommet A ; & prenant pour constantes la distance $AF = d$ du foyer au sommet, & le demi-paramètre $= c$. Il faut remarquer ici que $2d$ doit toujours être plus grand que c , parce que $AC = a = \frac{dd}{2d-c}$, & $CD = b = d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$.

Pl. IV. Fig. 32. 148. Si $2d = c$, on aura $yy = 2cx$, équation que nous avons vu auparavant appartenir à la Parabole; car l'équation $yy = a + \epsilon x$, que nous avons donnée ci-dessus, se ramène à cette forme en déplaçant l'origine des abscisses d'une quantité $= \frac{a}{\epsilon}$. Soit donc MAN une Parabole, dont la nature soit exprimée par cette équation $yy = 2cx$ entre l'abscisse $AP = x$ & l'appliquée $PM = y$. On aura la distance du foyer au sommet $AF = d = \frac{1}{2}c$, & le demi-paramètre $FH = c$, & pour tous les points de la courbe $PM^2 = 2FH \cdot AP$; d'où il suit qu'en supposant l'abscisse AP infinie, les appliquées PM & PN le deviennent aussi; & que par conséquent la courbe s'étend à l'infini des deux côtés de l'axe AP . Mais, si on fait l'abscisse x négative, l'appliquée devient imaginaire, & conséquemment aucune portion de la courbe ne répond à l'axe au-delà du point A vers T .

149. L'équation à l'Ellypse exprimant une parabole, lorsqu'on fait $2d = c$, il est évident que la Parabole n'est rien autre chose qu'une Ellypse dont le demi-axe $a = \frac{d^2}{2d-c}$ devient infini; c'est pourquoi toutes les propriétés que nous avons trouvées pour l'Ellypse s'appliqueront à la Parabole, en faisant l'axe a infini. D'abord, puisque $AF = \frac{1}{2}c$, FP sera $= x - \frac{1}{2}c$; & en menant du foyer F à un point M de la courbe la droite FM , on aura $FM^2 = x^2 - cx + \frac{1}{4}c^2 + yy = xx + cx + \frac{1}{4}c^2$, & par conséquent $FM = x + \frac{1}{2}c = AP +$

AF ; ce qui est la principale propriété du foyer dans la Parabole.

150. Puisque la Parabole n'est rien autre chose qu'une Ellypse, dont le grand axe a été augmenté à l'infini, traitons cette courbe comme si elle étoit réellement une Ellypse; soit à cet effet son demi-axe $AC = a$, a étant une quantité infinie, de manière que le centre C soit à une distance infinie du sommet A . Menons au point M une tangente à la courbe MT qui rencontre l'axe en T ; comme on avoit $CP : CA :: CA : CT$, CT fera $= \frac{a^2}{a-x}$, à cause de $CP = a-x$, & partant $AT = \frac{ax}{a-x}$; mais, comme a est une quantité infinie, l'abscisse x disparaîtra devant cette dernière quantité, & on aura $a-x = a$, & par conséquent $AT = x = AP$; ce qu'on peut démontrer de cette autre manière; puisque $AT = \frac{ax}{a-x}$, on aura $AT = x + \frac{x^2}{a-x}$; mais, à cause que le dénominateur de la fraction $\frac{x^2}{a-x}$ est infini, le numérateur étant fini, la valeur de la fraction devient nulle, & conséquemment $AT = AP = x$.

151. Si d'un point M on mène au centre C de la Parabole infiniment éloigné la ligne MC qui sera parallèle à l'axe, elle sera aussi un diamètre de la courbe, lequel divisera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente MT . Par exemple, si on imagine la corde ou l'ordonnée mn parallèle à la tangente MT , elle sera divisée également en p par le diamètre Mp . Toute droite menée dans la Parabole parallèlement à l'axe AP fera donc un diamètre obliquangle. Pour en déterminer la nature, soit $Mp = t$, $pm = u$; soit menée du point m à l'axe la perpendiculaire msr , à cause de $PT = 2x$ & de $MT = \sqrt{4xx + 2cx}$, on aura $\sqrt{4xx + 2cx} : 2x :: \sqrt{2cx} :: pm : ps :: ms$; ce qui donne $ps = \frac{2xu}{\sqrt{4x^2 + 2cx}} = u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$ & $ms = u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$.
Donc $Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$ & $mr = \sqrt{2cx + u}\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$;

mais $m r^2 = 2c.Ar$; donc $2cx + 2cu \sqrt{\frac{2x}{2x+c} + \frac{cuu}{2x+c}} = 2cx + 2ct + 2cu \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} \& u^2 = 2t(2x+c) = 4FM.t$,
 ou $pm^2 = 4FM.Mp$. Quant au sinus de l'angle oblique $m p s$, il fera $= \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}}$; son cosinus $= \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}}$; & par conséquent $\sin. 2 m p s = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} = \sin. MF r$. Donc l'angle $m p s = MTP = \frac{1}{2} MFr$.

152. Comme $MF = AP + AF$, à cause de $AP = AT$, on aura $FM = FT$; le triangle MFT fera isocèle, & l'angle $MF r$ fera $= 2MTA$, comme nous venons de le trouver; & puisque ensuite on a $MT = 2\sqrt{x(x + \frac{1}{2}c)}$, MT fera $= 2\sqrt{AP.FM}$; donc, si on abaisse du foyer F la tangente une perpendiculaire FS , on aura $MS = TS = \sqrt{AP.FM} = \sqrt{AT.TF}$; d'où l'on conclut la proportion $AT : TS :: TS : TF$, qui nous apprend que le point S est sur une droite AS perpendiculaire à l'axe au sommet A . Mais $AS = \frac{1}{2} PM$, & $AS : TS :: AF : FS$. Donc $FS = \sqrt{AF.FM}$, & FS sera moyenne proportionnelle entre AF & FM . On aura, en outre, $AS : MS :: AS : TS :: FS : FM :: \sqrt{AF} : \sqrt{FM}$. Si au point M on élève une perpendiculaire à la tangente MW qui coupe l'axe en W , on aura $PT : PM :: PM : PW$, ou $2x : \sqrt{2cx} :: \sqrt{2cx} : PW$, d'où l'on tire $PW = c$. Donc l'intervalle PW intercepté sur l'axe entre l'appliquée PM & la normale WM , a par-tout une grandeur constante & égale au demi-paramètre ou à l'appliquée FH . On aura d'ailleurs $FW = FT = FM$ & $MW = 2\sqrt{AF.FM}$.

153. Nous voilà arrivés à l'Hyperbole dont la nature est exprimée par cette équation $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$, les abscisses étant comptées sur le diamètre orthogonal. Si on transfère l'origine des abscisses à une distance $= \frac{\epsilon}{2\gamma}$, on trouvera une équation de cette forme $yy = a + \gamma xx$ dans laquelle les abscisses sont comptées du centre. Or, il est nécessaire que

que γ soit une quantité positive ; quant à la valeur de a , il est indifférent qu'elle soit positive ou négative ; car, en échangeant les coordonnées x & y , la quantité a de positive devient négative, & réciproquement. Supposons donc a une quantité négative, & $yy = \gamma xx - a$; il est visible que l'appliquée y devient nulle en deux endroits, savoir, lorsque $x = +\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$ & $x = -\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$. Soit C le centre, A & B les points où l'axe est coupé par la courbe ; ayant fait le demi-axe $CA = CB = a$, on aura $a = \sqrt{\frac{a}{\gamma}}$ & $a = \gamma a^2$, d'où résulte $yy = \gamma xx - \gamma aa$. Ainsi, tant que xx sera plus petit que a^2 , l'appliquée sera imaginaire ; ce qui fait voir qu'aucune portion de la courbe ne répond à la totalité de l'axe AB . Mais, si on prend xx plus grand que aa , les appliquées croissent de plus en plus jusqu'à devenir infinies. Donc l'Hyperbole aura quatre branches AI, Ai, BK, Bk , qui s'étendent à l'infini & qui sont égales & semblables entre elles ; c'est-là la propriété principale des Hyperboles.

Pl. IV. Fig. 33.

154. Puisqu'en faisant $x = 0$, on a $yy = -\gamma aa$, l'Hyperbole n'aura point comme l'Ellypse un axe conjugué, parce que l'appliquée au centre C est imaginaire. Cet axe conjugué sera donc imaginaire ; mais, pour conserver quelque analogie avec l'Ellypse, faisons-le $= b\sqrt{-1}$, de sorte que $\gamma a^2 = b^2$ & $\gamma = \frac{b^2}{a^2}$. Ayant fait l'abscisse $CP = x$ & l'appliquée $PM = y$, on aura $yy = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; ce qui fait voir que l'équation à l'Ellypse que nous avons traitée auparavant, savoir $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ devient l'équation à l'Hyperbole en mettant $-b^2$ à la place de b^2 . A cause de cette affinité, les propriétés de l'Ellypse, que nous avons trouvées auparavant, se rameneront facilement à l'Hyperbole. Par exemple, la distance des foyers au centre dans l'Ellypse étoit $\sqrt{(aa - b^2)}$; pour l'Hyperbole ; elle sera $CF = CG = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. On aura donc $FP = x - \sqrt{(a^2 + b^2)}$ & $GP = x + \sqrt{(a^2 + b^2)}$; donc, à cause de $y^2 = -b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$, FM deviendra $= \sqrt{(a^2$

+ $x^2 + \frac{l^2 x^2}{a^2} - 2x\sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{x\sqrt{(a^2 + l^2)}}{a} - a$, & $GM = \sqrt{(a^2 + x^2 + \frac{l^2 x^2}{a^2} + 2x\sqrt{(a^2 + b^2)})} = \frac{x\sqrt{(a^2 + l^2)}}{a} + a$. Ayant donc mené de chaque foyer à un point M de la courbe les droites FM , GM , on aura $FM + AC = \frac{CP \cdot CF}{CA}$ & $GM - AC = \frac{CP \cdot CF}{CA}$. La différence $GM - FM$ de ces deux droites est donc égale à $2AC$. On voit par-là que si dans l'Ellypse c'est la somme de ces deux lignes qui est égale à l'axe principal, au contraire, dans l'Hyperbole c'est leur différence.

155. On peut aussi conclure de-là la position de la tangente MT ; car on a toujours pour les lignes du second ordre $CP : CA :: CA : CT$; d'où $CT = \frac{a^2}{x}$ & $PT = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 y^2}{l^2 x}$; il s'enfuit que $MT = \frac{y}{l^2 x} \sqrt{(b^2 x^2 + a^2 y^2)} = \frac{y}{bx} \sqrt{(a^2 x^2 + b^2 x^2 - a^4)}$. Mais $FM \cdot GM = \frac{a^2 x^2 + l^2 x^2 - a^4}{a^2}$; donc $MT = \frac{ay}{bx} \times \sqrt{FM \cdot GM}$. On a ensuite $FT = \sqrt{(a^2 + b^2)} - \frac{a^2}{x}$ & $GT = \sqrt{(a^2 + b^2)} + \frac{a^2}{x}$. Donc $FT : FM :: a : x$ & $GT : GM :: a : x$; d'où il suit que $FT : GT :: FM : GM$, proportion qui apprend que l'angle FMG est divisé en deux parties égales par la tangente MT , & que $FM T = GM T$. La droite CM prolongée fera un diamètre obliquangle qui partage en deux également toutes les ordonnées parallèles à la tangente MT .

156. Soit abaissée du centre C sur la tangente la perpendiculaire CQ , on aura $TM : PT : PM :: CT : TQ : CQ$, ou $\frac{ay}{bx} \sqrt{FM \cdot GM} : \frac{a^2 y^2}{l^2 x} : y :: \frac{a^2}{x} : TQ : CQ$, d'où l'on tire $TQ = \frac{a^3 y}{bx \sqrt{FM \cdot GM}}$ & $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. Soit de même abaissée du foyer F sur la tangente la perpendiculaire FS , on aura $TM : PT : PM :: FT : TS : FS$, ou $\frac{ay}{bx} \sqrt{FM \cdot GM} : \frac{a^2 y^2}{l^2 x} : y$

$\therefore \frac{a \cdot FM}{x} : TS : FS$; d'où l'on tire $TS = \frac{a^2 y FM}{bx \sqrt{FM \cdot GM}}$ & $FS = \frac{b \cdot FM}{\sqrt{FM \cdot GM}}$; pareillement, si on abaisse de l'autre foyer G sur la tangente la perpendiculaire Gs , on aura $Ts = \frac{a^2 y \cdot GM}{bx \sqrt{FM \cdot GM}}$; & $Gs = \frac{b \cdot GM}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. On a donc $TS \cdot Ts = \frac{a^4 y^2}{b^2 x^2} = \frac{a^2 (x^2 - a^2)}{x^2} = CT \cdot PT$ & $TS : CT :: PT : Ts$; ensuite $FS \cdot Gs = b^2$. Et, comme $QS = Qs$, on aura $QS = \frac{TS + Ts}{2} = \frac{a^2 y (FM + GM)}{2bx \sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{ay \sqrt{(a^2 + b^2)}}{b \sqrt{FM \cdot GM}} = Qs$; d'où il suit que $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{a^2 l^4 + a^4 y^2 + a^2 b^2 v^2}{b^2 \cdot FM \cdot GM} = \frac{a^2 l^4 + (a^2 + b^2)(b^2 x^2 - a^2 b^2)}{b^2 \cdot FM \cdot GM} = \frac{(a^2 + b^2)x^2 - a^4}{FM \cdot GM} = a^2$. On aura donc, comme dans l'Élipse, la droite $CS = a = CA$; on a ensuite $CQ + FS = \frac{bx \sqrt{(x^2 + b^2)}}{a \sqrt{FM \cdot GM}}$, & par conséquent $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = \frac{b^2 x^2 (a^2 + b^2) - a^4 b^2}{a^2 FM \cdot GM} = b^2$. Donc, si on mène du foyer F , parallèlement à la tangente, la droite FX qui coupe la perpendiculaire CQ prolongée en X , on aura $CX = \sqrt{(b^2 + CQ^2)}$, propriété semblable à celle qui a été trouvée dans l'Élipse.

157. Si on élève aux sommets A & B des perpendiculaires à l'axe, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente en V & v , à cause de $AT = \frac{a(x-a)}{x}$ & $BT = \frac{a(x+a)}{x}$, la proportion $PT : PM :: AT : AV :: BT : Bv$ donnera $AV = \frac{b^2(x-a)}{ay}$ & $Bv = \frac{b^2(x+a)}{ay}$; donc $AV \cdot Bv = \frac{b^4(x^2 - a^2)}{a^2 y^2} = b^2$, ou $AV \times Bv = FS \cdot Gs$. On a ensuite $PT : TM :: AT : TV :: BT : Tv$; donc $TV = \frac{b(x-a)}{xy} \sqrt{FM \cdot GM}$ & $Tv = \frac{b(x+a)}{xy} \sqrt{FM \cdot GM}$; d'où l'on conclut $TV \cdot Tv = \frac{a^2}{x^2} FM \cdot GM = FT \cdot GT$. On peut tirer encore de là, d'une manière semblable, plusieurs autres corollaires.

158. De ce que $CT = \frac{a^2}{x}$, il s'ensuit évidemment que, plus

l'abscisse $CP = x$ fera grande, plus l'intervalle CT sera petit; ainsi la tangente qui atteint la courbe prolongée à l'infini, passera par le centre C , & CT deviendra $= 0$; or, puisque $\text{tang. } P T M = \frac{PM}{PT} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, si le point M s'éloigne à l'infini, ou si $x = \infty$; alors $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - a^2} = \frac{bx}{a}$. Donc la tangente de la courbe prolongée à l'infini passera par le centre C & fera avec l'axe un angle ACD , dont la tangente $= \frac{b}{a}$. Donc, si on mène par le sommet A une perpendiculaire à l'axe $AD = b$, la droite CD prolongée de part & d'autre à l'infini ne touchera la courbe en aucun point; mais la courbe approchera de la droite CI toujours de plus en plus, jusqu'à ce qu'à l'infini elle se confonde entièrement avec elle. La même chose aura lieu par rapport à la partie Ck , qui à la fin se confondra avec la branche Bk ; & si on mène de l'autre côté sous un même angle la droite KCi , elle se confondra avec les branches BK & Bi prolongées à l'infini. Ces sortes de lignes droites, dont une courbe quelconque approche toujours de plus en plus & qu'elle atteint à la fin à une distance infinie, s'appellent ASYMPTOTES; ainsi les deux droites ICk , KCi , sont deux asymptotes de l'Hyperbole.

159. Les asymptotes se coupent donc réciproquement au centre C de l'Hyperbole, & forment avec l'axe l'angle $ACD = ACD$ dont la tangente $= \frac{b}{a}$, & la tangente du double $DCd = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$; ce qui nous apprend que, si $b = a$, on aura l'angle DCd sous lequel les asymptotes se coupent $=$ à un angle droit. Dans ce cas, l'Hyperbole est dite *équilatère*; mais, puisqu'on a $AC = a$, $AD = b$, on aura $CD = Cd = \sqrt{a^2 + b^2}$; c'est pourquoi, si on abaisse du foyer G , sur celle des deux asymptotes qu'on voudra, la perpendiculaire GH ; à cause de $CG = \sqrt{a^2 + b^2} = CD$, on aura $CH = AC = BC = a$ & $GH = b$.

160. Soit prolongée de part & d'autre l'ordonnée $MPN = 2y$, jusqu'à ce qu'elle coupe les asymptotes en m & n , on

aura $Pm = Pn = \frac{bx}{a}$, & $Cm = Cn = \frac{x\sqrt{(a^2 + l^2)}}{a} = FM +$

$AC = GM - AC$; on aura aussi $Mm = Nn = \frac{bx - ly}{a}$, &
 $Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a}$; donc $Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = \frac{l^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2}$

$= b^2$, à cause de $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$. On aura donc par-tout
 $Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = Nn \cdot Nm = Nn \cdot Mn = b^2 = AD^2$.

Soit menée du point M la parallèle Mr à l'asymptote Cd ,
 on aura $2b : \sqrt{(a^2 + b^2)} :: Mm : mr (Mr)$; donc $mr = Mr$
 $= \frac{(bx - ay)\sqrt{(a^2 + l^2)}}{2ab}$ & $Cm - mr = Cr = \frac{(bx + ay)\sqrt{(a^2 + l^2)}}{2ab}$. On

en conclura donc $Mr \cdot Cr = \frac{(l^2 x^2 - a^2 y^2)(a^2 + l^2)}{4a^2 l^2} = \frac{a^2 + l^2}{4}$; ou, en

menant du point A la parallèle AE à l'asymptote Cd , on aura
 $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)}$; & par conséquent $Mr \cdot Cr =$
 $AE \cdot CE$, propriété principale de l'Hyperbole rapportée à ses
 asymptotes.

161. Si donc on prend les absciffes $CP = x$ sur une asymp-
 tote, à compter du centre, & qu'on suppose les appliquées
 $PM = y$ parallèles à l'autre asymptote; on aura $yx = \frac{a^2 + b^2}{4}$,
 en faisant $AC = BC = a$ & $AD = Ad = b$; ou bien, en
 faisant $AE = CE = h$, $yx = h^2$ & $y = \frac{hh}{x}$. En supposant

Pl. IV. Fig. 34.

donc $x = 0$, y devient $= \infty$, & réciproquement, en fai-
 sant $x = \infty$, y deviendra $= 0$. Menons à présent par un
 point M de la courbe une droite quelconque $QMNR$, pa-
 rallèlement à une droite GH prise à volonté, & supposons CQ
 $= t$, $QM = u$, nous aurons $GH : CH : CG :: u : PQ : PM$;

donc $PQ = \frac{CH}{GH} \cdot u$; $PM = \frac{CG}{GH} \cdot u$; ce qui donne $y = \frac{CG}{GH} \cdot u$ &
 $x = t - \frac{CH}{GH} \cdot u$; on aura, par la substitution de ces valeurs, $\frac{CG}{GH} t u$
 $- \frac{CH \cdot CG}{GH^2} u^2 = hh$ ou $u^2 - \frac{GH}{CH} t u + \frac{GH^2}{CH \cdot CG} h^2 = 0$. L'appliquée
 aura donc deux valeurs, favoir, QM & QN dont la somme fera
 $= \frac{GH}{CH} t = QR$, & le rectangle $QM \times QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} hh$.

162. Puisque $QM + QN = QR$, on aura $QM = RN$ & $QN = RM$. Par conséquent, si les points M & N coïncident, auquel cas la ligne QR devient tangente, elle sera coupée en deux parties égales au point de contact. Par exemple, si la droite XY touche l'Hyperbole, le point de contact Z fera situé au milieu de la droite XY . Donc, si du point Z on mène ZV parallèlement à l'autre asymptote, on aura $CV = VY$; ce qui fournit un moyen expéditif de mener une tangente par un point quelconque Z de l'Hyperbole. On prendra $VY = CV$, & la droite qui passera par Y & par le point Z de la courbe, touchera l'Hyperbole en ce même point Z .

L'égalité $CV \cdot ZV = h^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ donnera $CX \cdot CY = a^2 + b^2 = CD^2 = CD \cdot Cd$; ce qui fait voir que, si on menoit des droites DX & dY , ces lignes seroient parallèles entre elles, & ce qui donne par conséquent un moyen très-facile de mener tant de tangentes qu'on voudra à la courbe.

163. Puisqu'on a ensuite le rectangle $QM \cdot QN = \frac{CH^2}{CH \cdot CG} h^2$, il est clair que, par-tout où l'on mena la ligne QR parallèle à HG , le rectangle $QM \cdot QN$ fera toujours d'une même grandeur. On aura donc aussi $QM \cdot QN = QM \cdot MR = QN \cdot NR = \frac{CH^2}{CH \cdot CG} hh$. Donc, si on conçoit une tangente parallèle à QR , à cause que la partie interceptée entre les asymptotes sera coupée en deux parties égales au point de contact, en supposant la moitié de cette tangente $= q$, on aura toujours $QM \cdot QN = QM \cdot MR = RN \cdot RM = RN \cdot NQ = qq$; propriété remarquable des Hyperboles décrites entre les asymptotes.

164. Comme l'Hyperbole est composée de deux parties diamétralement opposées IAi & KBk , ces propriétés n'appartiennent pas seulement aux lignes droites situées entre les asymptotes qui coupent en deux points la même portion de la courbe, mais encore à celles qui aboutissent aux parties opposées. En effet, soit menée par le point M la droite $Mqrn$ à la partie opposée à laquelle Gh soit parallèle; faisons $Cq = t$ & qM

$= u$, nous aurons, à cause des triangles semblables, CGh & PMq , $PM = y = \frac{CG}{Gh} u$ & $qP = x - t = \frac{Ch}{Gh} u$; d'où l'on tire $x = t + \frac{Ch}{Gh} u$; & , puisqu'on a $xy = hh$, on aura $\frac{CG}{Gh} tu + \frac{CG \cdot Ch}{Gh^2} uu = hh$, ou $uu + \frac{Gh}{Ch} tu - \frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} .hh = 0$.

165. L'appliquée u aura donc deux valeurs, savoir qM & $-qn$; je prends qn négativement, parce qu'elle tombe de l'autre côté de l'asymptote CP qui a été prise pour l'axe. La somme de ces deux racines $qM - qn$ sera donc $= -\frac{Gh}{Ch} t = -qr$, & par conséquent $qn - qM = qr$; d'où il suit que $qM = rn$ & $qn = rM$. L'équation qu'on vient de trouver fait voir, de plus, que le produit des racines $-qM \cdot qn = -\frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} h^2$, ou $qM \cdot qn = qM \cdot rM = rn \cdot qn = rn \cdot rM = \frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} .h^2$. Ces rectangles, en quelque endroit qu'on mène les droites Mn parallèles à Gh , auront toujours une grandeur constante. Telles sont les principales propriétés de chaque espèce de lignes du second ordre; lesquelles, réunies avec celles que nous avons trouvées d'une manière générale, donnent une multitude presque infinie de propriétés dignes de remarque.

CHAPITRE VII.

De la Recherche des Branches infinies.

166. Si une ligne courbe quelconque a une branche, ou une portion, qui s'étende à l'infini, & que d'un de ces points infiniment éloigné on abaisse à un axe quelconque une appliquée perpendiculaire; alors ou l'abscisse x , ou l'appliquée y , ou l'une & l'autre coordonnée sera infinie. Car, si l'une des deux, ou toutes les deux n'étoient pas infinies, la distance du point de la courbe,

dont il s'agit, à l'origine des abscisses seroit finie, savoir $\sqrt{(x^2+y^2)}$; ce qui est contre l'hypothèse. C'est pourquoi, si une courbe a une branche qui s'étende à l'infini, il arrivera qu'à une abscisse quelconque finie répondra une appliquée réelle infinie, ou qu'à une abscisse infiniment grande répondra une appliquée réelle soit finie, soit infinie. C'est donc en partant de ce principe, qu'on pourra procéder à la recherche des branches infinies des courbes.

167. Soit proposée une équation algébrique d'un degré indéterminé n entre les coordonnées x & y , & examinons à part les termes dans lesquels les variables x & y ont un nombre n de dimensions, savoir, $\alpha y^n + \xi y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \delta y^{n-3}x^3 + \dots + \zeta x^n$; cette expression pourra être décomposée en facteurs simples de la forme $Ay + Bx$, réels ou imaginaires; si elle renferme des facteurs imaginaires, ils seront en nombre pair, & deux combinés ensemble donneront un facteur double réel de la forme $A^2y^2 - 2ABxy \cos. \phi + B^2x^2$. Or un tel facteur, lorsque x ou y , ou l'un ou l'autre est supposé infini $= \infty$, aura toujours une valeur infinie $= \infty^2$, parce que le terme $2ABxy \cos. \phi$ est toujours plus petit que la somme des deux autres $A^2y^2 + B^2x^2$, & que d'ailleurs ni A ni B ne peut être $= 0$. Le facteur de la forme $A^2y^2 - 2ABxy \cos. \phi + B^2x^2$, lorsqu'on suppose ou x ou y , ou l'un & l'autre infini, ne peut donc être égal à zéro, ni à une quantité finie, ni même à la quantité infinie ∞ , puisqu'elle est $= \infty^2$, quantité infiniment plus grande que ∞ .

168. Donc, si la partie supérieure de l'équation $\alpha y^n + \xi y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \dots + \zeta x^n$ ne renferme aucun facteur simple réel; ce qui, à la vérité, ne peut arriver, à moins que n ne soit un nombre pair, elle sera alors composée seulement de facteurs doubles de cette forme $A^2y^2 - 2ABxy \cos. \phi + B^2x^2$. Ainsi, en supposant ou x ou y , ou l'un & l'autre infini, cette expression recevra une valeur infinie $= \infty^n$; elle ne peut donc être égale ni à une quantité finie, ni à aucune quantité infinie ∞^m , dont l'exposant m seroit moindre que n . Les autres membres de l'équation dans lesquels les variables x & y ont de plus petites dimensions, don-

nant

nant des infinis d'un ordre inférieur à n , ne peuvent égaler ce plus grand infini ; & par conséquent l'équation ne peut subsister, si on fait ou x ou y , ou les deux infinis.

169. Il suit de-là qu'une ligne courbe exprimée par une équation entre les coordonnées x & y , dont le membre supérieur ne renferme aucun facteur simple réel, n'aura aucune branche qui s'étende à l'infini ; & que, par conséquent, toute la courbe sera comprise dans un espace fini, comme l'Ellypse ou le Cercle. C'est pourquoi, si dans l'équation générale du second ordre $ay^2 + \epsilon xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, le membre supérieur $ay^2 + \epsilon xy + \gamma xx$, dans lequel les variables x & y ont deux dimensions, ne contient point de facteurs simples réels, ce qui a lieu lorsque $\epsilon\epsilon$ est plus petit que $4a\gamma$, la courbe n'aura dans ce cas aucune branche qui s'étende à l'infini, & sera par cette raison une Ellypse.

170. Pour mieux éclaircir tout cela, distinguons dans toute équation proposée entre les coordonnées x & y plusieurs membres, de manière que le premier membre, ou le membre de l'ordre le plus élevé, renferme tous les termes de l'équation, dans lesquels les variables x & y forment la plus grande dimension dont l'exposant soit n . Je rapporte au second membre tous les termes dans lesquels les deux variables forment $n-1$ dimensions. Le troisième membre comprendra ceux dans lesquels le nombre de dimensions de x & de y sera $n-2$, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier membre dans lequel la dimension de x & de y sera nulle, & qui par conséquent sera composé seulement d'une quantité constante. Au reste, nous désignerons par P le premier membre, ou le membre le plus élevé, par Q le second membre, par R le troisième, par S le quatrième, ainsi de suite.

171. Puis donc qu'une ligne courbe représentée par l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, lorsque le membre de l'ordre le plus élevé P n'a aucun facteur simple réel, ne peut avoir de branche qui s'éloigne à l'infini ; supposons à présent que ce membre P renferme un seul facteur simple réel $ay - bx$, de sorte que $P = (ay - bx)M$; M étant

une fonction de x & de y à la fois, d'un nombre $n-1$ de dimensions, laquelle ne contienne aucuns facteurs simples réels. En faisant ou x ou y , ou l'un & l'autre infini, M deviendra $= \infty^{n-1}$, Q pourra être un infini du même ordre; mais R , S , &c., deviendront des infinis d'un degré inférieur. Conséquemment, l'équation $P + Q + R + \&c. = 0$ pourra subsister, si $ay - bx$ est égal à une quantité finie ou à zéro; & la courbe, par cette raison, s'étendra à l'infini.

172. Soit donc $ay - bx = p$, p étant une quantité finie telle que, lorsque la courbe s'éloigne à l'infini, $pM + Q + R + S + \&c. = 0$, ou $p = \frac{-Q - R - S - \&c.}{M}$; mais, comme M est une quantité infinie d'un ordre supérieur à R & à S &c., les facteurs $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, &c. $= 0$, & par conséquent $p = \frac{-Q}{M}$. Donc la fraction $\frac{-Q}{M}$ donnera la valeur de p , si les variables x & y sont infinies; mais, comme $ay - bx = p$, on aura $y = \frac{bx + p}{a}$ & $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$, à cause de $\frac{p}{ax} = 0$, lorsque $x = \infty$. Ainsi, lorsque la courbe s'étend à une distance infinie, y devient $= \frac{bx}{a}$.

173. Les quantités Q & M étant des fonctions homogènes de $n-1$ dimensions, $\frac{-Q}{M}$ sera une fonction de dimension nulle, & donnera par conséquent une valeur constante pour p , si on suppose $y = \frac{bx}{a}$; ou, parce que la fonction $\frac{-Q}{M}$ est déterminée, si on détermine seulement le rapport entre y & x , qui est $b : a$, on obtiendra la valeur de p en écrivant partout dans l'expression $\frac{-Q}{M}$, b au lieu de y & a au lieu de x . Ayant donc trouvé p de cette manière, on aura l'équation $ay - bx = p$, laquelle est contenue dans l'équation même proposée $P + Q + R + S + \&c. = 0$, lorsque la courbe s'éloigne à l'infini.

174. La portion de la courbe qui se trouve à une distance infinie sera donc exprimée par cette équation $ay - bx = p$;

& comme cette équation appartient à la ligne droite, il s'ensuit que cette ligne droite prolongée à l'infini se confondra à la fin avec la courbe. Elle sera donc l'asymptote de la courbe, puisque cette dernière en approchera toujours de plus en plus, & que prolongée à la fin elle se confondra avec elle. De plus, comme l'équation proposée $P + Q + R + S + \&c. = 0$, lorsqu'on fait x ou $y = \infty$, se change en celle-ci : $ay - bx = p$, on conçoit en même temps que cette ligne droite prolongée de part & d'autre à l'infini coïncide à la fin avec la courbe. La courbe aura donc deux branches infinies opposées l'une à l'autre, dont la première se confondra par-devant, & la seconde par derrière ; avec la ligne droite prolongée à l'infini.

175. Puisque la courbe, lorsque le premier membre P de l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, contient un seul facteur simple réel, jette deux branches infinies & convergentes de part & d'autre à une même ligne droite, cette ligne droite en est l'asymptote; supposons à présent que le premier membre P contienne deux facteurs simples réels $ay - bx$ & $cy - dx$, de manière que $P = (ay - bx)(cy - dx)M$, M sera une fonction homogène de $n - 2$ dimensions. Il se présente alors deux cas à examiner, suivant que ces deux facteurs seront égaux ou inégaux entre eux.

176. Supposons-les inégaux, il est visible que l'équation $(ay - bx)(cy - dx)M + Q + R + S + \&c. = 0$ peut subsister de deux manières pour des abscisses ou des appliquées infinies; savoir, en faisant ou $ay - bx$, ou $cy - dx$ égal à une quantité finie. Soit donc $ay - bx = p$, comme p est une quantité finie, on aura à l'infini $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, & p deviendra, comme auparavant, $= \frac{-Q - R - S - \&c.}{(cy - dx)M} = \frac{-Q}{(cy - dx)M}$, fonction de dimension nulle de x & de y ; c'est pourquoi, si on suppose $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, ou, ce qui revient au même, si on écrit partout b au lieu de y & a au lieu de x , on obtiendra la vraie valeur de la constante cherchée p . On aura donc $p =$

3 L ij

$\frac{-Q}{(bc-ad)M}$; &, comme les facteurs sont inégaux, $bc - ad$ ne sera point $= 0$; il en sera de même de la quantité M , parce qu'elle ne renferme aucun facteur simple réel. La valeur résultante de p sera donc finie, ou même $= 0$; ce qui aura lieu si le membre Q manque entièrement, ou s'il contient le facteur $ay - bx$.

177. A cause du facteur simple réel $ay - bx$ du membre supérieur P , la courbe aura, comme dans le premier cas, une asymptote, dont la position est indiquée par l'équation $ay - bx = p$. Par une raison semblable, l'autre facteur $cy - dx$ donnera aussi une asymptote déterminée par cette équation $cy - dx = q$, q étant $= \frac{-Q}{(ay-bx)M}$, après qu'on aura substitué par-tout à y & à x les valeurs déterminées d & c . Ainsi la courbe aura deux asymptotes, & par conséquent quatre branches infinies qui se confondront à la fin avec ces droites. Ce cas a eu lieu dans l'Hyperbole; donc, si dans l'équation aux lignes du second ordre $\alpha yy + \ell xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, le premier membre $\alpha yy + \ell xy + \gamma xx$ renferme deux facteurs simples réels inégaux, ce qui aura lieu, si ℓ^2 surpasse $4\alpha\gamma$, la courbe sera une Hyperbole.

178. Soient les deux facteurs $ay - bx$ & $cy - dx$ égaux entre eux, ou soit $P = (ay - bx)^2 M$. Puisque $P + Q + R + S + \&c. = 0$, on aura $(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S - \&c.}{M}$; mais Q étant une fonction de $n - 1$, R , de $n - 2$, & S , de $n - 3$ dimensions; à cause que M est une fonction de $n - 2$ dimensions, dans le cas de l'infini, $\frac{S}{M} = 0$; & par conséquent $(ay - bx)^2 = \frac{-Q}{M} - \frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)} (\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}$. Mais $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ & $\frac{R}{M}$ sont des fonctions de x & de y de dimension nulle; par conséquent, comme à l'infini $y : x :: b : a$, si on substitue ce rapport $\frac{b}{a}$ pour $\frac{y}{x}$, ou, si on met b pour y & a pour x , les deux fonctions se changeront en une quantité constante.

179. Soit donc, après la substitution faite, $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A$ & $\frac{R}{M} = B$; on aura $(ay - bx)^2 = -A(\mu y + \nu x) - B$ pour l'équation à la ligne courbe, avec laquelle se confondra à l'infini celle qui est représentée par l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$. Mais, comme les quantités μ & ν sont arbitraires, prenons $\mu = b$ & $\nu = a$; & pour changer les coordonnées, faisons $ay - bx = u\sqrt{(a^2 + b^2)}$ & $by + ax = t\sqrt{(a^2 + b^2)}$; nous aurons pour cette même courbe l'équation $uu + \frac{At}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} + \frac{B}{a^2 + b^2} = 0$, qui appartient évidemment à la Parabole. La courbe cherchée, prolongée à l'infini, se confondra donc avec la Parabole. Elle aura donc seulement deux branches infinies qui n'auront plus pour asymptote une ligne droite, mais la Parabole exprimée par l'équation précédente.

180. Cela a lieu, si A n'est pas $= 0$; mais, si $A = 0$, ce qui arrivera lorsque le second membre Q manquera ou sera divisible par $ay - bx$, l'équation dans ce cas cesse d'appartenir à la Parabole, & devient $u^2 + \frac{B}{a^2 + b^2} = 0$. Il y aura trois cas à examiner; le premier, si B est une quantité négative; par exemple, si $\frac{B}{a^2 + b^2} = -ff$; alors l'équation $uu - ff = 0$, renfermera deux équations $u - f = 0$ & $u + f = 0$, qui appartiennent à deux lignes droites parallèles entre elles; l'une & l'autre sera une asymptote de la courbe, comme dans le premier cas; & par conséquent la courbe aura quatre branches qui s'étendront à l'infini, & qui se confondront avec ces deux droites.

181. Le second cas est lorsque B est une quantité positive, comme ff , alors l'équation $u^2 + f^2 = 0$, étant impossible, la courbe n'aura aucune branche infinie, mais elle sera renfermée toute entière dans un espace fini. Non-seulement donc la courbe exprimée par l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, n'aura aucune branche infinie, dans le cas où le membre supérieur P ne renferme aucun facteur simple réel; mais cela peut encore arriver, quoique P ait des facteurs, comme nous ve-

nous de le voir. Il se présentera dans la suite plusieurs autres cas semblables.

182. Le troisième cas a lieu lorsque B devient $= 0$; & , comme chacun des deux précédens peut tomber sur celui-ci, il en pourroit résulter du doute sur la nature de la courbe.

Pour en déterminer la figure, il faudra recourir aux termes suivans. En effet, puisque $P + Q + R + S + \&c. = 0$ & $P = (ay - bx)^2 M$; on aura à l'infini $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ & $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} + \&c. = 0$; supposons, comme auparavant, après avoir fait la substitution de $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; $\frac{Q}{M} = A$ $(by + ax)$, $\frac{R}{M} = B$; & , comme $S, T, V, \&c.$, sont des fonctions de $n - 3, n - 4, \&c.$, dimensions, tandis que M est une fonction de $n - 2$ dimensions; supposons $\frac{S(by + ax)}{M} = C$; $\frac{T(by + ax)^2}{M} = D$; $\frac{V(by + ax)^3}{M} = E$, &c.; nous aurons $(ay - bx)^2 + A(by + ax) + B + \frac{C}{by + ax} + \frac{D}{(by + ax)^2} + \frac{E}{(by + ax)^3} + \&c. = 0$. Cette équation exprime donc la nature de la ligne courbe, dont la portion infiniment éloignée, qui résulte de la supposition que $by + ax$ est une quantité infinie, se confondra avec la courbe représentée par l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$; car quoique, la courbe s'éloignant à l'infini, $(ay - bx)^2$ obtienne une valeur ou finie, ou infinie, mais d'un ordre inférieur à ∞^2 ; cependant $by + ax$ aura une valeur infinie.

183. Changeons maintenant l'axe auquel nous rapportons l'asymptote que nous avons trouvée, & prenons sur cet axe l'abscisse $\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} = t$ & l'appliquée $\frac{ay - bx}{\sqrt{a^2 + b^2}} = u$; & soit, pour abrégér, $\sqrt{a^2 + b^2} = g$; on aura l'équation $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{g^2} + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} + \&c. = 0$. Puisque dans le cas que nous devons traiter, $A = 0$ & $B = 0$, elle deviendra $uu + \frac{C}{g^2 t} + \frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} + \&c. = 0$. S'il arrive que C ne soit pas

$\equiv 0$, en faisant t infini, les termes $\frac{D}{g^{4,2}} + \frac{E}{-g^{5,3}} + \&c.$ disparaîtront devant $\frac{C}{g^{3,2}}$, & il restera $uu + \frac{C}{g^{3,2}} \equiv 0$. Cette équation exprime la nature de la courbe, qui, en supposant $t = \infty$, se confondra avec la courbe cherchée. Ainsi, puisqu'on en tire $u = \pm \sqrt{-\frac{C}{g^{3,2}}}$, la courbe aura deux branches infinies convergentes de part & d'autre à la même partie de l'axe.

184. Si, en outre, $C = 0$, il faudra prendre cette équation $u^2 + \frac{D}{g^{4,2}} = 0$, où il se présente encore trois cas à examiner suivant que D est une quantité positive ou négative, ou nulle. Dans le premier cas, comme l'équation est impossible, la courbe n'aura aucune branche infinie; mais elle sera renfermée toute entière dans un espace fini. Dans le second cas, si $\frac{D}{g^4} = -ff$, à cause que $u^2 = \frac{f^2}{t^2}$, l'appliquée u , soit qu'on fasse $t = +\infty$ ou $-\infty$, obtiendra une double valeur évanescente, l'une positive, l'autre négative, & la courbe aura par conséquent quatre branches convergentes à l'axe de part & d'autre vers les deux extrémités. Dans le troisième cas où $D = 0$, il faut prendre l'équation $uu + \frac{E}{g^{5,3}} = 0$, à laquelle s'appliquera ce que nous avons dit dans l'article précédent. On devra continuer de la même manière, tant que l'équation $P + Q + R + S + \&c.$ fournira des termes ultérieurs.

185. Supposons maintenant que le premier membre P de l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, contienne trois facteurs simples réels; il est évident que, si ces facteurs sont inégaux entre eux, on peut appliquer à chacun ce que nous avons dit d'un seul facteur réel. Dans ce cas, la courbe aura donc six branches infinies convergentes à trois asymptotes droites. S'il y a deux facteurs égaux, il faudra alors se comporter, pour le troisième qui est inégal, de la manière que nous avons prescrite; & pour les deux qui sont égaux, on devra observer aussi les règles que nous avons données auparavant. Reste à traiter le troisième cas, où tous les trois facteurs sont

égaux entre eux. Soit donc $P = (ay - bx)^3 M$; comme l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, ne peut subsister à l'infini, à moins que $(ay - bx)^3$ n'ait une valeur ou finie, ou infinie à la vérité, mais d'un ordre inférieur à ∞^3 , afin que la puissance de l'infini que donne le premier membre P soit moindre que ∞^n ; on aura toujours à l'infini $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Pour traiter ce cas, il faut d'abord voir si le second membre Q renferme le même facteur $ay - bx$, ou non. Remarquez que, s'il manque entièrement, ce cas rentre dans le premier, parce que zéro admet toute espèce de facteurs. Supposons donc en premier lieu que Q ne soit pas divisible par $ay - bx$; comme Q est une fonction de $n - 1$ dimensions, & M de $n - 3$ dimensions; $\frac{Q}{(ax + by)^3 M}$ fera une fonction de dimension nulle, laquelle par conséquent, en faisant $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ se changera en une quantité constante que j'appelle A , & on aura $(ay - bx)^3 + A(ax + by)^2 = 0$; car les membres suivans fourniront des termes qui sont nuls à l'infini à l'égard de $A(ax + by)^2$.

187. La ligne courbe exprimée par cette équation, prolongée à l'infini, se confondra donc avec la courbe représentée par $P + Q + R + S + \&c. = 0$. Pour la connoître plus intimement, rapportons-la à un autre axe sur lequel nous prendrons l'abscisse $t = \frac{ax + by}{g}$, & l'appliquée $u = \frac{ay - bx}{g}$; en supposant $\sqrt{(a^2 + b^2)} = g$; nous trouverons l'équation $u^3 + \frac{At^2}{g} = 0$, qui, dans l'hypothèse de $t = \infty$, donnera la partie de la courbe cherchée $P + Q + R + S + \&c. = 0$, qui existe à une distance infinie. Ainsi, en connoissant la figure de la courbe représentée par $u^3 + \frac{At^2}{g} = 0$, on connoîtra en même temps celle de la portion infiniment éloignée de la courbe exprimée par $P + Q + R + S + \&c. = 0$. Nous traiterons expressément dans le chapitre suivant de la nature de ces asymptotes courbes.

188. Si le second membre Q renferme le facteur $ay - bx$; ou il sera divisible par $(ay - bx)^2$, ou il ne le sera pas. Supposons d'abord qu'il ne soit pas divisible par $(ay - bx)^2$, & prenons cette fonction de dimension nulle $\frac{Q}{(ay - bx)(ax + by)M}$

qui, en faisant $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, donne cette quantité constante A ,

nous aurons $(ay - bx)^2 + A(ay - bx)(ax + by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \&c. = 0$. Ici $\frac{R}{M}$, en supposant $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, deviendra ou $B(ay - bx)$ ou $B(ax + by)$, suivant que R sera ou ne sera pas divisible par $ay - bx$; mais $\frac{S}{M}$ sera une quantité constante C . Ainsi, en rapportant cette équation à un autre axe entre les coordonnées t & u ,

comme nous l'avons fait auparavant, elle deviendra ou $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} + \frac{C}{g^3} = 0$, ou $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$. Mais,

comme il n'est question ici que des cas où $t = \infty$, les derniers termes disparaissent; nous aurons donc, pour le premier cas, $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{g^2} = 0$; ce qui donne deux asymptotes, savoir

$u = 0$, & $uu + \frac{At}{g} = 0$, l'une droite, l'autre parabolique.

Pour le second cas, lorsque $t = \infty$, il est possible que u ait une valeur finie; & à cause que les quantités finies disparaissent devant les quantités infinies, on aura alors $\frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$,

& partant $u = \frac{-B}{Ag}$; ce qui donne une ligne droite. Mais u

pourra avoir en outre une valeur infinie; ainsi, le troisième terme disparaissant, il en résultera l'équation à la Parabole

$u^2 + \frac{At}{g} = 0$. On a donc dans ces deux cas deux asymptotes,

l'une droite, l'autre parabolique; ainsi il ne sera pas nécessaire de séparer ces deux cas l'un de l'autre.

189. Soit à présent Q divisible par $(ay - bx)^2$; suivant que R le sera ou ne le sera pas par $ay - bx$, en faisant les mêmes opérations qu'auparavant, on aura entre t & u les équations:

$u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{b^2} + \frac{C}{b^3} = 0$, ou $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$. Le premier cas est pour trois lignes droites parallèles entre elles, si toutes les racines de l'équation $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{b^2} + \frac{C}{b^3} = 0$ sont réelles; ou pour une seule asymptote droite, si deux racines sont imaginaires. De là naissent des variétés, suivant que deux, ou la totalité de ces trois asymptotes coïncident. Le dernier cas $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, dans la supposition de $t = \infty$, ne peut avoir lieu, à moins que u ne soit infini, le terme $\frac{Au^2}{g}$ disparaîtra donc devant le premier u^3 , & on aura l'équation $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$, qui indique une asymptote curviligne du troisième ordre.

190. Mais, si on a $A = 0$, $B = 0$ & $C = 0$, il faut alors recourir aux termes suivans de l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, lesquels donneront une équation de cette forme $u^3 + \frac{D}{g^{4t}} + \frac{E}{g^{5,2}} + \frac{F}{g^{6,3}} + \&c. = 0$, dans laquelle, à moins que D ne soit $= 0$, le troisième terme s'évanouit avec ceux qui suivent, de sorte qu'on a l'équation $u^3 + \frac{D}{g^{4t}} = 0$; mais, si $D = 0$, on aura $u^3 + \frac{E}{g^{5,2}} = 0$, & si $E = 0$, on aura $u^3 + \frac{F}{g^{6,3}} = 0$, &c. Ces équations désignent les lignes courbes qui, en faisant $t = \infty$, se confondront avec celle qu'exprime l'équation $P + Q + R + \&c. = 0$. Ces équations, à cause de la puissance impaire u^3 , sont toujours réelles, & donnent par conséquent des branches infinies. Cependant, dans ce même cas, on pourra aussi prendre pour asymptote la ligne droite exprimée par l'équation $u = 0$; car elle l'est évidemment des courbes qui ont pour équation $u^3 + \frac{D}{g^{4t}} = 0$; $u^3 + \frac{E}{g^{5,2}} = 0$, &c.

191. La différence entre les branches des courbes convergentes à une asymptote droite, pouvant être aussi grande, il est à propos d'examiner avec plus de soin cette diversité; ce que nous ferons en déterminant la courbe la plus simple qui,

rapportée à la même asymptote, se confondra avec la courbe proposée. Ainsi, quoique l'équation $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, si elle a trois racines réelles, donne trois asymptotes droites parallèles entre elles; on ne voit pas si les branches de la courbe prolongées à l'infini sont hyperboliques, c'est-à-dire, exprimées par l'équation $u = \frac{C}{g}$, ou d'un autre genre, exprimées, par exemple, par l'équation $u = \frac{C}{g^2}$ ou $u = \frac{C}{g^3}$, &c. Pour nous en assurer, prenons dans l'équation le terme voisin qui vient après, savoir $\frac{D}{g^4}$; ou, si celui-ci manque, $\frac{E}{g^5}$, ou même, au défaut de ce dernier, $\frac{F}{g^6}$. Pour plus de généralité, supposons que le terme qui suit, soit $\frac{K}{g^k}$; il est visible par la nature de l'équation $P + Q + R + \&c. = 0$, qui est du degré n , que k ne peut être un nombre plus grand que $n - 3$. Imaginons que l'équation $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ ait pour racines ou facteurs $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$, nous aurons $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) - \frac{K}{g^k} = 0$. Soit $u - \alpha = \frac{I}{g^\mu}$, l'équation qui exprimera la nature d'une des asymptotes; on aura $\frac{I}{g^\mu} (\alpha - \beta + \frac{I}{g^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{I}{g^\mu}) = \frac{K}{g^k}$; en supposant g infini, elle deviendra $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)I}{g^\mu} = \frac{K}{g^k}$.

192. Cette équation a lieu, lorsque α diffère des autres racines β & γ ; dans ce cas $I = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ & $\mu = k$; donc la racine $u = \alpha$ donnera l'asymptote curviligne $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)g^k}$. Si toutes les racines sont inégales entre elles, elles fourniront chacune des asymptotes d'une même nature. Mais, s'il y a deux racines égales; que, par exemple, $\beta = \alpha$, deux asymptotes se confondront en une, & on aura $\frac{I^2(\alpha - \gamma)}{g^{2\mu}} =$

$\frac{K}{t^k}$; d'où l'on tirera $I^2 = \frac{K}{a-\gamma}$ & $2\mu = k$. La nature de cette double asymptote sera donc exprimée par cette équation $(u-a)^2 = \frac{K}{(a-\gamma)^{1/k}}$. Et, si les trois racines sont égales, les trois asymptotes n'en feront plus qu'une, dont la nature sera exprimée par l'équation $(u-a)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Si le membre de l'ordre le plus élevé P de l'équation $P+Q+R+S+\&c.=0$ renferme quatre facteurs simples réels; ou ils seront tous inégaux entre eux, ou deux & même trois seront égaux; dans ces cas, on pourra conclure de ce qui précède la nature des branches infinies avec celle de leurs asymptotes; il reste à examiner le cas où toutes les racines sont égales entre elles. Soit, à cet effet, $P=(ay+bx)^4M$, de sorte que la fonction M ait $n-4$ dimensions; si l'on fait comme auparavant, dans les fonctions de dimension nulle, $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, afin d'avoir des quantités constantes, & qu'en changeant la direction de l'axe on suppose $z = \frac{ax+by}{g}$ & $u = \frac{ay-bx}{g}$, g étant $=\sqrt{aa+bb}$, on trouvera, pour déterminer les asymptotes, les équations suivantes entre z & u .

194. D'abord, si Q n'est pas divisible par $ay-bx$, on aura $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$. Ensuite, si Q est divisible par $ay-bx$, mais non par $(ay-bx)^2$, on aura l'équation $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, dans laquelle, en faisant $t = \infty$, l'appliquée u peut être une quantité finie ou infinie; ce qui donne deux asymptotes, l'une droite représentée par $u + \frac{B}{gA} = 0$, & l'autre courbe représentée par $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$. Pour connoître plus intimement la première, il faudra prendre le terme voisin suivant, que je suppose $\frac{K}{t^k}$, & on trouvera $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = 0$ pour l'équation de la courbe, dont la partie correspondante à l'abscisse $t = \infty$ se confondra avec la courbe cherchée.

195. Si Q est divisible par $(ay - bx)^2$ & non par $(ay - bx)^3$, il faudra voir si R est divisible par $ay - bx$ ou non. Dans le premier cas, on aura $u^t + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$, & dans le second $u^t + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$. Le premier cas fournit deux équations, suivant que u est fini ou infini, & donne par conséquent $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{g^2A} = 0$, & $uu + \frac{At}{g} = 0$. La première équation, si ses deux racines sont réelles & inégales, indique deux droites parallèles; mais, si elles sont imaginaires, elle ne désigne aucune branche infinie; celle-ci $uu + \frac{At}{g} = 0$, donne une Parabole pour asymptote. L'autre équation $u^t + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$ (car $\frac{Ct}{g^3}$ disparoit devant $\frac{Btt}{gg}$, en faisant $t = \infty$) en renferme deux autres de la forme $uu + at = 0$, qui désignent deux asymptotes paraboliques, si A^2 est plus grand que $4B$; lesquelles se réduisent à une seule si $A^2 = 4B$, & qui deviennent imaginaires, si A^2 est plus petit que $4B$; dans ce dernier cas, la courbe n'a point de branche désignée qui s'étende à l'infini.

196. Soit à présent Q divisible par $(ay - bx)^3$, on obtiendra, suivant que R & S seront ou ne seront pas divisibles par $ay - bx$, les équations suivantes :

$$u^t + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} = 0$$

$$u^t + \frac{Au^3}{g} + \frac{B^2u^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$

$$u^t + \frac{Au^3}{g} + \frac{B^2ut}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$

$$u^t + \frac{Au^3}{g} + \frac{B^2tt}{g^2} = 0.$$

La première de ces équations est pour quatre lignes droites, parallèles entre elles, si toutes ses racines sont réelles & inégales, & dont deux, ou un plus grand nombre, se réduisent à une seule, lorsqu'il y a des racines égales; mais s'il y a des racines imaginaires, deux de ces lignes, ou même toutes les quatre n'ont plus lieu. Dans la seconde équation, à cause de $t = \infty$, l'appliquée z

ne peut manquer d'être infinie, & on aura $u^t + \frac{Ct}{g^g} = 0$, ou une asymptote courbe du quatrième ordre. La troisième équation peut donner la valeur finie $u + \frac{C}{g^g} = 0$; mais elle renferme en outre cette équation $u^3 + \frac{Bt}{fg} = 0$, qui annonce pour asymptote une ligne du troisième ordre. La quatrième enfin, à cause de $u = \infty$, si $t = \infty$ se change en celle-ci $u^t + \frac{Btt}{gg}$, laquelle est impossible si B est une quantité positive, & désigne, lorsqu'il est négatif, deux Paraboles opposées par le sommet, avec lesquelles la courbe se confond à une distance infinie.

197. On connoît par ce qui précède la marche ultérieure qu'il faut suivre, lorsque le membre P du degré le plus élevé renferme un plus grand nombre de facteurs simples égaux entre eux. Car, pour ce qui regarde les facteurs inégaux, on peut les considérer chacun séparément, & déterminer l'asymptote rectiligne qui en résulte. S'il se trouve deux facteurs égaux, on pourra déterminer la nature de la courbe par ce qui a été dit *art.* 178 & *suiv.* Pour trois facteurs égaux on aura de même recours à ce qui a été expliqué *art.* 185 & *suiv.*; & nous venons de développer le cas où quatre facteurs sont égaux; d'où l'on peut conclure la manière de traiter l'égalité d'un plus grand nombre de facteurs à la fois. Au reste, on est à portée de juger par-là de la multiplicité & de la variété qui peut se rencontrer dans les lignes courbes, en ayant seulement égard à leurs branches qui s'étendent à l'infini; car il n'a point encore été question de la variété qu'elles peuvent offrir dans un espace fini.

CHAPITRE VIII.

Des Asymptotes.

198. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il y avoit plusieurs espèces d'asymptotes; car, outre la ligne droite, nous avons trouvé aussi pour asymptotes diverses courbes exprimées par l'équation $u^m = Cx^n$. La ligne droite elle-même a fourni d'autres asymptotes curvilignes, avec lesquelles la courbe converge davantage qu'avec la ligne droite. Or, toutes les fois qu'on trouve une droite pour asymptote d'une courbe quelconque, il est possible d'assigner une autre courbe qui soit aussi asymptote de celle-là. Au reste, une telle asymptote est plus propre à donner une idée exacte de la nature de la courbe dont elle est asymptote; car elle fait connoître en même temps le nombre des branches qui convergent avec la droite, & de quel côté elles en approchent, si c'est au-dessus ou au-dessous, à droite ou à gauche.

199. Il sera très-facile de partager en ordres cette variété infinie d'asymptotes, en suivant la marche qui nous les a fait découvrir; car les facteurs inégaux du premier membre donnent des asymptotes d'une espèce; deux facteurs égaux en donnent d'une autre; trois facteurs égaux encore d'une autre; il en est de même de quatre facteurs égaux entre eux, ainsi de suite. Soit donc proposée une équation du degré n entre les coordonnées x & y , savoir, $P + Q + R + S + \&c. = 0$, dans laquelle P soit le membre de l'ordre le plus élevé, lequel contient tous les termes d'un nombre n de dimensions; Q le second membre, qui contient les termes de $n - 1$ dimensions; R le troisième; S le quatrième; ainsi de suite.

200. Soit $ay - bx$ le facteur simple & unique de P , & faisons $P = (ay - bx)M$; M sera une fonction homogène de $n - 1$ dimensions non divisible par $ay - bx$. Soit AZ l'axe sur

lequel est prise l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$. Pour exprimer plus brièvement le facteur $ay - bx$, prenons pour axe une autre droite AX , qui coupe le premier à l'origine même des abscisses sous un angle XAZ dont la tangente $= \frac{b}{a}$, & dont le sinus par conséquent $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & le cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Soit à l'égard de cet axe l'abscisse $AQ = t$ & l'appliquée $QM = u$; on aura, en menant Pg , Pf , parallèlement aux nouvelles coordonnées u & t , $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; & par conséquent $t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ & $u = Mf - Qf = \frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. L'appliquée u sera donc à présent un facteur du premier membre P .

201. On conclura réciproquement de ce qui précède $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Si on substitue ces valeurs dans l'équation $P + Q + R + \&c. = 0$, on en aura une autre entre t & u pour la même courbe rapportée à l'axe AX . Mais, pour éviter la trop grande multitude de coefficients, nous supposons que $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$, tiennent lieu de tous; après la substitution, chaque lettre aura les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M &= \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \&c. \\ Q &= \epsilon t^{n-1} + \epsilon t^{n-2} u + \epsilon t^{n-3} u^2 + \&c. \\ R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \&c. \\ S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \&c. \\ T &= \epsilon t^{n-4} + \epsilon t^{n-5} u + \epsilon t^{n-6} u^2 + \&c., \\ &\&c. \end{aligned}$$

Mais, comme pour trouver l'asymptote on doit supposer l'abscisse t infinie, tous les termes dans chaque membre disparaîtront devant le premier; c'est pourquoi, si le premier terme de chaque membre ne manque pas, on pourra négliger les suivans; mais, s'il manque, il faudra prendre le second, & si le premier & le second manquent à la fois, on commencera par le troisième.

202. La fonction M n'étant pas divisible par u , le premier terme

terme ne peut manquer; on aura donc $\alpha t^{n-1}u + \mathcal{E}t^{n-1} = 0$; d'où résulte pour u une valeur finie que je supposerai $= c$; c'est-à-dire que la droite parallèle à l'axe AX , & qui en sera éloignée d'un intervalle c , fera une asymptote. A présent, pour trouver l'asymptote curviligne qui approche plus de la courbe, écrivons par-tout, excepté dans le premier terme, $u = c$, nous trouverons cette équation $\alpha t^{n-1}u + \mathcal{E}t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \mathcal{E}c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \mathcal{E}c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$; ou, à cause de $\alpha u + \mathcal{E} = u - c^*$, $(u - c)t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \mathcal{E}c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \mathcal{E}c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$. Si le second terme ne manque pas, on pourra négliger tous les suivans, & on aura $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; si le second manque, on prendra le troisième, & on aura $(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0$; si le troisième manque aussi, on aura $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, ainsi de suite. Si tous manquent, excepté le dernier terme constant, on aura $(u - c) + \frac{A}{t^{n-1}} = 0$. Enfin, si tous manquoient à la fois, l'équation entière seroit divisible par $u - c$, & par conséquent la droite dont l'équation seroit $u - c = 0$, seroit une portion de la courbe.

203. Si on suppose $u - c = \zeta$, c'est-à-dire, si les abscisses sont prises sur la droite qui sert d'asymptote, toutes les asymptotes curvilignes que renferme le facteur unique du premier membre sont comprises dans cette équation générale $\zeta = \frac{C}{t^k}$, k désignant un nombre entier quelconque moindre que l'exposant n . Examinons donc la nature de ces asymptotes curvilignes, lorsque t est supposé infini. Prenons à cet effet pour axe l'asymptote rectiligne XY & le point A pour origine des abscisses; si on mène la droite CD , elle formera quatre régions que nous désignerons par les lettres P , Q , R & S . Soit à

Pl. IV. Fig. 36:

* Il faudroit, à la rigueur, $\alpha u + \mathcal{E} = \alpha(u - c)$; mais cela n'influe en rien sur les conséquences qu'on doit en tirer.

présent $\tau = \frac{c}{t}$; comme, en faisant t négatif, τ devient aussi négatif, la courbe aura deux branches EX & FY qui s'approcheront de plus en plus de la droite XY dans les régions opposées P & S . La même chose arrivera, si k est un nombre impair quelconque; mais, si $k = 2$ ou $\tau = \frac{c}{t^2}$, comme τ de-

Pl. V. Fig. 37.

meure toujours positif, soit qu'on suppose t positif, soit qu'on le suppose négatif, la courbe sera composée de deux branches EX & FY convergentes à la droite XY dans les régions P & Q ; ce qui a lieu toutes les fois que k est un nombre pair quelconque, avec cette différence seulement que la convergence est d'autant plus rapide que l'exposant k est plus grand.

204. Si le premier membre P renferme deux facteurs $ay - bx$ égaux entre eux; après avoir transporté, comme auparavant, l'équation à un autre axe, on aura :

$$\begin{aligned} P &= + a t^{n-2} u^2 + a t^{n-3} u^3 + \&c. \\ Q &= \mathcal{E} t^{n-1} + \mathcal{E} t^{n-2} u + \mathcal{E} t^{n-3} u^2 + \mathcal{E} t^{n-4} u^3 + \&c. \\ R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c. \\ S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c. \\ &\quad \&c.; \end{aligned}$$

d'où l'on tirera les deux équations suivantes, selon que le premier terme du membre Q s'y trouvera, ou ne s'y trouvera pas :

I.

$$a t^{n-2} u^2 + \mathcal{E} t^{n-1} = 0;$$

ou

$$a u^2 + \mathcal{E} t = 0;$$

II.

$$a t^{n-2} u^2 + \mathcal{E} t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0;$$

ou

$$a u^2 + \mathcal{E} u + \gamma = 0.$$

Pl. V. Fig. 38.

Donc, si la première équation $a u^2 + \mathcal{E} t = 0$ a lieu, l'asymptote devient une Parabole, avec les deux branches de laquelle se confondront celles de la courbe à une distance in-

finie. Dans ce cas, la courbe aura deux branches dans les régions P & R, lesquelles s'appliqueront à la fin sur la Parabole EAF.

205. Mais, si l'autre équation $auu + \ell u + \gamma = 0$ a lieu, il faut voir si ses deux racines sont réelles, ou ne le sont pas. Dans le dernier cas, aucune branche infinie n'est désignée par l'équation; si les deux racines sont réelles & inégales, que l'une soit $u = c$ & l'autre $u = d$, la courbe aura pour asymptotes deux droites parallèles entre elles; nous en chercherons la nature, comme auparavant; pour cela, à cause de $auu + \ell u + \gamma = (u - c)(u - d)^*$, nous mettrons par-tout, excepté dans le facteur $u - c$, $u = c$; ce qui donnera $(c - d)t^{n-2}(u - c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \ell c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \ell c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) + \&c. = 0$. A moins donc que le second terme ne manque, tous les suivans, en faisant $t = \infty$, disparaîtront, & on aura une asymptote représentée par l'équation $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$, ou par $(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0$, si le second terme manque, ainsi de suite. Si tous les termes, excepté le terme constant, sont $= 0$, on aura l'équation $(u - c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$, qui représente des courbes dont nous avons décrit auparavant les figures, lorsque $t = \infty$.

206. Mais, si les deux racines de l'équation sont égales, ou que $auu + \ell u + \gamma = (u - c)^2$; comme $u = c$, si on substitue cette valeur dans les autres termes, on trouvera l'équation $t^{n-2}(u - c)^2 + t^{n-3}(\alpha c^3 + \ell c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \ell c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) + \&c. = 0$; d'où résultent les équations suivantes pour déterminer les asymptotes, selon qu'à l'exception du premier terme, le second ne manque pas, ou que le second manquant, le troisième ne manque pas, ou que le second & le troisième manquant, le quatrième ne manque pas, &c. :

* Même remarque que ci-dessus; il faudroit, à la rigueur, $auu + \ell u + \gamma = a(u - c)(u - d)$.

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t} = 0;$$

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^2} = 0;$$

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^3} = 0;$$

jusqu'à

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^{n-2}} = 0,$$

si tous les termes manquent, excepté le dernier; mais, si le dernier manquoit aussi, on auroit $(u - c)^2 = 0$; & par conséquent la ligne droite seroit partie de la courbe, qui par cette raison seroit complexe.

207. Quoiqu'il semble que nous ayions fait l'énumération de tous les cas que présentent deux facteurs égaux, cependant la dernière équation peut encore prendre d'autres formes, qui fourniront des asymptotes d'une nature différente. Cela arrive, lorsque le facteur de la puissance t^{n-3} est divisible par $u - c$; car alors, en y laissant comme dans le premier terme $u - c$, & y ajoutant le premier terme qui vient après, on aura des équations de cette forme :

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t} + \frac{B}{t^2} = 0;$$

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^2} + \frac{B}{t^3} = 0;$$

jusqu'à

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t} + \frac{B}{t^{n-2}} = 0.$$

Mais si le second terme manque entièrement, ou qu'il soit divisible par $(u - c)^2$, on passera au troisième dans lequel on laissera $u - c$, s'il est divisible par $u - c$, & on lui ajoutera le premier terme qui se trouvera ensuite. On aura dans ce cas des équations de la forme suivante :

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^2} + \frac{B}{t^3} = 0;$$

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^3} + \frac{B}{t^4} = 0;$$

jusqu'à

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^3} + \frac{B}{t^{n-2}} = 0.$$

Et si le troisième terme manque aussi, & que le quatrième soit divisible par $u-c$, ou que ce dernier manquant, ce soit le cinquième, ainsi de suite; il en résultera pour l'asymptote curviligne une équation de cette forme :

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0;$$

dans laquelle l'exposant p est toujours plus petit que q , & q plus petit que $n-1$.

208. Supposons $u-c = \zeta$; toutes ces équations sont renfermées dans cette formule : $\zeta^2 - \frac{A\zeta}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$. Il se présente trois cas à développer, suivant que q est plus grand que $2p$, ou q égal à $2p$, ou q plus petit que $2p$.

Le premier cas, où q surpasse $2p$, offre deux équations, savoir $\zeta - \frac{A}{t^p} = 0$ & $A\zeta - \frac{B}{t^{q-p}} = 0$; car l'une & l'autre satisfait, dans la supposition de $t = \infty$. En effet, en faisant $\zeta = \frac{A}{t^p}$, l'équation ci-dessus devient $\frac{A^2}{t^{2p}} - \frac{A^2}{t^{2p}} + \frac{B}{t^q}$ ou $A^2 - A^2 + \frac{B}{t^{q-2p}} = 0$; ce qui est vrai, à cause que q est plus grand que $2p$; quant à p , il sera plus petit que $\frac{n-2}{2}$. Mais, si $\zeta = \frac{B}{A t^{q-p}}$, elle deviendra $\frac{BB}{A^2 t^{2q-2p}} - \frac{B}{t^q} + \frac{B}{t^q}$ ou $\frac{BB}{A^2 t^{2q-2p}} - B + B = 0$, ce qui est encore vrai, à cause du premier terme qui s'évanouit, lorsque $t = \infty$. On a donc dans ce cas sur la même asymptote droite deux asymptotes curvilignes, & par conséquent quatre branches qui s'étendent à l'infini.

Le second cas, où $q = 2p$, donne l'équation $\zeta^2 - \frac{A\zeta}{t^p} + \frac{B}{t^{2p}} = 0$, qui renferme deux racines imaginaires, & ne fournit par conséquent aucune asymptote, si AA est plus petit que $4B$; mais qui fournit deux asymptotes semblables exprimées par $\zeta = \frac{C}{t^p}$, lorsque AA est plus grand que $4B$.

Dans le troisième cas, où q est plus petit que $2p$, le terme moyen de l'équation s'évanouit toujours, lorsque $t = \infty$; & on

aura pour l'équation de l'asymptote $\tau\tau + \frac{B}{i\tau} = 0$. Nous avons fait connoître auparavant les formes des asymptotes précédentes; il nous reste à examiner celles qui sont renfermées dans l'équation $\tau\tau = \frac{C}{i\tau}$.

209. Pour cela, prenons l'axe sur l'asymptote même représentée par $u = c$, & supposons $= \tau$ l'appliquée $u - c$; toutes les asymptotes curvilignes dont il s'agit seront comprises dans cette équation $\tau\tau = \frac{C}{i\tau}$, k désignant un nombre entier moindre que $n - 1$. Les branches de ces courbes, lorsqu'elles s'éloigneront à l'infini, ou que $i = \infty$, se trouveront ainsi: Si $k = 1$, ou $\tau\tau = \frac{C}{i}$; comme i ne peut devenir négatif, la courbe aura deux branches EX & FX qui s'étendront à l'infini dans les régions P & R ; la même chose arrivera, si k est un nombre impair quelconque. Mais, si k est un nombre pair, comme 2 , ou qu'on ait $\tau\tau = \frac{C}{i^2}$; il faudra voir d'abord si C est une quantité négative ou positive. Dans le premier cas, l'équation ne peut avoir de racine réelle, & par conséquent on ne pourra en conclure aucune branche infinie pour la courbe. Dans le second, la courbe aura quatre branches qui s'étendront à l'infini, & qui se confondront avec l'asymptote XY . Ces branches seront EX , FX , GY & HY , & seront dispersées dans les quatre régions P , Q , R & S .

Pl. V. Fig. 39.

Pl. V. Fig. 40.

210. Supposons que le premier membre P de l'équation renferme trois facteurs égaux, & ramenons l'équation aux coordonnées i & u , de manière que u devienne un facteur triple de P , nous aurons:

$$\begin{aligned} P &= +\alpha i^{n-3} u^3 + \alpha i^{n-4} u^4 + \&c. \\ Q &= \beta i^{n-1} + \beta i^{n-2} u + \beta i^{n-3} u^2 + \beta i^{n-4} u^3 + \beta i^{n-5} u^4 + \&c. \\ R &= \gamma i^{n-2} + \gamma i^{n-3} u + \gamma i^{n-4} u^2 + \gamma i^{n-5} u^3 + \gamma i^{n-6} u^4 + \&c. \\ S &= \delta i^{n-3} + \delta i^{n-4} u + \delta i^{n-5} u^2 + \delta i^{n-6} u^3 + \delta i^{n-7} u^4 + \&c., \\ &\&c. \end{aligned}$$

De là naissent, suivant la différente composition des membres Q & R , les équations qui suivent:

I.

$$at^{n-1}u^2 + \ell t^{n-1} = 0;$$

I I.

$$at^{n-1}u^2 + \ell t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0;$$

I I I.

$$at^{n-1}u^2 + \ell t^{n-1}u^2 + \gamma t^{n-2} = 0;$$

I V.

$$at^{n-1}u^3 + \ell t^{n-1}u^2 + \gamma t^{n-1}u + \delta t^{n-1} = 0.$$

211. La première équation se change en $au^2 + \ell t^2 = 0$, & donne par conséquent pour asymptote une ligne du troisième ordre, dont la figure sera telle que, si on compte les abscisses t sur l'axe XY depuis le point A , elle aura deux branches E & F qui s'étendront à l'infini dans les régions P & Q . Pl. V. Fig. 41.

La seconde équation se transforme en celle-ci : $au^3 + \ell tu + \gamma t = 0$; d'où il suit qu'en faisant $t = \infty$, u peut avoir deux valeurs, l'une finie, l'autre infinie. Par conséquent elle se résout en ces deux équations $\ell u + \gamma = 0$ & $auu + \ell t = 0$; la seconde est, comme nous l'avons vu, pour la Parabole; ce qui annonce que la courbe aura deux branches qui s'étendront à l'infini, & qui s'approcheront de plus en plus de la Parabole. Supposons que la première équation donne $u - c = 0$; elle indiquera une asymptote rectiligne dont on déterminera la nature, en écrivant par-tout c au lieu de u , excepté dans $\ell u + \gamma = u - c$; on aura donc $t^{n-2}(u - c) + t^{n-3}(ac^2 + \ell c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(ac^3 + \ell c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) + \dots = 0$; d'où l'on conclura, comme ci-dessus, ou $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$, ou $(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0$, &c. La dernière équation qu'on puisse obtenir, est $(u - c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$. La courbe aura donc dans ce cas deux asymptotes, l'une rectiligne dont la nature vient d'être déterminée, & l'autre parabolique.

212. La troisième équation $au^3 + \ell u^2 + \gamma t = 0$ ne peut subsister en faisant $t = \infty$, à moins que u ne soit $= \infty$; par conséquent le terme ℓu^2 disparaît devant au^3 , & il reste l'équation du troisième ordre $au^3 + \gamma t = 0$ pour exprimer l'asymptote, qui aura, comme on en peut juger par sa figure, deux branches AE & AF qui s'étendront à l'infini dans les régions P & S . Pl. V. Fig. 42:

Quant à la quatrième équation $au^3 + \ell u^2 + \gamma u + \delta = 0$; elle indique une ou trois asymptotes rectilignes parallèles entre elles, à moins que deux ou même toutes ne soient égales. Pour en connoître la nature, soit d'abord $u=c$ une racine de l'équation qui n'en renferme point d'autres semblables; & soit $au^3 + \ell u^2 + \gamma u + \delta = (u-c)(fu^2 + gu + h)$. En substituant partout $u=c$, excepté dans le facteur $u-c$, on aura une équation de cette forme $t^{n-3}(u-c) + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \&c. = 0$; ce qui donnera une asymptote de la nature $u-c = \frac{K}{t^k}$, k étant un nombre plus petit que $n-2$.

213. Si l'équation $au^3 + \ell u^2 + \gamma u + \delta = 0$ renferme deux racines égales, de sorte qu'elle soit $= (u-c)^2(fu+g)$; en faisant $u=c$, excepté dans le membre où le facteur $u-c$ peut se trouver, on parviendra à une telle équation:

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0; \text{ où } q \text{ fera moindre que } n-2$$

& p moindre que q ; c'est un cas que nous avons développé auparavant. Reste donc celui où l'équation $au^3 + \ell u^2 + \gamma u + \delta = 0$ contient trois racines égales, par exemple, $(u-c)^3$; on obtiendra alors une équation de cette forme $(u-c)^3 t^{n-3} + Pt^{n-4} + Qt^{n-5} + Rt^{n-6} + St^{n-7} + \&c. = 0$. Si P n'est pas divisible par $u-c$, on fera $u=c$, & elle deviendra $(u-c)^3 + \frac{A}{t} = 0$; mais, si P a pour diviseur $u-c$ une fois seulement, & qu'on écrive par-tout, excepté dans ce facteur, $u=c$, on obtiendra une équation de cette forme $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)}{t^q} + \frac{B}{t^p} = 0$, q étant plus petit que $n-2$, & $\frac{B}{t^p}$ désignant le terme qui suit immédiatement celui qui ne s'évanouit pas, en faisant $u-c = 0$. Si P est de plus divisible par $(u-c)^2$ & que Q ne le soit pas par $u-c$, il viendra une équation de la forme $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t} + \frac{B}{t^q} = 0$. S'il arrivoit que le second terme fût divisible par $(u-c)^3$, il faudroit passer de suite à un autre qui ne fût pas divisible par $(u-c)^3$; & s'il l'est par $u-c$, on ira plus loin jusqu'à ce qu'on

qu'on soit arrivé à un terme non divisible par $u - c$. Mais, si ce terme étoit divisible par $(u - c)^2$, on passeroit outre, jusqu'à ce qu'on en trouvât un qui seroit ou non divisible, ou divisible par $u - c$; dans le premier cas, l'équation sera terminée; & dans le second, on ira plus loin jusqu'à ce qu'on arrive enfin à un terme qui ne soit plus divisible par $(u - c)$. On obtiendra ainsi dans tous les cas une équation comprise dans la formule générale $(u - c)^3 + \frac{A(u - c)^2}{r^p} + \frac{B(u - c)}{r^q} + \frac{C}{r} = 0$, dans laquelle r sera plus petite que $n - 2$, q plus petit que r & p plus petit que q .

214. Cette équation en renferme trois autres de la forme $u - c = \frac{K}{r^k}$, ou une seulement de cette forme & une autre de celle-ci : $(u - c)^2 = \frac{K}{r^k}$, ou enfin une seule en tout, telle que $(u - c)^3 = \frac{K}{r^k}$. Ce dernier cas aura lieu si $3p$ est plus grand que r & $3q$ plus grand que $2r$. Mais il peut se faire aussi que deux équations deviennent imaginaires; & alors elles n'indiqueront aucune asymptote. Au reste, les formes de ces asymptotes ont été données, excepté celle de la dernière représentée par $(u - c)^3 = \frac{K}{r^k}$. Quant à celle-ci, elle sera, si k est un nombre impair, de la forme désignée par la figure trente-sixième, avec deux branches EX & FY qui s'étendront à l'infini dans les régions opposées P & S . Mais si k est un nombre pair, on aura une forme telle que la donne la figure trente-septième avec deux branches EX & FY du même côté de l'asymptote rectiligne XY , ou qui ramperont à l'infini dans les régions P & Q .

Pl. V. Fig. 56.

215. Comme on voit facilement par ce qui précède ce qu'il y a à faire pour trouver la forme des asymptotes, lorsque le premier membre de l'équation contient quatre facteurs simples égaux ou davantage, je n'irai pas plus loin, & je me contenterai de terminer ce chapitre par une application des règles précédentes à un exemple.

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 30

E X E M P L E.

Soit proposée la ligne courbe renfermée dans l'équation $y^3 x x (y-x) - x y (y y + x x) + 1 = 0$, dont le membre supérieur $y^3 x x (y-x)$ contient un seul facteur simple $y-x$, deux égaux $x x$ & trois autres égaux y^3 .

Pl. V. Fig. 43.

Considérons d'abord le facteur simple $y-x$; en faisant $y=x$, on aura $y-x-\frac{2}{x}=0$, &, à cause de $x=\infty$, $y-x=0$; équation pour l'asymptote rectiligne BAC , qui fait avec l'axe XY à l'origine des abscisses un angle demi-droit BAY . Rapportons l'équation à cette ligne considérée comme axe, ce qui se fera en supposant $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$; cela posé, on aura l'équation $\frac{(u+t)(t-u)^2 u}{4} - \frac{(t-u)(t+uu)}{2} + 1 = 0$, laquelle étant multipliée par 4 deviendra :

$$\begin{aligned} 0 &= t^5 u + t^4 u u - 2 t^3 u^3 - 2 t t u^4 + t u^5 + u^6 \\ &\quad - 2 t^4 \qquad \qquad \qquad + 2 u^4 \\ &\quad + 4 \end{aligned}$$

En faisant $t=\infty$, on trouve $u=0$ & les autres termes, excepté ces deux-ci $t^5 u - 2 t^4$, disparaissent; ce qui donne pour l'asymptote curviligne l'expression $u=\frac{2}{t}$. Ainsi la courbe cherchée aura, en vertu de ce facteur, deux branches bB , cC , qui s'étendront à l'infini.

216. Considérons à présent les deux facteurs égaux $x x$; on aura $x x = \frac{x y (y y + x x) - 1}{y^3 (y-x)}$. Si donc on prend pour axe la droite AD perpendiculaire au premier XY , y deviendra $=t$ & $x=u$, & l'équation résultante sera :

$$\begin{aligned} 0 &= t^4 u^2 - t^3 u^3 \\ &\quad - t^3 u - t u^3 \\ &\quad + 1 \end{aligned}$$

laquelle, en supposant t infini, se change en $t^4 u^2 - t^3 u + 1 = 0$; d'où dérivent deux équations $u = \frac{1}{t}$ & $u = \frac{1}{t^2}$. Ce fac-

reur fournit donc quatre branches infinies, favoir deux dD , eE , provenant de l'équation $u = \frac{1}{t}$, & deux autres dD & eE situées des mêmes côtés, & qui proviennent de l'équation $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Les trois facteurs égaux y^3 se rapportent à l'axe même XY ; par conséquent t sera $= x$ & $y = u$; ce qui donne lieu à cette équation :

$$0 = -t^3 u^3 + t t u^4 - t^3 u - t u^3 + 1,$$

qui, en supposant t infini, donne $t^3 u^3 + t^3 u = 0$, ou $u(uu + 1) = 0$. On n'aura donc, à cause de l'équation impossible $uu + 1 = 0$, qu'une seule asymptote rectiligne, qui sera donnée par l'équation $u = 0$, & qui se confondra avec l'axe même XY , & dont la nature sera déterminée par cette équation $t^3 u + 1 = 0$ ou $u = \frac{1}{t^3}$; par conséquent ce facteur triple ne produit que deux branches yY & xX qui se prolongent à l'infini. La courbe aura donc en tout huit branches infinies, dont ce n'est pas encore le lieu d'expliquer l'intersection dans un espace fini.

218. On peut juger facilement par là & par ce qui a été dit dans le chapitre précédent, de la variété des branches dont le cours est infini. Car ou ces branches s'approchent d'une certaine ligne droite, qui est leur asymptote rectiligne; telle est la Parabole. Dans le premier cas, elles sont dites *hyperboliques*; & dans le second, *paraboliques*. L'une & l'autre classe fournissent une multitude innombrable d'espèces. Les hyperboliques sont exprimées par les équations suivantes entre les coordonnées t & u , t étant supposé infini :

$$u = \frac{A}{t}; u = \frac{A}{t^2}; u = \frac{A}{t^3}; u = \frac{A}{t^4}; \&c.$$

$$u^2 = \frac{A}{t}; u^2 = \frac{A}{t^2}; u^2 = \frac{A}{t^3}; u^2 = \frac{A}{t^4}; \&c.$$

$$u^3 = \frac{A}{t}; u^3 = \frac{A}{t^2}; u^3 = \frac{A}{t^3}; u^3 = \frac{A}{t^4}; \&c.$$

&c.

Et les différentes espèces de branches paraboliques sont indiquées par les équations qui suivent :

$$u^2 = At ; u^3 = At ; u^4 = At ; u^5 = At , \&c.$$

$$u^3 = At^2 ; u^4 = At^2 ; u^5 = At^2 ; u^6 = At^2 , \&c.$$

$$u^4 = At^3 ; u^5 = At^3 ; u^6 = At^3 ; u^7 = At^3 , \&c.$$

&c.

Chacune des équations précédentes donne au moins deux branches infinies, si les exposans t & u ne sont pas l'un & l'autre un nombre pair; mais s'ils sont tous deux pairs, la courbe alors n'aura aucune branche infinie, ou elle en aura quatre; le premier cas a lieu, si l'équation est impossible, & le second, si elle est possible.

CHAPITRE IX.

De la Subdivision des lignes du troisième ordre en Espèces.

219. LA nature & le nombre des branches infinies paroissent à juste titre établir une différence essentielle dans les lignes courbes; & c'est de cette source que nous avons tiré une subdivision très commode des lignes de chaque ordre dans leurs espèces différentes. Nous aurions pu en conclure pour les lignes du second ordre la même subdivision en espèces, que celle que la nature même de la chose nous avoit donnée.

En effet, soit proposée l'équation générale des lignes de cet ordre :

$$ayy + \epsilon yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0;$$

il faudra examiner le premier membre $ayy + \epsilon yx + \gamma xx$, & voir s'il renferme des facteurs simples réels ou non. S'il n'en contient aucun, on aura la première espèce, appelée *Ellypse*; s'il renferme des facteurs réels, il faudra voir de plus s'ils sont inégaux ou égaux. Dans le premier cas, on a une *Hyperbole*; & dans le second, une *Parabole*.

220. Dans le cas où les facteurs du premier membre sont réels & inégaux, la courbe aura donc deux asymptotes rectilignes qu'il s'agit de déterminer. Soit à cet effet $\alpha y y + \epsilon x y + \gamma x x = (ay - bx)(cy - dx)$, de manière qu'on ait :

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Considérons d'abord le facteur $ay - bx$, qui à l'infini donne $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, on aura :

$$ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0;$$

d'où l'on tire l'équation $ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} = 0$, qui détermine la position d'une asymptote. Celle de la seconde sera déterminée d'une manière semblable par cette équation $cy - dx + \frac{\delta d + \epsilon c}{ad - bc} = 0$.

221. Pour mieux connoître la nature de chacune de ces asymptotes, rapportons l'équation à un autre axe, en faisant $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$

& $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$; & soit $\sqrt{(aa + bb)} = g$, on aura :

$$u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \epsilon b)u + (\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0;$$

& par conséquent

$$g(bc - ad)u + g(ac + bd)u + (\delta b + \epsilon a)t + (\delta a - \epsilon b)u + \zeta g = 0;$$

d'où l'on conclura, en mettant dans les autres membres

$$u = \frac{-\delta b - \epsilon a}{g \cdot (bc - ad)}, (g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta t + \epsilon t)^2}{g(bc - ad)^2}$$

$$- \frac{(\delta a - \epsilon b)(\delta t + \epsilon t)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0, \text{ ou } g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a + \frac{\epsilon(\delta d + \epsilon c)(\delta b + \epsilon a)}{(bc - ad)^2} + \frac{\zeta g}{t} = 0;$$

on aura donc une asymptote hyperbolique du genre $u = \frac{A}{t}$; l'autre facteur $cy - dx$ en donnera une semblable. Ainsi la courbe aura deux paires de branches qui s'étendront à l'infini, & qui seront représentées l'une & l'autre par une équation de la forme $u = \frac{A}{t}$.

222. Supposons à présent les deux facteurs égaux, ou $\alpha y y + \ell x y + \gamma x x = (a y - b x)^2$; ayant transporté comme auparavant l'équation à un autre axe, en faisant $y = \frac{au + bt}{g}$ & $x = \frac{at - bu}{g}$, nous aurons $gguu + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0$; &, en supposant t infini, $uu + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g^2} = 0$; équation qui annonce deux branches paraboliques de l'espèce $uu = At$; en effet la courbe qui est une Parabole est elle-même son asymptote. Mais, si $\delta b + \varepsilon a$ étoit $= 0$, alors l'équation $gguu + \frac{\delta g u}{a} + \zeta = 0$ appartiendrait à deux lignes droites parallèles entre elles; c'est le cas où l'équation du second ordre est décomposable en deux facteurs simples.

Nous aurions donc trouvé par ce moyen les espèces de lignes du second ordre, si nous ne les connoissions pas déjà.

223. Traitons de la même manière les lignes du troisième ordre représentées par l'équation générale :

$\alpha y^3 + \ell y^2 x + \gamma y x x + \delta x^3 + \varepsilon y y + \zeta y x + \eta x x + \theta y + \iota x + \kappa = 0$.
Le premier membre $\alpha y^3 + \ell y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3$, étant d'un nombre impair de dimensions, aura ou un facteur simple réel, ou tous ses trois facteurs simples réels. Nous avons donc les cas suivans à examiner.

I.

Si un seul facteur simple est réel.

I I.

Si tous les trois sont réels & inégaux entre eux.

I I I.

Si deux facteurs sont égaux.

I V.

Si tous les facteurs sont égaux.

Comme il suffit dans chaque cas d'appliquer le calcul à un seul facteur; soit ce facteur, que je suppose seul ou accompagné d'autres égaux ou inégaux entre eux, représenté par

$ay - bx$; & changeons à son égard, comme nous avons fait jusqu'à présent, la position de l'axe; après cela, nous prendrons, à la place de l'équation ci-dessus, celle-ci qui est aussi étendue :

$atu + \epsilon iuu + \gamma u^3 + \delta ii + \epsilon iu + \zeta uu + \eta i + \theta u + \iota = 0$, dans laquelle le premier membre $atu + \epsilon iu + \gamma u^3$ renferme au moins le facteur u .

PREMIER CAS.

224. Supposons donc que le premier membre n'ait qu'un facteur réel u , ce qui a lieu lorsque $\epsilon\epsilon$ est plus petit que $4a\gamma$; en supposant i infini, nous aurons $au + \delta = 0$, équation qui convient à une asymptote rectiligne. Soit $=c$ la valeur de u qui en résulte, nous aurons, pour exprimer la nature de l'asymptote, l'équation

$$at i(u-c) + i(\epsilon cc + \epsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta cc + \theta c + \iota = 0.$$

Nous en concluons, suivant que $\epsilon cc + \epsilon c + \eta$ ne sera pas $= 0$ ou sera $= 0$, deux espèces d'asymptotes, savoir $u - c = \frac{A}{i}$ ou $u - c = \frac{A}{i^2}$; ce qui donne les deux premières espèces de lignes du troisième ordre.

I.

LA PREMIÈRE Espèce a une asymptote unique de la nature $u = \frac{A}{i}$.

II.

LA SECONDE Espèce a une asymptote unique de la nature $u = \frac{A}{i^2}$.

SECOND CAS.

Supposons les trois facteurs simples du premier membre réels & inégaux entre eux; ce qui a lieu, si dans l'équation $atu + \epsilon iuu + \gamma u^3 + \delta ii + \epsilon iu + \zeta uu + \eta i + \theta u + \iota = 0$, $\epsilon\epsilon$ est plus grand que $4a\gamma$. Il faudra donc dans ce cas observer pour chaque facteur ce que nous venons d'exposer pour un seul, c'est-à-dire que chacun fournira deux branches hyperboliques ou de l'espèce $u = \frac{A}{i}$, ou de l'espèce $u = \frac{A}{i^2}$. Ainsi ce

112 DE LA SUBDIVISION DES LIGNES

cas renferme quatre espèces différentes de lignes du troisième ordre , pourvues de trois asymptotes rectilignes inclinées entre elles d'une manière quelconque. Les voici :

III.

LA TROISIÈME Espèce a trois asymptotes de la nature $u = \frac{A}{t}$.

IV.

LA QUATRIÈME Espèce a deux asymptotes de la nature $u = \frac{A}{t}$ & une de la nature $u = \frac{A}{t^2}$.

La cinquième espèce a une asymptote de la nature $u = \frac{A}{t}$, & deux de la nature $u = \frac{A}{t^2}$.*

La sixième espèce a trois asymptotes de la nature $u = \frac{A}{t^2}$.

226. Voyons, avant d'aller plus loin, si toutes ces espèces sont possibles. Pour nous en assurer, prenons cette équation très-étendue :

$y(ay - \epsilon x)(\gamma y - \delta x) + \epsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + \iota = 0$, dont le premier membre contient trois facteurs ; car, quoique le terme xx ne s'y trouve pas, elle n'en est pas moins étendue. On fait par ce qui précède que le facteur y donne une asymptote $u = \frac{A}{t}$, si η n'est pas $= 0$. Cherchons

quelle espèce d'asymptote donnera le facteur $ay - \epsilon x$. Faisons pour cela $y = au + \epsilon t$ & $x = at - \epsilon u$; & soit, pour abrégér, $a^2 + \epsilon^2 = 1$, ce qu'il est permis de supposer ; l'équation proposée se transformera en celle-ci :

$$\begin{aligned} & \epsilon(\epsilon\gamma - a\delta) \iota \iota u + (2a\epsilon\gamma - (aa - \epsilon\epsilon)\delta) \iota uu + a(\alpha\gamma + \epsilon\delta) u^2 \\ & + \epsilon(\alpha\epsilon + \epsilon\zeta) \iota \iota + (2a\epsilon\zeta + (aa - \epsilon\epsilon)\epsilon) \iota u + a(\alpha\zeta - \epsilon\epsilon) u^2 \\ & + (a\eta + \epsilon\theta) \iota \qquad \qquad \qquad + (a\theta - \epsilon\eta) u \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \iota \end{aligned} = 0.$$

* Voyez plus bas, page 113.

