



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

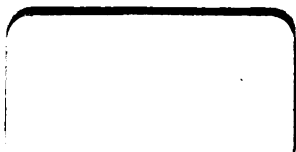
We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