Le facteur $\alpha y - \epsilon x$ s'est changé en u , d'où l'on tire, en faisant t infini, $u = \frac{\alpha \epsilon + \epsilon \zeta}{\alpha \delta - \epsilon \gamma} = c$; valeur qui, substituée à la place de u dans le second membre qui contient t , apprend que ce facteur u ou $\alpha y - \epsilon x$ donne naissance à une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, à moins qu'on n'ait

$$\frac{\alpha \eta + \epsilon \theta}{\epsilon} + \frac{(\alpha \epsilon + \epsilon \zeta)(\gamma \epsilon + \delta \zeta)}{(\alpha \delta - \epsilon \gamma)^2} = 0.$$

Le facteur $\gamma y - \delta x$ donnera de même une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, à moins qu'on n'ait

$$\frac{\gamma \eta + \delta \theta}{\delta} + \frac{(\alpha \epsilon + \epsilon \zeta)(\gamma \epsilon + \delta \zeta)}{(\alpha \delta - \epsilon \gamma)^2} = 0.$$

227. Il est clair qu'il peut arriver que ni η , ni aucune des deux formules qu'on vient de trouver, ne disparoisse; ainsi la troisième espèce sera toujours possible. Pour la quatrième, soit $\eta = 0$, afin d'avoir une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$; alors les deux autres expressions n'en font plus qu'une, & conséquemment les deux autres asymptotes seront de la forme $u = \frac{A}{t}$, à moins qu'on n'ait $\theta + \frac{(\alpha \epsilon + \epsilon \zeta)(\gamma \epsilon + \delta \zeta)}{(\alpha \delta - \epsilon \gamma)^2} = 0$; la quatrième espèce est donc possible; mais si, outre $\eta = 0$, l'une des deux autres expressions devient $= 0$, la seconde devient aussi nulle; c'est pourquoi il est impossible que deux asymptotes soient de la forme $u = \frac{A}{t}$, sans que la troisième prenne la même forme. La cinquième espèce est donc impossible; mais par cela même la sixième est possible, puisqu'elle a lieu, si $\eta = 0$ & $\theta = \frac{-(\alpha \epsilon + \epsilon \zeta)(\gamma \epsilon + \delta \zeta)}{(\alpha \delta - \epsilon \gamma)^2}$. Ainsi les deux premiers cas ne fournissent que cinq espèces de lignes du troisième ordre, parce que celle que nous avons admise pour la cinquième, doit être rejetée, &

V.

LA CINQUIÈME espèce a trois asymptotes de la nature $u = \frac{A}{t}$.

TROISIÈME CAS.

228. Si le membre de l'ordre le plus élevé renferme deux facteurs u égaux; ce qui a lieu, lorsque dans l'équation du cas précédent le premier terme at disparaît, l'équation générale qui appartiendra à ce cas, sera de cette forme :

$$atuu - \epsilon u^3 + \gamma tt + \delta tu + \epsilon uu + \zeta t + nu + \theta = 0.$$

Le membre supérieur renferme donc deux facteurs u égaux, & un troisième $at - \epsilon u$ différent des autres. Ce troisième facteur produira une asymptote ou de la forme $u = \frac{A}{t}$, ou de la forme $u = \frac{A}{tt}$, suivant que cette expression $(a\delta + 2\epsilon\gamma) (a^2\epsilon + a\epsilon\delta + \epsilon\epsilon\gamma) - a^3 (an + \epsilon\zeta) * n'$ est pas $= 0$, ou est $= 0$.

229. Quant aux deux facteurs égaux, il faudra voir d'abord si $\gamma n'$ est pas $= 0$; car alors, en faisant $t = \infty$, on aura $auu + \gamma t = 0$, équation qui appartient à une asymptote parabolique de l'espèce $uu = At$. On aura donc ces deux nouvelles espèces de lignes du troisième ordre.

V I.

LA SIXIÈME espèce a une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, & une asymptote de l'espèce $uu = At$.

V I I.

LA SEPTIÈME espèce a une asymptote de la nature $u = \frac{A}{tt}$, & une parabolique de l'espèce $uu = At$.

230. Soit à présent $\gamma = 0$; le troisième facteur $at - \epsilon u$ donnera une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, si $\delta (a\epsilon + \epsilon\delta)$

* Cette expression se trouve en égalant à zéro le coefficient de t , après qu'on a transformé l'équation en faisant $at - \epsilon u = \zeta$, après qu'on a substitué à u sa valeur $\frac{at - \zeta}{\epsilon}$ & mis à la place de ζ sa valeur $\frac{-(\epsilon^2\gamma + a\epsilon\delta + a^2\epsilon)}{a^2}$, qu'on trouve en égalant à zéro la somme des termes qui renferment t^2 .

$= \alpha (\alpha n + \zeta \zeta)$; mais si cette égalité n'a pas lieu, l'asymptote sera de la forme $u = \frac{A}{t}$. Nous aurons donc cette équation :

$$\begin{aligned} &+ \alpha t u u - \zeta u^3 \\ &+ \delta t u + \varepsilon u u \\ &+ \zeta t + \eta u \\ &+ \theta \end{aligned} = 0;$$

&, en faisant $t = \infty$, elle deviendra $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$.

Soit d'abord $\delta \delta$ plus petit que $4 \alpha \zeta$, cette équation n'indiquera aucune asymptote; ce cas fournira donc les deux espèces suivantes.

V I I I.

LA HUITIÈME espèce a une seule asymptote de la nature $u = \frac{A}{t}$.

I X.

LA NEUVIÈME espèce a une seule asymptote de la forme $u = \frac{A}{t^2}$.

231. Si les deux racines de l'équation $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$ sont réelles & inégales; c'est-à-dire, si $\delta \delta$ est plus grand que $4 \alpha \zeta$, cette condition fournira deux asymptotes rectilignes parallèles entre elles, qui seront l'une & l'autre de la forme $u = \frac{A}{t}$; ce qui donne deux autres espèces de courbes.

X.

LA DIXIÈME espèce a une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, & deux autres parallèles entre elles représentées par $u = \frac{A}{t}$.

X I.

LA ONZIÈME espèce a une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$, & deux parallèles entre elles de la forme $u = \frac{A}{t}$.

232. Si les deux racines de l'équation $auu + \delta u + \zeta = 0$ sont égales entre elles, ou si $\delta^2 = 4a\zeta$, & qu'on ait $auu + \delta u + \zeta = a(u-c)^2$; l'équation ci-dessus deviendra $at(u-c)^2 = \mathcal{E}c^3 - \varepsilon cc - \eta c - \theta$, d'où naît une asymptote rectiligne de l'espèce $uu = \frac{A}{t}$. Ce qui nous donne deux nouvelles espèces.

XII.

LA DOUZIEME espèce a une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, & une de la nature $uu = \frac{A}{t}$.

XIII.

LA TREIZIEME espèce a une asymptote de cette forme $u = \frac{A}{t}$, & une autre de celle-ci : $uu = \frac{A}{t}$.

QUATRIEME CAS.

233. Si tous les facteurs du premier membre sont égaux; l'équation aura cette forme :

$$au^3 + \mathcal{E}t^2 + \gamma tu + \delta u^2 + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0.$$

D'abord, si le terme $\mathcal{E}t^2$ ne manque pas, la courbe aura une asymptote parabolique de la forme $u^3 = At^2$; d'où résulte une espèce.

XIV.

LA QUATORZIEME espèce a une asymptote unique & parabolique de la nature $u^3 = At^2$.

234. Si le terme $\mathcal{E}t^2$ ne se trouve pas dans l'équation, elle deviendra

$$au^3 + \gamma tu + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0;$$

& par conséquent, dans l'hypothèse de t infini, $au^3 + \gamma tu + \varepsilon t = 0$, à moins qu'on n'ait γ & $\varepsilon = 0$. Supposons que γ ne soit pas $= 0$, cette équation en renfermera deux autres, savoir $auu + \gamma t = 0$ & $\gamma u + \varepsilon = 0$; la première désigne une asymptote parabolique de l'espèce $uu = At$, & la seconde, en faisant $\frac{-\varepsilon}{\gamma} = c$, donnera cette équation :

$$\gamma t(u-c) + ac^3 + \delta cc + \zeta c + \eta = 0;$$

laquelle indiquera une asymptote hyperbolique de la forme

$$u = \frac{A}{t}, \text{ d'où}$$

X V.

LA QUINZIEME espèce a une asymptote parabolique de la forme $uu = At$, & une rectiligne de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; & l'axe de la parabole est parallèle à l'autre asymptote rectiligne.

235. Soit aussi $\gamma = 0$, ce qui donne l'équation

$$au^3 + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0.$$

Ici ε ne peut s'évanouir, autrement la ligne cesseroit d'être une courbe. Si t est infini, il est nécessaire que u soit aussi infini; d'où résulte l'équation $au^3 + \varepsilon t = 0$, qui fournit la dernière espèce.

X V I.

LA SEIZIEME espèce a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = At$.

236. Nous avons donc réduit toutes les lignes du troisième ordre à seize espèces, dans lesquelles sont comprises les soixante-douze espèces qui forment la division que NEWTON a donnée de ces lignes. Au reste, il ne faut pas s'étonner qu'il y ait une si grande différence entre notre division & celle de NEWTON; car nous n'avons distingué les espèces de courbes que par la nature de leurs branches infinies, tandis qu'il a eu, de plus, égard à leur état dans un espace fini, & qu'il a établi sur cette considération la variété de ses espèces. Mais, quoique cette division paroisse arbitraire, il faut convenir cependant que NEWTON, en suivant cette méthode, auroit pu en admettre un plus grand nombre, tandis que par la mienne il est impossible d'en admettre ni plus ni moins.

237. Pour mieux faire connoître la nature et la constitution de chaque espèce, je vais présenter l'équation générale de chacune sous la forme la plus simple, sans nuire toutefois à leur généralité, & j'aurai soin d'y rapporter en même temps les espèces de *Newton* qu'elle renferme.

PREMIERE ESPECE.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = 0, *$$

mm étant plus petite que nn , & b n'étant pas $= 0$.

C'est à cette espèce qu'appartiennent les espèces 33, 34, 35, 36, 37, 38 de NEWTON.

SECONDE ESPECE.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0;$$

m étant plus petite que nn .

Elle renferme les espèces 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 de NEWTON.

TROISIEME ESPECE.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0;$$

b n'étant pas $= 0$, ni $mb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, ni $nb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, ni $m = n$.

On rapportera à cette espèce les espèces 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de NEWTON; & même les espèces 24, 25, 26, 27, lorsque $a = 0$.

QUATRIEME ESPECE.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0,$$

où ni $c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, ni $m = n$.

Rapportez à cette espèce les espèces 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, de NEWTON, & même, si $a = 0$, celles-ci : 28, 29, 30, 31.

* On ramène l'équation générale de l'art 223 à cette forme, en faisant le coefficient de t^2 , savoir : $au + \beta = y$; & faisant disparaître ensuite, après avoir substitué à u sa valeur, le terme qui renferme yt ; la même remarque a lieu pour la suite.

CINQUIEME ESPECE.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy - \frac{aay}{(m-n)^2} + d = 0,$$

m n'étant pas $= n$.

Les espèces 22, 23 & 32 de NEWTON appartiennent à cette espèce.

SIXIEME ESPECE.

$$yy(x - my) + axx + bx + cy + d = 0,$$

si a n'est pas $= 0$, ni $2m^2a - mb - c = 0$.

Elle contient les espèces 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52 de NEWTON.

SEPTIEME ESPECE.

$$yy(x - my) + axx + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0,$$

a n'étant pas $= 0$.

Les espèces 53, 54, 55, 56 de NEWTON appartiennent à celles-ci.

HUITIEME ESPECE.

$$yy(x - my) + bbx + cy + d = 0,$$

pourvu que c ne soit pas $= -mbb$, ni $b = 0$.

Rapportez à cette espèce les espèces 61 & 62 de NEWTON.

NEUVIEME ESPECE.

$$yy(x - my) + bbx - mbb y + d = 0,$$

b n'étant pas $= 0$.

Rapportez-y l'espèce 63 de NEWTON.

DIXIEME ESPECE.

$$yy(x - my) - bbx + cy + d = 0,$$

si c n'est pas $= mbb$, ni $b = 0$.

Les espèces 57, 58, 59 de NEWTON appartiennent à cette dernière.

O N Z I E M E E S P E C E.

$$yy(x - my) - bbx + mbb y + d = 0,$$

b n'étant pas $= 0$.

Elle contient l'espèce 60 de NEWTON.

D O U Z I E M E E S P E C E.

$$yy(x - my) + cy + d = 0,$$

si c n'est pas $= 0$.

L'espèce 64 de NEWTON convient à celle-ci.

T R E I Z I E M E E S P E C E.

$$yy(x - my) + d = 0.$$

C'est à celle-ci qu'il faut rapporter l'espèce 65 de NEWTON.

Q U A T O R Z I E M E E S P E C E.

$$y^3 + axx + bxy + cy + d = 0,$$

a n'étant pas $= 0$.

C'est à cette espèce qu'appartiennent les espèces 67, 68, 69, 70, 71 de NEWTON.

Q U I N Z I E M E E S P E C E.

$$y^3 + bxy + cx + d = 0.$$

Elle renferme l'espèce 66 de NEWTON.

S E I Z I E M E E S P E C E,

$$y^3 + ay + bx = 0,$$

b n'étant pas $= 0$.

L'espèce 72 de NEWTON doit être rapportée à cette dernière.

238. La plupart de ces espèces de courbes sont si étendues qu'elles comprennent chacune des variétés assez considérables, si on a égard à la forme qu'elles présentent dans un espace fini. C'est pour cette raison que NEWTON a multiplié le nombre de ses espèces, afin de distinguer l'une de l'autre les courbes qui offrent des différences notables dans cet espace. Il sera donc plus à propos d'appeler *Genres* ce que nous avons désigné par *Espèces*, & de rapporter aux espèces les variétés qu'elles renferment. Il faudra sur-tout avoir cette attention, si l'on veut diviser d'une manière semblable les lignes du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé; car on verra que chaque espèce renferme une variété encore beaucoup plus considérable.

C H A P I T R E X.

Des principales Propriétés des Lignes du troisième Ordre.

239. DE la même manière que nous avons déduit de l'équation générale les principales propriétés des lignes du second ordre, on pourra aussi reconnoître, au moyen de l'équation générale, les propriétés les plus remarquables des lignes du troisième ordre; & on pourra conclure semblablement les propriétés des lignes du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé, de l'équation qui les représente. Prenons donc l'équation la plus générale des lignes du troisième ordre:

$$ax^3 + by^3 + cx^2y + cyx^2 + dx^2 + ey^2 + \zeta yx + nx^2 + \theta y + ix + k = 0,$$

laquelle exprimera la nature de chaque ligne de cet ordre, les coordonnées x & y étant supposées inclinées sous un angle quelconque, & une droite quelconque étant prise pour axe.

240. À moins donc que a ne soit $= 0$, il répondra à chaque abscisse x ou une ou trois appliquées réelles. Supposons qu'il

y en ait trois de réelles, il est clair que l'équation fera connoître le rapport que ces quantités ont entre elles. Si on fait $\alpha = 1$, on obtiendra une équation de cette forme :

$$y^3 + (\epsilon x + \epsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta x^2 + \iota x + \kappa = 0;$$

& la somme des trois appliquées qui répondent à la même abscisse x , fera $= -\epsilon x - \epsilon$; la somme des rectangles qu'elles formeront, prises deux à deux, fera $= (\gamma xx + \zeta x + \theta)y$; & enfin le produit de toutes, ou le parallépipède qui en résulteroit, seroit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa = 0$. Si deux appliquées étoient imaginaires, ce que nous venons de dire auroit encore lieu, mais ne pourroit s'appliquer à la figure des lignes, parce qu'il est impossible qu'elle présente à l'esprit l'idée de la somme ou d'un rectangle de deux appliquées imaginaires.

Pl. V. Fig. 44.

241. Soit une ligne quelconque du troisième ordre rapportée à l'axe AZ , auquel soient appliquées sous un angle donné les ordonnées LMN , lmn , qui coupent la courbe en trois points. L'abscisse AP étant supposée $= x$, l'appliquée y aura trois valeurs PL , PM & $-PN$; d'où il suit qu'on aura $PL + PM - PN = -\epsilon x - \epsilon$. Par conséquent, si on prend $PO = \zeta = \frac{PL + PM - PN}{3}$; le point O fera situé au milieu, de manière

que $LO = MO + NO$. Puisqu'on a $\zeta = \frac{-\epsilon x - \epsilon}{3}$, ce point

O sera situé sur une droite OZ qui coupera conséquemment toutes les ordonnées lmn parallèles à LMN en un point o , de manière que $lo + mo = no$, propriété analogue à celle des diamètres des lignes du second ordre. Si donc on a deux ordonnées parallèles, & qui coupent la courbe en trois points, divisées aux points O & o , de manière que la somme de deux appliquées situées d'un côté soit égale à la troisième située de l'autre côté, la droite qui passera par ces points O & o divisera d'une manière semblable toutes les autres ordonnées parallèles à celles-ci, & pourra pour cette raison être regardée comme une sorte de diamètre de cette courbe.

242. Comme dans les lignes du second ordre tous les dia-

mètres se coupent en un même point, voyons si nous pourrions trouver plusieurs diamètres de cette nature pour les lignes du troisième ordre. Concevons des appliquées au même axe AP sous un autre angle quelconque; soit l'abscisse = t & l'appliquée = u , on aura $y = nu$ & $x = t - mu$; valeurs qui, substituées dans l'équation générale,

$$\left. \begin{aligned} & \gamma^3 + 6\gamma^2x + 7\gamma xx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + ix + z = 0, \\ & \text{donneront celle-ci:} \\ & +n^3u^3 + 6n^2u^2t + \gamma n u t t + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta n u t + \eta t t + \theta n u + i t + z \\ & - 6m n^2u^3 - 2\gamma m n u^2t - 3\delta m u t t - \zeta m n u u - 2\eta m u t - i m u \\ & + \gamma m^2 n u^3 + 3\delta m^2 u^2 t \qquad \qquad \qquad + \eta m^2 u^2 \\ & - \delta m^3 u^3. \end{aligned} \right\} = 0.$$

Si, à l'égard de la ligne droite qui fait les fonctions de diamètre, on fait = v l'appliquée menée à l'abscisse t sous le même angle, on aura :

$$3v = \frac{-6n^2t + 2\gamma m n t - 3\delta m^2 t - \epsilon n n + \zeta m n - \eta m m}{n^3 - 6m n^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3}.$$

243. Imaginons à présent que O soit l'interfection de ces Pl. V. Fig. 45.

deux diamètres, d'où on ait mené d'abord à l'axe AZ parallèlement aux premières appliquées la ligne OP , & ensuite OQ , parallèlement aux secondes; on aura $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$ & $OQ = v$; puis $z = nv$ & $x = t - mv$; & par conséquent $v = \frac{z}{n}$ & $t = x + \frac{m}{n}z$. On a donc $3z = -6x - \epsilon$,

& $3v = -\frac{6x}{n} - \frac{\epsilon}{n}$ & $t = x - \frac{6mx}{3n} - \frac{\epsilon m}{3n}$. Substituons ces valeurs dans l'équation trouvée auparavant, & nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} & - 6n n x + 6\epsilon m n x - 6\gamma m m x + \frac{6\delta m^3 x}{n} \\ & - \epsilon n n \qquad + 6\epsilon m n \qquad - \gamma \epsilon m m \qquad + \frac{\delta \epsilon m^3}{n} \\ & + 6n n x \qquad - \frac{6\epsilon m n x}{3} \qquad - \frac{6\epsilon m n}{3} \qquad + \epsilon n n \\ & - 2\gamma m n x + \frac{2\epsilon \gamma m m x}{3} \qquad + \frac{2\gamma \epsilon m m}{3} \qquad - \zeta m m \\ & + 3\delta m m x - \frac{6\delta m^3 x}{n} \qquad - \frac{\delta \epsilon m^3}{n} \qquad + \eta m m \end{aligned} \right\} = 0.$$

3 Q ij

ou

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3} \epsilon \epsilon m n x - \frac{1}{3} \epsilon \gamma m m x - 2 \gamma m n x + 3 \delta m m x \\ + \frac{2}{3} \epsilon \epsilon m n - \frac{1}{3} \gamma \epsilon m m - \zeta m n + n m m \end{aligned} \right\} = 0.$$

244. L'interfection O des diamètres dépend donc ici de l'inclinaison que forment les appliquées à l'axe, laquelle est représentée par les lettres m & n ; par conséquent, (si on juge à propos d'appeler *Centre* l'interfection des diamètres) on ne peut pas dire que toutes les lignes du troisième ordre en aient un. Cependant on peut trouver des cas où la commune interfection des diamètres tombe en un point fixe. Cela arrivera, si les termes affectés de $m n$ & de $m m$ sont supposés séparément égaux à zéro, & que les valeurs de x qui en résultent soient égales; on trouvera, au moyen de ces deux égalités, $x = \frac{3\zeta - 2\epsilon\epsilon}{2\delta\epsilon - 6\gamma} = \frac{3n - \gamma\epsilon}{\epsilon\gamma - 9\delta}$. Pour que ces deux valeurs soient les mêmes, il faut que

$$6\epsilon\epsilon n - 2\epsilon\epsilon\gamma\epsilon - 18\gamma n + 6\gamma\gamma\epsilon = 3\epsilon\gamma\zeta - 2\epsilon\epsilon\gamma\epsilon - 27\delta\zeta + 18\epsilon\delta\epsilon;$$

ou

$$\epsilon\gamma\zeta - 2\epsilon\epsilon n - 9\delta\zeta + 6\gamma n + 6\epsilon\delta\epsilon - 2\gamma\gamma\epsilon = 0;$$

d'où $n = \frac{6\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\epsilon\delta\epsilon - 2\gamma\gamma\epsilon}{2\epsilon\epsilon - 6\gamma}$. Toutes les fois donc que n aura une telle valeur, tous les diamètres se couperont mutuellement en un seul & même point; par conséquent ces sortes de lignes du troisième ordre auront un centre qu'on trouvera en prenant sur l'axe

$$AP = \frac{3\zeta - 2\epsilon\epsilon}{2\epsilon\epsilon - 6\gamma}, \text{ \& ensuite}$$

$$PO = \frac{-\epsilon\zeta + 2\gamma\epsilon}{2\epsilon\epsilon - 6\gamma}.$$

245. Cette même détermination du centre, s'il doit y en avoir un, a encore lieu si le premier coefficient a n'est pas supposé égal à l'unité; car, si on prend l'équation la plus générale des lignes du troisième ordre

$$ax^3 + \epsilon\gamma^2 x + \gamma\gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon\gamma y + \zeta xy + nxx + \theta y + ix + x = 0;$$

ces courbes auront un centre, si on a $a = \frac{6\gamma\zeta - 9a\delta\zeta + 6\delta^2\epsilon - 2\gamma\gamma\epsilon}{26\delta - 6a\gamma}$.

Ce centre sera en O , si on a pris $AP = \frac{3a\zeta - 2\delta\epsilon}{26\delta - 6a\gamma}$ & $PO = \frac{2\gamma\epsilon - \delta\zeta}{26\delta - 6a\gamma}$. Donc, si une ordonnée qui coupe la courbe en trois points est tellement divisée, que deux appliquées situées d'un côté soient égales à une troisième située de l'autre côté, la droite qui passera par ce centre & par ce point de division, coupera d'une manière semblable toutes les autres ordonnées qui lui sont parallèles.

246. Si nous appliquons ce que nous venons de dire aux équations des différentes espèces, dont nous avons fait ci-dessus l'énumération, on trouvera facilement que la première, la seconde, la troisième, la quatrième & la cinquième espèce ont un centre, pourvu que $a=0$; & dans ce cas le centre est placé à l'origine des abscisses; que la sixième & la septième espèce en manquent absolument, puisque le coefficient a ne peut s'évanouir; que la huitième, la neuvième, la dixième, la onzième, la douzième & la treizième en ont un toujours placé à l'origine des abscisses. Quant aux quatorzième, quinzième & seizième espèces, leur centre est à une distance infinie; & par conséquent toutes ces lignes que l'on considère comme diamètres, sont parallèles entre elles.

247. Après avoir fait ces remarques sur la somme des trois valeurs de chaque appliquée, examinons maintenant leur produit; car on n'a trouvé rien du tout de remarquable pour la somme de leurs rectangles. L'équation générale de l'art. 239 donnera $PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa$. Pour développer cette expression, faisons attention que, si $\gamma=0$, elle devient $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0$; équation dont les racines seront connoître les intersections de l'axe AZ avec la courbe. Si elles se trouvent aux points B , C & D , on aura $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = \delta(x-AB)(x-AC)(x-AD)$; donc $PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD$; & par conséquent en prenant une autre ordonnée quelconque lmn parallèle à la première, on aura $PL.PM.PN : PB.PC.PD :: pl.pm.pn :$

$pB \cdot pC \cdot pD$; propriété entièrement semblable à celle que nous avons trouvée auparavant pour les lignes du second ordre à l'égard de leurs rectangles; & à laquelle il s'en trouvera également une semblable pour les lignes du quatrième & du cinquième ordre, & de tous les ordres supérieurs.

Pl. VI. Fig. 46. 248. Lorsqu'une ligne du troisième ordre a trois asymptotes droites FBf , GDg , HCh ; comme elle dégénère en ces trois asymptotes, si l'équation à la courbe est décomposable en trois facteurs simples de la forme $py + qx + r$, on pourra concevoir pour les asymptotes, considérées comme une ligne complexe, une équation particulière dont le premier membre s'accordera avec le premier membre de l'équation à la courbe; de plus, la position des asymptotes étant déterminée par le second membre de l'équation, ce dernier sera aussi commun aux deux équations, de sorte que, si en rapportant la courbe à l'axe AP , on a entre l'abscisse $AP = x$ & l'appliquée $PM = y$, l'équation :

$$y^3 + (\epsilon x + \epsilon)y^2 + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + ix + z = 0;$$

en rapportant de même les asymptotes au même axe AP , on aura, entre l'abscisse $AP = x$ & l'appliquée $PG = \zeta$, l'équation suivante :

$$\zeta^3 + (\epsilon x + \epsilon)\zeta^2 + (\gamma xx + \zeta x + B)\zeta + \delta x^3 + \eta x^2 + Cx + D = 0;$$

dans laquelle les coefficients ζ , B , C , D , sont tels, que l'équation deviendra résoluble en trois facteurs simples.

249. Donc, si on mène une appliquée quelconque PN qui coupe en même temps la courbe en trois points L , M , N , & les asymptotes en trois points F , G , H , on aura, par l'équation à la courbe, $PL + PM + PN = -\epsilon x - \epsilon$, & par l'équation aux asymptotes, $PF + PG + PH = -\epsilon x - \epsilon$; ainsi, $PL + PM + PN = PF + PG + PH$, ou $FL - GM + HN = 0$; & si on suppose une autre appliquée pf , on aura de même $fn - gm + hl = 0$. Donc, si une droite quelconque coupe la courbe & les asymptotes en trois points, les deux parties de la ligne que les asymptotes & la courbe comprennent entre elles du même côté, seront égales à la partie située en sens contraire.

250. Il suit de-là que dans une ligne du troisième ordre qui a trois asymptotes droites, les trois branches qui s'en approchent de plus en plus, ne peuvent être à leur égard placées du même côté; mais que, si deux sont situées d'un côté, la troisième l'est nécessairement du côté opposé. C'est pour cette raison qu'une ligne du troisième ordre, telle qu'elle est représentée par la figure 47 est impossible, parce que la droite qui coupe les asymptotes aux points f, g, h , & la courbe aux points l, m, n , donne les parties fn, gm, hl , situées du même côté, & dont la somme par conséquent ne peut être égale à zéro; car les parties qui vont dans un sens ont le même signe, par exemple $+$, & celles qui vont en sens contraire, le signe $-$; d'où il suit que la somme de ces trois parties ne peut devenir nulle, à moins qu'elles ne soient précédées de différens signes.

Pl. VI. Fig. 47.

251. On aperçoit clairement à cette heure la raison pour laquelle dans une ligne du troisième ordre, on ne peut obtenir deux asymptotes droites de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, tandis que la troisième seroit de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$; c'est que les premières branches hyperboliques convergent infiniment plus vers leur asymptote, que celle qui est représentée par $u = \frac{A}{t}$. Car supposons que la droite fl s'éloigne à l'infini, les intervalles fn, gm, hl , deviendront infiniment petits; mais si deux branches nx, my , sont supposées de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$, & la troisième branche tz de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, alors les intervalles fn & gm seront infiniment plus petits que l'intervalle hl , & il est impossible que $gm = fn + hl$.

Pl. VI. Fig. 46.

252. De-là il s'ensuit que dans les lignes des ordres supérieurs, qui ont autant d'asymptotes que de dimensions, une seule asymptote ne peut être de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, tandis que les autres seroient d'espèces supérieures, $u = \frac{A}{t^2}, u = \frac{A}{t^3}$ &c.;

mais, si l'une est de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, il doit y en avoir nécessairement une autre du même genre. Par la même raison, s'il n'y a point d'asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, il est impossible qu'il n'y en ait qu'une de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$, mais il devra y en avoir au moins deux. Car les branches hyperboliques de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$, $u = \frac{A}{t^3}$, &c., convergent infiniment plus vers leurs asymptotes que celles de l'espèce $u = \frac{A}{t}$. Ainsi, dans l'énumération des espèces renfermées dans un ordre supérieur quelconque, il sera facile de connoître les cas qui doivent être rejetés, & d'éviter par-là des calculs longs & pénibles.

Pl. VI Fig. 48.

253. Si nous supposons une ligne du troisième ordre coupée par une droite quelconque en deux points seulement, elle sera aussi rencontrée en deux points par toutes les autres droites parallèles à celles-ci, ou ne le fera nulle part. Si donc on imagine sur un axe quelconque des appliquées y parallèles à cette droite, l'équation sera telle qu'on la voit ici :

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\epsilon x + \epsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa}{\epsilon x + \epsilon} = 0.$$

Par exemple, si on fait $AP = x$, on aura deux appliquées y , savoir PM & PN ; & par la nature de l'équation $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\epsilon x + \epsilon}$. Si l'ordonnée MN est coupée en deux parties égales au point O , PO fera $= \frac{1}{2} \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\epsilon x + \epsilon}$; & par conséquent, si on fait $PO = z$, on aura $2z(\epsilon x + \epsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$; d'où il suit que tous les points O qui coupent les ordonnées parallèles MN en deux également sont situés sur une Hyperbole, à moins que $\gamma xx + \zeta x + \theta$ ne soit divisible par $\epsilon x + \epsilon$; car dans ce cas le point O appartiendra à une ligne droite.

254. Donc, si $\gamma xx + \zeta x + \theta$ est divisible par $\epsilon x + \epsilon$, la courbe aura un diamètre ou une droite qui partagera en deux parties égales toutes les ordonnées parallèles MN ; nous avons

vù que cette propriété convenoit à toutes les lignes du second ordre. Si on suppose $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisible par $\epsilon x + \epsilon$, cette quantité devra s'évanouir, en faisant $x = \frac{-\epsilon}{\epsilon}$; par conséquent, si $\gamma \epsilon \epsilon - \epsilon \zeta + \epsilon \theta = 0$, la ligne du troisième ordre aura un diamètre.

255. Nous sommes donc en état de déterminer de la manière la plus générale tous les cas, où les lignes du troisième ordre ont un diamètre; car soit proposée l'équation générale :

$$ay^3 + \epsilon y^2 x + \gamma y x x + \delta x^3 + \epsilon y y + \zeta y x + \eta x x + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Ici les appliquées y , à cause qu'elles ont ou trois valeurs ou une seule, n'admettent point de diamètre. Nous menerons donc au même axe, sous un autre angle queleconque d'autres appliquées u , de manière que $y = nu$ & $x = t - mu$, & qu'après la substitution on ait

$$\left. \begin{aligned} &+an^3u^3 + \epsilon n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \kappa \\ &- \epsilon mn^2u^3 - 2\gamma mn u^2t - 3\delta mutt - \zeta mn u^2 - 2\eta mut - \iota mu \\ &+ \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t + \eta m^2u^2 \\ &- \delta m^3n^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

D'abord, pour que ces nouvelles appliquées soient propres à recevoir un diamètre, il faut qu'elles ne puissent avoir que deux valeurs; on aura par conséquent

$$an^3 - \epsilon mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0.$$

256. Mais il faut de plus que la quantité par laquelle u est multiplié, savoir $(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$, soit divisible par celle qui multiplie uu , laquelle est $(\epsilon n^2 - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \epsilon nn - \zeta mn + \eta mm$; ou que la première devienne égale à zéro, si l'on fait $t = \frac{-\epsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{\epsilon nn - 2\gamma mn + 3\delta mm}$; d'où l'on conclura :

$$= \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(\epsilon nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(\epsilon nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2 m}.$$

257. Si nous faisons l'application de tout ce que nous venons de dire aux espèces dont nous avons fait ci-dessus le dénombrement, on verra que la première espèce manque absolument de diamètre; qu'il y en a un pour la seconde espèce, lequel divise en deux parties égales les ordonnées parallèles à l'axe, sur lequel sont comptées les abscisses x . La troisième espèce n'admet pas plus que la première de diamètre; la quatrième en a toujours un qui coupe les ordonnées parallèles à une asymptote; la cinquième en a trois qui coupent les ordonnées parallèles à chacune des asymptotes. La sixième n'en peut avoir, & la septième en a toujours un pour les ordonnées parallèles à l'asymptote qui résulte du facteur $x - my$. La huitième en a un aussi pour les ordonnées parallèles à l'axe; la neuvième espèce en a deux, l'un pour les ordonnées parallèles à l'axe, l'autre pour les ordonnées parallèles à la seconde asymptote; la dixième est comme la huitième, & la onzième comme la neuvième. La douzième, par rapport aux diamètres, rentre dans la classe de la huitième, & la treizième dans la classe de la neuvième. La quatorzième a un diamètre pour les ordonnées parallèles à l'axe. Quant à la quinzième & à la seizième espèce, comme elles n'ont point d'ordonnées qui rencontrent la courbe en deux points, elles ne peuvent pour cette raison avoir de diamètre. Ces sortes de propriétés ont été très-bien distinguées par NEWTON; & c'est pourquoi il nous a paru à propos d'entrer dans les détails que nous venons de donner.

258. Quoique nous ayions supposé, dans les équations que nous avons données ci-dessus, pour chaque espèce de lignes du troisième ordre les coordonnées x & y perpendiculaires entre elles, cependant la nature de l'espèce n'est point changée, quoiqu'elles soient inclinées d'une manière quelconque à l'égard l'une de l'autre. En effet, quel que soit le nombre des branches infinies, lorsque les coordonnées sont perpendiculaires, la même équation en fournira autant, si les appliquées ont une inclinaison quelconque par rapport à l'axe. Le changement d'inclinaison des coordonnées ne change pas non plus la nature des branches infinies; celles qui sont paraboliques, restent paraboliques; & celles qui sont hyperboliques, con-

servent aussi leur caractère; de plus, l'espèce des branches soit paraboliques, soit hyperboliques, ne recevra aucune altération. Ainsi toute courbe que son équation range dans la classe de la première espèce, que les coordonnées soient perpendiculaires ou obliques, doit toujours être rapportée à la même classe; & il en fera de même de toutes les autres espèces.

259. En admettant une obliquité quelconque pour les coordonnées, les équations que nous avons données ci-dessus, ne seront point limitées, si au lieu de y on met vu , & au lieu de x , $t - \mu u$, $\mu\mu + \nu\nu$ étant $= 1$. Mais en prenant à volonté l'obliquité de l'angle, il sera facile de simplifier les équations que nous avons données ci-dessus. Ainsi on obtiendra pour chaque espèce, sous la forme la plus simple, les équations suivantes entre les coordonnées obliquangles t & u .

PREMIERE ESPECE.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = 0;$$

$$n \text{ n'étant pas } = 0, \text{ ni } b = 0.$$

SECONDE ESPECE.

$$u(t^2 + nnuu) + auu + cu + d = 0;$$

$$n \text{ n'étant pas } = 0.$$

TROISIEME ESPECE.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = 0;$$

$$n \text{ n'étant pas } = 0, \text{ ni } b = 0, \text{ ni } \pm nb + c + \frac{aa}{4nn} = 0.$$

QUATRIEME ESPECE.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = 0;$$

$$n \text{ n'étant pas } = 0, \text{ ni } c + \frac{aa}{4nn} = 0.$$

132 DES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS
C I N Q U I E M E E S P E C E .

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{aau}{\Delta nn} + d = 0;$$

n n'étant pas = 0.

S I X I E M E E S P E C E .

$$tuu + att + bt + cu + d = 0;$$

a n'étant pas = 0, ni $c = 0$.

S E P T I E M E E S P E C E .

$$tuu + att + bt + d = 0;$$

a n'étant pas = 0.

H U I T I E M E E S P E C E .

$$tuu + bbt + cu + d = 0;$$

b n'étant pas = 0, ni $c = 0$.

N E U V I E M E E S P E C E .

$$t\tilde{u}\tilde{u} + bbt + d = 0;$$

b n'étant pas = 0.

D I X I E M E E S P E C E .

$$tuu - bbt + cu + d = 0;$$

b n'étant pas = 0, ni $c = 0$.

O N Z I E M E E S P E C E .

$$tuu - bbt + d = 0;$$

b n'étant pas = 0.

DOUZIEME ESPECE.

$$t u u + c u + d = 0;$$

$$c \text{ n'étant pas } = 0.$$

TREIZIEME ESPECE.

$$t u u + d = 0.$$

QUATORZIEME ESPECE.

$$u^3 + a t t + c u + d = 0.$$

QUINZIEME ESPECE.

$$u^3 + a t u + b t + d = 0;$$

$$a \text{ n'étant pas } = 0.$$

SEIZIEME ESPECE.

$$u^3 + a t = 0.$$

C H A P I T R E X I.

Des Lignes du Quatrième Ordre.

260. L'ÉQUATION générale pour les lignes du quatrième ordre est :

$$a y^4 + b y^3 x + c y^2 x^2 + d y x^3 + e x^4 + f y^3 + g y^2 x + h y x x + i x^3 \\ + j y y + k y x + l x x + m y + n x + o = 0.$$

En faisant varier l'inclinaison des coordonnées, la position de l'axe & l'origine des abscisses, on peut dans les différens cas la ramener de plusieurs manières à une forme plus simple. Pour faire l'énumération de toutes les *Especies* ou plutôt de tous les

Genres de lignes renfermées dans cet ordre, suivant la méthode que nous avons donnée, il faudra avoir égard au premier membre, dont la considération fera naître les cas suivans.

I.

Si les quatre facteurs simples du premier membre sont tous imaginaires.

II.

Si deux facteurs seulement sont réels & inégaux entre eux.

III.

Si deux facteurs seulement sont réels & égaux.

IV.

Si tous les quatre facteurs sont réels & inégaux.

V.

Si deux facteurs sont égaux entre eux, les deux autres étant inégaux entre eux.

VI.

Si, outre deux facteurs égaux, les deux autres sont aussi égaux entre eux.

VII.

Si trois facteurs simples sont égaux entre eux.

VIII.

Si tous les facteurs sont inégaux entre eux.

PREMIER CAS.

261. Si tous les facteurs du membre supérieur sont imaginaires, la courbe n'aura point de branches infinies; & comme nous tirons de la diversité des branches infinies le caractère

distinctif des genres, ce cas fournira le premier genre. Ainsi le

I^{er} GENRE

n'a point de branches qui s'éloignent à l'infini, & sa nature sera exprimée par cette équation simplifiée

$$(yy + m m x x)(yy - 2p x y + q q x x) + a y^2 x + b y x^2 + c y y + d y x + e x x + f y + g x + h = 0,$$

pp étant moindre que qq . En effet, comme les termes y^4 & x^4 se trouvent nécessairement dans le premier membre, en augmentant ou diminuant les coordonnées x & y d'une quantité donnée, on peut faire disparaître y^3 & x^3 du second membre.

SECOND CAS.

262. Si deux facteurs seulement du membre supérieur sont réels & inégaux, on pourra, en changeant convenablement l'obliquité des coordonnées & la situation de l'axe, faire en sorte que l'un soit y & l'autre x ; l'équation prendra donc cette forme :

$$y x (y y - 2 m y x + n n x x) + a y^2 x + b y x^2 + c y y + d y x + e x x + f y + g x + h = 0,$$

$m m$ étant plus petite que $n n$.

Car, comme les termes $y^3 x + y x^3$ se trouvent nécessairement dans le premier membre, on pourra faire disparaître dans le second les termes y^3 & x^3 . La courbe aura donc deux asymptotes rectilignes, l'une désignée par l'équation $y = 0$, l'autre par l'équation $x = 0$; la première sera donc caractérisée par cette équation $n n y x^3 + e x x + g x + h = 0$, & la seconde par $x y^3 + c y y + f y + h = 0$; d'où résultent les

II^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, toutes deux de la nature $u = \frac{A}{r}$; lorsque ni c ni e ne sont des quantités nulles.

III^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, l'une de la nature $u = \frac{A}{t}$,
 & l'autre de la nature $u = \frac{A}{t^2}$; il est renfermé dans l'équation

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0;$$

e n'étant pas $= 0$, ni $g = 0$.

IV^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, l'une de l'espèce $u = \frac{A}{t}$,
 l'autre de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$. Il est renfermé dans cette équation:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + h = 0;$$

c n'étant pas $= 0$.

V^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, toutes deux du genre
 $u = \frac{A}{t^2}$, & dont l'équation est :

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + gx + h = 0;$$

f n'étant pas $= 0$, ni $g = 0$.

VI^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, l'une de l'espèce $u = \frac{A}{t}$,
 & l'autre de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$. Il est exprimé par l'équation

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + h = 0;$$

f n'étant pas $= 0$.

VII^e

VII^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, toutes deux de l'espèce $u = \frac{A}{x}$, & qui est renfermé dans cette équation :

$$yx(yx - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + h = 0;$$

nn étant par-tout plus grande que mm .

TROISIÈME CAS.

263. Si les deux facteurs du membre supérieur, qui sont feuls réels, sont égaux entre eux, l'équation aura cette forme :

$$yy(yx - 2myx + nnxx) + ayxx + bx^3 + cyx + dyx + exx + fy + gx + h = 0;$$

nn étant encore plus grande que mm ; équation qui, à moins que b ne soit $= 0$, donne le

VIII^e GENRE,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $uu = At$.

Mais, si $b = 0$; en supposant $x = \infty$, on aura $yy + \frac{ay}{nn} + \frac{c}{nn} + \frac{g}{nnx} + \frac{h}{nnxx} = 0$; d'où, si a est plus petit que $4nne$, naît le

IX^e GENRE,

qui n'a aucune branche infinie.

Si $b = 0$, & que aa soit plus grand que $4nne$, & que g ne soit pas $= 0$, on a le

X^e GENRE,

qui a deux asymptotes parallèles entre elles de l'espèce $u = \frac{A}{t}$.

Si $b = 0$, si $g = 0$, & que aa soit plus grand que $4nne$, on aura le

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 S

XI^e GENRE,

qui a deux asymptotes parallèles entre elles de l'espèce

$$u = \frac{A}{t'}$$

Si $b = 0$, si $aa = 4nne$, & que g ne soit pas $= 0$, on a le

XII^e GENRE,

qui a une asymptote hyperbolique de l'espèce $uu = \frac{A}{t'}$.

Si $b = 0$, $g = 0$, & $aa = 4nne$, & que h soit une quantité négative, il en résulte le

XIII^e GENRE,

qui a une asymptote hyperbolique de l'espèce $uu = \frac{A}{t'}$.

Mais, si $b = 0$, $g = 0$, $aa = 4nne$, & que h soit une quantité positive, on obtient alors le

XIV^e GENRE,

qui n'a point de branches infinies.

QUATRIEME CAS.

264. Si tous les quatre facteurs simples du premier membre sont réels & inégaux, l'équation sera de cette forme :

$$yx(y - mx)(y - nx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

La courbe aura donc quatre asymptotes rectilignes exprimées ou par $u = \frac{A}{t'}$, ou par $u = \frac{A}{t''}$, ou par $u = \frac{A}{t'''}$; ainsi, en faisant attention à la règle que nous avons exposée à l'art. 251, on trouvera les Genres suivans.

X V^e G E N R E,

distingué par quatre asymptotes hyperboliques, toutes de l'espèce $u = \frac{A}{t}$.

X V I^e G E N R E,

distingué par quatre asymptotes hyperboliques, trois de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & une de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$.

X V I I^e G E N R E,

distingué par quatre asymptotes hyperboliques, trois de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & une de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$.

X V I I I^e G E N R E,

caractérisé par quatre asymptotes hyperboliques, deux de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & deux de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$.

X I X^e G E N R E,

caractérisé par quatre asymptotes hyperboliques, deux de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, une de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$, & la quatrième de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$.

X X^e G E N R E,

distingué par quatre asymptotes hyperboliques, deux de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & deux de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$.

X X I^e G E N R E,

distingué par quatre asymptotes hyperboliques, toutes de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$.

XXII^e GENRE,

pourvu de quatre asymptotes hyperboliques, trois de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & une de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$.

XXIII^e GENRE,

pourvu de quatre asymptotes hyperboliques, deux de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & deux de celle-ci $u = \frac{A}{t^3}$.

XXIV^e GENRE,

pourvu de quatre asymptotes hyperboliques, toutes de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$.

CINQUIEME CAS.

267. Si deux facteurs du membre supérieur sont égaux entre eux, les autres étant inégaux, l'équation prendra cette forme :

$$y^2x(y+nx) + ayx^2 + bx^3 + cy^2 + dyx + ex^2 + fy + gx + h = 0.$$

D'abord, en ayant égard aux facteurs égaux, on trouve tous les Genres qui sont compris dans le *troisième cas*, & chacun peut être combiné avec autant de variétés que les facteurs inégaux peuvent en présenter, c'est-à-dire en autant de manières que le second cas contient de Genres. On auroit donc pour ce cas six fois sept ou quarante-deux Genres; mais il y en a deux qui sont impossibles, savoir lorsque deux asymptotes parallèles sont de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & l'une des autres de l'espèce

$u = \frac{A}{t}$, la troisième étant ou de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$, ou de celle-

ci $u = \frac{A}{t^3}$. Par conséquent ce cas fournit quarante Genres, qui, ajoutés avec les précédens, en font un nombre de *soixante-quatre*, & qu'il seroit trop long de détailler ici; & même, comme

il auroit été trop long de les discuter chacun en particulier, ne puis-je affirmer qu'ils soient tous réels. Au reste, si quelqu'un veut prendre ce soin, en se conformant aux préceptes qui ont été donnés auparavant, il sera à portée de réformer & de limiter, s'il en est besoin, le nombre des Genres.

SIXIÈME CAS.

266. Ce cas, qui comprend deux paires de facteurs égaux, sera représenté par l'équation

$$y^2yx + ay^3 + bx^3 + cy^2 + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Or chaque paire de facteurs égaux considérée en elle-même donne sept variétés; & par conséquent les deux donneront quarante-neuf Genres. Mais, comme h ne peut être en même temps positif & négatif, deux deviennent impossibles; ce qui réduit le nombre des Genres renfermés dans ce cas à quarante-sept; nombre encore trop grand pour qu'on puisse en faire ici le recensement. Voilà déjà jusqu'ici cent onze Genres.

SEPTIÈME CAS.

267. Si trois facteurs sont égaux entre eux, l'équation aura cette forme :

$$y^3x + ay^2x + bx^3 + cy^2 + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Le facteur x donne une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, si c n'est pas $= 0$; mais, si $c = 0$ & qu'en même temps f ne soit pas $= 0$, il donne une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$; & si $c = 0$ & $f = 0$, il donne une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$. Ensuite le facteur y^3 , à moins que b ne soit $= 0$, donne une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = At^2$; mais, si $b = 0$, en faisant x infini, l'équation devient $y^3 + ay^2 + dy + ex + g + \frac{cy^2 + fy + h}{x} = 0$. Dans ce cas, si e n'est pas $= 0$, on aura

$y^3 + ayx + ex = 0$, d'où l'on tire, si a n'est pas $= 0$,
 $y^2 + ax = 0$ & $ay + e = 0$. On a donc à la fois une asymptote
 parabolique de l'espèce $uu = At$, & une hyperbolique
 exprimée par cette équation $(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g +$
 $\frac{ce^2 - afe + aah}{aax}$. A moins donc que $e^3 + aade + a^3g$ ne soit
 $= 0$, cette asymptote est de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; & dans le cas
 contraire de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$; mais, si $a = 0$ sans que e soit
 $= 0$, on aura $y^3 + ex = 0$; ce qui donne une asymptote pa-
 rabolique de l'espèce $u^3 = At$; & si $e = 0$ & $a = 0$, on aura
 $y^3 + dy + g = 0$; équation qui donne une seule asymptote
 de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, ou trois de la même espèce, ou une de
 l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$; & une de l'espèce $uu = \frac{A}{t}$, ou une de l'es-
 pèce $u^3 = \frac{A}{t}$. Cela fait en tout huit variétés qui, multipliées
 par les trois qui résultent du facteur x , donneront vingt-quatre
 Genres. Tous les cas que nous avons traités jusqu'ici fournif-
 sent donc cent trente-cinq Genres.

HUITIEME CAS.

268. Si tous les facteurs sont égaux entre eux, l'équation
 qui suit aura lieu :

$$y^4 + ay^2x + byx^2 + kx^3 + cy^2 + dyx + ex^2 + fy + gx + h = 0.$$

Ce dernier cas, si k n'est pas $= 0$, fournit le

CXXXVI^e GENRE,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $u^4 = At^3$.

Soit $k = 0$, & non $b = 0$; on aura $y^4 + byxx + exx = 0$,
 d'où $y^3 + bxx = 0$ & $by + e = 0$; par conséquent l'asymptote
 retiligne $by + e = 0$, donnera $(by + \frac{e^4}{t^4} + \frac{ae^2x}{tb})$

$+\frac{c e e}{b b} - \frac{d e x}{b} - \frac{c f}{b} + g x + h = 0$; donc, si $a e e - b d e + b b g$ n'est pas $= 0$, l'asymptote sera de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & dans le cas contraire, de l'espèce $u = \frac{A}{t^2}$; d'où résultent le

C X X X V I I^e G E N R E,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = A t t$, & une hyperbolique de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, & le

C X X X V I I I^e G E N R E,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = A t t$, & une hyperbolique de l'espèce $u = \frac{A}{t}$.

269. Soient à présent $k = 0$ & $b = 0$, de manière qu'on ait

$$y^4 + a y^3 x + c y y + d y x + e x x + f y + g x + h = 0.$$

Si e n'est pas $= 0$, on aura $y^4 + a y y x + e x x = 0$, équation impossible, lorsque $a a$ est moindre que $4 e$; & qui, lorsque $a a$ est plus grand que $4 e$, fournit deux asymptotes paraboliques rapportées au même axe, & de l'espèce $u u = A t$; & si $a a = 4 e$, ces deux paraboles se confondent en une seule. De là les CXXXIX, CXL & CXLI^e Genres.

Mais, si $e = 0$, on aura l'équation

$$y^4 + a y y x + c y y + d y x + f y + g x + h = 0,$$

laquelle, si a n'est pas $= 0$, deviendra $y^4 + a y y x + c y y + d y x + g x = 0$; d'où l'on conclura celles-ci: $y y + a x = 0$, & $a y y + d y + g = 0$; cette dernière donnera pour y deux valeurs réelles inégales ou égales, ou n'en donnera aucune. Dans le premier cas, la courbe, outre une asymptote parabolique, en aura deux autres parallèles de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; dans le se-

cond, une de l'espèce $uu = \frac{A}{t}$; & dans le troisième elle n'en aura aucune; d'où résultent encore trois Genres qui forment les CXLII, CXLIII & CXLIV^e.

270. Soit maintenant $a = 0$; ou soit l'équation

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + h = 0.$$

Dans ce cas, si d n'est pas $= 0$, la courbe aura une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = At$, & une rectiligne désignée par l'équation $dy + g = 0$ de l'espèce $u = \frac{A}{t}$. Enfin, si $d = 0$, la courbe aura une asymptote parabolique de l'espèce $u^4 = At$. C'est ainsi que toutes les lignes du quatrième ordre se trouvent comprises sous cent quarante-six Genres, qui renferment eux-mêmes pour la plupart plusieurs espèces, qui ont entre elles des différences notables.

271. En voilà assez pour faire voir combien les Genres se multiplient pour les lignes du cinquième ordre, ou d'un ordre plus élevé, de sorte qu'il seroit impossible d'en faire le dénombrement, comme nous l'avons fait pour le troisième ordre, sans y consacrer un volume entier. Quant aux principales propriétés des lignes du quatrième ordre, ou d'un ordre supérieur, on les déduira de leur équation générale, de la même manière que nous l'avons fait pour les lignes du troisième ordre; c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas à les chercher ici.

CHAPITRE XII.

De la Figure des Lignes Courbes.

272. CE que nous venons d'exposer dans les chapitres précédens sert à faire connoître la figure des lignes courbes considérées à une distance infinie; mais il est souvent très-difficile de juger par leur équation de celle que chacune peut avoir dans un espace fini; car il faudroit pour chaque abscisse finie en conclure les valeurs correspondantes de l'appliquée, & distinguer les valeurs réelles de celles qui sont imaginaires; ce qui surpasse souvent les forces de l'analyse, lorsque l'équation est d'un degré un peu élevé. En effet, si on attribue à l'abscisse une valeur connue quelconque, l'appliquée tiendra lieu d'inconnue; & la résolution de l'équation qui doit en donner la valeur, dépendra du nombre des dimensions de l'appliquée; mais il y a un moyen de diminuer beaucoup ce travail; c'est de ramener l'équation à une forme plus simple, en choisissant pour cela l'axe le plus commode & l'inclinaison des coordonnées la plus convenable; ou encore, comme il est indifférent de prendre l'une des coordonnées pour abscisse, de choisir pour appliquée celle des deux qui a le moins de dimensions dans l'équation.

273. Ainsi, pour trouver la figure des lignes du troisième ordre qui appartiennent à la première espèce, nous prendrons de préférence l'équation la plus simple que nous en avons donnée art. 259; & des deux coordonnées t & u , nous considérerons la première t comme l'appliquée, & l'autre u comme l'abscisse, parce que t n'a que deux dimensions. Nous aurons donc une équation de cette forme :

$$yy = \frac{2bv + axx + cx + d - nnx^3}{x},$$

laquelle, étant résolue, donne :

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 T

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x},$$

ni b ni n n'étant $= 0$.

274. Lorsque les nombres substitués à x donnent à la fonction $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ une valeur positive, il y a pour chaque abscisse deux appliquées qui n'en font plus qu'une, lorsque cette fonction s'évanouit; ou, si l'on veut, les deux appliquées alors deviennent égales entre elles; mais, si elle devient négative, il n'y a plus d'appliquée qui réponde à l'abscisse. Or les valeurs de cette fonction, si elles étoient d'abord positives, n'ont pu devenir négatives sans être devenues auparavant égales à zéro, ou sans que la fonction se soit évanouie; il faudra donc faire attention principalement aux cas où la fonction $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ devient $= 0$; ce qui peut toujours avoir lieu dans deux circonstances. Car il est visible que, si x passe une certaine limite; soit en plus, soit en moins, sa valeur devient négative. Ainsi toute la courbe répondra à un espace déterminé de l'abscisse, au-delà duquel toutes les appliquées sont imaginaires.

Pl. VI. Fig. 49.

275. Supposons que l'expression $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ ne renferme que deux facteurs réels, ou qu'elle ne puisse s'évanouir que dans deux cas seulement, qu'on trouvera en déterminant sur l'abscisse les points P & S auxquels répond seulement une appliquée unique; il s'ensuivra que dans tout l'espace PS les appliquées seront doubles & réelles, & que, hors du même espace PS , elles seront toutes imaginaires; la courbe entière sera donc située entre les appliquées Kk & Nn . L'appliquée qui répond à l'origine A des abscisses sera asymptote de la courbe, & la coupera en outre en un point quelconque. En effet, si on fait $x = 0$, $\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}$

deviendra $= b + \frac{dx}{2b}$, & par conséquent $y = \frac{(b + dx)}{2b}$; c'est

à-dire, $y = \infty$, ou $y = \frac{-d}{2b}$. La courbe aura donc une forme

Pl. VI.

telle que la *Figure 50* la représente.

276. Supposons que l'expression $bb + dx + cxx + nx^3 - nnx^4$ contienne quatre facteurs simples réels & inégaux, & que par conséquent elle s'évanouisse dans quatre cas différens; il y aura donc autant d'endroits P, Q, R & S où les appliquées ne feront que toucher la courbe en un seul point; & , puisque les appliquées étoient imaginaires dans l'espace XP de l'axe, elles seront maintenant réelles dans l'espace PQ , & elles seront de nouveau imaginaires dans toute l'étendue QR pour redevenir réelles dans l'étendue RS ; mais au-delà de S , vers Y , elles deviendront encore imaginaires. Il s'ensuit que la courbe fera composée de deux parties séparées l'une de l'autre, dont l'une fera renfermée entre les droites Kk & Ll , & l'autre entre les droites Mm & Nn ; mais, comme à l'origine A des abscisses les appliquées sont réelles, il faut qu'elle se trouve ou dans l'intervalle PQ , ou dans l'intervalle RS de l'axe. Dans ce cas, la courbe aura donc une figure telle que la donne la *Figure 51*; c'est-à-dire qu'elle sera composée d'une ovale, séparée du reste de la courbe rapportée à l'asymptote DE , & qu'on appelle OVALE CONJUGUÉE. Pl. VI.

277. Si deux racines deviennent égales entre elles; ou les points P & Q , ou Q & R , ou R & S , se confondront; si le premier cas avoit lieu, comme le point A est situé entre P & Q , il faudroit que les deux racines devinssent égales à zéro; ce qui ne peut être, puisque b ne peut disparaître. Mais, si les points R & S se confondent, l'ovale conjugquée deviendra infiniment petite & dégénérera en un POINT CONJUGUÉ. Si ce sont les points Q & R qui se réunissent, l'ovale se joindra au reste de la courbe qui deviendra la courbe NOUÉE de la *Figure 52*; mais si trois racines sont égales, ou que les points Q, R & S coïncident, le nœud se changera en une POINTE très-aiguë*, telle que la fait voir la *Figure 53*. La première espèce fournit donc cinq variétés différentes, dont NEWTON a fait autant d'espèces. Pl. VI.

* Cette pointe s'appelle *point de rebroussement*.

278. NEWTON a fait de semblables subdivisions des autres espèces, parce que dans toutes les équations qui les représentent, une des coordonnées n'a pas plus de deux dimensions. Mais, quand une des coordonnées n'a qu'une dimension, la forme de la figure sera très-facile à reconnoître; car alors l'équation sera de cette forme $y = P$, P étant une fonction quelconque rationnelle de l'abscisse x ; ainsi, quelque valeur qu'on donne à x , l'appliquée en a toujours une correspondante, & la courbe aura un cours continu qui accompagnera l'axe à l'infini de part & d'autre. Si la fonction P est fractionnaire, il peut arriver que l'appliquée devienne infinie en un ou plusieurs endroits, & que par cette raison elle devienne asymptote de la courbe; ce qui a lieu, lorsque le dénominateur de la fonction P s'évanouit.

279. Faisons en conséquence $y = \frac{P}{Q}$, ces appliquées infinies seront données par toutes les racines réelles de l'équation $Q = 0$; en effet, chaque racine de cette équation, par exemple $x = f$, fait voir que, si on prend l'abscisse $x = f$, l'appliquée y sera infinie, puisque Q devient $= 0$. Il est clair alors que, si les appliquées y étoient positives, tandis que x étoit plus grand que f , elles seront négatives, lorsque x sera plus petit que f ; & par conséquent l'appliquée sera une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{x-f}$; la même chose doit s'entendre de tous les facteurs inégaux. Mais lorsque le dénominateur Q a deux facteurs égaux, par exemple, $(x-f)^2$; alors, si les appliquées sont positives, f étant plus petite que x ; elles resteront encore positives, si x est moindre que f ; & l'appliquée y , si on fait $x = f$, deviendra une asymptote de la forme $u = \frac{A}{(x-f)^2}$. Mais, si le dénominateur Q renferme trois facteurs égaux, par exemple, $(x-f)^3$, les appliquées qui précèdent & qui suivent celle qui est infinie, ont des signes différens, comme dans le premier cas.

280. Après l'examen de ces équations, il est très facile de traiter celles qui sont comprises sous la forme $yy = \frac{2Py - R}{Q}$;

P , Q & R étant des fonctions entières quelconques de l'abscisse x . Dans ce cas, il y aura pour chaque abscisse x deux appliquées correspondantes, ou il n'y en aura aucune; il y en aura deux, si PP est plus grand que QR ; & il n'y en aura point, si PP est plus petit que QR . Donc, à chaque limite qui sépare les appliquées réelles des imaginaires, on aura $PP = QR$; alors y devient $= \frac{P}{Q}$, & l'appliquée ne fait plus que raser la courbe, ou la toucher seulement en un point. Ainsi, pour en connoître la nature, il faudra considérer l'équation $PP - QR = 0$, dont chaque racine réelle fera connoître les endroits où les appliquées touchent la courbe en un seul point; si on les marque sur l'axe, & si on suppose que toutes les racines soient inégales, les parties de l'axe comprises entre ces points auront alternativement deux appliquées réelles & imaginaires; la courbe aura donc autant de parties séparées les unes des autres, qu'il y aura de ces sortes d'alternatives; ce qui donne naissance aux ovales conjuguées.

281. Si les deux racines de l'équation $PP - QR = 0$ deviennent égales, alors deux des points dont nous venons de parler se confondront; & il y aura sur l'axe une portion à laquelle répondoient des appliquées soit imaginaires, soit réelles, qui s'évanouira. Dans le premier cas, la courbe aura un nœud, comme dans la *Figure 52*; & dans le second cas, Pl. VI. l'ovale conjuguée se réduira en un point conjugué. Si cette équation renferme trois racines égales, le nœud deviendra infiniment petit & se terminera en pointe, comme dans la *Figure 53*; s'il y a quatre racines égales, deux ovales séparées se réuniront en un point, ou bien il y aura un nœud réuni à une pointe, ou deux pointes opposées par le sommet; s'il y a cinq racines égales, il n'en résultera presque pas de nouvelles formes; car il en résulte une pointe où se réunissent, non une seule ovale, comme auparavant, mais deux à la fois; & une plus grande quantité de racines égales n'apportera pas une nouvelle différence dans les figures résultantes.

282. Un nœud ou l'interfection de deux branches d'une courbe s'appelle ordinairement POINT DOUBLE, parce que

la ligne droite qui rencontre la courbe en ce point est censée la couper en deux points; s'il arrivoit qu'une autre branche passât par ce nœud, cette intersection donneroit naissance à un point *triple*; & le point seroit *quadripie*, si deux points doubles se réunissoient; ce qui fait connoître la nature & la génération des points *multiples*. L'ovale évanouissante, ou le point conjugué, fera donc aussi un point double; il en fera de même d'une pointe qui résulte d'un point conjugué réuni au reste de la courbe.

283. Si l'équation entre l'appliquée y & l'abscisse x est cubique ou d'un degré plus élevé, de sorte que y soit égal à une fonction multiforme de x ; il répondra à chaque abscisse autant d'appliquées, que y a de dimensions dans l'équation; ou bien le nombre en sera diminué de deux, de quatre, ou de six, &c. Il y a donc toujours deux appliquées qui deviennent imaginaires en même temps, & avant que de le devenir, elles deviennent égales entre elles. Ce passage des imaginaires aux réelles donne lieu à plusieurs variétés qui se trouvent parmi celles que nous venons d'expliquer, ou qui en sont composées. Au surplus, en cherchant pour un assez grand nombre d'abscisses tant positives que négatives toutes les valeurs correspondantes de l'appliquée, on connoitra facilement le cours & la figure de la courbe, en la faisant passer par les points qu'on aura ainsi trouvés.

284. Eclaircissons tout cela par un exemple, dans lequel, quoiqu'il soit tiré d'une équation d'un degré plus élevé, l'appliquée est cependant exprimée par des racines quarrées. Soit donc :

$$2y = \pm\sqrt{(6x - xx)} \pm\sqrt{(6x + xx)} \pm\sqrt{(36 - xx)};$$

équation, où à chaque abscisse doivent répondre huit appliquées. Il est évident que, si on fait l'abscisse x négative, l'appliquée sera imaginaire; la même chose aura lieu, si l'abscisse est prise plus grande que 6; de-là il suit que toute la courbe est renfermée entre les limites $x = 0$ & $x = 6$; donnons donc

successivement à x les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous aurons :

Si	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$\sqrt{(6x-x^2)}$	0,000	2,235	2,828	3,000	2,828	2,235	0,000
$\sqrt{(6x+x^2)}$	0,000	2,645	4,000	5,196	6,324	7,416	8,484
$\sqrt{(36-xx)}$	6,000	5,916	5,656	5,196	4,470	3,316	0,000
Somme,	6,000	10,796	12,484	13,392	13,622	12,967	8,484
d'où y , si							
$\left. \begin{matrix} + + + \\ - + + \\ + - + \\ + + - \end{matrix} \right\} =$	3,000	5,398	6,242	6,696	6,811	6,483	4,242
	3,000	3,163	3,414	3,696	3,983	4,248	4,242
	3,000	2,753	2,242	1,500	0,487	0,933	-4,242
	-3,000	-0,518	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

n prend

Les résultats que donneroient les quatre autres permutations, ne différeroient de ceux-ci que par les signes. Ainsi on aura pour chaque abscisse huit appliquées correspondantes; & si on veut décrire la courbe qui en résulte, on la trouvera composée de deux parties qui s'entrelacent $AFB E c a g b c D A$ & $a f b E C A G B. C D a$, ayant deux points en A & a , & quatre points doubles ou quatre intersections de branches en D, E, C & c .

Pl. VI. Fig. 54.

CHAPITRE XIII.

Des Affections des Lignes Courbes.

285. NOUS avons déterminé ci-dessus la nature des branches infinies en assignant une ligne droite, ou une courbe plus simple, qui se confondit avec la courbe proposée à une distance infinie; nous nous proposons de même, dans ce chapitre, d'examiner une portion quelconque de la courbe considérée dans un espace fini, & de chercher la ligne droite, ou la courbe la plus simple, avec laquelle elle puisse se confondre, au moins dans un espace très-petit. D'abord il est clair que toute ligne droite qui touche la courbe en un point, se confond avec elle en cet endroit, ou qu'elle a avec elle au moins deux points communs. Mais on peut aussi assigner d'autres courbes qui se confondent plus exactement avec la portion donnée de la courbe proposée, & la baissent en quelque sorte. On connoitra très-bien par-là l'état de la ligne courbe pour chaque point avec ses différentes affections.

Pl. VII. Fig. 55: 286. Soit donc proposée une équation quelconque entre les coordonnées x & y pour une courbe quelconque. Donnons à l'abscisse x une valeur déterminée $AP = p$, & cherchons celle de l'appliquée qui répond à cette abscisse; s'il y en a plusieurs, nous en prendrons une à volonté $PM = q$; le point M appartiendra à la courbe, ou sera un point par où elle passera. Mais alors, si dans l'équation proposée entre x & y on écrit p au lieu de x & q au lieu de y , tous les termes de l'équation se détruiront mutuellement, de sorte que le reste sera nul. A présent, pour connoître la nature de cette portion de la courbe qui passe par le point M , menons de ce point M la droite Mq parallèle à l'axe AP que nous prendrons maintenant pour axe; & faisons cette nouvelle abscisse $Mq = t$ & l'appliquée $qm = u$. Comme le point m appartient aussi à la

la courbe, si on prolonge mq jusqu'en p , & qu'on mette au lieu de x , $Ap = p + t$, & au lieu de y , $pm = q + u$; il en doit résulter pareillement une équation identique.

287. Après avoir fait cette substitution dans l'équation proposée entre x & y , tous les termes, dans lesquels ni t ni u ne se trouvent pas, se détruiront mutuellement; & il ne restera que ceux qui renferment les nouvelles coordonnées t & u . On aura donc une équation de cette forme:

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.;$$

dans laquelle A, B, C, D , &c., sont des quantités constantes, composées des constantes de la première équation & des quantités p & q que nous regardons aussi comme constantes. La nature de la courbe est donc exprimée par cette nouvelle équation; mais elle est rapportée à l'axe mq , sur lequel le point M même de la courbe est pris pour l'origine des abscisses.

288. D'abord il est clair que, si on fait $Mq = t = 0$, on aura aussi $qm = u = 0$, parce que le point m tombe sur M . Ensuite, comme notre but est de connoître seulement la très-petite portion de la courbe qui est près de M , nous le remplirons en prenant pour t des nombres très-petits; auquel cas $qm = u$ aura aussi une valeur très-petite; car il ne s'agit que d'un arc Mm presque évanouissant. Mais, si nous prenons pour t & u des valeurs très-petites, les termes tt , tu , & uu , seront encore beaucoup plus petits, & les suivans t^3 , t^2u , tuu , u^3 , &c., encore plus petits que ceux-ci, & ainsi de suite; c'est pourquoi, comme on peut omettre des grandeurs très-petites à l'égard d'autres qui sont en quelque sorte infiniment plus grandes, il restera l'équation $0 = At + Bu$, qui appartient à la ligne droite $M\mu$ menée par le point M , & qui apprend que, si le point m s'approche très-près de M , cette droite se confond avec la courbe.

289. Cette droite $M\mu$ sera donc une tangente de la courbe au point M ; d'où l'on peut conclure un moyen de mener une tangente μMT à un point quelconque M de la courbe.

Il n'y a qu'à tirer de l'équation $A t + B u = 0$, $\frac{u}{t} = -\frac{A}{B}$
 $= \frac{q\mu}{Mq}$; ce qui donnera $q\mu : Mq :: MP : PT :: -A : B$; &
 par conséquent, à cause que $PM = q$, $PT = \frac{-Bq}{A}$. Cette
 portion PT de l'axe se nomme ordinairement SOUSTANGENTE; on en conclura donc cette

R È G L E

pour trouver la Soustangente.

Après avoir trouvé dans l'équation à la courbe, que l'appliquée $y = q$ satisfait à l'abscisse $x = p$, on supposera $x = p + t$, & $y = q + u$; & des termes qui résulteront de la substitution, on conservera seulement ceux dans lesquels t & u ont une seule dimension, en négligeant tous les autres; on arrivera par ce moyen à cette équation de deux termes $A t + B u = 0$; ce qui, A & B étant supposés connus, donnera la foustangente $PT = \frac{-Bq}{A}$.

E X E M P L E I.

Soit proposée la Parabole dont la nature est exprimée par l'équation $yy = 2ax$, AP étant l'axe principal & A le sommet.

Prenons $AP = p$; & si nous supposons $PM = q$, nous aurons $qq = 2ap$, ou $q = \sqrt{2ap}$. Faisons ensuite $x = p + t$ & $y = q + u$, ce qui donne $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$; & en conservant seulement les termes que la règle prescrit de garder, $2qu = 2at$; d'où $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$.

Donc la foustangente $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, à cause de $qq = 2ap$. Ainsi la foustangente PT est double de l'abscisse AP .

E X E M P L E I I.

Soit la courbe une Ellypse décrite du centre A, dont l'équation est $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ ou $aayy + bbxx = aabb$.

Ayant pris $AP = p$ & supposé $PM = q$, on aura $aaqq + bbpp = aabb$. Faisant ensuite $x = p + t$ & $y = q + u$; comme il suffit de conserver seulement les termes ou t & u n'ont qu'une dimension, on peut négliger tout de suite les autres, & on aura $2aaqu + 2bbpt = 0$; d'où l'on tire $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. La foustangente PT fera donc $= \frac{-B}{A}q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$; & comme ce résultat est négatif, il apprend que le point T tombe du côté opposé. Au reste, cette expression s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée auparavant pour déterminer les tangentes de l'Ellypse.

E X E M P L E I I I.

Soit proposée la ligne du troisième ordre de la septième espèce $yyx = axx + bx + c$.

Prenant toujours $AP = p$, & supposant $PM = q$, on aura $pqq = app + bp + c$. Et faisant ensuite $x = p + t$ & $y = q + u$, $(p + t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p + t) + c$; rejetant tous les termes inutiles, il restera $2pqqu + qq t = 2apt + bt$; d'où l'on tire $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq}$ $= \frac{-A}{B}$; & par conséquent la foustangente $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pq}{2ap + b - qq} = \frac{2cp^2 + 2bp^2 + 2cp}{app - c}$, ou $PT = \frac{2ppqq}{app - c}$.

290. La tangente de la courbe étant donc connue de cette manière, on connoît en même temps la direction que suit la

3 V ij

courbe au point M . Car on peut très-bien regarder une ligne courbe, comme la trace qu'un point en mouvement formeroit en changeant continuellement de direction, & par conséquent le point qui par son mouvement décrit la courbe, fera dirigé en M suivant la tangente $M\mu$; & s'il conservoit cette direction, il décriroit la droite $M\mu$: mais il s'en écarte à chaque instant, puisqu'il décrit une courbe. Ainsi, pour connoître le cours d'une ligne courbe, il suffiroit de déterminer pour chaque point la position de la tangente; ce qui peut se faire facilement, en suivant la méthode que nous venons de donner; & ce qui ne présentera jamais aucune difficulté, pourvu que l'équation à la courbe soit rationnelle & délivrée de fractions; or on peut toujours ramener à une telle forme toutes les équations; mais, si l'équation est irrationnelle ou embarrassée de fractions, & qu'on veuille se dispenser de la ramener à une forme rationnelle & entière, on pourra encore employer la même méthode, mais avec quelque modification; & c'est cette modification qui a donné naissance au *Calcul différentiel*; c'est pourquoi nous réserverons pour ce calcul la méthode de trouver les tangentes, lorsque l'équation à la courbe ne sera pas rationnelle & entière.

291. On connoît encore par là l'inclinaison de la tangente $M\mu$ à l'axe AP ou à sa parallèle Mq ; car, puisqu'on a $q\mu : Mq :: -A : B$, si les coordonnées sont perpendiculaires entre elles, & forment par conséquent l'angle droit $Mq\mu$, on aura $-\frac{A}{B}$ pour la tangente de l'angle $qM\mu$; mais, si les coordonnées sont obliques, alors, au moyen de l'angle donné $Mq\mu$ & du rapport des côtés $Mq, q\mu$, on trouvera par la trigonométrie l'angle $qM\mu$. Au reste, il est clair que, si dans l'équation résultante $Au + Bu = 0$, on a $A = 0$, l'angle $qM\mu$ devient nul; & que par conséquent la tangente $M\mu$ sera parallèle à l'axe AP ; & que, si au contraire $B = 0$, la tangente $M\mu$ sera parallèle aux appliquées PM , ou l'appliquée même PM touchera la courbe au point M .

292. La tangente MT étant trouvée, si on mène au point de contact M la perpendiculaire MN , elle sera en même temps

perpendiculaire à la courbe même ; & par conséquent il sera facile d'en déterminer la position pour chaque cas. On l'aura sur-tout très-commodément, si les coordonnées AP & PM sont perpendiculaires entre elles ; car alors les triangles semblables $Mq\mu$ & MPN donnent $Mq : q\mu :: MP : PN$, ou $-B : A :: q : PN$; d'où l'on tire $PN = \frac{-Aq}{B}$. On a coutume d'appeler SOUSNORMALE cette portion PN de l'axe comprise entre l'appliquée & la normale MN . Cette sous-normale se trouve donc facilement au moyen de la soustangente PT , lorsque les coordonnées sont perpendiculaires ; car on aura $PT : PM :: PM : PN$, ou $PN = \frac{PM^2}{PT}$. De plus, si l'angle APM est droit, on aura la tangente $MT = \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$, & la normale $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)}$; ou, parce que $PT : TM :: PM : MN$, $MN = \frac{PM \cdot TM}{PT} = \frac{PM}{PT} \times \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$.

293. Comme nous venons de voir que la tangente sera parallèle à l'axe ou aux appliquées, suivant que dans l'équation $At + Bu = 0$, on a ou $A = 0$, ou $B = 0$; il reste à examiner le cas où les deux coefficients A & B deviennent à la fois $= 0$; lorsque cela arrive, les termes de l'équation trouvée ci-dessus (art. 286), dans lesquels t & u ont deux dimensions, ne peuvent plus être négligés à l'égard de ceux-ci $At + Bu$, qui disparaissent eux-mêmes. Il faudra donc considérer l'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$, négligeant les autres qui deviennent nuls par rapport à ceux-ci, lorsque t & u sont infiniment petits. On voit donc par cette équation, comme par l'équation générale, que, si $t = 0$, u sera aussi $= 0$; & que par conséquent M est un point de la courbe, ce qui est conforme à l'hypothèse.

294. L'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$ faisant connaître l'état de la courbe auprès du point M , il est évident que, si DD est plus petit que $4CE$, l'équation sera imaginaire, à moins que t & u ne soient $= 0$. Dans ce cas, le point M appartiendra bien à la courbe, mais il sera séparé du reste ; ce

fera par conséquent une ovale conjuguée qui se réduit à un point évanouissant, tel que nous en avons remarqué dans le chapitre précédent. On ne peut donc pas se former ici une idée de tangente; car la tangente étant une droite qui a deux points voisins communs avec la courbe, il est impossible qu'une droite touche de cette manière un point. S'il y a quelque point conjugué dans la courbe, on le reconnoîtra de cette manière; & il sera séparé des autres points.

Pl. VII. Fig. 56.

295. Si DD est plus grand que $4CE$, l'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$ sera résoluble en deux équations de cette forme $at + \ell u = 0$, dont chacune est propre également à faire connoître la nature de la courbe; puisque chacune représente la position de la tangente, ou la direction de la courbe au point M , il faut qu'il y ait au point M deux branches qui se coupent, & qui y forment un point double. Ayant donc pris $Mq = t$, soient $q\mu$ & qv les deux valeurs de u que donne l'équation; les droites $M\mu$ & Mv seront deux tangentes de la courbe au point M . Il y aura donc en M deux branches qui se rencontreront, dont l'une sera dirigée suivant $M\mu$ & l'autre suivant Mv . Puis donc qu'un point conjugué peut pareillement être regardé comme un point double, il s'ensuit que cette équation $Ctt + Dtu + Euu = 0$ indiquera toujours un point double, comme l'équation $At + Bu = 0$, toutes les fois qu'elle a lieu, désigne seulement un point simple.

296. Mais si $DD = 4CE$, alors ces deux tangentes $M\mu$ & Mv coïncideront, & l'angle μMv deviendra nul; ce qui fait voir que non-seulement les deux branches de la courbe concourent en M , mais encore qu'elles y ont une même direction, & que par conséquent elles se touchent; dans ce cas le point M n'en sera pas moins un point double, parce que la droite qui y passe, est censée couper la courbe en deux points. Ainsi, lorsque dans l'équation que nous avons obtenue (art. 286), les deux premiers coefficients A & B s'évanouissent, on doit en conclure pour la courbe un point double, dont trois espèces différentes peuvent avoir lieu; savoir une ovale qui se réduit en un point qu'on appelle point conjugué; ou l'intersection

mutuelle de deux branches de la courbe qu'on appelle nœud, ou bien l'attouchement de deux branches. Ces trois espèces différentes de point double dépendent des trois conditions qui peuvent se trouver dans l'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$.

297. Si outre les coefficients A & B , les trois C , D & E disparaissent aussi, il faudra prendre alors les termes suivans dans lesquels t & u ont trois dimensions; & on aura l'équation $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Tu^3 = 0$. Si cette équation n'a qu'un facteur simple réel, il désignera une branche de la courbe qui passe par le point M , & fera connoître en même temps sa direction ou la tangente; & les deux autres facteurs imaginaires indiqueront une ovale évanouissante au point même M . Mais, si toutes les autres racines de l'équation sont réelles, on saura par-là que la courbe a trois branches qui se croisent ou se touchent au même point M , suivant que ces racines sont ou inégales ou égales. Quel que soit celui de ces cas qui ait lieu, la courbe aura toujours au point M un point triple, & la droite qui y passera sera censée couper la courbe en trois points.

298. Si, outre les coefficients précédens, les quatre F , G , H & I sont encore nuls; dans ce cas, pour déterminer la nature du point M , il faudra recourir aux termes suivans de l'équation dans lesquels t & u auront quatre dimensions; ce qui annoncera l'existence d'un point quadruple. En effet, ou deux ovales conjuguées se confondent dans ce point, ce qui a lieu lorsque toutes les racines de l'équation du quatrième degré sont imaginaires; ou bien le point M réunit l'interfection ou le contact de deux branches de courbe avec un point conjugué, savoir, lorsque parmi les racines deux sont réelles & deux imaginaires; & si elles sont toutes réelles, il y aura en M l'interfection de quatre branches; & l'interfection de deux, de trois, ou même de quatre branches, se changera en un point de contact, si deux, trois, ou toutes les quatre racines deviennent égales; il faudra raisonner d'une manière semblable, si, les termes où t & u ont quatre dimensions venant à manquer, on est obligé de passer aux termes de cinq dimensions, ou même d'un plus grand nombre.

299. Cela posé, il sera facile de trouver l'équation générale pour toutes les courbes qui non seulement passent par le

point M , mais qui ont en M un point ou simple, ou double, ou triple, ou du degré de multiplicité qu'on voudra. Car, ayant supposé $AP = p$, $PM = q$, & P, Q, R, S , &c. désignant des fonctions quelconques des coordonnées x & y , il est clair que cette équation $P(x-p) + Q(y-q) = 0$ exprime une courbe qui passe par le point M ; car, si on suppose $x = AP = p$, alors $y = PM = q$, pourvu que P ne soit pas divisible par $y - q$, ni Q par $x - p$, pourvu enfin que ces facteurs $x - p$ & $y - q$, dont dépend le passage de la courbe par le point M , ne forment pas de l'équation par la division; il est évident que toutes les courbes qui doivent passer par M , sont renfermées dans cette équation $P(x-p) + Q(y-q) = 0$; & ce point M fera un point simple, si l'équation n'est pas de la forme de celle que nous allons donner pour les points multiples.

300. Si M est un point double, l'équation à la courbe sera comprise dans cette forme $P(x-p)^2 + Q(x-p)(y-q) + R(y-q)^2 = 0$, pourvu que cette forme ne disparaisse pas par la division. On voit par là qu'il n'y a pas de point double pour les lignes du second ordre; car il faut que P, Q & R soient des constantes, pour que l'équation soit du second degré; mais alors elle n'appartient plus à une courbe, mais à deux lignes droites. Si P, Q & R sont des fonctions du premier ordre, telles que $\alpha x + \epsilon y + \gamma$, on aura dans ce cas des lignes du troisième ordre qui auront en M un point double. Mais une ligne du troisième ordre, à moins qu'elle ne soit composée de trois lignes droites, ne peut avoir plus d'un point double; car supposons qu'elle en pût avoir deux, & imaginons par ces points une droite; elle couperoit la courbe en quatre points, ce qui est contraire à la nature des lignes du troisième ordre. La ligne du quatrième ordre aura seulement deux points doubles, & une ligne du cinquième n'en pourra avoir plus de trois, ainsi de suite.

301. Si M est un point triple, la nature de la ligne sera exprimée par $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$; si cette équation représente une courbe, elle sera d'un ordre supérieur au troisième; car, si P, Q, R & S étoient

étoient des constantes, comme l'exige la nature des lignes du troisième ordre, l'équation auroit trois facteurs de la forme $\alpha(x-p) + \epsilon(y-q)$, & appartiendroit par conséquent à un système de trois lignes droites. Ainsi un point triple ne peut appartenir aux lignes d'un ordre inférieur au quatrième, ni les lignes du cinquième ordre ne peuvent avoir plus d'un point triple; car autrement une droite pourroit couper une ligne du cinquième ordre en six points. Mais rien n'empêche qu'une ligne du sixième ordre n'ait deux point triples.

302. Si l'équation est de cette forme : $P(x-p)^t + Q(x-p)^i(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, la courbe aura en M un point quadruple. La courbe la plus simple qui puisse avoir un point quadruple, appartiendra donc aux lignes du cinquième ordre; & deux points quadruples ne peuvent convenir qu'aux lignes du huitième ordre, ou d'un degré plus élevé. On pourra assigner d'une manière semblable les équations générales des lignes qui auroient en M un point quintuple, ou multiple quelconque.

303. Mais si M est un point double, ou triple, ou un autre multiple, la courbe aura autant de branches qui se couperont ou se toucheront en M ; & si le nombre des branches qui se coupent est moindre, c'est une preuve qu'il y aura un ou plusieurs points conjugués, qui se réuniront au point M : l'état de la courbe pourra être connu par ce qui a été dit ci-dessus. On écrira par-tout dans les fonctions P, Q, R, S &c. p & q au lieu de x & de y , & t & u au lieu des facteurs $x-p$ & $y-q$; on aura par ce moyen les équations qui serviront à déterminer la nature de la courbe, & à trouver les tangentes des branches qui se coupent en M .

CHAPITRE XIV.

De la Courbure des Lignes Courbes.

304. Nous avons cherché dans le chapitre précédent les lignes droites qui marquoient pour chaque point les directions de la courbe elle-même, nous nous occuperons de même dans celui-ci de la recherche des lignes courbes plus simples, qui s'accordent pour un point quelconque tellement avec la proposée, qu'elles se confondent en quelque sorte avec elle au moins dans un très-petit espace. Par ce moyen, la nature de la courbe plus simple étant connue, on en conclura en même temps celle de la proposée. Nous procéderons ici, comme nous avons fait lorsqu'il a été question de connoître la nature des branches qui s'étendoient à l'infini, c'est-à-dire que nous chercherons d'abord la ligne droite qui touche la courbe, & ensuite la courbe plus simple qui s'accorde beaucoup mieux avec la proposée, & qui au lieu de la toucher simplement, l'embrasse ou la baise pour ainsi dire. Ce contact intime de ces sortes de courbes s'appelle ordinairement OSCULATION.

Pl. VII. Fig. 55.

305. Soit donc proposée une équation quelconque entre les coordonnées perpendiculaires x & y ; pour reconnoître la nature de la petite portion Mm de la courbe située vers le point M , après avoir trouvé l'abscisse $AP = p$ & l'appliquée $PM = q$, nous prendrons sur l'axe MR la petite abscisse $Mq = t$, & l'appliquée $qm = u$; ce qui donnera $x = p + t$, & $y = q + u$. Ces valeurs substituées dans l'équation, supposons qu'on arrive à l'équation

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.;$$

laquelle exprimera la nature de la même courbe rapportée à l'axe MR . Comme nous supposons ces nouvelles coordonnées t & u très-petites, les termes suivans seront presque infi-

niment plus petits que ceux qui précèdent, & pourront par cette raison être négligés à l'égard de ceux-ci.

306. Ainsi, à moins que les deux premiers coefficients A & B ne manquent à la fois, si on rejette tous les termes qui suivent, l'équation $0 = At + Bu$ indiquera la ligne droite $M\mu$ qui touche la courbe au point M , & dont la direction en cet endroit se confond avec celle de la courbe. On aura donc $Mq : q\mu :: B : -A$; & par conséquent, les quantités A & B étant connues, la position de la tangente $M\mu$ qui rencontre la courbe seulement au point M , le fera aussi; voyons à présent combien la courbe Mm s'éloigne de la droite $M\mu$, au moins dans un petit espace. A cet effet, prenons la normale MN pour axe, sur lequel on supposera abaissée du point m l'appliquée perpendiculaire mr ; & soit $Mr = r$, $rm = s$, on aura $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$; $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Il suit de-là qu'à cause de l'équation $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gttu + \&c.$, r sera infiniment plus petite que t & u ; & que par conséquent aussi r sera infiniment plus petite que s ; car s est déterminée par t & par u , & r l'est par les quarrés ou les puissances supérieures des mêmes lettres t & u .

307. Nous connoissons donc plus intimement la nature de la courbe Mm , si nous faisons entrer aussi dans le calcul les termes $Ct^2 + Dtu + Eu^2$, en négligeant les suivans; nous aurons entre t & u cette équation $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$; si nous y substituons, au lieu de t & de u , leurs valeurs trouvées ci-dessus, nous aurons $r \sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$; mais, comme r est infiniment plus petite que s , les termes rr & rs disparaîtront devant le terme ss , & on aura $s s = \frac{(A^2 + B^2) r \sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$; équation qui exprime la nature de la courbe osculatrice au point M .

308. Le petit arc Mm de la courbe se confondra donc

avec le sommet d'une parabole décrite sur l'axe MN , dont le paramètre est $= \frac{(A^2 + I^2)\sqrt{(A^2 + E^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$. Ainsi la courbure de la courbe proposée au point M sera la même que celle de la parabole à son sommet; mais, comme il n'y a point de courbure dont on ait une idée plus distincte que celle du cercle, parce qu'elle est par-tout la même, & qu'elle est d'ailleurs d'autant plus grande que le rayon est plus petit; il sera plus commode de déterminer la courbure des courbes par celle d'un cercle d'une égale courbure, qu'on appelle ordinairement *cercle osculateur*. C'est pourquoi il faut trouver le cercle dont la courbure s'accorde avec celle de la parabole proposée à son sommet, afin de pouvoir substituer ce cercle à la parabole osculatrice.

309. Pour cela, nous regarderons comme inconnue la courbure du cercle, & nous l'exprimerons, comme ci-dessus, par celle de la parabole; car on pourra ainsi réciproquement substituer à la parabole osculatrice le cercle osculateur. Soit donc la courbe proposée Mm un cercle décrit avec le rayon $= a$, & dont la nature sera exprimée par l'équation $yy = 2ax - xx$. Ayant pris $AP = p$ & $PM = q$, on aura $qq = 2ap - pp$. Si on fait en outre $x = p + t$ & $y = q + u$, on aura l'équation $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - t^2$, laquelle, à cause de $qq = 2ap - pp$, se réduit à celle-ci : $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$. Comparée avec celle trouvée ci-dessus, elle donne $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$; $D = 0$ & $E = -1$; d'où l'on tire $AA + BB = 4(aa - 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA + BB)\sqrt{(AA + BB)} = 8a^3$, & $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Donc le cercle qui a un rayon $= a$, se confond à chaque point avec le sommet d'une parabole dont l'équation est $ss = 2ar$; donc réciproquement la courbe embrassée par le sommet d'une parabole $ss = br$, le fera également par le cercle, dont le rayon $= \frac{1}{2}b$.

310. Comme nous avons trouvé ci-dessus que la courbe Mm étoit embrassée par une parabole dont l'équation est $ss =$

$\frac{(AA+BB)\sqrt{(AA+BB)}}{A^2E-ABD+B^2C}$ r ; il s'enfuit évidemment que la courbure de la même courbe au point M est la même que celle d'un cercle dont le rayon feroit $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}$. Cette expression donne donc le rayon du cercle osculateur, & c'est ce qu'on appelle ordinairement le *rayon osculateur*, ou le *rayon de courbure*. Au moyen de l'équation entre t & u , que nous avons tirée de celle entre x & y , on peut donc conclure sur-le-champ le rayon osculateur de la courbe au point M , ou le rayon du cercle qui embrasse la courbe en M ; car, si l'on rejette dans l'équation entre t & u les termes dans lesquels t & u ont plus de deux dimensions, on arrivera à une équation de cette forme :

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu;$$

laquelle donne tout de suite le rayon osculateur $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}$.

311. Mais, à cause de l'ambiguïté du signe radical, il est incertain si l'expression $\sqrt{(A^2+B^2)}$ est positive ou négative; c'est-à-dire, si c'est la concavité ou la convexité de la courbe qui est tournée vers N . Pour lever ce doute, il faut chercher si le point m de la courbe est situé entre la tangente $M\mu$ vers l'axe AN , ou s'il tombe au-delà de la tangente. Dans le premier cas, la courbe sera concave vers N , & le centre du cercle osculateur tombera sur la partie de la droite MN située vers l'axe; & dans le second cas, sur la partie de la droite NM prolongée au-delà de M . Il ne restera donc plus aucun doute, pourvu qu'on cherche si qm est plus petit que $q\mu$, ou plus grand; car dans le premier cas la courbe sera concave vers N ; & elle sera convexe au contraire, si le second cas a lieu.

312. Or $qm = \frac{-At}{B}$ & $qm = u$; il faut donc voir si $\frac{-At}{B}$ est plus grand ou plus petit que u . Soit la petite ligne $m\mu = w$, u fera $= \frac{-At}{B} - w$; donc, en faisant la substitution, on aura

$0 = -Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEtw}{B} + Ew^2$;
 équation dans laquelle les termes tw & w^2 disparaissent, à cause que
 w est très-petit à l'égard de t . Donc $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{E^3}$.

Ainsi, lorsque w sera une quantité positive, ce qui a lieu, si
 $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^2}$ ou $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité posi-
 tive, alors la courbe fera concave vers N ; mais si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$
 est une quantité négative, la convexité de la courbe regardera
 le point N .

Pl. VII. Fig. 57. 313. Pour éclaircir tout cela, examinons séparément diffé-
 rens cas qui peuvent se présenter. Soit donc d'abord $B = 0$,
 auquel cas l'appliquée PM fera elle-même tangente de la
 courbe Mm ; le rayon osculateur fera $= \frac{A}{2E}$. Or il est facile
 de juger par l'équation $0 = At + Ctt + Dtu + Euu$, si
 la courbe est concave vers R , comme le représente la figure,
 ou si elle est convexe; car, comme $Mq = t$ & $qm = u$, à
 cause que t est infiniment plus petit que u , les termes tt &
 tu disparaîtront devant uu , & il restera $At + Euu = 0$;
 or cette dernière équation apprend que, si les coefficients A &
 E ont des signes contraires, ou si $\frac{A}{E}$ est une quantité négative,
 la courbe fera concave vers R ; & que, si les coefficients A &
 E ont des signes semblables, ou si $\frac{E}{A}$ est une quantité positive,
 la courbe fera située de l'autre côté de la tangente; car l'ab-
 scisse Mq doit être négative, pour que l'appliquée correspon-
 dante qm soit réelle.

Pl. VII. Fig. 55. 314. Supposons à présent que la tangente $M\mu$ soit inclinée
 à l'axe AP ou qu'elle lui soit parallèle, de manière que l'angle
 $RM\mu$ soit aigu, & que la perpendiculaire MN coupe l'axe
 en N au-delà de P ; dans ce cas les appliquées u qui répon-
 dront aux abscisses t seront positives; d'où il suit que les coef-
 ficients A & B auront des signes différens, & que la fraction
 $\frac{A}{B}$ fera négative. Nous avons déjà vu que dans ce cas la courbe

fera concavé vers N , si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité positive; ou, puisque $\frac{B}{A}$ est une quantité négative, si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ est une quantité négative; mais si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité négative ou $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ une quantité positive, alors la courbe tournera sa convexité vers N . Au reste, dans ces deux cas le rayon osculateur fera $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

315. Soit maintenant $A = 0$, dans ce cas la droite MR Pl. VII. Fig. 58. parallèle à l'axe fera en même temps tangente de la courbe, & u fera infiniment plus petit que t ; ce qui donnera $0 = Bu + Ct$. Par conséquent, si B & C ont des signes semblables, ou si BC est une quantité positive, u doit alors avoir une valeur négative, & la courbe fera concave vers le point P , où tombe aussi le point N ; c'est ce que nous apprend la règle donnée auparavant, si on fait $A = 0$; dans ce cas le rayon osculateur fera $= \frac{B}{2C}$. La règle que nous venons de citer servira de même Pl. VII. Fig. 59.

si la tangente MT rencontre l'axe au-delà du point P ; car alors la courbe fera pareillement concave ou convexe vers N , suivant que cette expression $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ sera ou positive ou négative, & le rayon osculateur fera comme auparavant $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

316. Soit proposée une Ellipse, ou du moins un quart Pl. VII. Fig. 60. d'Ellipse DMC , dont le centre soit A , le demi-axe transverse $AD = a$, & le demi-axe conjugué $= b$. En prenant les abscisses x sur l'axe AD à compter du centre A , on aura pour l'équation de l'Ellipse $ayy + bbbx = aabb$; & si on suppose une abscisse quelconque $AP = p$, & l'appliquée correspondante $PM = q$, l'équation deviendra $aaqq + bbpp = aabb$. Soit ensuite $x = p + t$ & $y = q + u$, on aura $aaqq + 2aaqu + aaau + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, ou $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aaau = 0$. D'abord, à cause des coefficients de t & u , la normale MN

rencontre l'axe en deçà de P ; & on a $PM : PN :: B : A$
 $:: aaq : bbp$ & $PN = \frac{bbp}{a}$, à cause de $A = 2bbp$ & $B =$
 $2aaq$. Ensuite, à cause que $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, on
 aura $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; quan-
 tité positive, qui fait voir que la courbe est concave vers N .

317. Pour trouver à présent la valeur du rayon osculateur,
 nous observerons que $A^2 + B^2 = 4(a^2q^2 + b^2p^2)$ & $A^2E - ABD$
 $+ B^2C = 4a^4b^4$; donc la valeur demandée sera $= \frac{(a^4q^2 + b^4p^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$;
 mais $MN = \sqrt{qq + \frac{b^4pp}{a^4}}$, d'où $\sqrt{a^4qq + b^4pp}$
 $= aaMN$; & par conséquent le rayon osculateur $= \frac{A^2.MN^3}{b^4}$. Si
 sur le prolongement de la normale MN on abaisse du centre
 A la perpendiculaire AO , on aura, à cause de $AN = p -$
 $\frac{bbp}{aa}$, & de la similitude des triangles MNP & ANO , NO
 $= \frac{aabbpp - t^4pp}{a^4.MN}$, & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bb.pp}{aa.MN} =$
 $\frac{bb}{MN}$, & par conséquent $MN = \frac{bb}{MO}$; donc le rayon oscula-
 teur $= \frac{aaabb}{MO^3}$; expression qui se rapporte également aux deux
 axes AD & AC .

318. Lorsqu'on a trouvé le rayon osculateur qui convient
 à chaque point de la courbe, la nature de la courbe est assez
 bien connue. Car si on divise une portion de la courbe en
 plusieurs parties très-petites, chacune pourra être regardée
 comme un petit arc de cercle, dont le rayon sera le rayon
 osculateur qui convient en cet endroit. On pourra aussi, en pre-
 nant un assez grand nombre de points, décrire beaucoup plus
 exactement la courbe; car, après qu'on aura marqué plusieurs
 points par où la courbe doit passer, si on cherche pour cha-
 cun de ces points d'abord les tangentes, ensuite les normales
 & les rayons osculateurs, on pourra décrire, au moyen du
 compas, les petites portions de la courbe qui sont situées entre
 les

les points donnés; & on aura de cette manière une description de la courbe d'autant plus exacte, que les points dont il s'agit seront plus voisins.

319. Ainsi la petite portion de la courbe qui est en M , se confondant avec le petit arc de cercle décrit avec le rayon osculateur, la même courbure appartiendra non-seulement à l'élément Mm , mais encore au précédent Mn ; car, puisque la nature de la petite portion Mm de la courbe est exprimée par cette équation $ss = ar$ entre les coordonnées $Mr = r$ & $rm = s$, l'équation donnera pour chaque petite abscisse $Mr = r$ deux appliquées s , l'une positive, l'autre négative; & par conséquent la courbe s'étendra également vers n & vers m . Toutes les fois donc que le rayon osculateur, qui est $= \frac{1}{2} a$, aura une valeur finie, la courbure sera uniforme de part & d'autre d'un même point, au moins dans un petit espace. Ainsi dans ces cas le cours de la courbe ne changera point tout-à-coup pour former un point de rebroussement; il n'arrivera point non plus qu'en changeant de courbure, une partie Mn tourne sa convexité vers N , tandis que l'autre partie Mm tournera sa concavité vers N ; on appelle ordinairement ce dernier changement de courbure INFLEXION ou point de FLEXION CONTRAIRE. On peut donc dire que, lorsque le rayon osculateur est fini, il ne peut y avoir ni point de rebroussement, ni point de flexion contraire.

320. L'équation entre t & u

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$$

donnant le rayon osculateur $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, il s'ensuit évidemment que, si $A^2E - ABD + B^2C = 0$, alors le rayon osculateur devient infiniment grand; & que par conséquent le cercle osculateur se change en ligne droite. Lorsque cela arrive, la courbe n'a plus de courbure, & deux de ses éléments sont situés en ligne droite. Pour connoître plus à fond dans ces cas la nature de la courbe, la substitution de $t =$

$$\frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA+BB)}} \text{ \& de } u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA+BB)}} \text{ doit se faire aussi dans les}$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 Y

termes $Ft^3 + Gtu + Htuu + Iu^3$. Mais comme, à l'égard du premier terme $r\sqrt{(A^2+B^2)}$, tous les termes suivans qui contiennent r disparaissent; en rejetant ces derniers, & faisant la substitution dans toute l'équation, on en obtiendra une autre de cette forme :

$$r\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha s^2 + \epsilon s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

321. Cette équation donne tout de suite, comme ci-dessus, le rayon osculateur $= \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{2\alpha}$; mais, si $\alpha = 0$, il devient alors infini. Pour avoir dans ce cas une connoissance plus exacte de la nature de la courbe, il faut prendre le terme suivant ϵs^3 , de sorte que $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \epsilon s^3$; car, à moins que ϵ ne soit $= 0$, les termes suivans γs^4 , δs^5 , &c. s'évanouissent tous devant celui-ci. La courbe sera donc embrassée en M dans ce cas par une autre dont l'équation est $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \epsilon s^3$; laquelle fera connoître la figure de la courbe proposée vers le point M . Puis donc qu'à l'abscisse r prise négativement répond une appliquée s , il s'enfuit que la courbe aura une forme angulée $mM\mu$ en M ; & qu'elle aura par conséquent en cet endroit un point de flexion contraire.
- Pl. VII. Fig. 61.
322. Si, outre α , ϵ est aussi $= 0$, la nature de la courbe sera exprimée en M par l'équation $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \gamma s^4$; comme alors il y a pour chaque abscisse r deux appliquées s , l'une positive, l'autre négative, & qu'on ne peut prendre d'abscisse de part & d'autre, les deux portions Mm & $M\mu$ de la courbe seront situées du même côté de la tangente; mais si, parce que α , ϵ & γ seroient zéro, la nature de la courbe en M est exprimée par l'équation $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \delta s^5$, la courbe aura de nouveau en M un point de flexion contraire, comme dans la Fig. 61. Et si $\delta = 0$, & qu'on ait $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \epsilon s^6$, la courbe sera telle qu'elle est représentée Figure 62, & elle n'aura point d'inflexion. En général, si l'exposant de s est un nombre impair, la courbe aura en M un point d'inflexion; & elle n'en aura point, comme on le voit Figure 62, si s est un nombre pair.
- Pl. VII.
- Pl. VII.

323. Tels sont les phénomènes des Courbes, qui se présentent lorsqu'on le point M est simple, ou que dans l'équation

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.$$

les deux coefficients A & B ne manquent pas à la fois. Mais, si on a en même temps $A = 0$ & $B = 0$, & que la courbe ait deux branches, ou davantage, qui s'entrecoupent au point M , on cherchera séparément, comme on a fait ci-dessus, la courbure & la nature de chaque branche au point M . En effet, si, pour la tangente d'une des branches, on a l'équation $mt + nu = 0$, & qu'on cherche pour cette même branche celle entre les coordonnées r & s , dont la première r soit prise sur la perpendiculaire MN , de manière que r soit infiniment plus petite que s ; il faudra faire $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u =$

$\frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; ce qui étant fait, & ayant négligé les termes qui par leur petitesse infinie s'évanouissent à l'égard des autres, on arrivera, si M est un point double, à une équation de cette forme : $rs = as^3 + \epsilon s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \&c.$; & si M est un point triple, à une autre telle que celle-ci : $rs s = as^4 + \epsilon s^5 + \gamma s^6 + \&c.$; ainsi de suite. Toutes ces équations sont comprises dans la formule :

$$r = as s + \epsilon s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. On voit par cette équation que la branche de la courbe que nous considérons, a au point M un rayon osculateur $= \frac{1}{2a}$, qui devient $= \infty$, lorsque $a = 0$. Dans ce cas, la nature de la courbe fera donc exprimée ou par cette équation $r = \epsilon s^3$, ou par $r = \gamma s^4$, ou par $r = \delta s^5$, &c.; d'où l'on conclura, comme auparavant, que la branche de la courbe aura ou n'aura pas en M un point d'inflexion. Le premier cas a lieu, si l'exposant de s est un nombre impair; & le second, si l'exposant est pair. Tel est le jugement qu'il faudra porter de chaque branche en particulier qui passe par le point M ,

lorsqu'on aura sa tangente, & qu'elle diffère des tangentes des autres branches, qui se rencontrent au même point M .

Pl. VII. Fig. 55. 325. Mais il faudra porter un autre jugement, s'il arrive que les tangentes de deux ou de plusieurs branches coïncident au point M . En effet A & B disparaissant, supposons que dans l'équation $0 = Ctt + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.$ les facteurs simples du premier membre $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ soient égaux entre eux, ou, ce qui revient au même, que les deux branches qui se coupent au point M aient une tangente commune; & faisons en conséquence $Ctt + Dtu + Eu^2 = (mt + nu)^2$; en transportant l'équation aux coordonnées $Mr = r$ & $rm = s$, & faisant $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(n^2 + m^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, nous arriverons à une équation de cette forme: $rr = arss + \epsilon s^3 + \gamma rs^2 + \delta s^4 + \epsilon rs^2 + \zeta s^5 + \&c.$; car les termes où r a deux dimensions, ou davantage, s'évanouissent à l'égard du premier rr .

526. Il faut d'abord avoir égard au terme ϵs^3 . S'il ne manque pas, tous les autres disparaissent devant lui, parce que r est infiniment plus petite que s . A moins donc que ϵ ne soit $= 0$, la nature de la courbe au point M sera exprimée par cette équation $rr = \epsilon s^3$, laquelle donnant $r = s\sqrt{\epsilon s} = s\sqrt{\frac{\epsilon}{s}}$ apprend qu'au point M le rayon osculateur $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\epsilon}}$, ou, qu'à cause que s devient presque nulle au point M , le rayon osculateur devient aussi $= 0$. La courbure en ce point sera donc infiniment grande; ou, ce qui est la même chose, l'élément de la courbe en M fera une portion de cercle infiniment petit. Mais, comme l'appliquée s conserve la même valeur, soit qu'on fasse r positive, soit qu'on la fasse négative, il est clair que la courbe aura en M un point de rebroussement, & qu'elle se fourche en M en deux branches Mm , $M\mu$, qui se touchent l'une l'autre en ce point, & qui tournent leur convexité à la tangente Mt .

Pl. VII. Fig. 63.

327. Si $\epsilon = 0$, & que l'équation renferme le terme δs^4 devant lequel disparaît γrs^2 , la nature de la courbe au point M sera exprimée par $rr = arss + \delta s^4$. Si aa est moindre que -4δ , à

cause des facteurs imaginaires, on aura en M un point conjugué; mais, si aa est plus grand que -4δ , l'équation précédente se décompose en deux autres de cette forme $r = fs$ & $r = gs$. C'est pourquoi les deux branches de la courbe se toucheront réciproquement en M ; le rayon osculateur de l'une fera $= \frac{1}{2f}$, & celui de l'autre $= \frac{1}{2g}$. Si donc ces deux branches tournent leur concavité du même côté, la figure sera celle de deux arcs de cercle qui se touchent en dedans, & si au contraire leurs concavités sont dirigées en sens opposés, la figure sera celle de deux arcs de cercle qui se touchent extérieurement.

Pl. VII. Fig. 64.

Pl. VII. Fig. 65.

328. Mais si δ manque aussi, alors l'équation sera résoluble en deux autres, ou elle ne le fera pas. Dans le premier cas, on aura deux branches qui se touchent au point M , & dont la nature sera exprimée par une équation de cette forme $r = as^m$; on obtiendra donc autant de figures différentes qu'il y a de combinaisons de deux branches qui forment en M un point simple. Nous appellerons celles-ci *branches du premier ordre*; lesquelles sont toutes comprises dans l'équation $r = as^m$. Mais dans le second cas, où l'équation ne peut se décomposer en deux autres, la nature de la courbe sera exprimée ou par $rr = as^5$, ou par $rr = as^7$, ou par $rr = as^9$, &c. Nous appellerons ces dernières branches, avec celle trouvée ci-dessus & représentée par $rr = as^3$, *branches du second ordre*, parce qu'elles tiennent lieu de deux branches du premier ordre qui se toucheroient en M . Au surplus, toutes ces branches du second ordre auront en M un point de rebroussement, comme l'a fait voir l'équation $rr = as^3$; avec cette différence cependant que pour l'équation $rr = as^3$ le rayon osculateur étoit infiniment petit, & que pour les autres il est infiniment grand. En effet, l'équation $rr = as^5$ donnant $r = ss\sqrt{as}$, le rayon osculateur en $M = \frac{1}{2\sqrt{as}}$, c'est-à-dire qu'il est infini, à cause de $s = 0$.

Pl. VII. Fig. 63.

329. S'il arrive que trois branches se rencontrent en M , & que leurs tangentes tombent les unes sur les autres; alors ou trois branches du premier ordre se toucheront au même

point M , ou il y aura en M un point de contact d'une branche du second ordre avec une branche du premier ordre; ou enfin il n'y aura qu'une *branche du troisième ordre* qui passera par ce point. La nature des branches du troisième ordre sera exprimée par des équations de la forme suivante $r^3 = as^4$; $r^3 = as^5$; $r^3 = as^7$; $r^3 = as^8$; ou généralement par $r^3 = as^n$; n étant un nombre entier quelconque plus grand que trois & non divisible par trois. La figure de ces branches sera telle, qu'elles auront en M un point de flexion contraire, si n est un nombre impair, & qu'elles auront un cours continu sans

Fl. VII. inflexion (comme dans la *Figure 62*) si n est un nombre pair. Du reste, le rayon osculateur dans ces courbes sera infiniment petit au point M , si n est plus petite que 6, & infiniment grand, si n est plus grande que 6.

330. Semblablement, si quatre tangentes de branches qui se coupent en M coïncident, il y aura ou quatre branches du premier ordre, ou deux du premier ordre & une du second, ou deux du second, ou une du premier & une du troisième, qui se toucheront au même point M ; ou enfin il y aura *une branche unique du quatrième ordre* qui passera par M . Au reste, la nature des branches du quatrième ordre est renfermée dans cette équation générale $r^4 = as^n$, n étant un nombre entier impair plus grand que 4. On aura dans tous les cas un point de rebroussement comme dans les courbes du second ordre; & le rayon osculateur en M sera infiniment petit si n est plus petite que 8, & infiniment grand, si n est plus grande que 8.

Fl. VII. Fig. 63.

331. On développera de la même manière la nature des branches du *cinquième* ordre ou des ordres supérieurs. Quant à leur figure, les branches du cinquième, du septième, du neuvième & de tous les ordres impairs, s'accordent avec les branches du premier ordre qui présentent deux particularités, c'est-à-dire un point avec ou sans inflexion. Les branches du sixième, du huitième & de tous les ordres pairs s'accordent de leur côté avec les branches du second & du quatrième ordre; c'est-à-dire qu'elles auront toutes un point de rebroussement en M , comme le représente la *Figure 63*. Quant à la grandeur du rayon osculateur, il est aisé de voir que la nature de ces

arcs étant exprimée par cette équation $r^m = a s^n$, dans laquelle n est un nombre plus grand que m ; il sera infiniment petit, si n est plus petite que $2m$, & qu'il sera au contraire infiniment grand, si n est plus grande que $2m$.

332. Les phénomènes qui se présentent dans toute courbe, se réduisent donc à trois. Le premier a lieu lorsque la courbure de la courbe est *continue* sans inflexion ni point de rebroussement; c'est ce qui arrive toutes les fois que le rayon osculateur a partout une grandeur finie, quoiqu'il y ait aussi des cas où il peut avoir une valeur infiniment grande ou infiniment petite, sans que la continuité du cours de la courbe en soit altérée. Cela a lieu, lorsque la nature de la courbe au point M est exprimée par l'équation $a r^m = s^n$, m étant un nombre impair, & n un nombre pair plus grand que m . Le second phénomène consiste dans le *point de flexion contraire*, qui ne peut avoir lieu qu'autant que le rayon osculateur est infiniment grand ou infiniment petit. C'est ce qu'indique l'équation $a r^m = s^n$, lorsque l'un & l'autre exposant m & n sont un nombre impair, n étant toujours plus grande que m ; car le rayon osculateur sera infiniment grand, si n est plus grande que $2m$; & infiniment petit, si n est plus petite que $2m$. Le troisième phénomène est donné par le *point de rebroussement*, lorsque deux branches convexes l'une par rapport à l'autre se réunissent & se terminent en un point, se touchant réciproquement. Un tel point est désigné par l'équation $a r^m = s^n$, si m est un nombre pair & n un nombre impair. Le rayon osculateur est donc toujours infiniment petit ou infiniment grand au point de rebroussement.

333. Puisque toutes les variétés que peut présenter le cours continu d'une courbe se trouvent comprises dans les trois espèces que nous venons d'examiner, on conçoit d'abord qu'une branche de courbe continue ne peut jamais s'infléchir de manière à former en un point C un angle fini ACB ; ensuite, que, comme les deux branches qui forment un point de rebroussement se tournent l'une à l'autre leur convexité, il ne peut y avoir en C un point de rebroussement ACB , tel que des deux branches AC & BC qui ont en C une tangente commune, l'une tourne sa concavité vers la convexité de l'autre; & toutes

Pl. VII. Fig. 66.

Pl. VIII. Fig. 67.

les fois qu'il se présente un tel point, c'est une marque que la courbe n'est point complète; de sorte qu'en la complétant & l'exprimant dans toutes ses parties au moyen de l'équation qui la représente, on aura une figure telle que la donne la *Figure 64*. Il y a, à la vérité, des manières de décrire les courbes qui donnent naissance à un point *ACB* de cette nature; & que, pour cette raison, L'HOSPITAL appelle *point de rebroussement de la seconde espèce*. Mais il faut remarquer que les descriptions mécaniques ne donnent pas toujours la courbe entière exprimée par l'équation, mais souvent une certaine portion seulement; cette seule remarque semble terminer la dispute qui s'est élevée à l'occasion du point de rebroussement de la seconde espèce.

Nonobstant ces raisons, qui paroissent détruire l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce, il y a pourtant des courbes algébriques sans nombre qui présentent ces sortes de points. On peut prendre entre autres celles du quatrième ordre comprise dans l'équation $y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 + x^2 = 0$, que donne $y = \sqrt{x} \pm \sqrt{x^3}$. Car ici le signe du premier terme \sqrt{x} ne peut être douteux; il doit être nécessairement $+$. Car, si on le supposoit négatif, l'autre terme $\sqrt{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ deviendrait imaginaire. Cet exemple est propre à faire connoître l'espèce de restriction qu'il faut apporter à ce que nous venons d'avancer.

334. Si deux branches qui ont une tangente commune en *M*, & qui fournissent par conséquent quatre arcs qui partent de ce point; savoir *Mm*, *Mμ*, *Mn*, *Mν*, sont exprimées par différentes équations, il n'y aura aucun doute sur ceux de ces arcs qui sont continus; ce sont évidemment ceux qui sont compris sous la même équation; ainsi l'arc *Mm* fera la continuation de l'arc *Mn*, & *Mμ* celle de l'arc *νM*. Mais si ces deux branches sont représentées par la même équation, alors la première raison que nous avons alléguée n'existant plus, l'arc *Mm* pourra être regardé également comme la continuation de l'arc *νM* & de l'arc *nM*. Mais, puisque chacun des arcs *Mn* & *Mν* peut passer également pour la continuation de l'arc *Mm*, il s'en suit que l'un des deux pourra aussi être regardé comme

comme la continuation de l'autre. Ainsi les arcs Mm & $M\mu$ sont censés former une courbe continue, aussi bien que deux autres arcs quelconques; & dans ce cas il y aura deux points de rebroussement de la seconde espèce $mM\mu$, $nN\nu$, qui se regarderont en M .

335. Cela ne doit pas seulement s'entendre de deux branches qui, n'ayant ni point d'inflexion ni point de rebroussement, se touchent réciproquement en M , & qui sont exprimées par une même équation; mais la même raison de continuité aura lieu, quelle que soit la nature des deux branches qui se touchent mutuellement en M , pourvu qu'elles soient représentées par une équation commune. Cela arrive toutes les fois qu'on a entre r & s une équation de cette forme $\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha \mathcal{C} r^m s^n + \mathcal{C}\mathcal{C} s^{2n} = 0$; car alors chaque branche est désignée par l'équation $\alpha r^m = \mathcal{C} s^n$. Ainsi dans ce cas, des quatre arcs qui partent du point M , deux quelconques peuvent être regardés comme une ligne continue; ce qui donne lieu à une infinité de points de rebroussement de la seconde espèce. Or c'est pour cette raison que certaines descriptions ou constructions mécaniques, produisent quelquefois des singularités de cette nature; cela ne peut arriver cependant que lorsque la description ne donne pas la courbe entière comprise dans l'équation, mais seulement une ou quelques-unes de ses branches.

C H A P I T R E X V.

Des Courbes qui ont un ou plusieurs Diamètres.

336. NOUS avons vu auparavant que toutes les lignes du second ordre avoient au moins un diamètre orthogonal, qui partageoit la courbe entière en deux parties semblables & égales. La parabole, par exemple, n'a qu'un diamètre de cette espèce; elle est en conséquence composée de deux parties égales & semblables; mais l'Ellypse & l'Hyperbole en ont deux qui se coupent l'un l'autre perpendiculairement au centre: aussi ces dernières courbes offrent-elles quatre arcs ou quatre branches égales & semblables entre elles. Quant au Cercle, comme toute ligne droite menée par le centre le partage en deux parties semblables & égales, il aura une infinité de parties égales; en effet, les arcs qui sont soutendus par des cordes égales, sont en même temps égaux & semblables entre eux.

Pl. VIII. Fig. 68.

337. Nous nous proposons donc ici d'examiner la similitude de deux ou de plusieurs parties de la même courbe, & de rappeler à des équations générales ces sortes de courbes qui ont deux ou plusieurs parties égales entre elles. D'abord, considérons l'équation entre les coordonnées perpendiculaires x & y . Si, après avoir partagé l'espace entier en quatre régions désignées par les lettres Q, R, S, T, au moyen des droites AB , EF , qui se coupent perpendiculairement en C , on suppose x & y positifs, on aura la portion de la courbe située dans la région Q; si on fait x positif & y négatif, on obtiendra la portion de la courbe située en R; mais si on fait x négatif, y restant positif, cela donnera la partie de la courbe située en S; & enfin on trouvera celle située en T, en prenant négativement l'une & l'autre coordonnée y & x .

338. Les portions situées dans les régions Q & R seront donc

égales & semblables entre elles, si l'équation ne change pas en écrivant $-y$ au lieu de y . Comme toute puissance de y , dont l'exposant est pair, a cette propriété, il s'ensuit, que si l'équation de la courbe ne contient aucune puissance impaire de y , les portions situées en Q & en R seront égales & semblables entre elles; & que par conséquent la droite AB sur laquelle sont prises les abscisses $CP = x$, sera un diamètre de la courbe. Toutes les courbes de cette nature, pourvu toutefois qu'elles soient algébriques, sont donc comprises dans cette équation générale:

$$0 = a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta y^2 + \epsilon x^3 + \zeta xy^2 + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 \text{ \&c.};$$

expression qui peut être regardée comme une fonction quelconque rationnelle de x & de yy . Ainsi, lorsque Z est une fonction quelconque rationnelle de x & de yy , $Z = 0$ exprimera une ligne courbe qui sera partagée en deux parties égales & semblables par la droite AB ; les portions situées dans les régions S & T seront donc aussi égales & semblables.

339. Mais, pour que les portions situées dans les régions Q & S soient égales & semblables, il faut qu'en mettant $-x$, au lieu de x , l'équation ne change point. Par conséquent, si Z est une fonction quelconque rationnelle de xx & de y , alors l'équation $Z = 0$ exprimera une courbe que la droite EF divisera en deux parties semblables & égales. L'équation pour ces sortes de courbe sera donc de cette forme:

$$0 = a + \epsilon y + \gamma x^2 + \delta y^2 + \epsilon x^2 y + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 + \&c.$$

Dans ce cas la portion de la courbe située en S sera semblable & égale à la portion en Q ; & il en sera de même de la portion en T à l'égard de celle en R .

340. Les portions situées dans les régions opposées Q & T ou R & S seront semblables & égales, si, en faisant x & y négatifs, cette supposition n'apporte aucun changement dans l'équation donnée entre les coordonnées x & y . Soit $Z = 0$ l'équation de ces sortes de courbes; il est clair que, si Z est une fonction de dimensions paires de x & de y , ou si elle est composée d'autant

de fonctions homogènes de dimensions paires qu'on voudra, l'équation $Z=0$ jouira de la propriété susdite. De plus, si Z est un composé d'un nombre quelconque de fonctions homogènes de dimensions impaires, x & y étant pris négativement, Z se changera en $-Z$; &, comme on avoit auparavant $Z=0$, on aura aussi $-Z=0$; ce qui donnera deux équations générales pour les courbes qui ont des parties égales & semblables dans les régions opposées Q & T, & dans celles R & S. La première sera :

$$0 = a + \epsilon x^2 + \gamma xy + \delta y^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3y + nx^2y^2 + \theta xy^3 + iy^4 + ux^6 + \&c.$$

& la seconde

$$0 = ax + \epsilon y + \gamma x^3 + \delta x^2y + \epsilon xy^2 + \zeta y^3 + nx^5 + \theta x^4y + ix^3y^2 + \&c.$$

341. Il y a donc deux espèces de courbes qui ont deux parties semblables & égales; car ou ces parties sont situées de part & d'autre d'une ligne droite qui divise également en deux toutes les ordonnées qui lui sont perpendiculaires; c'est le cas où cette droite est appelée le *Diamètre orthogonal* de la courbe & auquel appartiennent les équations données art. 338 & 339; ou les deux parties semblables & égales tombent dans les régions opposées Q & R ou T & S, de manière que toute droite menée par le point C divise la courbe en deux parties alternativement égales. Telles sont les courbes comprises dans les équations de l'article précédent. Nous distinguerons cette différente situation des parties égales, en disant que celles qui appartiennent à la première espèce sont *diamétralement égales*, & que celles qui appartiennent à la seconde sont *alternativement égales*; mais, comme dans le second cas il y a un point C tel que toute droite qui y passe, & qui est prolongée de part & d'autre jusqu'à la rencontre de la courbe, se trouve partagée en deux parties égales, nous le distinguerons par le nom de *Centre*, de façon que pour désigner la différence qui caractérise les courbes dont deux parties sont alternativement ou diamétralement égales, nous dirons des premières qu'elles ont un centre, & des dernières, qu'elles ont un diamètre.

342. Puisque l'équation $Z=0$ représente les courbes dont

la droite AB est un diamètre, lorsque la coordonnée y n'a que des dimensions paires dans la fonction Z ; & que la même équation $Z = 0$ indique la droite EF pour un diamètre de la courbe, lorsque l'autre coordonnée x a par-tout des exposans pairs; il s'ensuit que, si Z est une fonction de x & de y qui ne donne pour ces variables que des exposans pairs, les droites AB & EF feront l'une & l'autre un diamètre orthogonal de la courbe; & que par conséquent les quatre parties situées dans les régions Q, R, S & T seront égales & semblables entre elles. Les courbes de cette espèce seront donc toutes comprises dans cette équation générale :

$$0 = a + \epsilon x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \epsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + \&c.$$

343. Les courbes renfermées dans cette équation auront donc deux diamètres, AB & EF qui se coupent réciproquement en C à angle droit. Ainsi ces courbes appartiennent au second, ou au quatrième, ou au sixième ordre, &c.; de sorte qu'il est impossible qu'une courbe d'un ordre impair puisse avoir deux diamètres qui se coupent l'un l'autre perpendiculairement. De plus, cette équation étant renfermée dans la première donnée art. 339, ces sortes de courbes auront en même temps un centre en C , où toute droite terminée de part & d'autre à la courbe se trouvera divisée en deux également. Les courbes de cette nature, & qui auront un double diamètre, sont donc représentées par l'équation $Z = 0$, pourvu que Z soit une fonction quelconque rationnelle de xx & de yy .

344. Étant arrivés de cette manière à la connoissance des lignes courbes qui ont deux diamètres, cherchons à présent les équations de celles qui en ont un plus grand nombre. Il est d'abord facile de faire voir que, si une courbe quelconque n'a que deux diamètres, ils doivent être perpendiculaires entre eux, de manière qu'il n'existe aucune courbe à deux diamètres qui ne soit pas comprise dans l'équation trouvée ci-dessus. En effet, supposons qu'une courbe quelconque ait deux diamètres AB & EF qui ne se coupent pas perpendiculairement en C ; puis-que EC est un diamètre, la courbe sera parfaitement semblable de chaque côté; & , puisque la partie qui est en deçà a

la droite AC pour diamètre, il est nécessaire que la partie qui est au-delà en ait un aussi GC , qui fasse au même point C avec EC un angle $GCE = ACE$. Par la même raison que GC est un diamètre, il devra y en avoir un autre IC qui fera l'angle $GCI = GCE$, & qui sera de même espèce que EC . La droite LC fera aussi un diamètre, si on prend l'angle $ICL = ICG$; & en continuant ainsi, on trouvera de nouveaux diamètres, jusqu'à ce qu'on en ait un qui tombe sur le premier AC ; ce qui arrivera toutes les fois que l'angle ACE aura un rapport rationnel à l'angle droit.

345. A moins donc que l'angle ACE n'ait un rapport rationnel à l'angle droit, le nombre des diamètres sera infini, & la courbe sera un cercle; en effet toute droite menée par le centre d'un cercle en est un diamètre orthogonal; car nous restreignons ici la dénomination de diamètre aux seuls qui sont perpendiculaires aux ordonnées, comme étant les seuls qui partagent la courbe en deux parties semblables & égales. On comprend par-là qu'aucune courbe algébrique ne peut avoir deux diamètres parallèles entre eux; car, s'il en étoit ainsi, par les raisons que nous venons d'alléguer, elle en auroit une infinité d'autres pareillement parallèles & également distans l'un de l'autre; & par conséquent il y auroit une ligne droite qui pourroit rencontrer une telle courbe en une infinité de points; propriété qui ne convient point aux courbes algébriques.

346. Ainsi, toutes les fois qu'une ligne courbe aura plusieurs diamètres, ils se couperont tous réciproquement dans un même point C , & formeront entre eux des angles égaux. Ces diamètres seront alternativement de même espèce; car le diamètre CG fera de même nature que CA , & l'équation à la courbe qui convient au diamètre CG pris pour axe, s'accordera avec l'équation à la même courbe rapportée au diamètre CA considéré comme axe. Les diamètres alternatifs CA , CG , CL , &c. feront donc également affectés à la courbe, & par la même raison, les diamètres CE , CI , &c. appartiendront semblablement à la courbe. C'est pourquoi, si le nombre des diamètres est fini, l'angle ACG fera une partie aliquote de quatre

angles droits, ou l'angle ACE fera une partie aliquote de 180 degrés, ou de la demi-circonférence que nous supposons
 $= \pi$.

347. Si l'angle $ACE = 90^\circ = \frac{1}{2} \pi$, ce sera le cas déjà Pl. VIII. Fig. 70. traité, où la courbe a deux diamètres perpendiculaires entre eux. Occupons-nous de nouveau de la recherche de ces sortes de courbes; mais employons une méthode différente de la première, & qui puisse s'appliquer également à la recherche d'un plus grand nombre de diamètres. Soit donc une courbe qui ait deux diamètres AB & EF ; prenons sur sa circonférence un point quelconque M , & ayant mené du centre C la droite CM , supposons-la $= z$; faisons en même temps l'angle $ACM = s$, & cherchons une équation entre z & s . On conçoit d'abord que la droite AC étant un diamètre, il faut que z soit une fonction de s qui reste la même, si on met $-s$ à la place de s ; car, en supposant l'angle $ACM = s$ égal à l'angle négatif ACm , la droite Cm doit être $= CM$. Or $\cos. s$ est une fonction de s qui reste la même, lorsqu'on met $-s$ au lieu de s . La condition demandée sera donc remplie, si z est une fonction quelconque rationnelle de $\cos. s$.

348. Soit l'abscisse $CP = x$ & l'appliquée $PM = y$, on aura $z = \sqrt{(xx + yy)}$, & $\cos. s = \frac{x}{z}$. Soit $Z = 0$ l'équation à la courbe, dont la droite CA est un diamètre; Z devra être une fonction rationnelle de z & de $\frac{x}{z}$, ou de z & de x ; ou enfin, pour n'avoir que des quantités rationnelles, de $xx + yy$ & de x . Mais si Z est une fonction de $xx + yy$ & de x , il sera aussi une fonction de yy & de x . Car soit $xx + yy = u$; puisque Z doit être une fonction de x & de u ; en faisant $u = t + xx$, de sorte que $t = yy$, Z deviendra une fonction de t & de x ; c'est-à-dire, de yy & de x . Toutes les fois donc que Z sera une fonction rationnelle de yy & de x , la droite CA sera un diamètre de la courbe; propriété, qui est la même que nous avons trouvé auparavant appartenir aux courbes qui n'ont qu'un diamètre.

349. Mais la courbe demandée doit en avoir deux AB &

EF ; par conséquent CB sera un diamètre de même nature que CA . C'est pourquoi, si la droite $CM = \zeta$ est rapportée au diamètre CB , à cause de l'angle $BCM = \pi - s$, il faut que ζ soit une fonction de s telle qu'elle ne subisse aucun changement, lorsqu'au lieu de s on met $\pi - s$. Une telle fonction seroit $\sin. s$, car $\sin. s = \sin. (\pi - s)$; mais on ne satisferoit pas de cette manière à la condition précédente. Il faut trouver une expression qui appartienne également aux angles s , $-s$ & $\pi - s$; tel est $\cos. 2s$; car $\cos. 2s = \cos. -2s = \cos. 2(\pi - s)$. C'est pourquoi l'équation $Z = 0$ exprimera une courbe qui aura deux diamètres AB & EF , si Z est une fonction rationnelle de ζ & de $\cos. 2s$. Or $\cos. 2s = \frac{x^2 - y^2}{\zeta^2}$. Donc Z devra être une fonction de $xx + yy$ & de $xx - yy$, ou seulement de xx & de yy , comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

Pl. VIII. Fig. 71.

350. Passons à la recherche des courbes qui auroient trois diamètres AB , EF & GH ; ces diamètres se couperont réciproquement en un même point C , si on fait les angles ACE , ECG , $GCB = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$; & si on les prend alternativement, les diamètres CA , CG , CF , seront de même nature. C'est pourquoi, si on suppose $CM = \zeta$, & l'angle $ACM = s$, à cause de $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, dans l'équation à la courbe $Z = 0$, Z devra être une fonction rationnelle de ζ & d'une certaine quantité w qui dépende tellement de s , qu'elle demeure la même, soit qu'on mette $-s$ à la place de s , soit qu'on mette $\frac{2}{3}\pi - s$. On aura donc $w = \cos. 3s$; en effet $\cos. 3s = \cos. -3s = \cos. (2\pi - 3s)$. Mais en supposant les coordonnées $CP = x$, $PM = y$, on aura $\cos. 3s = \frac{x^3 - 3xyy}{\zeta^3}$. Donc Z doit être une fonction rationnelle de $xx + yy$, & de $x^3 - 3xyy$.

351. Si donc on suppose $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, l'équation générale pour les courbes à trois diamètres sera de cette forme :

$$0 = a$$

$0 = a + \epsilon t + \gamma u + \delta t t + \epsilon t u + \zeta u u + \eta t^3 + \&c.$;
laquelle donne celle-ci, entre x & y :

$$0 = a + \epsilon (xx + yy) + \gamma x (xx - 3yy) + \delta (xx + yy)^2 + \&c.$$

Comme l'équation $0 = a + \epsilon xx + \epsilon yy$ appartient au cercle, lequel, ayant une infinité de diamètres égaux, ne peut manquer de satisfaire aussi à la question des trois diamètres; il s'ensuit que la courbe à trois diamètres la plus simple sera une ligne du troisième ordre exprimée par cette équation $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, laquelle aura trois asymptotes comprenant un triangle équilatéral, au milieu duquel est placé le point C ; & chacune de ces asymptotes sera de l'espèce $u = \frac{A}{t}$. Ces courbes appartiennent donc à la cinquième espèce, suivant l'énumération que nous en avons faite auparavant.

352. Si la courbe a quatre diamètres AB, EF, GH & IK , qui se coupent mutuellement au point C sous des angles demi-droits $= \frac{1}{4} \pi$, alors les diamètres CA, CG, CB & CH ,

Pl. VIII, Fig. 72.

seront de même nature; par conséquent, en faisant $CM = \zeta$ & l'angle $ACM = s$, on doit chercher une fonction de s qui ne change pas lorsqu'on écrit, au lieu de s , $-s$ ou $\frac{2}{4} \pi - s$. Telle est la fonction *cos. 4s*. Donc, si Z est une fonction de ζ & de *cos. 4s*; ou, ce qui revient au même, de $xx + yy$ & de $x^4 - 6xxyy + y^4$, l'équation $Z = 0$ donnera une courbe à quatre diamètres. En faisant $t = xx + yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$, on aura pour Z une fonction de t & de u ; & si on suppose $v = t - u$, Z deviendra une fonction de t & de v , c'est-à-dire, de $xx + yy$ & de xyy . On peut dire aussi que Z est une fonction de ces deux quantités $xx + yy$ & $x^4 + y^4$.

353. Pour qu'une courbe exprimée par l'équation $Z = 0$ ait cinq diamètres, il faut que Z soit une fonction de ζ & de *cos. 5s*. Par conséquent, si on suppose les coordonnées x & y perpendiculaires, à cause de *cos. 5s* $= \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{x^5}$, Z

devra être une fonction rationnelle de ces expressions $xx + yy$ & $x^3 - 10x^2yy + 5xy^3$. Ainsi la courbe la plus simple, qui, après le cercle aura cinq diamètres, est une ligne du cinquième ordre, & elle est exprimée par cette équation $x^5 - 10x^3yy + 5xy^3 = a(xx + yy)^2 + b(xx + yy) + c$. Cette courbe, à cause que tous les facteurs du premier membre sont réels, aura donc cinq asymptotes qui par leurs intersections forment un pentagone régulier, au milieu duquel est le centre C .

354. Il suit de ce qui précède, qu'en général une courbe dont l'équation est $Z = 0$, aura un nombre n de diamètres, dont les deux plus voisins comprennent un angle $= \frac{\pi}{n}$, si Z est une fonction de ζ & de $\text{cos. } n\zeta$; ou, si on a entre les coordonnées perpendiculaires une fonction quelconque rationnelle de ces expressions $xx + yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \&c.$; ou bien cette équation

$$0 = a + \beta t + \gamma u + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \theta ttu + \&c.$$

représentera une courbe à n diamètres, si on suppose $t = xx + yy$, & $u = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \&c$. On peut donc trouver des courbes qui aient autant de diamètres qu'on voudra, qui se couperont réciproquement au même point C sous des angles égaux. Et ces équations comprennent en même temps toutes les courbes algébriques, qui ont un nombre donné de diamètres.

Pl. VIII. Fig. 70.

355. Ces fortes de courbes à plusieurs diamètres ont un nombre double de parties égales & semblables entre elles. Ainsi une courbe à deux diamètres aura quatre parties égales & semblables AE, BE, AF & BF . Une courbe à trois diamètres est composée de six parties semblables & égales AE, GE, GB, FB, FH & AH ; une courbe à quatre diamètres renfermera huit parties semblables & égales $AE, AK, GE, GI, BI, BF, HF$ & HK ; & semblablement le nombre des parties égales est toujours double de celui des

Pl. VIII. Fig. 71.

Pl. VIII. Fig. 71.

diamètres. De plus, comme nous avons vu ci-dessus qu'il y avoit des courbes qui, sans avoir de diamètres, avoient deux parties semblables, il y aura de même des courbes qui seront composées d'un plus grand nombre de parties semblables & égales, & qui manqueront cependant de diamètres.

356. Commençons par un cas que nous avons déjà traité, Pl. VIII. Fig. 73. & qui est celui où deux parties égales AME , BKF , sont situées à l'opposite l'un de l'autre; car si une courbe est composée seulement de deux parties égales, il est nécessaire qu'elles soient opposées; ce qui se comprendra mieux, quand nous examinerons un plus grand nombre de parties égales. Supposons donc, comme auparavant, $CM = z$, & l'angle $ACM = s$; il est clair que la même valeur de z doit convenir aux angles s & $\pi + s$; car en faisant $ACM = \pi + s$, z deviendra $= CK$; mais on doit avoir $CK = CM$; il faut donc chercher une expression commune aux angles s & $\pi + s$; elle est $\text{tang. } s$; car on a $\text{tang. } s = \text{tang. } (\pi + s)$. L'équation $Z = 0$ représentera donc la courbe que nous cherchons, si Z est une fonction de z & de $\text{tang. } s$, ou une fonction de $xx + yy$ & de $\frac{x}{y}$. Si nous faisons $\frac{x}{y} = t$, nous aurons $xx + yy = yy(1 + t^2)$. Donc Z devra être une fonction de t & de $y^2(1 + t^2)$, c'est-à-dire, de t & de yy ; d'où résultent les mêmes équations que nous avons trouvées ci-dessus.

357. Mais, pour éviter les fractions qui entrent dans l'expression des tangentes, nous pourrions traiter la même question au moyen des sinus & des cosinus; car, puisque $\sin. 2s = \sin. 2(\pi + s)$ & $\cos. 2s = \cos. 2(\pi + s)$; on obtiendra ce qu'on cherche, si on suppose Z une fonction quelconque rationnelle de ces trois formules z , $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$, ou de $xx + yy$, $2xy$ & $xx - yy$. Remarquez à cette occasion que, si l'une des expressions $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$ manque, la courbe aura en outre un diamètre. La solution de la question revient donc à ce qu'on prenne pour Z une fonction rationnelle de xx, yy & xy ; d'où résulte l'équation de la forme suivante :

$$0 = a + \epsilon x^2 + \gamma xy + \delta y^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta xy^3 + \iota y^4 + \&c.$$

3 A a ij

& si les termes, dans lesquels x ne se trouve pas, manquent, toute l'équation sera divisible par x , & deviendra :

$$0 = \epsilon x + \gamma y + \epsilon x^3 + \zeta xxy + nxyy + \theta y^3 + \kappa x^3 + \&c;$$

ce qui redonne les deux équations que nous avons trouvées ci-dessus.

Pl. VIII, Fig. 74.

358. Cherchons maintenant une courbe qui contienne seulement trois parties semblables & égales AM , BN & DL . Il faudra donc qu'après avoir mené du milieu C trois droites, CM , CN & CL sous des angles égaux, ces lignes soient toujours égales entre elles. Ainsi, l'angle ACM étant supposé $= s$, & la droite $CM = z$, la droite z devra être exprimée par s , de manière que la même valeur de z convienne aux trois angles s , $\frac{2}{3}\pi + s$ & $\frac{4}{3}\pi + s$; car on a $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Or les expressions communes à ces trois angles sont $\sin. 3s$ & $\cos. 3s$. C'est pourquoi, si Z est une fonction rationnelle de ces trois quantités $xx + yy$, $3xxy - y^3$ & $x^3 - 3xyy$, l'équation $Z = 0$ donnera toutes les courbes demandées. L'équation générale sera donc :

$$0 = a + \epsilon(xx + yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \epsilon(xx + yy)^2 + \zeta(xx + yy)(3xxy - y^3) + n(xx + yy)(x^3 - 3xyy) + \&c.$$

Ainsi les lignes du troisième ordre qui jouiront de cette propriété sont comprises dans cette équation :

$$0 = a + \epsilon xx + \epsilon yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3.$$

Pl. VIII, Fig. 73:

359. Si la courbe doit avoir quatre parties égales AM , EN , BK & FL , de manière que quatre droites quelconques CM , CN , CK & CL , menées du milieu C , forment entre elles des angles égaux & soient toutes égales; en faisant l'angle $ACM = s$ & la droite $CM = z$; à cause des angles $MCN = NCK = KCL = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, l'expression de z par l'angle s doit être telle qu'une même valeur réponde à ces angles

$s, \frac{1}{2}\pi + s, \pi + s, \frac{3}{2}\pi + s$. Or cette propriété appartient aux expressions *sin.* $4s$ & *cos.* $4s$. Donc l'équation $Z = 0$ donnera une courbe composée de quatre parties égales, si Z est une fonction quelconque rationnelle de ces trois quantités $xx + yy, 4x^2y - 4xy^2$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Conséquemment l'expression générale pour ces sortes de courbes sera :

$$0 = a + \epsilon x^2 + \zeta y^2 + \gamma x^4 + \delta x^2y + \epsilon x^2y^2 - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. On voit semblablement que, si on avoit à chercher une courbe sans diamètres, mais qui eût cependant cinq parties égales & semblables, il faudroit que dans l'équation $Z = 0$, Z fût une fonction rationnelle de ces trois quantités $xx + yy, 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$ & $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$; & si le nombre des parties égales doit être $= n$, alors Z doit être une fonction rationnelle de ces trois quantités $xx + yy,$

$$nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1. 2. 3} x^{n-3}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1. 2. 3. 4. 5} x^{n-5}y^5 - \&c.$$

&

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1. 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. 2. 3. 4} x^{n-4}y^4 - \&c.$$

Et si l'une ou l'autre des deux dernières expressions n'entre pas dans l'équation, la courbe aura autant de diamètres que le nombre n contient d'unités.

361. La double énumération que nous venons de faire des courbes à diamètres ou sans diamètres qui sont composées de quelques parties égales, comprend généralement toutes les courbes algébriques qui ont deux ou plusieurs parties égales & semblables. Pour le faire voir, supposons une courbe continue qui ait les deux parties $O A a, O B b$, semblables & égales entre elles. Menons AB , & sur cette ligne comme base construisons un triangle isocèle ACB , dont l'angle C soit égal à l'angle O . Puisque les angles OAC & OBC sont égaux, les parties de la courbe CAa & CBb seront aussi semblables & égales; &, à cause de la loi de continuité, si on prend les

angles BCD , DCE , &c., égaux chacun à l'angle ACB , & $CD = CE = CA = CB$, la courbe aura en outre les parties Dd , Ee , &c., semblables & égales aux parties Aa , Bb . A moins donc que le rapport de l'angle ACB à 360° ne soit irrationnel, le nombre des parties égales sera fini, & dans le cas contraire, il sera infini; & par conséquent la courbe ne sera plus comptée parmi les courbes algébriques. La courbe dont il est question, est donc renfermée dans celles que nous avons cherchées auparavant, & qui n'avoient point de diamètres.

Pl. VIII. Fig. 76. 362. Mais si les deux parties semblables & égales tombent en sens contraire par rapport aux droites AO & BO , de sorte que la partie AO soit semblable & égale à la partie OBb ; en menant de part & d'autre les droites AR & BS qui fassent l'angle $OAR = OBS = \frac{1}{2} AOB$; les lignes AR & BS seront parallèles entre elles. Joignons AB , & par le milieu C menons CV parallèlement à AR & à BS ; les parties aA , bB , seront semblables & égales à l'égard de la droite CV ; ainsi, à moins que ba ne soit $= 0$, comme en allant de b vers a , il répond de l'autre côté un arc aA semblable & égal à l'arc bB ; semblablement, en parcourant de a en e un espace $ae = ba$, il répondra au premier de l'autre part un arc semblable & égal eE ; & à celui-ci un arc dD ; de sorte que la courbe aura une infinité de parties semblables & égales situées de part & d'autre de la droite CV ; & par conséquent cette courbe ne peut être algébrique.

363. Cela a lieu, si la droite AB est inclinée aux parallèles AR & BS ; ou, ce qui revient au même, si dans le triangle AOB les côtés AO & BO sont inégaux. Mais si $AO = BO$, alors la droite AB sera perpendiculaire aux parallèles AR & BS , & à CV qui passera en même temps par le point O . Dans ce cas les points b & a se confondront; & parce que les portions aA & bB ne seront pas seulement égales & semblables, mais encore placées de la même manière de chaque côté de la droite CV , il s'ensuit que cette dernière ligne CV fera un diamètre de la courbe; ces cas appartiennent aux

courbes que nous avons examinées auparavant, & qui avoient un diamètre. Par conséquent, on peut rapporter aux différens cas que nous avons exposés dans ce chapitre, toutes les courbes algébriques qui ont deux ou plusieurs parties semblables & égales.

C H A P I T R E X V I.

De la Manière de trouver les Courbes par la connoissance de quelques Propriétés des Appliquées.

364. Soient P & Q des fonctions quelconques rationnelles de l'abscisse x , & supposons que la nature de la courbe soit exprimée par cette équation $yy - Py + Q = 0$. Il n'y aura donc point d'appliquée qui réponde à une abscisse, ou il y en aura deux; or la somme de ces deux appliquées $= P$, & leur produit $= Q$. Donc, si P est une quantité constante, la somme des deux appliquées correspondantes à chaque abscisse sera constante, & la courbe aura un diamètre. La même chose a lieu, lorsque $P = a + nx$; car alors la ligne droite comprise dans l'équation $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nx$ sera aussi un diamètre, en prenant ce mot dans un sens plus étendu qui n'exclud plus l'obliquité des coordonnées entre elles. Mais, si Q est une quantité constante, le rectangle des appliquées sera par-tout constant; l'axe ne pourra donc être rencontré nulle part par la courbe. Mais, si $Q = a + \epsilon x + \gamma xx$ & que cette expression renferme deux facteurs réels, l'axe coupera la courbe en deux points, & Q sera un multiple d'un rectangle formé par des parties de l'axe; & par conséquent le rectangle des appliquées sera à celui des parties de l'axe dans un rapport constant.

365. Ainsi ces propriétés, qui, comme nous l'avons observé auparavant, conviennent aux Sections Coniques, s'appliquent à une infinité d'autres courbes. Par exemple, cette propriété

que nous avons vu appartenir à l'Hyperbole rapportée à ses asymptotes, & qui consiste dans la grandeur constante du rectangle des deux appliquées qui répondent à la même abscisse, lui est commune avec toutes les courbes renfermées dans l'équation $yy - Py \pm aa = 0$. De plus, en prenant pour axe la droite EF qui coupe la courbe en deux points E & F , la propriété des Sections Coniques par laquelle le rectangle $PM.PN$ conserve un rapport constant avec celui de $PE.PF$, conviendra de même à toutes les courbes comprises dans cette équation $yy - Py + ax - nxx = 0$; & on aura $PM.PN = PE.PF$, ou $pm.pn = E.p.p.F$, si $yy - Py = ax - xx$. Cette propriété qu'on fait par les élémens convenir au Cercle, ne lui est donc pas seulement commune avec une infinité de courbes d'ordres supérieurs, mais s'applique encore aux autres Sections Coniques. En effet, soit $P = b + nx$, & l'équation $yy - nxy + xx = ax + by$, laquelle appartient au Cercle, lorsque $n = 0$, & que l'angle EPM est droit, comprendra aussi l'Ellypse, si nn est moindre que 4; l'Hyperbole, si nn est plus grande que 4, & la Parabole, si $nn = 4$.

Pl. II. Fig. 19.

Pl. VIII. Fig. 77: 366. Nous concluons de là que dans toute section conique AE, BE , dont les axes ou les diamètres principaux soient AB, EF , si on mène deux droites quelconques pq & mn qui forment avec les axes un angle demi-droit; elles se couperont réciproquement en h , de sorte que $mh.nh = ph.qh$; ce qui est une suite manifeste des premières propriétés connues. En effet, si on mène par le centre C les droites PQ & MN qui font des angles demi-droits avec les axes principaux, elles seront égales entre elles; & par conséquent $MC.NC = PC.QC$; & comme toutes les droites qui leur sont parallèles se coupent suivant la même loi, on aura aussi par cette raison $mh.nh = ph.qh$. On conçoit encore par là que, si les droites MN & PQ sont également inclinées au même axe principal, ou qu'on ait $PCA = NCA$; à cause de $CP = CN$, toutes les droites qui leur sont parallèles, se couperont réciproquement de manière que les rectangles des parties soient égaux, c'est-à-dire que $mh.hn = ph.hq$.

367. Cela posé, passons à d'autres questions relatives aux deux

deux appliquées qui répondent à chaque abscisse dans l'équation $yy - Py + Q = 0$. Soit l'abscisse $AP = x$, à laquelle répondent deux appliquées PM, PN . Cherchons d'abord toutes les courbes qui aient cette propriété que $PM^2 + PN^2$ soit une quantité constante $= aa$. Puisque $PM + PN = P$, & $PM \cdot PN = Q$, on aura $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & on satisfera à la question, si $PP - 2Q = aa$, ou $Q = \frac{PP - aa}{2}$; ce qui donnera pour les courbes demandées l'équation

Pl. VIII. Fig. 78.

$yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Si on fait $P = 2nx$, on aura une section conique qui jouira de la propriété dont il est question, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$; équation à l'Ellypse dans laquelle les abscisses sont comptées du centre.

368. On conclut de là une propriété assez belle des Ellypses. Si on décrit autour de deux diamètres quelconques conjugués AB & EF d'une Ellypse un parallélogramme $GHIK$, dont les côtés touchent l'Ellypse aux points A, B, E, F , les diagonales GK & HI de ce parallélogramme couperont en P & p toutes les cordes MN parallèles à l'un des deux diamètres EF , de manière que la somme des quarrés $PM^2 + PN^2$ ou $pM^2 + pN^2$ soit toujours constante & égale à $2CE^2$. De même, ayant mené la corde RS parallèlement à l'autre diamètre AB , on aura $PR^2 + PS^2 = \pi R^2 + \pi S^2 = 2CA^2$. Car, en faisant $CA = CB = a, CE = CF = b, CQ = t, QM = u$, on aura $aa u + bb t = aabb$. Mais $a : b :: CQ (t) : PQ$, & CP est à CQ dans un rapport donné, de $m : 1$, par exemple. Ainsi, en supposant $CP = x, PM = y$, on aura $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, ou $t = \frac{x}{m}$ & $u = y - \frac{bx}{ma}$. Ces valeurs substituées donneront l'équation $aa y y - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Soit $\frac{b}{ma} = n$, elle deviendra $yy - 2nxy + 2n^2x^2 = bb$; ce qui donne l'équation trouvée ci-dessus, qui indiquoit que $PM^2 + PN^2$ étoit une quantité constante.

Pl. IX. Fig. 79.

369. Cherchons à présent les courbes dans lesquelles la

Pl. VIII. Fig. -8.

somme des cubes $PM^3 + PN^3$ doit être toujours une quantité constante. Puisque $PM + PN = P$, on aura $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$; c'est pourquoy, si on suppose $PM^3 + PN^3 = a^3$, on aura $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$; & par conséquent l'équation générale de ces sortes de courbes sera $yy - Py + \frac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, dans laquelle on peut prendre pour P une fonction quelconque rationnelle de x . La courbe la plus simple qui aura cette propriété, sera donc une ligne du troisième ordre, qui, en supposant $P = 3nx$ & $a = 3nb$, sera exprimée par cette équation :

$$xyy - 3nxxxy + 3nnx^3 - 3n nb^3 = 0,$$

laquelle appartient à la seconde espèce, suivant l'énumération qui en a été faite ci-dessus.

370. Semblablement, si on vouloit que $PM^4 + PN^4$ fût une quantité constante; comme $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, la quantité Q devrait être déterminée par P , de manière que $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ ou $Q = P^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$. Mais, parce que P & Q doivent être l'un & l'autre des fonctions rationnelles ou uniformes de x , pour que y ne puisse avoir plus de deux valeurs pour chaque abscisse x , la quantité $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$ devrait être rationnelle; & comme cela ne peut être, la fonction Q sera toujours biforme, & fera par conséquent de l'appliquée y une fonction quadriforme. Mais l'équation $yy - Py + Q = 0$ donne $y = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}PP \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}\right)}$; d'où il suit que l'appliquée y ne peut être réelle, à moins qu'on ne prenne positivement $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$. Ainsi, quoique la fonction Q soit biforme, l'appliquée y n'aura jamais plus de deux valeurs, dont les carrés ajoutés fassent une somme constante, comme l'exige l'état de la question.

371. Mais, si on cherche une courbe telle que les puis-

fances cinquièmes des deux valeurs de y , qui répondent à chaque abscisse x , fassent une somme constante, ou que $PM^5 + PN^5 = a^5$; on devra avoir $P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 = a^5$. Puis donc que l'équation à la courbe $yy - Py + Q = 0$ donne $Q = -yy + Py$, on aura $P^5 - 5P^3y + 10P^2yy - 10P^2y^3 + 5Py^4 = a^5$, ou $(P - y)^5 + y^5 = a^5$. On trouvera de même, si $PM^6 + PN^6$ doit être $= a^6$, cette équation $(P - y)^6 + y^6 = a^6$; & en général, si on cherche la courbe dans laquelle $PM^n + PN^n = a^n$, on obtiendra cette équation $(P - y)^n + y^n = a^n$, où l'on peut prendre à volonté pour P une fonction quelconque uniforme de x . La raison en est facile à saisir; car, puisque la somme des deux appliquées $= P$, si l'une est y , l'autre sera $P - y$; ce qui donne sur-le-champ $(P - y)^n + y^n = a^n$.

372. Si au lieu de Q on élimine P , en mettant dans les équations qui expriment la relation entre P & Q , $P = \frac{yy + Q}{y}$, on aura pour $PM^n + PN^n = a^n$ cette équation $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$. Car, le produit des appliquées étant $= Q$, si l'une est supposée $= y$, l'autre sera $= \frac{Q}{y}$; d'où résulte sur-le-champ l'équation trouvée. Ainsi nous avons obtenu pour les courbes dans lesquelles $PM^n + PN^n = a^n$, deux équations générales, l'une $(P - y)^n + y^n = a^n$; l'autre $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$. On conclut de la dernière $y^{2n} = a^n y^n - Q^n$ & $y^n = \frac{1}{2} a^n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n\right)}$, d'où l'on tire $y = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} a^n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n\right)}\right)}$; fonction biforme seulement, & qui ne donne pas plus de deux appliquées pour chaque abscisse, pourvu que Q^n soit une fonction rationnelle ou uniforme de x . Mais la première équation $y^n + (P - y)^n = a^n$ a l'avantage d'avoir un nombre de dimensions moindre.

373. Ces équations ne résolvent pas seulement la question où n est un nombre entier positif, mais encore celles où n est un nombre soit négatif, soit fractionnaire. Ainsi.

si on doit avoir

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$$

on aura cette équation

$$aP = Py - yy$$

ou

$$aQ + ayy = Qy$$

$$\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^2y^2 + a^2(P-y) = y^2(P-y)^2$$

ou

$$a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$$

$$\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$$

$$a^3y^3 + a^3(P-y)^3 = y^3(P-y)^3$$

ou

$$a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^3$$

&c.

Quant aux exposans fractionnaires, les choses se passeront comme il suit :

si on doit avoir

$$\sqrt{PM} + \sqrt{PN} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{y} + \sqrt{(P-y)} = \sqrt{a}, \text{ ou celle-ci } y = \sqrt{ay} - \sqrt{Q}$$

lesquelles, rendues rationnelles, deviennent

$$y^2 - Py + \frac{1}{4}(a-P)^2 = 0, \text{ ou } y^2 - (a - 2\sqrt{Q})y + Q = 0$$

$$\sqrt[3]{PM} + \sqrt[3]{PN} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{(P-y)} = \sqrt[3]{a}, \text{ ou } y^2 - Py + \frac{1}{27a}(a-P)^3 = 0$$

ou bien

$$\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{\frac{Q}{y}} = \sqrt[3]{a}, \text{ ou } y^2 - (a - 3\sqrt[3]{aQ})y + Q = 0$$

&c.

Toutes les courbes algébriques dans lesquelles on a par-tout

$PM^n + PN^n = a^n$, peuvent donc être renfermées de cette manière dans une seule équation générale, soit qu'on suppose n un nombre entier positif, soit qu'on la suppose un nombre négatif ou fractionnaire.

374. Ce que nous venons d'exposer ici de la condition de deux appliquées qui répondent à une même abscisse x , on peut, en suivant la même méthode, l'appliquer à trois appliquées qui répondroient à chaque abscisse. L'équation générale pour les courbes que chaque appliquée coupe en trois points, est celle-ci :

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0,$$

les lettres P , Q & R désignant des fonctions quelconques uniformes de x . Soient p , q , r , les trois appliquées qui répondent à l'abscisse x , dont l'une à la vérité est toujours réelle; mais nous avons ici principalement égard aux endroits de la courbe où toutes les trois appliquées font réelles. On aura par la nature des équations $P = p + q + r$, $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$; par conséquent, si on desire une courbe dans laquelle ou $p + q + r$, ou $pq + pr + qr$, ou pqr , soit une quantité constante; il n'y aura rien autre chose à faire qu'à équaler à une constante ou P , ou Q , ou R ; les deux autres restant arbitraires.

375. On pourra donc trouver aussi les courbes dans lesquelles $p^n + q^n + r^n$ est par-tout une quantité constante; car on a, comme on l'a vu dans le premier livre,

$$p + q + r = P$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$$

$$p^3 + q^3 + r^3 = P^3 - 3PQ + 3R$$

$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$$

$$p^5 + q^5 + r^5 = P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR$$

&c.

Ensuite, si n est un nombre négatif, en faisant $\xi = \frac{1}{y}$, on aura

$z^3 - \frac{Qz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$, dont les trois racines sont $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$. On aura donc pareillement

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \frac{Q}{R} \\ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{Q^2 - 2PR}{R^2} \\ \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} &= \frac{Q^3 - 3PQR + 3R^2}{R^3} \\ \frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} &= \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4}, \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Une expression de cette forme, égalée à une quantité constante, donnera donc la relation convenable entre les fonctions P , Q & R . Et si, au moyen de cette dernière équation, on élimine de celle-ci $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ l'une des fonctions P , Q ou R , on obtiendra l'équation pour la courbe cherchée. Ainsi, lorsqu'on demande une courbe dans laquelle $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$, on fera $P^3 - 3PQ + 3R = a^3$; &c., à cause de $R = y^3 - Py^2 + Qy$, on aura cette équation $3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$ pour les courbes qui satisfont à la question.

376. On voit que, si n est un nombre entier positif ou négatif, la solution s'obtiendra facilement par les formules que nous venons de donner; mais il se présente une plus grande difficulté lorsque n est un nombre fractionnaire. Proposons-nous de trouver une courbe dans laquelle on ait $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$; nous prendrons de part & d'autre les carrés; &c., à cause de $p + q + r = P$, nous aurons $P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$, ou $\frac{a-P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}$. Elevant de nouveau les deux membres au carré, &c. considérant que $pq + pr + qr = Q$, nous aurons $\frac{(1-P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} = Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$; d'où naît l'équation $(a-P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}$,

ou $Q = \frac{(a-P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}$. Les courbes cherchées feront

donc contenues dans cette équation $y^3 - Pyy + \left(\frac{1}{4}(a-P)^2 - 2\sqrt{aR}\right)y - R = 0$; ou (en faisant disparaître l'irrationalité, à cause de $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$), dans celle-ci

$$y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0.$$

377. Mais cette opération devient trop pénible, lorsqu'on propose les racines de puissances plus élevées; il faudra donc prendre une autre voie, que l'exemple suivant est très-propre à faire connoître. A cet effet, cherchons la courbe dans laquelle $\sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} = \sqrt[5]{a}$. Soit $\sqrt[5]{pq} + \sqrt[5]{pr} + \sqrt[5]{qr} = v$; à cause que $\sqrt[5]{pqr} = \sqrt[5]{R}$, on aura $\sqrt[5]{p^2} + \sqrt[5]{q^2} + \sqrt[5]{r^2} = \sqrt[5]{a^2} - 2v$; & $p + q + r = a - 3v\sqrt[5]{a} + 3\sqrt[5]{R} = P$. Ensuite, $\sqrt[5]{p^2q^2} + \sqrt[5]{p^2r^2} + \sqrt[5]{q^2r^2} = v^2 - 2\sqrt[5]{aR}$, & $pq + pr + qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[5]{aR} + 3\sqrt[5]{RR}$. Après avoir trouvé pour P & pour Q des valeurs convenables, prenant pour v une fonction quelconque de x , on obtiendra pour les courbes, dont il s'agit, cette équation :

$$y^3 - (a - 3v\sqrt[5]{a} + 3\sqrt[5]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[5]{aR} + 3\sqrt[5]{R^2})y - R = 0.$$

378. Cependant, malgré ces difficultés, on pourra arriver à une solution générale. Car, puisque dans l'équation $y^3 - Pyy + Qy - R = 0$, y désigne ces trois appliquées p, q & r ; en faisant $p = y$, on aura $P = y + q + r$, & $Q = qy + ry + qr$, ou $q + r = P - y$ & $qr = Q - y(q + r) = Q - Py + yy$. D'où l'on tire $q - r = \sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$: & par conséquent

$$q = \frac{1}{2}(P - y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$$

&

$$r = \frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}.$$

Ainsi, lorsqu'on cherche une courbe dans laquelle $p^n + q^n + r^n = a^n$, l'équation suivante satisfera à la question :

$$y^n + \left(\frac{1}{2}(P - y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n + \left(\frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n = a^n.$$

Remarquez que cette équation résoud également la question, soit qu'on prenne pour n un nombre entier, soit qu'on prenne un nombre fractionnaire.

379. On peut par la même méthode résoudre une infinité d'autres questions relatives à la condition de ces trois appliquées; on peut, par exemple, prendre pour a^n une fonction quelconque de x ; outre la somme de puissances quelconques, on peut aussi se proposer d'autres fonctions de p , q & r , pourvu que la permutation réciproque de ces quantités ne change rien dans l'expression. Ainsi, on pourra trouver trois appliquées p , q & r , correspondantes à la même abscisse x , qui forment un triangle dont l'aire soit constante. Car la surface de ce triangle $= \frac{1}{4}\sqrt{(2p^2q^2 + 2p^2r^2 + 2q^2r^2 - p^4 - q^4 - r^4)}$; nous la supposons $= a a$. Puisque $p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$; on aura $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}$; & par conséquent l'équation $y^3 - Pyy + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si P est une quantité constante $= 2b$, le périmètre de tous ces triangles sera de plus constant. Par conséquent, si on suppose $Q = mxx + nbx + kaa$, on aura une ligne du troisième ordre exprimée par cette équation $y^3 + mxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaa - nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0$. Telle sera la propriété de cette courbe, que la somme des trois appliquées p , q & r , qui répondent à chaque abscisse, sera d'abord une quantité constante $= 2b$; & que de plus l'aire du triangle, formé par les trois côtés p , q & r , sera toujours la même & $= aa$.

380. On peut, moyennant la même méthode, résoudre des questions semblables à l'égard de quatre appliquées ou davantage, qui répondroient à la même abscisse. Comme cette matière

ne

ne présente plus aucune difficulté, passons à d'autres questions, où il ne s'agira pas de comparer des appliquées qui répondent au même, mais à différents points. Soit proposée à cet effet une certaine relation entre les appliquées PM & QN , dont l'une réponde à l'abscisse $AP = +x$, & l'autre à l'abscisse $AQ = -x$. Soit $y = X$ l'équation à cette courbe, X étant une fonction quelconque de x qui donne l'appliquée PM ; & qui, en mettant par-tout $-x$ au lieu de x , donnera l'autre appliquée QN . Conséquemment, si X étoit une fonction paire de $x = P$, QN seroit $= PM$; mais, si X est une fonction impaire de $x = Q$, on aura $QN = -PM$; & si P & R désignent des fonctions paires de x , tandis que Q & S en désignent des fonctions impaires, & que l'équation à la courbe soit $y = \frac{P+Q}{R+S}$, on aura $PM = \frac{P+Q}{R+S}$ & $QN = \frac{P-Q}{R-S}$.

381. Qu'on ait à trouver une courbe dans laquelle $PM + QN$ soit une quantité constante $= 2AB$, par exemp. $= 2a$; il est clair que l'équation $y = a + Q$ satisfait à cette question, Q étant une fonction impaire de x ; car on aura $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$; & par conséquent $PM + QN = 2a$, ainsi qu'il est requis. Donc, si on fait $y - a = u$, on aura $u = Q$, équation à la même courbe; la droite Bp étant prise pour axe & le point B pour l'origine x des abscisses, de façon que $Bp = x$ & $pM = u$. Or l'équation $u = Q$ apprend que la courbe est composée de parties égales disposées de part & d'autre autour du centre B . Ayant donc décrit une courbe quelconque MBN de cette nature, & pris pour axe une droite quelconque PQ , on aura satisfait à la question, de sorte qu'en abaissant du centre B sur cet axe une perpendiculaire BA , & prenant de part & d'autre des abscisses égales $AP = AQ$, on aura toujours pour $PM + PQ$ une somme constante $= 2AB$.

382. Or nous avons trouvé ci-dessus pour les courbes qui ont deux parties égales disposées alternativement autour du centre C , deux sortes d'équations entre les coordonnées x & u , savoir :

I.

$$0 = ux + \epsilon u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \epsilon x u^2 + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

I I.

$$0 = a + \epsilon x^2 + \gamma x u + \delta u^2 + \epsilon x^3 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta x u^3 + \&c.$$

Par conséquent, si dans chacune de ces expressions on suppose $u = y - a$, on aura deux équations générales entre les coordonnées x & y pour les courbes algébriques, qui satisfont à la question proposée. D'abord toute ligne droite menée par le point B satisfait; ensuite toute section conique qui aura son centre au point B donnera aussi une solution. Mais, comme dans ce dernier cas il répond une double appliquée à chaque abscisse AP & AQ (à moins pourtant que la courbe ne soit une hyperbole, & que les appliquées ne soient parallèles à l'autre asymptote) on aura quatre appliquées qui formeront deux à deux une même somme.

383. Si on cherche une courbe MBN dans laquelle ce ne soit pas la somme de deux appliquées PM & QN , mais celle de leurs puissances quelconques qui doit être constante; on s'y prendra d'une manière semblable pour résoudre la question. En effet, si on doit avoir $PM^m + QN^n = 2a^n$; il est clair que la condition est remplie par l'équation $y^n = a^n + Q$, Q étant une fonction quelconque impaire de x ; car on aura $PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$; & par conséquent $PM^n + QN^n = 2a^n$. Soit $y^n - a^n = u$, l'équation résultante $u = Q$ exprimera une courbe dont les coordonnées x & u formeront deux parties égales placées alternativement autour du centre B . C'est pourquoi, si dans les équations de l'article précédent on écrit partout, au lieu de u , $y^n - a^n$, on obtiendra les équations générales qui satisfont à la question.

384. Ces sortes de questions ne présentant point de difficulté, soit proposée celle-ci où l'on demande une courbe MBN , dans laquelle, prenant sur l'axe de part & d'autre

d'un point fixe A des absciffes égales AP, AQ , le rectangle des appliquées $PM. QN$ ait toujours une valeur constante $= aa$. On peut donner de cette question plusieurs solutions particulières, dont nous développerons les principales avant que de nous occuper de la solution générale. Soit P une fonction paire & Q une fonction impaire de l'absciffe $AP = x$, & supposons l'appliquée $PM = y = P + Q$, nous en tirerons, en faisant x négatif, $QN = P - Q$. Il faut donc que $PM \times QN = PP - QQ = aa$, ou $P = \sqrt{aa + QQ}$; cette expression $\sqrt{aa + QQ}$, à cause que QQ est une fonction paire de x , est elle-même une fonction paire, & donne pour P une valeur convenable. On aura donc pour la courbe demandée cette équation $y = Q + \sqrt{aa + QQ}$, en prenant pour Q une fonction quelconque impaire de x .

385. Mais, à cause de l'ambiguïté du signe radical, il y aura deux appliquées, l'une positive, l'autre négative, qui répondront à chaque absciffe x ; ainsi à l'absciffe AP répondront les appliquées $Q + \sqrt{aa + QQ}$ & $Q - \sqrt{aa + QQ}$, tandis qu'à l'absciffe AQ répondront les appliquées $-Q + \sqrt{aa + QQ}$ & $-Q - \sqrt{aa + QQ}$; d'où il suit que la courbe aura des parties alternativement égales, situées autour du point A comme centre; & il est à remarquer qu'on ne peut ici faire disparaître l'ambiguïté du signe, en prenant pour Q une fonction impaire, telle que $\frac{aa}{4x} - x$, par laquelle $a^2 + Q^2$ devienne un carré; car $\sqrt{aa + QQ}$ deviendrait $= \frac{aa}{4x} + x$; ce qui donneroit une fonction impaire qui ne pourroit plus être substituée à P . On doit donc prendre pour Q une fonction impaire de x , telle que $aa + QQ$ ne devienne pas un carré.

386. Semblablement, si on fait $y = (P + Q)^n$, QN deviendra $= (P - Q)^n$; & conséquemment on devra avoir $(P^2 - Q^2)^n = aa$; on tirera de là $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^2$, & $P = \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2}$; quantité qui peut être prise pour P , pourvu qu'elle soit irrationnelle. Ainsi on aura, pour satisfaire à la

question, cette équation $y = (Q + \sqrt{a^2 + Q^2})^n$. Au reste, la construction de ces courbes sera facile; il n'y aura qu'à décrire une courbe quelconque qui ait deux parties semblables & égales placées alternativement autour du centre A , & faire ζ l'appliquée correspondante à l'abscisse $AP = x$; ζ sera une fonction impaire de x , qui par conséquent pourra être mise à la place de Q . Mais l'équation qui vient d'être trouvée donne $y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{a^2 + Q^2}$, & partant $Q = \zeta = \frac{y^{\frac{1}{n}} - a^2}{2 y^{\frac{1}{n}}}$; donc, si on suppose $\frac{1}{n} = m$, & si dans l'équation

donnée entre ζ & x on fait par-tout $\zeta = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2 y^m}$, on obtiendra entre x & y l'équation qui convient à la courbe demandée. Ayant donc trouvé deux équations entre ζ & x , savoir :

$$0 = a + \epsilon x^2 + \gamma x \zeta + \delta \zeta^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 \zeta + \eta x^2 \zeta^2 + \theta x \zeta^3 + \&c.$$

ou

$$0 = ax + \epsilon \zeta + \gamma x^3 + \delta x^2 \zeta + \epsilon x \zeta^2 + \zeta \zeta^3 + \eta x^5 + \theta x^4 \zeta + \&c.$$

il ne s'agit plus que de faire dans ces équations $\zeta = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ (nous négligeons le diviseur 2, parce qu'on peut prendre pour Q un multiple quelconque de ζ), pour avoir les deux équations générales des courbes qui satisfont à la question.

387. Si, outre P , R est une fonction paire, que Q & S soient à la fois des fonctions impaires de x , & qu'on prenne pour les courbes cherchées cette équation $y = \frac{P+Q}{R+S} = PM$; on aura $QN = \frac{P-Q}{R-S}$ & $\frac{PP-QQ}{RR-SS} = aa$; condition à laquelle il est très-facile de satisfaire, en supposant $y = \frac{P+Q}{P-Q} a$, ou même $y = \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n a$. On évite de cette manière le premier inconvénient où deux appliquées, ou davantage, répondoient à chaque abscisse, & l'on trouve à présent des courbes

qui pour chaque abscisse donnent seulement une seule appliquée. Ainsi la courbe la plus simple qui satisfera, fera une ligne du second ordre exprimée par cette équation $y = \frac{b+x}{b-x}a$, c'est-à-dire, une hyperbole. Mais l'hyperbole satisfait aussi à l'équation trouvée auparavant $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, en faisant $Q = nx$; car on aura $yy - 2nxy = aa$. On peut donc résoudre le problème de deux manières par le moyen de l'Hyperbole.

388. Ces préliminaires posés, il est clair que l'équation à la courbe cherchée doit être telle, qu'en mettant $-x$ au lieu de x & $\frac{a^2}{y}$ au lieu de y , elle ne subisse aucun changement. Ces

sortes de formules sont $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$ & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$; pourvu à la vérité que P désigne une fonction paire & Q une fonction impaire de x . Donc, si on forme une équation composée d'autant de ces sortes de formules qu'on voudra, elle appartiendra à la courbe qui doit satisfaire à la question proposée. Donc, si $M, P, R, T, \&c.$, représentent des fonctions quelconques paires de x ; & $N, Q, S, V, \&c.$, des fonctions impaires, on aura l'équation générale qui suit:

$$0 = M + \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y}\right)P + \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{y^2}\right)R + \left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3}\right)T \&c.$$

$$+ \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right)Q + \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{y^2}\right)S + \left(\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3}\right)V \&c.$$

Si on la multiplie par une fonction impaire de x , les fonctions paires se changeront en impaires, & réciproquement; d'où résulte l'équation suivante qui satisfera de même à la question.

$$0 = N + \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y}\right)Q + \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{y^2}\right)S + \left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3}\right)V \&c.$$

$$+ \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right)P + \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{y^2}\right)R + \left(\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3}\right)T \&c.$$

Ces formules délivrées de fractions donneront les deux équations rationnelles de l'ordre indéfini n .

I.

$$\begin{aligned} 0 &= a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1} (P+Q) + a^{n-2} y^{n+2} (R+S) + a^{n-3} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &+ a^{n+1} y^{n-1} (P-Q) + a^{n+2} y^{n-2} (R-S) + a^{n+3} y^{n-3} (T-V) \&c. \end{aligned}$$

I I.

$$\begin{aligned} 0 &= a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1} (P+Q) + a^{n-2} y^{n+2} (R+S) + a^{n-3} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &- a^{n+1} y^{n-1} (P-Q) - a^{n+2} y^{n-2} (R-S) - a^{n+3} y^{n-3} (T-V) \&c. \end{aligned}$$

389. Mais on peut aussi prendre pour n des nombres fractionnaires dans les formules $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$ & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$. Si au lieu de n , on écrit les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c., l'irrationalité disparaîtra d'elle-même des équations générales qui en résultent; car on aura :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y+a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \&c. \\ &+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \&c. \end{aligned}$$

ou cette autre équation

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y+a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \&c. \\ &+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \&c. \end{aligned}$$

Ces équations, délivrées de leurs fractions, se changent en celles-ci :

$$\begin{aligned} 0 &= + a^n y^{n+1} (P+Q) + a^{n-1} y^{n+2} (R+S) + a^{n-2} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &+ a^{n+1} y^n (P-Q) + a^{n+2} y^{n-1} (R-S) + a^{n+3} y^{n-2} (T-V) \&c. \end{aligned}$$

&

$$0 = +a^2y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1}y^{n+2}(R+S) + a^{n-2}y^{n+3}(T+V) \&c.$$

$$-a^{n+1}y^n(P-Q) - a^{n-2}y^{n-1}(R-S) - a^{n-3}y^{n-2}(T-V) \&c.$$

390. Il est à présent facile de trouver, au moyen de ces quatre équations, quelles sont les lignes de chaque ordre qui résolvent le problème. D'abord, pour le premier ordre, la ligne droite parallèle à l'axe AP , & passant par le point B , satisfait; ensuite, pour le second ordre, les deux premières équations, en faisant $n = 1$, donnent $aaxy + yy - aa = 0$, équation que l'on tire de la seconde formule, en faisant $N = ax$, $P = 1$ & $Q = 0$; car la première ne donne aucune ligne courbe; mais les deux dernières, en faisant $n = 0$, donnent $y(a + \epsilon x) \pm a(a - \epsilon x) = 0$. Quant aux lignes du troisième ordre, les deux premières équations donneront, en supposant $n = 1$,

$$0 = ay(a + \epsilon xx) + yy(\gamma + \delta x)$$

$$+ aa(\gamma - \delta x)$$

&

$$0 = aaxy + yy(\gamma + \delta x)$$

$$- aa(\gamma - \delta x)$$

& les deux dernières donneront, en supposant $n = 0$ & $n = 1$,

$$0 = y(a + \epsilon x + \gamma xx)$$

$$\pm a(a - \epsilon x + \gamma xx)$$

&

$$0 = ay^2(a + \epsilon x) + y^3$$

$$\pm a^2y(a - \epsilon x) \pm a^3$$

On trouvera d'une manière semblable celles des courbes des ordres supérieurs, qui satisfèront à la question.

CHAPITRE XVII.

De la Manière de trouver les Courbes en vertu d'autres Propriétés.

Pl. IX. Fig. 81.

391. LES questions que nous avons résolues dans le chapitre précédent, étoient de nature à être facilement ramenées à une équation entre des coordonnées, qui formoient entre elles des angles ou droites ou obliques. Nous allons donc examiner à présent d'autres propriétés qui ne supposent pas expressément que les appliquées soient parallèles entre elles; comme s'il étoit question, par exemple, d'un examen relatif à des lignes droites menées d'un point donné à la courbe. Soit C le point d'où les droites CM , CN , sont menées à la courbe; & proposons-nous quelque propriété qui concerne ces lignes; il faudra s'écarter de la méthode suivie jusqu'ici, d'exprimer les courbes par des coordonnées, pour introduire ces droites dans l'équation.

392. Comme il y a plusieurs manières de représenter la nature des lignes par des équations formées entre deux variables, nous prendrons, dans la circonstance actuelle, pour l'une de ces dernières quantités la droite CM menée du point C à la courbe; & comme il faut une autre variable pour déterminer la position de cette droite, on prendra pour axe une ligne droite CA menée à volonté par le point C ; & l'angle ACM , ou une quantité quelconque qui en dépende, sera très-propre à tenir lieu de l'autre variable dont on a besoin. Soit donc $CM = z$, & l'angle $ACM = \phi$, dont on fait entrer le sinus ou la tangente dans l'équation; il est clair que, si on a une équation quelconque entre z & $\sin. \phi$ ou $\text{tang. } \phi$, elle fera connoître la nature de la courbe; car pour chaque angle ACM on aura la longueur de la droite CM ; ce qui déterminera par conséquent la position du point M de la courbe.

393. Examinons un peu attentivement cette nouvelle manière d'exprimer les courbes, & d'abord égalons la distance τ à une fonction quelconque du sinus de l'angle ϕ ; si cette fonction est uniforme, il sembleroit que la droite CM devoit rencontrer la courbe en un seul point M , parce qu'il ne répond à l'angle $ACM = \phi$ qu'une seule valeur de la droite CM . Mais, si on augmente ϕ de deux angles droits, la position de la droite CM menée par le point C sera la même, avec cette différence qu'elle tombera en sens contraire; & il en résultera ainsi une autre intersection de la même droite CM avec la courbe, quoique τ soit égal à une fonction uniforme du sinus de l'angle ϕ . Si, par exemple, P représente cette fonction du sinus de l'angle ϕ , ou si $\tau = P$, ce qui détermine le point M de la courbe; qu'on augmente ensuite l'angle ϕ de deux angles droits, ou qu'on fasse son sinus négatif, de manière que P devienne Q , ou que $\tau = Q$, on obtiendra une nouvelle intersection de la même droite prolongée CM avec la courbe m , en prenant $Cm = Q$.

Pl. IX. Fig. 82.

394. Ainsi, quoique P soit une fonction uniforme du sinus de l'angle ϕ , cependant la droite CM , menée sous un angle donné $ACM = \phi$ par le point C , rencontrera la courbe en deux points M & m , à moins que Q ne soit $= -P$. Donc, si chaque droite CM ne doit rencontrer la courbe qu'en un seul point, cette quantité P sera une fonction impaire du sinus de l'angle ϕ . La même chose a lieu, si P est une fonction impaire du cosinus de l'angle ϕ . Toutes les courbes que les droites menées de C couperont en un seul point, seront donc renfermées dans cette équation $\tau = P$, si P est une fonction impaire du sinus ou du cosinus de l'angle $ACM = \phi$.

395. Puis donc que les courbes qui sont coupées en un seul point par les droites tirées du point C , sont renfermées dans l'équation $\tau = P$, P étant une fonction impaire du sinus & du cosinus de l'angle ϕ , ou une fonction dont la valeur devient négative, lorsqu'on prend négativement le sinus & le cosinus de l'angle ϕ , il sera facile de trouver pour ces sortes de courbes une équation entre les coordonnées perpendiculaires. En effet, ayant abaissé du point M sur l'axe CA la per-

Pl. IX. Fig. 81.

pendiculaire MP , si on fait $CP = x$, $PM = y$, on aura $\frac{y}{z} = \sin. \phi$, & $\frac{x}{z} = \cos. \phi$; d'où il suit que, si P est une fonction impaire de $\frac{x}{z}$ & de $\frac{y}{z}$, toutes ces courbes seront renfermées dans cette équation $z = P$. En commençant donc par les plus simples, on aura :

$$z = \frac{ax}{z} + \frac{by}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{d z}{y};$$

& passant ensuite aux puissances plus élevées

$$z = \frac{ax}{z} + \frac{by}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{d z}{y} + \frac{\epsilon x^3}{z^5} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \\ \frac{1 x x}{y z} + \frac{x y y}{x z} + \frac{\lambda y z}{x x} + \&c.$$

396. Si on divise cette équation par z , il ne restera plus que des puissances paires de z ; par conséquent, comme $z = \sqrt{(xx + yy)}$, en éliminant z , on fera disparaître toute irrationalité; & il restera une équation rationnelle entre x & y . L'équation sera donc telle que l'unité, ou une quantité constante, sera égale à une fonction de — 1 dimension de x & de y . Si P est une fonction de cette nature, on aura $C = P$, & partant $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; mais $\frac{1}{P}$ est une fonction d'une dimension de x & de y ; d'où il suit que, si on égale à une constante une fonction quelconque d'une dimension de x & de y , on aura l'équation de la courbe, que les droites menées par le point C rencontrent en un seul point.

397. Soit P une fonction de n dimensions de x & de y , & Q une fonction de $n + 1$ dimensions de x & de y , $\frac{Q}{P}$ sera une fonction d'une seule dimension; & conséquemment toutes les courbes, que nous considérons ici, seront renfermées dans l'équation $\frac{Q}{P} = c$, ou $Q = cP$. Ainsi, n désignant un nombre quelconque, l'équation générale de ces courbes sera $ax^{n+1} + bx^n y +$

$\gamma x^{n-1}y^2 + \delta x^{n-2}y^3 + \varepsilon x^{n-3}y^4 + \&c. = c (Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 + Dx^{n-3}y^3 + \&c.)$. Les lignes de chaque ordre que les droites menées du point C coupent seulement en un point, seront donc comprises dans les équations suivantes :

I.

$$ax + \ell y = c$$

II.

$$ax^2 + \ell xy + \gamma y^2 = c(Ax + By)$$

III.

$$ax^3 + \ell x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$$

IV.

$$ax^4 + \ell x^3y + \gamma x^2y^2 + \delta xy^3 + \varepsilon y^4 = c(Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. D'abord, la première équation fait voir que la ligne droite satisfait; & que par conséquent elle ne peut être coupée qu'en un point par d'autres droites menées par un point donné. La seconde est l'équation générale des Sections Coniques, pourvu que la courbe passe par le point C ; cette dernière intersection étant commune à toutes les droites qui partent du point C , on ne la compte point; & puisque les sections coniques ne peuvent être rencontrées par une droite quelconque qu'en deux points, il s'enfuit que toute droite prise à volonté sur un point quelconque C de la courbe, ne donnera qu'une intersection. Or les courbes des ordres suivans passent toutes par le même point C ; ce qui donne à la vérité une intersection, mais dont on ne tient pas compte, parce qu'elle est commune à toutes les droites qui passent par ce point. C'est pourquoi les équations précédentes ne contiennent des courbes des ordres supérieurs que celles qui sont coupées en un seul point par les droites tirées du point C . Nous

avons donc fait une énumération complète de toutes les courbes algébriques que les lignes droites, menées par un point donné C , ne rencontrent qu'en un point.

399. Passons à présent à la recherche des courbes que les droites menées par le point C coupent en deux points, ou ne rencontrent nulle part, lorsque les racines de l'équation qui indique une double intersection, deviennent imaginaires. Puisque la droite $CM = r$ doit avoir pour chaque angle $ACM = \phi$ une double valeur; elle sera déterminée par une équation du second degré. Soit donc $rr - P r + Q = 0$, où P & Q doivent être des fonctions de l'angle ϕ , ou bien de son sinus ou de son cosinus. Mais, puisque la droite CM ne doit couper la courbe qu'en deux points M & N , non seulement P & Q doivent être des fonctions uniformes, mais il faut encore qu'en augmentant l'angle ϕ de deux angles droits, il n'en résulte aucune nouvelle intersection; ce qui aura lieu, lorsque P sera une fonction impaire du sinus & du cosinus de l'angle ϕ , de sorte qu'il prenne une valeur négative lorsque le sinus & le cosinus sont pris négativement; mais alors Q doit être une fonction paire du même sinus & du même cosinus.

400. En supposant les coordonnées perpendiculaires $CP = x$ & $PM = y$; on aura $\frac{y}{r} = \sin. \phi$ & $\frac{x}{r} = \cos. \phi$; P devra donc être une fonction impaire de $\frac{x}{r}$ & de $\frac{y}{r}$, & Q une fonction paire de $\frac{x}{r}$ & de $\frac{y}{r}$. Il suit de là que $\frac{P}{r}$ sera une fonction rationnelle de x & de y , & une fonction homogène de -1 dimension. Semblablement, $\frac{Q}{r^2}$ sera une fonction rationnelle & homogène de -2 dimensions de x & de y . Si donc on suppose L une fonction homogène de $(n+2)$ dimensions, M une fonction homogène de $(n+1)$ dimensions, & N une fonction quelconque de n dimensions de x & de y ; la fraction $\frac{M}{L}$ donnera une fraction convenable pour $\frac{P}{r}$, & $\frac{N}{L}$ une fonction convenable pour $\frac{Q}{r^2}$. Ainsi, puisque $rr - P r + Q = 0$, on aura $1 - \frac{P}{r} + \frac{Q}{r^2} = 0$.

D'où l'on conclura pour les courbes qui sont coupées en deux points par les droites qui passent par le point C , l'équation générale $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, ou $L - M + N = 0$, dans laquelle

$P = \frac{M\zeta}{L}$, & $Q = \frac{N\zeta\zeta}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$; P fera donc une fonction irrationnelle de x & de y , à cause de $\zeta = (\sqrt{x^2+y^2})$; & Q une fonction rationnelle de dimension nulle.

401. Il sera aisé maintenant d'avoir les lignes de chaque ordre qui sont coupées en deux points par les droites menées par un point donné C , ou qui n'en sont rencontrées nulle part. Il n'y aura qu'à faire pour le second ordre $n = 0$, & on obtiendra l'équation la plus générale des Sections Coniques :

$$axx + 6xy + \gamma yy - \delta x - \varepsilon y + \zeta = 0.$$

En quelque endroit donc qu'on prenne le point C , toute droite menée par ce point coupera la section conique en deux points, ou ne la rencontrera pas du tout. Il peut cependant arriver qu'une droite ne coupe la courbe qu'en un point; mais comme, parmi la quantité infinie de lignes menées par C , cette propriété ne convient qu'à une ou deux tout au plus, cette exception ne peut être d'aucune importance, & on peut même expliquer cette espèce de paradoxe en disant qu'une des interfections a lieu à une distance infinie; c'est pour cela que cette exception est censée n'apporter aucune atteinte à la généralité de la proposition que nous venons d'avancer.

402. Pour savoir, au reste, dans quel cas cette exception a lieu, il faut ramener l'équation entre x & y à une autre qui contienne ζ & l'angle $ACM = \phi$. L'équation, à cause de $y = \zeta \sin. \phi$ & de $x = \zeta \cos. \phi$, se changera en celle-ci :

$$\zeta^2 (\alpha (\cos. \phi)^2 + 6 \sin. \phi \cos. \phi + \gamma (\sin. \phi)^2) - \zeta (\delta \cos. \phi + \varepsilon \sin. \phi) + \zeta = 0.$$

On voit par là que, si le coefficient de ζ^2 est égal à zéro, une seule interfection a lieu; ce qui arrive par conséquent, lorsque $\alpha + 6 \sin. \phi + \gamma (\tan. \phi)^2 = 0$. Donc, si cette équation contient deux racines réelles, il y aura deux

cas où la droite menée par le point C coupera la droite seulement en un point. Mais, comme les racines de la même équation indiquent les asymptotes de la courbe, il est clair que les hyperboles ne sont coupées qu'en un point par les droites parallèles à une asymptote; & il ne passe par le point C que deux lignes qui aient cette propriété. Dans la Parabole, il n'y a que la droite parallèle à l'axe qui souffrira cette exception. Mais, si la section conique est une Ellypse, en quelquel endroit qu'on place le point C , toute droite qui y passera, ou rencontrera la courbe en deux points, ou ne la rencontrera nulle part.

403. Les lignes du troisième ordre qui jouissent de la même propriété se trouveront, en faisant $n=1$, comprises dans cette équation;

$$ax^3 + 6x^2y + 7xy^2 + dy^3 - ex^2 - \zeta xy - ny^2 + \theta x + \iota y = 0;$$

formule qui renferme toutes les lignes du troisième ordre, qui par conséquent sont toutes propres à satisfaire à la question, pourvu que le point C soit pris sur la courbe même; car, en faisant $x=0$, la valeur de y devient en même temps nulle. Semblablement, pour les courbes du quatrième ordre qui conviennent au cas présent, il faudra que le point C non-seulement soit un point de la courbe, mais en soit un point double; ainsi toute ligne du quatrième ordre qui aura un point double satisfera à la question, pourvu que le point C soit placé sur ce point. Mais si C étoit un point triple, alors toute droite menée par ce point coupera la courbe en un point unique, & appartiendra au cas que nous avons examiné en premier lieu. Les lignes du cinquième ordre satisferont pareillement, si C est placé sur un point triple; & ainsi des autres. Mais il ne faut pas perdre de vue que, si la droite menée par le point C est parallèle à quelque asymptote droite, ou à un axe parabolique, il n'y a réellement qu'un seul point d'intersection, l'autre se trouvant à une distance infinie.

404. Tout cela s'accorde à merveille avec la nature des lignes de chaque ordre; car, puisqu'une ligne d'un ordre quel-

conque peut être coupée par une droite en autant de points que l'exposant de l'ordre contient d'unités; (& elle est en effet coupée en autant de points, à moins que quelques-unes des intersections ne deviennent imaginaires, ou ne se fassent à une distance infinie) & que nous renons compte ici de toutes les intersections, soit réelles, soit faites à une distance infinie, soit imaginaires; & que nous excluons seulement celles qui ont lieu au point C , il est clair qu'une ligne de l'ordre n devant être coupée en n points par une ligne droite quelconque, le point C doit être placé en un point multiple du degré $n - 2$, pour qu'il en résulte une intersection double.

405. Ces remarques une fois faites, il sera facile de résoudre les problèmes qu'on propose ordinairement sur la relation entre deux valeurs quelconques CM & CN de ζ , ou de faire voir au moins si la solution convient ou ne convient pas à toute rigueur. Car, comme les deux valeurs de ζ , CM & CN , sont les racines de cette équation $\zeta^2 - P\zeta + Q = 0$, leur somme sera $= P$, & leur rectangle $CM \cdot CN = Q$. Par conséquent, si on vouloit des courbes dans lesquelles la somme $CM + CN$ fût par-tout une somme constante, il faudroit que la fonction P fût constante. Mais comme d'ailleurs, par la nature de la question, il faudroit que chaque droite menée par le point C rencontrât la courbe seulement en deux points, il seroit nécessaire que P fût $= \frac{M\zeta}{L} = \frac{M\sqrt{(xx+yy)}}{L}$ (art. 399); quantité qui, à cause de l'irrationalité qu'elle renferme, ne peut jamais être constante. Il n'y a donc point de courbe qui satisfasse proprement à cette question.

406. Mais, si on rejette la condition qu'il y ait seulement deux points d'intersection avec la courbe pour chaque ligne tirée par le point C , & qu'on demande des courbes qui, à la vérité, soient susceptibles de plus de deux intersections, mais parmi lesquelles il s'en trouve deux telles que $CM + CN$ soient une quantité constante; on pourra en obtenir une infinité, en faisant $P =$ à cette quantité constante $CM + CN = a$. Car on aura $\zeta^2 - a\zeta + Q = 0$, Q désignant la fonction $\frac{N\zeta\zeta}{L}$; & en faisant disparaître l'irrationalité de cette équation

tion, on trouvera $a^2\zeta^2 = (\zeta\zeta + Q)^2$, ou $a^2 = \zeta\zeta \left(1 + \frac{N}{L}\right)^2$ ou $a^2L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$, équation dans laquelle L est une fonction homogène de $n + 2$, & N une fonction homogène de n dimensions de x & de y . Ainsi on trouvera la courbe la plus simple qui résoudra la question dans ce sens, en faisant $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$; ce qui donnera $aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$, ou une ligne complexe du quatrième ordre; car cette expression comprend deux cercles concentriques en C . Les courbes continues les plus simples qui satisfont à la question sont du sixième ordre, & on les obtient en faisant $L = axx + \ell xy + \gamma y^2$ & $N = \pm bb$, d'où résulte pour ces courbes l'équation $a^2(ax^2 + \ell xy + \gamma y^2)^2 = (x^2 + y^2)(ax^2 + \ell xy + \gamma y^2 \pm bb)^2$. Soit $\alpha = 1$, $\ell = 0$ & $\gamma = 0$; on aura $y^2 + x^2 = \frac{aa x^4}{x^4 \pm 2b^2x^2 + b^4}$ ou $y = \frac{x\sqrt{(2axx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$.

407. Mais, si on rejette les solutions qui supposent que les droites menées par C rencontrent la courbe en plus de deux points, condition que paroît exiger l'état de la question, on ne pourra plus dire qu'il y ait des courbes qui satisfassent; & par conséquent, il n'existera aucunes lignes continues qui soient coupées seulement en deux points M & N par des droites menées par le point C , de manière que la somme $CM + CN$ soit constante. Si au contraire on demandoit des intersections, en vertu desquelles le rectangle $CM \times CN$ dût être une quantité constante; propriété qui appartient au Cercle, en quelque endroit que soit placé le point C , on pourroit trouver une infinité d'autres lignes courbes qui auroient la même propriété. En effet, il faudra pour cela que Q soit une quantité constante, ou égale au rectangle $CM \cdot CN$, que je suppose $= aa$; hypothèse qui ne répugne pas, à cause que $Q = \frac{N\zeta\zeta}{L}$; & qu'il est par conséquent une fonction rationnelle de x & de y .

408. Soit donc $\frac{N\zeta\zeta}{L} = aa$, ou $L = \frac{N\zeta\zeta}{aa} = \frac{N(xx + yy)}{aa}$. Les courbes

courbes qui satisfont seront toutes contenues dans cette équation $\frac{N(x^2+yy)}{aa} - M + N = 0$, ou $Maa = N(x^2+yy+a^2)$, où M désigne une fonction quelconque homogène de $n + 1$ dimensions, & N une fonction homogène de n dimensions de x & de y , de manière que $\frac{M}{N} = \frac{xx+yy+a^2}{aa}$ soit une fonction d'une seule dimension de x & de y . Cette équation renferme donc toutes les courbes qui, coupées seulement en deux points M & N par les droites qui passent par le point C , donnent par-tout pour le rectangle CM . CN une quantité constante $= aa$.

409. Puisque $\frac{M}{N}$ est une fonction homogène d'une dimension de x & de y , le cas le plus simple qu'on puisse obtenir sera celui où l'on fera $\frac{M}{N} = \frac{ax + \epsilon y}{a}$; supposition qui donnera cette équation $xx + yy - a(ax + \epsilon y) + aa = 0$, laquelle appartient au Cercle; &, comme on a par là l'équation générale de cette courbe entre les coordonnées perpendiculaires, il est évident que le cercle satisfait à la question, quelle que soit la position du point C , comme on le fait d'ailleurs par les élémens. Il n'y a donc parmi les Sections Coniques que le Cercle qui satisfasse à cette question; mais parmi les lignes des ordres suivans on en trouvera une infinité qui satisferont, & même toutes celles de chaque ordre qui peuvent convenir. Ainsi les lignes du troisième ordre qui jouissent de cette propriété, seront comprises dans cette équation:

$$\frac{axx + \epsilon xy + \gamma yy}{a(\delta x + \epsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$$

ou

$$(\delta x + \epsilon y)(x^2 + y^2) - a(ax^2 + \epsilon xy + \gamma y^2) + a^2(\delta x + \epsilon y) = 0.$$

On trouvera d'une manière semblable celles des lignes des ordres suivans qui pourront satisfaire.

410. Proposons-nous à présent cette question. Parmi toutes les lignes courbes qui sont coupées en deux points par des
EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 E c

droites menées par le point C , trouver celles dans lesquelles la somme des carrés $CM^2 + CN^2$ est une quantité constante, ou $= a a$. Puisque $CM + CN = P$ & que $CM \cdot CN = Q$, on aura $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$; il faudra donc que $PP - 2Q = 2aa$, ou que $Q = \frac{PP - 2aa}{2}$. Ainsi, à cause de $P = \frac{M\zeta}{L}$ & de $Q = \frac{N\zeta\zeta}{L}$, on aura $\frac{2N\zeta\zeta}{L} = \frac{MM\zeta\zeta}{LL} - 2aa$, & par conséquent $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{\zeta\zeta}$; équation qui ne renferme aucune contradiction, par la raison que L est une fonction de $n + 2$ dimensions, M une fonction de $n + 1$ dimensions, & N une fonction de n dimensions des variables x & y . Ayant donc pris pour L & pour M de telles fonctions, on aura $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{\zeta\zeta}$; d'où résulte pour les courbes qui satisferont à la question, l'équation générale :

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{\zeta\zeta} = 0,$$

ou

$$2L^2(x^2 + y^2) - 2LM(x^2 + y^2) + M^2(x^2 + y^2) - 2a^2L^2 = 0;$$

laquelle, si $M = 0$, donne un cercle dont le centre est en C , & qui satisfait à la question, comme cela d'ailleurs est évident.

411. Supposons $n + 1 = 0$, de sorte que M soit une quantité constante $= 2b$ & $L = ax + \zeta y$; nous aurons une ligne du quatrième ordre exprimée par cette équation :

$$(ax + \zeta y)^2(x^2 + y^2 - a^2) - 2b(ax + \zeta y)(x^2 + y^2) + 2b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

On trouve une autre équation du quatrième ordre, en faisant $L = xx + yy$ & $M = 2(ax + \zeta y)a$; car alors l'équation étant divisée par $2xx + 2yy$ donnera :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a(ax + \zeta y)(x^2 + y^2) + 2a^2(ax + \zeta y)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

A moins donc que la division ne se fasse par $xx + yy$, l'équation ci-dessus, ou, (en mettant $2M$ au lieu de \bar{M}) celle-ci :

$$L^2(x^2+y^2) - 2LM(x^2+y^2) + 2M^2(x^2+y^2) - a^2L^2 = 0,$$

fera toujours de l'ordre $2n + 6$. Donc on obtient de chaque ordre pair une équation pour une courbe qui doit satisfaire. Mais, s'il arrive que L soit divisible par $xx + yy$; ou que, N désignant une fonction quelconque homogène de n dimensions de x & de y , on ait $L = (xx + yy)N$, on obtiendra cette autre équation générale de l'ordre $2n + 4$,

$$N^2(x^2+y^2)^2 - 2MN(x^2+y^2) + 2M^2 - a^2N^2(x^2+y^2) = 0;$$

d'où il résulte que chaque ordre pair donne deux équations pour les courbes qui sont douées de la propriété donnée. C'est ainsi que l'on trouve que les courbes du sixième ordre comprises dans les deux équations suivantes, satisfont :

$$(ax^2 + 6xy + \gamma y^2)^2(x^2 + y^2 - a^2) - 2a(\delta x + \epsilon y)(x^2 + y^2) \\ (ax^2 + 6xy + \gamma y^2 - a(\delta x + \epsilon y)) = 0,$$

&

$$(\delta x + \epsilon y)^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2) = 2a(ax^2 + 6xy + \gamma y^2) \\ ((\delta x + \epsilon y)(x^2 + y^2) - a(ax^2 + 6xy + \gamma y^2)).$$

Il n'y a donc point de lignes d'un ordre impair qui puissent résoudre la question.

412. Si on demande à présent non pas des courbes, dans lesquelles la somme des carrés $CM^2 + CN^2$ soit constante, mais dans lesquelles $CM^2 + CM \cdot CN + CN^2$, ou généralement $CM^2 + n \cdot CM \cdot CN + CN^2$ soit une quantité constante; on résoudra le problème de la manière suivante. Car, puisque $CM^2 + n \cdot CM \cdot CN + CN^2 = P^2 + (n-2)Q$, on fera $P^2 + (n-2)Q = aa$, d'où $Q = \frac{aa - PP}{n-2}$, équation évidem-

ment admissible; ainsi P étant $= \frac{M\zeta}{L}$ & $Q = \frac{N\zeta\zeta}{L}$, on aura

$$\frac{M^2\zeta^2}{L^2} + \frac{(n-2)N\zeta\zeta}{L} = a a; \text{ \& par conséquent } N = \frac{a a L}{(n-2)\zeta\zeta} - \frac{M^2}{(n-2)L}.$$
 Mais l'équation à la courbe est $L - M + N = 0$; on aura donc, pour remplir la condition que $C M^2 + n \cdot C M \times C N + C N^2$ doit être une quantité constante $= a a$, cette équation :

$$(n-2)L^2\zeta^2 - (n-2)LM\zeta^2 + a^2L^2 - M^2\zeta^2 = 0;$$

ou, à cause de $\zeta\zeta = xx + yy$,

$a^2L^2 + (x^2 + y^2)((n-2)L^2 - (n-2)LM - M^2) = 0$, L étant une fonction de $m+2$, & M une fonction de $m+1$ dimensions de x & de y . Soit N une fonction quelconque homogène de m dimensions, & $L = (xx + yy)N$; on aura cette autre équation générale :

$$a^2(x^2 + y^2)N^2 + (n-2)(x^2 + y^2)^2N^2 - (n-2)(x^2 + y^2)MN - M^2 = 0.$$

413. Si on suppose $n=2$, de sorte que $(CM + CN)^2 = a^2$, on aura ou $a^2L^2 = (x^2 + y^2)M^2$, ou $M^2 = a(x^2 + y^2)N^2$. Or ces deux équations, étant homogènes, en contiendront chacune deux, ou davantage, de la forme $ay = \epsilon x$; & par conséquent on ne pourra satisfaire à la question qu'au moyen de deux lignes droites, ou d'un plus grand nombre, qui seront menées par le point C . Mais, comme ce n'est pas résoudre le problème dans le sens qu'il est proposé, il est évident qu'il n'est susceptible d'aucune solution, comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus. En effet $CM + CN$ devrait être égal à une constante a . Mais, si on fait $n=-2$, de manière que le carré de la différence $(CN - CM)^2$, & par suite la différence même MN soit une constante, on trouvera ces deux équations :

$$a a L L = (x x + y y)(2 L - M)^2$$

&

$$a a (x x + y y) N N = (2(x x + y y) N - M)^2;$$

d'où l'on tirera la solution la plus simple, en faisant $N = 1$ & $M = 2bx$; car on aura :

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2;$$

ou, en supposant $aa = 8cc$,

$$(xx + yy)^2 = 2(cc + bx)(xx + yy) - bbxx.$$

$$\text{Donc } xx + yy = cc + bx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)};$$

&

$$y = \sqrt{(cc + bx - xx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)})}.$$

414. Il y a donc une infinité de lignes courbes qui sont coupées en deux points M & N par les droites menées par le point C , de manière que l'intervalle MN soit toujours constant; & d'abord il est évident que le cercle, dont le centre est en C , satisfait à cette condition; car l'intervalle MN fera par-tout = au diamètre du cercle. Or le cercle se conclut des équations générales, en faisant $M = 0$. Ensuite, les courbes qui, après le cercle, satisfont, sont des lignes du quatrième ordre exprimées par cette équation $aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$ & par cette autre $aaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$. Pour connoître la figure de ces courbes, il faudra revenir à l'équation entre r & l'angle ϕ . Puis donc que $xx + yy = r^2$, & $x = r \cos. \phi$, & $y = r \sin. \phi$, en supposent $a = 2c$, on aura d'abord :

$$ccr^2 = (r^2 - b r \cos. \phi)^2 \text{ ou } b \cos. \phi \pm c = r^2$$

puis

$$cc(\cos. \phi)^2 = (r \cos. \phi - b)^2 \text{ ou } r = \frac{b}{\cos. \phi} \pm c.$$

Ce qui donne pour ces courbes une construction facile.

415. En effet, pour construire la courbe exprimée par l'équation $r = \frac{b}{\cos. \phi} \pm c$, on menera par C une droite ACB , sur laquelle on prendra $CD = b$, & à partir du point D , on prendra de part & d'autre $DA = DB = c$; d'abord les points

Pl. IX. Fig. 83, 84, 85.

A & B appartiendront à la courbe. Ensuite, ayant mené une droite quelconque NCM par C , on abaissera du point D sur cette ligne la perpendiculaire DL , & on prendra de part & d'autre du point L , $LM = LN = c$; les points M & N feront à la courbe cherchée, & par conséquent l'intervalle MN fera par-tout $= 2c$, comme l'exige la question.

Fig. 83. Remarquez ici que, si $CD = b$ est plus petit que c , la courbe aura en C un point conjugué.

Fig. 84. Mais, si $b = c$, la courbe aura en C une pointe, l'intervalle AC devenant nul.

Fig. 85. Enfin, si b est plus grand que c , le point A tombera entre C & B ; & la courbe aura en C un nœud ou un point double. Au reste, ces courbes auront pour diamètre la droite ACB , & la perpendiculaire à celle-ci ECF fera $= 2c$.

Pl. IX. Fig. 86. 416. Outre ces courbes du quatrième ordre qui reviennent sur elles mêmes, il y en a d'autres du même ordre qui satisfont, & qui s'éloignent à l'infini. Elles sont comprises dans l'équation $z = \frac{b}{\cos \phi} \pm c$. En voici la construction : Ayant mené par C la droite principale CAB , on prendra $CD = b$; & si on prend $DA = DB = c$, les points A & B feront à la courbe. On menera ensuite par D la perpendiculaire EDF ; & en tirant une droite quelconque CL , & supposant l'angle $DC L = \phi$, on aura $CL = \frac{b}{\cos \phi}$. On continuera de prendre $LM = LN = c$, & les points M & N détermineront la courbe cherchée. Il est clair par cette construction que la courbe ainsi décrite est la *Conchoïde* des anciens, qui a le point C pour pôle & pour asymptote la droite EF , vers laquelle convergent de plus en plus les quatre branches de la courbe. La portion $h B h$ se nomme la *Conchoïde extérieure*, & $g A g$, la *Conchoïde intérieure*. Outre ces parties, il y a en C un point conjugué.

417. Telles sont les lignes du quatrième ordre qui satisfont; mais il est aisé d'en trouver, autant qu'on voudra, des ordres supérieurs. Car si P est une fonction impaire du sinus & du cosinus de l'angle ϕ , alors l'équation $z = b P \pm c$ représentera

une courbe continue que toutes les droites menées par le point C couperont en deux points M & N , de manière que l'intervalle MN soit constant & $= 2c$. Toutes ces courbes peuvent se rapporter au genre des Conchoïdes, en substituant à la directrice EF une ligne courbe quelconque exprimée par l'équation $z = bP$. Or nous avons vu ci-dessus que cette équation renfermoit les lignes courbes, que les droites menées par le point C ne rencontrent qu'en un seul point. Ainsi, comme l'intervalle c est arbitraire, on pourra, au moyen de chaque courbe $z = bP$, en décrire une infinité d'autres qui auront la propriété qu'on demande.

418. Qu'on prenne, par exemple, à volonté la courbe $CEDLF$, qui ne doit être coupée que dans les points uniques D, L , par toutes les droites menées par le point C . Alors, si sur chacune de ces droites CL prolongées on prend de part & d'autre du point L des intervalles égaux $LM = LN = c$; les points M & N appartiendront à la courbe cherchée. Ainsi donc on pourra décrire d'un mouvement continu la courbe $AMPCQBNRC$, que les droites menées par le point C couperont en deux points M & N , de manière que l'intervalle MN soit toujours une quantité constante $= 2c$. On doit observer ici que, si la courbe $CEDF$ est un cercle qui passe par le point C , la courbe décrite sera la même ligne du quatrième ordre, que nous avons trouvée d'abord art. 414. Pl. IX. Fig. 87.

419. Nous avons donc ainsi satisfait à la question qui consistoit à trouver les lignes courbes AMN , qui fussent coupées par les droites menées par le point C en deux points M & N , de façon que $CN - CM$ ou $CM^2 - 2CM \cdot CN + CN^2$ eût toujours une valeur constante. Développons encore en peu de mots le cas où $CM^2 + CM \cdot CN + CN^2$ doit être une quantité constante. On fera donc, dans l'art. 412, $n = 1$; ce qui donnera cette équation: Pl. IX. Fig. 81.

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2);$$

L étant une fonction de $m + 1$, & M une fonction de m dimensions de x & de y ; ou bien cette autre-ci:

$$a^2(x^2+y^2)N^2=(x^2+y^2)^2N^2-(x^2+y^2)MN+M^2,$$

dans laquelle M est une fonction homogène de x & de y , qui surpasse d'une dimension la fonction N .

420. On voit d'abord que, si on fait $M=0$, on a un cercle dont le centre est placé au point C . Comme toutes les droites menées du centre à la courbe sont égales, il est bien clair qu'il satisfait aussi à toutes les questions de ce genre. Mais, pour le cas présent, on trouvera les courbes les plus simples, en faisant dans la première équation $M=b$ & $L=x$; & on aura :

$$aaxx=(xx+yy)(xx-bx+bb)$$

ou

$$yy=\frac{xx(aa-bb+bx-xx)}{bb-bx+xx}.$$

Et si dans l'autre équation on suppose $N=1$ & $M=bx$, on aura encore une ligne du quatrième ordre :

$$aa(xx+yy)=(xx+yy)^2-bx(xx+yy)+bbxx$$

ou

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}a^2\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2bx-\frac{3}{4}b^2x^2\right)};$$

laquelle satisfera à la question aussi bien que la première.

421. Ces questions résolues, considérons les puissances plus élevées des deux valeurs de ζ qui proviennent de l'équation $\zeta\zeta-P\zeta+Q=0$, P étant $=\frac{M\zeta}{L}$ & $Q=\frac{N\zeta\zeta}{L}$. Ici L représente une fonction homogène de $n+2$, M une fonction de $n+1$, & N une fonction de n dimensions de x & de y ; & x = à l'abscisse CP , & y = à l'appliquée PM . Supposons donc qu'il soit question de trouver deux intersections M & N , telles que $CM^3+CN^3=a^3$. Comme, par la nature de l'équation $\zeta\zeta-P\zeta+Q=0$, $CM^3+CN^3=P^3-3PQ$,

on

on devra avoir $P^3 - 3PQ = a^3$; équation qui ne peut avoir lieu, à cause que P^3 & PQ sont des quantités irrationnelles. On ne peut donc, rigoureusement parlant, satisfaire à cette question; mais, si on n'a pas égard au nombre des intersections, quoiqu'il y en ait plus de deux, on pourra trouver un nombre infini de courbes qui satisfont, en supposant $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & en prenant pour P une fonction quelconque du sinus & du cosinus de l'angle $ACM = \phi$.

422. Mais si on veut avoir des courbes dans lesquelles $CM^2 + CN^2 = a^2$, on devra faire $P^2 - 4P^2Q + 2QQ = a^2$; équation qui n'implique pas contradiction, parce qu'elle ne renferme aucune irrationalité. On devra donc avoir $Q = PP + \sqrt{(\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}a^2)}$; fonction qui, malgré le signe radical, peut être regardée comme uniforme, parce que, si on prenoit négativement $\sqrt{(\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}a^2)}$, il en résulteroit pour ζ des valeurs imaginaires. On aura donc $\frac{N\zeta\zeta}{L} = \frac{M^2\zeta^2}{L^2} + \sqrt{(\frac{M^2\zeta^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^2)}$; & puisqu'on a pour la courbe $L - M + N = 0$, ou $\zeta\zeta - \frac{M\zeta\zeta}{L} + \frac{N\zeta\zeta}{L} = 0$; on aura $\zeta\zeta - \frac{M\zeta^2}{L} + \frac{M^2\zeta^2}{L^2} + \sqrt{(\frac{M^2\zeta^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^2)} = 0$. On aura conséquemment, en faisant disparaître le radical,

$$\frac{\zeta^4}{L^4} (L^2 - LM + M^2)^2 = \frac{M^2\zeta^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^2,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 (2(L^2 - LM + M^2)^2 - M^2) = a^2 L^4;$$

expression qui comprend toutes les courbes qui peuvent satisfaire.

423. Il y a une autre manière plus facile, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus art. 372, de résoudre cette question & les autres semblables. En effet, puisque $CM \cdot CN = Q$, si l'une des deux quantités CM & CN est $= \zeta$, l'autre sera
 EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 F f

$$= \frac{Q}{\zeta} = \frac{N\zeta}{L}$$
, à cause de $Q = \frac{N\zeta}{L}$. Par conséquent, si on doit avoir $CM^n + CN^n = a^n$, cette équation deviendra $\zeta^n + \frac{N^n \zeta^n}{L^n} = a^n$, ou $\zeta^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$. Si n est un nombre pair, elle est rationnelle, & satisfait par conséquent à la question; mais, si n est un nombre impair, il faudra prendre les quarrés pour faire évanouir l'irrationalité; d'où résulte un nombre double d'intersections, & une courbe qui, strictement parlant, ne remplit pas le but qu'on se propose. Si on doit avoir, par exemple $CM^2 + CN^2 = a^2$, l'équation deviendra $\zeta\zeta = xx + yy = \frac{a^2 L^2}{L^2 + N^2}$; laquelle s'accorde avec celle trouvée auparavant $xx + yy = \frac{aaLL}{(L-M)^2 + L^2}$ (410), à cause de $L - M + N = 0$. Donc, en général, si on doit avoir $CM^n + CN^n = a^n$, & que n soit un nombre pair, on obtiendra cette équation $\zeta^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L-M)^n}$; L étant une fonction de $m + 2$ dimensions, M une fonction de $m + 1$ dimensions, & N une fonction de m dimensions de x & de y .

424. La même solution se trouve par la considération de la somme $CM + CN = P$. En effet, si l'une des deux valeurs CM & CN est supposée $= \zeta$, l'autre sera $= P - \zeta$. D'où il suit que, si $CM^n + CN^n$ doit être une quantité constante, on aura $\zeta^n + (P - \zeta)^n = a^n$. Or nous avons vu que P devoit être $= \frac{M\zeta}{L}$, & $Q = \frac{N\zeta}{L}$, de manière que $L - M + N = 0$; on aura donc $\zeta^n + \zeta^n \frac{(M-L)^n}{L^n} = a^n$; ou $\zeta^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n}$, ou $\zeta^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$; ou bien, en éliminant L , $\zeta^n = \frac{a^n (M-N)^n}{(M-N)^n + N^n}$. Ces équations remplissent complètement la condition proposée, si n est un nombre pair; mais, si n est un nombre impair, on aura bien, à la vérité deux intersections M & N , telles que $CM^n + CN^n = a^n$; mais, outre ces deux intersections, il y en aura deux autres qui jouiront de la

même propriété, de sorte que chaque droite menée par le point C aura doublement la propriété dont il s'agit.

425. Cela posé, il sera aisé de résoudre d'autres questions beaucoup plus difficiles. Qu'il soit question, par exemple, de trouver une courbe qui soit coupée en deux points M & N par toutes les droites menées par C , de manière que $CM^n + CN^n + a.CM.CN.(CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \ell.CM^2.CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4})$ &c. soit une quantité constante $= a^n$. En faisant l'une des valeurs $CM = z$, l'autre CN fera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; en substituant ces valeurs, on aura pour l'équation qui exprime la nature de la courbe, $z^n(L^n + N^n + aL^2N(L^{n-2} + N^{n-2}) + \ell L^2N^2(L^{n-4} + N^{n-4}) + \text{&c.}) = a^n L^n$. Or $L - M + N = 0$, & L, M & N , sont des fonctions homogènes de x & de y , de $m+2, m+1$ & m dimensions, comme nous l'avons dit ci-dessus; d'où il suit qu'on aura ou $L = M - N$, ou $N = M - L$, & par conséquent une infinité de solutions.

426. Passons à présent à la recherche des courbes qui doivent être coupées en trois points par les droites qui passent par un point fixe C . La nature de ces sortes de courbes sera exprimée par cette équation générale :

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0;$$

dans laquelle z marque la distance de chaque point de la courbe au point C , & P, Q, R , sont des fonctions de l'angle $ACM = \phi$, ou de son sinus & de son cosinus. Or, pour qu'il n'y ait pas plus de trois intersections, il faut, par les mêmes raisons que nous avons alléguées ci-dessus, que P & R soient des fonctions impaires de $\sin. \phi$ & de $\cos. \phi$, & que Q en soit une fonction paire. Si donc on suppose les coordonnées perpendiculaires $CP = x, PM = y$, de sorte que $xx + yy = z^2$; & si K, L, M & N désignent des fonctions homogènes de $(n+3), (n+2), n+1$ & n dimensions de x & de y , on aura $P = \frac{Lz}{K}, Q = \frac{Mz^2}{K}$ & $R = \frac{Nz^3}{K}$; & par conséquent l'équation

générale entre les coordonnées perpendiculaires x & y , qui convient aux courbes dont il s'agit, fera :

$$K - L + M - N = 0;$$

d'où il suit que le point C fera un point multiple d'un degré marqué par le nombre d'unités contenues dans n .

427. On voit donc d'abord que toutes les lignes du troisième ordre appartiennent à ce cas, en quelque endroit qu'on prenne le point C hors de la courbe. Ensuite cette équation renferme toutes les lignes du quatrième ordre, pourvu que le point C soit pris sur la courbe; en troisième lieu, elle comprend toutes les lignes du cinquième ordre qui ont un point double, pourvu que le point C soit placé sur le point double. Semblablement, les lignes des ordres plus élevés rempliront cette condition, pourvu qu'elles aient des points multiples d'un degré exprimé par le nombre d'unités contenues dans n , lorsque $n + 3$ est l'exposant de l'ordre auquel appartient l'équation.

428. Soient p, q, r , les trois valeurs de χ que donne l'équation $\chi^3 - P\chi^2 + Q\chi - R = 0$ pour chaque valeur de l'angle $CA M = \phi$; on aura, par la nature des équations, $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Puisque P & R ne peuvent être une expression rationnelle de x & de y , il est d'abord évident qu'on ne peut avoir des courbes dans lesquelles ou $p+q+r$, ou pqr soit une quantité constante; & par conséquent on ne pourra supposer égale à une constante aucune fonction impaire de p, q & r . Mais les fonctions paires pourront sans aucune difficulté obtenir une valeur constante. Ainsi, si l'on demande que $p q + p r + q r = a a$, on aura $Q = \frac{M \chi \chi}{K} = a a$; & par conséquent $M(x x + y y) = a a K$; valeur qui, substituée dans l'équation $K - L + M - N = 0$, donne l'équation générale pour toutes les courbes qui jouissent de la propriété demandée; savoir:

$$M(x^2 + y^2) - a^2 L + a^2 M - a^2 N = 0;$$

ou, en éliminant M ,

$$(x^2+y^2)K - (x^2+y^2)L + a^2K - (x^2+y^2)N = 0.$$

429. Il fera facile de résoudre pareillement d'autres questions; comme s'il s'agissoit d'avoir une courbe qui fût coupée en trois points par les droites menées par le point C , de manière que $p^2+q^2+r^2 = aa$. Car, comme on a $p^2+q^2+r^2 = P^2 - 2Q$; $P = \frac{L\tilde{x}}{K}$ & $Q = \frac{M\tilde{x}}{K}$, l'équation deviendra

$$\frac{L^2\tilde{x}^2}{K^2} - \frac{2M\tilde{x}}{K} = a^2, \text{ ou } (x^2+y^2)L^2 - 2(x^2+y^2)KM = a^2K^2.$$

Mais on a pour les courbes susceptibles de trois intersections cette équation générale $K - L + M - N = 0$, dont la nature consiste en ce que la plus grande dimension des x & des y surpasse la plus petite de trois. Ainsi, pour obtenir une telle équation & avoir en même temps $(x^2+y^2)L^2 - 2(x^2+y^2)KM = a^2K^2$, on multipliera la première équation par $2(x^2+y^2)K$, afin de pouvoir éliminer M ; & on trouvera, pour satisfaire à la question, cette équation générale:

$$2(x^2+y^2)KK - 2(x^2+y^2)KL + (x^2+y^2)L^2 - aaKK - 2(x^2+y^2)KN = 0;$$

car le plus grand nombre de dimensions de x & de y se trouve dans le terme $2(x^2+y^2)K^2$, lequel en contient $2n+8$, & le terme $2(x^2+y^2)KN$, qui en donne le plus petit nombre, en contient $2n+5$, comme l'exige la nature de la chose.

430. Ainsi, puisque les termes où se trouvent le plus & le moins de dimensions ne peuvent disparaître ni l'un ni l'autre; supposons, pour trouver la courbe la plus simple, $n=0$, $N=b^3$, $K=x(x^2+y^2)$ & $L=0$, nous aurons cette équation:

$$2(x^2+y^2)^2x^2 - a^2x^2(x^2+y^2)^2 - 2b^3x(x^2+y^2)^2 = 0;$$

laquelle, étant divisée par $2x(x^2+y^2)^2$, donne celle-ci:

$$x(x^2+y^2) - \frac{1}{2}aa x - b^3 = 0,$$

qui appartient au troisième ordre. Mais, si L n'est pas $= 0$, & que $L = 2c(x^2 + y^2)$, on aura cette équation du quatrième ordre :

$$x^2(x^2 + y^2) - 2cx(x^2 + y^2) + 2c^2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}a^2x^2 - b^2x = 0.$$

ou

$$x^2(x^2 + y^2) + (2c - x)^2(x^2 + y^2) = a^2x^2 + 2b^2x.$$

En s'y prenant de la même manière, on trouvera dans les ordres plus élevés beaucoup d'autres courbes propres à satisfaire à la question.

431. Ensuite, on pourra trouver aussi les courbes dans lesquelles $p^t + q^t + r^t$ est une quantité constante; car, comme on a $p^t + q^t + r^t = P^t - 4P^2Q + 2Q^2 + 4PR$, il n'y aura qu'à faire $P^t - 4P^2Q + 2Q^2 + 4PR = c^t$. On aura donc :

$$\zeta^t(L^t - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^2LN) = c^tK^t;$$

& par conséquent

$$4K^2LN\zeta^t = c^tK^t - \zeta^t(L^t - 4KL^2M + 2K^2M^2);$$

&, en substituant la valeur de N dans l'équation $K - L + M - N = 0$, on obtiendra l'équation générale qui représentera les courbes qui doivent satisfaire à la question.

432. On pourra satisfaire en même temps à cette nouvelle condition $p^t + q^t + r^t = c^t$, & à la précédente $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. En effet, pour celle-ci on doit avoir $\zeta^2L^2 - 2\zeta^2KM = a^2K^2$; d'où l'on tire $2\zeta^2KM = \zeta^2L^2 - a^2K^2$. Comme ensuite :

$$4K^2LN\zeta^t = c^tK^t - L^t\zeta^t + 4KL^2M\zeta^t - 2K^2M^2\zeta^t,$$

on aura

$$4K^2LN\zeta^t = c^tK^t - L^t\zeta^t - 2aaK^2L^2\zeta^t - 2K^2M^2\zeta^t,$$

&

$$4K^2LM\zeta^t = 2KL^3\zeta^t - 2aaK^3L\zeta^t.$$

Substituons ces valeurs pour M & pour N dans l'équation $K-L+M-N=0$, ou $4K^3L\zeta^4-4K^2L^2\zeta^4+4K^2LM\zeta^4-4K^2LN\zeta^4=0$; & nous aurons pour l'équation à la courbe :

$$4K^3L\zeta^4-4K^2L^2\zeta^4+2KL^3\zeta^4-2a^2K^3L\zeta^4-c^4K^4-L^4\zeta^4+2a^2K^2L^2\zeta^4+2K^2M^2\zeta^4=0.$$

Mais, à cause de

$$KM\zeta\bar{\zeta}=\frac{1}{2}L^2\zeta\bar{\zeta}-\frac{1}{2}a^2KK,$$

nous aurons

$2K^2M^2\zeta^4=\frac{1}{2}L^4\zeta^4-aaK^2L^2\zeta^4+\frac{1}{2}a^4K^4$; donc l'équation générale pour les courbes demandées sera :

$$8K^3L\zeta^4-8K^2L^2\zeta^4+4KL^3\zeta^4-4a^2K^3L\zeta^4-2c^4K^4-L^4\zeta^4+2a^2K^2L^2\zeta^4+a^4K^4=0.$$

433. Comme K doit être une fonction homogène de x & de y d'une dimension de plus que L , la courbe la plus simple dans laquelle trois intersections donneront à la fois $p^2+q^2+r^2=a^2$ & $p^4+q^4+r^4=c^4$, se trouvera en faisant $K=\zeta\bar{\zeta}$ & $L=bx$; on aura donc :

$$8bx\zeta^6-8b^2x^2\zeta^4+4b^3x^3\zeta^2-4a^2bx\zeta^4-2c^4\zeta^4-b^4x^4+2a^2b^2x^2\zeta^2+a^4\zeta^4=0;$$

équation qui, à cause de $\zeta\bar{\zeta}=xx+yy$, est rationnelle & donne une ligne du septième ordre, dont C est un point quadruple. On obtiendra une autre ligne du septième ordre, laquelle satisfera également, en faisant $K=x$ & $L=bx$; car on aura :

$$8bx^3\zeta^4-8bbxx\zeta^4+4b^3x\zeta^4-4aabx^3\zeta^4-2c^4x^4-b^4\zeta^4+2aabbbxx\zeta^4+a^4x^4=0$$

ou

$$\xi^4 = \frac{4a^2b^2x^2\xi^2 - 2a^2b^2x^2\xi^2 + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8b^2x^2 - 8b^2x^2 + 4l^2x - l^2};$$

d'où l'on tire

$$\xi^2 = \frac{2a^2b^2x^2 - a^2b^2x^2 \pm x^2 \sqrt{(2bx - b^2)(2c^4(l^2 - 2bx + 4x^2) - 2a^4(b^2 - 2bx + 2x^2))}}{b(2x - b)(4xx - 2lx + bb)}$$

434. On pourroit aller plus loin, & parmi les courbes qui sont coupées en quatre points par les droites menées par le point *C*, chercher celles qui jouissent de certaines propriétés données. Mais, si on fait attention aux règles que nous venons d'exposer, on ne rencontrera plus aucune difficulté, & tout ce qu'on pourra désirer en ce genre se trouvera presque sans aucune peine; ou du moins, si la question proposée n'est pas susceptible d'une véritable solution, on le reconnoitra sur-le-champ; c'est pourquoi je ne m'arrêterai pas davantage sur cette matière, pour passer à un autre sujet qui a rapport à la connoissance des lignes courbes.

CHAPITRE XVIII.

De la Similitude & de l'Affinité des lignes Courbes.

435. TOUTE équation à une ligne courbe doit renfermer, outre les coordonnées perpendiculaires *x* & *y*, une ou plusieurs quantités constantes, telles que *a*, *b*, *c*, &c. lesquelles désignent des lignes constantes, & qui sont par-tout avec les variables *x* & *y* un même nombre de dimensions de lignes. Car, s'il y a dans un terme un produit de *n* lignes multipliées entre elles, il faut nécessairement que les autres termes renferment un produit d'autant de lignes; autrement on devroit comparer entre elles des quantités hétérogènes, ce qui est impossible.

impossible. Ainsi, dans toute équation à une courbe, les lignes constantes $a, b, c, \&c.$, formeront par-tout avec les variables x & y un même nombre de dimensions, à moins que par hasard une des lignes constantes ne soit exprimée par l'unité ou par un autre nombre abstrait. Il suit de cette remarque que, s'il ne se trouvoit aucune ligne constante dans l'équation, les variables x & y compléteroient elles seules dans chaque terme un même nombre de dimensions; & que par conséquent elles formeroient une fonction homogène. Mais nous avons vu auparavant qu'une telle équation n'appartient point à une ligne courbe, mais bien à un système de lignes droites qui s'entrecoupent réciproquement au même point.

436. Examinons donc une équation qui, outre les deux variables x & y , renferme une ligne constante a , de manière que les trois lignes a, x & y , forment par-tout dans l'équation le même nombre de dimensions. Une équation de cette nature, suivant la valeur qu'on jugera à propos de donner à la constante a , exprimera une infinité de courbes qui ne différencieront entre elles que par la grandeur, & qui d'ailleurs seront entièrement semblables. Ainsi toutes les courbes qui sont comprises de cette manière dans une même équation, sont regardées avec raison comme étant d'une même espèce & semblables les unes aux autres; & on ne remarquera entre elles d'autre différence que celle qu'on conçoit exister dans les cercles de différente grandeur.

437. Pour mieux faire sentir cette similitude, nous prendrons une équation déterminée, qui, outre les variables x & y , renferme une seule ligne constante a , que nous appellerons *Paramètre*; celle-ci, par exemple :

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Soit $AC = a$ la valeur du paramètre, & AMB la ligne Pl. IX. Fig. 88:
courbe exprimée par cette équation, en prenant la droite AB
pour axe, & en supposant les coordonnées $AP = x$ & PM
 $= y$. Donnons à présent au paramètre a une autre valeur quel- Pl. IX. Fig. 89:
conque $ac = a$, & soit amb la courbe représentée alors par

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 Gg

l'équation proposée ; ces deux courbes AMB & amb seront semblables l'une à l'autre. En effet, si AC reste $= a$, $AP = x$, $PM = y$, & que $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; que dans ce cas on prenne $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, on aura $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; car, si au lieu de a , x & y , on écrit respectivement $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$ & $\frac{y}{n}$, l'équation demeurera la même, à cause que tous les termes sont divisés par n^3 .

438. Ainsi une des propriétés des courbes semblables, & qui peut caractériser leurs similitudes, est que, si on prend les abscisses AP , ap , proportionnelles aux paramètres AC & ac , les appliquées PM & pm auront en même temps le même rapport; c'est-à-dire que, si on suppose $AP : ap :: AC : ac$, on aura aussi $PM : pm :: AC : ac$. Puisqu'on a $AP : PM :: ap : pm$, ces courbes seront donc semblables dans le sens géométrique, & jouiront sous tous les rapports, à la grandeur près, des mêmes affections. Par exemple, en prenant des abscisses AP , ap , homologues ou proportionnelles aux paramètres AC & ac , non-seulement les appliquées PM & pm auront le même rapport, mais encore toutes les autres lignes semblablement tirées. Les arcs AM & am seront aussi comme AC & ac . De plus, les aires semblables APM & apm seront dans un rapport doublé, ou comme AC^2 à ac^2 ; & si on prend deux points homologues quelconques O & o , de manière qu'on ait $AO : ao :: AC : ac$; & que de ces deux points on mène, sous des angles égaux AOM , oam , des droites OM , om aux courbes, on aura aussi $OM : om :: AC : ac$. Enfin la similitude des figures fera que les tangentes aux points homologues M & m seront également inclinées à l'axe, & que les rayons osculateurs auront aussi le même rapport des paramètres AC & ac .

439. Il suit de là que tous les cercles sont des figures semblables exprimées par l'équation $yy = 2ax - xx$, & qu'il en est de même de toutes les courbes renfermées dans l'équation $yy = ax$, c'est-à-dire, de toutes les paraboles.

Comme dans ces sortes d'équations qui, comme nous venons de le voir, comprennent les courbes semblables, les coordonnées x & y avec le paramètre a forment dans tous les termes un même nombre de dimensions, il s'ensuit que, si on détermine la valeur de y , on la trouvera égale à une fonction homogène d'une dimension de a & de x . Donc réciproquement, si P désigne une fonction homogène d'une dimension de a & de x , l'équation $y = P$ contiendra une infinité de courbes semblables, qu'on fera naître en donnant successivement au paramètre a des valeurs différentes. Par la même raison, une équation de cette nature, qui appartient aux courbes semblables, donnera pour l'abscisse x une fonction d'une dimension de a & de y ; & le paramètre a lui-même fera égal à une fonction d'une dimension de x & de y .

440. Or, étant donnée une courbe quelconque AMB , on pourra par une pratique facile en décrire une infinité d'autres qui lui soient semblables. Car, en prenant un rapport quelconque déterminé, par exemple, celui de $1 : n$ pour celui des côtés homologues de la courbe donnée & de celle qu'il s'agit de décrire, si la courbe donnée AMB est rapportée à l'axe AB par le moyen des coordonnées perpendiculaires AP & PM , il n'y aura qu'à prendre sur un axe semblable ab une abscisse ap , telle que AP soit : $ap :: 1 : n$; & élever du point p une appliquée perpendiculaire pm , de manière qu'on ait pareillement $PM : pm :: 1 : n$; le point m appartiendra à la courbe semblable amb , & les points M & m seront homologues. On pourra encore décrire la courbe en partant d'un point quelconque fixe O . Car, après avoir pris dans la courbe, qu'il s'agit de décrire, un point fixe semblablement placé, il n'y aura qu'à faire l'angle $o m$ toujours égal à l'angle $AO M$, & couper om de manière que OM soit : $om :: 1 : n$; le point m ainsi déterminé appartiendra pareillement à la courbe semblable amb . On pourra donc de cette manière décrire une courbe semblable pour chaque rapport $1 : n$ pris à volonté. On se sert ordinairement pour cela d'instrumens, au moyen desquels il est facile de tracer des figures d'une grandeur quelconque, & qui soient semblables à une figure donnée.

441. Ainsi, lorsque la nature de la courbe proposée AM sera donnée par une équation quelconque entre les coordonnées $AP = x$ & $PM = y$, il sera facile d’avoir l’équation qui convient à la courbe semblable am . En effet, soit l’abscisse homologue $ap = X$, & l’appliquée $pm = Y$; on aura par construction $x : X :: 1 : n$ & $y : Y :: 1 : n$; d’où l’on tire $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Ces valeurs, substituées dans l’équation donnée en x & en y , donneront une équation entre X & Y , qui sera celle des courbes semblables. Si donc on n’admet dans cette nouvelle équation pour estimer les dimensions que les seules coordonnées X & Y avec la lettre n , le nombre en sera par-tout nul; ou, si, pour faire disparaître les fractions, on multiplie l’équation par une puissance quelconque de n , on en trouvera une autre dans laquelle ces trois quantités X , Y & n , formeront dans tous les termes un même nombre de dimensions. Or nous avons vu ci-dessus que dans toute équation qui appartenait à des courbes semblables, les deux coordonnées avec la constante, d’où dépend leur similitude, forment par-tout le même nombre de dimensions; on a donc un caractère particulier qui constitue les équations des courbes semblables.

442. Dans les courbes semblables les abscisses & les appliquées homologues croissent ou diminuent dans le même rapport; mais, si les abscisses suivent un rapport quelconque, & les appliquées un autre, les courbes ne seront plus semblables. Cependant, à cause de l’espèce d’analogie qu’on remarque dans les courbes, qu’on obtient de cette manière, on dira qu’elles ont entre elles de l’affinité. Ainsi l’affinité comprend sous elle la similitude, comme espèce; car les courbes qui ont de l’affinité deviennent semblables, lorsque les rapports différens, que les abscisses & les appliquées ont entre elles en particulier, deviennent égaux. Ainsi une courbe quelconque AMB étant donnée, on en trouvera autant qu’on voudra amb , qui auront de l’affinité avec la première en procédant de la manière suivante. On prendra l’abscisse ap , de sorte qu’on ait $AP : ap :: 1 : m$; ensuite on élèvera l’appliquée pm , de façon que

$P\bar{M}$ soit : $pm :: 1 : n$; & par ce moyen, en changeant l'un ou l'autre de ces rapports $1 : m$ & $1 : n$, ou les deux à la fois ; on aura une infinité de lignes courbes qui seront caractérisées par leur affinité avec la première AMB .

443. Supposons la nature de la courbe donnée AMB exprimée par une équation quelconque entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$ & $PM = y$; & dans la courbe amb , déterminée de la manière que nous venons de dire, soient l'abscisse $ap = X$ & l'appliquée $pm = Y$; à cause de $x : X :: 1 : m$ & de $y : Y :: 1 : n$, on aura $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Donc, si on substitue ces valeurs dans l'équation donnée entre x & y , on aura l'équation générale entre X & Y , qui convient aux courbes dont il s'agit. Pour connoître plus intimement la nature de cette équation, supposons que celle de la courbe donnée AMB soit telle, qu'on ait pour l'appliquée y une fonction quelconque de x que nous ferons $= P$, ou que $y = P$. Si donc on substitue dans P , au lieu de x , $\frac{x}{m}$, P deviendra une fonction de X & de m de dimension nulle ; & par conséquent on aura l'équation générale des courbes qui ont de l'affinité, en égalant $\frac{Y}{n}$ à une fonction de X & de m de dimension nulle ; ou, ce qui revient au même, on égalera une fonction de dimension nulle de Y & de n à une fonction de dimension nulle de X & de m .

444. Or la différence entre les courbes semblables & celles qui ont de l'affinité consiste principalement en ce que les courbes qui sont semblables à l'égard d'un axe ou d'un point fixe, le doivent être de même par rapport à tous les autres axes ou à tous les points homologues ; au lieu que les secondes ne jouissent de leur propriété qu'à l'égard des axes auxquels on les rapporte ; & qu'on ne peut pas prendre à volonté d'autres axes ou d'autres points homologues, auxquels on puisse rapporter leur affinité. Au reste, il faut observer que les deux espèces de courbes que nous venons de considérer, sont les unes & les autres du même ordre, & qu'elles appartiennent conséquemment au même genre de lignes. Pour

donner une idée plus nette de ce que nous venons de dire de la similitude & de l’affinité, nous l’éclaircirons par quelques exemples tirés des courbes les plus connues.

445. Soit donc la courbe donnée un cercle rapporté au diamètre, dont la nature est représentée par l’équation $y^2 = 2cx - x^2$. Faisons $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, l’équation résultante entre X & Y comprendra toutes les courbes semblables; on aura donc $\frac{Y^2}{nn} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$ ou $Y^2 = 2ncX - XX$; d’où il suit que toutes les courbes semblables au cercle sont elles-mêmes des cercles, dont les diamètres $2nc$ diffèrent entre eux, comme on voudra. Mais, pour trouver les courbes qui ont de l’affinité avec le cercle, il faudra faire $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, & on aura $\frac{Y^2}{nn} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$ ou $m^2 Y^2 = 2mn^2cX - nnXX$; équation générale à l’Ellypse rapportée à l’un des axes principaux. On voit par là que toutes les Ellypsés sont des lignes courbes qui ont de l’affinité avec le cercle; & qu’il en est de même de toutes les Ellypsés comparées les unes aux autres. On conçoit, par la même raison, que toutes les hyperboles jouissent de la même propriété; & les ellypsés, aussi bien que les hyperboles, dans lesquelles les deux axes principaux ont entre eux le même rapport, seront des courbes respectivement semblables.

446. Quant à la parabole exprimée par l’équation $y^2 = cx$, il est clair que toutes les courbes qui lui sont semblables sont aussi des paraboles; & que par conséquent toutes les paraboles sont semblables entre elles. Mais, pour avoir les courbes qui ont de l’affinité avec la parabole, nous ferons $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$; ce qui donnera l’équation $Y^2 = \frac{n^2c}{m}X$, laquelle, représentant aussi des paraboles, fait voir manifestement que les courbes qui ont de l’affinité avec la parabole, lui sont en même temps semblables, en sorte que dans ce cas la similitude a une signification aussi étendue que l’affinité. La même chose a lieu

pour toutes les courbes dont l'équation est exprimée par deux termes seulement; telles sont les expressions $y^3 = c c x$; $y^3 = c x^2$; $y^2 x = c^3$, &c. Ainsi les courbes qui ont de l'affinité soit avec les paraboles, soit avec les hyperboles, leur sont en même temps semblables; ce qui n'a pas lieu pour les courbes d'un autre genre, comme nous l'avons déjà remarqué à l'égard du Cercle & de l'Ellypse.

447. De même que dans une équation donnée entre x & y , dans laquelle il entre autant de quantités constantes a , b , c , &c., qu'on voudra, si on donne à chaque constante une valeur quelconque, il en résulte une courbe unique déterminée; de même, si on fait varier une des constantes, a , par exemple, & qu'on lui donne successivement différentes valeurs, chacune de ces valeurs particulières donnera naissance à une courbe; & on en aura par ce moyen une infinité qui seront semblables entre elles, pourvu qu'il n'y ait pas dans l'équation d'autres lignes constantes que a ; & dans le cas contraire, elles seront dissemblables. Mais si, outre a , on fait varier aussi une autre constante b , la variation de cette dernière donnera pour chaque valeur de a une infinité de courbes; & en faisant varier à la fois les deux constantes a & b , on aura une infinité de fois un nombre infini de lignes courbes différentes; si l'on fait varier de plus une troisième constante c , il en résultera un nombre de courbes encore infiniment plus grand; & plus le nombre des constantes qu'on fait varier sera grand, plus la puissance de l'infini qui exprimera le nombre de courbes qui en résultent, sera considérable.

448. Examinons avec un peu plus d'attention cette infinité de courbes qui proviennent d'une équation, lorsqu'on fait varier seulement une des lignes constantes. Une telle équation, lorsqu'on conserve le même axe & la même origine des abscisses, non-seulement exprime cette infinité de lignes courbes dont on vient de parler; mais indique de plus leur situation; de sorte qu'elles remplissent l'espace donné qu'on voudra, sur lequel il est impossible d'assigner un point par où ne passe pas une de ces lignes. Ces courbes, suivant la nature de l'équation, seront donc dissemblables ou semblables,

comme on en peut juger par ce qui précède; il peut même arriver qu’elles soient en même temps semblables & égales, & qu’elles ne diffèrent entre elles que par leur position. Ainsi cette équation $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, en faisant varier a , exprimera une infinité de cercles égaux dont le rayon $= c$, & dont les centres sont situés sur une droite perpendiculaire à l’axe.

Pl. X. Fig. 90. 449. Réciproquement, si une seule & même courbe est tracée sur un même plan dans une infinité de situations différentes assujetties à une certaine loi, on pourra trouver une équation qui, en faisant varier une seule constante, représentera ce nombre infini de courbes égales entre elles. Soit la courbe qui doit être dans un nombre infini de situations différentes, un cercle dont le rayon $= c$, dont le sommet placé successivement en A, a , trace une courbe donnée AaL , que j’appelle *Directrice*, & dont le diamètre ab reste constamment parallèle à l’axe AB . Pour trouver l’équation qui convient à tous ces cercles, on prendra un point quelconque a de la directrice, d’où on abaissera sur l’axe principal la perpendiculaire aK . On supposera $AK = a$; & à cause que la directrice est donnée, on aura Ka en a ; soit donc $Ka = A$, A sera une fonction déterminée de a . Alors on mènera de a la parallèle ab à l’axe principal, laquelle sera le diamètre du cercle dont le sommet est placé sur le point a de la directrice. D’un point quelconque m de ce cercle soit abaissée l’appliquée $mP = y$, qui répond à l’abscisse $AP = x$, on aura donc $ap = x - a$, & $pm = y - A$; mais, si on suppose $ap = t$ & $pm = u$, la nature du cercle donne $uu = 2ct - tt$; & à cause que $t = x - a$ & $u = y - A$, on aura $(y - A)^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$ pour l’équation générale, qui renferme tous les cercles placés, comme nous venons de le dire, sur la directrice AaL ; & on en déduira tous ces cercles, en faisant varier la ligne a , d’où dépend en même temps la valeur de A .

450. Semblablement, si, au lieu d’un cercle, on fait glisser une autre courbe quelconque amb sur la directrice AaL , de manière que son sommet ou l’origine des abscisses soit toujours sur cette dernière ligne, & que l’axe ab demeure constamment

tamment parallèle à lui-même, on aura la même courbe décrite une infinité de fois, & il sera possible de trouver une équation qui comprenne à la fois toutes ces lignes courbes. Supposons la nature de la courbe, qu'on fait mouvoir, exprimée par une équation entre les coordonnées $ap=t$ & $pm=u$; & prenons pour l'axe principal, auquel se rapportent toutes les courbes considérées en général, la droite AB parallèle aux axes $a b$, laquelle est en même temps l'axe de la directrice $A a L$. Supposant, comme auparavant, $AK=a$ & $Ka=A$, A étant une fonction quelconque de a ; soient l'abscisse $AP=x$ & l'appliquée $Pm=y$, on aura $t=x-a$ & $u=y-A$. Si donc on substitue ces valeurs, au lieu de t & de u , dans l'équation donnée entre t & u , on obtiendra l'équation générale qui renferme à la fois toutes les courbes $a m b$. Car quelque valeur qu'on donne à a , on aura une des courbes sans nombre $a m b$ qui sont décrites par ce mouvement. Ainsi, si la courbe $a m b$ est une parabole exprimée par l'équation $uu=ct$, l'équation $(y-A)^2=c(x-a)$ comprendra ce nombre infini de paraboles égales, dont les sommets sont placés sur la directrice $A a L$, & dont les axes sont parallèles à la droite AB .

451. Nous avons supposé que le sommet A de la courbe glissoit sur la directrice donnée, de manière que l'axe restât toujours parallèle à lui-même; mais on peut supposer encore que, pendant ce mouvement du sommet sur la courbe donnée, la position de l'axe de la courbe $a b$ varie aussi d'une manière quelconque; on aura alors une équation beaucoup plus générale pour la même courbe décrite une infinité de fois sur un plan donné suivant une loi quelconque. Pour rendre cela plus clair, imaginons que le sommet A de la courbe se meuve sur la circonférence $A a$ de manière que l'axe de la courbe $a b$ soit toujours dirigé vers le centre O du cercle. Le mouvement de rotation de la courbe AMB avec l'axe BAO autour du point O donnera donc à la même courbe AMB une infinité de situations différentes, qu'il s'agit de comprendre dans une seule équation, qui contiendra une constante quelconque qu'on suppose variable.

Pl.X. Fig. 91.

452. Soit le rayon invariable $AO = aO = c$, & soit l'angle $AOa = \alpha$, lequel est supposé variable. D'un point quelconque m de la courbe amb , prise dans une situation quelconque, soit abaissée sur la droite OAB , considérée comme axe principal, l'appliquée mP ; & soit $OP = x$ & $Pm = y$. Qu'on abaisse ensuite du point m sur le propre axe ab de la courbe amb la perpendiculaire mp ; en faisant $ap = t$ & $pm = u$, on aura une équation invariable entre t & u , qui exprimera la nature de la courbe amb . Du point P soit menée Ps parallèle à Ob , jusqu'à ce qu'elle soit rencontrée en s par le prolongement de l'appliquée mp , on aura $ps = x \sin. \alpha$, $Op - Ps = x \cos. \alpha$; mais alors, à cause de l'angle $Pms = AOa = \alpha$, on aura $Ps = y \sin. \alpha$ & $ms = y \cos. \alpha$. D'où l'on conclura $Op = c + t = x \cos. \alpha + y \sin. \alpha$ & $mp = u = y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$. Il faudra donc substituer dans l'équation donnée entre t & u , $t = x \cos. \alpha + y \sin. \alpha - c$ & $u = y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$; & on aura l'équation générale entre les coordonnées x & y , qui, en supposant α variable, renfermera toutes les courbes amb .

Pl. X. Fig. 92.

453. Supposons à présent que, tandis que le sommet de la courbe AMB se meut suivant la directrice quelconque AaL , la position de l'axe ab change continuellement, de sorte que l'angle AOa dépende d'une manière quelconque du point a . Par exemple, le sommet étant en a , soit $AK = a$, $Ka = A$, & l'angle $AOa = \alpha$; la directrice étant donnée, A deviendra aussi une fonction quelconque connue de a ; supposons encore que le sinus ou le cosinus de l'angle α soit pareillement une fonction quelconque de a . Cela posé, on aura $KO = \frac{A}{\tan. \alpha}$ & $Oa = \frac{A}{\sin. \alpha}$. D'un point quelconque m de la courbe amb soit d'abord abaissée sur l'axe principal AO la perpendiculaire mP , & ensuite sur le propre axe de la courbe la perpendiculaire mp ; soient $AP = x$, $Pm = y$, & $ap = t$, $pm = u$; on aura une équation invariable entre les coordonnées t & u , au moyen de laquelle il s'agit d'obtenir une équation variable entre x & y , qui contienne toutes les courbes amb .

454. Menons à cet effet du point P sur mp prolongé la perpendiculaire Ps , qui sera parallèle à l'axe de la courbe abO ; à cause de l'angle $Pms = A O a = \alpha$, on aura $Ps = y \sin. \alpha$ & $ms = y \cos. \alpha$. Ensuite, à cause de $OP = a + \frac{A}{\tan g. \alpha} - x$, on aura $ps = a \cdot \sin. \alpha + A \cdot \cos. \alpha - x \sin. \alpha$, & $Op - Ps = a \cos. \alpha + \frac{A \cdot \cos. \alpha}{\tan g. \alpha} - x \cdot \cos. \alpha$. On aura donc $Op = a \cos. \alpha + \frac{A \cdot \cos. \alpha}{\tan g. \alpha} - x \cdot \cos. \alpha + y \cdot \sin. \alpha = \frac{A}{\sin. \alpha} - t$; & par conséquent $t = A \cdot \sin. \alpha - a \cos. \alpha + x \cdot \cos. \alpha - y \sin. \alpha$, & $u = -a \sin. \alpha - A \cdot \cos. \alpha + x \sin. \alpha + y \cdot \cos. \alpha$. Ainsi, en substituant dans l'équation donnée entre t & u ,

$$t = (x - a) \cdot \cos. \alpha - (y - A) \cdot \sin. \alpha$$

&

$$u = (x - a) \sin. \alpha + (y - A) \cdot \cos. \alpha;$$

on aura l'équation demandée entre x & y . Concluons que; quelle que soit la loi suivant laquelle la même courbe $am b$ est décrite une infinité de fois sur un plan, on trouvera de cette manière l'équation générale qui contient à la fois toutes ces courbes.

455. On renferme donc de cette manière dans une équation toutes les mêmes courbes, quel qu'en soit le nombre, qui ne diffèrent entre elles qu'à raison de leur position, pourvu que l'équation donnée entre t & u soit invariable, & qu'elle ne renferme point de constante a qu'on fasse varier. Mais s'il y a dans l'équation donnée entre t & u une ou plusieurs constantes qui soient supposées également dépendantes de a , on obtiendra alors une infinité de courbes diverses semblables ou dissemblables entre elles, qui seront pareillement contenues dans une même équation; toutes les courbes seront semblables, si l'équation entre t & u est telle qu'il en résulte pour u une fonction quelconque homogène d'une dimension de t & de f , f étant une quantité quelconque dépendante de a ; & si le contraire a lieu, les courbes seront dissemblables.

Pl. X. Fig. 93.

456. Pour éclaircir cette matière par un exemple, supposons une infinité de cercles AB, aB, amb , assujettis à passer par un point fixe B , & qui aient tous leurs centres sur une même droite AE ; tels sont les cercles qui représentent ordinairement les méridiens sur les mappemondes. Soit abaissée du point B sur la droite AE la perpendiculaire BC que je suppose $=c$, cet intervalle est invariable; & parmi le nombre infini de cercles décrits, considérons-en un amb ; abaïssons une appliquée mP , faisons $CP = x$ & $Pm = y$; & supposons $aE = BE = a$, le rayon de ce cercle, qui, quoique constant par rapport au même cercle, est cependant variable à l'égard de tous; nous aurons $CE = \sqrt{aa - cc}$ & $PE = x + \sqrt{aa - cc}$. Puis donc que $PE^2 + Pm^2 = aa$, on aura $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{aa - cc} + aa - cc = aa$, ou $yy = cc - 2x\sqrt{aa - cc} - xx$; mais, si au lieu d'une constante, on introduit dans l'équation une variable pour représenter CE , & qu'on fasse $CE = a$, on obtiendra cette équation un peu plus simple $y^2 = c^2 - 2ax - x^2$, qui, à cause de la variation de a , représentera tous les cercles qui passent par B , & qui ont leurs centres sur la droite AE . On rapportera d'une manière semblable à une même équation toutes les courbes, quel qu'en soit le nombre & la nature, lorsqu'elles sont assujetties à une certaine loi dans leur situation, pourvu qu'on ait soin d'observer exactement la différence qui existe entre les constantes variables & invariables.

CHAPITRE XIX.

De l'Interfection des Courbes.

457. NOUS avons eu occasion de remarquer plus d'une fois, dans les chapitres précédens, comment les lignes courbes sont coupées par les lignes droites; nous y avons fait voir que les lignes du second ordre ne pouvoient être coupées par des droites en plus de deux points; que les lignes du troisième ordre n'étoient pas susceptibles de plus de trois interfections, & que cellès du quatrième en admettoient tout au plus quatre. Ayant donc l'intention de faire connoître dans ce chapitre le nombre d'interfections que forment entre elles deux courbes quelconques, nous commencerons ce traité par les lignes droites, & nous chercherons les points où une droite quelconque peut rencontrer une courbe; car par ce moyen nous préparerons la voie pour trouver les interfections réciproques des lignes courbes; ce qui est souvent d'un très-grand usage dans la construction des équations des degrés supérieurs, comme nous aurons occasion de le voir plus au long dans le chapitre suivant.

458. Proposons-nous donc une courbe quelconque AMm , Pl. X. Fig. 94. dont la nature soit donnée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$, $PM = y$. Imaginons ensuite une droite quelconque BMm , dont il s'agit de déterminer le nombre & le lieu des interfections avec la courbe AMm . Dans cette vue, on cherchera de même pour la ligne droite une équation entre les coordonnées perpendiculaires x & y , rapportée au même axe AP & à la même origine A des abscisses. L'équation à la ligne droite sera de cette forme $ax + \ell y = \gamma$; laquelle apprend qu'en faisant $x = 0$, on aura $y = AD = \frac{\gamma}{\ell}$, & qu'en faisant $y = 0$, on aura $x = -\frac{\gamma}{a}$.

$= \frac{\gamma}{a}$; d'où l'on pourra conclure le point de concours B de cette droite avec l'axe, & la valeur de l'angle en B dont la tangente $= \frac{AD}{AB} = \frac{-a}{c}$. Par ce moyen la courbe & la droite se trouvent exprimées par des équations données entre les coordonnées communes x & y .

459. Si nous prenons dans les deux équations des abscisses x constamment égales, les appliquées y , si elles sont différentes, feront connoître combien les points de la courbe & de la droite qui répondent à la même abscisse sont distans l'un de l'autre. Par conséquent, si la valeur de y , qu'on tire de chaque équation, se trouve égale, c'est une preuve que la courbe & la droite auront un point commun, & qu'il y aura en cet endroit un point d'intersection. Ainsi, pour trouver les intersections, il faudra supposer dans l'une & l'autre équation que les abscisses x & les appliquées y sont en même temps égales; on aura par là deux équations qui renfermeront deux quantités inconnues x & y , & dont la résolution donnera ou les abscisses x auxquelles répondent les intersections, ou les appliquées y . Par exemple, si on chasse de ces deux équations l'inconnue y , on trouvera une équation qui ne contiendra plus que l'inconnue x , dont les valeurs représenteront les abscisses AP , Ap ; d'où il faudra mener les appliquées PM , pm , qui passeront par les points d'intersection M & m .

460. Puisque l'équation pour la droite BMm est $ax + cy = \gamma$, on en tirera la valeur de $y = \frac{\gamma - ax}{c}$, qui, substituée dans l'équation à la courbe à la place de y , en donnera une autre qui ne renfermera plus que x , & dont les racines réelles exprimeront toutes les abscisses auxquelles répondent les intersections; & par conséquent le nombre des intersections se conclura de celui des racines réelles de x que fournit l'équation trouvée. Mais, parce que dans la valeur de $y = \frac{\gamma - ax}{c}$, l'inconnue x n'a qu'une dimension, l'équation qui résultera de la substitution ne donnera pas à x plus de dimensions que les deux quantités x & y n'en donnoient conjointement dans l'équation à la courbe.

Il s'enfuit que x aura autant de dimensions, ou moins, si la substitution fait disparaître les plus hautes puissances de x .

461. Quand on aura trouvé de cette manière les abscisses AP , Ap , qui répondent aux intersections, il sera facile de déterminer les points M & m . Car, puisque les appliquées élevées aux points P & p passent par les intersections, il n'y aura qu'à marquer les points où elles rencontrent la droite BMm . On pourroit aussi marquer les points où ces appliquées rencontrent la courbe AMm ; mais comme il arrive souvent que l'appliquée coupe la courbe en plus d'un point, il resteroit de l'incertitude sur celui qui marqueroit l'intersection; on obvie à cet inconvénient, en prenant les intersections sur la droite BMm , parce qu'aucune appliquée ne peut la couper en plus d'un point. S'il arrivoit que deux valeurs de x devinssent égales, cela apprendroit que les deux points d'intersection M & m se confondroient en un seul; c'est le cas où la droite BM touchera la courbe, ou la rencontrera en un point double.

462. Si, après avoir éliminé y , l'équation résultante, qui doit donner x , n'a voit aucune racine réelle, on en concluroit que la droite BMm ne coupe ou ne touche la courbe nulle part. Mais, s'il y a des racines réelles, elles feront connoître, quel qu'en soit le nombre, autant d'intersections, parce qu'il répond toujours à chaque abscisse réelle une appliquée réelle de la droite BMm ; & comme celle de la courbe lui est égale, il est impossible qu'il n'y ait pas d'intersection. Il faut bien remarquer ici que, lorsqu'il s'agit de courbes qui s'entrecoupent, toutes les racines ne donnent pas toujours autant d'intersections; on en sentira bientôt la raison, lorsque nous considérerons deux courbes, & que nous chercherons leurs intersections.

463. Soient donc décrites deux courbes quelconques MEM , mEm , Pl. X. Fig. 25. qui se coupent réciproquement; supposons, pour déterminer leurs points d'intersection, la nature de chacune exprimée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires x & y rapportées à un axe commun AB , & à la même origine des abscisses. Si on prend dans les deux courbes

des abscisses x égales, par-tout où il y aura intersection, les appliquées y le seront aussi. Par conséquent, si, au moyen des équations proposées pour les deux courbes, on en forme une nouvelle qui ne renferme plus que l'inconnue x , toutes les intersections M, m, m , quel qu'en soit le nombre, seront indiquées par les racines réelles de cette équation; c'est-à-dire, que les abscisses AP, Ap, Ap , &c. qui répondent aux intersections M, m, m , &c. seront les valeurs de x qui conviennent pour cette équation.

464. Mais, après avoir trouvé ces abscisses AP, Ap , &c. qui conviennent aux intersections, il ne sera pas aussi facile de déterminer ces points. Car, si plusieurs appliquées répondent pour chaque courbe à la même abscisse AP , ce qui arrive, lorsque dans l'une & l'autre de ces lignes y est une fonction multiforme de x , il faudra choisir parmi cette double pluralité d'appliquées celles qui sont égales entre elles. Ce choix fera d'autant plus embarrassant, que l'appliquée y aura plus de valeurs différentes dans chaque courbe; on remédiera cependant facilement à cet inconvénient, si dans l'élimination de l'appliquée y , au moyen des deux équations proposées, on a recours à l'équation qui donne y en x ; car celle-ci donnera pour chaque valeur de x la grandeur de l'appliquée depuis le point P jusqu'au point d'intersection; & il ne sera pas besoin pour cela d'examiner la nature de l'une ou l'autre des deux courbes, ou même des deux à la fois.

465. Soit l'une des courbes une parabole dont la nature est exprimée par l'équation $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; & l'autre un cercle représenté par l'équation $y^2 + x^2 - c^2 = 0$. Pour éliminer y , on soustraira d'abord la première équation de la seconde, & on aura pour reste $2xy + 2ax - cc = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{cc - 2ax}{2x}$; d'où il suit que, quelque valeur qu'on ait pour x , on trouvera toujours pour y des valeurs correspondantes réelles. Substituons donc cette valeur, que nous venons de trouver pour y , dans la seconde équation, nous aurons :

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

dont

dont chaque racine réelle fournira une vraie intersection. Supposons $c = 2a$, & partant :

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

équation, dont une racine $x = 2a$. Après l'avoir extraite, l'équation restante fera :

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0;$$

laquelle donne encore une racine réelle. Or on trouvera l'appliquée qui convient à ces deux racines, au moyen de l'équation $y = \frac{2a^2 - ax}{x}$; par exemple, à la première valeur de $x = 2a$ répondra $y = 0$; ce qui apprend que l'intersection a lieu sur l'axe même.

466. On voit par-là que, toutes les fois que deux équations entre x & y sont telles que dans l'élimination il en résulte pour y une fonction rationnelle de x , chaque racine réelle de x que donnera la dernière équation, après qu'il n'y aura plus de y , donnera une vraie intersection; mais, si en éliminant, on ne trouve point de fonction rationnelle de x pour la valeur de y , il peut arriver que toutes les racines réelles de la dernière équation ne donnent pas toujours de vraies intersections; car la valeur de x peut être telle, qu'il n'y réponde aucune appliquée réelle ni dans l'une ni dans l'autre courbe, cependant on auroit tort d'en conclure que, dans ce cas, le calcul induit en erreur; car, quoiqu'une telle abscisse donne dans les deux courbes une valeur imaginaire pour l'appliquée correspondante, comme l'égalité & l'inégalité ont lieu pour les quantités imaginaires comme pour les quantités réelles, rien n'empêche de regarder ces appliquées imaginaires comme égales entre elles, & de concevoir alors au moins une sorte d'intersection, quoique non réelle.

467. Pour rendre cela plus clair, décrivons sur le même axe BAE une parabole EM , dont le paramètre $= 2a$, & hors de cette courbe un cercle AmB dont le rayon $= c$, laissant entre les deux courbes un intervalle $AE = b$, de ma-

Pl. X. Fig. 96.

nière que nous soyions bien assurés qu'il n'y a aucun point d'intersection. Prenons le point A pour l'origine des abscisses que nous regardons comme positives en allant vers E , & au contraire négatives, en rétrogradant vers B ; nous aurons pour la parabole cette équation $yy = 2ax - 2ab$; & pour le cercle celle-ci $yy = -2cx - xx$. Si à présent nous éliminons y , comme si nous voulions avoir un point d'intersection, nous aurons tout de suite $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$; ce qui donne pour x deux valeurs réelles, savoir :

$$x = -a - c \pm \sqrt{(a+c)^2 + 2ab},$$

l'une positive, l'autre négative, quoiqu'il n'y ait cependant aucune intersection; c'est qu'alors on a pour ces deux abscisses, tant dans la Parabole que dans le Cercle, des appliquées imaginaires, qui, quoique telles, ne laissent pas pourtant d'être égales l'une à l'autre; en substituant cette valeur de x , on trouvera :

$$y = \sqrt{(-2a^2 - 2ac - 2ab \pm 2a\sqrt{(a^2 + 2ac + c^2 + 2ab)})},$$

expression imaginaire.

468. Cet exemple est propre à faire voir qu'il existe aussi des intersections de courbes imaginaires, qui, quoique nulles, sont indiquées par le calcul aussi bien que les réelles. C'est pour cette raison qu'on auroit tort de conclure du nombre des racines réelles de x , que donne la dernière équation, celui des intersections; car il peut arriver qu'il y ait plus de racines réelles que d'intersections, ou même qu'il n'y ait aucune intersection, quoiqu'on obtienne pour x deux racines réelles, ou même davantage. Néanmoins chaque intersection réelle suppose toujours une racine réelle de x dans la dernière équation; & par conséquent, il y aura toujours au moins autant de racines réelles de x , que d'intersections, quoiqu'il y ait quelquefois plus de racines réelles. Au reste, il sera facile de voir si une intersection réelle répond à une valeur donnée de x , il faudra chercher la valeur correspondante de y ; & si elle est

réelle, l'interfection le fera aussi; mais si elle est imaginaire, l'interfection sera aussi imaginaire ou nulle.

469. Cette exception ou cette différence entre le nombre des racines réelles de x & celui des interfections n'a donc lieu, que lorsque dans les deux équations l'appliquée y a partout un nombre pair de dimensions; & que par conséquent l'axe principal est en même temps diamètre de l'une & de l'autre courbe; ou lorsque les équations sont telles qu'en éliminant yy , y sorte en même temps du calcul; & qu'ainsi y ne puisse être exprimé par une fonction rationnelle de x . Par exemple, si une équation est $yy - xy = aa$, & l'autre $y^4 - 2xy^3 + x^2y = bbxx$; on conclura de la première $(yy - xy)^2 = a^4$, ou $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$; cette valeur, substituée dans la seconde, donnera $a^4 - x^2y^2 + x^3y = b^2x^2$, ou $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$; d'où l'on tire $xx = \frac{a^4}{aa + bb}$; &

par conséquent $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Il semble donc qu'il y a ici une double interfection; mais, pour s'assurer si l'une & l'autre est réelle, il faut recourir à la valeur de y que donne l'équation $yy - xy = aa$. On aura donc $yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa + bb)}} + a^2$.

Comme toutes les racines de cette équation sont réelles, il s'ensuit qu'il y aura quatre points d'interfection; & qu'à chaque abscisse $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$ répondent deux interfections réelles.

470. Mais toutes les fois que l'axe n'est pas en même temps un diamètre des deux courbes, ou qu'en éliminant les puissances supérieures de y , y lui-même ne sort pas du calcul; comme alors on arrive pour exprimer la valeur de y à une fonction rationnelle de x , dans ces cas, chaque racine réelle de la dernière équation indiquera autant de véritables interfections; de sorte que dans ces circonstances il n'y a aucune précaution à prendre. Cela arrive, lorsqu'une des courbes devient une droite, comme nous l'avons vu ci-dessus, ou lorsque son appliquée est exprimée par une fonction uniforme de x ; car alors il n'y aura point d'appliquée imaginaire qui réponde à aucune abscisse; & c'est pour cela que toutes les

racines de x donneront, chacune en particulier, de véritables interfections. Or, quoique y ait plusieurs dimensions dans chaque équation, on arrive ordinairement, en éliminant y , à une équation qui donne pour la valeur de y une fonction rationnelle, & par conséquent uniforme de x .

471. Les cas où quelques-unes des interfections indiquées par le calcul sont imaginaires, ont lieu quand aucune des courbes n'a d'appliquée réelle correspondante à l'abscisse qu'on a trouvée; nous en avons vu un exemple ci-dessus dans le Cercle & la Parabole; mais il peut se présenter des cas où une courbe donne pour toutes les abscisses des appliquées réelles, & que cependant il ne réponde pas d'interfections à toutes les racines réelles de x . Prenons pour exemple la ligne du troisième ordre exprimée par l'équation:

$$y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6ax^2 = 0;$$

laquelle donne pour toutes les abscisses des appliquées réelles; & même trois, si x est plus petit que $\frac{a}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$. Si on combine avec cette courbe une parabole exprimée par l'équation $yy - 2ax = 0$; cette dernière n'a point d'appliquée réelle qui réponde aux x négatifs; par conséquent il n'y a point d'interfections pour les abscisses x négatives.

472. Éliminons y ; comme la dernière équation donne $yy = 2ax$, la première se changera en celle-ci:

$$2axy - 6a^2x + 2a^2y - 6ax^2 = 0, \text{ d'où l'on tire } y = \frac{6a^2x + 6ax^2}{2a^2 + 2ax}$$

$= 3x$. Mais comme cette équation est divisible par $y - 3x$, en effectuant la division, on trouve une équation sans y , savoir $2aa + 2ax = 0$; d'où $x = -a$. Il devrait donc y avoir une interfection correspondante à l'abscisse $x = -a$, à laquelle il ne réponde dans la Parabole aucune appliquée réelle; mais, si on fait $x = -a$ dans la courbe du troisième ordre, l'équation devient $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$; d'où résulte une appliquée réelle $y = 3a$; les deux autres valeurs de y comprises dans l'équation $yy + 2aa = 0$ sont imaginaires; & ces appliquées imaginaires qu'on trouve pour ce point, de-

viennent égales aux appliquées imaginaires de la parabole prises au même point, & on aura ainsi deux interfections imaginaires; mais le facteur de l'équation supérieure $y - 3x = 0$ donnera en outre deux interfections réelles; car, en substituant, l'équation à la parabole devient $9xx - 2ax = 0$. La première interfection se trouve donc à l'origine même des abscisses, où l'on a à la fois $x = 0$ & $y = 0$; & la seconde répond à l'abscisse $x = \frac{2a}{9}$, où $y = 3x = \frac{2a}{3}$.

473. On est donc arrivé dans ce cas à des interfections imaginaires, quoique dans l'élimination de y on ait trouvé une équation $2axy - 6aax + 2aay - 6aax = 0$, dans laquelle y n'a plus qu'une dimension; d'où il paroîtroit s'en suivre que y peut être exprimé par une fonction rationnelle de x , ce que nous avons annoncé comme un symptôme auquel on reconnoissoit qu'il n'y avoit aucunes racines imaginaires; & en effet, si cette équation n'avoit pas eu de diviseurs, on n'auroit pas trouvé d'interfections imaginaires; mais, comme on a obtenu ici par la division une équation qui ne renferme plus l'appliquée y , on est dans le même cas que si y n'eût pu être exprimé par une fonction rationnelle de x . Ainsi toutes les fois qu'une telle équation est résoluble en facteurs, il faut traiter chacun à part; d'où il arrive qu'un facteur admet des interfections imaginaires, tandis que l'autre les rejette entièrement.

474. Cela bien entendu, arrêtons-nous un peu plus longtemps sur la manière de déterminer les interfections de deux courbes proposées. Comme cette recherche dépend de l'élimination d'une des coordonnées y , il suffira d'avoir égard au nombre de dimensions de cette dernière quantité dans les deux équations. Car l'élimination s'effectuera toujours de la même manière, de quelque façon que l'autre coordonnée x affecte les deux équations. Soient donc P, Q, R, S, T , &c. & p, q, r, s, t , &c. des fonctions rationnelles de x ; & supposons d'abord que les deux courbes, dont nous cherchons les interfections, soient exprimées par ces équations :

I.

$$P + Qy = 0.$$

II.

$$p + qy = 0.$$

Multiplions la première équation par p & la seconde par P ; en retranchant l'une de l'autre, nous aurons pour résultat cette autre équation délivrée entièrement de y :

$$pQ - Pq = 0.$$

Toutes les racines réelles x de cette équation, dans laquelle l'inconnue x reste seule avec des constantes, indiqueront sur l'axe les points auxquels répondent les intersections. Quelle que soit la valeur qu'on trouve pour x , il en résultera toujours pour y une valeur réelle qu'on déduira de l'une ou l'autre équation, savoir $y = \frac{-p}{q} = \frac{-p}{q}$; ce qui indique une intersection; d'où il suit que, si l'appliquée y de chaque courbe est exprimée par une fonction rationnelle ou uniforme de x , on n'aura plus à craindre d'avoir des intersections imaginaires.

475. Supposons à présent l'appliquée y d'une des courbes exprimée par une fonction uniforme de x , comme auparavant; mais celle de la seconde représentée par une fonction biforme, de sorte qu'on ait:

I.

$$P + Qy = 0.$$

II.

$$p + qy + ryy = 0.$$

Multiplions la première équation par p , la seconde par P ;

& retranchons l'une de l'autre, après la division faite par y , on aura :

III.

$$pQ - Pq - Pr y = 0,$$

ou

$$(Pq - pQ) + Pr y = 0.$$

Multiplions ensuite la première par Pr & la troisième par Q ; après la soustraction faite, nous aurons une équation qui ne contiendra plus de y :

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Chacune des racines de cette équation donnera donc les abscisses correspondantes aux intersections; lesquelles seront toutes réelles, puisque les appliquées $y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ qui répondent aux abscisses, sont elles-mêmes réelles.

476. Soit, comme auparavant, l'appliquée d'une des courbes égale à une fonction uniforme de x ; & supposons que celle de l'autre soit exprimée par une équation cubique, ou qu'elle soit une fonction triforme de x , de sorte que les deux équations proposées soient de cette forme :

I.

$$P + Qy = 0.$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplions la première par p & la seconde par P ; retranchons l'une de l'autre & divisons par y , nous aurons :

III.

$$(Pq - pQ) + Pr y + P s y y = 0.$$

Si on substitue dans cette équation à y sa valeur tirée de la première $y = \frac{-P}{Q}$, & qu'on fasse disparaître les fractions, on arrivera à cette équation :

$$PQQq - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$

ou

$$Q^3p - P Q^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

qu'on auroit pu trouver tout de suite, en mettant dans la seconde équation, au lieu de y , sa valeur tirée de la première équation $\frac{-P}{Q}$. Toutes les racines réelles de cette équation désigneront donc autant de véritables intersections, puisque pour chaque valeur de x on a par la première équation des appliquées réelles $y = \frac{-P}{Q}$.

477. De même, si l'appliquée y d'une courbe est exprimée par une équation de quatre dimensions, ou d'un plus grand nombre, tandis que l'appliquée de l'autre courbe demeure une fonction uniforme ou rationnelle de x , il est facile d'éliminer y . En effet, soient proposées les deux équations :

I.

$$P + Qy = 0,$$

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0.$$

La valeur de $y = \frac{-P}{Q}$ tirée de la première, étant substituée dans la seconde, donnera l'équation suivante, qui ne renfermera plus que des x & des quantités connues :

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Les valeurs réelles de x de cette dernière équation fourniront donc

donc autant de vraies interfections, puisque pour chaque abscisse x on peut par la première équation assigner une appliquée réelle y , savoir $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Nous supposons à présent que l'appliquée y de chaque courbe soit exprimée par des équations pures du second degré, de sorte que nous ayons, comme il suit :

I.

$$P + Ryy = 0.$$

II.

$$p + ryy = 0.$$

En éliminant yy , on trouve sur-le-champ cette équation :

$$Pr - Rp = 0,$$

dont les racines réelles n'indiquent de véritables interfections, qu'autant que les valeurs qu'on aura pour x donneront pour $\frac{-P}{R}$ ou $\frac{-p}{r}$ une quantité positive; car alors, à cause de $y^2 = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, l'appliquée y aura deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative; & par conséquent à chaque valeur de l'abscisse x tirée de l'équation $Pr - Rp = 0$, répondront deux points d'interfection également éloignés de part & d'autre de l'axe; ce qui ne peut manquer d'être, puisque l'axe est diamètre des deux courbes. Mais, si quelque valeur de x tirée de l'équation $Pr - Rp = 0$ donne une valeur négative aux expressions $\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, on en conclura qu'à cause de y imaginaire les interfections seront aussi imaginaires.

479. Supposons à présent que le second terme, qui contient y , se trouve dans les deux équations du second degré; & soient proposées en conséquence les équations suivantes :

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 K k

I.

$$P + Qy + Ryy = 0.$$

II.

$$p + qy + ryy = 0.$$

Pour chasser y de ces équations, on multipliera la première par p & l'autre par P ; &, après avoir fait la soustraction & la division par y , on aura :

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Si on multiplie ensuite la première équation par r & la seconde par R , & si on soustrait l'une de l'autre, on aura :

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Conséquemment, puisqu'on tire de ces deux équations

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

on aura

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

ou

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Les racines réelles de cette équation désigneront autant de véritables intersections, pourvu qu'à chaque valeur réelle de x réponde une valeur réelle de y dans l'équation III ou IV.

Il peut arriver cependant que les intersections soient imaginaires; ce cas a lieu, lorsque les équations III & IV ont des facteurs qui par la division font disparaître y de l'équation; car il faudra substituer cette équation à la dernière, & chercher, pour les valeurs de x qu'on en déduit, les valeurs correspondantes que donnent pour y les premières équations. Si ces dernières sont imaginaires, cela apprendra que les intersections sont imaginaires.

480. Si l'appliquée y pour une courbe est une fonction biforme, & pour l'autre une fonction triforme de x ; ou, si les équations proposées sont :

I.

$$P + Qy + Ryy = 0;$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0;$$

en multipliant la première par p , la seconde par P , & retranchant l'une de l'autre, on trouvera pour équation restante :

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + P_syy = 0,$$

qui jointe à la première présente le cas que nous avons traité dans l'article précédent; de sorte que ce qui étoit p, q, r , est ici $Pq - Qp, Pr - Rp$ & P_s , ainsi on aura :

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PP_s - PRq + QRp}$$

&

$$y = \frac{PRq - QRp - PP_s}{PQ_s - PRr + RRp};$$

d'où l'on tire

$$0 = (P R q - Q R p - P^2 s)^2 + (P Q_s - P R r + R R p)(P Q q - Q^2 p - P^2 r + P R p)$$

3 K k ij

équation dont le développement donne

$$\begin{aligned}
 &+ 3P^2QRps \\
 &- 2P^3Rqs + P^2R^2qq - PQR^2pq \\
 P^4s^2 - P^3Qrs + P^2Q^2qs - PQR^2ps + Q^2R^2p^2 &= 0; \\
 &+ P^3Rrr - P^2QRqr + PQRpr - Q^2R^2p^2 \\
 &- 2P^2R^2pr + PR^3pp
 \end{aligned}$$

& qui, à cause que le dernier terme s'évanouit, est divisible par P. On aura ainsi pour résultat :

$$\begin{aligned}
 &+ P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2Qrs + 3PQRps + PQ^2qs - Q^3ps + R^3p^3 \\
 &+ P^2R^2 - PQRqr - 2PR^2pr + Q^2Rpr + PR^2q^2 - QR^2pq = 0.
 \end{aligned}$$

Les racines réelles de cette équation feront connoître les interfections, pourvu qu'il en résulte pour y des valeurs correspondantes réelles.

481. Supposons maintenant que chaque appliquée soit exprimée par une équation cubique; & prenons, en vertu de cette hypothèse, les deux équations suivantes :

I.

$$P + Qy + Ryy + Sy^3 = 0.$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

En multipliant la première par p & la dernière par P, & faisant la soustraction comme auparavant, nous aurons pour reste :

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)yy = 0.$$

Multiplions ensuite la première par s & la seconde par S ; nous aurons, après la soustraction,

IV.

$$(Sp - Ps) + (Sq - Qs)y + (Sr - Rs)yy = 0.$$

Ces équations III & IV comparées avec les deux que nous avons traitées art. 479, nous fourniront les résultats suivans :

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

& en faisant ces substitutions dans l'équation finale, nous aurons :

$$\begin{aligned} &+(Pq - Qp)^2(Sr - Rs)^2 - 2(Pq - Qp)(Ps - Sp) \\ &(Sp - Ps)(Sr - Rs) + (Ps - Sp)^2(Sp - Ps)^2 \\ &+(Pr - Rp)^2(Sp - Ps)(Sr - Rs) - (Pq - Qp) \\ &(Pr - Rp)(Sq - Qs)(Sr - Rs) - (Pr - Rp) \\ &(Ps - Sp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) + (Pq - Qp) \\ &(Ps - Sp)(Sq - Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation renferme sept termes, qui sont tous divisibles par $Sp - Ps$, excepté le premier & le cinquième. Ces derniers ajoutés ensemble auront deux facteurs, l'un $(Pq - Qp)(Sr - Rs)$, & l'autre $(Pq - Qp)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Sq - Qs)$; celui-ci étant développé devient $= PQRs$

+ R S p q - P R q s - Q S p r ou = (S p - P s)(R q - Q r);
 &c par conséquent les termes I & V prennent cette forme
 (P q - Q p)(S r - R s)(S p - P s)(R q - Q r), laquelle
 est aussi divisible par S p - P s. L'équation résultante fera
 donc :

$$\begin{aligned} 0 = & (P q - Q p)(S r - R s)(R q - Q r) + 2(P q - Q p) \\ & (S p - P s)(S r - R s) + (S p - P s)^3 + (P r - R p)^2 \\ & (S r - R s) + (P r - R p)(S p - P s)(S q - Q s) - \\ & (P q - Q p)(S q - Q s)^2; \end{aligned}$$

qui étant développée deviendra

$$\begin{aligned} + S^3 p^3 - 3 P S^2 p^2 s + P^2 S r^3 + 2 P R^2 p r s - P^2 R r^2 s \\ + P^3 Q r s s + P R S q q r - P^3 s^3 + 3 P^2 S p s^2 - R^3 P^2 s \\ - 2 P R S p r^2 + R^2 S p^2 r - R S^2 p^2 q - Q Q R p r s - P R^2 q q s \\ - P Q S q r r + P Q R q r s + 3 P S S p q r - 3 P P S q r s \\ + P Q S p r s + Q Q S p r r + Q R R p q s - Q R S p q r \\ - 3 P Q R p s^2 + 3 Q R S p^2 s - P R S p q s + 2 P^2 R q s^2 \\ + 2 P Q S q q s - P S S q^3 - P Q^2 q s s - 2 Q S S p p r \\ - 2 Q Q S p q s + Q^3 p s s + Q S^2 p q q = 0. \end{aligned}$$

482. Pour mieux faire concevoir la méthode d'éliminer y
 de deux équations de degrés plus élevés, supposons qu'elles
 soient toutes deux du quatrième degré.

I.

$$P + Q y + R y^2 + S y^3 + T y^4 = 0.$$

II.

$$p + q y + r y^2 + s y^3 + t y^4 = 0.$$

Si nous multiplions la première équation par p & la seconde par P , nous aurons après la soustraction :

I I I.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

Si nous multiplions ensuite l'équation I par t & la seconde II par T , nous aurons, après avoir fait la soustraction :

I V.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

Faisons, pour abrégér,

$$\begin{array}{l|l|l} Pq - Qp = A & Pt - Tp = a & Sq - Qs = \alpha \\ Pr - Rp = B & Qt - Tq = b & Rq - Qr = \epsilon \\ Ps - Sp = C & Rt - Tr = c & \\ Pt - Tp = D & St - Ts = d & \end{array}$$

Il faut remarquer ici que non-seulement $a = D$, mais encore que

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sp - Qs) = D\alpha$$

$$Ac - Bb = (Pt - Tp)(Rq - Qr) = D\epsilon.$$

En faisant ces substitutions, les équations III & IV deviendront :

I I I.

$$A + By + Cyy + Dy^3 = 0.$$

I V.

$$a + by + cyy + dy^3 = 0.$$

Multiplions à présent ces équations respectivement par d & D , & retranchons l'une de l'autre; nous aurons :

V.

$$(Ad - Da) + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0.$$

Multiplions encore ces mêmes équations par a & par A , & nous trouverons, après la soustraction :

VI.

$$(Ab - Ba) + (Ac - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0.$$

Faisons de nouveau, pour abrégé,

$$\begin{array}{l|l|l} Ab - Ba = E & Ad - Da = e & \\ Ac - Ca = F & Bd - Db = f & Cb - Bc = \zeta \\ Ad - Da = G & Cd - Dc = g & \end{array}$$

On aura $G = e$ & $Eg - Ff = G\zeta$; de sorte que $Eg - Ff$ est divisible par G . Nous aurons donc les équations suivantes :

V.

$$E + Fy + Gyy = 0.$$

VI.

$$e + fy + gyy = 0;$$

d'où nous tirerons celle-ci, en faisant une opération semblable aux précédentes :

VII.

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = 0.$$

VIII.

VIII.

$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = 0.$$

Enfin faisons encore, pour abrégér,

$$\begin{array}{l|l} Ef - Fe = H & Eg - Ge = h \\ Eg - Ge = I & Fg - Gf = i; \end{array}$$

de sorte que $I = h$, nous aurons :

VII.

$$H + Iy = 0.$$

VIII.

$$h + iy = 0;$$

d'où nous déduirons cette dernière équation, qui ne contient plus de y :

$$Hi - Ih = 0.$$

Si l'on restitue dans celle-ci successivement les valeurs précédentes, on obtiendra une équation qui ne renfermera que les seules fonctions P, Q, R , &c. p, q, r , &c. des premières équations. Mais l'équation entre E, F, G, e, f, g , sera divisible par $G=e$; & si on va jusqu'aux lettres A, B, C, D, a, b, c , l'équation résultante pourra être divisée par $D^2 = a^2$; de sorte que chaque terme de l'équation finale doit renfermer seulement huit lettres, quatre majuscules & quatre minuscules. En procédant de cette manière, on pourra toujours en général, quel que soit le nombre de dimensions de y dans les deux équations, éliminer l'inconnue y , & parvenir à une équation qui ne contiendra plus que l'inconnue x .

483. Quoique cette méthode d'éliminer une inconnue des
EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 L1

deux équations soit d'un usage très-étendu, nous allons cependant en ajouter une autre, qui ne suppose pas autant de substitutions répétées. Soient donc proposées les deux équations suivantes d'un degré indéterminé :

I.

$$P y^m + Q y^{m-1} + R y^{m-2} + S y^{m-3} + \&c. = 0.$$

II.

$$p y^n + q y^{n-1} + r y^{n-2} + s y^{n-3} + \&c. = 0,$$

desquelles il faut obtenir une équation qui ne renferme plus de y . Pour y parvenir, multiplions la dernière équation par cette quantité :

$$P y^{k-n} + A y^{k-n-1} + B y^{k-n-2} + C y^{k-n-3} + \&c.;$$

laquelle contient un nombre $k-n$ de lettres arbitraires $A, B, C, \&c.$ Multiplions la première équation par cette quantité :

$$p y^{k-m} + a y^{k-m-1} + b y^{k-m-2} + c y^{k-m-3} + \&c.;$$

qui renferme un nombre $k-m$ de lettres arbitraires $a, b, c, \&c.$ On égalera ensuite les deux produits entre eux, & on supposera que tous les termes qui contiennent des puissances de y , se détruisent mutuellement. Les derniers termes, qui ne renfermeront point de y , donneront l'équation qu'on cherche. Les plus hautes puissances se détruisent d'elles-mêmes; car le premier terme de chaque produit fera $Pp y^k$. Il reste donc encore $k-1$ termes qui doivent se détruire; on aura pour cela autant de lettres arbitraires à déterminer. Or le nombre des lettres arbitraires qu'on a introduites est $2k-m-n$, lequel doit être égal à $k-1$; donc $k=m+n-1$.

484. On multipliera donc pour cette raison la première équation par cette quantité indéterminée :

$$p^{n-1} + a y^{n-2} + b y^{n-3} + c y^{n-4} + \&c. ;$$

& la seconde par celle-ci :

$$P y^{m-1} + A y^{m-2} + B y^{m-3} + C y^{m-4} + \&c. ;$$

&, en égalant entre eux les termes dans lesquels se trouvent des puissances semblables de y , on aura les égalités suivantes :

$$P p = P p$$

$$P a + Q p = p A + q P$$

$$P b + Q a + R p = p B + q A + r P$$

$$P c + Q b + R a + S p = p C + q B + r A + s P,$$

&c.

Ces équations, en y comprenant la première $P p = P p$, feront au nombre de $m+n$; & si on détermine par leur moyen les lettres arbitraires $A, B, C, \&c. a, b, c, \&c.$, on arrivera à une dernière équation qui ne contiendra plus que les lettres données $P, Q, R, \&c. p, q, r, \&c.$; & qui par conséquent satisfera à la question.

485. Au reste, on facilitera cette détermination des lettres arbitraires, en égalant les membres égaux de chaque équation à de nouvelles quantités indéterminées $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$; comme on peut le voir par l'exemple suivant.

Soient proposées ces deux équations :

I.

$$P y^2 + Q y + R = 0.$$

II.

$$p y^3 + q y^2 + r y + s = 0.$$

En multipliant la première par $py^2 + ay + b$, & l'autre par $P_y + A$, on obtiendra ces égalités :

$$Pp = Pp$$

$$Pa + Qp = pA + qP = \alpha$$

$$Pb + Qa + Rp = qA + rP = \epsilon$$

$$Qb + Ra = rA + sP$$

$$Rb = sA$$

Négligeant la première équation qui est identique, on tire de la seconde :

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}$$

On obtiendra de la troisième

$$b = \frac{\epsilon}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\epsilon}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\epsilon = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP.$$

Cette valeur de ϵ étant substituée, on aura :

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

ou

$$b = \frac{\alpha(Pq - QR)}{P^2 p} + \frac{(Q^2 p - P^2 q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P};$$

Cette valeur, substituée dans la quatrième équation, donnera :

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} + \frac{\alpha R}{P}$$

$$- \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + Ps;$$

ou, en multipliant par P^2p ,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)$$

$$(Pq + Qp) + PQp(Pr - 2Rp) + P^3qr - P^3ps = 0.$$

Donc on aura :

$$\alpha = \frac{P^2Qq^2 - Q^3pp - P^2Qpr + 2PQRp^2 - P^3qr + P^3ps}{PQq - Q^2p + PRp - P^2r}.$$

Mais la dernière équation donne :

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2p} - \frac{R(P^2q^2 - Q^2p^2)}{P^2p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} = \frac{\alpha S}{p} - \frac{Pqs}{p};$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \frac{P^2Rq^2 - Q^2Rp^2 - P^2Rpr + PR^2p^2 - P^2qs}{PRq - QRp - P^2s}.$$

Ces deux valeurs de α donneront l'équation demandée, qu'on ramènera enfin à la même forme, que nous avons trouvée ci-dessus, art. 480, pour le même cas.

CHAPITRE XX.

De la Construction des Equations.

486. CE que nous avons exposé dans le dernier chapitre touchant l'intersection des courbes, s'applique d'ordinaire principalement aux constructions des équations des degrés supérieurs. Car si, deux courbes étant proposées, on trouve l'équation dont les racines indiquent en quels points elles s'entrecoupent; réciproquement les intersections de deux courbes peuvent servir à faire connoître les racines des équations. Cette méthode est très-utile, lorsqu'il est question de représenter par des lignes les racines d'une équation quelconque; car, après avoir décrit les deux courbes destinées à cet usage, il sera facile de marquer les intersections; & abaissant de ces points des appliquées sur l'axe, les abscisses donneront les vraies racines de l'équation. Auroste, si l'inconvénient, dont nous avons parlé plus haut, a lieu, toutes les abscisses ainsi trouvées donneront bien des racines; mais il pourra arriver que l'équation proposée en renferme plus qu'on n'en trouvera par cette construction.

487. Lors donc qu'on a proposé une équation algébrique qui renferme l'inconnue x , & dont on veut assigner les racines, il reste à chercher deux lignes courbes ou deux équations entre les variables x & y , telles qu'en éliminant l'appliquée, il en résulte l'équation proposée. Cela fait, on décrit ces deux courbes sur un axe commun, en plaçant au même point l'origine des abscisses; & on marque les points où elles se coupent l'une l'autre. On abaissera ensuite de ces points d'intersection, des appliquées perpendiculaires à l'axe, qui indiqueront sur cette ligne les abscisses qui sont égales aux racines de l'équation proposée. Ainsi, on assignera de cette manière les vraies valeurs des racines demandées, à moins

qu'il n'arrive par hasard que l'équation n'en contienne plus qu'on ne trouvera d'intersections.

488. Avant que de donner la manière de trouver ces deux courbes qui doivent servir à la construction de l'équation dont il s'agit, prenons l'inverse, & examinons les équations dont la résolution dépend de deux courbes données. Supposons d'abord que les deux lignes dont il est question, soient deux droites EM, FM , qui s'entrecoupent au point M . Prenons pour axe la droite EF , & pour origine des abscisses le point A , d'où l'on élèvera la perpendiculaire ABC qui rencontrera la première ligne en B & la seconde en C . Soit $AE = a$, $AF = b$, $AB = c$, $AC = d$; & faisons l'abscisse $AP = x$, l'appliquée $PM = y$; nous aurons pour la première droite EM , $a : c :: a + x : y$, ou $ay = c(a + x)$; & pour l'autre, $b : d :: b - x : y$, ou $by = d(b - x)$. Si on chasse y de ces équations, on aura $bc(a + x) = ad(b - x)$ ou $x = \frac{atd - abc}{bc + ad}$

$= \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$. On pourra donc construire par l'intersection de

deux lignes droites l'équation simple $x = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$, à la forme de laquelle on peut ramener toutes les équations simples.

489. La ligne la plus aisée à décrire après les lignes droites est le cercle; voyons donc quelles sont les équations qui peuvent se construire par l'intersection de la ligne droite & du cercle. Soit tirée la droite EM , AP étant l'axe & A l'origine des abscisses; soient $AE = a$, $AB = b$, & les coordonnées $AP = x$, $PM = y$; on aura $a : b : a + x : y$; & par conséquent, $ay = b(a + x)$, équation à la ligne droite; soit ensuite le rayon du cercle $CM = c$, & ayant abaissé du centre C sur l'axe la perpendiculaire CD ; soient $AD = f$, $CD = g$; on aura $DP = x - f$ & $PM - CD = y - g$. Comme on a en outre, par la propriété du cercle, $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$, l'équation au cercle sera $cc = (x - f)^2 + (y - g)^2$, $- 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x - f)^2 + (y - g)^2$. Mais l'équation à la ligne droite donne $y = \frac{ab + bx}{a}$; donc

Pl. X. Fig. 97.

Pl. X. Fig. 98.

&, parce que

$$a a (b - g)^2 + a a f f - a^2 c^2 = \frac{C(a a + b b)}{A},$$

on aura

$$(a^2 + b^2)(b - g)^2 - \frac{B b (b - g)(a^2 + b^2)}{A a} + \frac{B^2(a^2 + b^2)^2}{4 A^2 a^2} - a^2 c^2 = \frac{C(a^2 + b^2)}{A};$$

& par conséquent

$$(b - g)^2 = \frac{B b (b - g)}{A a} - \frac{B(a a + b b)}{4 A^2 a^2} + \frac{a a c c}{a a + b b} + \frac{C}{A};$$

donc

$$b - g = \frac{B b}{2 a A} \pm \sqrt{\left(\frac{a a c c}{a a + b b} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4 A^2} \right)}.$$

Reste donc à déterminer les trois quantités a , b & c , qu'il faudra prendre telles que $\frac{a a c c}{a a + b b} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4 A^2}$ devienne une quantité positive; car autrement $b - g = A B - C D$, & par suite $C D$ deviendrait une quantité imaginaire.

491. Rien n'empêche donc de supposer $b = 0$; ce qui donnera $g = \sqrt{\left(c^2 - \frac{B B + 4 A C}{4 A^2} \right)}$ & $f = \frac{-B}{2 A}$; mais, comme l'équation proposée $A x x + B x + C = 0$ n'a point de racines réelles, à moins que $B B$ ne soit plus grand que $4 A C$; $\frac{B B - 4 A C}{4 A^2}$ fera dans ce cas une quantité positive; si on la suppose égale à $c c$, de sorte que $c = \frac{\sqrt{(B B - 4 A C)}}{2 A}$, g deviendra aussi $= 0$, & a sortira tout-à-fait du calcul. La droite $E M$ tombera donc sur l'axe même $A P$, & le centre du cercle C devra être en D , $A D$ étant $= \frac{-B}{2 A}$. Si de ce centre, avec un rayon $c = \frac{\sqrt{(B B - 4 A C)}}{2 A}$, on décrit un cercle, les intersections de celui-ci avec l'axe même feront connoître les racines de l'équation proposée. Mais, pour n'avoir pas à conf-

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 M m

truire une formule irrationnelle; supposons $g = c - \frac{k}{2A}$, de manière que $cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc - \frac{BB + 4AC}{4A^2}$, nous aurons $c = \frac{kk + BB - 4AC}{4kA}$ & $g = \frac{BB - 4AC - kk}{4kA}$. Nous restons donc les maîtres de donner à k la valeur que nous voudrons; après l'avoir déterminée, comme la droite CM tombe sur l'axe, on décrira le cercle de la manière suivante. On prendra $AD = \frac{-B}{2A}$, & la perpendiculaire $CD = \frac{B^2 - 4AC - k^2}{4Ak}$; ensuite du point C comme centre, avec un rayon $= \frac{B^2 - 4AC + k^2}{4Ak}$, on décrira un cercle dont les intersections avec l'axe feront connoître les racines de l'équation proposée. Si donc on suppose $k = -B$, ayant pris $AD = \frac{-B}{2A}$, on fera $CD = \frac{C}{B}$, & le rayon du cercle à décrire du point C comme centre, sera $= \frac{-BB + 2AC}{2AB} = \frac{-B}{2A} + \frac{C}{B}$; d'où il suit que le rayon du cercle sera $= AD + CD$; ce qui paroît donner une construction très-commode pour la pratique.

492. Considérons à présent les intersections de deux cercles. Soit pour le premier $AD = a$, $CD = b$ & son rayon $CM = c$, on aura, en faisant $AP = x$ & $PM = y$, $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$, & par la nature du cercle:

$$xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc.$$

De même pour l'autre cercle, soit $Ad = f$, $dc = g$, & son rayon $cM = h$; on aura:

$$xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = hh.$$

Ces équations soustraites l'une de l'autre donneront pour reste:

$$2(f-a)x + aa - ff - 2(b+g)y + bb - gg = cc - hh;$$

donc

$$y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a-f)x}{2(b+g)};$$

d'où

$$b - y = \frac{h^2 + 2bg - a^2 + f^2 + g^2 + c^2 - h^2 + 2(a-f)x}{2(b+g)}$$

&

$$a - x = \frac{2a(b+g) - 2(b+g)x}{2(b+g)}$$

Et, puisque $(a-x)^2 + (b-y)^2 = cc$, on aura, en faisant la substitution :

$$\begin{aligned} & + (b+g)^2 \\ + 4(a-f)^2 & - 4(a+f)(b+g)^2 & + 2(a^2-c^2)(b+g)^2 \\ & - 4(a-f)(a^2-f^2)x & \\ + 4(b+g)^2 & + 4(a-f)(c^2-h^2) & + 2(f^2-h^2)(b+g)^2 \\ & + (a^2-c^2-f^2+h^2)^2 \end{aligned} = 0.$$

On pourra donc, par le moyen de cette équation, construire d'une infinité de manières l'équation $Axx + Bx + C = 0$; mais on conçoit qu'une équation d'un degré plus élevé ne peut se construire par l'interfection de deux cercles, parce que deux cercles ne peuvent se couper en plus de deux points. Ainsi, puisque la même équation peut être construite par l'interfection de la droite & du cercle, on préfère avec raison cette dernière construction à celle qui suppose deux cercles, à moins qu'il ne se présente par hasard quelques cas particuliers qui donnent naturellement une détermination facile des lignes a, b, f, g, c & h .

493. Supposons maintenant le cercle coupé par une parabole. Pl. XI, Fig. 100.
Ayant abaissé du centre C du cercle la perpendiculaire CD sur l'axe AP ; soit $AD = a$, $CD = b$, & le rayon du cercle $CM = c$, on aura entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$, $PM = y$, l'équation au cercle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = cc$. Supposons l'axe FB de la parabole perpendiculaire à la ligne AP , & soit $AE = f$, $EF = g$, &

3 M m ij

le paramètre de la parabole $= 2h$; on aura, par la nature de la parabole, $EP^2 = 2h(EF + PM)$, ou analytiquement $(x-f)^2 = 2h(g+y)$; d'où $y = \frac{(x-f)^2}{2h} - g$ & $y-b = \frac{(x-f)^2}{2h} - (b+g)$. Cette valeur, substituée dans la première équation, fera disparaître y , & on aura :

$$\frac{(x-f)^4}{4hh} - \frac{(b+f)(x-f)^3}{h} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

ou

$$+f^4$$

$$+6ff \quad -4f^3 \quad -4ffh(b+g)$$

$$x^4 - 4fx^3 - 4h(b+g)x^2 + 4fh(b+g)x + 4h^2(b+g)^2 = 0;$$

$$+4hh \quad -8ahh \quad +4aahh$$

$$-4cchh$$

Les racines de cette équation feront les abscisses AP , Ap , Ap , Ap , déterminées par les appliquées qui passent par les points d'intersection M , m , m , m .

494. Il y a dans cette équation six constantes a , b , c , f , g & h , qu'on peut réduire à cinq, en faisant $b+g=k$, parce qu'on peut regarder la somme de ces deux dernières comme une seule quantité. Ainsi, en faisant $CD+EF=b+g=k$, on aura l'équation qui suit :

$$+f^4$$

$$+6ff \quad -4f^3 \quad -4ffhk$$

$$x^4 - 4fx^3 - 4hkx^2 + 4fhkx + 4hkkk = 0.$$

$$+4hh \quad -8ahh \quad +4aahh$$

$$-4cchh$$

Or il est possible de ramener à cette forme toute équation

du quatrième degré. En effet, soit proposée cette équation :

$$x^4 - A x^3 + B x x - C x + D = 0;$$

on aura, en faisant la comparaison :

$$4f = A \text{ ou } f = \frac{1}{4} A, \quad 6f^2 - 4hk + 4h^2 = B \text{ ou } \frac{3}{8} A^2 - 4hk + 4h^2 = B;$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{3AA}{32h} + h - \frac{B}{4h},$$

$$4f^3 - 4f h k + 8 a h h = C$$

ou

$$\frac{1}{16} A^3 - \frac{3}{32} A^3 - A h h + \frac{1}{4} A B + 8 a h h = C;$$

donc

$$a = \frac{A^3}{256 h h} + \frac{A}{8} - \frac{A B}{32 h h} + \frac{C}{8 h h}.$$

Enfin on a

$$(ff - 2hk)^2 + 4 a a h h - 4 c c h h = D;$$

mais

$$ff - 2hk = \frac{B}{2} - 2 h h - \frac{AA}{16}$$

&

$$2 a h = \frac{A^3}{128 h} + \frac{A h}{4} - \frac{A B}{16 h} + \frac{C}{4 h};$$

en substituant ces valeurs, on aura donc une équation qui contiendra c & h qu'il faudra déterminer d'une manière convenable, pour que l'une & l'autre de ces quantités obtiennent une valeur réelle.

495. Mais comme il est facile de faire évanouir le second

terme dans une équation du quatrième degré; supposons qu'on l'ait effectivement fait disparaître, & qu'on ait à construire cette équation :

$$x^4 + Bxx - Cx + D = 0.$$

On aura donc d'abord $f=0$, ensuite $k=h-\frac{B}{4h}$; en troisième lieu $a=\frac{C}{8h^2}$; & , à cause de $2hk - ff = 2hh - \frac{B}{2}$ & de $2ah = \frac{C}{4h}$, en quatrième lieu, $4h^4 - 2Bh^2 + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16hh} - 4c^2h^2 = D$; d'où l'on conclut $64c^2h^4 = C^2 + 4B^2hh - 32Bh^4 + 64h^6 - 16Dhh$; & par conséquent $8c^2hh = \sqrt{(4h^2(B-4h^2))^2 + C^2 - 16Dh^2}$. Mais, comme il faut surtout avoir l'attention que c & h obtiennent des valeurs réelles, supposons $c = h \frac{-B+q}{4h}$; ce qui donnera :

$$CC - 16Dhh + 8Bhhq - 32h^4q - 4hhqq = 0.$$

Ainsi, pour satisfaire à la question, il faut distinguer deux cas; le premier où D est une quantité négative, le second où D est une quantité positive. Soit donc :

I.

D une quantité positive $= +E^2$, de sorte qu'on ait à construire cette équation :

$$x^4 + Bx^2 - Cx + E^2 = 0;$$

soit à cet effet $q=0$, d'où $c = \frac{4hh-B}{4h}$, & on aura $hh = \frac{CC}{16EE}$ & $h = \frac{C}{4E}$; d'où l'on tire $c = \frac{CC-4BE}{4CE}$; & ensuite $k = c = \frac{CC-4BE}{4CE}$, $a = \frac{2EE}{C}$ & $f=0$.

I I.

Mais si D est une quantité négative ; si, par exemple, $D = -EE$, on aura, pour construire l'équation

$$x^4 + Bx^2 - Cx - EE = 0,$$

celle-ci : $64cc h^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEh^2$;

qui donne toujours pour c une valeur réelle, quelle que soit celle de h ; car on aura $c = \sqrt{\frac{(C^2 + 4h^2(4hh - B)^2 + 16EEhh)}{8hh}}$;

& on peut prendre pour h la quantité qu'on voudra ; on aura donc soin de la prendre telle dans chaque cas, qu'elle rende la construction de c la plus facile. Cela fait, on aura, comme

auparavant, $AE = f = 0$, $CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h}$, &

$AD = a = \frac{C}{8hh}$. Si $E = 0$, on aura à construire l'équation du troisième degré :

$$x^3 + Bx - C = 0.$$

C'est sur cette construction qu'est fondée la règle assez connue de BACKER.

496. Si l'on prend deux lignes quelconques du second ordre, ou deux sections coniques, dont les équations soient rapportées à un axe commun & à la même origine des abscisses, favoir :

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$

&

$$\alpha yy + \epsilon yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

On éliminera y par la méthode donnée plus haut, en comparant ces équations avec celles que nous avons traitées art. 479, favoir :

$$P + Qy + Ryy = 0$$

&

$$p + qy + ryy = 0.$$

Les quantités P & p seront des fonctions de x du second ordre, Q & q des fonctions du premier ordre, & R & r des constantes; d'où il suit que l'équation finale sera du quatrième degré. On ne peut donc construire par les intersections de deux sections coniques quelconques des équations d'un degré supérieur au quatrième; or nous avons vu qu'elles pouvoient aussi être construites par le moyen du cercle & de la parabole. On peut conclure la même chose de la considération des lignes du second ordre, qui, comme on fait, peuvent être coupées en deux points par une droite; ainsi deux lignes droites pourront former quatre intersections; mais deux lignes droites prises ensemble constituent une espèce de lignes du second ordre; d'où il suit que deux lignes du second ordre se peuvent couper réciproquement en quatre points.

497. Si on veut avoir les intersections de deux lignes, l'une du second, l'autre du troisième ordre, qui soient exprimées par ces équations:

$$P + Qy + Ryy = 0$$

&

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

J'observe que P sera une fonction de x de deux dimensions, Q une fonction d'une seule dimension & R une constante; que p sera une fonction de trois dimensions, q de deux, r d'une seule & s une constante. Si on fait attention à cette remarque, on verra facilement que l'équation trouvée (art. 480) après l'élimination de y , doit être du sixième ordre; c'est pourquoi on ne pourra construire par les intersections d'une ligne du troisième ordre avec une section conique d'équations plus élevées que celles du sixième degré; c'est ce qu'on peut encore

encore reconnoître à la nature des lignes de ces deux ordres; car, comme les lignes du troisième ordre sont coupées par une droite en trois points, il est évident qu'elles seront coupées en six points par deux droites, qui prises ensemble forment une espèce de lignes du second ordre.

498. En appliquant aux ordres plus élevés & ce que nous avons exposé auparavant sur l'élimination, & le raisonnement que nous venons de fonder sur l'intersection des lignes droites, on verra qu'on peut construire les équations du neuvième degré par les intersections de deux lignes du troisième ordre, & celles qui ne passent pas le seizième degré par les intersections de deux lignes du quatrième ordre; & en général par le moyen de deux courbes, dont l'une est de l'ordre m & l'autre de l'ordre n , on pourra construire toutes les équations qui ne surpassent pas la puissance mn . Ainsi, pour construire une équation du centième degré, on aura besoin ou de deux lignes du dixième ordre, ou de deux lignes dont l'une soit du cinquième & l'autre du vingtième ordre; ainsi de suite, en décomposant le nombre 100 en deux facteurs. Mais si le plus haut exposant de l'équation à construire est exprimé par un nombre premier ou par un autre qui n'admette pas une décomposition en facteurs assez commode, on substituera, à la place de celui-ci, un autre nombre plus grand qui ait des facteurs convenables; car les deux courbes qui peuvent servir à la construction des équations d'un degré plus élevé, sont également propres à celles des équations d'un ordre inférieur; ainsi on pourra pour une équation du trente-neuvième degré employer deux courbes, l'une du sixième ordre & l'autre du septième, parce qu'avec ces deux courbes on peut construire une équation du quarante-neuvième degré; & que cette construction doit être regardée comme plus simple que si on employoit une courbe du troisième ordre, & une autre du treizième.

499. On voit par-là qu'on peut assigner les racines réelles d'une équation quelconque de plusieurs manières, & même d'une infinité de manières, par les intersections de deux courbes. Mais de cette infinité de manières il faudra choisir celle qui supposera les lignes courbes les plus simples & les

plus faciles à décrire; il faudra sur-tout faire en sorte d'obtenir par le moyen des intersections toutes les racines réelles; ce qui ne peut manquer d'avoir lieu, lorsqu'on choisira des courbes qui ne sont pas susceptibles d'intersections imaginaires. Or nous avons vu auparavant que ces sortes d'intersections n'avoient point lieu, lorsque dans l'équation pour l'une des courbes l'appliquée y étoit égale à une fonction uniforme de x . Car cette dernière courbe n'ayant aucunes appliquées imaginaires, il est impossible que dans ce cas on trouve des intersections imaginaires, quel que soit le nombre d'appliquées imaginaires que peut renfermer l'autre courbe. Nous prendrons donc toujours pour nos constructions une équation de cette forme $P + Qy = 0$, P & Q désignant des fonctions de x .

500. Etant donc proposée une équation quelconque, on choisira une courbe convenable représentée par l'équation $P + Qy = 0$; & comme l'équation à l'autre courbe doit être telle, qu'en y mettant, au lieu de y , sa valeur $\frac{-P}{Q}$, on ait pour résultat l'équation proposée; on pourra réciproquement au moyen de la proposée, former celle qui convient à l'autre courbe, en introduisant $\frac{-P}{Q}$, au lieu de y . Par exemple, si on proposoit cette équation $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, on prendroit pour l'une des courbes la parabole exprimée par l'équation $ay = xx + bx$; comme $xx = ay - bx$, on substituera cette valeur dans la proposée, autant qu'on le jugera à propos; ce qui donnera :

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbbx \\ Ax^3 &= \quad \quad + Aaxy - Abxx; \end{aligned}$$

& par conséquent on obtiendra une équation du second degré de cette forme :

$$a^2y^2 + a(A - 2b)xy + (B - Ab + b^2)x^2 + Cx + D = 0,$$

dont les intersections avec la courbe $ay = x^2 + bx$ indiqueront les racines de l'équation proposée.

501. Comme on peut faire varier ces deux courbes d'une infinité de manières, en donnant des valeurs arbitraires aux constantes a & b ; on peut de même introduire dans la solution une variété beaucoup plus considérable; en effet, puisqu'on a par la première équation $x^2 - ay + bx = 0$, on aura aussi $acx - acy + abcx = 0$; & si on ajoute celle-ci à la dernière, il en résultera une équation beaucoup plus générale pour la ligne du second ordre, dont les intersections avec la première feront connoître également les racines de l'équation proposée. Ainsi les deux courbes qui serviront à la construction, seront :

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$a^2y^2 + a(A - 2b)xy + (B - Ab + b^2 + ac)x^2 - a^2cy + (C + abc)x + D = 0.$$

Cette dernière équation peut exprimer telle section conique qu'on voudra; il faudra faire attention à cette quantité $AA - 4B - 4ac$; si elle est positive, la courbe sera une Hyperbole; si elle est $= 0$, elle sera une Parabole; & si elle est négative, la courbe sera une Ellypse. Mais, si $b = \frac{1}{2}A$ & $a^2 = B - \frac{1}{4}A^2 + ac$, ou $c = a + \frac{A^2}{4a} - \frac{B}{a}$, la courbe deviendra un Cercle; car alors on aura :

$$a^2y^2 + a^2x^2 - (a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba)y + (C + \frac{Aa^2}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2})x + D = 0;$$

ou

$$\left(y - \frac{a}{2} - \frac{A^2}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(x + \frac{C}{2a^2} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16a^2} - \frac{AB}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{A^2}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(\frac{C}{2a^2} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16a^2} - \frac{AB}{4a^2}\right)^2 - \frac{D}{a^2};$$

équation dont le second membre est le quarré du rayon du Cercle.

502. Ainsi les seules sections coniques fournissent une infinité de courbes, qui, combinées avec la parabole $ay = x^2 + bx$, feront connoître par leurs intersections les racines de l'équation proposée. Quelle que soit celle de ces courbes qu'on choisira, la parabole sera toujours coupée aux mêmes points; & par conséquent les endroits où toutes ces courbes s'entre-couperont, seront toujours les mêmes. On pourra donc parmi ce nombre infini de courbes en prendre deux à volonté (excepté la parabole prise d'abord), qui, supposées décrites sur un axe commun, indiqueront toujours par leurs intersections les racines de l'équation proposée. Il suit de là qu'on pourra construire l'équation de cette manière ou par le Cercle & la Parabole, comme nous l'avons déjà vu ci-devant; ou par deux Paraboles; ou par la Parabole combinée soit avec l'Ellypse, soit avec l'Hyperbole; ou par deux Ellypsés; ou par deux Hyperboles; ou par l'Ellypse avec l'Hyperbole. On multipliera encore bien davantage la variété des constructions, en employant à cet effet des courbes d'ordres plus élevés.

503. On pourra construire pareillement les équations des degrés supérieurs, en prenant pour l'une des courbes une ligne du genre parabolique exprimée par l'équation $y = P$. Si, par exemple, on se proposoit de construire cette équation :

$$x^{12} - f^{\circ}x^2 + f^{\circ}gx - g^{12} = 0;$$

on prendroit l'équation à la parabole du quatrième ordre $x^4 = a^3y$; & comme on a $x^{12} = a^9y^3$, en faisant cette substitution, on trouvera une équation qui appartient à une ligne du troisième ordre :

$$a^9y^3 - f^{\circ}x^2 + f^{\circ}gx - g^{12} = 0;$$

qui, combinée avec un multiple quelconque de la première équation $x^4 - a^3y = 0$, produira une infinité de lignes courbes du quatrième ordre, qui pourront servir, en les prenant à volonté deux à deux, à la construction de l'équation.

504. S'il arrivoit que la méthode précédente ne donnât pas

une construction commode pour l'équation qu'on se propose de construire; alors on multiplieroit l'équation par x , ou x^2 , ou x^3 , ou par une puissance plus élevée de x ; ce qui ajouteroit quelques racines égales à zéro à celles qu'elle renfermoit déjà; lesquelles seroient indiquées par les intersections faites à l'origine des abscisses, & qu'il seroit par conséquent facile de distinguer des autres racines véritables de l'équation proposée. Ainsi, quoique l'équation devienne d'un degré supérieur, elle ne laissera pas néanmoins d'être souvent plus commode à construire. Par exemple, si on proposoit l'équation cubique :

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

si on suppose $xx = ay$, l'une des courbes qui doivent servir à la construction sera une parabole, & l'autre toujours une hyperbole; car on aura, en mettant ay au lieu de xx , cette équation :

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

ou, en ajoutant la première équation $cx^2 - acy = 0$, celle-ci plus générale :

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

qui pourtant sera toujours à l'Hyperbole. S'il paroît plus commode d'employer le Cercle ou l'Ellypse, ou la Parabole, il faudra multiplier par x l'équation proposée; ce qui donnera l'équation :

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0,$$

qui comparée avec celle du quatrième degré, qui a été construite ci-dessus, donnera $D = 0$; & cette équation pourra toujours être construite par le moyen du Cercle & de la Parabole.

505. Puisque toute équation d'un degré quelconque peut être construite par les intersections de deux courbes algébriques, & cela d'une infinité de manières, il sera toujours per-

mis de substituer une ligne quelconque à l'une des courbes ; de là est née cette question : Comment une équation proposée peut être construite par le moyen d'une courbe donnée. Mais il faut d'abord remarquer ici que la courbe donnée doit être du genre de celles qui donnent pour l'appliquée une fonction uniforme de x , pour que les intersections imaginaires ne dérangent pas la construction. En effet, il ne suffiroit pas que la courbe, ou une portion proposée de la courbe, eût des abscisses égales à une racine de l'équation ; condition qu'on a coutume d'ajouter, lorsqu'on demande seulement une racine de l'équation donnée ; il pourroit arriver que cet arc de courbe n'admit aucune intersection, quoique l'abscisse qui répond à un de ses points fût une véritable racine, parce qu'il seroit possible que cette racine fût indiquée ou par une intersection imaginaire, ou par l'intersection d'une autre branche qui répondroit à la même abscisse. C'est pourquoi je ne m'arrête pas plus long-temps sur cette question plus curieuse qu'utile, ayant fait connoître assez en détail les vrais fondemens de toutes les constructions de ce genre.

CHAPITRE XXI.

Des Lignes Courbes transcendentes.

506. IL a été question jusqu'ici des courbes algébriques, dont la nature est telle que les appliquées correspondantes aux abscisses qu'on a prises sur un axe quelconque sont des fonctions algébriques de ces dernières lignes ; ou, ce qui revient au même, dans lesquelles la relation entre les abscisses & les appliquées peut être exprimée par une équation algébrique. Il suit de là naturellement que, si la valeur de l'appliquée ne peut pas être exprimée par une fonction algébrique de l'abscisse, la ligne courbe ne peut être mise au nombre de celles qu'on appelle algébriques. On appelle ordinairement

rement ces sortes de lignes, qui ne sont pas algébriques, courbes *transcendantes*. La ligne transcendante peut donc être définie une courbe dans laquelle la relation entre les abscisses & les appliquées ne peut être exprimée par une équation algébrique. Ainsi, toutes les fois que l'appliquée y est égale à une fonction transcendante de l'abscisse x , la ligne courbe doit être rapportée au genre des transcendantes.

507. Nous nous sommes occupés dans la section précédente principalement de deux espèces de quantités transcendantes. L'une comprenoit les logarithmes, & l'autre les arcs de cercle, ou les angles. Si donc l'appliquée y est égale ou au logarithme de l'abscisse x , ou à un arc de cercle dont le sinus, ou le cosinus, ou la tangente, est exprimée par l'abscisse x , de sorte que $y = l.x$, ou $y = A . \sin. x$, ou $y = A . \cos. x$, ou $y = A . \tan. x$; ou s'il n'entre que de telles valeurs dans l'équation donnée entre x & y , la courbe dans tous ces cas sera transcendante. Au reste, ce ne sont là que des espèces particulières de courbes transcendantes; car, outre celles-là, il y a une infinité d'autres expressions transcendantes, que l'analyse des infinis fera connoître plus en détail; d'où il faut conclure que le nombre des courbes transcendantes est bien plus considérable que celui des courbes algébriques.

508. Toute fonction qui n'est pas algébrique, est transcendante, & rend par conséquent transcendante la courbe dans l'expression de laquelle elle entre. Or une équation algébrique, ou est rationnelle & n'a d'autres exposans que des nombres entiers, ou bien est irrationnelle & renferme des exposans fractionnaires; mais ce dernier cas peut toujours être ramené au premier. Ainsi toute courbe dont l'équation qui exprime la relation entre les coordonnées x & y , n'est ni rationnelle, ni ne peut être rendue telle, est toujours transcendante. Si l'équation contient des puissances dont les exposans ne soient ni entiers, ni fractionnaires, il n'existe aucun moyen de la rendre rationnelle; & c'est pourquoi les courbes qui sont exprimées par de telles équations, seront transcendantes. De là naît la première espèce & comme la plus simple des courbes trans-

cedantes; ce font celles dont l'équation renferme des exposans irrationnels. Comme il n'entre dans leur expression ni logarithmes, ni arcs de cercles, & qu'elles proviennent de la seule considération des nombres irrationnels, elles paroissent en quelque sorte plutôt appartenir à la géométrie ordinaire; & c'est pour cette raison que LEIBNITZ les a appelées *inter-scendantes*, comme si elles tenoient un certain milieu entre les courbes algébriques & les courbes transcendentes.

509. On aura donc une courbe transcendente dans celle qui est exprimée par l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$. En effet on a beau élever cette expression à telle puissance qu'on voudra, on ne parviendra jamais à la rendre rationnelle. Il n'y a aucun moyen géométrique de construire une équation de cette nature; car on ne peut exprimer géométriquement d'autres puissances que celles dont les exposans sont des nombres rationnels; & c'est en cela que ces sortes de courbes diffèrent surtout des courbes algébriques. Car, si nous nous contentons de prendre seulement une valeur approchée de $\sqrt{2}$, en mettant en sa place quelques-unes des fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, qui expriment à-peu-près la valeur de $\sqrt{2}$, nous aurons bien à la vérité des courbes algébriques qui approcheront de se confondre avec celle qu'on demande; mais qui seront ou du troisième, ou du septième, ou du dix-septième, ou du quarante-unième, &c. ordre. Ainsi, puisque $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé d'une manière rationnelle que par une fraction dont le numérateur & le dénominateur sont des nombres infiniment grands, cette courbe est censée d'un ordre infini, & ne peut pour cette raison être rangée parmi les courbes algébriques. Ajoutez à cela que $\sqrt{2}$ renfermant deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, il en résulte toujours pour y une double valeur, & par conséquent une double courbe.

510. Si nous voulions ensuite construire exactement cette courbe, nous ne pourrions le faire sans le secours des logarithmes. En effet, soit $y = x^{\sqrt{2}}$, on aura, en prenant les logarithmes, $ly = \sqrt{2} . lx$. Le logarithme de chaque abscisse multiplié par $\sqrt{2}$ sera donc égal au logarithme de l'appliquée; d'où il suit qu'on pourra, au moyen d'une table de logarithmes

rithmes, assigner la valeur de l'appliquée qui répond à une abscisse quelconque x . Par exemple, si $x = 0$, y fera aussi $= 0$; si $x = 1$, y fera de même $= 1$; ce qu'il est très-facile de conclure de l'équation primitive; mais, si $x = 2$, on aura $l.y = \sqrt{2}.l.2 = \sqrt{2} \cdot 0,3010300$; &c, à cause de $\sqrt{2} = 1,41421356$, $l.y = 0,4257274$, &c à-peu-près, $y = 2,665186$; & si on fait $x = 10$, on aura $l.y = 1,4142356$; & par conséquent $y = 25,955870$. On pourra donc de cette manière calculer les appliquées correspondantes à chaque abscisse, & construire même la courbe, pourvu qu'on attribue à l'abscisse x des valeurs positives. Mais, si l'abscisse x obtient des valeurs négatives, il sera alors difficile de dire si celles de y seront réelles ou imaginaires, car soit $x = -1$, que signifiera $(-1)^{\sqrt{2}}$? C'est ce qu'on ne peut savoir, parce que les valeurs approchées qu'on peut trouver pour $\sqrt{2}$ ne sont ici d'aucun secours.

§ 11. Il y aura encore moins à douter que les équations dans lesquelles il se trouve des exposans imaginaires, ne doivent être rapportées au genre des transcendentes. Mais il peut arriver qu'une expression qui contient des exposans imaginaires acquière une valeur réelle & déterminée; il s'en est déjà présenté auparavant plusieurs exemples; il suffira donc d'en offrir un seul ici. Soit :

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}.$$

Quoique chaque terme $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ soit séparément une quantité imaginaire; cependant leur somme donne une valeur réelle. Car soit $lx = v$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, on aura $x = e^v$; &c, en substituant cette valeur de x , $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Mais nous avons vu dans la première section, art. 138, que

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = \text{cos. } A.v;$$

d'où $y = \text{cos. } A.v = \text{cos. } A.l.x$. Ainsi une valeur quelconque
 EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 300

que de x étant donnée en nombre, on cherchera son logarithme hyperbolique; on prendra dans le cercle, dont le rayon $= 1$, un arc égal à ce logarithme; & son cosinus exprimera la valeur de l'appliquée y . Par exemple, si on suppose $x = 2$, ou $2y = 2^{+y-1} + 2^{-y-1}$, on aura $y = \text{cosf. A. l } 2 = \text{cosf. A. 0,6931471805599}$. Or cet arc égal à $l2$, à cause que l'arc $= 3,1415926535$ &c. est de 180° , se trouve être par la règle de Trois, de $39^\circ 42' 51'' 52''' 9''$. Son cosinus est $0,76923890135408$, & donne en nombre la valeur de l'appliquée y correspondante à l'abscisse $x = 2$. Puisque ces sortes d'expressions sont composées de logarithmes & d'arcs de cercles, c'est donc avec raison qu'on les rapporte à l'espèce des transcendentes.

512. Parmi les courbes transcendentes, celles qui occupent le premier rang sont donc représentées par des équations qui renferment, outre des quantités algébriques, des logarithmes; & la plus simple est contenue dans cette équation $l \frac{y}{a} = \frac{x}{b}$ ou $x = b.l \frac{y}{a}$; il est indifférent quelle espèce de logarithmes on emploie, puisque par la multiplication de la constante b on peut ramener au même les différens systèmes de logarithmes. Supposons donc que la lettre l désigne les logarithmes hyperboliques, la courbe représentée par l'équation $x = bl \frac{y}{a}$ est vulgairement connue sous le nom de LOGARITHMIQUE. Soit e le nombre dont le logarithme $= 1$, ou $e = 2,71828182845904523536028$, on aura $e^{\frac{x}{b}} = \frac{y}{a}$, ou $y = ae^{\frac{x}{b}}$, équation très-propre à faire connoître la nature de la courbe dont il s'agit. En effet, si on substitue successivement à x des valeurs en progression arithmétique, les appliquées y auront des valeurs en progression géométrique. Mais, pour rendre la construction plus facile, nous ferons $e = m^n$ & $b = nc$; ce qui nous donnera l'équation $y = a m^{\frac{x}{c}}$, où m peut signifier un nombre quelconque positif plus grand que l'unité. Si donc on fait:

$$x = 0, c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c, \&c.;$$

on aura

$$y = a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6, \&c.;$$

& en donnant à x des valeurs négatives, si on suppose

$$x = -c, -2c, -3c, -4c, -5c, \&c.;$$

on aura

$$y = \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}, \frac{a}{m^5}, \&c.$$

§ 13. On voit par-là que les appliquées y ont par-tout des valeurs positives, & qu'elles croissent à l'infini, les abscisses positives croissant elles-mêmes à l'infini, mais qu'elles décroissent à l'infini de l'autre côté de l'axe, de sorte que l'axe est une asymptote AP de la courbe. Si on a pris le point A pour l'origine des abscisses, l'appliquée correspondante $AB = a$; & si on prend

Pl. XI. Fig. 101.

l'abscisse $AP = x$, on aura l'appliquée $PM = y = am^{\frac{x}{c}} = ae^{\frac{x}{b}}$;

& par conséquent $L \frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. D'où il suit que l'abscisse AP divisée par la constante b exprime le logarithme du rapport $\frac{PM}{AB}$. Si on place à tout autre point a de l'axe l'origine des abscisses, l'équation reste semblable. Car soit $Aa = f$ & $aP = t$; à

cause de $x = t - f$, on aura $y = ae^{\frac{(t-f)}{b}} = \frac{ae^{\frac{t}{b}}}{e^{\frac{f}{b}}}$. Faisons la

constante $\frac{ae^{\frac{t}{b}}}{e^{\frac{f}{b}}} = g$, nous aurons $y = ge^{\frac{t}{b}}$. De-là il suit qu'à

cause de $ab = g$, on aura $\frac{aP}{b} = L \frac{PM}{ab}$; & que par conséquent ayant mené deux appliquées quelconques PM & pm , dif-

rantes l'une de l'autre de l'intervalle Pp , on aura $\frac{Pp}{b} = l \cdot \frac{PM}{p^m}$; & dans ce cas la constante b , d'où dépend cette relation, pourra être considérée comme une espèce de paramètre de la logarithmique.

514. Il sera facile de déterminer en un point quelconque M la tangente de cette courbe. Car, puisqu'en supposant $AP = x$, on a $PM = a e^{\frac{x}{b}}$, en menant une autre appliquée quelconque QN distante de la première d'un intervalle $PQ = u$, on aura par la même raison $QN = a e^{\frac{(x+u)}{b}} = a e^{\frac{x}{b}} \cdot e^{\frac{u}{b}}$; & si on mène ML parallèlement à l'axe, LN sera $= (QN - PM) = a e^{\frac{x}{b}} (e^{\frac{u}{b}} - 1)$. Si on tire par les points M & N la droite NMT jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe au point T , on aura $LN : ML :: PM : PT$; & par conséquent $PT = \frac{u}{e^{\frac{u}{b}} - 1}$.

Mais, comme nous l'avons fait voir dans la première section, on a par une série infinie $e^{\frac{u}{b}} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} + \&c$; & par conséquent $PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{uu}{6b^3}} + \&c$. Supposons à

présent que l'intervalle $PQ = u$ vienne à disparaître, les points M & N se confondant, alors la droite NMT deviendra une tangente de la courbe; & la foustangente $PT = b$, ou à une constante. Telle est la propriété la plus remarquable de la logarithmique. Le paramètre b de cette courbe est donc égal à la foustangente, qui a par-tout une grandeur constante.

515. Il se présente ici une question à éclaircir, c'est de savoir si la logarithmique entière se trouve décrite de cette manière; & si la courbe, outre cette branche MBm , qui s'étend de part & d'autre à l'infini, n'a pas encore d'autres parties. Car nous avons vu auparavant qu'il y avoit toujours deux branches qui convergeoient vers la même asymptote. Aussi quelques auteurs ont-ils avancé que la logarithmique étoit composée de deux parties semblables situées de chaque côté de l'axe, de manière que l'asymptote étoit en même temps

un diamètre. Mais l'équation $y = a^{\frac{x}{b}}$ ne fait nullement connaître cette propriété; car toutes les fois que $\frac{x}{b}$ est un nombre entier, ou une fraction dont le dénominateur est un nombre impair, y a une seule valeur réelle & en même temps positive; mais si la fraction $\frac{x}{b}$ a un dénominateur pair, alors l'appliquée y aura deux valeurs, l'une positive, l'autre négative; ce qui donnera un point de la courbe situé de l'autre côté de l'asymptote. Il s'ensuit que la logarithmique aura au-dessous de l'asymptote une infinité de points séparés les uns des autres, qui ne constituent plus une courbe continue, quoique par leur rapprochement infiniment grand ils en offrent l'apparence; ce qui est un paradoxe, qui n'a point lieu dans les courbes algébriques; mais il s'en présente un autre ici, qui est beaucoup plus surprenant. Les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires; (ce qui est évident par soi-même; & qui est d'ailleurs une suite de ce que le rapport de $\log. -1$ à $\sqrt{-1}$ est un rapport fini) on aura donc pour $l. -n$ une quantité imaginaire, que je suppose $= i$; mais le logarithme d'un carré est double de celui de sa racine; donc $l. (-n)^2 = l. n^2 = 2i$; d'ailleurs $\log. n^2$ est aussi une quantité réelle $= 2.l.n$. Il s'ensuivroit donc & que la quantité réelle $l.n$ & que l'imaginaire i seroit la moitié de la même quantité réelle $l.n^2$. Il faudroit donc en conclure que tout nombre auroit deux sortes de moitiés, l'une réelle, l'autre imaginaire; qu'il auroit de même trois tiers, quatre quarts différens, & ainsi de suite; de manière cependant qu'une seule de ces parties seroit réelle. On ne voit pas trop clairement comment il est possible de concilier cette assertion avec l'idée qu'on a coutume de se former des quantités.

516. En accordant donc ce que nous venons d'avancer, la moitié du nombre a fera également $\frac{a}{2} + l. -1$ & $\frac{a}{2}$; car le double de la première quantité est $a + 2.l. -1 = a + l. (-1)^2 = a + l. 1 = a$. Remarquons ici que $+l. -1 = -l. -1$, quoique $l. -1$ ne soit pas $= 0$; en effet, puisque $-1 = \frac{+1}{-1}$,

on aura $l. - 1 = l. + 1 - l. - 1 = -l. - 1$. Semblablement, puisqu'on a pour $\sqrt[3]{1}$, non-seulement 1, mais encore $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, on aura $3 l. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l. 1 = 0$; & par conséquent les trois fortes de tiers de la même quantité a feront $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; car le triple de chacune de ces expressions produit la même quantité a . Pour éclaircir ces propositions, qui ne paroissent nullement admissibles, & lever toute espèce de doute, il faut établir un autre paradoxe; savoir, que tout nombre a a une infinité de logarithmes, parmi lesquels il n'y en a qu'un qui soit réel. Ainsi, quoique le logarithme de l'unité $= 0$, elle en a cependant une infinité d'autres qui sont imaginaires, savoir $2l. - 1$, $3l. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $4l. - 1$ & $4l. \pm \sqrt{-1}$, & d'autres sans nombre que fait connoître l'extraction des racines. Cette opinion est beaucoup plus vraisemblable que la précédente; car, en supposant $x = l.a$, on aura $a = e^x$; & par conséquent $a = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \&c.$; & comme cette équation a un nombre infini de dimensions, il n'est pas étonnant que x ait de même un nombre infini de racines. Mais, quoiqu'on puisse expliquer ainsi le dernier paradoxe, au moins le premier qui consiste à admettre l'existence d'une infinité de points séparés les uns des autres, & situés de part & d'autre de l'axe de la logarithmique, conserve toute sa force.

§ 17. On peut rendre plus évidente l'existence de cette infinité de points séparés, par le moyen de l'équation $y = (-1)^x$; car tant que x est un nombre entier pair ou un nombre fractionnaire dont le numérateur est pair, y sera $= 1$; mais, si x est un nombre entier impair, ou une fraction dont le numérateur & le dénominateur soient à la fois impairs, y sera $= -1$; dans tous les autres cas où la valeur de x est ou une fraction qui a un dénominateur pair, ou bien un nombre irrationnel, celle de y sera imaginaire. L'équation $y = (-1)^x$ fournira donc des points sans nombre séparés les uns des autres, placés de chaque côté de l'axe à une distance $= 1$. Il est im-

possible d'en trouver seulement deux qui soient contigus; cependant en prenant de suite deux à deux les points qui sont situés du même côté de l'axe, ils seront si voisins l'un de l'autre, que l'espace qui les sépare est plus petit qu'aucune quantité assignable; car on conçoit qu'entre deux valeurs de l'abscisse si voisines qu'on voudra, on peut inférer non pas une fraction, mais une infinité d'autres dont les dénominateurs seront impairs, & qui donneront chacune naissance à des points appartenans à l'équation proposée. Cette suite de points présentera donc l'apparence de deux lignes droites parallèles à l'axe, & qui en sont éloignées de part & d'autre d'un intervalle = 1; car il est impossible d'imaginer sur ces lignes aucun espace où l'on ne puisse assigner, je ne dis pas un seul point, mais des points sans nombre, par le moyen de l'équation $y = (-1)^x$ qui les contient tous. Cette même anomalie se retrouve dans l'équation $y = (-a)^x$, & dans les autres semblables, où une quantité négative est élevée à une puissance indéterminée. Il étoit donc nécessaire d'exposer ici ces espèces de paradoxes, qui ne peuvent avoir lieu que dans les courbes transcendentes.

§ 18. C'est donc à ce genre de courbes dépendantes des logarithmes qu'appartiennent toutes les équations dans lesquelles se rencontrent non-seulement des logarithmes, mais encore des exposans variables; parce qu'en passant des logarithmes aux nombres on arrive à celles-ci. C'est pourquoi on a coutume d'appeler ces courbes *exponentielles*. Telle sera donc la courbe renfermée dans l'équation $y = x^x$, ou dans celle-ci $ly = x lx$. En faisant $x = 0$, on aura $y = 1$; si $x = 1$, y fera = 1; si $x = 2$, y fera = 4; si $x = 3$, y fera = 27, &c. On conclura de là que BDM exprimera la figure de cette courbe rapportée à l'axe AP , de manière qu'en prenant $AC = 1$, on ait aussi $AB = CD = 1$. Les appliquées qui tombent entre A & B seront plus petites que l'unité; car, si on fait $x = \frac{1}{2}$, on aura $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068$; & la plus petite de toutes se trouvera en prenant l'abscisse $x = \frac{1}{e} = 0,36787944$,

Pl. XI. Fig. 102.

& alors l'appliquée y sera $= 0,6922005$, comme on l'enseignera dans la suite *. Cherchons à présent quelle sera la forme de cette courbe au-delà du point B ; il faudra pour cela faire x négatif, ce qui donnera $y = \frac{1}{(-x)^2}$; d'où il résulte que cette partie sera composée d'une suite de points séparés les uns des autres, & qui s'approcheront de plus en plus de l'axe comme asymptote. Or ces points tomberont d'un côté ou d'autre de l'axe, suivant que x sera un nombre pair ou impair. Bien plus, il y aura une infinité de ces points qui tomberont au-dessous de AP , si on prend pour x une fraction dont le dénominateur soit pair. Si, par exemple, on fait $x = \frac{1}{2}$, on aura en même temps $y = + \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. La courbe continue $MD B$ se termine donc brusquement en B contre la nature des lignes

* Voici, en attendant, un moyen de s'en assurer. Je suppose en général $y = X$; (X étant une fonction quelconque de x , & dont il s'agit de trouver la plus petite valeur, ou la plus grande; car la méthode est la même pour les deux cas). J'observe que, si j'augmente x d'une quantité quelconque u , qu'on peut d'ailleurs supposer si petite qu'on voudra, X devient $X + X'u + X''u^2 + X'''u^3 + \&c.$; X' , X'' , X''' , étant aussi des fonctions de x ; & que, si je diminue x de la même quantité u , X devient $X - X'u + X''u^2 - X'''u^3 + \&c.$. Or, pour que X soit un minimum ou un maximum, il faut qu'il soit plus petit ou plus grand que $X + X'u + X''u^2 + X'''u^3 + \&c.$, & que $X - X'u + X''u^2 - X'''u^3 + \&c.$; mais cela ne peut avoir lieu, à moins que X' ne soit $= 0$. En effet, X' ne peut être ni positif ni négatif; car si $+X'$ est positif, $-X'$ est négatif; & au contraire, si $+X'$ est négatif, $-X'$ est positif. Or dans ces deux cas la valeur de $y = X$ tombe entre deux autres aussi voisines qu'on voudra, l'une plus grande, l'autre plus petite que X ; donc il n'y aura ni minimum ni maximum. Donc X' ne peut être ni positif ni négatif; donc il est égal à zéro. Pour savoir à présent si la supposition de $X' = 0$ donne un maximum ou un minimum, on aura recours au terme multiplié par le carré u^2 de la différence. S'il est positif, on aura un minimum; & s'il est négatif, on aura un maximum. On suppose ici que ce terme n'a pas disparu; car autrement il faudroit recourir aux deux termes suivans, & faire par rapport à ceux-ci les mêmes raisonnemens que par rapport aux deux premiers. Cela posé, considérons l'équation $y = x^2$ ou $l.y = x.lx$; en mettant $x + u$ à la place de x , la fonction $x.lx$ deviendra $(x + u)(l(x + u)) = (x + u)(lx + l.(1 + \frac{u}{x})) = (x + u)(lx + \frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + \&c.) = x.lx + u.lx + u + \frac{u^2}{x} - \frac{u^2}{2x} - \&c.$ Donc, en vertu de la règle que nous venons de donner, il faudra faire $u(lx + 1) = 0$, ou $lx + 1 = 0$. Donc $lx = -1 = -1.l.c = l.c^{-1}$. Donc $x = c^{-1} = \frac{1}{c}$. Et si on fait attention au signe du terme multiplié par u^2 , on verra qu'il est positif. Donc l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x = \frac{1}{c}$ est réellement un minimum.

algébriques;

algébriques; mais au lieu d'avoir un cours continu, elle aura une suite de points séparés; ce qui paroît établir assez bien l'existence réelle de ces sortes de points, qu'on peut en quelque sorte regarder comme conjugués; car, si on ne veut convenir de leur existence, il faudra admettre que la courbe entière s'arrête subitement au point *B*; ce qui seroit contraire à la loi de continuité, & par conséquent absurde.

§ 19. Parmi une infinité d'autres courbes de ce genre; qu'on peut construire par logarithmes, il y en a dont la construction ne paroît pas aussi facile, & qui peut être effectuée cependant par le moyen d'une substitution convenable. Telle est la courbe comprise dans l'équation $x^y = y^x$; on voit bien sur-le-champ que l'appliquée *y* est constamment égale à l'abscisse *x*, de sorte que la ligne droite inclinée à l'axe sous un angle demi-droit satisfait à l'équation. Il est cependant visible que l'équation proposée a une signification plus étendue que celle à la ligne droite $y = x$; & que par conséquent celle-ci ne peut exprimer tout ce que contient l'autre $x^y = y^x$; car on peut satisfaire aussi à cette dernière, sans que x soit $= y$. Par exemple, si $x = 2$, *y* peut être $= 4$. L'équation proposée renfermera donc, outre la droite *EAF*, d'autres parties. Pour les trouver, & représenter par conséquent en entier la ligne comprise dans l'équation, nous ferons $y = tx$, de sorte que $x^{tx} = t^x x^x$. En extrayant la racine *x*, nous aurons $x^t = tx$ & $x^{t-1} = t$; conséquemment $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$, ou bien, en faisant $t - 1 = \frac{1}{u}$, $x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$ & $y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$. Ainsi la courbe aura, outre la droite *EAF*, la branche *RS* qui convergera vers les droites *AG* & *AH* comme asymptotes, & dont *AF* sera un diamètre. La courbe, au surplus, coupera la droite *AF* au point *C*, où $AB = BC = e$, *e* désignant le nombre dont le logarithme est l'unité. L'équation fournit en outre une infinité de points séparés, qui avec la droite *EF* & la courbe *RCS* épuisent tout ce qu'elle renferme dans son expression. Il y a donc une infinité de nombres *x* & *y*, qui pris deux à deux peuvent satisfaire à l'équation $x^y = y^x$; tels sont les nombres suivans, en s'en tenant à ceux qui sont rationnels:

$$x = 2$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

$$x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256}$$

&c.

$$y = 4$$

$$y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

$$y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$

$$y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$$

&c.

Chacun de ces nombres élevés à une puissance marquée par son correspondant produit la même quantité. Ainsi on aura :

$$2^4 = 4^2 = 16$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{4}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$

&c.

520. Quoiqu'il y ait dans ces courbes & dans les autres semblables une infinité de points qui peuvent être déterminés algébriquement; elles ne peuvent cependant être mises au nombre des courbes algébriques, parce qu'elles renferment une infinité d'autres points qu'il est impossible d'assigner d'une manière semblable. Passons donc à un autre genre de courbes transcendentes, qui exige des arcs de cercle. Pour ne pas multiplier les caractères qui entrent dans le calcul, je représenterai toujours ici par l'unité le rayon du cercle, dont l'arc fera partie de la construction. Il est facile de faire voir que les courbes qui appartiennent à ce genre ne sont pas algébriques, quoique l'impossibilité de la quadrature du cercle n'ait pas encore été démontrée. En effet, considérons seulement la plus simple équation de ce genre, savoir $\frac{y}{a} = A \cdot \sin. \frac{x}{c}$, qui suppose que l'appliquée y soit proportionnelle à l'arc de cercle, dont le sinus est $\frac{x}{c}$. Comme il y a une infinité d'arcs qui

conviennent au même sinus $\frac{x}{c}$, l'appliquée y fera une fonction infinitiforme; & par conséquent cette ligne, ainsi que les autres droites, coupera la courbe en une infinité de points; propriété qui la distingue bien clairement des courbes algébriques. Soit s le plus petit arc qui convient au sinus $\frac{x}{c}$, & désignons par π la demi-circonférence du cercle, les valeurs de $\frac{y}{a}$ seront les suivantes:

$$6; \pi - s; 2\pi + s; 3\pi - s; 4\pi + s; 5\pi - s; \&c. \\ -\pi - s; -2\pi + s; -3\pi - s; -4\pi + s; -5\pi - s; \&c.$$

Ayant donc pris la droite CAB pour axe & A pour l'origine des abscisses, on aura d'abord, en faisant $x = 0$, les appliquées $AA^1 = \pi a$, $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$, &c.; & de l'autre côté $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$, &c.; & la courbe passera par tous ces points. Mais, si on prend l'abscisse $AP = x$, l'appliquée coupera la courbe en une infinité de points M , & on aura $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\pi - s)$, $PM^3 = a(2\pi + s)$, &c. La courbe entière sera donc composée d'une infinité de portions semblables AE^1A^1 , $A^1F^1A^2$, $A^2E^2A^1$, $A^2F^2A^1$, &c.; de manière que toutes les droites parallèles à l'axe BC , qui passent par les points E & F , sont des diamètres de la courbe. On aura aussi $AC = AB = c$, & les intervalles E^1E^2 , E^2E^3 , E^1E^{-1} , $E^{-1}E^{-2}$, de même que F^1F^2 , F^1F^{-1} , $F^{-1}F^{-2}$, seront égaux chacun à $2a\pi$. Cette courbe a été nommée par LEIBNITZ la *Ligne des Sinus*, parce qu'il est facile de trouver par son moyen le sinus d'un arc quelconque. En effet, puisque $\frac{y}{a} = A. \sin. \frac{x}{c}$, on aura réciproquement $\frac{x}{c} = \sin. A. \frac{y}{a}$. Si on suppose $\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{x}{a}$, l'équation deviendra $\frac{x}{c} = \cos. A. \frac{x}{a}$; ce qui donne en même temps la *Ligne des Cosinus*.

521. On peut pareillement déduire de cette considération

la *Ligne des Tangentes*, dont l'équation sera $y = A.tang. x$, en supposant pour abrégé $a=1$ & $c=1$; donc réciproquement $x = tang. A.y = \frac{fir.y}{cof.y}$; d'où il sera facile de conclure la figure de la courbe par le moyen des tangentes. On verra qu'elle a une infinité d'asymptotes parallèles entre elles. On pourra pareillement décrire la *Ligne des Sécantes* en se servant de l'équation $y = A.sec. x$ ou $x = sec. A.y = \frac{1}{cof.y}$. Elle aura aussi une infinité de branches qui s'étendront à l'infini. On connoît particulièrement dans ce genre de courbes la **CYCLOÏDE** ou *Trochoïde*, qui est décrite par un point de la circonférence d'un cercle qui s'avance en roulant sur une ligne droite, & dont l'équation entre les coordonnées perpendiculaires est $y = \sqrt{(1-x^2)} + A.cof. x$. Cette courbe, tant à cause de la facilité avec laquelle elle peut être décrite qu'à cause d'un grand nombre de belles propriétés qu'elle renferme, mérite sur-tout notre attention; mais, comme la plupart de ces propriétés ne peuvent être développées sans le secours du calcul infinitésimal, nous nous contenterons d'examiner, en passant, seulement les principales, qui découlent immédiatement de la manière dont elle est décrite.

Pl. XI. Fig. 105.

522. Imaginons donc un cercle ACB qui roule sur la droite EA ; & pour rendre notre recherche plus générale, ne supposons pas que ce soit un point B de la circonférence, mais un point quelconque D , pris sur le diamètre prolongé, qui décrive la courbe Dd . Soit le rayon de ce cercle $CA = CB = a$, la distance $CD = b$; & supposons que ce soit dans cette position que le point D est le plus élevé. Lorsque le cercle sera arrivé par son mouvement dans la situation $aQbR$; si on fait l'espace parcouru $AQ = \tau$, on aura l'arc $aQ = \tau$, lequel étant divisé par le rayon a donnera l'angle $acQ = \frac{\tau}{a}$; le point qui décrit la courbe fera en d , de sorte que $cd = b$, l'angle $dcQ = \pi - \frac{\tau}{a}$; & le point d appartiendra à la courbe cherchée. Abaissons d'abord du point d sur la droite AQ la perpendiculaire dp , & ensuite sur la droite QR la perpen-

diculaire dn ; nous aurons $dn = b \cdot \text{fin.} \frac{x}{a}$, & $cn = -b \cdot \text{cof.} \frac{x}{a}$;

donc $Qn = dp = a + b \cdot \text{cof.} \frac{x}{a}$. Soit prolongée dn jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AD en P , & soient les coordonnées $DP = x$, $Pd = y$; on aura $x = b + cn$, ou $x = b - b \cdot \text{cof.} \frac{x}{a}$ & $y = AQ + dn = z + b \cdot \text{fin.} \frac{x}{a}$. Puis

donc qu'on a $b \cdot \text{cof.} \frac{x}{a} = b - x$, $b \cdot \text{fin.} \frac{x}{a}$ fera $= \sqrt{(2bx - x^2)}$

& $z = a \cdot \text{cof.} \left(1 - \frac{x}{b}\right) = a \cdot \text{fin.} \frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}$. Ces valeurs

substituées donneront $y = \sqrt{(2bx - x^2)} + a \cdot \text{fin.} \frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}$;

ou, si on compte les abscisses sur l'axe AD depuis le centre, & qu'on fasse $b - x = t$, on aura $\sqrt{(2bx - x^2)} = \sqrt{(bb - tt)}$, & cette équation entre t & y :

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + a \cdot \text{cof.} \frac{t}{b};$$

équation qui donne la cycloïde ordinaire, si b est $= a$; mais, si b est plus grand que a , ou plus petit que a , la courbe s'appelle une cycloïde accourcie ou alongée. Au reste y sera toujours une fonction infinitiforme de x ou de t ; ou bien toute droite parallèle à la base AQ coupera la courbe en une infinité de points, à moins que sa distance x ou t ne soit telle que $\sqrt{(2bx - x^2)}$ ou $\sqrt{(bb - tt)}$ ne devienne une quantité imaginaire.

523. On doit rapporter aux courbes les plus connues de ce Pl. XI. Fig. 106.

genre les *Epicycloïdes* & les *Hypocycloïdes*, qui résultent du mouvement d'un cercle ACB roulant sur la circonférence d'un autre cercle OAQ , tandis qu'un point fixe D , pris au-dehors ou au-dedans du cercle mobile, décrit la courbe Dd . Soit le rayon OA du cercle immobile $= c$, celui du cercle mobile $CA = CB = a$, & la distance CD du point qui décrit la courbe $= b$, & prenons la droite OD pour l'axe de la courbe cherchée Dd . Supposons que le cercle mobile ait passé de la situation initiale, où les points O, C, D , étoient en ligne droite, à la situation QcR , après avoir décrit $AQ = z$, de manière que l'angle $AOQ = \frac{x}{c}$; on aura donc

l'arc $Qa = A Q = \zeta$; & par conséquent l'angle $acQ = \frac{\zeta}{a}$
 $= Rcd$; & si on prend la droite $cd = CD = b$, le point d
appartiendra à la courbe Dd . De ce point abaïffons sur l'axe
la perpendiculaire dP , & menons auffi cm perpendiculaire,
& cn parallèle à l'axe OD . A cause de l'angle $Rcn = AOQ$
 $= \frac{\zeta}{c}$, on aura donc l'angle $dcn = \frac{\zeta}{c} + \frac{\zeta}{a} = \frac{(a+c)\zeta}{ac}$. D'où
l'on conclut $dn = b \cdot \sin. \frac{(a+c)\zeta}{ac}$ & $cn = b \cdot \cos. \frac{(a+c)\zeta}{ac}$. En-
suite, à cause de $OC = Oc = a + c$, cm fera $= (a+c)$
 $\sin. \frac{\zeta}{c}$ & $Om = (a+c) \cos. \frac{\zeta}{c}$. Ayant donc fait les coordonnées
 $OP = x$ & $Pd = y$, on aura $x = (a+c) \cos. \frac{\zeta}{c} + b \cdot \cos.$
 $\frac{(a+c)\zeta}{ac}$ & $y = (a+c) \sin. \frac{\zeta}{c} + b \cdot \sin. \frac{(a+c)\zeta}{ac}$. On voit par là
que, si $\frac{a+c}{a}$ est un nombre rationnel, à cause que les angles
 $\frac{\zeta}{c}$ & $\frac{(a+c)\zeta}{ac}$ sont commensurables, on peut éliminer l'incon-
nue ζ , & trouver par conséquent une équation algébrique
entre x & y . Dans les autres cas, la courbe ainsi décrite sera
transcendante.

Au reste, il est à remarquer ici que, si a est négatif, la
courbe devient une hypocycloïde, le cercle mobile tombant
dans l'intérieur du cercle fixe. On fait ordinairement b égal
au rayon a , & on a par cette raison des épicycloïdes & des
hypocycloïdes proprement dites. Les courbes que nous venons
de trouver, ont donc plus de généralité; &, comme les équations
n'en étoient pas plus difficiles, nous avons jugé à propos
d'ajouter cette condition. Si on fait une somme des quar-
rés xx & yy , on aura l'équation $xx + yy = (a+c)^2 + b^2$
 $+ 2b(a+c) \cdot \cos. \frac{\zeta}{a}$, par le moyen de laquelle l'élimination
de ζ se fera d'autant plus facilement, toutes les fois que les
quantités a & c seront commensurables.

524. Outre les cas où les rayons a & c des deux cercles sont
commensurables entre eux, & où les courbes deviennent algé-

briques, on doit remarquer celui où $b = -a - c$; ou bien, où le point D de la courbe tombe sur le centre O du cercle immobile. Soit donc $b = -a - c$, on aura $x^2 + y^2 = 2(a+c)^2$

$$\left(1 - \operatorname{cof} \frac{\xi}{a}\right) = 4(a+c)^2 \left(\operatorname{cof} \frac{\xi}{2a}\right)^2; \text{ d'où } \operatorname{cof} \frac{\xi}{2a} = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{2(a+c)}.$$

Ensuite, comme $x = (a+c)\left(\operatorname{cof} \frac{\xi}{c} - \operatorname{cof} \frac{(a+c)\xi}{ac}\right)$ & $y =$

$$(a+c)\left(\operatorname{fin} \frac{\xi}{c} - \operatorname{fin} \frac{(a+c)\xi}{ac}\right), \text{ on aura } \frac{x}{y} = -\operatorname{tang} \frac{(2a+\xi)\xi}{2ac},$$

$$\operatorname{fin} \frac{(2a+\xi)\xi}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \text{ \& } \operatorname{cof} \frac{(2a+\xi)\xi}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$
 Par

conféquent, puisque $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c)\operatorname{cof} \frac{\xi}{2a}$, x

$$\text{deviendra } = 2(a+c)\operatorname{cof} \frac{\xi}{2a}\operatorname{fin} \frac{(2a+\xi)\xi}{2ac}, \text{ \& } y = -2(a+c)$$

$$\operatorname{cof} \frac{\xi}{2a} \operatorname{cof} \frac{(2a+\xi)\xi}{2ac}.$$
 Soit, par exemple, $c = 2a$, on aura

$$x = 6a \operatorname{cof} \frac{\xi}{2a}\operatorname{fin} \frac{\xi}{a}, y = -6a \operatorname{cof} \frac{\xi}{2a} \operatorname{cof} \frac{\xi}{a} \text{ \& } \sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$= 6a \operatorname{cof} \frac{\xi}{2a}.$$
 Faisons $\operatorname{cof} \frac{\xi}{2a} = q$, nous aurons $\operatorname{fin} \frac{\xi}{2a} =$

$$\sqrt{(1-q^2)} \text{ \& } \operatorname{fin} \frac{\xi}{a} = 2q\sqrt{(1-q^2)} \text{ \& } \operatorname{cof} \frac{\xi}{a} = 2qq - 1;$$

$$\text{d'où l'on tire } q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a} \text{ \& } y = -6aq(2qq-1) =$$

$$(1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = \left(1 - \frac{xx-yy}{18aa}\right)\sqrt{(xx+yy)};$$

$$\text{ou } 18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx+yy)}.$$
 Soit

$$18aa = ff, \text{ \& } \text{élevons tout au quarré, nous aurons cette}$$

$$\text{équation du sixième degré } (xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2$$

$$+ f^2xx = 0.$$
 Mais, comme notre but ici est d'examiner les

courbes transcendentes, & non les courbes algébriques, laissons celles que nous venons de trouver, & passons à d'autres dont la construction exige à la fois les logarithmes & les arcs de cercle.

§ 25. Nous avons déjà trouvé ci-dessus une courbe de cette nature, laquelle résulroit de l'équation $2y = x^{+\nu-1} + x^{-\nu-1}$, Pl. XII. Fig. 107.

que nous avons transformée en celle-ci $y = \operatorname{cof} A.lx$; mais cette dernière peut encore se changer en cette autre $A.\operatorname{cof} y$

$$= l.x \text{ \& } x = e^{A.\operatorname{cof} y}.$$
 En prenant donc AP pour axe, & sur

cette ligne le point A pour l'origine des abscisses, il est d'abord évident que la courbe n'a au-delà du point A , du côté des abscisses négatives, aucune portion continue; mais l'axe AP sera coupé par la courbe en une infinité de points, dont les distances au point A formeront une progression géométrique. Ainsi on aura $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$; $AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$, &c.; mais il y aura aussi une infinité d'intersections qui s'approcheront de plus en plus du point A , savoir $AD^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $AD^{-2} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$, $AD^{-3} = e^{-\frac{5\pi}{2}}$, &c. Ensuite cette courbe s'étend de part & d'autre de l'axe à des distances $AB = AC = 1$, & y touche les droites parallèles à l'axe en une infinité de points E & F , dont les distances à B & à C forment pareillement une progression géométrique. La courbe s'approchera donc de la droite BC ; & après avoir fait une infinité de sinuosités, finira par se confondre entièrement avec elle. Une propriété singulière de cette courbe consiste donc en ce que ce n'est pas une ligne droite infinie, mais une ligne finie BC , qui en est l'asymptote; ce qui lui donne sur-tout un caractère particulier qui la distingue des courbes algébriques.

Pl. XII. Fig. 108:

526. On doit aussi rapporter aux courbes transcendentes; dont la construction exige des angles seuls ou accompagnés de logarithmes, la classe innombrable des SPIRALES. Ces sortes de courbes regardent un certain point fixe, comme centre, autour duquel elles se développent en faisant le plus souvent une infinité de tours. Leur nature s'exprime commodément par une équation entre la distance CM d'un point quelconque M de la courbe au centre C , & l'angle ACM , que cette droite CM fait avec une droite CA donnée de position. Soit donc l'angle $ACM = s$, ou soit s un arc de cercle dont le rayon est $= 1$, lequel sert de mesure à l'angle ACM , & soit la droite $CM = r$. Si on donne à présent une équation quelconque entre les variables s & r , il en résultera une spirale. Car, comme l'angle ACM , représenté par s , peut en outre l'être d'une infinité d'autres manières différentes, les angles

angles $2\pi + s$, $4\pi + s$, $6\pi + s$ &c., aussi bien que les angles $-2\pi + s$, $-4\pi + s$, &c. donnant la même position pour la droite CM , il s'enfuit qu'en faisant ces substitutions pour s dans l'équation, la distance CM aura une infinité de valeurs différentes; & par conséquent la droite CM prolongée coupera la courbe en une infinité de points, à moins qu'il ne résulte de ces valeurs une quantité imaginaire z . Commençons donc par le cas le plus simple, qui est celui où $z = as$; on aura pour une même position de la droite CM ces valeurs de z , $a(2\pi + s)$, $a(4\pi + s)$, $a(6\pi + s)$, &c.; & $-a(2\pi - s)$, $-a(4\pi - s)$, $-a(6\pi - s)$, &c. De plus, si au lieu de s on écrit $\pi + s$, la position de la droite CM n'en fera pas changée; seulement la valeur de z devra être prise négativement. Ainsi il faudra ajouter aux valeurs de z , que nous venons d'assigner, ces autres $-a(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(5\pi + s)$ &c.; & de plus, $a(\pi - s)$, $a(3\pi - s)$, $a(5\pi - s)$, &c. La forme de la courbe fera donc telle qu'elle est représentée dans la figure citée à la marge; ainsi elle touche la droite AC au point C , & se divise ensuite en deux branches infinies, qui font chacune une infinité de circuits autour du centre C , & qui se coupent réciproquement sur la droite BC perpendiculaire à AC ; de manière que la droite BCB' fera un diamètre. Cette courbe, à cause de son inventeur, est ordinairement connue sous le nom de *Spirale d'Archimède*, & si on la suppose une fois exactement décrite, elle servira à partager un angle quelconque en autant de parties qu'on voudra, comme le fait voir naturellement son équation $z = as$.

Pl. XII. Fig. 109.

§ 27. On voit que l'équation $z = as$ qui désigneroit une ligne droite, si z & s étoient des coordonnées perpendiculaires, a donné la spirale d'Archimède; de même, si on employoit d'autres équations algébriques entre z & s , on obtiendrait une infinité d'autres spirales, pourvu toutefois que l'équation fût telle que les valeurs de z correspondantes à celles de s fussent réelles. Ainsi cette équation $z = \frac{a}{s}$, qui est semblable à celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes,

donne la spirale que le célèbre *Jean BERNOULLI* a appelée hyperbolique. Après avoir fait une infinité de tours, à partir du centre *C*, elle s'approche enfin à une distance infinie de la droite *AA* comme asymptote. Si l'on propose l'équation $\zeta = a\sqrt{s}$, il n'y aura point de distance réelle ζ qui réponde aux *s* prises négativement; mais il y aura pour chaque valeur positive de *s* deux valeurs correspondantes de ζ , l'une positive, l'autre négative. La courbe fera cependant une infinité de circuits autour du point *C*; mais, si l'équation entre ζ & *s* est de cette forme $\zeta = a\sqrt{(nn - ss)}$, la variable ζ n'aura aucune valeur réelle, à moins que *s* ne soit renfermée entre ces limites $+n$ & $-n$; & dans ce cas la courbe sera finie. Par exemple, si les droites *EF*, *EF*, qui passent par le centre sont inclinées des deux côtés de l'axe, & forment avec lui un angle $=n$, elles feront des tangentes de la courbe qui se croise au point *C*, & qui présentera la forme d'une Lemniscate *ACBCA*. On peut obtenir d'une manière semblable les formes d'une infinité d'autres lignes transcendantes; mais il seroit trop long de les détailler ici.

Pl. XII. Fig. 110.

528. On pourroit rendre ce traité beaucoup plus long, en prenant entre ζ & *s* non pas seulement des équations algébriques, mais encore des équations transcendantes. Entre autres courbes de ce genre, on doit remarquer celle qui est exprimée par l'équation $s = n.l.\frac{\zeta}{a}$, dans laquelle les angles *s* sont proportionnels aux logarithmes des distances ζ . On a appelé pour cette raison cette courbe la *Spirale Logarithmique*; plusieurs propriétés remarquables la distinguent; la principale, c'est que toutes les droites menées du centre *C* coupent la courbe sous des angles égaux. Pour déduire cette propriété de son équation, soit l'angle $ACM = s$ & la droite $CM = \zeta$, on aura $s = n.l.\frac{\zeta}{a}$ & $\zeta = ae^{\frac{s}{n}}$. Si on prend un angle plus grand

Pl. XII. Fig. 111.

$ACN = s + v$, la droite CN sera $= ae^{\frac{s+v}{n}}$; & par conséquent, ayant décrit du centre *C* l'arc $ML = \zeta v$, LN deviendra $= ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.)$. On aura

$$\text{donc } \frac{ML}{LN} = \frac{v}{\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.} = \frac{n}{1 + \frac{v}{2n} + \frac{v^2}{6n^2} + \&c.}$$

Mais la différence $M CN = v$ des angles venant à s'évanouir, $\frac{ML}{LN}$ deviendra la tangente de l'angle que le rayon CM fait avec la courbe ; donc, en faisant $v = 0$, la tangente de l'angle ACM fera $= n$; & par conséquent l'angle a une grandeur constante. Si $n = 1$, cet angle fera demi-droit ; & dans ce cas la spirale logarithmique se nomme demi-droite.

CHAPITRE XXII.

Solution de quelques Problèmes relatifs au Cercle.

§ 29. NOUS avons vu auparavant que, le rayon d'un cercle étant $= 1$, la demi-circonférence π , ou l'arc de 180 degrés étoit $= 3,14159265358979323846264338$, dont le logarithme décimal ou vulgaire est :

0,497149872694133854351268288 ;

&, en multipliant celui-ci par 2, 30258, &c., on aura le logarithme hyperbolique du même nombre, ou

1,1447298858494001741434237.

Puisqu'on connoît la longueur d'un arc de 180 degrés, on pourra donc assigner celle d'un arc quelconque donné en degrés. En effet, soit proposé un arc de n degrés, dont on demande la longueur $= z$, on fera $180 : n :: \pi : z$; donc $z = \frac{\pi n}{180}$. On trouvera ensuite le logarithme de z , en retranchant du logarithme de n celui-ci :

1,758122632409172215452526413.

Mais, si l'arc proposé est donné en minutes n' , il faudra alors soustraire du logarithme de n celui-ci :

3 Qq ij

3,536273882792815847961293211;

& , si l'arc proposé est exprimé en secondes, ou qu'il soit $= n''$, on trouvera le logarithme de sa longueur, en retranchant du logarithme de n celui-ci :

5,314425133176459480470060009;

ou, en ajoutant au logarithme du nombre n :

4,685574866823540519529939990,

& diminuant de 10 la caractéristique de la somme.

530. Réciproquement, on pourra convertir le rayon & ses autres parties quelconques, telles que les sinus, tangentes & sécantes, en arcs, & exprimer ceux-ci selon la manière accoutumée en degrés, minutes & secondes. Soit r une de ces lignes exprimée en unités entières & décimales du rayon, prenons son logarithme avec 10 unités de plus à la caractéristique, ainsi qu'on a coutume de représenter dans les Tables les logarithmes des sinus, des tangentes & des sécantes; cela fait, il faudra soustraire de ce logarithme :

4,685574866823540519529939990;

ou y ajouter 5,314425133176459480470060009; on aura dans ces deux cas le logarithme dont le nombre correspondant donnera l'arc exprimé en secondes; mais dans le second cas, la caractéristique doit être diminuée d'une dixaine. Si on veut savoir quel est l'arc de cercle égal au rayon, on pourra le trouver plus facilement, sans employer les logarithmes, par la règle de Trois; car on a $\pi : 180^\circ :: 1 : \text{l'arc dont il s'agit}$. On trouve pour cet arc exprimé en degrés :

$57^\circ, 295779513082320876798$;

pour le même arc exprimé en minutes :

$3437', 74677078493925260788$;

& enfin, si on veut l'avoir en secondes, il est $=$ à

$206264'', 8062470963551564728$.

Cet arc exprimé à la manière ordinaire contiendra :

$57^{\circ} 17' 44'' 48''' 22'''' 29''''' 21''''''$,

son sinus exprimé en séries telles que nous les avons développées dans la première section :

$$= 0,84147098480514$$

&

son cosinus $= 0,54030230584341$;

& le premier de ces nombres divisé par le second donnera la tangente de $57^{\circ} 17' 44'' 48''' 22'''' 29''''' 21''''''$ &c.

531. Au moyen de ces principes préliminaires, qui peuvent nous servir pour comparer les arcs circulaires avec leurs sinus & leurs tangentes, nous pourrions résoudre un grand nombre de questions relatives à la nature du Cercle. D'abord il est clair que tout arc est plus grand que son sinus, à moins qu'il ne soit évanouissant; mais dans ce dernier cas son cosinus = 1; donc le cosinus est alors plus grand que l'arc : au contraire le cosinus d'un angle droit = 0; & par conséquent est plus petit que l'arc auquel il appartient. Il suit de-là qu'il y a entre 0° & 90° un arc égal à son cosinus, & que nous nous proposons de trouver dans le problème suivant :

PROBLÈME I.

Trouver l'arc de cercle qui soit égal à son cosinus.

SOLUTION.

Soit s l'arc cherché, on aura $s = \text{cos. } s$. On ne voit guère de moyen plus commode pour obtenir la valeur de s que d'employer la règle appelée de *fausse position*. Mais pour cela il faut déjà en connoître une valeur assez approchée, qu'on peut au reste obtenir par une simple conjecture; car sans cela il faudra substituer trois valeurs ou plus à s , & ramener pareillement le cosinus à la même unité. Supposons $s = 30^{\circ}$, & ramenons cet

310 SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES
 arc à être exprimé en parties du rayon suivant la méthode donnée plus haut:

$$l. 30 = 1,4771213$$

Retranchez $1,7581226$

$$l. \text{ arc } 30^\circ = 9,7189987;$$

mais

$$l. \text{ cof. } 30^\circ = 9,9375306.$$

Donc le cofinus de 30° est beaucoup plus grand que son arc ; & par conséquent l'arc cherché surpasse 30° . Supposons donc :

$$s = 40^\circ$$

on aura

$$l. 40 = 1,6020600$$

Retranchez $1,7581226$

$$l. \text{ arc } 40^\circ = 9,8439374;$$

mais

$$l. \text{ cof. } 40^\circ = 9,8842540.$$

On voit par là que l'arc cherché est un peu plus grand que 40° ; faisons donc en conséquence $s = 45^\circ$, nous aurons :

$$l. 45 = 1,6532125$$

Retranchez $1,7581226$

$$l. \text{ arc } 45^\circ = 9,8950899;$$

or

$$l. \text{ cof. } 45^\circ = 9,8494850;$$

l'angle demandé est donc compris entre 40° & 45° . Nous pourrions trouver à présent une valeur assez approchée; car, en supposant $s = 40^\circ$,

$$\text{l'erreur} = + 403166;$$

$$\text{mais en faisant } s = 45^\circ$$

$$\text{l'erreur} = - 456049$$

$$\& \text{ la différence} = 859215;$$

il faudra donc dire $859215 : 403166 ::$ la différence des hypothèses, qui est 5° : à l'excès de l'arc cherché sur 40° ; d'où il suit que l'arc cherché est plus grand que 42° ; car les limites sont trop éloignées pour qu'on soit en droit d'en conclure une valeur plus exacte. Prenons donc ces autres limites plus rapprochées:

	$s = 42^\circ$	$s = 43^\circ$	
	$l.s = 1,6232493$	$1,6334685$	
Retranchez	$1,7581226$	$1,7581226$	
	$l.s = 9,8651267$	$9,8753459$	
	mais	mais	
$l. \text{ cof. } s =$	$9,8710735$	$9,8641275$	
	$+ 59468$	$- 112184$	
	112184	171652	
	171652	$59468 :: 1^\circ : 20' 47''$	

Nous voilà donc arrivés à des limites très-rapprochées $42^\circ 20'$ & $42^\circ 21'$, entre lesquelles tombe la véritable valeur de s . Réduisons ces angles en minutes :

$s = 2140'$	$s = 2541'$
$l s = 3,4048337$	$3,4050047$
Retranchez $3,5362739$	$3,5362739$
$l s = 9,8685598$	$9,8687308$
$l.cof. s = 9,8687851$	$9,8686700$
$+ \quad 2253$	$- \quad 608$
$\quad \quad 608$	

$$2861 : 2253 :: 1' : 47'' 14'''.$$

De-là nous concluons que l'arc que nous cherchons, & qui est égal à son cosinus, sera $= 42^\circ 20' 47'' 14'''$; & son cosinus, ou la longueur même de l'arc, sera $= 0,7390847$. *C. Q. F. T.*

532. Le secteur de cercle ACB est divisé par la corde AB en deux parties, savoir le segment AEB & le triangle ACB , dont le premier est moindre que le second, lorsque l'angle ACB est petit; & plus grand au contraire, lorsque l'angle ACB devient très-obtus. Il y aura donc un cas où le secteur ACB sera partagé par la corde en deux portions égales; c'est ce qu'il s'agit de trouver.

PROBLÈME II.

Trouver le secteur de cercle ACB qui est partagé par la corde AB en deux parties égales, de manière que le triangle ACB soit égal au segment ACB .

SOLUTION.

Le rayon AC étant $= 1$, soit l'arc demandé $AEB = 2s$; & conséquemment sa moitié $AE = BE = s$. Si on mène le rayon CE , on aura $AF = \sin. s$ & $CF = \cos. s$. Il suit de-là que le triangle $ACB = \sin. s.cof. s = \frac{1}{2} \sin. 2s$; & que le secteur $ACB = s$; comme celui-ci doit être égal au double du triangle, on aura $s = \sin. 2s$. On doit donc chercher un arc qui soit égal au sinus du double. D'abord l'angle ACB doit être

être plus grand qu'un angle droit ; & par conséquent s doit être plus grande que 45° degrés. Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

$s = 50^\circ$	$s = 55^\circ$	$s = 54^\circ$
$ls = 1,6989700$	1,7403627	1,7323938
Retranchez 1,7581226	1,7581226	1,7581226
9,9408474	9,9822401	9,9742712
$l.\sin. 2s = 9,9933515$	9,9729858	9,9782063
+ 525041	— 92543	+ 39351
92543		

$$617584 : 525041 :: 5^\circ : 4^\circ 15'$$

On aura donc à-peu-près $s = 54^\circ 15'$; ajoutons aux hypothèses précédentes celle-ci, $s = 54^\circ$, & nous conclurons des erreurs $s = 54^\circ 17' 54''$, valeur qui ne diffère pas d'une minute entière de la véritable. Faisons donc les hypothèses suivantes, qui diffèrent entre elles seulement d'une minute :

$s = 54^\circ 17'$	$s = 54^\circ 18'$	$s = 54^\circ 19'$
ou	ou	ou
$s = 3257'$	$s = 3258'$	$s = 3259'$
&	&	&
$2s = 108^\circ 34'$	$2s = 108^\circ 36'$	$2s = 108^\circ 38'$
$suppl. = 71^\circ 26'$	$suppl. = 71^\circ 24'$	$suppl. = 71^\circ 22'$
$ls = 3,5128178$	3,5129511	3,5130844
Retranchez 3,5362739	3,5362739	3,5362739
$ls = 9,9765439$	9,9766772	9,9768105
$l.\sin. 2s = 9,9767872$	9,9767022	9,9766171
+ 2433	+ 250	— 1934
	1934	
	2184	

on fera donc $2184 : 250 :: 1' : 6'' 52'''$.

314 SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES

On conclura de-là $s = 54^{\circ} 18' 6'' 52'''$. Si nous voulions déterminer plus exactement cet angle, nous ferions obligés d'employer des tables plus étendues. Nous ferions alors les hypothèses suivantes, qui diffèrent de $10''$:

$s = 54^{\circ} 18' 0''$	$s = 54^{\circ} 18' 10''$
ou	ou
$s = 195480''$	$s = 195490''$
$2s = 108^{\circ} 36' 0''$	$2s = 108^{\circ} 36' 20''$
<i>suppl.</i> = $71^{\circ} 24' 0''$	<i>suppl.</i> = $71^{\circ} 23' 40''$
<i>l.s</i> = 5,2911023304	<i>l.s</i> = 5,2911245466
Retranchez 5,3144251332	5,3144251332
9,9766771972	9,9766994134
<i>l.sin. 2s</i> = 9,9767022291	<i>l.sin. 2s</i> = 9,9766880552
+	-
250319	113582
113582	

$$363901 : 250319 :: 10'' : 6'' 52''' 43'''' 33''''''$$

On aura donc $s = 54^{\circ} 18' 6'' 52''' 43'''' 33''''''$; par conséquent l'angle $ACB = 108^{\circ} 36' 13'' 45'''' 27'''''' 6''''''''$ son supplément = $71^{\circ} 23' 46'' 14'''' 32'''''' 54''''''''$

Le logarithme du sinus de cet angle, ou

$$l.\sin. 2s = 9,9766924791$$

&

$$\text{le sinus même} = 0,9477470.$$

On aura ensuite

$$\sin. s = AF = BF = 0,8121029$$

& le double ou

$$\text{la corde } AB = 1,6242058.$$

Et de plus on aura

$$\text{cosinus } CF = 0,5335143.$$

Ainsi on pourra construire par approximation le secteur demandé. C. Q. F. T.

533. On peut déterminer d'une manière semblable le sinus qui divise un quart de cercle en deux parties égales.

PROBLÈME III.

Mener dans un quart de cercle ACB un sinus DE, qui en divise l'aire en deux parties égales. Pl. XII. Fig. 115.

SOLUTION.

Soit l'arc $AE = s$, BE fera $= \frac{\pi}{2} - s$, à cause de $AEB = \frac{\pi}{2}$, & l'aire du quart de cercle $= \frac{1}{4}\pi$. Celle du secteur $ACE = \frac{1}{2}s$; si on en retranche le triangle $CDE = \frac{1}{2} \sin. s. \cos. s$, l'espace restant $ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \sin. s. \cos. s$, dont le double doit valoir le quart de cercle. Ainsi on aura $\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2} \sin. 2s$. Donc $s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} \sin. 2s$. Soit l'arc $s - \frac{1}{4}\pi = s - 45^\circ = u$, on aura $2s = 90^\circ + 2u$; il faut donc que $u = \frac{1}{2} \cos. 2u$ & $2u = \cos. 2u$. Puisqu'on doit avoir un arc qui soit égal à son cosinus, & que nous l'avons trouvé par le premier problème, nous aurons $2u = 42^\circ 20' 47'' 14''$, & $u = 21^\circ 10' 23'' 37''$. On aura donc l'arc $AE = s = 66^\circ 10' 23'' 37''$ & l'arc $BE = 23^\circ 49' 36'' 23''$. Il s'ensuit que la partie CD du rayon $= 0,4039718$, $AD = 0,5960281$ & le sinus $DE = 0,9147711$. Le même moyen qui partage le quart de cercle en deux également, divisera donc le cercle entier en huit parties égales. C. Q. F. T.

534. De même que toute droite menée par le centre d'un cercle le partage en deux également, on pourra aussi mener d'un point quelconque de la circonférence des droites qui le divisent en trois parties égales, ou même en un plus grand nombre. Cherchons à le diviser en quatre.

PROBLÈME I V.

Pl. XII. Fig. 24. *Etant donné le demi-cercle AEDB, tirer du point A une corde AD qui divise en deux parties égales sa surface.*

SOLUTION.

Soit l'arc cherché $AD = s$; ayant mené le rayon CD ; on aura l'aire du secteur $ACD = \frac{1}{2}s$; si on en retranche le triangle $ACD = \frac{1}{2}AC \cdot DE = \frac{1}{2} \sin. s$, il restera le segment $AD = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \sin. s$, qui doit être égal au demi-cercle ADB , mais l'aire du demi-cercle $= \frac{1}{2}\pi$; donc $s - \sin. s = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$, & par conséquent $s - 90^\circ = \sin. s$. Faisons $s - 90^\circ = u$, nous aurons $\sin. s = \cos. u$ & partant $u = \cos. u$. On aura donc d'abord par le premier problème $u = 42^\circ 20' 47'' 14''$, & ensuite $s =$ à l'angle $ACD = 132^\circ 20' 47'' 14''$, & l'angle $BCD = 47^\circ 39' 12'' 46''$. La corde AD fera $= 1,8295422$. C. Q. F. T.

535. On peut donc séparer ainsi dans un cercle un segment, dont la surface soit le quart du cercle entier; or on fait que le segment égal à la moitié du cercle est le demi-cercle lui-même, & que sa corde est le diamètre. On peut trouver d'une manière semblable un segment qui soit le tiers du cercle entier. Ce sera l'objet du problème suivant.

PROBLÈME V.

Pl. XII. Fig. 115. *D'un point A de la circonférence tirer deux cordes AB, AC, qui divisent l'aire du cercle en trois parties égales.*

SOLUTION.

Soient le rayon du cercle $= 1$, la demi-circonférence $= \pi$, & l'arc AB ou $AC = s$; on aura l'aire du segment AEB ou $AFC = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \sin. s$, mais celle du cercle $= \pi$; donc, à cause que l'aire du segment AEB doit être le tiers de celle

du cercle, on aura $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \sin. s = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, ou $s - \sin. s = 120$; & par conséquent $s - 120^\circ = \sin. s$. Soit $s = 120^\circ = u$, on aura $u = \sin. (u + 120) = \sin. (60 - u)$. On doit donc chercher un arc u qui soit égal au sinus de l'angle de $60^\circ - u$; u sera donc moindre que 60° . Pour trouver cet arc, nous ferons les suppositions suivantes :

$u = 20^\circ$	$u = 30^\circ$	$u = 40^\circ$
$60 - u = 40^\circ$	$60 - u = 30^\circ$	$60 - u = 20^\circ$
$l.u = 1,3010300$	$1,4771213$	$1,6020600$
Retranchez $1,7581226$	$1,7581226$	$1,7581226$
$l.u = 9,5429074$	$9,7189987$	$9,8439374$
$l.\sin. (60 - u) = 9,8080675$	$9,6989700$	$9,5340517$
$+ 2651601$	$- 200287$	$- 3098857$

On voit donc par-là que l'angle u doit être un peu plus petit que 30° ; & par un calcul que j'ai supprimé, il doit être plus grand que 29° . Ainsi soit $u = 29^\circ$:

$60 - u = 31^\circ$
$l.u = 1,4623980$
Retranchez $1,7581226$
$l.u = 9,7042754$
$l.\sin. (60 - u) = 9,7118393$
$+ 75639$
$- 200287$
$275926 : 75639 :: 1^\circ : 16' 26''$

L'angle u feroit donc $= 29^\circ 16' 26''$. Pour en avoir une valeur

318 SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES

plus exacte, faisons ces deux autres hypothèses qui ne diffèrent que d'une minute:

$u = 29^{\circ} 16'$		$u = 29^{\circ} 17'$
ou		ou
$u = 1756'$		$= 1757''$
$60 - u = 30^{\circ} 44'$		$60 - u = 30^{\circ} 43'$
$l.u = 3,2445245$		$3,2447718$
Retranchez		$3,5362739$
$lu = 9,7082506$		$9,7084979$
$l.\sin. (60 - u) = 9,7084575$		$9,7082450$
$+ 2069$		$- 2529$
2529		
		$4598 : 2069 :: 1' : 27'' 0'''$

On aura donc la vraie valeur de $u = 29^{\circ} 16' 27'' 0'''$;

l'arc $s = AEB = 149^{\circ} 16' 27'' 0''' = AFC$;

d'où résultent

l'arc $BC = 61^{\circ} 27' 6'' 0'''$

&

la corde $AB = AC = 19285340$. C. Q. F. T.

§ 36. Après avoir résolu ces problèmes, où il s'agit de trouver un arc quelconque égal à son sinus ou à son cosinus, nous ajouterons le suivant, dont l'objet à la vérité est le même, mais qui pourtant présente plus de difficulté.

PROBLÈME VI.

Couper dans le demi-cercle AEB l'arc AE, de manière qu'en abaissant son sinus ED, l'arc AE soit égal à la somme des droites AD + DE. Pl. XII. Fig. 116.

SOLUTION.

Comme on voit tout de suite que cet arc doit être plus grand qu'un quart de cercle, cherchons son supplément BE, & faisons l'arc BE = s, de sorte que l'arc AE = 180° - s. A cause de AC = 1, de CD = cos. s, de DE = sin. s, on aura 180° - s = 1 + cos. s + sin. s. Mais sin. s = 2 . sin. $\frac{1}{2}$ s . cos. $\frac{1}{2}$ s & 1 + cos. s = 2 cos. $\frac{1}{2}$ s . cos. $\frac{1}{2}$ s; d'où 180° - s = 2 cos. $\frac{1}{2}$ s (sin. $\frac{1}{2}$ s + cos. $\frac{1}{2}$ s). Or cos. (45° - $\frac{1}{2}$ s) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$. cos. $\frac{1}{2}$ s + $\frac{1}{\sqrt{2}}$. sin. $\frac{1}{2}$ s; donc sin. $\frac{1}{2}$ s + cos. $\frac{1}{2}$ s = $\sqrt{2}$. cos. (45° - $\frac{1}{2}$ s); & par conséquent 180° - s = 2 $\sqrt{2}$ cos. $\frac{1}{2}$ s . cos. (45° - $\frac{1}{2}$ s). Cette réduction étant faite, prenons les hypothèses suivantes :

$\frac{1}{2} s = 20^\circ$	$\frac{1}{2} s = 21^\circ$
$45^\circ - \frac{1}{2} s = 25^\circ$	$45^\circ - \frac{1}{2} s = 24^\circ$
$180 - s = 140^\circ$	$180 - s = 138^\circ$
$l(180 - s) = 2,1461280$	$2,1398791$
Retranchez <u>1,7581226</u>	<u>1,7581226</u>
$l(180 - s) = 0,3880054$	<u>0,3817565</u>
$l \text{ cos. } \frac{1}{2} s = 9,9729858$	<u>9,9701517</u>
$l \text{ cos. } (45^\circ - \frac{1}{2} s) = 9,9572757$	<u>9,9607302</u>
$l \cdot 2 \sqrt{2} = 0,4515450$	<u>0,4515450</u>
<u>0,3818065</u>	<u>0,3824269</u>
Erreur + 61989	- 6704
6704	
68693 : 61989 :: 1° : 54'	

Ainsi la valeur de $\frac{1}{2} s$ est comprise entre les limites 20° 54' & 20° 55'. Faisons en conséquence les suppositions suivantes :

$\frac{1}{2}s = 20^{\circ} 54'$	$\frac{1}{2}s = 20^{\circ} 55'$
$45^{\circ} - \frac{1}{2}s = 24^{\circ} 6'$	$45^{\circ} - \frac{1}{2}s = 24^{\circ} 5'$
$s = 41^{\circ} 48'$	$s = 41^{\circ} 50'$
$180^{\circ} - s = 138^{\circ} 12'$	$180 - s = 138^{\circ} 10'$
ou	ou
$180^{\circ} - s = 8292'$	$180 - s = 8290'$
$\angle(180^{\circ} - s) = 3,9186593$	$3,9185545$
Retranchez $3,5362739$	$3,5362739$
$0,3823854$	$0,3822806$
$\angle \text{cof. } \frac{1}{2}s = 9,9704419$	$9,9703937$
$\angle(45^{\circ} - \frac{1}{2}s) = 9,9603919$	$9,9604484$
$\angle 2\sqrt{2} = 0,4515450$	$0,4515450$
$0,3823788$	$0,3823871$
+ 66	- 1065
1065	

$$1131 : 66 :: 1' : 3'' 30'''.$$

On aura donc $\frac{1}{2}s = 20^{\circ} 54' 3'' 30'''$

&

$$s = 41^{\circ} 48' 7'' 0''' = BE;$$

& par conséquent l'arc cherché

$$AE = 138^{\circ} 11' 53'' 0'''.$$

Mais on aura les lignes

$DE = 0,6665578$ & $AD = 1,7454535$. C. Q. F. T.
 §37. Comparons maintenant les arcs avec leurs tangentes;
 &

&, comme les premiers sont plus petits que les secondes dans le premier quart de cercle, cherchons un arc qui soit la moitié de sa tangente. On l'aura par le problème suivant.

PROBLÈME VII.

Trouver un secteur ACD , qui soit la moitié du triangle ACE formé par le rayon AC , la tangente AE & la sécante CE . Pl. XII. Fig. 117.

SOLUTION.

L'arc AD étant $= s$, le secteur ACD sera $= \frac{1}{2} s$, & le triangle $ACE = \frac{1}{2} tang. s$; d'où il suit que $\frac{1}{2} tang. s = s$ ou $2s = tang. s$. Faisons donc les hypothèses qu'on voit ici :

$s = 60^\circ$	$s = 70^\circ$	$s = 66$	$s = 67^\circ$
$l. 2s = 2,0791812$	$2,1461280$	$2,1205739$	$2,1271048$
<u>1,7581226</u>	<u>1,7581226</u>	<u>1,7581226</u>	<u>1,7581226</u>
$l. 2s = 0,3210586$	$0,3880054$	$0,3624513$	$0,3689822$
<u>$l. tang. s = 0,2385606$</u>	<u>$0,4389341$</u>	<u>$0,3514169$</u>	<u>$0,3721481$</u>
$+ 824980$	$- 509287$	$+ 110344$	$- 31659$

De-là on conclut ces limites plus approchées de s , $66^\circ 46'$ & $66^\circ 47'$; en conséquence faisons :

$s = 66^\circ 46'$ ou	$s = 66^\circ 47'$ ou
$s = 4006'$	$s = 4007'$
$2s = 8012'$	$2s = 8014'$
$l. 2s = 3,9037409$	$3,9038493$
<u>3,5362739</u>	<u>3,5362739</u>
$l. 2s = 0,3674670$	$0,3675754$
<u>$l. tang. s = 0,3672499$</u>	<u>$0,3675985$</u>
Erreur + 2171	- 231
<u>231</u>	

$$2402 : 2171 :: 1' : 54'' 14'''.$$

Donc

$$\text{l'arc } s = AD = 66^\circ 46' 54'' 14''';$$

&

$$\text{la tangente } AE = 2,3311220. \text{ C. Q. F. T.}$$

538. Proposons-nous la question suivante.

PROBLÈME VIII.

Etant donné un quart de cercle ACB, trouver l'arc AE égal à sa corde AE prolongée jusqu'au point F.

SOLUTION.

Pl. XIII. Fig. 118. Soit l'arc $AE = s$, sa corde AE fera $= 2 \cdot \sin. \frac{1}{2} s$, le sinus versé $AD = 1 - \cos. s = 2 \cdot \sin. \frac{1}{2} s \cdot \sin. \frac{1}{2} s$. Les triangles semblables ADE , ACF donneront $2 \sin. \frac{1}{2} s \cdot \sin. \frac{1}{2} s : 2 \sin. \frac{1}{2} s :: 1 : s$. On aura par conséquent $s \sin. \frac{1}{2} s = 1$. Soient donc les suppositions suivantes :

$s = 70^\circ$	$s = 80^\circ$	$s = 84^\circ$	$s = 85^\circ$
$l s = 1,8450980$	$1,9030900$	$1,9242793$	$1,9294189$
Retranchez $1,7581226$	$1,7581226$	$1,7581226$	$1,7581226$
$0,0869754$	$0,1449674$	$0,1661567$	$0,1712963$
$l. \sin. \frac{1}{2} s = 9,7585913$	$9,8080675$	$9,8255109$	$9,8296833$
$9,8455667$	$9,9530349$	$9,9916676$	$0,0005796$
Erreur $+ 0,1544332$	$+ 0,0469650$	$+ 83223$	$- 9796$

D'où l'on conclut que s tombe entre les limites $84^\circ 53'$ & $84^\circ 54'$. Soit donc

$s = 84^\circ 53'$	$s = 84^\circ 54'$
ou	ou
$s = 5093'$	$s = 5094'$
$\frac{1}{2} s = 42^\circ 26 \frac{1}{2}'$	$\frac{1}{2} s = 42^\circ 27'$
$l s = 3,7069737$	$3,7070589$
Retranchez $3,5362739$	$3,5362739$
$0,1706998$	$0,1707850$
$l. \sin. \frac{1}{2} s = 9,8292003$	$9,8292694$
$0,9999001$	$0,0000544$
Erreur $+ 998$	$- 544$

d'où il suit que

l'arc $s = AE = 84^\circ 53' 38'' 51'''$

&

l'arc $BE = 50^\circ 6' 21'' 9'''$. C. Q. F. T.

539. Quoique tous les arcs du premier quart de cercle soient plus petits que leurs tangentes, il y en a cependant dans les quarts suivans qui leur sont égaux, & qu'il s'agit de trouver dans le problème qui suit par une méthode tirée des séries.

PROBLÈME IX.

Trouver tous les arcs qui sont égaux à leurs tangentes.

SOLUTION.

Le premier arc qui ait cette propriété est infiniment petit. Il n'y en a point dans le second quart, parce que les tangentes y sont négatives; mais il y en aura un dans le troisième, qui sera un peu plus petit que 270° . Il s'en trouvera ainsi de suite dans les cinquième, septième, &c. Soit le quart de la circonférence $= q$, & supposons les arcs en question renfermés dans cette formule $(2n + 1)q - s$, de manière que $(2n + 1)q - s = \text{cot. } s = \frac{1}{\text{tang. } s}$. Soit $\text{tang. } s = x$, on aura $s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{\&c.}$; & par conséquent $(2n + 1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{\&c.}$ Or, comme l'arc s est d'autant plus petit que n est un nombre plus grand, il est clair que x sera une quantité très-petite, & qu'on aura à-peu-près $x = \frac{1}{(2n + 1)q}$, ou $\frac{1}{x} = (2n + 1)q$; on approche davantage en faisant $\frac{1}{x} = (2n + 1)q - s = (2n + 1)q - \frac{1}{3(2n + 1)^3q^3} - \frac{1}{15(2n + 1)^5q^5} - \frac{1}{105(2n + 1)^7q^7} - \frac{1}{945(2n + 1)^9q^9} - \text{\&c.}$; & , comme $q = \frac{1}{2}\pi = 1,5707963267948$, on aura l'arc cherché $= (2n + 1)1,57079632679 - \frac{1}{(2n + 1)^3} - \frac{0,17200817}{(2n + 1)^5} - \frac{0,09062596}{(2n + 1)^7} - \frac{0,05892834}{(2n + 1)^9} - \frac{0,04258543}{(2n + 1)^9} - \text{\&c.}$; ou, si on ramène les termes qui sont exprimés en parties du rayon à la mesure ordinaire des arcs, on aura l'arc cherché, considéré en général, $= (2n + 1)90^\circ$

$\frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^2} - \frac{18692''}{(2n+1)^3} - \frac{12155''}{(2n+1)^4} - \frac{8784''}{(2n+1)^5}$. Voici
 donc par ordre les arcs qui satisfont à la question.

I.	1.	90° — 90°
II.	3.	90° — 12° 32' 48"
III.	5.	90° — 7 22 32
IV.	7.	90° — 5 14 22
V.	9.	90° — 4 3 59
VI.	11.	90° — 3 19 24
VII.	13.	90° — 2 48 37
VIII.	15.	90° — 2 26 5
IX.	17.	90° — 2 8 51
X.	19.	90° — 1 55 16.

540. Je ne propose pas un plus grand nombre de questions de ce genre, parce qu'on voit clairement, par les exemples qui précèdent, la méthode de les résoudre. Au reste, ces problèmes ont été imaginés principalement pour faire connoître plus intimement la nature du cercle, dont la quadrature a échappé jusqu'à présent à toutes les méthodes connues. Car, s'il étoit arrivé que dans la solution d'un problème on eût trouvé ou qu'un arc commensurable avec toute la circonférence, ou que son sinus ou sa tangente eussent pu être construits par le moyen du rayon, on auroit obtenu une certaine espèce de quadrature. Par exemple, si dans la résolution du problème VI le sinus DE , qui se trouve $= 0,6666666$, se fût trouvé $= 0,6666666 = \frac{2}{3}$, on eût découvert une belle propriété du cercle; car on auroit pu construire un arc AE égal à la ligne droite $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{3}}$. Au reste, il n'existe encore aucune preuve que cette quadrature du cercle soit impossible; &c, si elle est possible, aucune voie ne paroît plus propre à la faire trouver, que celle que nous venons d'ouvrir dans ce chapitre.

FIN DU LIVRE SECOND.

TRAITÉ ABRÉGÉ DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Surfaces des Corps en général.

1. CE que nous avons exposé dans la section précédente sur les lignes courbes & sur la manière de les représenter par des équations, a, sans contredit, un usage très-étendu, & s'applique en général à toutes les courbes dont tous les points sont situés dans un même plan. Mais, si la ligne entière n'est pas dans un même plan, alors les préceptes que nous avons donnés ci-dessus sont insuffisans pour en développer les propriétés. Les lignes de cette espèce présentent une double courbure; aussi sont-elles nommées courbes à double courbure; & c'est sous ce même nom que CLAIRAULT nous en a laissé un excellent Traité digne de sa sagacité. Au reste, comme ce sujet a beaucoup de rapport avec la nature des surfaces, dont je dois m'occuper dans cette section, je ne le traiterai point à part, & je me contenterai d'en joindre l'explication avec la théorie des surfaces, que jé vais détailler.

2. De même que les lignes sont ou droites ou courbes, les surfaces sont aussi ou planes ou non planes. J'appelle non planes, celles qui sont ou convexes, ou concaves, ou qui participent de ces deux propriétés. Ainsi la surface extérieure d'une sphère, d'un cylindre & d'un cône, à l'exception des bases, est convexe; & la surface intérieure d'une coupe est concave. On fait qu'une ligne est droite, lorsque tous ses

points pris trois à trois sont dans une même direction ; semblablement, une surface est plane, lorsque tous ses points pris quatre à quatre sont situés dans un même plan ; d'où il suit qu'une surface non plane, c'est-à-dire, ou convexe ou concave, est celle dont tous les points pris quatre à quatre ne sont pas situés dans un même plan.

3. On concevra donc très-facilement ce qu'est une surface non plane, si on fait combien elle diffère par-tout d'une surface plane ; c'est - à - dire, que de la même manière que nous avons déterminé la nature des lignes courbes par la distance de chacun de ses points à une ligne droite prise pour axe, il conviendra de même de déterminer la nature des surfaces par la distance de chacun de ses points à une surface plane prise à volonté. Etant donc proposée une surface quelconque, dont il s'agit de faire connoître la nature, il faudra choisir arbitrairement une surface plane sur laquelle on concevra abaissées des perpendiculaires de chacun des points de la surface proposée. Cela fait, si l'on peut déterminer, par le moyen d'une équation, la longueur de chacune de ces perpendiculaires, cette équation même sera censée exprimer la nature de cette surface. Car on pourra réciproquement, au moyen de cette équation, assigner tous les points de la surface ; & par conséquent celle-ci se trouvera par-là déterminée.

4. Supposons que le plan de la planche représente cette surface plane, à laquelle nous rapporterons tous les points de la surface que nous considérons. Soit M un point quelconque de cette surface situé hors du plan de la planche, & d'où on aura abaissé la perpendiculaire MQ , qui rencontre le plan en Q . Ensuite, pour exprimer par le calcul la situation de ce point Q , on prendra sur le plan de la planche une droite quelconque AB pour axe, à laquelle on mènera du point Q la perpendiculaire QP . Enfin on prendra sur l'axe AB un point quelconque A pour l'origine des abscisses ; cela fait, la situation du point M sera connue, si on connoît les longueurs de ces trois lignes AP , PQ & QM . Ainsi on déterminera, à l'aide de trois coordonnées perpendiculaires entre elles, la situation de chaque point M de la surface, de la même ma-

nière qu'on a coutume de représenter tous les points des lignes courbes situées dans un même plan, par le moyen de deux coordonnées perpendiculaires entre elles.

5. Puisque nous avons trois coordonnées AP , PQ & QM , nous ferons $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; & nous connoîtrons la nature de la surface proposée, si, après avoir pris à volonté deux de ces lignes x & y , nous savons ce que doit être la troisième z ; car nous pourrions déterminer de cette manière tous les points M de la surface. La nature d'une surface est donc donnée par une équation qui exprime la valeur de z par le moyen des deux autres quantités x & y & de constantes. Ainsi, pour chaque surface proposée, la variable z sera égale à une fonction quelconque des deux variables x & y ; & réciproquement, si z est égal à une fonction quelconque de x & de y , cette équation représentera une surface quelconque dont elle fera connoître en même temps la nature; car en substituant pour x & pour y toutes les valeurs tant positives que négatives dont ils sont susceptibles, on aura tous les points Q du plan qu'on aura choisi; & ensuite la valeur de z en x & en y fera connoître pour chaque point la longueur de la perpendiculaire $QM = z$ depuis le plan jusqu'à la surface. Si la valeur de z est positive, le point M de la surface sera situé au-dessus du plan APQ ; mais si elle est négative, il tombera au-dessous, & le point M de la surface sera sur le plan même, si cette valeur devient nulle; si elle étoit imaginaire, ce seroit une preuve qu'aucun point M de la surface ne répondroit au point Q ; & s'il arrive que z obtienne plusieurs valeurs réelles, alors la droite perpendiculaire au plan, qui passe par le point Q , rencontrera la surface en plusieurs points M .

6. Quant à la distinction des différentes surfaces, celle qui se présente naturellement est la distinction en continues ou régulières, & en discontinues ou irrégulières. La surface continue sera celle dont tous les points sont déterminés par une même équation entre z , x & y , ou pour chaque point de laquelle z est une même fonction de x & de y . La surface irrégulière est celle dont différentes parties sont représentées par diverses fonctions; comme si, par exemple, on proposoit une

surface qui fût sphérique dans un endroit, & qui dans un autre fût conique, ou cylindrique, ou plane. Nous excluons ici absolument les surfaces irrégulières; & nous ne considérons que les régulières, dont la nature est exprimée constamment par la même équation. Car, après avoir traité celles-ci, il sera facile de porter un jugement sur celles qui sont irrégulières, puisque ces dernières sont composées de parties de différentes surfaces régulières.

7. La première division des surfaces régulières est en algébriques & en transcendantes. Or on appelle surface algébrique, celle dont la nature est exprimée par une équation algébrique entre les coordonnées x , y & z ; ou pour laquelle z est égal à une fonction algébrique de x & de y . Au contraire, si z n'est pas une fonction algébrique de x & de y , ou s'il entre dans l'équation entre x , y & z , des quantités transcendentes, comme des quantités qui dépendent des logarithmes & des arcs de cercle; alors la surface dont la nature est exprimée par une telle équation, sera transcendante. Telles seront les surfaces exprimées par les équations $z = x.l.y$; $z = y^x$; $z = y.\sin.x$. Au reste, on conçoit facilement qu'il faut traiter les surfaces algébriques avant de passer aux transcendentes.

8. Ensuite, pour connoître la nature de la surface, il faudra sur-tout faire attention à la qualité de la fonction z , de x & de y , eu égard au nombre de valeurs qu'elle renferme. Ici se présentent donc d'abord les surfaces pour lesquelles z est égal à une fonction uniforme de x & de y . Soit P une telle fonction ou une fonction rationnelle de x & de y ; si on a l'équation $z = P$, il y aura un point unique de la surface qui répondra à chaque point du plan Q ; ou, ce qui revient au même, toute droite perpendiculaire au plan APQ rencontrera la surface en un seul point. Dans ce cas, aucune valeur de la droite QM ne pourra devenir imaginaire; mais toutes ces droites indiqueront des points réels de la surface. Cependant cette diversité de fonctions n'établit pas une variété essentielle entre les surfaces; car elle dépend de la position du plan APQ , qui, comme celle de l'axe, est arbitraire; de sorte que, si la même surface est rapportée à un autre plan, la

la fonction ζ qui étoit uniforme peut devenir multiforme.

9. Soient P & Q des fonctions uniformes quelconques de x & de y , & l'équation $\zeta\zeta - P\zeta + Q = 0$; les perpendiculaires élevées à chaque point Q du plan couperont la surface en deux points, ou ne la rencontreront nulle part; car ζ aura deux valeurs qui seront toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Semblablement, si P , Q & R désignent des fonctions uniformes de x & de y , on a $\zeta^3 - P\zeta^2 + Q\zeta - R = 0$; alors ζ sera une fonction triforme, & chaque droite QM coupera la surface, ou en trois points, si toutes les racines de l'équation sont réelles, ou seulement en un seul, s'il arrive que deux racines soient imaginaires. On fera un raisonnement semblable, si ζ est déterminé par une équation dans laquelle il ait un plus grand nombre de dimensions. On connoitra facilement de quel degré est la fonction multiforme ζ , si on rend rationnelle l'équation donnée entre x , y & ζ .

10. Du reste, il en est des trois coordonnées x , y & ζ dans une équation quelconque qui exprime une surface, comme des deux coordonnées qui entrent dans les équations aux lignes courbes; l'une quelconque peut être changée en l'autre, & réciproquement. Car d'abord, si on prend pour axe, dans le plan APQ , une autre droite Ap perpendiculaire à AP , on aura alors $Ap = y$ & $pQ = x$; & ainsi les deux variables x & y auront été changées l'une en l'autre. On aura une idée de routes les autres permutations en achevant le parallépipède rectangle $ApQM\xi\pi qPA$. On aura trois plans fixes perpendiculaires entre eux à considérer, savoir $APQp$, $APq\pi$ & $Ap\xi\pi$. La même équation entre x , y & ζ , fait voir comment se rapporte à chacun d'eux la surface proposée, à laquelle appartient le point M . Il est aisé de voir qu'il y a dans chaque plan deux axes qui ont l'un & l'autre leur origine au point A ; ce qui donne six relations différentes entre les trois coordonnées.

Les coordonnées feront :

$$\text{ou } \begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$$

Pour le plan $APQP$

$$\text{ou } \begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$$

Pour le plan $APq\pi$

$$\text{ou } \begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$$

Pour le plan $Ap\xi\pi$

$$\text{ou } \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Si on mène du point fixe A au point M de la surface la droite AM , elle sera $= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$.

11. La même équation entre les coordonnées x , y & z , est donc propre à faire connoître la nature de la surface à l'égard des trois plans qui sont perpendiculaires entre eux, & qui se coupent réciproquement au point A . En effet, de

même que la variable ζ représente la distance de chaque point de la surface au plan APQ ; de même la variable y représente la distance du même point M au plan APq , & la variable x celle au plan $Ap\xi$. Mais, si nous connoissons les distances du point M à chacun de ces trois plans, il est bien clair que nous aurons sa véritable situation. On doit donc distinguer particulièrement ces trois plans, auxquels se rapporte chaque surface exprimée par une équation donnée entre les trois variables x , y & ζ . Si l'un d'eux, par exemple, APQ est horizontal, les deux autres seront verticaux; l'un sera appliqué sur l'horizontal suivant la droite AP , & l'autre suivant la droite Ap .

12. Ayant donc fixé la position de ces trois plans perpendiculaires entre eux, auxquels on rapporte la surface proposée, on mènera de chacun de ses points M aux plans APQ , APq & $Ap\xi$, les perpendiculaires MQ , Mq & $M\xi$, lesquelles seront $MQ = \zeta$, $Mq = y$ & $M\xi = x$. Si ensuite on achève le parallépipède, on aura trois droites égales à celles-ci, lesquelles partent du point fixe A ; savoir $AP = x$, $Ap = y$ & $A\pi = \zeta$, & dont la connoissance détermine la position du point M . Au reste, il est évident que si ces variables x , y & ζ , lorsqu'elles tombent du côté indiqué par la figure, sont regardées comme positives, leurs valeurs seront censées négatives, lorsqu'elles seront dirigées en sens contraires.

13. Si dans l'équation entre les trois variables x , y & ζ , celle qui est perpendiculaire au plan APQ , c'est-à-dire ζ , a par-tout des dimensions paires, elle aura alors deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative. Les portions de la surface situées de chaque côté du plan APQ seront donc semblables & égales; & par conséquent le corps qui est terminé par cette surface, sera divisé en deux parties semblables & égales par la section faite suivant le plan APQ . Ainsi, comme nous avons appelé diamètre dans les figures planes toute ligne droite qui partageoit la figure en deux parties semblables & égales, nous appellerons de même plan *diamétral* dans les solides, celui qui divise un corps en deux parties sem-

blables. Donc, si toutes les dimensions de la variable ζ sont paires, le plan APQ sera un plan diamétral.

14. On conçoit de même que si dans l'équation à la surface la variable y , qui est perpendiculaire au plan APq , a par-tout des dimensions paires, le plan APq sera aussi diamétral; & si la variable x ne renferme aussi que des dimensions paires, alors le plan $Ap\xi$ sera diamétral. On peut donc juger tout de suite par l'équation donnée entre les trois variables x, y & ζ , si l'un des trois plans $APQ, APq, Ap\xi$, est diamétral ou non. Or il peut arriver que deux, ou même tous les trois, le soient à la fois. Par exemple, on a pour la sphère, dont le centre est en A , à cause du rayon $AM = \sqrt{(x^2 + y^2 + \zeta^2)} = a$, l'équation $x^2 + y^2 + \zeta^2 = a^2$; d'où il suit que chacun de ces trois plans partagera la sphère en deux parties semblables & égales.

Pl. XIII. Fig. 120.

15. Pour connoître la figure de la surface que renferme l'équation proposée, il faut sur-tout faire attention aux trois plans perpendiculaires entre eux, qui sont représentés dans la figure par $QQ^1Q^2Q^3, TT^1T^2T^3$ & $VV^1V^2V^3$, & qui s'entre-coupent mutuellement au point A . Ces trois plans, si on les conçoit prolongés à l'infini dans tous les sens, diviseront l'espace entier en huit régions, qui sont représentées dans la figure par les lettres $AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6$ & AX^7 . Si les variables x, y & ζ , sont supposées avoir des valeurs positives dans la première région AX , il y en aura une, ou deux, ou même trois, qui seront négatives dans les autres régions. C'est ce qu'on verra clairement, ayant sous les yeux le tableau suivant :

Région AX	Région AX^1	Région AX^2	Région AX^3
$AP = +x$	$AP^1 = -x$	$AP = +x$	$AP^1 = -x$
$AR = +y$	$AR = +y$	$AR = +y$	$AR = +y$
$AS = +\zeta$	$AS = +\zeta$	$AS^1 = -\zeta$	$AS^1 = -\zeta$

Région AX^4	Région AX^5	Région AX^6	Région AX^7
$AP = +x$	$AP' = -x$	$AP = +x$	$AP' = -x$
$AR' = -y$	$AR' = -y$	$AR' = -y$	$AR' = -y$
$AS = +z$	$AS = +z$	$AS' = -z$	$AS' = -z$

16. Il nous sera plus commode de distinguer par des nombres ces huit régions, afin que nous puissions indiquer plus facilement celle dont nous voudrons parler. Comme ces huit régions sont contiguës au point A , qu'elles sont formées par l'intersection de trois plans perpendiculaires entre eux, & que d'ailleurs ces plans sont déterminés par les trois droites Pp , Qq , Rr , qui se coupent perpendiculairement au point A ; ces régions pourront être désignées par ces trois lettres P , Q , R , majuscules ou minuscules. Ainsi la région principale ou la première sera l'espace PQR que renferme le parallépipède formé avec les trois droites AP , AQ , AR , prolongées à l'infini, & la région Pqr sera l'espace que renferme le parallépipède formé par les trois droites Ap , Aq , Ar , prolongées à l'infini. Ayant donc fait les trois variables $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, on aura $Ap = -x$, $Aq = -y$ & $Ar = -z$. Nous distinguerons en conséquence par des nombres les huit régions dont il s'agit, de la manière suivante :

Pl. XIII. Fig. 1. 1.

	première I.	seconde II.
	PQR	PQr
entre les coordonnées	$\left\{ \begin{array}{l} AP = +x \\ AQ = +y \\ AR = +z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} AP = +x \\ AQ = +y \\ Ar = -z \end{array} \right.$
	troisième III.	quatrième IV.
	PqR	pQR
entre les coordonnées	$\left\{ \begin{array}{l} AP = +x \\ Aq = -y \\ AR = +z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = -x \\ AQ = +y \\ AR = +z \end{array} \right.$

	cinquième V.	fixième VI.
	Pqr	pQr
entre les coordonnées	$\left\{ \begin{array}{l} AP = +x \\ Aq = -y \\ Ar = -z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = -x \\ AQ = +y \\ Ar = -z \end{array} \right.$
	septième VII.	huitième VII.
	pqR	pqr
entre les coordonnées	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = -x \\ Aq = -y \\ AR = +z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = -x \\ Aq = -y \\ Ar = -z \end{array} \right.$

17. Ces régions diffèrent plus ou moins entre elles. Il y en a deux qui ont deux coordonnées communes, & une qui n'en a qu'une; elles se touchent par conséquent par un plan; nous les appellerons *conjointes*. Ensuite, si les régions ont deux coordonnées différentes, & une seule commune, elles se toucheront seulement par une ligne droite; nous les nommerons *disjointes*. En troisième lieu, si toutes les coordonnées ont des signes différens, les régions ne se toucheront qu'en un seul point A ; & nous appellerons celles-ci *opposées*. La table suivante fera connoître quelles sont les régions qui, à l'égard de l'une d'elles, sont conjointes, ou disjointes, ou opposées.

Région. Conjointes. Disjointes. Opposées.

PQR I	Pqr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQR II	PQR I	Pqr V	pQR VI	Pqr III	pQr IV	pqR VIII	pqr VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqR VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqr VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V
Pqr V	PqR III	PQR II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQR II	pqR VII	PQR I	Pqr V	pQR III
pqR VII	pqr VIII	pQR IV	PqR III	pQr VI	Pqr V	PQR I	PQR II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	Pqr III	PQR II	PQR I.

Il paroît donc qu'à l'égard d'une région quelconque il y en a trois autres qui sont conjointes, autant qui sont disjointes, & une seule qui lui est opposée. La table précédente fait voir sur-le-champ ce qu'une région est à l'égard d'une autre à laquelle on veut la comparer. Au reste, l'ordre observé dans les nombres qui indiquent les régions, est digne d'attention. Pour le faire mieux appercevoir, j'ai renfermé les mêmes nombres dans l'espace de quarré qu'on voit ici.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

On verra avec une légère attention la nature & les propriétés de cette table; & ce qui suit ne laissera rien à desirer sur l'usage qu'on en peut faire.

19. Nous avons déjà remarqué que, si dans l'équation la variable z avoit par-tout des dimensions paires, la surface étoit composée de deux parties semblables & égales. En effet la partie située dans la première région sera égale à la partie située dans la seconde; la même égalité aura semblablement lieu pour la troisième & cinquième région, pour la quatrième & la sixième, & enfin pour la septième & la huitième; comme on en peut juger par les deux séries qui commencent par 1 & par 2. Si la variable y a par-tout dans l'équation des dimensions paires, la première région sera égale à la troisième, la seconde à

à la cinquième, la quatrième à la septième, & la sixième à la huitième; mais, si x a dans tous les termes de l'équation des dimensions paires, la première région sera la même que la quatrième; la seconde la même que la sixième; la troisième que la septième, & la cinquième que la huitième. Ainsi,

Si dans l'équation on a par-tout des dimensions paires pour la variable,

z	y	z
les régions égales seront	les régions égales seront	les régions égales seront
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

20. Pour que les parties de la surface qui sont situées dans les régions disjointes, la première & la cinquième, soient égales entre elles, il faut que l'équation reste la même, quoique les deux variables y & z soient prises négativement. Cela aura donc lieu, si les deux variables y & z prises ensemble forment dans chaque terme de l'équation ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires. Mais si la première région est la même que la cinquième, la seconde sera aussi égale à la troisième, la quatrième à la huitième, & la sixième à la septième. Pareillement, si dans l'équation de la surface les deux variables x & z forment par-tout un nombre soit pair, soit impair de dimensions, la première région sera égale à la sixième, la seconde à la quatrième, la troisième à la huitième, & la cinquième à la septième. Ainsi,

Si dans l'équation de la surface chaque terme ne donne que des dimensions paires, ou que des dimensions impaires pour les variables

y & z	x & z	x & y
les régions égales seront	les régions égales seront	les régions égales seront
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Mais si les trois variables x, y & z, prises ensemble, forment par-tout ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, alors les régions opposées seront égales :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Si deux ou trois de ces conditions ont lieu en même temps dans l'équation, alors quatre régions, ou les huit à la fois, renfermeront des parties de la surface semblables & égales entre elles. Ainfi,

Si x & y pris séparément ont par-tout des dimensions paires, alors les régions suivantes prises quatre à quatre seront les mêmes :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6

4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

Si x & z pris séparément ont par-tout des dimensions paires, alors les régions suivantes prises quatre à quatre seront égales :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7

4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Si les variables y & z considérées séparément ont dans tous les termes des dimensions paires, alors ce seront les régions suivantes qui prises quatre à quatre seront égales entre elles :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7

3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6

5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4.

22. Si une des variables a par-tout des dimensions paires, & que les deux autres prises ensemble forment par-tout ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, il y aura encore quatre régions qui seront égales, ainsi qu'on va le voir.

Si z a par-tout des dimensions paires, & que x & y forment par-tout, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, les régions suivantes prises quatre à quatre seront égales :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7

7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si y a par-tout des dimensions paires, & que dans chaque terme x & z pris ensemble forment des dimensions paires ou impaires, les régions suivantes prises quatre à quatre seront égales :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6

6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si x a par-tout des dimensions paires, & que y & z considérés ensemble forment dans tous les termes, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, les régions suivantes seront égales entre elles, étant prises quatre à quatre :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Dans ces trois cas toutes les trois variables x, y & z , prises ensemble formeront donc par-tout ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires.

23. Il reste encore à considérer les cas suivans, où quatre régions sont égales à la fois.

Si x & y } forment par-tout des dimensions paires ou des dimensions impaires,
 & y & z } alors les régions suivantes seront égales quatre à quatre:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4

7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

On obtiendra donc les mêmes résultats, si de plus les deux autres variables x & z forment dans tous les termes, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires; de sorte que cette condition est déjà renfermée dans la proposée. Les portions de la surface situées dans les quatre régions disjointes seront donc égales entre elles, si dans l'équation la combinaison des variables prises deux à deux & considérées ensemble forme par-tout, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires; mais, comme il y a trois combinaisons différentes, il faut remarquer que, si deux jouissent de la propriété demandée, la troisième en jouira pareillement.

24. Si aux conditions qui rendent semblables & égales entre elles quatre régions à la fois, on en ajoute une nouvelle qui ne soit pas renfermée dans les premières, & d'où résulte l'égalité de deux régions; alors toutes les régions deviendront égales, & la surface sera composée de huit parties égales & semblables entre elles. L'équation de ces sortes de surfaces renfermera donc toutes les propriétés mentionnées ci-dessus; ainsi chaque variable x , y , z , prise séparément, aura par-tout des dimensions paires; d'où il suit que deux quelconques considérées ensemble, ou même les trois prises à la fois, formeront dans tous les termes des dimensions paires.

25. Au reste, si lorsqu'une équation est proposée entre trois variables, on veut savoir si elle renferme une ou deux, ou

même trois des propriétés exposées ci-dessus, il n'y aura aucune difficulté pour ce qui concerne les dimensions paires de chaque variable. Il ne sera pas plus difficile de s'assurer si toutes les variables prises ensemble forment dans tous les termes, ou des dimensions paires ou des dimensions impaires. Mais prises seulement deux à deux doivent-elles jouir de cette propriété ? c'est ce qu'il sera plus difficile d'examiner. Il faudra faire dans l'équation ou $x=nz$, ou $y=nz$, ou $x=ny$, & voir si dans l'un ou l'autre cas il en résulte une équation dans laquelle z dans les deux premiers cas, ou y dans le dernier, reçoive par-tout des dimensions paires; si cela a lieu, il s'ensuit nécessairement que deux variables prises ensemble forment par-tout ou des dimensions paires ou des dimensions impaires; & par conséquent la surface aura au moins deux parties semblables & égales entre elles.

CHAPITRE III.

Des Sections des Surfaces faites par des Plans quelconques.

26. DE même que les intersections des lignes sont des points, les intersections des surfaces sont des lignes ou droites ou courbes. L'intersection de deux plans est une ligne droite, comme on le fait par les élémens, mais celle d'une sphère faite par un plan, est un cercle. Or il importe beaucoup, pour connoître une surface, de savoir quelle espèce de lignes résulte de l'intersection d'une surface par des plans donnés; car on connoitra à la fois de cette manière une infinité de points de la surface, tandis que par la méthode précédente les valeurs particulières de la variable z ne donnoient qu'autant de points de la superficie.

27. Comme nous rapportons les surfaces à trois plans perpendiculaires entre eux, il est naturel de chercher avant tout

les intersections de la surface & de ces plans. Si donc on prend le premier plan APQ déterminé par les variables $AP = x$, $AQ = y$, (à cause que la troisième variable z désigne la distance de chaque point de la surface à ce plan) il est clair que, si on fait $z = 0$, on trouvera tous les points de la surface qui seront situés sur le plan même APQ ; & que par conséquent l'équation résultante entre x & y représentera la ligne que forme l'intersection de la surface avec le plan APQ . Semblablement, si on fait $y = 0$, l'équation entre x & z exprimera l'intersection de la surface faite par le plan APR ; & en supposant $x = 0$, l'équation entre y & z donnera l'intersection de la surface & du plan AQR .

28. Nous avons déjà dit auparavant que la surface d'une sphère qui a son centre au point A , & dont le rayon $= a$ étoit exprimée par cette équation $xx + yy + zz = aa$; je me servirai de cet exemple pour éclaircir ce qu'on vient de lire sur les intersections. Soit donc $z = 0$, & l'équation $x^2 + y^2 = a^2$ exprimera l'intersection de la sphère par le plan APQ ; il est évident qu'elle sera un cercle dont le centre est en A , & dont le rayon $= a$. Semblablement, en faisant $y = 0$, l'intersection de la sphère faite par le plan APR sera un cercle représenté par l'équation $xx + zz = aa$. De même, si on suppose $x = 0$, l'équation $yy + zz = aa$ donnera un pareil cercle pour l'intersection du plan AQR . Tout cela, à la vérité, est suffisamment connu, puisque toutes les sections d'une sphère faites par des plans qui passent par son centre sont de grands cercles, c'est-à-dire des cercles qui ont un rayon commun avec la sphère.

29. Il ne sera pas plus difficile de déterminer les sections de la surface faites par d'autres plans parallèles à l'un des plans principaux. Concevons un plan parallèle au plan APQ , & qui en soit éloigné d'un intervalle $= h$, tous les points de la surface dont la distance au même plan APQ , laquelle est indiquée par la variable z , est $= h$, seront donc situés en même temps sur ce plan parallèle, & formeront par conséquent l'intersection. On aura donc l'équation qui convient à cette intersection, si on fait dans l'équation de la surface

$z = h$; car on aura alors entre les deux coordonnées perpendiculaires x & y , l'équation qui exprime la nature de la section. On déterminera de la même manière les sections qui se font par des plans parallèles ou à APR ou à AQR ; ainsi il seroit inutile de répéter pour les autres ce qui aura été dit pour l'un.

30. Si donc on fait dans l'équation de la surface entre les trois coordonnées x , y & z , l'une des variables, par exemple, z égale à une constante $= h$, on aura la section de la surface faite par un plan parallèle à APQ , & qui en est éloigné d'une quantité h ; ainsi, en donnant successivement à cette lettre h toutes les valeurs possibles tant positives que négatives, on obtiendra toutes les sections de la surface qui sont faites par des plans parallèles au plan APQ ; & comme la surface entière peut être divisée en une infinité de parties par tous ces plans parallèles, & qu'on connoît de cette manière toutes les sections, on connoîtra aussi par ce moyen la surface totale. En effet, toutes ces sections seront représentées par une seule équation entre les coordonnées x & y & la constante indéterminée h ; d'où il suit que toutes ces lignes comprises sous une seule équation seront toutes semblables, ou auront au moins de l'affinité entre elles.

31. Toutes les sections de la surface parallèles au plan APQ seront donc égales entre elles, & seront coupées de la même manière par les plans APR , AQR , si l'équation entre x & y est telle qu'elle demeure la même, quelque valeur qu'on donne à h ; or cela ne peut avoir lieu, à moins que la variable z , à la place de laquelle on a mis h , n'entre nullement dans l'équation de la surface. Par conséquent, si la troisième variable z ne fait point partie de l'équation de la surface, toutes les sections parallèles au plan APQ seront égales entre elles; & leur nature sera exprimée par l'équation même de la surface, qui renfermera seulement les deux variables x & y . De même, si la variable x ou la variable y manque entièrement dans l'équation de la surface, toutes les sections parallèles au plan AQR ou au plan APR seront parallèles entre elles.

32. Non-seulement il est facile de se faire une idée de ces fortes de surfaces, mais on peut même les construire & les former sur une matière donnée. Car supposons que la variable z manque dans l'équation, de sorte que l'équation subsiste seulement entre les coordonnées $AP = x$ & $AQ = PM = y$; on tracera, au moyen de l'équation, la ligne courbe BMD sur le plan APQ ; ensuite on concevra une ligne droite indéfinie qui, restant constamment perpendiculaire à ce plan, se meuve suivant cette courbe BMD ; cette droite tracera par son mouvement ou formera la surface indiquée par cette équation; d'où il suit évidemment que, si la ligne BMD est un cercle, la surface qu'on obtiendra sera celle d'un cylindre droit; & si la ligne BMD est une Ellypse, on aura la surface d'un cylindre scalène. Si la ligne BMD n'est pas continue, mais si elle est composée de plusieurs droites qui forment une figure rectiligne, la surface résultante sera alors prismatique.

Pl. XIII, Fig. 122:

33. Comme ce genre de surfaces embrasse les cylindres & tous les prismes, il conviendra de l'appeler généralement *cylindrique* ou *prismatique*; & les espèces particulières comprises sous ce genre seront déterminées par la figure plane BMD , qui les aura formées suivant la méthode qui vient d'être expliquée. Cette figure BMD se nommera la *Base*. Toutes les fois donc qu'une des trois variables x, y, z , manquera dans l'équation, alors la surface qu'elle exprime sera cylindrique ou prismatique. Mais, si les deux variables y & z manquent à la fois, comme alors x est = à une constante, la ligne BMD se changera en une ligne droite perpendiculaire à l'axe AD ; & par conséquent la surface deviendra une surface plane perpendiculaire au plan APQ .

34. Après ce genre de surfaces, le plus remarquable est celui qui résulte d'une équation homogène entre les trois variables x, y & z , ou dans laquelle les trois variables forment par-tout le même nombre de dimensions; telle est l'équation $zz = mxz + xx + yy$. On voit par-là que toutes les sections faites par des plans parallèles à un des trois plans principaux seront des figures semblables entre elles; car si on donne à z une valeur

valeur constante h , il est clair que l'équation $h^2 = mhx + x^2 + y^2$, si on met successivement pour h les valeurs qu'on voudra, renferme une infinité de figures semblables entre elles, dont les paramètres seront égaux ou proportionnels à h même. Ainsi, puisque ces sections ne sont pas seulement semblables, mais qu'elles croissent encore en raison des distances au plan APQ , les lignes qui partent du point A , & qui passent par les points homologues de chaque section, seront droites.

35. Etant donc proposée une équation homogène entre les trois variables x, y & z , donnons à z une valeur déterminée $AR = h$, & soit $TSsMm$ la figure tracée sur un plan parallèle à APQ & mené par le point R , laquelle sera exprimée par une équation entre x & y , de manière que $RV = x$ & $VM = y$. Cette section $TSsMm$ une fois décrite, concevons une droite indéfinie qui se meuve autour de son périmètre, & qui soit assujettie à passer constamment par le point A ; cette droite décrira par son mouvement la surface comprise dans l'équation proposée. Il est évident que, si la figure $TSsMm$ est un cercle dont le centre soit en R , il en résulte un cône droit; & si R n'en est pas le centre, un cône scalène. Mais, si la figure est rectiligne, il en naîtra des pyramides de toute espèce. C'est pourquoi nous appellerons *coniques* ou *pyramidales* les surfaces qui sont renfermées dans ce genre d'équations.

Pl. XIII. Fig. 125.

36. Il suit de-là manifestement que, si l'équation entre les trois variables x, y & z , est homogène, & que par conséquent la surface soit conique ou pyramidale, non-seulement on aura pour toutes les sections parallèles à un plan principal APQ des figures semblables, dont les paramètres soient proportionnels aux distances de ces sections au sommet A ; mais on conçoit, par la même raison, que toutes les sections qui seront parallèles au plan APR ou au plan AQR , jouiront de la même propriété, & formeront conséquemment des figures semblables, dont les côtés homologues seront proportionnels à leur distance au point A . On fera voir plus bas que toutes les autres sections de ces corps qui sont parallèles entre elles, ou qui sont parallèles à un plan quelconque mené par

le sommet A , feront aussi semblables entre elles, & que leurs paramètres seront proportionnels à leur distance au point A .

37. Le genre de surfaces auquel je vais passer, est beaucoup plus étendu. Soit Z une fonction quelconque de z , & soit donnée une équation homogène entre les trois variables x , y & Z . Soit $Z = H$, lorsque $z = h$; comme on a dans ce cas une équation homogène entre x , y & H , toutes les sections parallèles au plan APQ seront des figures semblables entre elles, & dont les paramètres ne seront plus proportionnels aux distances h , mais à leurs fonctions H . D'où il suit que les lignes menées par les points homologues de ces sections ne seront point des lignes droites, mais des courbes dépendantes de la nature de la fonction Z . Mais alors il ne s'ensuit pas de-là que les sections faites parallèlement à un autre plan quelconque, seront semblables entre elles.

38. Ce dernier genre comprend les deux précédens; car, si on suppose $Z = z$, ou $Z = az$, à cause de l'équation homogène entre x , y & z , on aura des surfaces coniques. La même chose a lieu, si $Z = a + cz$, avec cette différence seulement que le sommet du cône ne tombe plus sur le point même A ; par exemple, si $Z = \frac{b-z}{b}$, le sommet du cône sera éloigné du point A de la quantité b ; si on suppose ensuite $b = \infty$, la figure conique deviendra cylindrique, & Z sera $= 1$. Ainsi dans l'équation des surfaces cylindriques les variables x & y formeront par-tout avec la constante 1, le même nombre de dimensions. Or, quelle que soit la forme de l'équation proposée entre x & y , si la troisième variable z n'y entre point, on peut toujours la rendre homogène avec l'unité, d'où il suit, comme nous l'avons déjà fait voir, que toute équation dans laquelle une des variables ne se trouve pas, exprime une surface cylindrique.

39. Parmi ces corps dans lesquels toutes les sections parallèles à un plan principal APQ sont des figures semblables, on doit distinguer particulièrement ceux dont les sections sont des cercles, qui ont leur centre sur la même droite AR perpendiculaire au plan APQ . Ces espèces de solides se font au

tour, & se nomment conséquemment corps *tournés*. Ainsî l'équation générale qui leur appartient sera $Z^2 = x^2 + y^2$. En effet, quelque valeur qu'on donne à z , de sorte que $Z = H$, on aura pour la section parallèle au plan APQ l'équation $HH = xx + yy$, qui convient au cercle dont le rayon $= H$, & qui a son centre sur la droite AR . Si $ZZ = \zeta\zeta$, on aura un cône droit; si $ZZ = aa$, on aura un cylindre; & si $ZZ = a^2 - \zeta^2$, on aura la sphère. Ce sont là les principales espèces de corps formés au tour.

40. Considérons les corps dont toutes les sections PTV Pl. XIII. Fig. 124. perpendiculaires à l'axe AP sont des triangles, qui ont leurs sommets T sur une ligne droite DT parallèle à l'axe AP . Soit AVB la base de ce corps, ou sa section faite sur le plan APQ , laquelle soit une courbe quelconque. Soit la distance de la droite DT à l'axe AB , c'est-à-dire, $AD = c$; ayant fait, comme auparavant, les trois variables $AP = x$, $PQ = y$, $QM = \zeta$, PV sera une fonction quelconque de x . Soit cette fonction $PV = P$, on aura, à cause des triangles semblables, $VQM, VPT, P : c :: P - y : \zeta$, ou $\zeta = c - \frac{cy}{P}$. On trouve donc pour ces sortes de corps $\frac{c - \zeta}{y}$ égal à une fonction quelconque de x . Ces corps diffèrent donc des coniques en ce qu'ils se terminent par une arrête droite DT , tandis que les cônes se terminent en pointe. Si la base AVB est supposée un cercle, le corps qui en résulte a été traité fort au long par WALLIS, & a été appelé par lui *coin-conoïde*.

41. Supposons, comme tout à l'heure, que toutes les sections PTV perpendiculaires à l'axe AB soient des triangles Pl. XIII. Fig. 125. rectangles en P , qui par leurs sommets T forment une courbe quelconque AT , & que la base soit la figure AVB . Ayant fait les trois variables $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = \zeta$; la droite PV sur la courbe AVB sera une fonction quelconque de x que je suppose $= P$; alors PT sera aussi une fonction de x que je suppose $= Q$; cela posé, on aura :

$$P : Q :: P - y : \zeta;$$

& par conséquent $z = Q - \frac{Qy}{p}$ ou $Pz + Qy = PQ$, ou bien $\frac{z}{Q} + \frac{y}{p} = 1$ ou = à une constante. Par conséquent, si les deux variables y & z n'ont nulle part dans l'équation plus d'une dimension, le corps appartiendra alors au genre que nous venons de décrire.

Pl. XIII. Fig. 126.

42. Comme nous avons déjà examiné les corps dont toutes les sections, parallèles à un plan principal, sont semblables entre elles, considérons à présent ceux dans lesquels toutes ces sections sont des figures qui ont seulement de l'affinité entre elles, ou dont les appliquées, lorsqu'on prend des abscisses homologues, sont proportionnelles entre elles. Soient les trois sections d'un tel corps ABC , ACD & ABD , parmi lesquelles toutes les sections parallèles à ACD doivent être des figures qui ont de l'affinité. Supposons donc la base $AC = a$, & la hauteur $AD = b$; & ayant pris les coordonnées $Aq = p$ & $qm = q$, soit q une fonction quelconque de p . Concevons maintenant une section quelconque parallèle PTV , en faisant l'intervalle $AP = x$, on aura la base $PV =$ à une fonction de x , que je suppose $= P$, & la hauteur $PT =$ à une fonction de x , que je suppose $= Q$. Qu'on fasse à présent $PQ = y$ & $QM = z$, on aura par la loi de l'affinité $a : p :: P : y$ & $b : q :: Q : z$, ou $y = \frac{Pp}{a}$ & $z = \frac{Qq}{b}$.

43. Donc, si toutes les trois sections principales du corps, ABC , ACD & ABD , sont données, on pourra déterminer la nature du corps dont toutes les sections parallèles à ACD auront en même temps de l'affinité entre elles. Car d'abord P & Q sont des fonctions de x , ensuite q est une fonction de p , d'où il suit qu'avec les deux variables x & p on déterminera les deux autres y & z ; mais, si nous dessinons une équation entre les trois coordonnées x , y & z ; comme q est une fonction de p , ou parce qu'on a une équation entre p & q , il faudra substituer dans cette équation $p = \frac{ay}{P}$ & $q = \frac{bz}{Q}$; & on aura par ce moyen, à cause que P & Q sont des fonctions de x , une équation entre les trois coordonnées x , y & z , qui.

exprimera la nature des corps qui appartiennent à ce genre. Au reste, il est évident qu'en supposant $x=0$, P doit devenir $= a$ & $Q = b$.

44. Si dans l'équation de la surface les deux variables y & z forment par-tout le même nombre de dimensions, alors toutes les sections perpendiculaires à l'axe AP seront des figures rectilignes; car si on prend pour x une valeur constante quelconque, il en résultera entre y & z une équation homogène qui indique une ou plusieurs lignes droites. Puis donc que le nombre de dimensions formé par les deux variables y & z est par-tout le même, il sera ou pair ou impair, & par cette raison, comme on l'a fait voir art. 20, ces espèces de corps auront deux parties égales l'une à l'autre; c'est-à-dire que les portions situées dans la première & la cinquième région seront semblables entre elles; il en sera de même de la région seconde & troisième, & des autres, comme l'indique la table donnée à l'endroit cité.

45. Nous avons déjà examiné plusieurs espèces de corps Pl. XIV. Fig. 127. qui donnent une infinité de sections rectilignes; telle est celle que nous venons de traiter, & les cylindriques & les coniques. Dans toutes ces espèces, les sections faites par l'axe AP sont rectilignes; mais ce genre est plus étendu. Car soit $AKMP$ une section du corps faite par l'axe AP sous un angle $MPV = \phi$; en faisant $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura $\frac{z}{y}$ pour la tangente de l'angle ϕ , & la droite PM sera $= \frac{z}{\sin. \phi}$.

Si maintenant la ligne KM est droite, on devra avoir $\frac{z}{\sin. \phi} = ax + c$; expression dans laquelle a & c seront des constantes dépendantes de l'angle ϕ ; & par conséquent elles seront des fonctions de y & de z de dimension nulle. Soient R & S ces fonctions, on aura $x = Rz + S$, ou $x = Ry + S$; ou bien, T désignant une fonction d'une dimension, & S une fonction de dimension nulle de y & de z , tous les corps, dont il est question ici, seront compris dans cette équation générale $x = T + S$.

46. Or, quelle que soit la surface proposée, dont la nature

est exprimée par une équation entre les trois variables x , y & z , il sera facile d'en déterminer une section quelconque faite suivant l'axe AP . Car soit l'angle $VP M$, qui marque l'inclinaison de la section $AKMP$ sur le plan $ACVP = \phi$, & soit la droite $PM = v$, laquelle sera l'appliquée de la section cherchée; après cela, on aura $QM = z = v \cdot \sin. \phi$ & $PQ = y = v \cdot \cos. \phi$. Donc, si dans l'équation de la surface on substitue pour les variables y & z les valeurs $v \cdot \cos. \phi$ & $v \cdot \sin. \phi$, on obtiendra l'équation entre les deux variables x & v , qui exprimera la nature de la section $AKMP$. On trouvera d'une manière semblable toutes les sections qui se font suivant l'un ou l'autre des deux autres axes principaux AQ ou AR . Car ces trois axes AP , AQ & AR , d'où dépendent les trois variables x , y & z , peuvent être changés l'un en l'autre, & réciproquement; de sorte que ce que l'on dit de l'un d'eux s'applique toujours aux deux autres.

Pl. XIII. Fig. 121.

47. Ayant donc pris, pour fixer nos idées, le plan APQ auquel nous rapporterons toutes les sections de la surface; toute section faite par un plan, ou sera parallèle à celui-là, ou lui sera inclinée. Dans le dernier cas, le plan de la section étant prolongé coupera quelque part le plan APQ , & leur intersection sera une ligne droite. Dans le premier cas où le plan de la section est parallèle au plan APQ , il suffira, pour connoître la nature de la section, d'attribuer à la quantité z une valeur constante; mais dans le second cas, où le plan de section est incliné au plan APQ , nous ne pouvons encore déterminer la nature de la section, que lorsque la droite AP ou la droite AQ est l'intersection du plan coupant avec le plan APQ . Reste donc, pour trouver toutes les sections, à considérer les autres intersections de ces deux plans, quelles qu'elles soient.

Pl. XIV. Fig. 128.

48. Soit la droite ES parallèle à l'axe AP , l'intersection du plan coupant avec le plan APQ ; l'angle d'inclinaison QSM sous lequel le plan coupant ESM est incliné au plan APQ , $= \phi$, & la distance $AE = f$. Puisque $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura $ES = x$ & $QS = y + f$. Si on rapporte la section à la droite ES considérée comme axe, on aura l'abscisse $ES = x$; on supposera ensuite l'appliquée SM

$=v$, ce qui donnera, à cause de l'angle $QSM = \phi$, $QM = z = v \sin. \phi$, & $SQ = y + f = v \cdot \cos. \phi$; & par suite $y = v \cdot \cos. \phi - f$. C'est pourquoi, si dans l'équation de la surface entre x , y & z , on substitue $y = v \cdot \cos. \phi - f$ & $z = v \cdot \sin. \phi$, on aura l'équation entre les coordonnées x & v pour la section cherchée ESM . Si l'interfection ES étoit perpendiculaire à l'axe AP , comme elle seroit alors parallèle à l'autre axe principal placé dans le plan APQ , on trouveroit la section de la même manière; on n'auroit qu'à changer l'une en l'autre les variables x & y .

49. Supposons à présent que l'interfection ES ait une position quelconque sur le plan APQ , qu'elle soit rencontrée en E par la droite AE perpendiculaire à l'axe AP ; on mènera ETX parallèle à l'axe AP , on fera $AE = f$ & l'angle $TES = \theta$. Ayant pris ensuite les trois variables $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on abaissera de Q sur ES la perpendiculaire QS , & on tirera MS ; l'angle QSM sera l'inclinaison du plan coupant sur le plan APQ ; je le supposerai $= \phi$. Soient ensuite les coordonnées de la section cherchée $ES = t$ & $SM = v$. On mènera de S sur EX & sur QP prolongée, les perpendiculaires ST & SV ; & on aura $QM = z = v \sin. \phi$, $QS = v \cos. \phi$, $SV = v \cos. \phi \sin. \theta$ & $QV = v \cos. \phi \cos. \theta$. On aura ensuite $ST = VX = t \sin. \theta$ & $ET = t \cos. \theta$; d'où l'on tire enfin $AP = x = t \cos. \theta + v \cos. \phi \sin. \theta$ & $PQ = y = v \cos. \phi \cos. \theta - t \sin. \theta - f$; valeurs qui substituées à x , y & z , donneront l'équation de la section demandée.

Pl. XIV. Fig. 129.

50. Etant donc donnée une équation pour un solide quelconque, il sera facile d'en déduire l'équation qui convient à une section plane quelconque; & d'abord il est évident que, si l'équation du solide entre les trois coordonnées x , y , & z est algébrique, toutes les sections de ce corps seront aussi des courbes algébriques. Ensuite, comme on trouve l'équation de la section entre ses coordonnées t , & v , en mettant dans celle du solide $z = v \sin. \phi$, $x = t \cos. \theta + v \cos. \phi \sin. \theta$ & $y = v \cos. \phi \cos. \theta - t \sin. \theta - f$, il est évident que dans l'équation pour une section quelconque les coordonnées t & v ne

352 DES SECTIONS DU CYLINDRE,
peuvent obtenir plus de dimensions, que les trois coordonnées x, y & z n'en ont elles-mêmes dans l'équation du solide. Il peut arriver cependant quelquefois que l'équation de la section soit d'un ordre inférieur, parce que les termes de degré supérieur peuvent disparaître après la substitution.

51. Si donc les trois variables x, y & z , ne forment dans l'équation de la surface qu'une seule dimension, de manière qu'elle soit de cette forme $ax + by + cz = a$, alors toutes les sections de cette surface seront des lignes droites. Mais dans ce cas la surface sera plane, comme il sera facile de le voir en y faisant un peu attention, & comme on le fera voir plus clairement ci-après; or on sait par les élémens que l'intersection de deux plans doit être une ligne droite. Semblablement, on voit par-là qu'en général les sections de tous les solides, dont la nature est donnée par cette équation générale :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + ax + by + cz + ee = 0,$$

si elles ne sont pas des lignes droites, doivent être des lignes du second ordre; & qu'il n'existe aucune section possible, dont la nature ne puisse être exprimée par une équation du second degré.

CHAPITRE III.

Des Sections du Cylindre, du Cône & de la Sphère.

52. COMME on a coutume de considérer ces corps dans la Stéréométrie, il convient d'en chercher les sections, avant que de passer à d'autres solides moins connus. D'abord il se présente dans les élémens deux espèces de cylindres, savoir les *droits* & les *scalènes*. On appelle cylindre *droit* celui dont toutes les sections perpendiculaires à l'axe sont des cercles égaux entre eux, & qui ont leurs centres placés dans une même ligne droite.

droite. Le cylindre *scalène* donne des sections circulaires, qui ne sont plus perpendiculaires à l'axe, mais qui lui sont inclinées sous un angle quelconque; on exprimera plus commodément cette propriété, en disant que le cylindre oblique ou *scalène* est celui dont les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses égales, dont les centres sont situés sur une même ligne droite, qui se nomme l'axe du cylindre.

53. Soit donc un cylindre droit ou oblique, dont l'axe CD Pl. XIV. Fig. 130. soit perpendiculaire au plan de la planche; & soit la base $AEBF$, ou la section formée par le plan de la planche, un cercle ou une ellipse. Je supposerai que cette base soit une ellipse quelconque qui ait son centre en C , & pour axes conjugués AB & EF ; car ce que nous dirons du cylindre *scalène*, s'appliquera très-facilement au droit. Faisons donc l'un des demi-axes $AC = BC = a$, & l'autre $CE = CF = c$; en supposant ensuite les trois coordonnées $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, nous aurons par la nature de l'ellipse $aacc = aayy + ccxx$. Cette même équation exprimera la nature du cylindre, puisque la troisième variable z , à cause que toutes les sections parallèles au plan CPQ sont égales entre elles, n'entre point dans l'équation.

54. Toutes les sections du cylindre parallèles à la base, lui seront donc semblables & égales; c'est-à-dire qu'elles seront des cercles dans le cylindre droit, & des ellipses dans le cylindre *scalène*. Mais alors les sections qui se font suivant des plans perpendiculaires à APQ , seront deux lignes droites parallèles entre elles, qui, lorsque le cylindre sera touché par le plan, se réduiront à une seule; & qui par conséquent deviennent imaginaires, lorsque le plan ne rencontre nulle part le cylindre; c'est ce qui se déduit naturellement de l'équation; car si, pour désigner l'intersection du plan coupant & de la base, on égale à une constante ou x , ou y , ou $x \pm ay$, l'équation aura alors deux racines simples. Ainsi nous avons déjà déterminé toutes les sections qui se font par des plans parallèles à l'un des trois plans principaux.

55. Pour chercher la nature des autres sections, nous supposerons que l'intersection du plan coupant avec la base fasse
EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 Y y

une ligne droite GT , qui d'abord soit parallèle à l'un des axes conjugués EF , ou perpendiculaire à l'autre AB prolongé jusqu'en G . Cela posé, soit la distance $CG=f$ & l'inclinaison du plan coupant GTM sur la base mesurée par un angle $=\phi$. Supposons que le plan coupant GTM rencontre l'axe du cylindre en D ; après avoir mené la droite DG , nous aurons $DGC=\phi$; & par conséquent $DG=\frac{f}{\cos \phi}$ & $CD=\frac{f \cdot \sin \phi}{\cos \phi}$. D'un point quelconque M de la section cherchée on mènera MT parallèle à DG ; à cause de $TQ=f-x$ & de l'angle $QTM=\phi$, on aura $TM=\frac{f-x}{\cos \phi}$ & $QM=\frac{(f-x) \sin \phi}{\cos \phi}=\zeta$. Si on mène MS parallèle à TG ; & conséquemment perpendiculaire sur DG , on aura $MS=TG=PQ=\gamma$, & $DS=\frac{x}{\cos \phi}$.

56. Prenons maintenant les droites DS & SM pour les coordonnées de la section cherchée; & soit $DS=t$ & $SM=u$. On aura donc $y=u$, $x=t \cdot \cos \phi$; &, à cause de $\zeta=\frac{(f-x) \sin \phi}{\cos \phi}$, $\zeta=f \cdot \tan \phi - t \cdot \sin \phi$. Substituons ces valeurs dans l'équation du cylindre $aacc=aa'yy+ccxx$, & nous aurons pour la section dont il s'agit, $aacc=a'auu+cc t t (\cos \phi)^2$; équation qui apprend que la section est une Ellipse, qui a son centre au point D , dont l'un des axes principaux tombe sur la droite DG , & l'autre est perpendiculaire à celui-ci. Or le demi-axe qui tombe sur la droite DG , fera, (en faisant $u=0$) $=\frac{a}{\cos \phi}$. Ou, si on mène la droite BH parallèle à GD , on aura $BH=\frac{a}{\cos \phi}$ pour l'un des demi-axes de la section cherchée, & l'autre demi-axe conjugué sera $=c=CE$.

57. La section du cylindre qu'on obtiendra de cette manière sera donc une ellipse, dont les demi-axes conjugués seront $\frac{a}{\cos \phi}$ & c . Donc, si sur la base $AEBF$ on a $AC=a$ pour le demi grand axe; à cause de $\frac{a}{\cos \phi}$ plus grand que a ,

les sections feront des ellipses plus allongées que la base. Mais, si c est plus grand que a , ou si l'intersection GT est parallèle au plus grand axe de la base, il peut arriver que dans la section les deux axes deviennent égaux entre eux; & que par conséquent la section soit un cercle. Cela aura lieu, si $\frac{a}{\cos. \phi} = c$ ou $\cos. \phi = \frac{a}{c}$. Puis donc que dans le triangle BCH rectangle en C l'angle $CBH = \phi$, on aura $\cos. \phi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Donc, si on prend $BH = CE$, les sections seront des cercles; & comme cela se peut faire de deux manières, en plaçant soit au-dessus soit au-dessous la droite $BH = CE$; il existera une double suite de sections circulaires qui seront situées obliquement à l'égard de l'axe CD ; c'est ce qui a fait donner à ces sortes de cylindres le nom de cylindres scalènes.

58. Soit à présent la droite GT inclinée d'une manière quelconque, l'intersection du plan coupant avec la base, & sur laquelle on ait abaissé du centre C de la base la perpendiculaire $GC = f$; soit en outre l'angle $BCG = \theta$, & l'angle d'inclinaison $CGD = \phi$, auquel sera égal l'angle QTM , après qu'on aura mené QT perpendiculaire à GT . On aura donc $DG = \frac{f}{\cos. \phi}$ & $CD = \frac{f \cdot \sin. \phi}{\cos. \phi}$. Soit M un point de la section cherchée, d'où on ait abaissé sur la base la perpendiculaire MQ ; ensuite soit mené QP perpendiculairement à l'axe, de manière qu'en faisant $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on ait $a^2 c^2 = a^2 y^2 + c^2 x^2$. Puis on mènera à l'intersection GT les perpendiculaires PV , QT ; ce qui donnera $GV = x \cdot \sin. \theta$, $PV = f - x \cos. \theta$; & à cause de l'angle $QPW = \theta$, QW deviendra $y \sin. \theta$, $PW = VT = y \cdot \cos. \theta$ & $QT = f - x \cos. \theta + y \cdot \sin. \theta$. Enfin, ayant mené MT , on aura, à cause de l'angle $MTQ = \phi$, $TM = \frac{z}{\sin. \phi}$ & $QT = \frac{z \cdot \cos. \phi}{\sin. \phi}$.

59. Achéons le parallélogramme rectangle $GSMT$, & faisons $DS = t$, $SM = GT = u$; nous aurons $u = GV + VT = x \sin. \theta + y \cos. \theta$; mais, à cause de $QT = f$

— $x \cos. \theta + y \sin. \theta$, $QT - CG$ fera $\equiv y \sin. \theta - x \cos. \theta$;
 d'où l'on conclut $DS = TM - DG = \frac{y \sin. \theta - x \cos. \theta}{\cos. \varphi} = t$.
 Puis donc que $x \sin. \theta + y \cos. \theta = u$ & $y \sin. \theta - x \cos. \theta = t \cdot \cos. \varphi$, on aura $y = u \cos. \theta + t \sin. \theta \cos. \varphi$ & $x = u \sin. \theta - t \cos. \theta \cos. \varphi$. Ces valeurs substituées dans l'équation $a a c c = a a y y + c c x x$, à la place de x & de y , donneront :

$$a^2 u^2 (\cos. \theta)^2 + 2 a^2 u t \sin. \theta \cos. \theta \cos. \varphi + a^2 t^2 (\sin. \theta)^2 (\cos. \varphi)^2 \\ a^2 c^2 = c^2 u^2 (\sin. \theta)^2 - 2 c^2 u t \sin. \theta \cos. \theta \cos. \varphi + c^2 t^2 (\cos. \theta)^2 (\cos. \varphi)^2;$$

équation qui appartient à une ellipse dont le centre est en D ; mais dont les coordonnées DS & SM ne sont pas perpendiculaires aux axes principaux, à moins qu'on n'ait $a=c$, ou un cylindre droit.

Pl. XVI. Fig. 132 60. Pour connoître plus à fond cette section, soit $aMebf$ la courbe, dont l'équation a été trouvée entre les coordonnées $DS = t$ & $MS = u$; & soit, pour abrégér, cette équation $a^2 c^2 = a u^2 + 2 \epsilon t u + \gamma t t$, de manière qu'on ait pour le cas présent :

$$a = a a (\cos. \theta)^2 + c c (\sin. \theta)^2$$

&

$$\epsilon = (a a - c c) \sin. \theta \cos. \theta \cos. \varphi$$

&

$$\gamma = a a (\sin. \theta)^2 (\cos. \varphi)^2 + c c (\cos. \theta)^2 (\cos. \varphi)^2.$$

Soient les axes principaux de cette section ab & ef ; & ayant mené à l'un des deux l'appliquée Mp , faisons $Dp = p$ & $Mp = q$; supposons de plus l'angle $aD H = \zeta$, nous aurons $u = p \sin. \zeta + q \cos. \zeta$ & $t = p \cos. \zeta - q \sin. \zeta$; ces valeurs étant substituées, on trouvera :

$$\begin{aligned}
 & + a (\sin. \zeta)^2 + 2 a \sin. \zeta. \cos. \zeta + a (\cos. \zeta)^2 \\
 a^2 c^2 = & + 2 \epsilon \sin. \zeta. \cos. \zeta p^2 + 2 \epsilon. (\cos. \zeta)^2 - 2 \epsilon \sin. \zeta. \cos. \zeta q^2 \\
 & + \gamma (\cos. \zeta)^2 - 2 \gamma. \sin. \zeta. \cos. \zeta + \gamma (\sin. \zeta)^2
 \end{aligned}$$

61. Comme cette équation est rapportée ici à un diamètre orthogonal, le coefficient de $p q$ doit être $= 0$; & , à cause que $2 \sin. \zeta. \cos. \zeta = \sin. 2 \zeta$ & $(\cos. \zeta)^2 - (\sin. \zeta)^2 = \cos. 2 \zeta$, on aura $(a - \gamma). \sin. 2 \zeta + 2 \epsilon \cos. 2 \zeta = 0$, & par conséquent $\text{tang. } 2 \zeta = \frac{2 \epsilon}{\gamma - a}$; ce qui fait connoître l'angle aDH , & en même temps la position des diamètres principaux. Quant à leurs grandeurs, on les aura de cette manière :

$$\begin{aligned}
 a D &= \frac{a c}{\sqrt{(a (\sin. \zeta)^2 + 2 \epsilon \sin. \zeta. \cos. \zeta + \gamma (\cos. \zeta)^2)}} \\
 &\quad \& \\
 e D &= \frac{a c}{\sqrt{(a (\cos. \zeta)^2 - 2 \epsilon \sin. \zeta. \cos. \zeta + \gamma (\sin. \zeta)^2)}}
 \end{aligned}$$

62. A cause que $2 \epsilon = \frac{2(\gamma - a) \sin. \zeta. \cos. \zeta}{(\cos. \zeta)^2 - (\sin. \zeta)^2}$, on aura, en substituant cette valeur dans les expressions qu'on vient de trouver :

$$\begin{aligned}
 a D &= \frac{a c \sqrt{(\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma \cos. \zeta^2 - a \sin. \zeta^2)}} = \frac{a c \sqrt{2. \cos. 2 \zeta}}{\sqrt{((a + \gamma) \cos. 2 \zeta - a + \gamma)}} \\
 &\quad \& \\
 e D &= \frac{a c \sqrt{(\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2)}}{\sqrt{(a \cos. \zeta^2 - \gamma \sin. \zeta^2)}} = \frac{a c \sqrt{2. \cos. 2 \zeta}}{\sqrt{((a + \gamma) \cos. 2 \zeta + a - \gamma)}}
 \end{aligned}$$

Donc le produit de ces demi-axes fera :

$$a D . e D = \frac{2 a a c c \cos. 2 \zeta}{\sqrt{(2 a \gamma. (1 + (\cos. 2 \zeta)^2) - (a a + \gamma \gamma) (\sin. 2 \zeta)^2)}}$$

& puisque

$$(\gamma - a) \sin. 2 \zeta = 2 \ell \cos. 2 \zeta,$$

on aura :

$$(a\alpha + \gamma\gamma)(\sin. 2 \zeta)^2 = 4 \ell \ell (\cos. 2 \zeta)^2 + 2 a \gamma (\sin. 2 \zeta)^2;$$

& par conséquent

$$aD \cdot eD = \frac{2 a a c c \cos. 2 \zeta}{\sqrt{(4 a \gamma (\cos. 2 \zeta)^2 - 4 \ell \ell (\cos. 2 \zeta)^2)}} = \frac{a a c c}{\sqrt{(a \gamma - \ell \ell)}} = \frac{a c}{\cos. \phi}.$$

63. De même, puisque les carrés

$$a D^2 = \frac{2 a a c c \cos. 2 \zeta}{(a + \gamma) \cos. 2 \zeta - a + \gamma}$$

&

$$e D^2 = \frac{2 a a c c \cos. 2 \zeta}{(a + \gamma) \cos. 2 \zeta + a - \gamma},$$

on aura :

$$a D^2 + e D^2 = \frac{4 a a c c (a + \gamma) (\cos. 2 \zeta)^2}{4 a \gamma (\cos. 2 \zeta)^2 - 4 \ell \ell (\cos. 2 \zeta)^2} = \frac{(a + \gamma) a a c c}{a \gamma - \ell \ell}.$$

De-là l'on tire :

$$a D + e D = \frac{a c \sqrt{(a + \gamma + 2 \sqrt{(a \gamma - \ell \ell)})}}{\sqrt{(a \gamma - \ell \ell)}}$$

&

$$a D - e D = \frac{a c \sqrt{(a + \gamma - 2 \sqrt{(a \gamma - \ell \ell)})}}{\sqrt{(a \gamma - \ell \ell)}}.$$

Les demi-axes $a D$ & $e D$ feront donc les racines de cette équation :

$$(a \gamma - \ell \ell) x^2 - (a + \gamma) a a c c x x + a^2 c^2 = 0;$$

& on a

$$\sqrt{(a \gamma - \ell \ell)} = a c \cos. \phi.$$

64. Puisque $aD . eD = \frac{ac}{\cos. \varphi}$, & que φ est l'angle que le plan coupant fait avec le plan de la base, nous en déduirons le beau théorème suivant :

T H É O R È M E.

Si tel cylindre qu'on voudra est coupé par un plan quelconque, le rectangle des axes de la section sera au rectangle des axes de la base du cylindre, comme la sécante de l'angle que forme le plan de section avec le plan de la base, est au sinus total.

Ainsi, puisque tous les parallélogrammes construits autour des diamètres conjugués sont égaux aux rectangles formés sur les axes, ces parallélogrammes formés sur la base & sur une section quelconque du cylindre conserveront aussi entre eux le même rapport.

65. Il sera plus commode de déterminer de la manière suivante les sections obliques du cylindre. Si sa base est une ellipse $AEBF$, dont les demi-axes $AC = BC = a$, $EC = CF = c$, & dont la droite CD perpendiculaire au centre C de la base soit l'axe du cylindre; qu'on coupe ce cylindre par un plan dont l'intersection avec le plan de la base soit la droite TH inclinée d'une manière quelconque à l'égard de l'axe AB prolongé, & qu'on abaisse du point C sur cette droite la perpendiculaire CH , de sorte que l'angle $GCH = \theta$; que le plan coupant passe par le point D de l'axe du cylindre; l'angle CHD , en menant DH , sera l'inclinaison du plan coupant sur le plan de la base; je le ferai $= \varphi$. En supposant donc $CG = f$, on aura $GH = f . \sin. \theta$; $CH = f . \cos. \theta$; $DH = \frac{f . \cos. \theta}{\cos. \varphi}$ & $CD = \frac{f \cos. \theta . \sin. \varphi}{\cos. \varphi}$. Il suit de-là qu'à cause du triangle

Pl. XIV. Fig. 133.

DCG rectangle en C , on aura $DG = f . \frac{\sqrt{(1 - \sin. \theta^2 \sin. \varphi^2)}}{\cos. \varphi}$; le sinus de l'angle $DGH = \frac{\cos. \theta}{\sqrt{(1 - \sin. \theta^2 \sin. \varphi^2)}}$; son cosinus $= \frac{\sin. \theta . \cos. \varphi}{\sqrt{(1 - \sin. \theta^2 \sin. \varphi^2)}}$ & sa tangente $= \frac{\sin. \theta . \cos. \varphi}{\cos. \theta . \cos. \varphi}$.

66. A présent, d'un point quelconque M de la section cherchée soit abaissée sur la base la perpendiculaire MQ ; & ayant mené l'appliquée QP , soit $CP = x$, $PQ = y$, on aura $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$. Soit menée QT parallèle à CG , & sur celle-là la perpendiculaire GR tirée du point G , on aura $GR = y$ & $QR = f - x$. Puisque l'angle $TGR = GCH = \theta$, GT fera $= \frac{y}{\text{cof. } \theta}$ & $TR = \frac{y \cdot \text{sin. } \theta}{\text{cof. } \theta}$. D'où l'on conclura $QT = f - x + \frac{y \cdot \text{sin. } \theta}{\text{cof. } \theta}$; & par conséquent, à cause de la similitude des triangles CDG & QMT , on aura $CG : DG :: QT : TM$ & $CG : CG - QT :: DG : DS$, MS étant menée parallèlement à GT . On aura donc $DS = \frac{(x \text{ cof. } \theta - y \text{ sin. } \theta) \sqrt{(1 - \text{sin. } \theta^2 \text{ sin. } \phi^2)}}{\text{cof. } \theta \text{ sin. } \phi}$. Ayant donc fait $DS = t$, $MS = u$, on aura $x \text{ cof. } \theta - y \text{ sin. } \theta = \frac{t \cdot \text{cof. } \theta \text{ cof. } \phi}{\sqrt{(1 - \text{sin. } \theta^2 \text{ sin. } \phi^2)}}$; $y = u \cdot \text{cof. } \theta$; ce qui donnera une équation entre t & u , qui sera encore assez compliquée.

67. Mais si, au lieu des axes principaux de la base, on mène le diamètre EF parallèle à l'intersection TH , & sur celui-ci son diamètre conjugué AB , qui prolongé rencontre TH en G ; que les hypothèses que nous avons faites auparavant restent les mêmes, savoir $CG = f$, $GCH = \theta$, $CHD = \phi$; que $CA = CB$ soit $= m$; $CE = CF = n$; qu'on ait mené QP parallèle au diamètre EF , & qu'on ait fait $CP = x$, $PQ = y$, de sorte que $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$; on aura $GT = MS = y$ & $DS = \frac{DG \cdot x}{CG} = \frac{x \sqrt{(1 - \text{sin. } \theta^2 \text{ sin. } \phi^2)}}{\text{cof. } \phi}$. C'est pourquoi, en supposant $DS = t$ & $MS = u$, x deviendra $= \frac{t \text{ cof. } \phi}{\sqrt{(1 - \text{sin. } \theta^2 \text{ sin. } \phi^2)}}$ & $y = u$, & on aura $\frac{CG}{DG}$ pour le cosinus de l'angle CGD , d'où il suit qu'en faisant l'angle $CGD = \eta$, on aura $x = t \cdot \text{cof. } \eta$; & par conséquent pour la section cherchée $mmnn = m m u u + n n t t \text{ cof. } \eta \eta$, l'équation étant rapportée aux diamètres conjugués, & le centre étant en D ; le demi-diamètre situé dans la direction DS fera $= \frac{m}{\text{cof. } \eta}$ & l'autre

l'autre = n . La tangente de l'angle GSM , que ces diamètres font entre eux, sera $= \frac{\cos. \theta}{\sin. \theta \cdot \cos. \phi}$ & le cosinus $= \frac{\sin. \theta \cdot \cos. \phi}{\sqrt{(1 - \sin. \theta^2 \cdot \sin. \phi^2)}}$ $= \sin. \theta \cdot \cos. \eta$. On connoît très-facilement de cette manière la nature de la section.

68. Après avoir considéré les sections du cylindre, nous allons passer à celles du cône droit ou oblique. Pl. XIV. Fig. 134. J'observe que le cône oblique ne diffère du droit qu'en ce que les sections perpendiculaires à l'axe du cône sont dans l'oblique des ellipses, qui ont leurs centres sur l'axe, tandis que dans le cône droit, ces sections sont des cercles. Soit donc $OaebfO$ un cône quelconque qui a son sommet en O , & pour axe Oc , que je suppose perpendiculaire au plan de la planche; de sorte que celle-ci représente le plan mené par le sommet O du cône & perpendiculairement à son axe Oc . Soient menées par le point O sur le plan de la planche les droites AB, EF , parallèles aux axes ab & ef de chaque section perpendiculaire à l'axe. Si donc d'un point quelconque M de la section $aebf$ on abaisse sur le plan de la planche la perpendiculaire MQ , & du point Q sur AB la perpendiculaire PQ ; en supposant $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, on aura aussi l'abscisse cp de la section $= x$, l'appliquée $pM = y$; & par conséquent, puisque les axes ab, ef , ont un rapport constant à $Oc = QM = z$; en faisant $ac = bc = mz$ & $ec = fc = nz$, on aura $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Telle est l'équation qui exprime la nature de la surface conique entre les trois variables x, y , & z .

69. Puisque toutes les sections perpendiculaires à l'axe Oc sont des ellipses, comme l'apprend l'équation $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$, (en supposant à z une valeur constante); on connoitra facilement d'une manière semblable les sections qui seront perpendiculaires ou à la droite AB , ou à la droite EF ; car, si ce cône est coupé par un plan perpendiculaire à AB , & qui passe par le point P , en faisant $OP = a$, on aura pour cette section l'équation $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 a^2$ entre les coordonnées $Pp = z$ & $pM = y$; laquelle appartient, comme il est aisé de le voir, à une hyperbole qui a son centre en P ,

dont le demi-axe transverse sera $= \frac{a}{m}$, & le demi-axe conjugué $= \frac{na}{m}$. Pareillement, si on suppose y constant, on verra que la section perpendiculaire à la droite EF est une hyperbole, dont le centre est sur la droite EF .

Pl. XV. Fig. 135;

70. Si le plan qui coupe le cône est toujours perpendiculaire au plan $AEBF$, mais s'il ne l'est plus à aucune des lignes AB , EF , il sera aussi aisé de déterminer la section du cône. Car supposons que ce plan coupe la base $AEBF$ suivant la droite BE , & faisons $OB = a$, $OE = b$; abaïssons ensuite d'un point quelconque M de la section la perpendiculaire MQ , & du point Q menons l'appliquée QP , de sorte que $OP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; & qu'on ait par la nature du cône $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. On aura donc $a : b :: a - x : y$ ou $y = b - \frac{bx}{a}$. Supposons les coordonnées de la section $BQ = t$ & $QM = z$, nous aurons $b : \sqrt{a^2 + b^2} :: y : t$; & par conséquent $y = \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ & $a - x = \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Soit $\sqrt{a^2 + b^2} = c$, on aura $y = \frac{bt}{c}$, $x = a - \frac{at}{c}$, & pour l'équation entre t & z :

$$m^2 n^2 c^2 z^2 = m^2 b^2 t t + n^2 a^2 c^2 - 2 n^2 a^2 c t + n^2 a^2 t^2.$$

Soit $t - \frac{n^2 a^2 c}{m^2 b^2 + n^2 a^2} = GQ = u$, BG étant $= \frac{n^2 a^2 c}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$; on aura $m^2 n^2 c^2 z^2 = (m^2 b^2 + n^2 a^2) u^2 + \frac{m^2 n^2 a^2 b^2 a^2}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$.

71. Cette section du cône sera donc une hyperbole qui aura son centre au point G , dont le demi-axe transverse sera $Ga = \frac{ab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}}$ & le demi-axe conjugué $= \frac{mnabc}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$. Les asymptotes de cette hyperbole qui couperont l'axe Ga au centre G , feront avec cet axe Ga un angle dont la tangente est $= \frac{mnc}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}}$. Pour que cette section devienne une hyperbole équilatère, il faut donc que $m^2 n^2 a^2 + m^2 n^2 b^2 = m^2 b^2 + n^2 a^2$, ou que $\frac{b}{a} = \text{tang. } OBE = \frac{n\sqrt{m-1}}{m\sqrt{1-n}}$. A moins

donc que $\frac{m^2-1}{1-n^2}$ ne soit plus grand que zéro, il est impossible d'obtenir de cette manière une hyperbole équilatère. Mais dans le cône droit où $m = n$, la tangente de l'angle que forment les asymptotes avec l'axe de la section sera $= m$, & l'angle $=$ à l'angle $a O c$.

Pl. XIV. Fig. 134.

72. Prenons à présent une section oblique, de manière cependant que son intersection BT avec le plan $AEBF$ soit perpendiculaire à la droite AB . Faisons $OB = f$, & l'angle d'inclinaison du plan coupant sur le plan de la base, ou l'angle $OB C = \phi$, de manière que le premier de ces plans rencontre l'axe OC du cône au point C ; on aura $BC = \frac{f}{\cos. \phi}$ & $OC = \frac{f \cdot \sin. \phi}{\cos. \phi}$. D'un point quelconque M de la section demandée soit menée sur BT la perpendiculaire MT ; soit ensuite abaissée sur la base la perpendiculaire MQ , & du point Q sur OB la perpendiculaire QP ; de manière qu'ayant fait $OP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on ait $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Supposons pour la section les coordonnées $BT = t$, $TM = u$, nous aurons, à cause de l'angle $QTM = \phi$; $QM = z = u \cdot \sin. \phi$, $TQ = u \cos. \phi = f - x$; d'où l'on tire $y = t$, $z = u \sin. \phi$ & $x = f - u \cos. \phi$; & par conséquent :

Pl. XV. Fig. 136.

$$m^2 n^2 u^2 \cdot \sin. \phi^2 = m^2 t^2 + n^2 (f - u \cdot \cos. \phi)^2.$$

73. Soit $BC = \frac{f}{\cos. \phi} = g$, ce qui donne $f = g \cdot \cos. \phi$; x sera $= (g - u) \cdot \cos. \phi$, & on aura pour la section :

$$m^2 n^2 u^2 \sin. \phi^2 = m^2 t^2 + n^2 g^2 \cdot \cos. \phi^2 - 2 n^2 g u \cos. \phi^2 + n^2 u^2 \cos. \phi^2.$$

Supposons $u = \frac{g \cos. \phi^2}{\cos. \phi^2 - n^2 \sin. \phi^2} = SG = s$; après avoir mené MS parallèlement à BT & pris $BG = \frac{g \cos. \phi^2}{\cos. \phi^2 - n^2 \sin. \phi^2} = \frac{f \cos. \phi}{1 - (1 + m^2) \sin. \phi^2}$; de sorte que les coordonnées soient $GS = s$ & $SM = t$, & nous aurons cette équation

tion $m^2 t^2 + n^2 (\text{cof. } \varphi^2 - m^2 \sin. \varphi^2) s^2 - \frac{n^2 n^2 j^2 \sin. \varphi^2}{\text{cof. } \varphi^2 - m^2 \sin. \varphi^2} = 0$.

La courbe fera donc une section conique qui aura son centre en G . Elle fera donc une parabole, si le centre G s'éloigne à l'infini; ce qui arrive lorsque $\text{tang. } \varphi = \frac{1}{m}$, ou que la droite

Pl. XIV. Fig. 134. BC est parallèle au côté Oa du cône. Or dans ce dernier cas on aura $m^2 t^2 + n^2 f^2 - 2n^2 fu \text{cof. } \varphi = 0$. Le sommet de la

Pl. XV. Fig. 156. parabole sera en G , BG étant supposé $= \frac{f}{2 \text{cof. } \varphi}$; & son paramètre sera $= \frac{2n^2 f \cdot \text{cof. } \varphi}{mm}$.

74. Si la section est une parabole, lorsque $\text{cof. } \varphi^2 - m^2 \sin. \varphi^2 = 0$, il est évident qu'elle sera une ellypse, lorsque $\text{cof. } \varphi^2$ fera plus grand que $m^2 \sin. \varphi^2$, ou que $\text{tang. } \varphi$ fera plus petite que $\frac{1}{m}$; auquel cas la droite BC rencontrera en dessus le côté

opposé Oa du cône. Puisque $BG = \frac{f}{1 - m^2 \text{tang. } \varphi^2}$; BG fera plus grand que BC , G étant le centre de la section cherchée. Le demi-axe de cette section, qui sera dirigé suivant BC , sera donc $= \frac{mf \sin. \varphi}{\text{cof. } \varphi^2 - m^2 \sin. \varphi^2}$; l'autre demi-axe conjugué $=$

$\frac{n f \sin. \varphi}{\sqrt{(\text{cof. } \varphi^2 - m^2 \sin. \varphi^2)}}$ & le paramètre $= \frac{n^2}{m} f \cdot \sin. \varphi$. D'où il suit

que la section sera un cercle, si on a $m = n \sqrt{(\text{cof. } \varphi^2 - m^2 \sin. \varphi^2)}$

ou $m^2 = n^2 - n^2 (1 + m^2) \sin. \varphi^2$; & par conséquent $\sin. \varphi =$

$= \frac{\sqrt{(n^2 - m^2)}}{n \sqrt{(1 + m^2)}} = \sin. OBC$ & $\text{cof. } \varphi = \frac{m \sqrt{(1 + n^2)}}{n \sqrt{(1 + m^2)}}$. A moins donc que n ne soit plus grande que m , aucune de ces sections ne pourra être un cercle.

75. Si $m^2 \sin. \varphi^2$ est plus grand que $\text{cof. } \varphi^2$, ou que $\text{tang. } \varphi$ soit plus grande que $\frac{1}{m}$, de manière que la droite BC s'éloigne en

dessus du côté opposé Oa du cône, la section sera une hyperbole, dont le demi-axe transverse sera $= \frac{mf \sin. \varphi}{-\text{cof. } \varphi^2 + m^2 \sin. \varphi^2}$

son conjugué $= \frac{n f \sin. \varphi}{\sqrt{(m^2 \sin. \varphi^2 - \text{cof. } \varphi^2)}}$, & le paramètre $= -f \cdot \sin. \varphi$;

& la tangente de l'angle, sous lequel les asymptotes cou-

pent l'axe au centre G , sera $= \frac{n}{m} \sqrt{(m m \sin. \varphi^2 - \text{cof. } \varphi^2)}$. C'est pourquoi l'hyperbole sera équilatère, si $m m n n \sin. \varphi^2 - n^2 \text{cof. } \varphi^2 = m^2 = (m^2 + 1) n^2 \sin. \varphi^2 - n^2 = m^2$, ou $\sin. \varphi = \frac{\sqrt{(m^2 + n^2)}}{n \sqrt{(1 + m^2)}}$ & $\text{cof. } \varphi = \frac{m \sqrt{(n^2 - 1)}}{n \sqrt{(1 + m^2)}}$. Il est donc nécessaire pour cela que n soit plus grande que l'unité ; autrement on ne peut obtenir une hyperbole équilatère par une telle section.

76. Si le cône est droit, ou si $m = n$, alors toutes les sections peuvent être rapportées à celles que nous venons de détailler, parce que la position de la droite AB est tout-à-fait arbitraire. Mais il reste pour le cône scalène à chercher les sections faites par un plan incliné d'une manière quelconque sur la droite AB . Soit donc BR l'intersection du plan coupant avec le plan de la base $AEBF$. Soit $OB = f$, l'angle $OB = \theta$, & l'angle d'inclinaison du plan coupant sur la base $= \varphi$; on aura, en abaissant du point O sur BR la perpendiculaire OR , $OR = f \cdot \sin. \theta$ & $BR = f \text{cof. } \theta$. Ensuite, ayant mené dans le plan coupant la droite RC , on aura, à cause de l'angle $ORC = \varphi$, $RC = \frac{f \cdot \sin. \theta}{\text{cof. } \varphi}$ & $OC = \frac{f \sin. \theta \sin. \varphi}{\text{cof. } \varphi}$. Si l'on projette à présent la section perpendiculaire à l'axe OC du cône sur le plan de la base, ses axes principaux seront dirigés suivant les droites AB & EF ; & l'un sera comme m & l'autre comme n .

Pl. XV. Fig. 137.

77. Si l'on tire dans la projection le diamètre ef parallèle à BR , on aura l'angle $BOe = \theta$; soit aOb la position du diamètre conjugué; en faisant le demi-diamètre $Oa = \mu$, $Oe = \nu$, on trouvera :

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^2 \sin. \theta^2 + n^2 \text{cof. } \theta^2)}}{\sqrt{(m^2 \cdot \sin. \theta^2 + n^2 \cdot \text{cof. } \theta^2)}}$$

&

$$\nu = \frac{m n}{\sqrt{(m^2 \sin. \theta^2 + n^2 \cdot \text{cof. } \theta^2)}}$$

puis

$$\text{tang. } B \odot b = \frac{n n \cdot \text{cof. } \theta}{m m \cdot \sin. \theta}$$

Par conséquent le sinus de cet angle fera $= \frac{n n \cos. \theta}{\sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2)}}$

$$\& \text{ le cosinus } = \frac{m m \cdot \sin. \theta}{\sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2)}}$$

A présent l'angle $O b R = \theta + B O b$; donc :

$$\sin. O b R = \frac{m m \sin. \theta^2 + n n \cos. \theta^2}{\sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2)}}$$

&

$$\cos. O b R = \frac{(m m - n n) \cdot \sin. \theta \cos. \theta}{\sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2)}}$$

De plus

$$\mu v = \frac{m n \sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2)}}{m m \cdot \sin. \theta^2 + n n \cdot \cos. \theta^2}$$

78. Puisque $O R = f \cdot \sin. \theta$, on aura :

$$O b = \frac{O R}{\sin. O b R} = \frac{f \sin. \theta \sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2)}}{m m \sin. \theta^2 + n n \cdot \cos. \theta^2}$$

&

$$R b = \frac{(m m - n n) f \sin. \theta^2 \cdot \cos. \theta}{m m \sin. \theta^2 + n n \cos. \theta^2}$$

Il suit de-là que le triangle $R b C$ étant rectangle en R , la tangente de l'angle $C b R$ fera $= \frac{m m \sin. \theta^2 + n n \cos. \theta^2}{(m m - n n) \sin. \theta \cos. \theta}$; ainsi l'angle $C b R$ sera connu. Maintenant menons d'un point quelconque M de la section sur la droite RT la parallèle MT à Cb , & du point M sur Cb la parallèle MS à RT ; faisons $bT = MS = t$, $bS = TM = u$, que nous considérerons comme les coordonnées obliquangles de la section cherchée, la tangente de l'angle $b S M$ étant $= \frac{m m \sin. \theta^2 + n n \cos. \theta^2}{(m m - n n) \sin. \theta \cos. \theta}$. Il est clair que ces coordonnées deviennent perpendiculaires entre elles dans le cône droit, parce que $m = n$.

79. D'un point M de la section soit abaissée sur le plan $A E B F$ la perpendiculaire $M Q$; si on mène $T Q$, elle sera parallèle au diamètre $a b$. Soit menée ensuite du point Q l'or-

donnée QP parallèle à l'autre diamètre ef . En faisant $OP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura, par la nature du cône :

$$\mu^2 v^2 z^2 = \mu^2 y^2 + v^2 x^2.$$

En effet, si on conçoit par le point M une section du cône parallèle à la base, les demi-diamètres parallèles aux droites ab & ef feront μz & $v z$. Mais comme on a trouvé les côtés OC & Ob du triangle rectangle COb , on aura l'hypothé-

$$\text{nuse } Cb = \frac{f. \sin. \theta \sqrt{(m^4 \sin. \theta^2 + n^4 \cos. \theta^2 - (m^2 - n^2)^2 \sin. \theta^2 \cos. \theta^2 \sin. \theta^2)}}{(m m \sin. \theta^2 + n n \cos. \theta^2) \cos. \theta^2};$$

&, à cause des triangles semblables TMQ , bCO , on aura :

$$TM(u) : TQ(O b - x) : QM(z) :: bC : Ob : OC.$$

Donc $x = Ob - \frac{Ob \cdot u}{Cb}$, $z = \frac{OC \cdot u}{Cb}$ & $y = t$; par conséquent

$$\mu^2 v^2 OC^2 \cdot u^2 = \mu^2 \cdot Cb^2 \cdot t^2 + v^2 \cdot Ob^2 (Cb - u)^2.$$

80. Cette équation étant développée reviendra à celle-ci :

$$0 = \mu^2 \cdot Cb^2 \cdot t^2 + v^2 (Ob^2 - \mu^2 \cdot OC^2) u^2 - 2 v^2 \cdot Ob^2 \cdot Cb \cdot u + v^2 \cdot Ob^2 \cdot Cb^2.$$

Si on fait $u = \frac{Ob^2 \cdot Cb}{Ob^2 - \mu \cdot \mu \cdot OC^2} = s$, ou qu'ayant pris $bG = \frac{Ob^2 \cdot Cb}{Ob^2 - \mu \cdot \mu \cdot OC^2} = s$, on appelle $GS = s$; G fera le centre de la section conique, qui a pour équation entre les coordonnées t & s :

$$\mu^2 \cdot Cb^2 \cdot t^2 + v^2 (Ob^2 - \mu^2 OC^2) s^2 = \frac{\mu \cdot \mu \cdot v \cdot v \cdot Ob^2 \cdot OC^2 \cdot Cb^2}{Ob^2 - \mu \cdot \mu \cdot OC^2},$$

dont le demi-diamètre transverse fera $= \frac{\mu \cdot Ob \cdot OC \cdot Cb}{Ob^2 - \mu \cdot \mu \cdot OC^2}$, le

demi-diamètre conjugué $= \frac{v \cdot Ob \cdot OC}{\sqrt{Ob^2 - \mu \cdot \mu \cdot OC^2}}$ & le paramètre

$= \frac{v \cdot v \cdot Ob \cdot OC}{\mu \cdot Cb}$. Aureste, il est visible que, si $\text{tang. } \phi$ est moindre que

$\frac{1}{\sqrt{(m m \sin. \theta^2 + n n \cos. \theta^2)}}$ ou moindre que $\frac{v}{m n}$, la courbe fera une

ellypse; si $\text{tang. } \varphi = \frac{v}{m n}$, une parabole; & si $\text{tang. } \varphi$ est plus grande que $\frac{v}{m n}$, une hyperbole.

81. Le troisième corps, dont nous nous sommes proposé ici de chercher les sections faites par un plan, est la sphère, dont on fait par la géométrie élémentaire que toutes les sections planes sont des cercles. Cependant, pour éclaircir la méthode qui apprend à déterminer, au moyen d'une équation donnée pour un solide, ses différentes sections, je traiterai ici analytiquement ce même sujet, pour lequel on emploie ordinairement la synthèse. Soit en conséquence C le centre de la sphère par lequel on conçoit passer le plan de la planche, de façon que la section faite par ce plan soit un grand cercle, dont le rayon $CA = CB$ est supposé $= a$. Ce rayon sera en même temps celui de la sphère. Soit ensuite la droite DT l'intersection du plan coupant avec ce plan de la planche, sur laquelle on mènera du point C la perpendiculaire CD , que je ferai $= f$; & soit de plus l'angle d'inclinaison $= \varphi$.

Pl. XV. Fig. 138.

82. Supposons que M soit un point quelconque de la section cherchée; que de ce point on ait abaissé sur le plan de la planche la perpendiculaire MQ , & ensuite sur la droite CD prise pour axe la perpendiculaire QP . Si on fait les coordonnées $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura, par la nature de la sphère, $x^2 + y^2 + z^2 = a a$. Soit abaissée pareillement du point M sur la droite DT la perpendiculaire MT , & soit tirée QT , à cause des deux droites QT & MT perpendiculaires à DT , l'angle MTQ mesurera l'inclinaison du plan coupant sur le plan de la base; je le fais $= \varphi$. Par conséquent, si on regarde DT & MT comme les coordonnées de la section cherchée, & qu'on fasse $DT = t$, $TM = u$, MQ deviendra $= u \sin. \varphi$ & $TQ = u \cos. \varphi$. On aura donc $CP = x = f - u \cos. \varphi$; $PQ = y = t$ & $QM = z = u \sin. \varphi$. Ces valeurs étant substituées donneront pour l'équation de la section de la sphère que l'on cherche :

$$ff - 2fu \cdot \cos. \varphi + uu + tt = a a.$$

83. Il est clair que cette équation appartient au cercle; car, si on fait $u = f \cos. \varphi = s$, elle deviendra :

$$ff \sin. \varphi^2 + ss + tt = aa;$$

d'où il suit que le rayon de la section sera $= \sqrt{(a^2 - f^2 \sin. \varphi^2)}$. C'est pourquoi si du point D on mène la parallèle Dc à l'appliquée TM , & que sur la première on mène du centre C la perpendiculaire Cc , à cause de $CD = f$ & de l'angle $CDc = \varphi$, on aura $Dc = f \cos. \varphi$ & $Cc = f \sin. \varphi$. Il suit de-là que les coordonnées s & t étant rapportées au centre, le point c sera le centre de la section, & $\sqrt{(CB^2 - Cc^2)}$ le rayon de ce cercle, comme cela est manifeste par les élémens. On pourra chercher d'une manière semblable les sections quelconques faites par des plans dans les autres solides, pourvu que leur nature soit exprimée par une équation entre trois variables.

PL. XVI. Fig. 139.

84. Pour rendre l'opération plus sensible, soit proposé un solide quelconque dont la nature soit exprimée par une équation entre les trois coordonnées $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; dont les deux premières soient situées dans le plan de la planche, & la dernière z lui soit perpendiculaire. Imaginons ce solide coupé par un plan quelconque, dont l'intersection avec le plan de la planche soit la droite DT & l'inclinaison désignée par un angle $= \varphi$. Soit la droite $AD = f$, l'angle $ADE = \theta$; on aura, en abaissant du point A sur DE la perpendiculaire AE , $AE = f \sin. \theta$, & $DE = f \cos. \theta$. Ensuite, si d'un point M de la section demandée on mène sur DT la perpendiculaire MT , & qu'on tire QT ; l'angle MTQ sera égal à l'angle d'inclinaison donné φ . Par conséquent, si on prend DT & TM pour les coordonnées de la section dont il s'agit, & qu'on fasse $DT = t$, $TM = u$, on aura $QM = u \sin. \varphi$ & $TQ = u \cos. \varphi$.

85. Si du point T on abaisse sur l'axe AD la perpendiculaire TV , à cause de l'angle $TDV = \theta$, on aura $TV = t \sin. \theta$, & $DV = t \cos. \theta$. Ensuite, parce que l'angle $TQP = \theta$, on aura $PV = u \sin. \theta \cos. \varphi$, & $PQ - TV = u \cos. \theta \cos. \varphi$.

Ainsi on pourra avoir de la manière suivante les coordonnées x, y & z en t & en u :

$$AP = x = f + t \cos. \theta - u \sin. \theta . \cos. \phi$$

$$PQ = y = t \sin. \theta + u \cos. \theta . \cos. \phi$$

$$\& \quad QM = z = u \sin. \phi.$$

C'est pourquoi, si on substitue ces valeurs dans l'équation donnée pour le solide entre x, y & z , on obtiendra une équation entre t & u , ou entre les coordonnées de la section cherchée, dont on connoîtra par cette raison la nature. Au reste, cette méthode s'accorde à-peu-près avec celle que nous avons employée plus haut, art. 50.

CHAPITRE IV.

Du Changement des Coordonnées.

86. ON fait que les équations des lignes courbes situées dans un même plan peuvent prendre une infinité de formes différentes, en changeant soit l'origine des abscisses, soit la position de l'axe, ou l'une & l'autre à la fois; la même chose a lieu ici, & même une variété beaucoup plus considérable s'offre dans le cas présent. En effet, deux coordonnées situées dans un même plan peuvent être variées d'une infinité de manières. Ensuite ce même plan, qui renferme les deux coordonnées, peut être changé, & par-là la première variété peut se multiplier à l'infini; c'est-à-dire que, lorsqu'une équation est donnée entre trois coordonnées perpendiculaires entre elles, on peut toujours en trouver une autre entre trois autres coordonnées quelconques pareillement perpendiculaires entre elles, dont la position à l'égard des premières peut être variée infiniment plus que s'il n'y avoit que deux coordonnées, comme il arrive dans les équations des lignes courbes.

87. Faisons varier d'abord seulement l'origine x des abscisses sur l'axe, de sorte que les deux autres coordonnées y & z restent les mêmes; la nouvelle abscisse différera de x d'une quantité constante. Soit donc cette nouvelle abscisse $= t$, on aura $x = t \pm a$; valeur qui, substituée dans l'équation de la surface, donnera une équation entre les trois coordonnées t , y & z , qui, quoique différente de la première, appartiendra pourtant à la même surface. Les autres coordonnées y & z pourront de même être augmentées ou diminuées de quantités constantes; & si on suppose $x = t \pm a$, $y = u \pm b$ & $z = v \pm c$, on aura pour la même surface une équation entre les trois variables t , u & v ; ces nouvelles coordonnées seront visiblement parallèles aux premières. Cependant l'équation de la surface, quoiqu'elle devienne plus générale, ne varie pas beaucoup de cette manière.

88. Comme les trois coordonnées perpendiculaires, dont l'équation exprime la nature de la surface, sont rapportées à trois plans perpendiculaires entre eux; supposons qu'un de ces plans, celui sur lequel se trouvent les deux coordonnées x & y , reste fixe, & qu'on y prenne pour axe une autre ligne quelconque CT , autre que AP . Comme les premières coordonnées pour l'axe AP étoient $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, la coordonnée $QM = z$ restera la même pour le nouvel axe CT ; mais les deux autres deviendront $CT = t$, $TQ = u$, QT ayant été mené perpendiculairement au nouvel axe CT . Ainsi, pour trouver l'équation entre ces nouvelles coordonnées t , u & z , on mènera CR parallèle au premier axe AP ; ensuite du point C on mènera sur cet axe la perpendiculaire CB ; on fera $AB = a$, $BC = b$, & l'angle $RCT = \zeta$. Enfin on mènera la perpendiculaire TR sur CR , & du point T sur QP prolongé la perpendiculaire TS .

Pl. XV. Fig. 140.

89. Cela posé, on aura dans le triangle TCR , $TR = t \sin. \zeta$, $CR = t \cos. \zeta$; & dans le triangle QTS , dont l'angle en Q , est aussi $= \zeta$, on aura $TS = u \sin. \zeta$ & $QS = u \cos. \zeta$. On tirera de-là $AP = x = CR + TS - AB = t \cos. \zeta + u \sin. \zeta - a$ & $QP = QS - TR - BC = y = u \cos. \zeta - t \sin. \zeta - b$. Si donc on substitue ces valeurs, au lieu de x & de y , dans l'équation

proposée pour la surface, il en résultera une équation entre les trois nouvelles coordonnées t , u & z , qui exprimera aussi la nature de la même surface. Cette nouvelle équation fera donc beaucoup plus étendue, puisqu'elle renfermera trois nouvelles constantes arbitraires a , b & l'angle ζ , qui ne se trouvoient pas dans la première équation. Ce sera là l'équation générale, quand le plan qui renferme les deux coordonnées x & y reste invariable.

Pl. XV. Fig. 141.

90. Faisons aussi varier à présent le plan sur lequel nous avons pris les deux premières coordonnées x & y ; & supposons d'abord que l'interfection du nouveau plan avec le premier APQ tombe sur la droite AP , qui sera aussi regardée comme l'axe par rapport aux nouvelles coordonnées. Soit donc APT ce nouveau plan, dont l'inclinaison à l'égard du premier APQ sera l'angle QTP , que je représente par n . On abaissera de M sur PT la perpendiculaire MT , qui sera en même temps perpendiculaire sur le nouveau plan, & qui tiendra lieu de troisième coordonnée. Nous ferons donc les trois nouvelles coordonnées $AP = x$, $PT = u$ & $TM = v$; & , après avoir mené TR perpendiculaire à PQ & TS à QM , nous aurons $TR = u \cdot \sin. n$, $PR = u \cdot \cos. n$, $TS = v \sin. n$ & $MS = v \cdot \cos. n$; d'où nous concludrons $PQ = y = u \cos. n - v \sin. n$ & $QM = z = v \cdot \cos. n + u \cdot \sin. n$; valeurs qui, substituées à y & à z dans l'équation proposée, en donneront une autre entre les trois nouvelles coordonnées x , u & v , laquelle exprimera la nature de la même surface.

Pl. XV. Fig. 140.

91. Supposons à présent que l'interfection du nouveau plan coupant avec le plan APQ tombe sur une ligne quelconque CT , & soit n l'inclinaison de ces plans; prenons en outre cette droite CT pour axe dans ce plan. Cherchons d'abord l'équation entre les coordonnées dans le plan APQ rapportées à l'axe CT , laquelle, d'après ce qui précède, se trouvera ainsi: on fera $AB = a$, $BC = b$, l'angle $TCR = \zeta$, & les coordonnées $CT = p$, $TQ = q$ & $QM = r$; ce qui donnera $x = p \cdot \cos. \zeta + q \sin. \zeta - a$, $y = q \cos. \zeta - p \sin. \zeta - b$ & $z = r$. Maintenant, suivant ce qu'on a vu dans l'art. précédent, si on prend les nouvelles coordonnées t , u & v , p deviendra

$= t, q = u \cdot \cos. n - v \sin. n$ & $r = v \cdot \cos. n + u \sin. n$. Ces substitutions faites, les coordonnées principales x, y & z , se détermineront par les nouvelles de la manière suivante, de sorte que

$$\begin{aligned} x &= t \cos. \zeta + u \sin. \zeta \cos. n - v \sin. \zeta \sin. n - a \\ y &= -t \sin. \zeta + u \cdot \cos. \zeta \cdot \cos. n - v \cdot \cos. \zeta \cdot \sin. n - b \\ &\quad \& \\ z &= u \sin. n + v \cdot \cos. n. \end{aligned}$$

92. Prenons à présent sur ce nouveau plan, où sont situées les coordonnées t & u , une autre ligne quelconque pour axe; nous aurons par ce moyen l'équation la plus générale possible pour la surface proposée. Soient à cet effet AP, PQ, QM , les coordonnées t, u & v , que nous venons de trouver, de sorte que AP représente l'intersection du plan dont il a été question, avec le plan sur lequel on conçoit placées les principales coordonnées x & y ; & soit la droite CT le nouvel axe auquel se rapportent les nouvelles coordonnées les plus générales que nous cherchons. Nous les supposons $CT = p, TQ = q$ & $QM = r$. Il y a en outre les lignes constantes AB & BC , & l'angle TCR que je ferai $= \theta$. Cela posé, on aura, suivant l'art. 89,

$$\begin{aligned} t &= p \cdot \cos. \theta + q \sin. \theta - AB \\ u &= -p \sin. \theta + q \cdot \cos. \theta - BC \\ &\quad \& \\ v &= r. \end{aligned}$$

Si on substitue ces valeurs dans les expressions de l'art. précédent, on trouvera :

$$\begin{aligned} x &= p(\cos. \zeta \cos. \theta - \sin. \zeta \cos. n \sin. \theta) + q(\cos. \zeta \sin. \theta + \sin. \zeta \cos. n \cos. \theta) - r \sin. \zeta \sin. n + f \\ y &= -p(\sin. \zeta \cos. \theta + \cos. \zeta \cos. n \sin. \theta) - q(\sin. \zeta \sin. \theta - \cos. \zeta \cos. n \cos. \theta) - r \cos. \zeta \sin. n + g \\ &\quad \& \\ z &= -p \sin. n \sin. \theta + q \sin. n \cos. \theta + r \cos. n + h; \end{aligned}$$

Pl. XV. F. g. 1. 49.

équations dans lesquelles f, g & h , sont des lignes constantes, qui dérivent de la composition de celles qui ont été introduites dans le calcul.

93. Il paroît donc que l'équation la plus générale d'une surface quelconque renferme six constantes arbitraires; & cette équation exprimera toujours la nature de la même surface, de quelque manière qu'on les détermine. Or, quelque simple & quelque succinte que soit l'équation de la surface entre les coordonnées x, y & z , si on en forme l'équation la plus générale entre p, q & r ; celle-ci, à cause du grand nombre de constantes arbitraires, deviendra nécessairement très-compiquée, sur-tout si les dimensions de x, y & z , sont élevées. A peine y aura-t-il donc un cas où il faudra recourir à l'équation la plus générale; car, quoiqu'on en pût concevoir l'avantage de rendre l'équation très-simple, en déterminant les constantes d'une manière convenable; cependant cette opération, à cause de la longueur du calcul, deviendrait le plus souvent très-pénible. Ce n'est pas pourtant que cette méthode de former les équations les plus générales ne nous serve dans la suite pour en déduire & démontrer de très-belles propriétés.

94. Quoique l'équation la plus générale soit le plus souvent très-compiquée; cependant, si nous faisons attention aux dimensions que forment les coordonnées prises ensemble, leur nombre sera toujours égal au nombre des dimensions formé par les premières coordonnées x, y & z . Ainsi, comme l'équation de la sphère $xx + yy + zz = aa$ est de deux dimensions, l'équation la plus générale entre p, q & r , ne contiendra pas plus de deux dimensions. Ainsi le nombre de dimensions que forment les coordonnées dans l'équation d'une surface quelconque nous fournit un caractère essentiel qui distingue la nature de cette surface; puisque, de quelque manière qu'on fasse varier la position des coordonnées, il en résulte toujours le même nombre de dimensions. Nous ferons ici, par rapport aux surfaces, la même remarque que nous avons faite auparavant à l'égard des lignes courbes, & d'après laquelle nous les avons divisées en ordres. Il sera à propos de diviser d'une manière

semblable les surfaces suivant les dimensions des coordonnées; la surface du premier ordre sera pour nous celle dont l'équation n'a qu'une dimension; nous rapporterons au second ordre celle dans l'équation de laquelle les coordonnées s'élèvent à deux dimensions; on estimera ainsi de suite, par le nombre de dimensions, le degré des ordres ultérieurs.

95. Si nous rapprochons à présent ce que nous venons de dire, de ce que nous avons exposé plus haut sur la recherche des sections planes d'une surface quelconque, nous remarquerons facilement que l'ordre des sections s'accorde toujours avec celui auquel appartient la surface. En effet, supposons que l'équation proposée pour une surface quelconque entre les coordonnées x , y & z , soit de l'ordre n , & que les coordonnées perpendiculaires d'une de ses sections soient t & u . Nous avons vu ci-dessus, art. 85, qu'on trouveroit l'équation entre t & u , en substituant dans l'équation de la surface les valeurs suivantes :

$$x = f + t \cdot \cos. \theta - u \sin. \theta \cdot \cos. \phi$$

$$y = t \cdot \sin. \theta + u \cdot \cos. \theta \cdot \cos. \phi$$

&

$$z = u \cdot \sin. \phi.$$

Il est donc évident que l'équation de la section ne peut pas avoir plus de dimensions que n'en avoit l'équation primitive entre x , y & z ; mais qu'il y en aura toujours le même nombre dans l'une & dans l'autre.

96. Une surface du premier ordre ne peut donner pour les sections faites par un plan que des lignes du premier ordre, ou des droites. Ensuite il ne résulte de la section d'une surface du second ordre d'autres lignes que celles du second ordre, ou des sections coniques; car une surface conique est aussi du second ordre, puisque son équation est :

$$zz = axx + byy.$$

Semblablement, la surface du troisième ordre donnera pour sections planes des lignes du troisième ordre, ainsi de suite.

Il peut arriver cependant quelquefois que l'équation de la section contienne des diviseurs; dans ce cas la section sera composée de deux ou plusieurs lignes des ordres inférieurs. C'est ainsi que la section du cône faite par le sommet sera composée de deux lignes droites, qui jointes ensemble forment cependant l'apparence d'une ligne du second ordre, comme nous l'avons remarqué ci-dessus.

97. La classification des surfaces étant ainsi établie, arrêtons-nous un peu de préférence sur celles qui appartiennent au premier ordre. L'équation qui exprime leur nature sera donc $ax + by + cz = a$; & comme toutes leurs sections faites par un plan sont des lignes droites, il est évident qu'il est impossible que ces surfaces ne soient pas planes; car, si elles avoient quelque convexité ou quelque concavité, il en résulteroit nécessairement une section curviligne. Car, quoiqu'il y ait dans les autres ordres des surfaces dont certaines sections sont des lignes droites (comme nous l'avons vu dans le cylindre, le cône & dans d'autres); cependant les sections curvilignes n'en sont pas exclues. Nous observons ici la même analogie que dans les lignes; car de même qu'une ligne qui ne peut être coupée par une droite en plus d'un point, ne peut manquer d'être droite, nous concluons de même qu'une surface qui coupée par un plan donne toujours une ligne droite, est nécessairement plane elle-même.

98. C'est ce qu'on peut démontrer très-clairement au moyen de l'équation la plus générale. En effet, si, comme nous l'avons enseigné art. 92, on forme de l'équation $ax + by + cz = a$, l'équation la plus générale entre les coordonnées p , q & r ; comme on introduit six nouvelles constantes arbitraires, rien n'empêche de les déterminer de manière que les coefficients des deux coordonnées p & q disparaissent, & qu'il reste une équation de cette forme $r = f$, pour exprimer la nature de la même surface. Or cette équation $r = f$ fait voir que la surface proposée est parallèle au plan dans lequel se trouvent les deux coordonnées p & q , & par conséquent plane. Il peut même se faire que r devienne $= 0$; & alors

alors il est évident que le plan même où l'on prend p & q , est la surface cherchée.

99. A présent donc qu'il est constant que la surface exprimée par l'équation $ax + cy + \gamma z = a$ est plane, il s'agit de déterminer sa position à l'égard du plan sur lequel on a pris les coordonnées x & y . Soit en conséquence M un point quelconque de cette surface, & faisons les trois coordonnées $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$. D'abord, en supposant $z = 0$, on aura l'équation $ax + cy = a$, qui exprimera l'intersection de la surface demandée avec le plan APQ . Il est évident qu'elle sera une ligne droite BCR , dont la position à l'égard de l'axe AP sera telle, que la perpendiculaire AB à cet axe dans le plan $APQ = \frac{a}{c}$, & que $AC = \frac{a}{c}$; d'où il s'enfuit que la tangente de l'angle ACB sera $= \frac{a}{c}$; & partant son sinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa + cc)}}$, & son cosinus $= \frac{c}{\sqrt{(aa + cc)}}$. Prolongeons ensuite QP jusqu'à la rencontre de la droite BC en R ; à cause de $CP = x - \frac{a}{c}$, nous aurons $CR = \frac{\sqrt{(aa + cc)}}{c}$ $-\frac{a\sqrt{(aa + cc)}}{ac}$, & $PR = \frac{ax}{c} - \frac{a}{c}$.

Pl. XV. Fig. 142.

100. Soit abaissée du point Q sur BC la perpendiculaire QS , & soit tirée MS ; il est clair que l'angle MSQ mesure l'inclinaison de la surface proposée sur le plan APQ . Puis donc qu'on a $PR = \frac{ax - a}{c}$, on aura $QR = \frac{ax + cy - a}{c} = \frac{-\gamma z}{c}$; & à cause de l'angle $RQS = ACB$, $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(aa + cc)}}$; d'où il suit que la tangente de l'angle $QSM = \frac{-\gamma z}{\gamma}$; & par conséquent son cosinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(aa + cc + \gamma\gamma)}}$. L'inclinaison de la surface cherchée sur le plan des x & des y est donc mesurée par un angle dont la tangente est $= \frac{-\sqrt{(aa + cc)}}{\gamma}$; pareillement la même surface sera inclinée sur le plan des coordonnées x & z sous un angle dont la tangente est

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 Bbb

$= \frac{-\sqrt{(aa+\gamma\gamma)}}{c}$, & sur le plan des coordonnées y & z sous un angle dont la tangente est $= \frac{-\sqrt{(\epsilon\epsilon+\gamma\gamma)}}{a}$.

C H A P I T R E V.

Des Surfaces du second Ordre.

101. MAIS, après avoir fixé les ordres des surfaces sur le nombre des dimensions que forment dans l'équation les plus hautes puissances des trois coordonnées x , y , z , prises ensemble, on pourra donc, si on propose pour une surface une équation algébrique, assigner sur-le-champ l'ordre auquel cette surface doit être rapportée; &, comme les surfaces du premier ordre, comme nous l'avons fait voir, sont toutes planes, nous nous occuperons dans ce chapitre de l'examen de celles du second ordre. On remarquera d'abord dans celle-ci une plus grande diversité que dans les lignes du second degré, ce qu'on verra facilement avec un peu d'attention. Je ferai donc en sorte de développer avec clarté ces différens genres. Quant aux ordres supérieurs, le nombre des genres se multiplie tellement, que je dois absolument me dispenser de les détailler.

102. Comme la nature des surfaces du second ordre est exprimée par une équation dans laquelle les variables x , y & z , s'élèvent à deux dimensions; le cylindre & le cône tant droit qu'oblique, & la sphère, dont nous avons décrit les propriétés, sont renfermés dans le second ordre. Mais toutes les surfaces qui appartiennent à cet ordre, sont comprises dans cette équation générale :

$$a z^2 + \epsilon y z + \gamma x z + \delta y^2 + \epsilon x y + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0;$$

car, de quelque manière qu'on prenne les trois coordonnées, l'équation sera toujours de cette forme. Les différens genres

de surfaces qui appartiennent à l'ordre actuel, dépendront du rapport différent que les coefficients auront réciproquement entre eux; & qui, quoiqu'une même surface soit exprimée par une infinité d'équations, donneront cependant une multitude infinie de différentes surfaces.

103. Nous avons pris la principale division des lignes courbes planes dans la propriété qu'elles avoient ou de s'étendre à l'infini, ou d'être renfermées dans un espace fini; nous diviserons d'une manière semblable toutes les surfaces d'un ordre quelconque en deux classes, dont la première contiendra celles qui s'étendent à l'infini, & nous rapporterons à la seconde celles qui sont renfermées dans un espace fini. Ainsi le cylindre & le cône seront de la première classe, & la sphère appartiendra à la seconde. Il ne se trouvera à la vérité dans cette dernière aucune surface d'un ordre impair. En effet, comme chaque surface d'un ordre impair donne des sections planes du même ordre, & que les courbes d'un ordre impair s'étendent toutes à l'infini, il est nécessaire que les surfaces de ces ordres s'étendent aussi à l'infini.

104. Or, toutes les fois qu'une surface est infinie, il faut qu'au moins une des trois variables x , y & z , soit aussi infinie. Ainsi, puisqu'il est indifférent laquelle dans ce cas doit être regardée comme infinie, supposons que ce soit z , pourvu, bien entendu, que la surface soit infinie. Pour connoître la nature de cette portion qui s'étend à l'infini, nous ferons donc $z = \infty$. Il faut à présent faire sur-tout attention au premier terme az^2 , examiner s'il manque, ou s'il ne manque pas. Supposons donc d'abord que ce terme soit dans l'équation; ceux-ci nz & x disparaîtront devant lui, & on aura pour la partie infinie dont il s'agit, cette équation :

$$az^2 + \epsilon yz + \gamma xz + dy^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 + \theta y + ix = 0;$$

dans laquelle tous les termes qui ne sont pas infinis, ou qui du moins sont infiniment plus petits que az^2 , disparaissent.

105. Supposons qu'il ne manque aucun des termes où les

variables ont deux dimensions; car, quelle que soit la surface, tous les termes de plus haute dimension se trouveront toujours dans son équation la plus générale; & par conséquent l'hypothèse que nous faisons ici ne peut nuire à l'universalité de la solution. Mais quand les termes $y\zeta$ & $x\zeta$, se trouvent dans l'équation, les termes θy & ιx s'évanouissent devant eux, l'équation sera donc réduite à :

$$a\zeta^2 + \epsilon y\zeta + \gamma x\zeta + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta xx = 0;$$

d'où l'on tire

$$\zeta = \frac{-\epsilon y - \gamma x \pm \sqrt{(\epsilon^2 - 4a\delta)y^2 + (2\epsilon\gamma - 4a\epsilon)xy + (\gamma^2 - 4a\zeta)x^2}}{2a}.$$

Telle est donc l'équation qui exprime la nature de la portion qui s'étend à l'infini.

106. Si la surface a quelque partie qui s'étende à l'infini, elle se confondra donc avec la portion infinie de la surface exprimée par cette équation :

$$a\zeta^2 + \epsilon y\zeta + \gamma x\zeta + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 = 0;$$

de façon que cette surface est en quelque sorte l'asymptote de celle exprimée par l'équation générale. Mais, comme dans cette équation les trois variables ont par-tout deux dimensions, elle appartiendra à une surface conique qui aura son sommet à l'origine des coordonnées, où toutes s'évanouissent en même temps. On peut donc toujours assigner une surface conique pour l'asymptote de la surface proposée, si celle-ci doit s'étendre à l'infini; ou dont la portion infinie se confondra entièrement avec la proposée, ou en fera seulement éloignée d'un intervalle fini. Ainsi, de la même manière que nous avons distingué les branches infinies des courbes par les lignes droites qui étoient leurs asymptotes, nous aurons aussi à distinguer les parties infinies des surfaces par des surfaces coniques, qui feront de même leurs asymptotes.

107. Toutes les fois donc qu'une surface conique asymptote sera réelle, la surface proposée elle-même s'étendra à

l'infini, & cela de manière que les parties infinies de l'une & de l'autre se confondent; ainsi on pourra conclure la nature de la surface donnée de celle de la surface asymptote. Mais, si la surface asymptote devient imaginaire, la surface même proposée n'aura point de partie infinie, & elle sera renfermée en entier dans un espace fini. Ainsi, pour chercher les surfaces du second ordre qui sont renfermées dans un espace fini, il ne faut que voir dans quel cas l'équation de la surface asymptote devient imaginaire; ce qui arrive, lorsque toute cette surface se réduit à un point unique. Car, si elle avoit quelque étendue, ou un point placé hors du sommet, elle devroit nécessairement s'étendre à l'infini, puisque nous avons fait voir plus haut que toute droite qui passe par le sommet & par un point de la surface, est située sur la surface même.

108. Ainsi, lorsque la surface conique asymptote exprimée par cette équation

$$az^2 + \epsilon yz + \gamma xz + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 = 0$$

se réduit à un point unique, toutes les sections faites par le sommet doivent pareillement se réduire à un seul point; & d'abord, en faisant $z = 0$, l'équation $\delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 = 0$ doit être impossible, à moins que $x = 0$ & $y = 0$; ce qui a lieu, lorsque $4\delta\zeta$ est plus grand que $\epsilon\epsilon$. La même chose doit arriver, en faisant ou $x = 0$ ou $y = 0$; on aura donc $4\alpha\delta$ plus grand que ϵ^2 & $4\alpha\zeta$ plus grand que γ^2 . Par conséquent, si dans l'équation donnée pour la surface du second ordre :

$$az^2 + \epsilon yz + \gamma xz + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

$4\delta\zeta$ n'est pas plus grand que $\epsilon\epsilon$; $4\alpha\delta$ plus grand que $\epsilon\epsilon$; $4\alpha\zeta$ plus grand que $\gamma\gamma$, la surface aura certainement des parties qui s'étendent à l'infini.

109. Mais ces trois conditions ne suffisent pas pour que la surface soit renfermée dans un espace fini, il faut encore que la valeur de z tirée de l'équation asymptotique devienne imaginaire; ce qui a lieu toutes les fois que cette expression :

$$(\epsilon\epsilon' - 4\alpha\delta)yy + 2(\epsilon\gamma - 2\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$

obtient une valeur négative, pourvu qu'on prenne pour les deux variables x & y des valeurs quelconques, excepté 0. Comme $\epsilon\epsilon' - 4\alpha\delta$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ sont des quantités négatives, cela arrivera si $(\epsilon\gamma - 2\alpha\epsilon)^2$ est moindre que $(\epsilon^2 - 4\alpha\delta)(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)$; c'est-à-dire, si $\alpha\epsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\epsilon^2$ est moindre que $\epsilon\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$; pourvu toutefois que α ait une valeur positive; car nous avons divisé cette équation par α . Mais, si α a une valeur positive, à cause des conditions énoncées plus haut, $4\alpha\zeta$ plus grand que γ^2 , $4\alpha\delta$ plus grand que ϵ^2 , & $4\delta\zeta$ plus grand que $\epsilon\epsilon$, les coefficients δ & ζ seront positifs.

110. Une surface du second ordre fera donc renfermée dans un espace fini, si son équation est telle que les quatre conditions suivantes aient lieu; savoir si :

$$4\alpha\zeta \text{ est plus grand que } \gamma\gamma; 4\alpha\delta \text{ plus grand que } \epsilon\epsilon; 4\delta\zeta \text{ plus grand que } \epsilon\epsilon \text{ \& } \alpha\epsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\epsilon^2 \text{ moindre que } \epsilon\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta.$$

Ainsi, nous établissons pour premier genre des surfaces du second ordre, celui auquel appartiennent toutes les espèces qui n'ont point de parties infinies, mais qui sont renfermées dans un espace fini. C'est donc à ce genre qu'appartient la sphère, dont l'équation est :

$$zz + yy + xx = aa;$$

car, puisqu'on a $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\epsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\epsilon = 0$; toutes les quatre conditions sont remplies. Plus généralement, cette équation

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

appartiendra à ce genre, tant que α , δ , ζ , seront des quantités positives; elle exprimera toujours une surface fermée, à moins qu'un ou deux coefficients ne manquent.

111. Connoissant les quatre conditions nécessaires pour qu'une surface soit renfermée dans un espace fini, si on pro-

pose une équation quelconque déterminée du second ordre , on pourra juger sur-le-champ si la surface qu'elle exprime a des parties qui s'étendent à l'infini, ou n'en a pas. Car, si une seule de ces quatre conditions manque, la surface s'étend certainement à l'infini. Mais dans ce cas il y a quelque subdivision à faire, pour distinguer la variété qui se remarque dans ces parties. Supposons donc que la première subdivision soit pour le cas, où

$$a\epsilon^2 + d\gamma^2 + \zeta\epsilon^2 \text{ est plus grand que } \epsilon\gamma\epsilon + 4a\delta\zeta;$$

alors la surface s'étendra à l'infini, & aura pour asymptote une surface conique, comme nous l'avons déjà fait voir ci-dessus. Ce cas est directement opposé au précédent, où toute la surface est renfermée dans un espace fini.

112. Mais il y a des cas intermédiaires où, quoique la surface s'éloigne à l'infini, elle tient cependant un certain milieu entre les deux précédentes, à-peu-près comme la Parabole tient un certain milieu entre l'Ellypse & l'Hyperbole. Le cas arrive si

$$a\epsilon^2 + d\gamma^2 + \zeta\epsilon^2 = \epsilon\gamma\epsilon + 4a\delta\zeta;$$

on aura par conséquent

$$a\zeta = -\epsilon\gamma - \gamma x + y\sqrt{(\epsilon^2 - 4a\delta)} + x\sqrt{(\gamma^2 - 4a\zeta)}.$$

L'équation asymptotique

$$a\zeta^2 + \epsilon\gamma\zeta + \gamma x\zeta + d\gamma^2 + \epsilon x\gamma + \zeta x^2 = 0$$

aura donc deux facteurs simples, qui seront ou réels, ou imaginaires, ou égaux entre eux. Ces trois conditions fournissent donc trois genres de surfaces infinies; ainsi nous avons trouvé cinq genres de surfaces du second ordre, que nous allons maintenant examiner avec plus de soin.

113. Comme, en changeant la position des trois axes auxquels les coordonnées sont parallèles, on peut ramener l'équation générale à une forme plus simple, faisons usage de cette réduction, de manière cependant qu'en ramenant l'équation

générale des surfaces du second ordre à la forme la plus simple, cette dernière embrasse toutes les espèces aussi bien que la générale. Ainsi l'équation générale des surfaces du second ordre étant :

$$ax^2 + \epsilon yz + \gamma xz + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + ix + z = 0,$$

cherchons l'équation entre les trois autres coordonnées p , q & r , que nous supposons se couper réciproquement au même point que les trois premières. Pour cela, conformément à l'art. 92, il faudra faire :

$$x = p(\cos.k.\cos.m - \sin.k.\sin.m.\cos.n) + q(\cos.k.\sin.m + \sin.k.\cos.m.\cos.n) - r.\sin.k.\sin.n$$

$$y = -p(\sin.k.\cos.m + \cos.k.\sin.m.\cos.n) - q(\sin.k.\sin.m - \cos.k.\cos.m.\cos.n) - r.\cos.k.\sin.n$$

&

$$z = -p.\sin.m.\sin.n + q.\cos.m.\sin.n + r.\cos.n.$$

D'où résulte cette équation :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. On pourra à présent déterminer ces angles arbitraires k , m & n , de manière que les trois coefficients D , E & F disparaissent. Car, quoique le calcul devienne trop long pour effectuer la détermination actuelle de ces angles; si pourtant quelqu'un pouvoit douter que cette élimination donnât toujours une valeur réelle pour ces angles, il devra accorder au moins que les deux coefficients D & E peuvent être rendus égaux à zéro. Or, cela fait, la position du troisième axe, auquel les ordonnées r sont parallèles dans le plan perpendiculaire aux ordonnées p , peut être facilement changé, de manière que le coefficient F s'évanouisse aussi. Car il n'y aura qu'à faire $q = t.\sin.i + u.\cos.i$ & $r = t.\cos.i - u.\sin.i$; & au lieu du terme qr , on aura le terme tu , dont le coefficient pourra être rendu égal à zéro, à l'aide de l'angle i . Par ce moyen l'équation générale des surfaces du second ordre prendra donc cette forme :

$$Ap^2$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

115. A présent, on peut en outre augmenter ou diminuer les coordonnées p, q, r , de quantités données, pour que les coefficients G, H & I disparaissent; ce qui se fera en changeant seulement le point où toutes les coordonnées prennent leur origine; & de cette manière toutes les surfaces du second ordre seront comprises dans cette équation:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + K = 0;$$

par où l'on voit que chacun des trois plans principaux menés par l'origine des coordonnées divise la surface en deux parties semblables & égales. Ainsi, toute surface du second ordre n'a pas seulement un plan diamétral, mais bien trois, qui se coupent réciproquement au même point à angles droits. Ce point sera par cette raison le centre de la surface, quoiqu'il y ait quelques cas où ce centre soit à une distance infinie. Il en est ici comme des sections coniques, qui sont dites avoir toutes un centre, quoique dans la Parabole ce centre soit à une distance infinie du sommet.

116. Ayant ainsi ramené l'équation, qui renferme toutes les surfaces du second ordre, à la forme la plus simple; le premier genre de ces surfaces sera contenu dans cette équation:

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

si tous les trois coefficients A, B, C , ont des valeurs positives. Les surfaces qui appartiennent à ce genre, non-seulement seront renfermées tout entières dans un espace fini; mais elles auront aussi un centre, où les trois plans diamétraux se coupent réciproquement à angles droits. Soit C le centre de cette figure, & CA, CB, CD , les trois axes principaux perpendiculaires entre eux, auxquels les coordonnées p, q, r , sont parallèles; les trois plans diamétraux seront $ABab, ADa$ & $B'Db$, par lesquels ce corps sera partagé en deux portions semblables & égales.

Pl. XV. Fig. 143.

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 Ccc

117. Soit $r=0$, & l'équation $A p^2 + B q^2 = a^2$ exprimera la nature de la section principale $A B a b$; laquelle sera par conséquent une ellipse qui aura son centre en C , dont les demi-axes seront $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$ & $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Si on fait $q=0$, l'équation $A p^2 + C r^2 = a^2$ représentera la section principale $A D a$, qui sera pareillement une ellipse ayant son centre en C , dont les demi-axes seront $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$ & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Or ces trois sections principales étant connues, ou seulement leurs demi-axes $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$, $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$ & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$, la nature de ce corps sera aussi connue & déterminée. Il conviendra donc d'appeler ce premier genre des surfaces du second ordre *Ellyptoïde*, parce que ses trois sections principales sont des ellipses.

118. Ce genre embrasse trois espèces qui méritent d'être distinguées des autres. La première, lorsque les trois axes principaux CA , CB & CD sont égaux entre eux; dans ce cas les trois sections principales se changeront en cercles, & le corps même en une sphère, dont l'équation, comme nous l'avons vu ci-dessus, sera :

$$p p + q q + r r = a a.$$

La seconde espèce comprend les cas où deux axes principaux seulement sont égaux entre eux. Soit, par exemple, $CD = CB$, ou $C=B$, la section $B D b$ deviendra un cercle; mais l'équation $A p^2 + B (q^2 + r^2) = a a$ fait voir que toutes les sections parallèles à celles-ci seront pareillement des cercles; d'où il suit que ce corps sera un sphéroïde ou oblong, si AC est plus grand que BC , ou aplati, si AC est plus petit que BC . Enfin la troisième espèce renferme tous les corps dans lesquels les coefficients A , B & C , sont inégaux; & qui par conséquent conserveront le nom général d'*Ellyptoïde*.

119. Les autres genres de surfaces du second ordre seront contenus dans cette équation :

$$A p p + B q q + C r r = a a ;$$

d'abord, si aucun des coefficients A, B, C , ne manque. Mais s'il y en a un ou deux qui aient des valeurs négatives; supposons-en un seulement négatif, & considérons cette équation :

$$A p p + B q q - C r r = a a ,$$

dans laquelle A, B & C doivent pour le moment désigner des nombres positifs. Quant à ce qui regarde le centre de ce corps & les plans diamétraux, tout se passe comme auparavant. On voit donc que la première section principale $ABab$ de ce corps est une ellypse, dont le demi-axe $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, & l'autre $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Les deux autres sections principales Aq, BS , seront des hyperboles, qui auront leur centre en C , & leur demi-axe conjugué $= \frac{a}{\sqrt{C}}$. Pl. XV. Fig. 144.

120. Cette surface représentera donc une espèce d'entonnoir, qui ira en s'élargissant en dessus & en dessous suivant une forme hyperbolique. Cette surface aura pour asymptote un cône exprimé par l'équation $A p p + B q q - C r r = 0$, lequel aura son sommet au centre C , & dont les côtés sont les asymptotes des hyperboles. Ce cône asymptote sera situé dans l'intérieur de la surface, & il sera droit si $A = B$, & scalène, si A n'est pas égal à B ; son axe sera la droite CD perpendiculaire au plan ABa . Au reste, toutes les sections perpendiculaires à l'axe CD seront des ellypses semblables à l'ellypse $ABab$; & les sections perpendiculaires au plan $ABab$ seront toutes des hyperboles; d'où il conviendra de nommer *elliptico-hyperboliques* ces surfaces circonscrites à un cône, qui devient leur asymptote. Ces surfaces constitueront pour nous le second genre.

121. On pourra donc encore distinguer trois espèces dans ce genre; la première, si $a = 0$, auquel cas l'ellypse $ABab$ devient un point, & les hyperboles des lignes droites, & la

surface même fera entièrement confondue avec son asymptote; d'où il suit que cette première espèce embrassera tous les cônes tant droits qu'obliques; ce qui pourroit fournir une nouvelle subdivision. L'autre espèce aura lieu, si A devient $= B$. Dans ce cas, l'ellipse $ABab$ se change en cercle, & la surface même deviendra ronde ou tournée. On obtiendra une telle surface, en faisant tourner une hyperbole quelconque autour de l'axe conjugué. La troisième espèce ne différera pas du genre même.

122. Prenons pour troisième genre celui où deux coefficients des termes pp , qq & rr , deviennent négatifs, & dont conséquemment l'équation sera :

$$A p p - B q q - C r r = a a.$$

Pl. XVI. Fig. 145.

Si on fait $r = 0$, la première section principale sera une hyperbole $EAFeaf$, qui a son centre en C , dont le demi-axe transverse $= \frac{a}{\sqrt{A}}$ & le demi-axe conjugué $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. L'autre section principale, qu'on obtiendra en faisant $q = 0$, sera pareillement une hyperbole AQ , aq , qui aura le même demi-axe transverse, mais dont le demi-axe conjugué sera $= \frac{a}{\sqrt{C}}$; la troisième section principale devient imaginaire. Enfin cette surface sera tout entière dans la surface conique qui lui sert d'asymptote; d'où il suit qu'on peut appeler *hyperbolico-hyperbolique* ce genre inscrit au cône asymptote. Si B devient $= C$, la surface sera ronde, & elle résultera de la rotation d'une hyperbole autour de son axe transverse. Ce cas pourroit constituer une espèce particulière; mais, si on suppose $a = 0$, on trouvera la surface conique que nous avons déjà considérée comme une espèce du genre précédent.

123. Pour connoître les genres suivans, nous supposons qu'un des coefficients A , B , C , devient nul. Soit donc $C = 0$, & l'équation générale trouvée art. 114 sera :

$$A p p + B q q + G p + H q + I r + K = 0.$$

En augmentant ou diminuant les coordonnées p & q , on

pourra faire disparaître les termes Gp & Hq , mais non Ir ; le terme Ir restera donc dans l'équation, mais par son moyen on pourra faire disparaître le dernier terme K ; ce qui nous donnera une équation de cette forme :

$$App + Bqq = ar;$$

D'où nous aurons deux cas à examiner. Le premier, lorsque les deux coefficients A & B sont positifs; le second, lorsqu'un des deux est négatif. Dans l'un & l'autre cas, le centre de la surface sera situé sur l'axe CD , mais à une distance infinie.

124. Soient d'abord les coefficients A & B tous deux positifs; c'est le cas qui nous fournira le quatrième genre compris dans cette équation :

$$App + Bqq = ar.$$

La première section principale qui résulte de la supposition Pl. XVI Fig. 146. de $r = 0$, se réduira donc à un point; mais les deux autres qu'on obtiendra, savoir la seconde, en faisant $q = 0$, & la troisième, en faisant $p = 0$, seront des paraboles MAm & NAn . Comme toutes les sections de cette surface qui sont perpendiculaires à l'axe AD sont des ellipses, & les sections faites par cet axe des paraboles, nous appellerons les corps de ce genre *elliptico-paraboliques*. Deux espèces sont à remarquer, l'une, si $A = B$; dans ce cas, le corps est rond, & se nomme *conoïde-parabolique*; l'autre a lieu, lorsque $a = 0$, & que $Ap^2 + Bq^2$ devient $= bb$; elle comprend les cylindres ou droits, si $A = B$, ou scalènes, si A & B sont inégaux.

125. Le cinquième genre est compris dans l'équation :

$$App - Bqq = ar.$$

La première section principale, si on fait $r = 0$, donnera Pl. XVI Fig. 147. deux lignes droites Ee , Ff , qui se croisent l'une l'autre au point A . Mais toutes les sections parallèles à celle-ci seront des hyperboles, dont les centres sont situés sur l'axe AD , & qui sont placées entre les asymptotes droites Ee & Ff . Les

deux plans qui sont perpendiculaires au plan ABC , & qui sont dirigés suivant les lignes Ee & Ff , se confondront à une distance infinie avec la surface proposée; qui par conséquent aura pour asymptote ces deux plans qui se coupent mutuellement. Les autres sections principales faites sur les plans ACD & ABd seront des paraboles; ce qui nous fera nommer *parabolico-hyperboliques* les surfaces de ce genre, qui ont deux plans pour asymptotes. L'une de ces espèces, (si, en faisant $a = 0$, on a $App - Bqq = bb$) sera un cylindre hyperbolique, dont toutes les sections perpendiculaires à l'axe AD seront des hyperboles égales entre elles; si, de plus, $b = 0$, on retrouvera les deux plans asymptotiques.

126. Enfin le sixième genre de surfaces du second ordre sera renfermé dans cette équation :

$$App = aq,$$

qui donne un cylindre parabolique, dont toutes les sections perpendiculaires à l'axe AD seront des paraboles semblables & égales. Leurs sommets tomberont sur la droite AD , & leurs axes seront parallèles entre eux. Toutes les surfaces du second ordre pourront donc être réduites à ces six genres; de sorte qu'il est impossible d'en trouver aucune qui ne soit pas comprise dans l'un de ces genres. Au reste, si dans le dernier genre on fait $a = 0$, & qu'on ait $App = bb$, cette équation exprimera deux plans parallèles entre eux, qui donnent une certaine espèce de ce genre. On remarque ici la même analogie que dans les lignes du second ordre, où nous avons vu que deux lignes qui se croisoient donnoient une espèce d'hyperbole, & que deux lignes parallèles représentoient une espèce de parabole.

127. Quoique nous ayons déduit ces six genres de l'équation la plus simple, à laquelle il soit possible de réduire les surfaces du second ordre; cependant il sera facile maintenant, lorsqu'on proposera une équation quelconque du second degré, d'assigner le genre auquel la surface appartient. En effet, si on propose cette équation :

$$a\zeta^2 + \epsilon y\zeta + \gamma x\zeta + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 + n\zeta + \theta y + i x + z = 0,$$

on devra prononcer, d'après l'indication des premiers termes, où les variables forment deux dimensions; c'est-à-dire qu'il faudra examiner ces termes :

$$a\zeta\zeta + \epsilon y\zeta + \gamma x\zeta + \delta y y + \epsilon x y + \zeta x x;$$

s'il se trouve que

$4a\zeta$ soit plus grand que $\gamma\gamma$; $4a\delta$ plus grand que $\epsilon\epsilon$; $4\delta\zeta$ plus grand que $\epsilon\epsilon$, & $a\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\epsilon\epsilon$ plus petit que $\epsilon\gamma\epsilon + 4a\delta\zeta$,

la surface sera fermée, & appartiendra au premier genre que nous avons appelé *Ellyptoïde*.

128. Si une ou plusieurs de ces conditions manquent, & que cependant on n'ait pas $a\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\epsilon\epsilon = \epsilon\gamma\epsilon + 4a\delta\zeta$, la surface appartiendra ou au second ou au troisième genre; & on aura un corps hyperbolique qui aura pour asymptote un cône, auquel il sera circonscrit dans le second genre, ou inscrit dans le troisième; mais si on a $a\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\epsilon\epsilon = \epsilon\gamma\epsilon + 4a\delta\zeta$; ce qui est le cas où l'expression

$$a\zeta\zeta + \epsilon y\zeta + \gamma x\zeta + \delta y y + \epsilon x y + \zeta x x,$$

est résoluble en deux facteurs simples, soit imaginaires, soit réels; dans le premier cas, la surface appartiendra au quatrième genre, & dans le second, elle appartiendra au cinquième. Enfin, si cette expression renferme deux facteurs égaux, ou, si elle est un carré, on aura le sixième genre. Ainsi, on pourra aisément décider tout de suite à quel genre appartient une équation quelconque proposée; il y aura seulement un peu plus de difficulté à l'égard du second & du troisième genre, dont on pourroit par cette raison ne faire qu'un.

129. On pourra semblablement traiter & diviser en genres les surfaces du troisième ordre & celles des ordres suivans. Il faudra avoir égard seulement aux termes de l'équation générale qui offrent le plus de dimensions; & conséquemment on

aura à examiner pour les surfaces du troisième ordre les termes dans lesquels les ordonnées forment trois dimensions ; c'est-à-dire, ceux-ci :

$$ax^3 + byz^2 + \gamma y^2z + dx^2z + \varepsilon xz^2 + \zeta xy z + \&c.$$

Il faut donc voir si ces termes pris ensemble, ou si le membre le plus élevé de l'équation peut être décomposé en facteurs simples, ou non; s'il ne peut pas être décomposé, la surface aura pour asymptote un cône du troisième ordre. Mais comme c'est en égalant à zéro le membre qui renferme le plus de dimensions, qu'on exprime la nature de ce cône, il y aura plusieurs sortes de cônes du troisième genre, dont la diversité servira à établir plusieurs genres de surfaces; car, quoique tous les cônes du second ordre se rapportent à un seul genre, il n'en est pas de même du troisième ordre, qui présente une bien plus grande variété.

130. Après avoir fait l'exposé de ces genres, nous avons à considérer le cas où le premier membre peut être résolu en facteurs simples, soit réels, soit imaginaires. Supposons d'abord qu'il ait un facteur simple réel; on en conclura que la surface aura une asymptote plane. L'autre facteur égal à zéro donnera une équation possible, ou non; si l'équation est impossible, à moins que toutes les coordonnées ne s'évanouissent, il n'y aura qu'une asymptote plane; mais, si elle est possible, la surface aura deux asymptotes, l'une plane, & l'autre fera un cône du second ordre. S'il a trois facteurs simples, l'un fera toujours réel, & les deux autres seront ou imaginaires, ou réels; d'où résulteront deux nouveaux genres. Enfin, si les trois facteurs simples sont réels, suivant que deux ou tous seront égaux entre eux, on pourra encore établir deux genres différens. Mais dans cet ordre il n'y a point de surface qui ne s'étende à l'infini.

C H A P I T R E V I.

De l'Intersection de deux Surfaces.

131. ON a déjà exposé ci-dessus la manière de trouver quelle est la nature de la section faite par un plan qui coupe une surface quelconque. Car la courbe qu'elle forme étant tout entière dans le même plan où la section est faite, nous avons pris aussi dans ce plan deux coordonnées, dont la relation exprime, suivant l'usage, la nature de ces courbes; & nous en avons par-là ramené la connoissance aux règles ordinaires. Mais, si la surface coupante n'est pas plane, comme alors la section ne sera pas dans un seul plan, deux coordonnées ne suffiront plus pour en exprimer la nature; & il faudra recourir à un autre moyen pour renfermer ces dernières sections dans des équations qui puissent indiquer la véritable position de chacun de ses points.

132. Or on peut déterminer la situation des points qui ne sont pas dans un même plan, à l'aide de trois plans perpendiculaires entre eux, en assignant la distance de chaque point à chacun de ces plans. Ainsi trois variables seront nécessaires pour exprimer la nature d'une courbe qui n'est pas située dans un même plan, en sorte que, si on en prend une à volonté, il en doit résulter pour les deux autres des valeurs déterminées. Pour remplir ce but, une seule équation entre les trois coordonnées est donc insuffisante, parce qu'elle exprimerait la nature d'une surface entière; c'est pourquoi on aura besoin de deux équations, par le moyen desquelles, si on attribue à une variable une valeur donnée, les valeurs des deux autres se trouvent en même temps déterminées.

133. La nature d'une courbe, lorsqu'il n'est pas constant qu'elle soit située dans un même plan, est donc très-bien exprimée par deux équations entre trois variables, telles que x ,
EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3 D d d

y , z , qui représenteront autant de coordonnées perpendiculaires entre elles. On pourra donc toujours avec ces deux équations déterminer deux variables par le moyen de la troisième; c'est ainsi, par exemple, que les variables y & z deviendront égales respectivement à une certaine fonction de x . On pourra aussi éliminer à volonté une des variables; on formera par ce moyen trois équations qui renfermeront seulement deux variables, l'une entre x & y , une autre entre x & z & une troisième entre y & z . Or chacune de ces trois équations dérive naturellement de deux autres; de sorte que, si on a des équations entre x & y & entre x & z , on en pourra déduire la troisième par l'élimination de x .

Pl. XVI. Fig. 148.

134. Soit donc proposée une ligne courbe non située dans un même plan, & dont M soit un point quelconque; on prendra à volonté trois axes perpendiculaires entre eux AB , AC & AD , qui déterminent trois plans aussi perpendiculaires entre eux, BAC , BAD & CAD . Du point M de la courbe on abaissera sur le plan BAC la perpendiculaire MQ , & du point Q on mènera à l'axe AB la perpendiculaire QP ; on aura AP , PQ & QM pour les trois coordonnées, qui détermineront la nature de la courbe, pourvu qu'on ait entre elles deux équations. Faisons donc $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; & avec les deux équations données entre x , y & z , formons-en une troisième qui, par l'élimination de z , ne renferme plus que les deux variables x & y ; elle déterminera la position du point Q sur le plan BAC ; & chaque point Q , qui répondra ainsi à chaque point M , formera une ligne courbe EQF , dont la nature sera exprimée par l'équation trouvée entre x & y .

135. Lorsque deux équations sont proposées entre trois coordonnées, il est donc facile de connoître de cette manière la nature de la courbe EQF , qu'on forme en abaissant de chaque point M de la courbe cherchée des perpendiculaires MQ sur le plan BAC . Cette courbe EQF se nomme la *projection* de la courbe GMH sur le plan BAC . Or, comme on trouve la projection faite sur le plan BAC , en éliminant la variable z , pareillement on obtiendra celle de la même courbe sur le

plan BAD ou sur le plan CAD , en éliminant ou la variable y , ou la variable x . Une seule projection EQF ne suffit pas pour connoître la courbe GMH ; mais si on connoît pour chaque point Q les perpendiculaires $QM = z$, il sera facile de construire, au moyen de la projection EQF , la courbe même GMH . Il faut donc pour cela qu'outre l'équation entre x & y , qui exprime la nature de la projection, on en ait une autre entre z & x , ou entre z & y , ou même entre les trois z, x, y , qui fasse connoître pour chaque point Q la longueur de la perpendiculaire $QM = z$.

136. Puisque l'équation entre z & x exprime la projection de la courbe GMH sur le plan BAD , celle entre z & y , la projection faite sur le plan CAD ; & que l'équation entre les trois variables z, y & x , représente la surface sur laquelle se trouve la courbe GMH ; il est d'abord évident qu'avec deux projections de la même courbe GMH faites sur deux plans, on connoît la courbe même GMH ; mais, de plus, il est visible que si la surface, sur laquelle la courbe GMH est située, est donnée aussi bien que sa projection sur un plan, cette courbe sera pareillement connue. Il n'y aura qu'à élever de chaque point de la projection des perpendiculaires QM , dont l'intersection avec la surface déterminera la courbe cherchée GMH .

137. Après l'exposition préliminaire de ces principes, qui ont rapport à la nature des courbes qui ne sont pas situées dans un même plan, on pourra sans peine déterminer l'intersection de deux surfaces quelconques. Car ainsi que l'intersection de deux plans est une ligne droite, ainsi l'intersection de deux surfaces quelconques sera une ligne, ou droite, ou courbe; & cette dernière sera tout entière dans un même plan, ou n'y fera pas. Or, quel que soit celui de ces cas qui ait lieu, tous ses points appartiendront à chaque surface, & seront par conséquent renfermés dans l'équation de l'une & de l'autre. Donc, si les deux surfaces sont exprimées par des équations entre trois coordonnées, qui soient rapportées aux trois mêmes plans principaux perpendiculaires entre eux, ou aux trois mêmes axes AB, AC & AD , également perpendiculaires entre eux,

ces deux équations prises ensemble exprimeront alors la nature de l'intersection.

138. Etant donc proposées deux surfaces qui s'entrecourent, on doit exprimer la nature de chacune par une équation entre trois coordonnées rapportées aux mêmes axes principaux, on aura ainsi deux équations entre les trois coordonnées x , y & z ; & si l'on élimine l'une d'elles, l'équation résultante entre les deux autres donnera la projection de l'intersection faite sur le plan de ces deux coordonnées. On pourra donc trouver aussi de cette manière l'intersection d'une surface quelconque par un plan; car, comme l'équation générale d'un plan est $az + cy + \gamma x = f$, si dans celle de la surface on substitue à z sa valeur tirée de la première équation, savoir $z = \frac{f - cy - \gamma x}{a}$, on aura l'équation qui convient à la projection de l'intersection faite sur le plan des coordonnées x & y . Et en même temps l'équation $z = \frac{f - cy - \gamma x}{a}$ fera connoître pour chaque point Q de la projection la grandeur de la perpendiculaire QM prolongée jusqu'à l'intersection même.

139. S'il arrive que l'équation de la projection soit impossible, comme si on arrivoit à ce résultat $xx + yy + aa = 0$, ce seroit une marque que les deux surfaces ne s'entrecourent nulle part; mais, si l'équation de la projection donne un point unique, ou si la projection se réduit à un seul point, l'intersection elle-même fera aussi un point; & les deux surfaces se toucheront par conséquent en un point, qu'on pourra trouver par le moyen de l'équation. Mais il existe en outre un contact linéaire, qui a lieu quand deux surfaces se touchent en une infinité de points, & la ligne de contact sera ou droite ou courbe. Elle sera droite, par exemple, si un plan touche un cylindre ou un cône; mais une sphère qui touche intérieurement un cône droit le ruche par la circonférence du cercle. Ces sortes de contacts se connoîtront par l'équation même, si on en trouve une pour la projection, qui contienne deux racines réelles; parce que ce contact n'est rien autre chose que le concours de deux intersections.

140. Pour rendre tout cela plus clair, supposons une sphère coupée par un plan quelconque, & prenons-en l'équation rapportée au centre $z, z + y, y + x x = a a$; celle du plan, quelle que soit sa position, sera de cette forme :

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f;$$

d'où, tirant $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, résultera l'équation suivante entre x & y pour la projection :

$$0 = f^2 - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2) x^2.$$

Il est clair qu'elle est une ellipse, si l'équation est réelle; mais, si elle est imaginaire, la sphère ne sera touchée nulle part par le plan; & si l'ellipse se réduit à un point, le plan & la sphère se toucheront réciproquement. Pour démêler ces cas, cherchons la valeur de y :

$$y = \frac{\beta f - \gamma x \pm a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) x x}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Si la valeur de f est telle que la quantité radicale ne puisse jamais devenir réelle, il n'y aura ni contact, ni intersection.

141. Supposons $f = a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, on aura :

$$y = \frac{\beta f - \gamma x \pm a x \sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \mp 2\gamma x} \pm a \sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2};$$

équation à laquelle on ne peut satisfaire avec des valeurs réelles, à moins qu'on n'ait :

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \quad \& \quad y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

Par conséquent, si $f = a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, le plan que représente l'équation $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ touchera la sphère, & on trouvera le point de contact, en prenant :

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \quad y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \quad \& \quad z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};$$

valeurs, dont on peut justifier la vérité par les éléments de

géométrie, qui traitent du contact de la sphère par un plan.

142. On déduit donc de ce qui précède une règle générale, pour reconnoître si une surface quelconque est touchée par un plan, ou par une autre surface. Car, après avoir éliminé des deux équations une des variables, il faudra voir si l'équation qui en résulte peut être décomposée en facteurs simples, ou non. Si elle renferme deux facteurs simples imaginaires, il y aura un point de contact qu'on trouvera, en faisant l'un & l'autre facteur = 0; & si elle contient deux facteurs simples réels, & tous deux égaux entre eux, les surfaces se toucheront l'une l'autre suivant une ligne droite. Mais, si cette équation a deux facteurs non simples, mais égaux, ou si elle est divisible par un quarré, alors sa racine étant supposée égale à zéro fera connoître la projection de cette ligne qui résulte du contact. On voit aussi par-là que, si cette équation renfermoit quatre facteurs imaginaires, les surfaces se toucheroient réciproquement en deux points.

143. Pour donner de ce que nous venons de dire une plus ample explication, cherchons le contact du cône & d'une sphère, dont le centre soit placé sur l'axe du cône. L'équation de la sphère est $z z + y y + x x = a a$, & celle du cône $(f - z)^2 = m x x + n y y$, pourvu, bien entendu, que le sommet du cône soit éloigné du centre de la sphère de l'intervalle f . Eliminons ici la variable y , & nous aurons :

$$(f - z)^2 = n a a - n z z + (m - n) x x$$

pour la projection de l'interfection sur le plan des coordonnées x & z . Soit d'abord le cône droit, ou $m = n$, nous aurons :

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1+n)aa - nff)}}{1+n}$$

C'est pourquoi, si $f = a \sqrt{1+n}$, on aura doublement $z = \frac{a}{\sqrt{1+n}}$; & par conséquent le contact fera linéaire, c'est-à-dire qu'il se fera par un cercle, dont la projection sur le plan qui passe par l'axe, est une ligne droite perpendiculaire au même axe.

144. Quant au cône scalène, où m & n sont des nombres inégaux, l'équation trouvée paroît toujours donner une intersection, quoique le plus souvent il n'en existe aucune; car, si m surpasse n , il en résultera toujours une équation réelle pour la projection de l'intersection; mais il faut remarquer qu'une projection réelle n'annonce pas toujours une intersection réelle; car, pour que l'intersection soit réelle; il ne suffit pas que la projection le soit, il faut encore que les perpendiculaires menées de la projection jusqu'à l'intersection aient aussi des valeurs réelles; ainsi, quoique toute courbe réelle fournisse des projections réelles quelconques, on ne peut pas conclure réciproquement de la réalité de la projection celle de la courbe que l'on cherche. C'est une précaution à laquelle il faut toujours avoir bien égard, pour ne pas abuser de la réalité des équations que nous avons trouvées pour les projections.

145. Nous éviterons cet inconvénient, en cherchant la projection faite sur le plan des ordonnées x & y ; car, comme il n'existe sur ce plan aucun point auquel il n'en corresponde un sur la surface conique, si la projection faite sur ce plan est réelle, l'intersection le sera pareillement. Ainsi, puisque $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$, l'autre équation donnera :

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

ou

$$a^2 + f^2 - (1+m)x^2 - (1+n)y^2 = 2f\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)};$$

& ensuite

$$\left. \begin{array}{l} (a^2 - f^2)^2 \\ - 2(a^2 - f^2)m \end{array} \right\} x^2 \quad \left. \begin{array}{l} - 2(a^2 - f^2) \\ - 2(a^2 + f^2)n \end{array} \right\} y^2 + (1+m)^2 x^4 \quad \left. \right\} = 0;$$

$$+ 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2y^4;$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{array}{l} \frac{aa - ff + n(aa + ff) - (1+m)(1+n)xx}{(1+n)^2} \pm \\ \frac{2f}{(1+n)^2} \sqrt{(n(1+n)a^2 - nf^2 + (m-n)(1+n)x^2)} \end{array} \right\} = y'$$

&

$$\left. \begin{aligned} & \frac{aa - ff + m(aa + ff) - (1+m)(1+n)yy}{(1+m)^2} \pm \\ & \frac{2f}{(1+m)^2} \sqrt{(m(1+m)a^2 - mf^2 + (n-m)(1+m)y^2)} \end{aligned} \right\} = x^2$$

146. Pour que l'équation trouvée ait des facteurs, il faut donc ou que $ff = (1+n)aa$ ou $ff = (1+m)aa$. Dans le premier cas, on a :

$$yy = \frac{naa - (1+m)xx}{1+n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}};$$

d'où il suit que, si m est plus petite que n , il est nécessaire que $x = 0$, & que $y = \pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}}$, & $z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$. Il y a donc deux points de contact également distans de part & d'autre de l'axe du cône; mais si m est plus grande que n , on doit prendre l'autre équation :

$$xx = \frac{maa - (1+n)yy}{1+m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}},$$

qui ne peut être réelle, à moins que y ne soit $= 0$; alors $x = \pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$ & $z = \frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$. Il y aura dans ce cas deux autres points d'attouchement; car le contact aura lieu dans la partie du cône où il est le plus applati. On pourra juger d'une manière semblable de l'existence des points de contact dans les autres circonstances.

Pl. XVI. Fig. 149. Il y a une manière beaucoup plus facile de déterminer les plans tangens des surfaces, qu'on peut déduire de la méthode que nous avons donnée plus haut pour trouver les tangentes des lignes courbes. Supposons que la nature de la surface, dont nous cherchons les plans tangens soit exprimée par une équation entre les trois coordonnées $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, & qu'il s'agisse de trouver la position du plan qui touche la surface au point M . Nous observons d'abord que, si la surface est coupée par un plan quelconque qui passe par le

le point M , la tangente en ce point de la section qui en résulte, sera située dans le plan tangent. C'est pourquoi, si nous trouvons au point M les tangentes de deux de ces sections, le plan formé par ces deux droites devra toucher la surface même au point M .

148. Concevons d'abord que la surface soit coupée par un plan perpendiculaire au plan APQ , suivant la droite QS parallèle à l'axe AP ; qu'ensuite on ait fait de même par le point M une section pareillement perpendiculaire au plan APQ , mais suivant la droite QP perpendiculaire à l'axe AP ; ou bien, imaginons la première section perpendiculaire à l'axe AB , & la seconde perpendiculaire à l'axe AP . Supposons que la courbe EM soit la première section dont on doit chercher la tangente MS qui rencontre la droite QS au point S , ce qui donne QS pour la soutangente; que l'autre section soit la ligne courbe FM , dont la tangente est la droite MT , & la soutangente QT . Ces lignes étant trouvées, le plan SMT touchera la surface au point M . La droite ST qui joint les points S & T fera l'intersection du plan tangent avec le plan APQ ; & si on mène du point Q sur ST la perpendiculaire QR , on aura QR est à QM comme le sinus total est à la tangente de l'angle MRQ , qui marque l'inclinaison du plan tangent sur le plan APQ .

149. Supposons que par la méthode des tangentes, que nous avons donnée auparavant, on ait trouvé les soutangentes $QS = s$ & $QT = t$; on aura $PT = t - y$ & $PX = s - \frac{sy}{t}$; d'où l'on conclut $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. On connoit donc par là le point X , où la droite ST traverse l'axe AP ; & parce que l'angle $AXS = TSQ$, la tangente de cet angle sera $= \frac{t}{s}$; ce qui fait connoître la position de l'intersection du plan touchant avec le plan APQ . Ensuite, à cause de $ST = \sqrt{(s^2 + t^2)}$, on aura $QR = \frac{st}{\sqrt{(s^2 + t^2)}}$; & si on divise QM par cette ligne, on trouvera la tangente de l'angle d'in-

clinaison MR $Q = \frac{z\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Si, après cela, on mène la perpendiculaire MN sur MR , elle sera perpendiculaire en même temps, & au plan tangent, & à la surface au point M . Sa position se conclut donc de la valeur de $QN = \frac{z\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Si on abaisse du point N sur l'axe AP la perpendiculaire NV , à cause que l'angle $QNV = QST$, on aura $PV = \frac{zz}{s} = QW$ & $NW = \frac{zz}{t}$. Par conséquent, si on fixe de cette manière la position du point N sur le plan APQ , la droite NM sera perpendiculaire à la surface.

150. On a enseigné ci-dessus comment on peut, par le moyen des projections, trouver l'intersection de deux surfaces. Cherchons à présent de quel ordre doit être la projection par rapport à celui des surfaces. D'abord deux surfaces du premier ordre, ou planes, donnent pour leur intersection & pour la projection de celle-ci une ligne du premier ordre; nous avons vu ensuite que cette projection n'alloit pas au-dessus du second ordre, lorsqu'une surface étoit du premier ordre, & l'autre du second. De même il est clair que, si une surface est du troisième ordre, & l'autre du premier, la projection ne passera pas le troisième degré, & ainsi de suite. Mais, si les deux surfaces qui se coupent sont du second ordre, la projection de l'intersection sera ou du quatrième ordre, ou d'un ordre inférieur; & en général, si l'une des surfaces est de l'ordre m & l'autre de l'ordre n , la projection ne se rapportera jamais à un ordre plus élevé que celui qui est indiqué par le nombre mn .

151. Quand ni l'une ni l'autre des surfaces, qui se coupent, n'est plane, le plus souvent leur commune section est une ligne courbe qui n'est pas située dans un même plan. Cependant, il peut se faire que la section soit en entier dans le même plan; cela arrivera, si les deux équations des surfaces prises ensemble renferment une équation de cette forme $az + \epsilon y + \gamma x = f$. Pour savoir quand cette circonstance aura lieu, supposons qu'avec les deux équations proposées les deux variables z & y soient déterminées au moyen de la troisième x ; que z de-

vienne $= P \& y = Q$, P & Q étant des fonctions de x . Il faudra voir s'il y a un nombre tel que toutes les puissances de x disparaissent dans $P + nQ$, excepté la plus basse x & les termes constans. Si cela arrive, & qu'on ait $P + nQ = mx + k$, la section sera dans un même plan, & ce plan sera représenté par l'équation $z + ny = mx + k$.

152. Soient proposées, par exemple, les deux surfaces suivantes du second ordre, dont la première est celle du cône droit $zz = xx + yy$, & dont la seconde est la surface elliptico-hyperbolique du second genre $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Comme on en conclut $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, on aura $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ & $z = x + a$. Cette dernière équation fait tout de suite voir que la section entière est située dans un même plan, dont la position sera déterminée par l'équation $z = x + a$. On pourra donc résoudre de cette manière un grand nombre de questions qui tiennent à la nature des surfaces. Quant à celles dont la solution échappe à la méthode que nous venons d'expliquer ici, elles supposent la connoissance de l'analyse des infinis, à l'étude de laquelle ce qu'on a exposé dans les deux livres qui précèdent, doit préparer la voie & servir d'introduction.

FIN DU LIVRE SECOND.

NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENTS,

Sur quelques endroits du second Livre de l'Introduction à l'Analyse infinitésimale.

C H A P I T R E I X.

ART. 226. On pourroit craindre peut-être que l'équation

$$y (ay - \epsilon x) (\gamma y - \delta x) + \epsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + i = 0,$$

dans laquelle le terme x^2 manque, ne fût pas aussi étendue que l'équation la plus générale du même degré. Pour ôter toute inquiétude à cet égard, il suffira de faire voir comment l'équation la plus générale peut être ramenée à la forme dont il s'agit. Soit l'équation la plus générale du troisième degré entre deux variables, ζ & x ;

$$\zeta^3 + ax\zeta^2 + bx^2\zeta + cx^3 + d\zeta^2 + ex\zeta + fx^2 + g\zeta + hx + i = 0;$$

le premier membre $\zeta^3 + ax\zeta^2 + bx^2\zeta + cx^3$ étant d'un degré impair, renfermera au moins un facteur simple réel. Soit $\zeta - a'x$ ce facteur, le premier membre pourra donc être représenté par $(\zeta - a'x)(\zeta^2 + b'x\zeta + c'x^2)$, $\zeta^2 + b'x\zeta + c'x^2$ étant le produit des deux autres facteurs. Je fais $\zeta - a'x = t$; en substituant, l'équation proposée se changera en une autre, qui contiendra t^3 , t^2x , tx^2 , t^2 , tx , x^2 , t , x , & i . (J'ometts ici les coefficients des différens termes, dont la considération est à présent inutile pour mon objet.) Pour faire disparaître le terme, qui renferme x^2 , je fais $t + s = y$, s étant supposée le coefficient de x^2 , & en mettant à la place de t sa valeur $y - s$, on arrivera à une équation, qui ne contiendra plus de xx , & dans laquelle y sera un facteur commun à tous les termes du premier membre. L'équation la plus générale du troisième degré, dans le cas dont il s'agit ici, pourra donc être ramenée à la forme $y (ay - \epsilon x) (\gamma y - \delta x) + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x + \theta y + i = 0$.

Il ne fera pas plus difficile de transformer les équations générales, qui représentent les différentes espèces de courbes d'un ordre quelconque. Si l'on veut, par exemple, transformer & simplifier l'équation

$$au^3 + bt^2 + \gamma tu + \delta u^2 + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

qui appartient au quatrième cas des lignes du troisième ordre, on fera disparaître d'abord le terme u^2 , en faisant $u + \frac{\delta}{3a} = y$, on aura une équation, qui contiendra les termes suivans y^3 , y , yt , t^2 , t avec une constante. Au moyen des termes t^2 & t , on fera disparaître le second par la méthode ordinaire, en égalant t à x — la moitié du coefficient de t . En substituant à t sa valeur en x , il ne restera plus que les termes y^3 , xy , y & d , comme on le trouve pag. 120, art. 237, pour la quatorzième espèce.

C H A P I T R E X.

ART. 255, 256 & 257. Pour que les commençans soient à portée de vérifier sans peine quelles sont les espèces de lignes du troisième ordre, qui ont des diamètres ou qui n'en ont pas, j'ai cru qu'il leur seroit avantageux d'avoir sous les yeux l'espèce de tableau qui suit :

Equation générale pour toutes les espèces.

$$ay^3 + \epsilon y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \zeta y x + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Equations de condition pour que les courbes aient un diamètre.

$$1. \quad an^3 - \epsilon m n^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3 = 0.$$

$$2. \quad \iota = \frac{\theta n}{m} + \frac{\varepsilon n^2 - \zeta m n + \eta m^2}{m(\varepsilon n^2 - 2\gamma m n + 3\delta m^2)^2} \left((\varepsilon\gamma - \epsilon\zeta)n^3 + (\gamma\zeta + 2\epsilon\eta - 3\epsilon\delta)mn^2 - 3\gamma\eta m^2 n + 3\delta\eta m^3 \right)$$

Les équations correspondantes pour chaque espèce en particulier, seront :

$$I^{\text{e}}. \text{ Espèce. } l^2 y^3 - 2ky^2 x + y x^2 + ay^2 + cy + bx + d = 0.$$

$$1. \quad l^2 n^3 + 2k m n^2 + m^2 n = 0; \text{ ou } n(l^2 n^2 + 2k m n + m^2) = 0.$$

$$2. \quad b = \frac{c n}{m} + \frac{n}{m} \cdot \frac{a^2 n^4}{(-2k n^2 - 2m n)^2}, \text{ ou } b = \frac{n}{m} \left(c + \frac{a^2 n^2}{4(k n + m)^2} \right).$$

La supposition de $n=0$ satisfait à la première équation ; & non à la seconde. En faisant $l^2 n^2 + 2k m n + m^2 = 0$, on en conclut $\frac{m}{n} = -k \pm \sqrt{k^2 - l^2}$; équation impossible, puisque dans la première espèce $k^2 < l^2$.

$$II. \text{ Espèce. } l^2 y^3 - 2ky^2 x + y x^2 + ay^2 + cy + d = 0.$$

$$1. \quad \dots\dots\dots n(l^2 n^2 + 2k m n + m^2) = 0.$$

$$2. \quad \dots\dots\dots 0 = \frac{n}{m} \left(c + \frac{a^2 n^2}{4(k n + m)^2} \right).$$

La supposition de $n=0$ satisfait aux deux équations, & c'est la seule qu'on puisse faire ; mais à cause de $y = n u$, ou (Fig. XLV) $OP = n \cdot OQ$, on a dans ce cas $OQP = 0$. Donc les ordonnées u sont parallèles aux abscisses x .

Equation générale pour toutes les espèces.

$$ay^3 + \epsilon y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \epsilon y^3 + \zeta y x + n x^2 + \theta y + \iota x + u = 0.$$

III. Espèce. $kl y^3 - (k+l)y^2 x + y x^2 + ay^2 + cy + bx + d = 0.$

1. $kl n^3 + (k+l)mn^2 + m^2 n = 0$, ou $n(kln^2 + (k+l)mn + m^2) = 0.$

2. $b = \frac{cn}{m} + \frac{n}{m^2} \frac{a^2 n^4}{(-n(k+l) - 2mn)^2}$, ou $b = \frac{n}{m} \left(c + \frac{a^2 n^2}{(k+l+2m)^2} \right).$

La supposition de $n=0$ satisfait à la première équation, & non à la seconde. En égalant à zéro le facteur double, on trouvera $\frac{m}{n} = -l$ & $= -k$; & en substituant, $b = -\frac{1}{l} \left(c + \frac{a^2}{(k-l)^2} \right)$ & $b = -\frac{1}{k} \left(c + \frac{a^2}{(k-l)^2} \right)$, ou bien $bl + c + \frac{a^2}{(k-l)^2} = 0$, & $bk + c + \frac{a^2}{(k-l)^2} = 0$; équations qui ne peuvent avoir lieu pour la troisième espèce.

IV. Espèce. $kl y^3 - (k+l)y^2 x + y x^2 + ay^2 + cy + d = 0.$

1. $n(kln^2 + (k+l)mn + m^2) = 0.$

2. $0 = \frac{n}{m} \left(c + \frac{a^2 n^2}{(n(k+l) + 2m)^2} \right).$

La supposition de $n=0$ satisfait aux deux équations, & alors les ordonnées u sont parallèles aux abscisses x . Quant à l'autre facteur, il conduiroit à l'équation $c + \frac{a^2}{(k-l)^2} = 0$, qui est impossible pour cette espèce.

V. Espèce. $kl y^3 - (k+l)y^2 x + y x^2 + ay^2 + \frac{-a^2 y}{(k-l)^2} + d = 0.$

1. $n(kln^2 + (k+l)mn + m^2) = 0.$

2. $0 = \frac{n}{m} \left(\frac{-a^2}{(k-l)^2} + \frac{a^2 n^2}{(n(k+l) + 2m)^2} \right).$

En faisant $n=0$, ou $= \frac{-m}{k}$ ou $\frac{-m}{l}$, on satisfait toujours

aux deux équations de condition, puisque k n'est pas $= l$. D'ailleurs il est visible qu'à cause de $n = 0$, les ordonnées sont parallèles à l'asymptote sur laquelle les x sont comptés; & comme la forme à laquelle l'équation générale a été ramenée pour cette espèce, ne convient pas plus à l'une des asymptotes qu'à chacune des deux autres, il s'ensuit que les ordonnées coupées également par les diamètres sont parallèles à chacune des asymptotes.

Equation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \zeta y x + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

VI. Espèce. $-ky^3 + y^2 x \qquad + ax^2 + cy + bx + d = 0.$

1. $n^2 (nk + m) = 0.$

2. $b = \frac{n}{m} c + \frac{2a^2 n^2}{n^2}.$

La supposition de $n = 0$ ne peut satisfaire, car a ne peut être $= 0$; ni celle de $\frac{n}{m} = -\frac{1}{k}$, puisqu'il en résulteroit $2k^3 a^2 - k b - c = 0$, équation impossible pour cette espèce.

VII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x \qquad + ax^2 + k(2k^2 a^2 - b)y + bx + d = 0.$

1. $n^2 (nk + m) = 0.$

2. $b = \frac{nk}{m} (2k^2 a^2 - b) + \frac{2a^2 m^2}{n^2}.$

Ici $n = 0$ ne satisfait pas plus que dans la sixième espèce, & pour la même raison; mais $\frac{n}{m} = -\frac{1}{k}$ satisfait, puisqu'il en résulte $b = b$.

VIII.

Équation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \epsilon y^2 + \zeta y x + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

VIII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x + cy + b^2 x + d = 0.$

1. $-kn^3 - mn^2 = 0$, ou $n^2(nk + m) = 0.$

2. $\dots\dots\dots b^2 = \frac{cn}{m} + \frac{2 \cdot 0^2 \cdot n^2}{n^2}.$

La supposition de $n = 0$ peut satisfaire, parce que la seconde équation de condition devient $b^2 = 0 + \frac{0}{0}$; équation possible, à cause de la quantité indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais la supposition de $nk + m = 0$ ne satisfait pas, parce qu'elle donneroit $c = -kb^2$, équation impossible pour cette espèce.

IX. Espèce: $-ky^3 + y^2 x - kb^2 y + b^2 x + d = 0.$

1. $\dots\dots\dots n^2(nk + m) = 0.$

2. $\dots\dots\dots b^2 = -kb^2 \frac{n}{m} + 2 \cdot 0^2 \frac{m^2}{n^2}.$

La supposition de $n = 0$ satisfait aux deux équations par la même raison que pour la huitième espèce; mais, de plus, $nk + m = 0$ satisfait aussi, puisqu'on en conclut $b^2 = b^2$.

X. Espèce. $-ky^3 + y^2 x + cy - b^2 x + d = 0.$

L'équation qui convient à cette espèce étant la même que celle qui appartient à la huitième, à l'exception du signe de b^2 , qui est ici négatif, les résultats seront les mêmes pour la détermination des diamètres.

XI. Espèce. $-ky^3 + y^2 x + kb^2 y - b^2 x + d = 0.$

Ce que je viens de dire de la dixième espèce par rapport à la huitième, s'applique à la onzième relativement à la neuvième.

Équation générale pour toutes les espèces.

$$ay^3 + \xi y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \epsilon y^2 + \zeta y x + \eta x + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

XII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x$ $+cy + d = 0.$

1. $n^2(nk + m) = 0.$

2. $0 = c \cdot \frac{n}{m} + \frac{2 \cdot 0^2 m^2}{n^2}.$

La supposition de $n = 0$ satisfait, parce que $\frac{0}{0}$ étant indéterminé peut être $= 0$; mais celle de $\frac{m}{n} = -k$ ne peut satisfaire, puisque c n'est pas $= 0$.

XIII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x$ $+d = 0.$

1. $n^2(nk + m) = 0.$

2. $0 = 0 \cdot \frac{n}{m} + \frac{2 \cdot 0^2 m^2}{n^2}.$

On peut faire ici $n = 0$, & $\frac{n}{m} = -k$. L'une & l'autre hypothèse satisfont.

XIV. Espèce: y^3 $+bxy + ax^2 + cy + d = 0.$

Cette espèce ne peut avoir de diamètre que dans le cas de $n = 0$, comme il sera facile de s'en convaincre en transformant directement l'équation qui lui appartient, pour la rendre susceptible d'un diamètre. La transformée, dans la supposition de $n = 0$, deviendra $am^2u^2 - 2amtu + d = 0$; ce qui donne deux valeurs pour u .

XV. & XVI. Quant aux équations qui représentent les courbes de la quinzième & de la seizième espèce, elles se changent, par la supposition de $n = 0$, en équations linéaires. Donc elles ne peuvent avoir de diamètre.

CHAPITRE XIII.

ART. 300. Pour connoître la nature & le nombre des points multiples qu'une courbe d'un degré donné peut avoir, on s'aidera des principes suivans : 1°. Une courbe de l'ordre n est déterminée, lorsqu'elle est assujétie à passer par un nombre $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ — 1 points. 2°. Une courbe de l'ordre n ne peut rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $m n$ points. La démonstration de cette proposition se trouvera ci-après page 421.

Il suit de là qu'une courbe du second ordre, par exemple, pouvant toujours passer par cinq points donnés, & ne pouvant rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $2 m$ points, il est impossible qu'une courbe de l'ordre m ait cinq points, dont les degrés de multiplicité fassent ensemble plus de $2 m$ points. Ainsi une courbe du quatrième ordre ne peut avoir quatre points doubles; car la ligne du second ordre, qui passeroit par ces quatre points doubles, & par un cinquième point simple de la courbe du quatrième ordre, la rencontreroit neuf fois; ce qui est impossible, puisqu'elle ne peut la rencontrer que 2×4 ou 8 fois.

Par la même raison, une courbe du cinquième ordre ne pourroit, avec un point triple, avoir plus de trois points doubles. On raisonnera d'une manière semblable pour les courbes d'ordres supérieurs.

De ce qu'on peut toujours faire passer une ligne du troisième ordre par neuf points, & qu'une courbe de cet ordre ne peut rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $3 m$ points, concluons qu'une courbe de l'ordre m ne peut avoir neuf points dont les degrés de multiplicité fassent ensemble un nombre plus grand que $3 m$. Ainsi une courbe du cinquième ordre ne pourroit avoir plus de six points doubles; une courbe du sixième ordre, qui ne peut avoir plus d'un point quadruple, ne pourroit avoir avec ce point quadruple plus de six points doubles, ni avec deux points triples plus

de cinq points doubles, ni même avec un point triple plus de sept points doubles. Des conclusions analogues auront lieu pour une ligne du quatrième ordre, qu'on peut faire passer par quatorze points, & qui ne peut rencontrer une courbe de l'ordre m qu'en $4m$ points; & pour une ligne du cinquième ordre, qui, pouvant passer par vingt points, ne pourroit rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $5m$ points, &c.

Il n'entre point dans mon plan de donner sur cet objet plus de détails. Ceux qui en voudront davantage pourront consulter l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, par Cramer; ouvrage intéressant par sa grande clarté & par les exemples qui s'y trouvent multipliés. Je conseille même à ceux qui voudront approfondir la théorie des courbes, d'en joindre la lecture à celle de l'ouvrage dont je donne ici la traduction.

C H A P I T R E X I V .

C E chapitre m'a paru avoir besoin de quelques éclaircissémens. Pour procéder avec ordre, je les ferai précéder de la définition des arcs osculateurs. Deux arcs très-petits sont dits osculateurs l'un à l'égard de l'autre, lorsque, dans toute leur étendue, le rapport de la différence des appliquées correspondantes à chaque abscisse commune aux deux arcs, est à l'égard des appliquées mêmes, plus petit qu'aucune quantité donnée; &, dans ce cas, les deux arcs sont censés avoir la même courbure. Mais pour que l'osculation ait véritablement lieu, il ne suffit pas que les appliquées qui répondent à l'extrémité de la très-petite abscisse qu'on considère aient la propriété que je viens d'énoncer, il faut de plus que cette propriété s'étende à toutes les autres appliquées comprises entre l'origine & l'extrémité de l'abscisse en question. Cette définition adoptée, il est aisé de voir que la parabole ordinaire ou *Apollonienne*, dont le paramètre seroit $= 2a$, est la courbe osculatrice d'un cercle qui auroit a pour rayon, ou réciproquement. Car soit x la plus grande abscisse commune aux deux petits arcs, & y, z les appliquées correspondantes du

cercle & de la parabole; on aura, par la propriété du cercle, $y^2 = 2ax - x^2$, & par celle de la parabole, $\zeta^2 = 2ax$.

Donc $\zeta^2 = y^2 + x^2$, & $\zeta = y + \frac{x^2}{2y}$ (en négligeant les termes suivans, qui sont nuls par rapport à ceux-ci). Donc $\zeta - y = \frac{x^2}{2y}$; mais l'appliquée y & par conséquent l'arc étant

infinitement petits, $x = \frac{1}{\infty^2}$, & $\zeta - y = \frac{x^2}{2y} = \frac{1}{\infty^3}$. Donc la différence des appliquées est à ces appliquées mêmes dans un moindre rapport qu'à aucune quantité assignable; & comme la même démonstration s'applique à tous les points intermédiaires de l'abscisse x , il s'enfuit que les deux petits arcs circulaires & paraboliques sont, suivant la définition que je viens de donner, respectivement osculateurs l'un à l'égard de l'autre.

Soit à présent une parabole d'un genre supérieur, qui ait pour équation $a^{n-m}x^m = y^n$; je dis que si $\frac{n}{m} > 2$, cette parabole ne peut avoir à son sommet pour courbe osculatrice la parabole ordinaire, quand même on supposeroit à celle-ci un paramètre infini. En effet, l'équation précédente donne

$$a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}} = y; \text{ \& , en quarrant, } a^{\frac{2n-2m}{n}} x^{\frac{2m}{n}} = y^2, \text{ ou,}$$

$$a^{\frac{2n-2m}{n}} x^{\frac{2m}{n}} = y^2. \text{ Il faudroit donc, pour que l'appliquée } \zeta \text{ de}$$

la parabole ordinaire correspondante à la même abscisse x fût

$$= y, \text{ que le paramètre de celle-ci } = \frac{a^{\frac{2n-2m}{n}}}{x^{\frac{2m}{n}}} = \infty, \text{ à cause}$$

de $n > 2m$. Mais, quoique pour ce point les appliquées des deux paraboles se confondissent, & que par conséquent leur différence fût nulle par rapport à elles-mêmes, on auroit tort

cependant d'en conclure que la même propriété a lieu pour toutes les autres appliquées qui répondent aux abscisses plus petites. Car soit $x' < x$ une autre abscisse commune aux deux courbes, & y' , ζ' les appliquées qui y répondent, on

aura, par la propriété de la première parabole, $a \frac{n-m}{n} x'^{\frac{m}{n}} = y'$;

&, par la propriété de la parabole conique, $\frac{a \frac{n-m}{n}}{x^{\frac{n-2m}{2n}}} x'^{\frac{1}{2}} = \zeta'$.

Donc $y' : \zeta' :: x'^{\frac{m}{n}} : \frac{x'^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{n-2m}{2n}}} :: x^{\frac{n-2m}{2n}} : x'^{\frac{n-2m}{2n}}$; mais $x : x'$

peut être dans un rapport d'inégalité si grand qu'on voudra. Donc aussi $y' : \zeta'$ peut être dans un tel rapport. Donc la différence de ζ' à y' ne peut être regardée comme nulle à l'égard de ζ' & de y' . Donc les deux arcs ne seront pas osculateurs l'un de l'autre, & ne peuvent par conséquent être considérés comme ayant la même courbure.

Si on suppose à présent $\frac{n}{m} < 2$, mais > 1 , la parabole représentée par l'équation $a^{n-m} x^m = y^n$ ne pourra non plus avoir à son sommet la parabole ordinaire pour courbe osculatrice, quand même on supposeroit à celle-ci un paramètre

$= 0$; car on trouvera, comme ci-dessus, $\frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a \frac{n}{n}} x = y^2$. Ainsi

pour que l'appliquée ζ de la parabole ordinaire se confondît

avec y , il faudroit que celle-ci eût un paramètre $= \frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a \frac{n}{n}} = 0$,

à cause de $n < 2m$. Mais, pour une autre abscisse x' , on aura, en désignant par y' & par ζ' les appliquées

correspondantes $a \frac{n-m}{n} x'^{\frac{m}{n}} = y'$ & $\frac{x^{\frac{2m-n}{2n}}}{\frac{m-n}{n}} x'^{\frac{1}{2}} = z'$. Donc,

$$y' : z' :: a \frac{n-m}{n} x'^{\frac{m}{n}} : \frac{x^{\frac{2m-n}{2n}}}{\frac{m-n}{n}} x'^{\frac{1}{2}} :: x'^{\frac{2m-n}{2n}} : x^{\frac{2m-n}{2n}}.$$

Mais ce dernier rapport peut être tel qu'on voudra. Donc aussi y' peut être à z' dans un rapport quelconque. Donc, dans ce dernier cas, supposât-on à la parabole vulgaire un paramètre = 0, les deux arcs ne seroient pas osculateurs l'un de l'autre.

Il suit de ce qui précède, qu'aucune parabole, si ce n'est la parabole conique, ne peut avoir à son sommet le cercle pour courbe osculatrice, quand même on lui supposeroit un diamètre infiniment grand ou infiniment petit. La courbure de ces sortes de courbes à leur sommet n'est donc nullement comparable à celle du cercle. Il y a plus; c'est que les courbures de ces différentes courbes à leur sommet sont d'un genre tout-à-fait différent. Par exemple, prenons les deux équations

$$a^{n-m} x^m = y^n, \quad b^{k-l} x^l = y^k,$$

dans lesquelles je suppose $\frac{m}{n} < \frac{l}{k}$. Les paraboles qu'elles représentent ne peuvent être osculatrices l'une à l'égard de l'autre, quand même on supposeroit le paramètre a de la première infiniment petit, ou le paramètre b de la seconde infiniment grand. Soit y une appliquée commune aux deux courbes, & x l'abscisse, on aura $a^{n-m} x^m = y^n$, & $b^{k-l} x^l = y^k$.

Donc $a \frac{n-m}{n} x^{\frac{m}{n}} = b \frac{k-l}{k} x^{\frac{l}{k}}$, ou $\frac{a}{b} \frac{n-m}{k} = x^{\frac{l}{k} - \frac{m}{n}}$; équation dans

laquelle, si on suppose x infiniment petit, a doit être infini-

ment petit ou b infiniment grand, à cause de $\frac{l}{k} > \frac{m}{n}$. Mais il n'y aura pas même dans cette hypothèse une véritable osculation; car si on suppose deux appliquées y' & z' correspondantes à la même abscisse x' , on aura les deux équations

$$a^{n-m} x'^m = y'^n, \text{ \& } b^{k-l} x'^l = z'^k.$$

Donc

$$y' : z' :: a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{l-l}{k}} x'^{\frac{l}{k}}, \text{ ou } :: \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{l-l}{k}}} : x'^{\frac{l}{k} - \frac{m}{n}};$$

$$\text{mais } \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{k-l}{k}}} = x'^{\frac{l}{k} - \frac{m}{n}}; \text{ donc } y' : z' :: x'^{\frac{l}{k} - \frac{m}{n}} : x'^{\frac{l}{k} - \frac{m}{n}};$$

rapport qui peut être tel qu'on voudra. Donc $y' - z'$, ou la différence des appliquées, ne peut pas être regardée comme nulle à l'égard des appliquées mêmes; donc les arcs ne sont pas osculateurs à l'égard l'un de l'autre, & ne peuvent être considérés par conséquent comme ayant la même courbure.

Puisque le sommet des différentes espèces de paraboles offre dans sa courbure une si grande différence, il est com- mode & naturel d'estimer la courbure des différentes espèces de courbes par celle des paraboles. C'est à quoi on est parvenu en transformant l'équation de chaque courbe, en rapportant à un nouvel axe les coordonnées, comme on l'a vu art. 105, Fig. 55. L'équation résultante est, comme on fait,

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2, \text{ \&c.}$$

& on a vu comment, en rapportant cette dernière équation à un axe pris sur la normale, on parvenoit à trouver, suivant la variété des conditions de l'équation, l'espèce de parabole osculatrice qui convenoit à la courbe; mais il ne faut pas croire que ces paraboles de différente espèce que l'on trouve par

par la méthode indiquée dans ce chapitre, prouvent l'existence réelle de la courbe exprimée par l'équation primitive, & en fassent connoître les branches; il faut seulement conclure de ces résultats, que, si la courbe existe, elle a pour courbe osculatrice la parabole trouvée. Car il peut arriver que la courbe & sa branche soient imaginaires en ce point; c'est le cas d'un point conjugué. On peut rendre cela sensible par un exemple simple. Supposons qu'on soit arrivé à cette équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} + \frac{s^6}{a^4} = 0.$$

En suivant la méthode enseignée, on négligerait le terme $\frac{s^6}{a^4}$ qui dispartoit devant les autres; & il resteroit l'équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} = 0,$$

qui renfermant deux racines réelles égales, favoir, $r - \frac{s^2}{a} = 0$, sembleroit annoncer dans la courbe deux branches qui seroient embrassées par deux paraboles ordinaires qui se confondroient ici. Mais si on en concluoit l'existence réelle d'un point double, on se tromperoit grossièrement, puisqu'il n'y a réellement dans ce cas qu'un double point conjugué; ainsi que le fait voir la résolution de l'équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} + \frac{s^6}{a^4} = 0,$$

qui donne $r = \frac{s^2}{a} \pm \frac{s^3}{a^2} \sqrt{-1}$, quantité toujours imaginaire, excepté dans le cas de r & $s = 0$. La cause du jugement précipité qu'on auroit pu porter en cette occasion, & qui auroit induit en erreur, vient de ce qu'on n'auroit pas eu égard au dernier terme, qui, quoiqu'infiniment petit par rapport aux autres, ne peut cependant ici être négligé, puisqu'il rend la courbe imaginaire en ce point. L'exemple suivant n'est pas moins propre à montrer combien on doit mettre

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome II. 3Ggg

d'attention & de discernement dans l'examen d'une expression algébrique. Soit proposée l'équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} + \frac{s^5}{a^3} = 0.$$

En négligeant, comme à l'ordinaire, le dernier terme, on trouveroit pour courbes osculatrices deux paraboles Apolloniennes, qui se réduiroient à une seule. On fait qu'il y a, dans ces courbes, deux branches qui répondent à une même abscisse; l'une située d'un côté, & l'autre située du côté opposé. Il sembleroit donc au premier apperçu, que la courbe proposée auroit quatre branches, ou au moins deux, situées de cette manière. On auroit tort cependant de le croire; car si on résoud l'équation, on trouvera $r = \frac{s^2}{a} \pm \frac{s^2\sqrt{-s}}{a\sqrt{a}}$; ce qui nous apprend que, du côté des appliquées positives, la courbe n'a point de branches, & qu'au contraire elle en a deux du côté des abscisses négatives, qui forment une figure telle qu'on la voit représentée Fig. 67, comme il est facile de s'en assurer en construisant l'équation $r = \frac{s^2}{a} \pm \frac{s^2\sqrt{s}}{a\sqrt{a}}$. Cet exemple suffit pour démontrer invinciblement l'existence des points de rebroussement à bec, ou de la seconde espèce, que l'Hospital avoit déjà reconnue, que de Gua avoit contestée depuis, & que d'Alembert a démontrée le premier. Il paroît qu'à l'époque où Euler a composé cet ouvrage, la question n'étoit pas encore suffisamment éclaircie; mais il publia peu de temps après un mémoire qui se trouve parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1749, où il prouve d'une manière incontestable que l'existence de ces sortes de points ne pouvoit plus être révoquée en doute.

Au reste, après avoir observé que chaque parabole d'un genre supérieur avoit à son sommet une courbure qui lui étoit propre, & qui ne pouvoit être comparée à celle de la parabole conique, il est naturel de chercher quelle est la nature de la courbure de ces mêmes paraboles dans tout autre point. Je donne, pour abrégé, à l'équation générale des paraboles

la forme suivante $a^{n-1}p = q^n$, n étant > 1 ; si on prend les coordonnées $p + t$, & $q + u$, l'équation deviendra

$$a^{n-1}(p + t) = (q + u)^n,$$

ou, en développant le binôme,

$$a^{n-1}p + a^{n-1}t = q^n + nq^{n-1}u + n \cdot \frac{n-1}{2} q^{n-2}u^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} q^{n-3}u^3 + \&c.$$

Si on retranche cette dernière équation de la première, il restera

$$a^{n-1}t = nq^{n-1}u + n \cdot \frac{n-1}{2} q^{n-2}u^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} q^{n-3}u^3 + \&c.$$

ou

$$a^{n-1}t - nq^{n-1}u - n \cdot \frac{n-1}{2} q^{n-2}u^2 - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} q^{n-3}u^3 - \&c. = 0.$$

Comme u^3 & les puissances supérieures de u disparaissent devant u^2 , lorsque t & u sont supposés infiniment petits, l'équation subsistera entre les termes

$$a^{n-1}t - nq^{n-1}u - n \cdot \frac{n-1}{2} q^{n-2}u^2 = 0.$$

Mais comme l'équation de la parabole donne

$$q^{n-1} = \frac{a^{n-1}p}{q}, \quad \& \quad q^{n-2} = \frac{a^{n-1}p}{q^2},$$

la dernière deviendra

$$t - \frac{np u}{q} - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{p u^2}{q^2} = 0, \quad \text{ou} \quad q t - n p u - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{p u^2}{q} = 0.$$

Pour transporter l'équation aux abscisses prises sur la perpendiculaire à la tangente, il faudra faire (art. 306),

$$t = \frac{-qr - np \cdot s}{\sqrt{(q^2 + n^2 p^2)}}, \quad \& \quad u = \frac{-qs + npr}{\sqrt{(q^2 + n^2 p^2)}},$$

(r étant infiniment plus petite que s); ce qui donnera ,

$$-r\sqrt{(q^2+n^2p^2)} - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{q^2s^2}{q^2+n^2p^2} = 0,$$

ou

$$s^2 = \frac{-r(q^2+n^2p^2)\sqrt{(q^2+n^2p^2)}}{n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot pq};$$

équation à la parabole ordinaire; d'où il s'enfuit que la courbure des paraboles supérieures dans tous ses points, excepté au sommet, est de même nature que celle de la parabole ordinaire, & qu'elle est par conséquent comparable à celle du cercle. Si on prend un point infiniment voisin du sommet, de sorte que p soit presque nul à l'égard de q , l'équation deviendra $s^2 = \frac{-2q^2r}{n \cdot (n-1)p}$. Si p est du même ordre que q^2 , comme dans la parabole conique, le paramètre de la parabole osculatrice fera fini; si p est infiniment petit à l'égard de q^2 , ce qui a lieu toutes les fois que $n > 2$, le paramètre de la parabole osculatrice deviendra infini. Mais si p est infini par rapport à q^2 , ce qui arrive lorsque $n < 2$, le paramètre de la parabole deviendra infiniment petit.

C H A P I T R E X X.

ON a vu, dans ce chapitre, qu'avec deux équations du second ordre, on pouvoit construire des équations du quatrième degré; qu'on pouvoit construire les équations du neuvième degré par les intersections de deux lignes du troisième ordre, & celles qui ne passent pas le seizième degré, par les intersections de deux lignes du quatrième: en un mot, que, par le moyen de deux courbes, dont l'une est de l'ordre m , & l'autre de l'ordre n , on pouvoit construire toutes les équations qui ne surpassent pas la puissance mn . Cela est fondé sur ce que deux courbes, dont l'une est de l'ordre m , & l'autre de l'ordre n , peuvent se couper en mn points, & jamais en plus

de points; ou, ce qui revient au même, sur ce que deux équations complètes, l'une du degré m , & l'autre du degré n , qui renferment deux inconnues x & y , étant données, si on élimine une de ces inconnues, l'équation finale, qui ne contiendra plus que l'autre inconnue, sera du degré $m n$. La démonstration générale de cette proposition se trouve dans plusieurs ouvrages, & je ne la donne ici que pour éviter au lecteur qui ne la connoîtroit pas, la peine de la chercher ailleurs.

Soient deux équations complètes en x & en y , l'une du degré m , & l'autre du degré n ; si on suppose la première résolue par rapport à x , elle fournira un nombre m de racines a, b, c, d , &c. qui seront chacune des fonctions de y ; si on substitue successivement ces valeurs de x dans la seconde équation, on aura un nombre m d'équations en y . Mais, comme l'équation finale doit évidemment renfermer toutes les racines que les m équations en y , qui résultent des substitutions successives de a, b, c, d , &c. pour x , peuvent fournir, elle doit donc avoir pour facteurs ces m équations. Elle aura donc pour un de ses termes $a^n. b^n. c^n. d^n$, &c. Or il est visible que la plus haute puissance de y se trouve dans ce terme; mais comme dans la première équation, le produit $a. b. c. d$, &c. exprime la quantité indépendante de x , il est clair que ce produit ne contient point de termes, dans lesquels y soit élevé à une puissance supérieure à m . Donc $a^n. b^n. c^n$, &c. ou $(a. b. c. d. \&c.)^n$, ne donnera point pour y une puissance supérieure à $m n$. Donc l'équation finale en y ne s'élèvera pas à un plus haut degré que celui qui est désigné par $m n$.

CHAPITRE DERNIER DES SURFACES.

IL resteroit à déterminer les rayons de courbure des surfaces courbes; mais après ce qui a été dit dans ce Traité, sur la nature de ces surfaces, & dans le chapitre XIV sur la courbure des lignes courbes, cette question ne peut plus présenter de difficulté réelle. Au reste, voici sur cela des

éclairciffemens tirés du Journal des féances de l'Ecole normale. Soient x, y & z les coordonnées d'un point quelconque: fi, dans l'équation de la surface, on met $x + x'$, à la place de x , $y + y'$ à la place de y , & $z + z'$ à la place de z , & qu'on retranche l'équation qui en résulte de l'équation primitive, tous les termes indépendans de x', y' & z' disparaîtront, & l'on aura une équation de cette forme :

$$z' = p x' + q y' + r x'^2 + s x' y' + t y'^2 + \&c;$$

p, q, r, s, t , &c. étant des fonctions connues des coordonnées x, y , & z , qui appartiennent au point que l'on considère. Mais l'équation générale d'un plan quelconque est

$$z = A + B x + C y.$$

Si on change dans cette équation z en $z + z'$, x en $x + x'$, & y en $y + y'$, on trouvera pour z' cette autre expression :

$$z' = B x' + C y'.$$

Comparant cette valeur de z' avec la première, on aura :

$$B = p; C = q.$$

Ainsi on aura les valeurs de A, B & C , & par conséquent la position d'un plan tangent à un point quelconque de la surface, au moyen des coordonnées de ce point. Rapportons à ce plan les coordonnées de la surface, que nous supposons toujours perpendiculaires entre elles, & fixons au point de contact l'origine des nouvelles coordonnées, en nommant x'', y'' les coordonnées dans le plan tangent, & z'' la coordonnée qui lui est perpendiculaire, & réduisant en série la valeur de z'' d'une manière analogue à ce qui a été pratiqué pour les lignes courbes, on arrivera à une valeur de z'' , qui fera de cette forme :

$$z'' = a x''^2 + b y''^2 + \&c;$$

car, par la nature du plan tangent, les termes multipliés par

les premières puissances de x'' & de y'' doivent disparaître; & d'ailleurs on peut choisir la position de l'axe des x'' , de manière que le terme $x''y''$ disparoisse; il est visible que a , b , &c. sont des fonctions connues des coordonnées x , y & z du point de contact. Si on imagine par ce point un plan perpendiculaire à la surface, la section qu'il formera aura pour coordonnées z'' & $\sqrt{x''^2 + y''^2}$; & si l'on désigne par R le rayon osculateur de cette section, on aura par la nature du cercle:

$$z'' = \frac{x''^2 + y''^2}{2R} + \text{\&c.}$$

Soit α l'angle que fait le plan coupant avec l'axe des x'' , on aura $y'' = x'' \text{ tang. } \alpha$; & les valeurs de z'' relatives à la section & au cercle osculateur, deviendront :

$$z'' = \frac{a \cdot (\text{cof. } \alpha)^2 + b (\text{fn. } \alpha)^2}{(\text{cof. } \alpha)^2} \cdot x''^2 + \text{\&c.} \quad \& \quad z'' = \frac{x''^2}{2R \cdot (\text{cof. } \alpha)^2};$$

d'où l'on tire, en égalant, les deux valeurs de z'' ,

$$2R = \frac{1}{a \cdot (\text{cof. } \alpha)^2 + b (\text{fn. } \alpha)^2}.$$

Si on suppose successivement $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$, on trouvera les rayons de courbure des sections faites par le plan qui passe par l'axe des x'' , & par celui des y'' ; & si on les nomme r & r' , on en conclura, pour le rayon de courbure R de toute autre section perpendiculaire à la surface :

$$R = \frac{r r'}{r' \cdot (\text{cof. } \alpha)^2 + r \cdot (\text{fn. } \alpha)^2}.$$

On voit par là qu'il suffit d'avoir les rayons de courbure des sections perpendiculaires à la surface, qui passent par l'axe des x'' & par l'axe des y'' , pour connoître le rayon de courbure de toute autre section formée par un plan perpendiculaire, qui feroit avec l'axe des x'' un angle quelconque α . On voit, de plus, que le rayon de courbure sera un *maximum* ou un

minimum, suivant que le plan coupant passera par l'axe des y' ou par celui des x'' , déterminés comme on vient de le dire ; parce qu'alors le dénominateur $r' (\cos. a)^2 + r (\sin. a)^2$, ou $r + (r' - r) \cos. a^2$, sera le plus petit ou le plus grand possible. Au reste, on comprendra facilement que, comme dans les lignes courbes il y a certaines irrégularités par rapport aux points doubles & multiples en général, il y en aura aussi de semblables dans les surfaces courbes. Mais mon objet n'est point ici d'entrer dans tous ces détails, pour lesquels le calcul différentiel est, sinon absolument nécessaire, au moins très-commode. Ceux qui seront curieux de connoître ce qui a été fait jusqu'ici sur les surfaces courbes & sur les courbes à double courbure, pourront consulter le *Traité du Calcul différentiel & du Calcul intégral de Lacroix*, ouvrage le plus complet dans son genre.

FIN DES NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENTS.

Fig. 1.

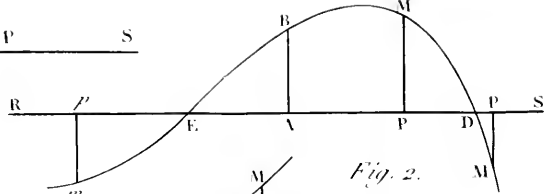
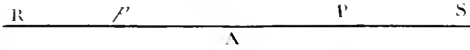


Fig. 3.

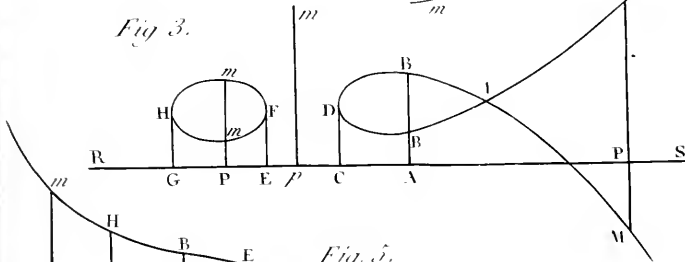


Fig. 2.

Fig. 5.

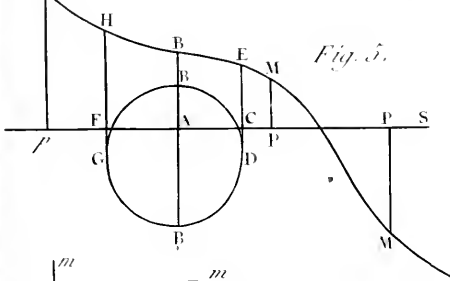


Fig. 4.

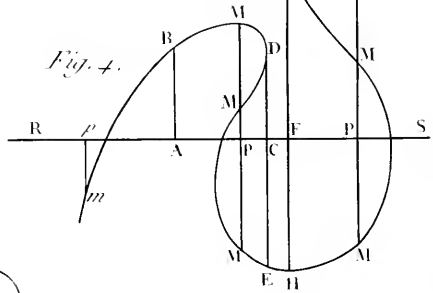


Fig. 6.

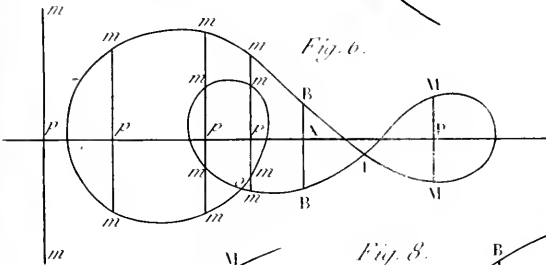


Fig. 8.

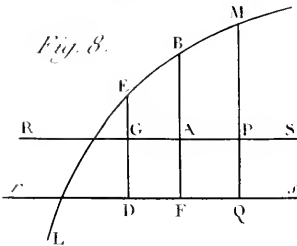


Fig. 7.

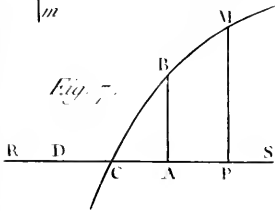
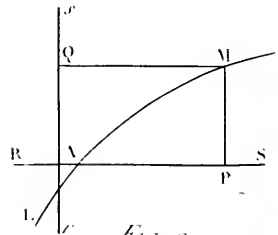
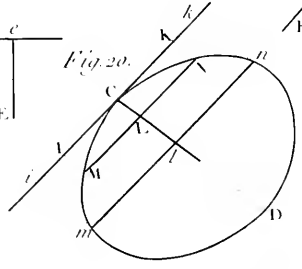
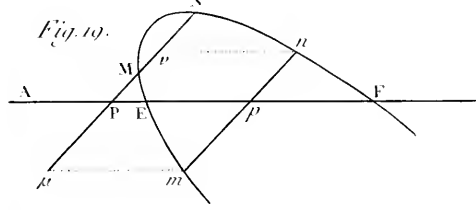
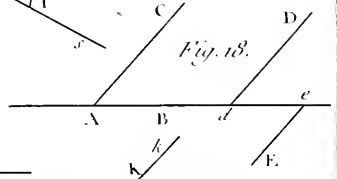
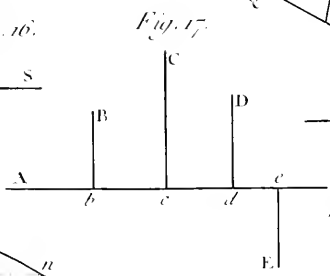
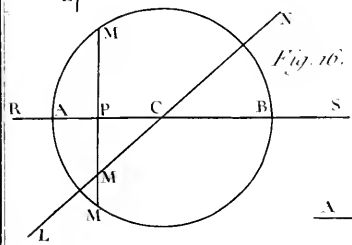
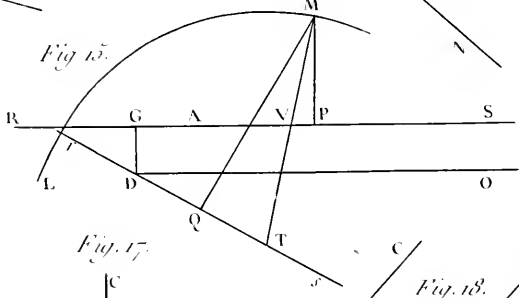
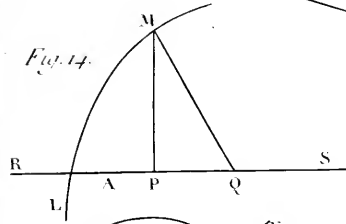
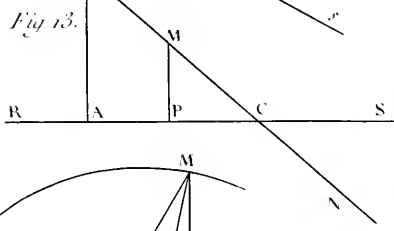
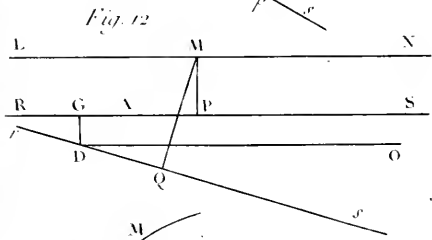
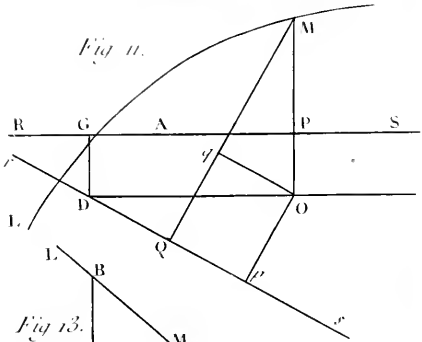
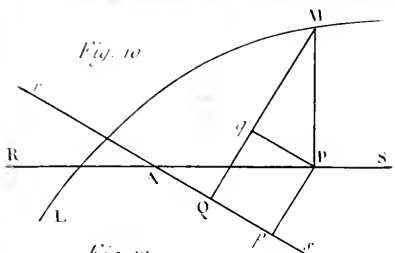


Fig. 9.









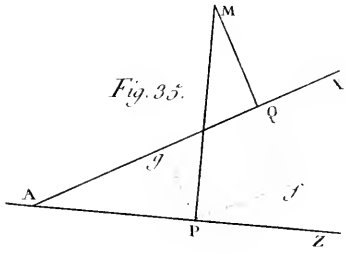
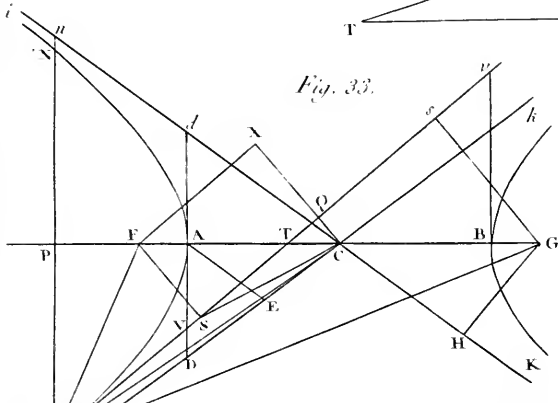
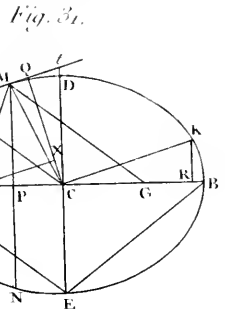
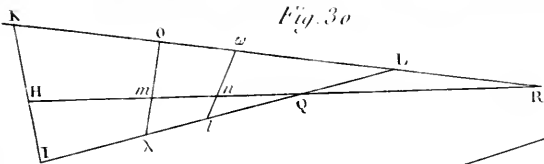


Fig. 32.

Fig. 36.

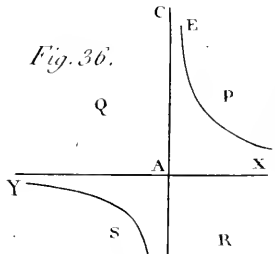
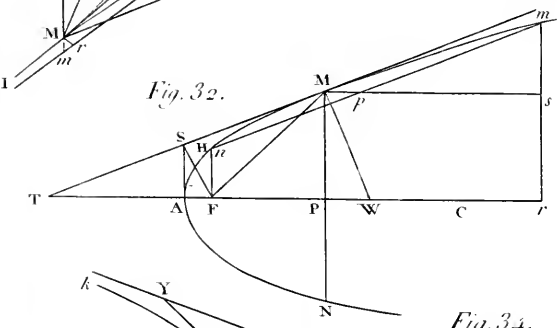
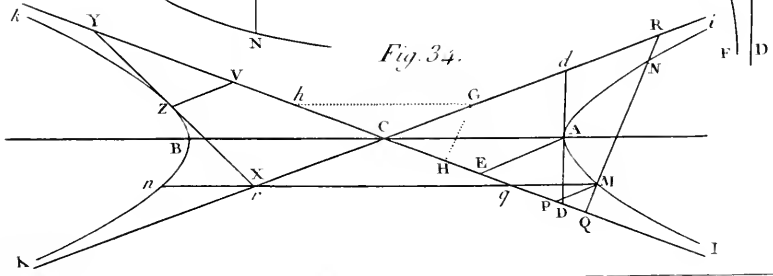
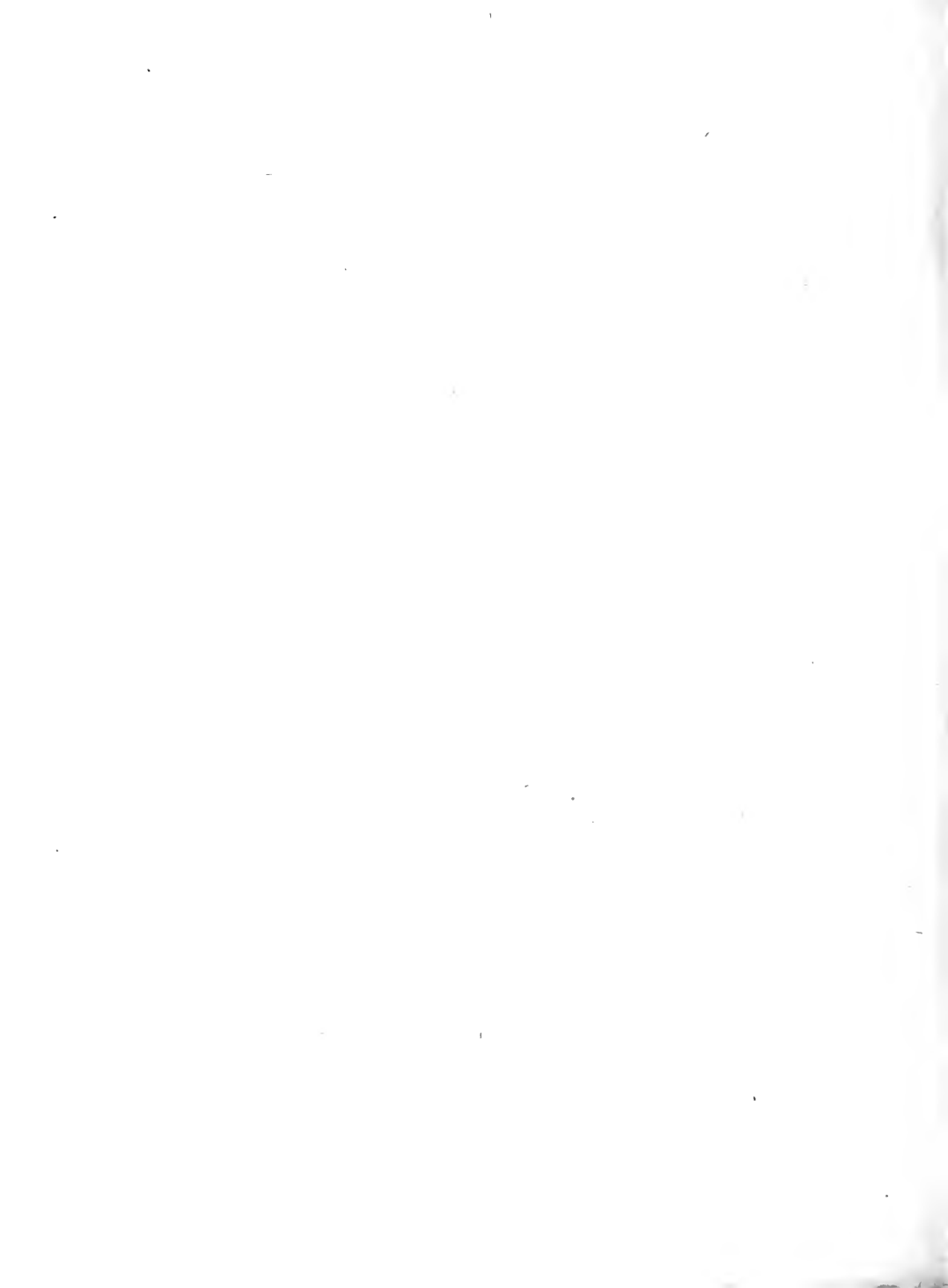
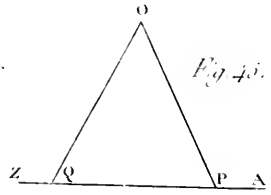
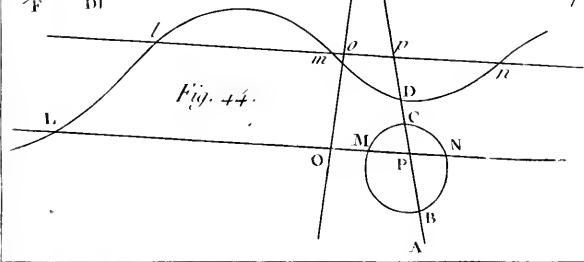
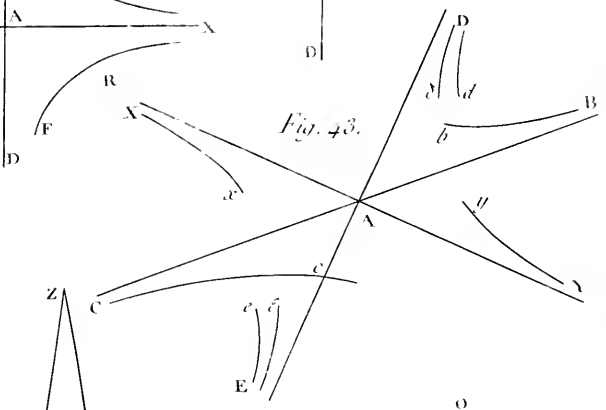
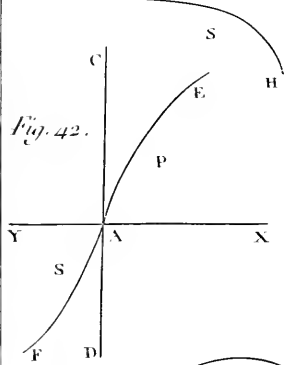
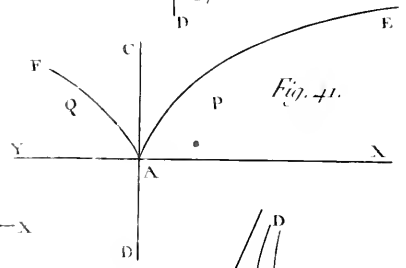
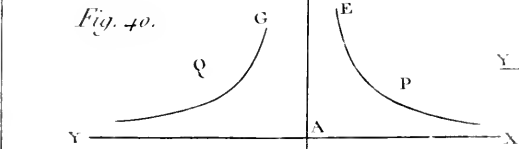
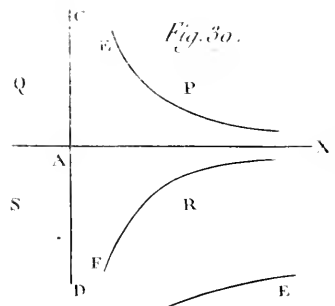
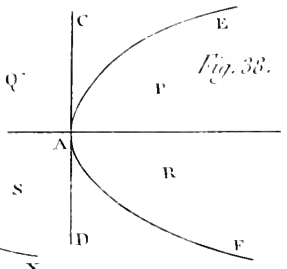
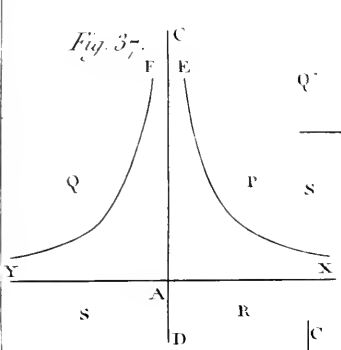


Fig. 34.









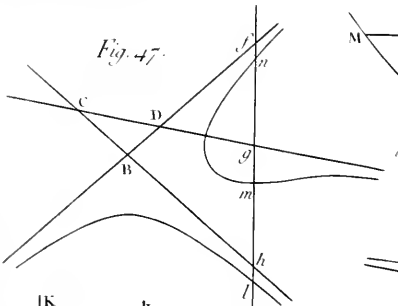


Fig. 47.

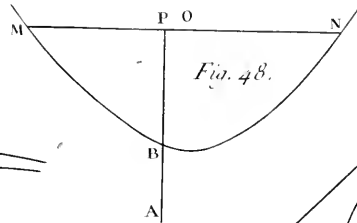


Fig. 48.

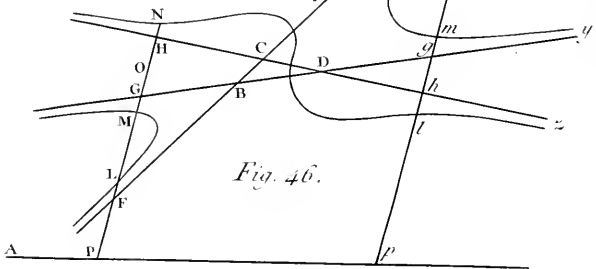


Fig. 46.

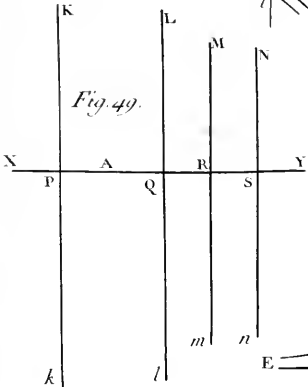


Fig. 49.

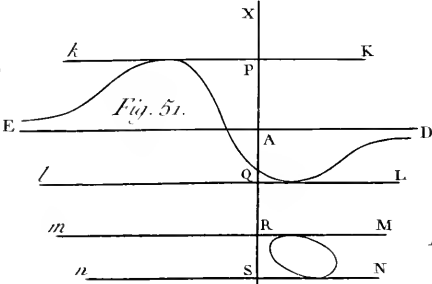


Fig. 51.

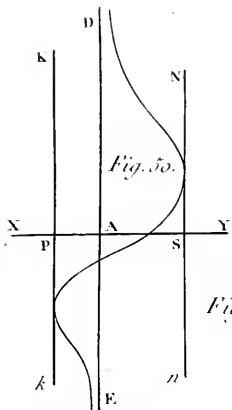


Fig. 50.

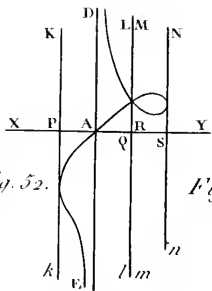


Fig. 52.

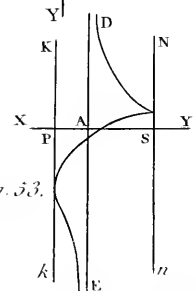


Fig. 53.

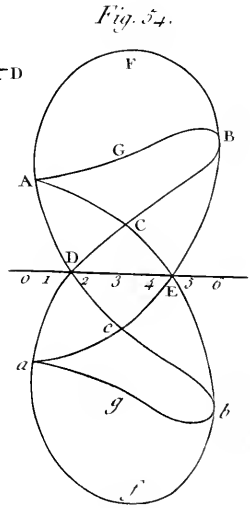


Fig. 54.



Fig. 55.

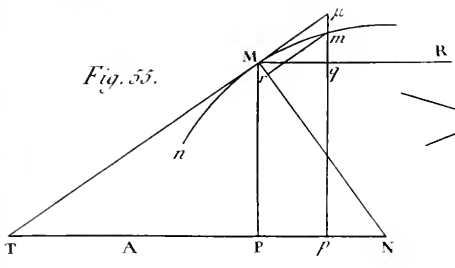


Fig. 56.

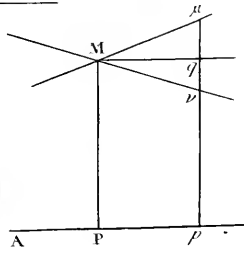


Fig. 57.

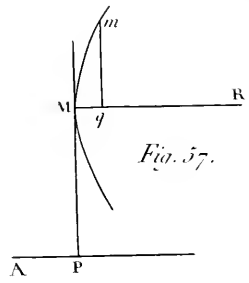


Fig. 58.

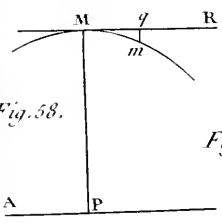


Fig. 59.

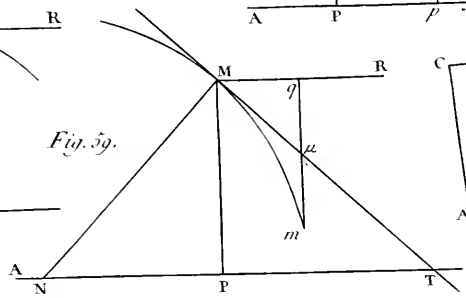


Fig. 60.

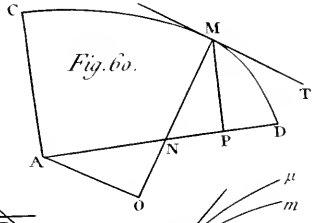


Fig. 61.

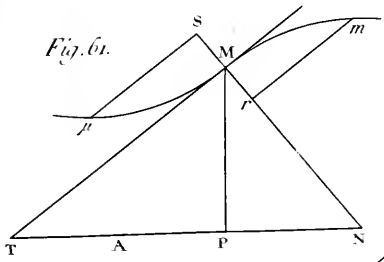


Fig. 62.

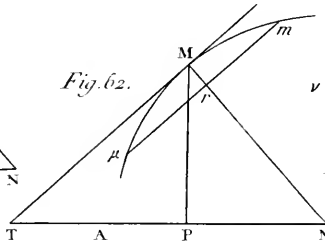


Fig. 64.

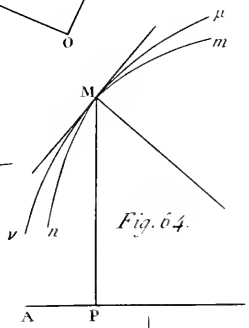


Fig. 65.

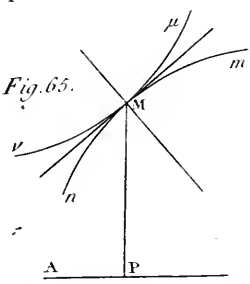


Fig. 66.

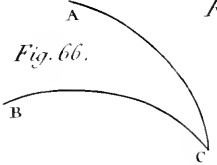


Fig. 67.

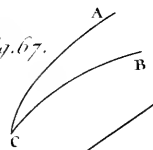


Fig. 63.

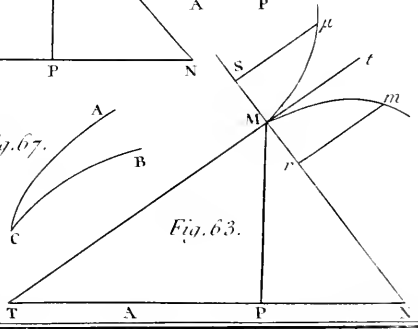




Fig. 68.

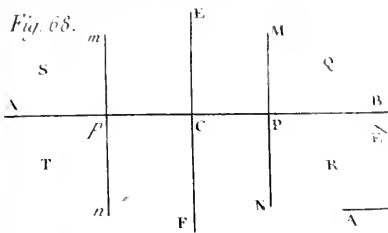


Fig. 69.

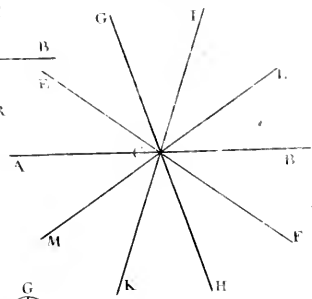


Fig. 70.

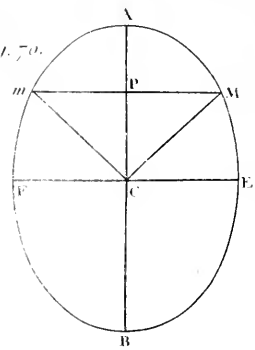


Fig. 71.

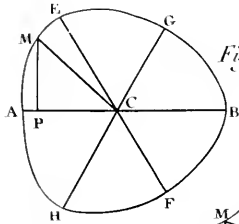


Fig. 72.

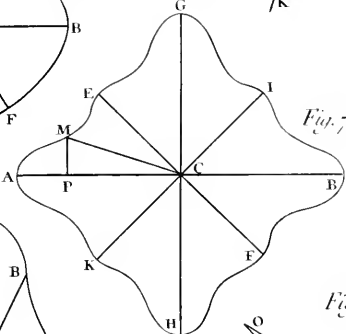


Fig. 73.

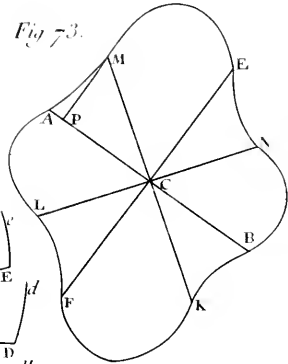


Fig. 74.

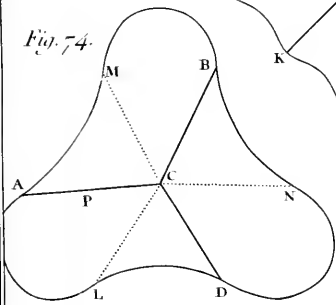


Fig. 75.

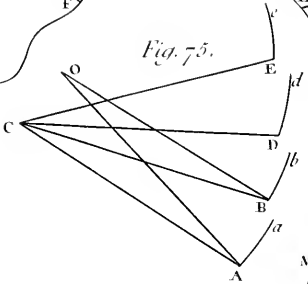


Fig. 76.

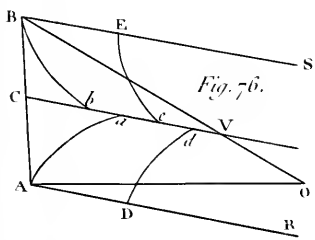


Fig. 78.

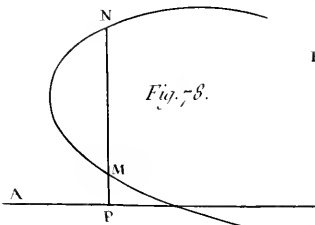
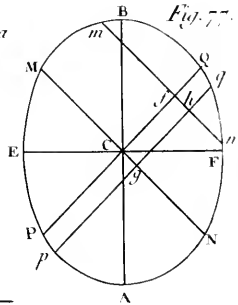
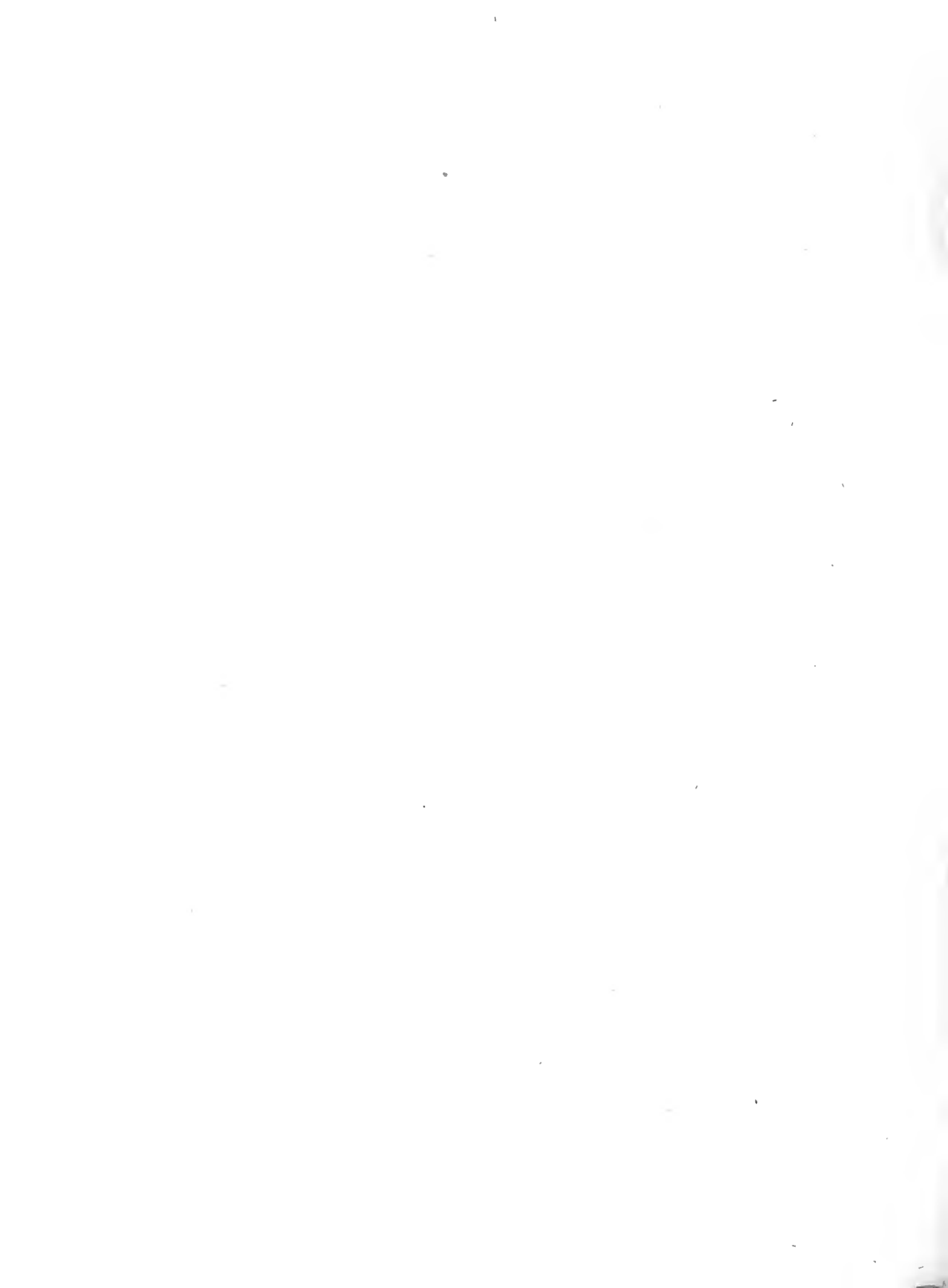
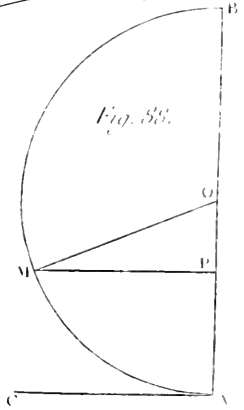
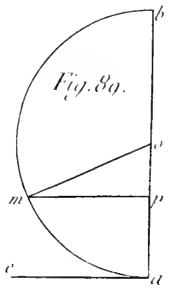
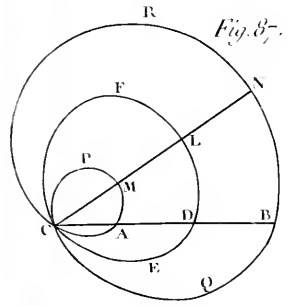
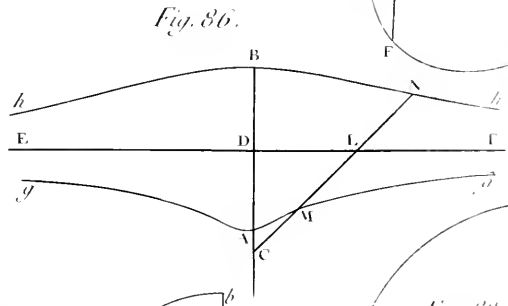
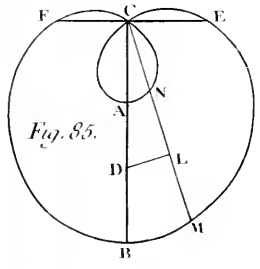
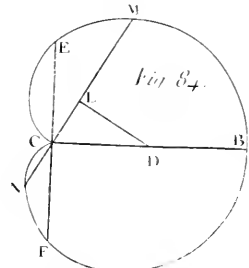
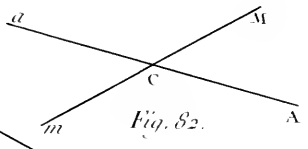
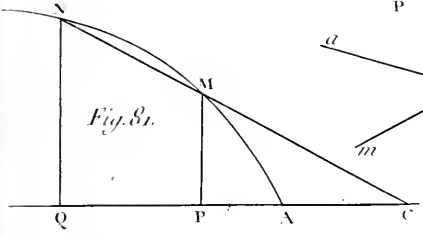
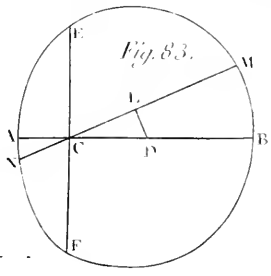
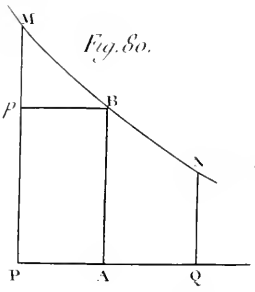
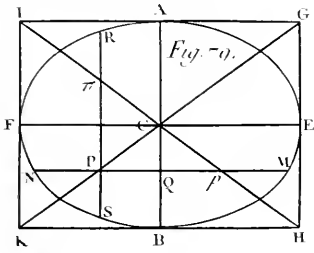
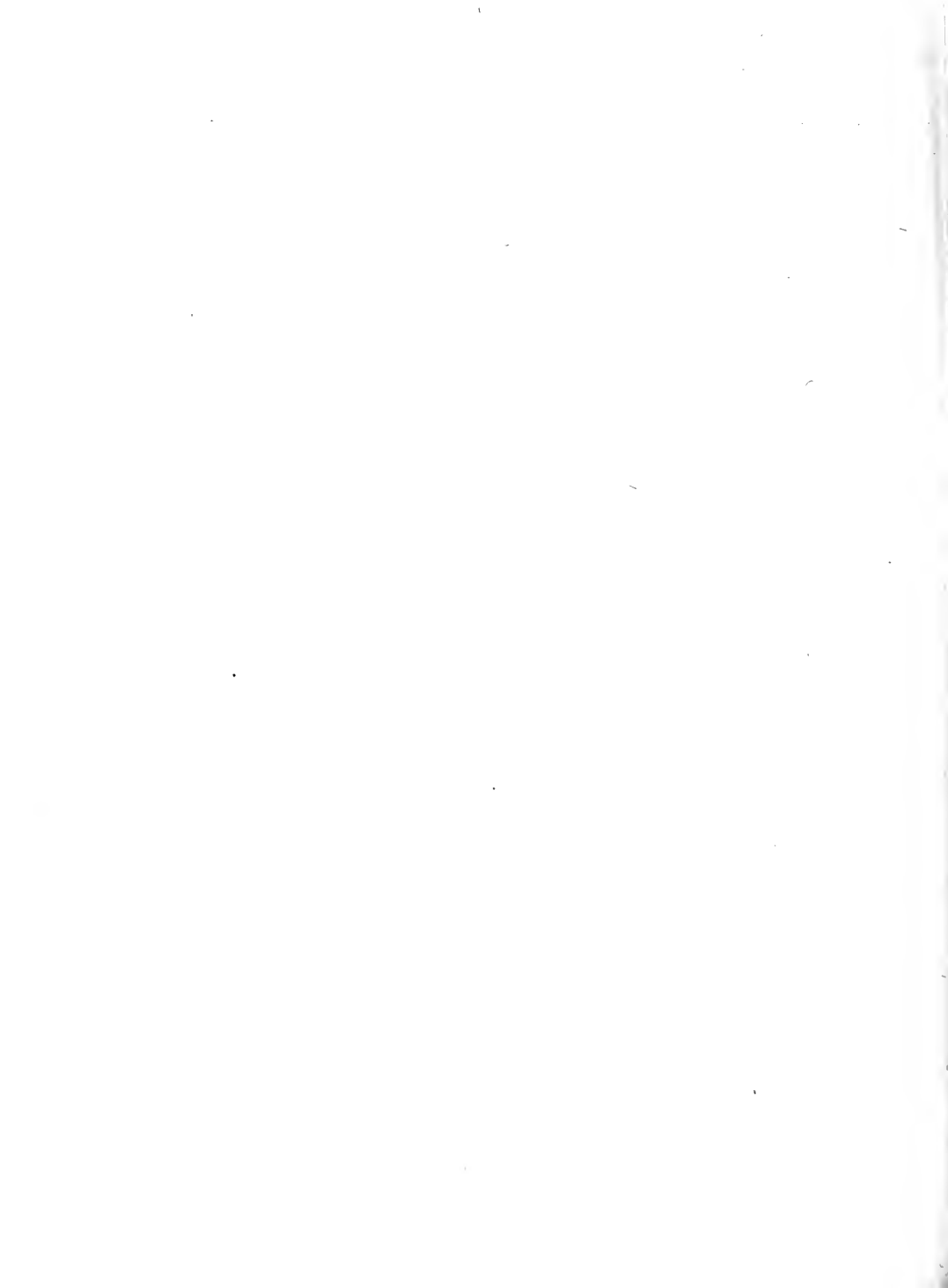


Fig. 77.









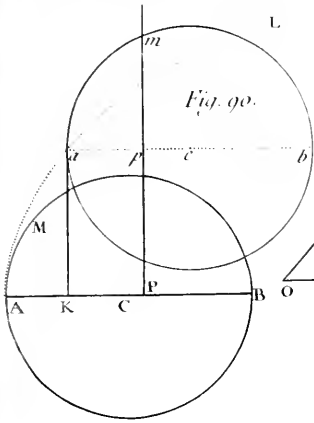


Fig. 90.

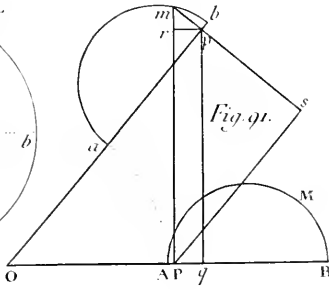


Fig. 91.

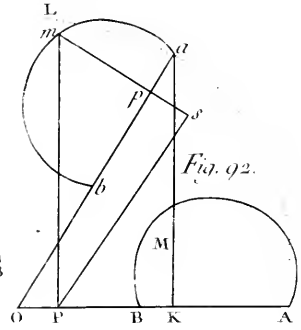


Fig. 92.

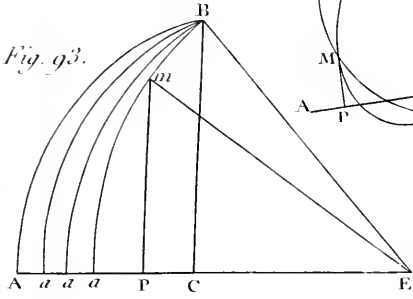


Fig. 93.

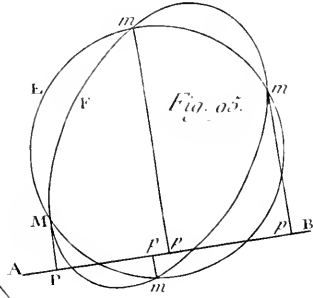


Fig. 94.

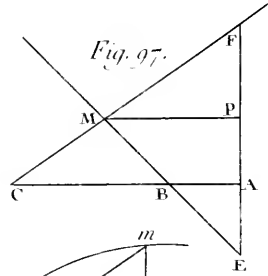


Fig. 97.

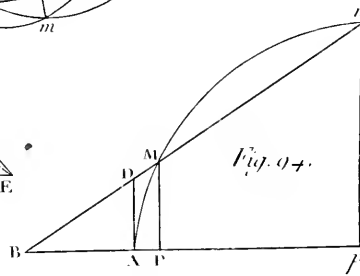


Fig. 97.

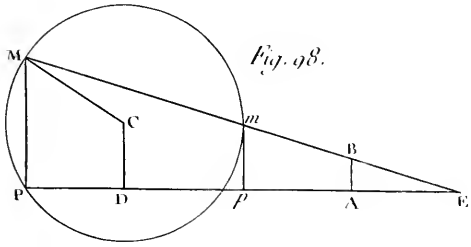


Fig. 98.

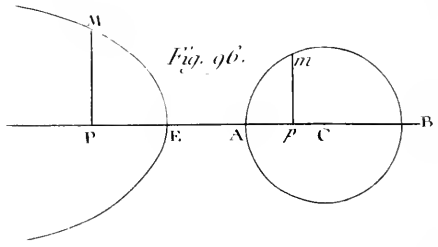


Fig. 96.



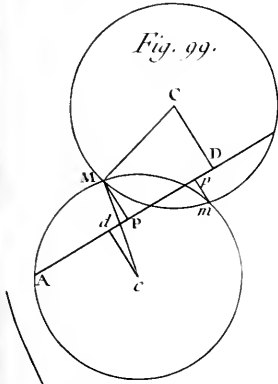


Fig. 99.

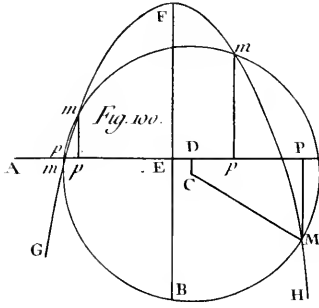


Fig. 100.

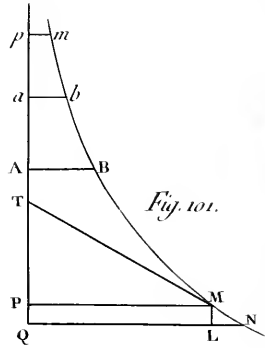


Fig. 101.

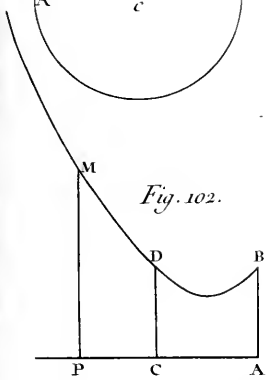


Fig. 102.

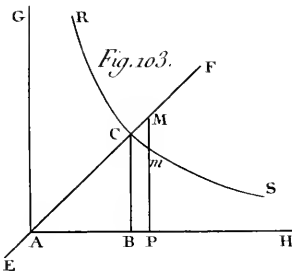


Fig. 103.

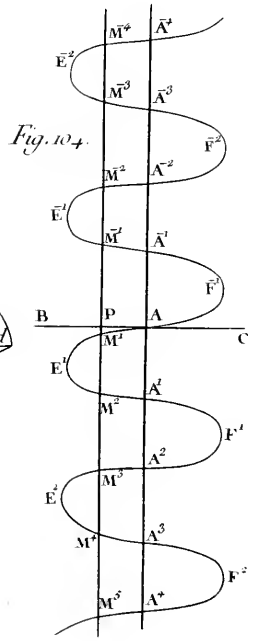


Fig. 104.

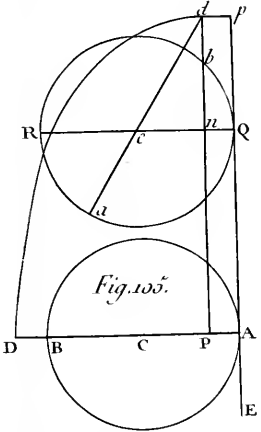


Fig. 105.

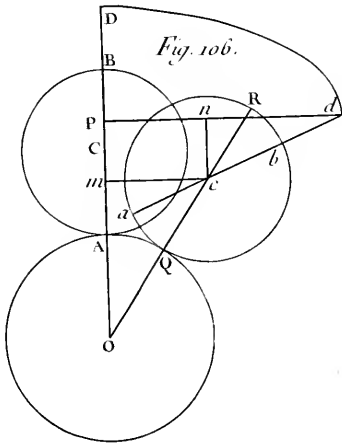
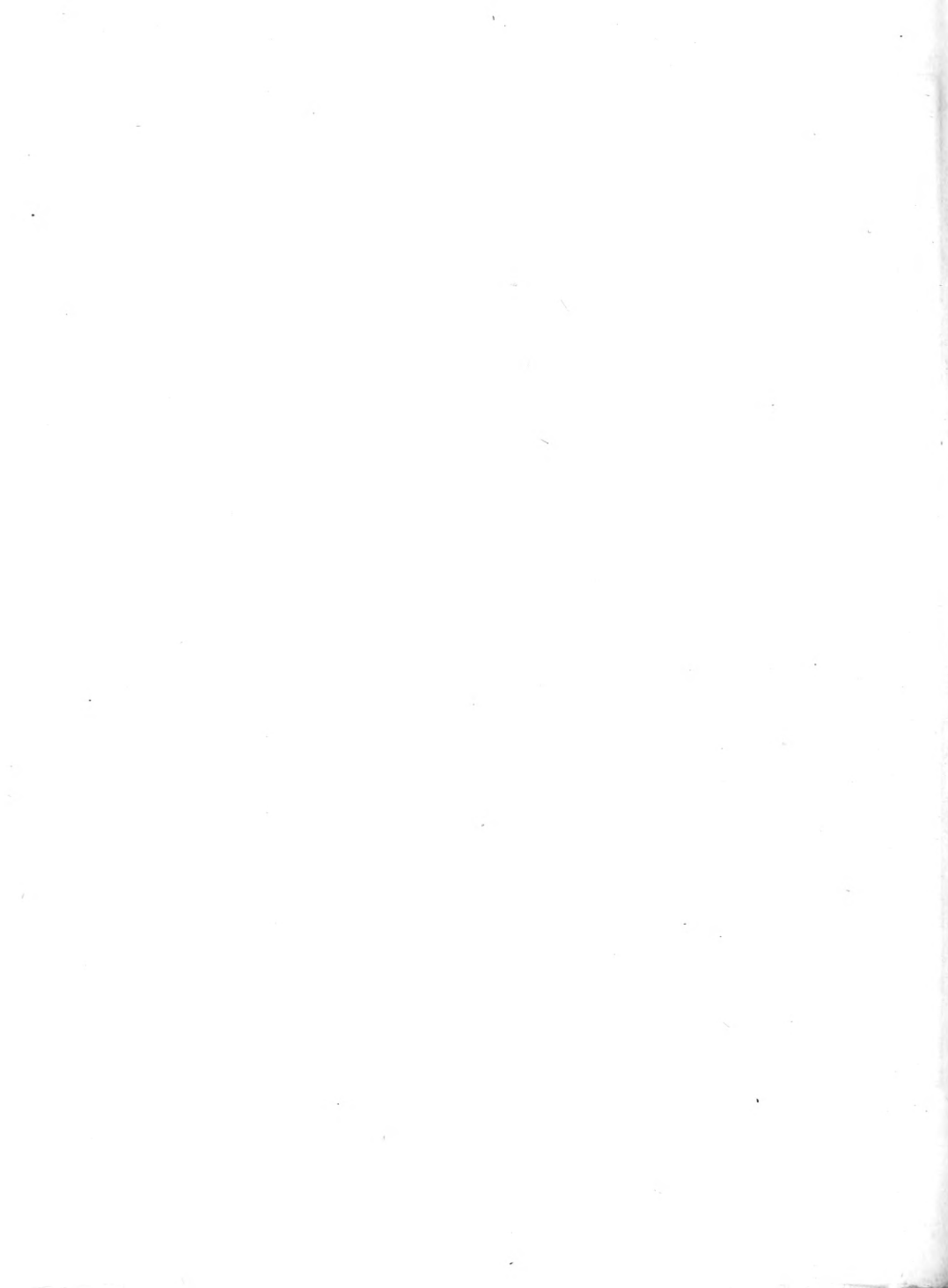
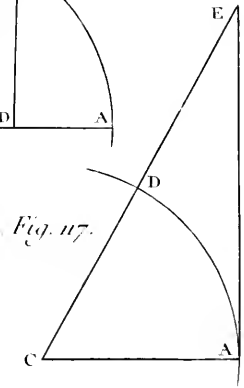
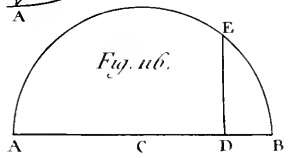
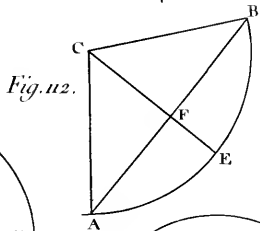
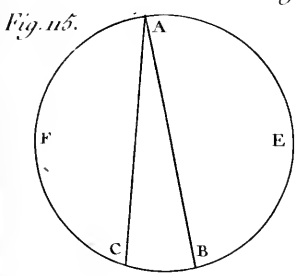
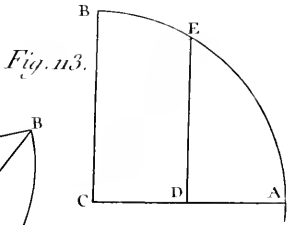
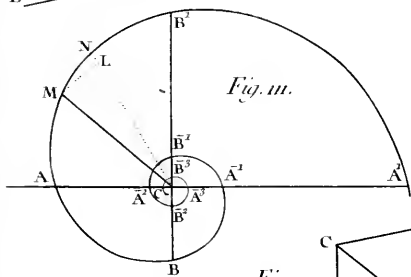
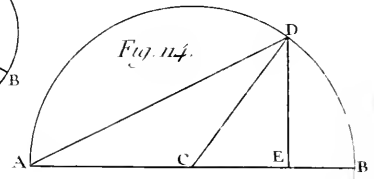
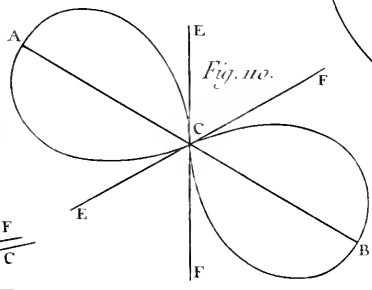
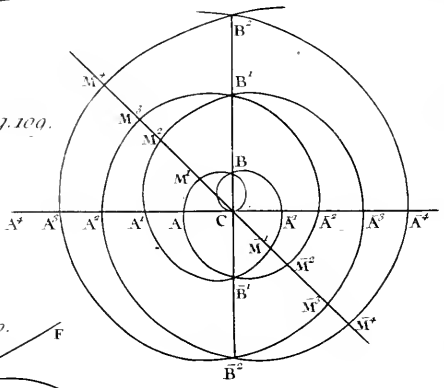
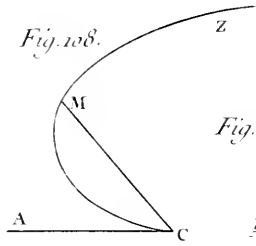
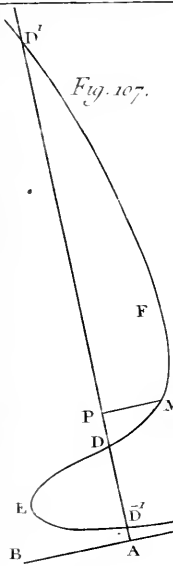
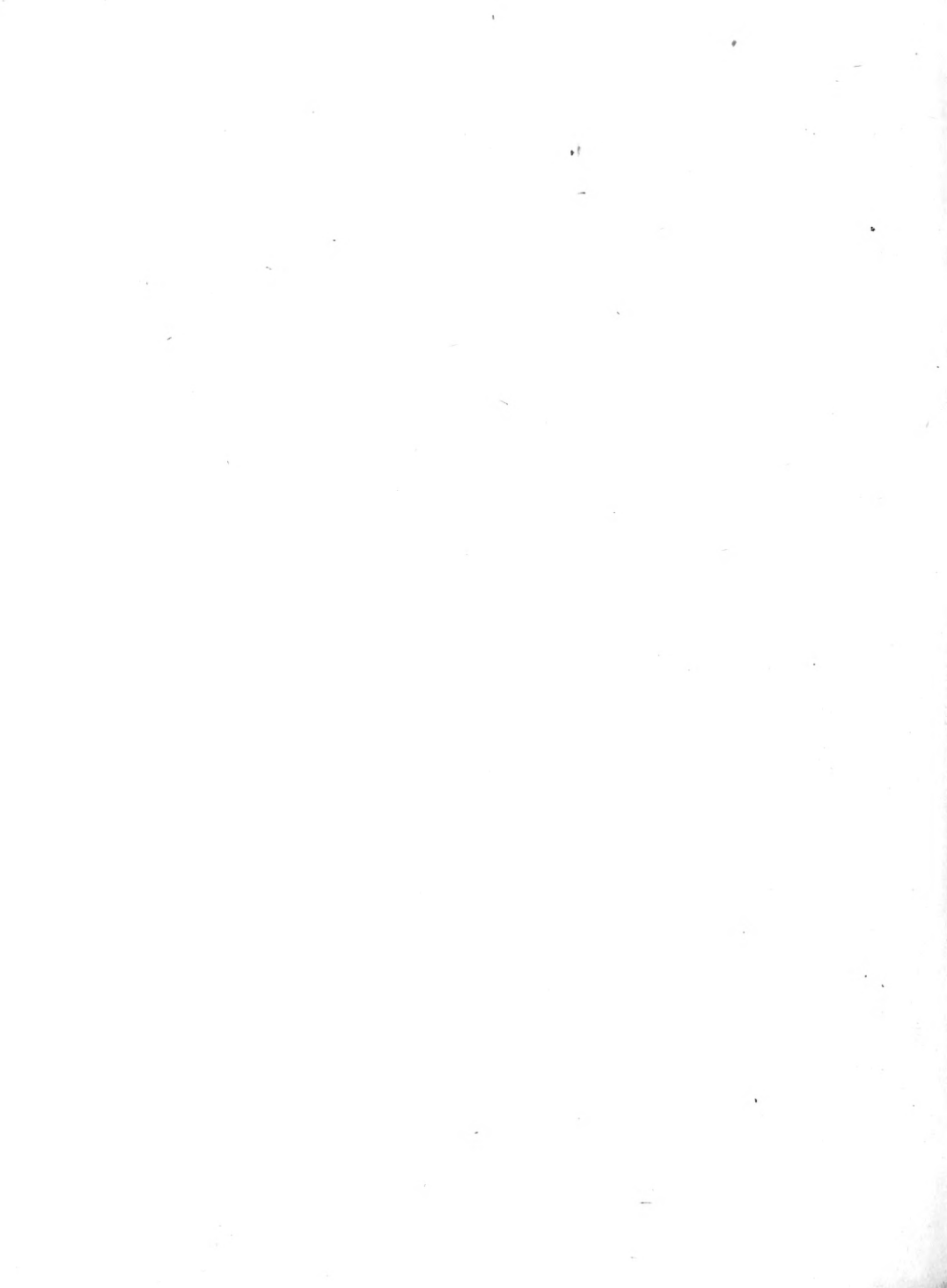


Fig. 106.







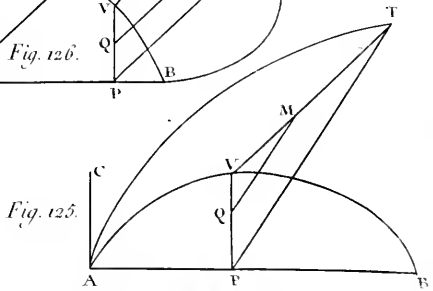
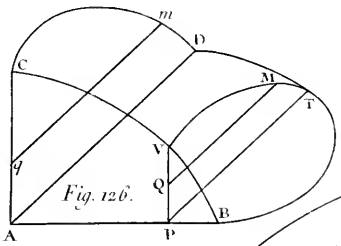
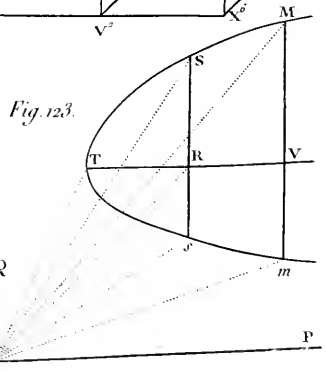
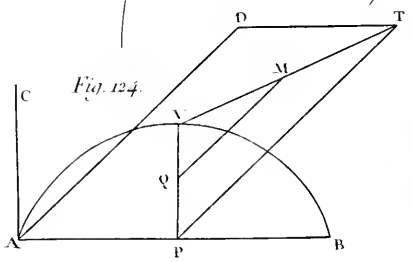
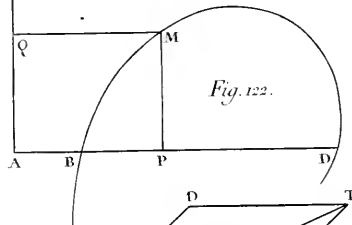
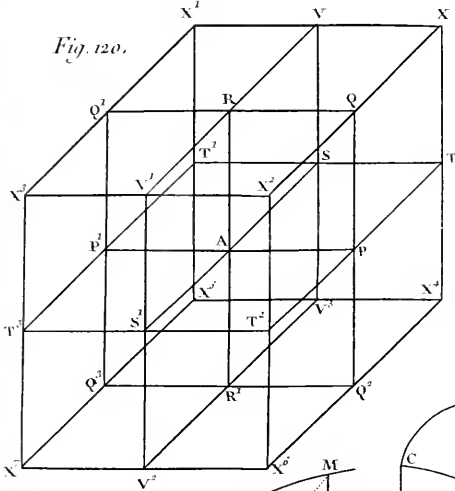
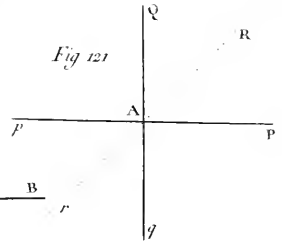
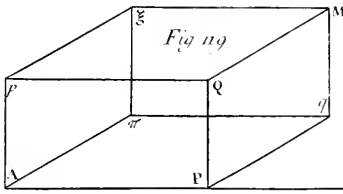
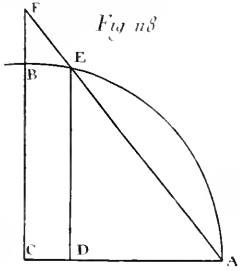


Fig. 127.

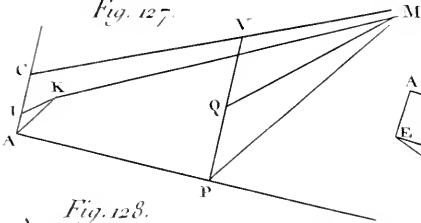


Fig. 129.

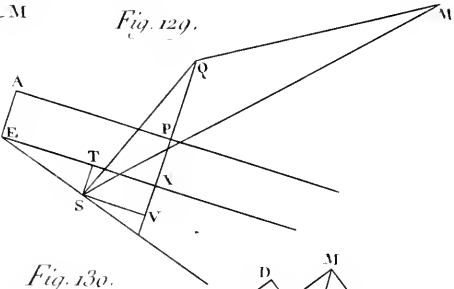


Fig. 128.

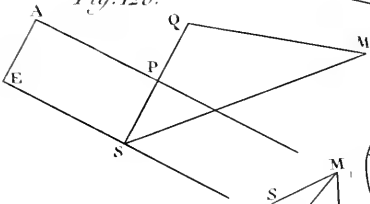


Fig. 130.

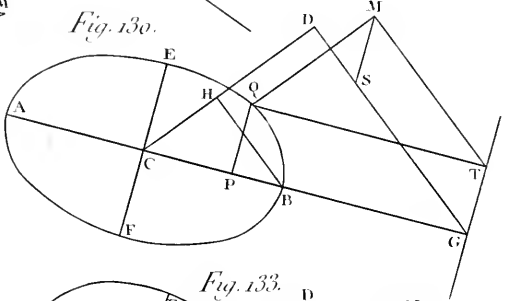


Fig. 131.

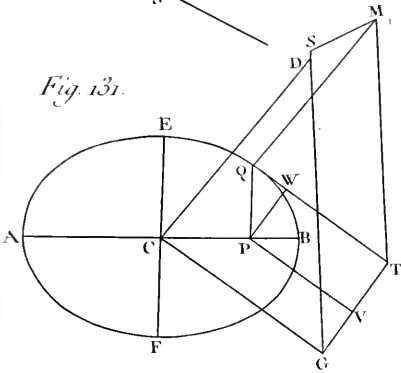


Fig. 133.

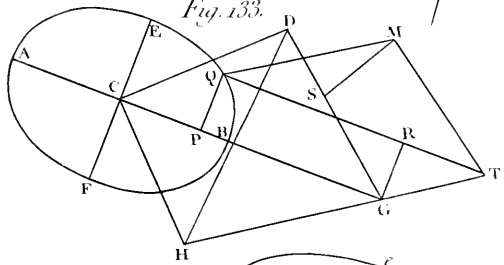


Fig. 132.

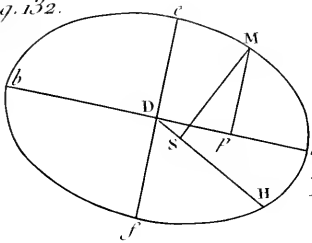


Fig. 134.

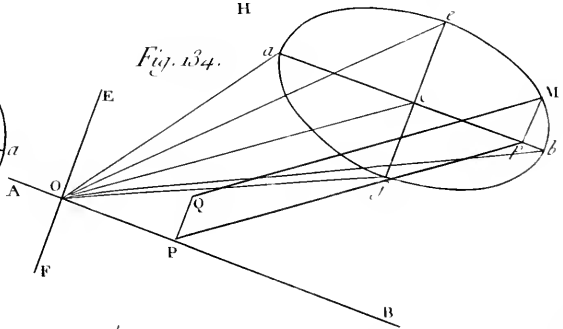


Fig. 135.

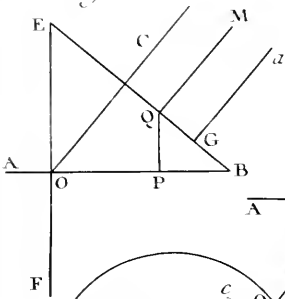


Fig. 136.

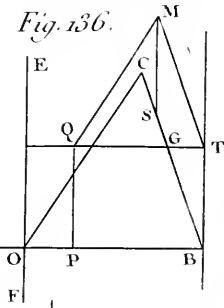


Fig. 137.

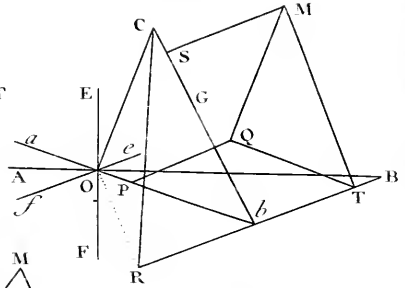


Fig. 138.

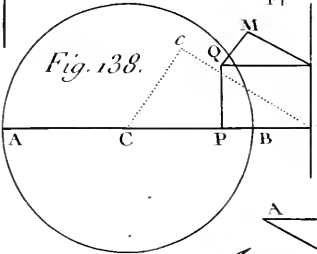


Fig. 139.

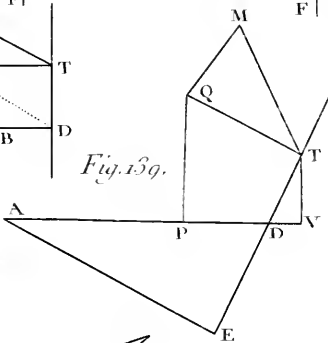


Fig. 140.

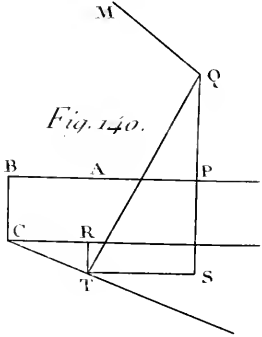


Fig. 142.

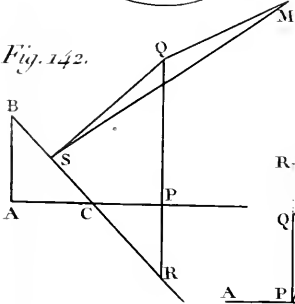


Fig. 141.

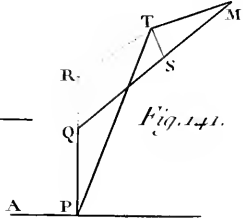


Fig. 143.

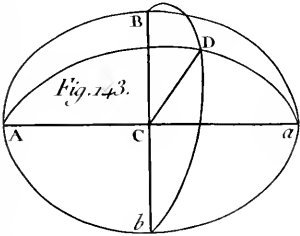


Fig. 144.

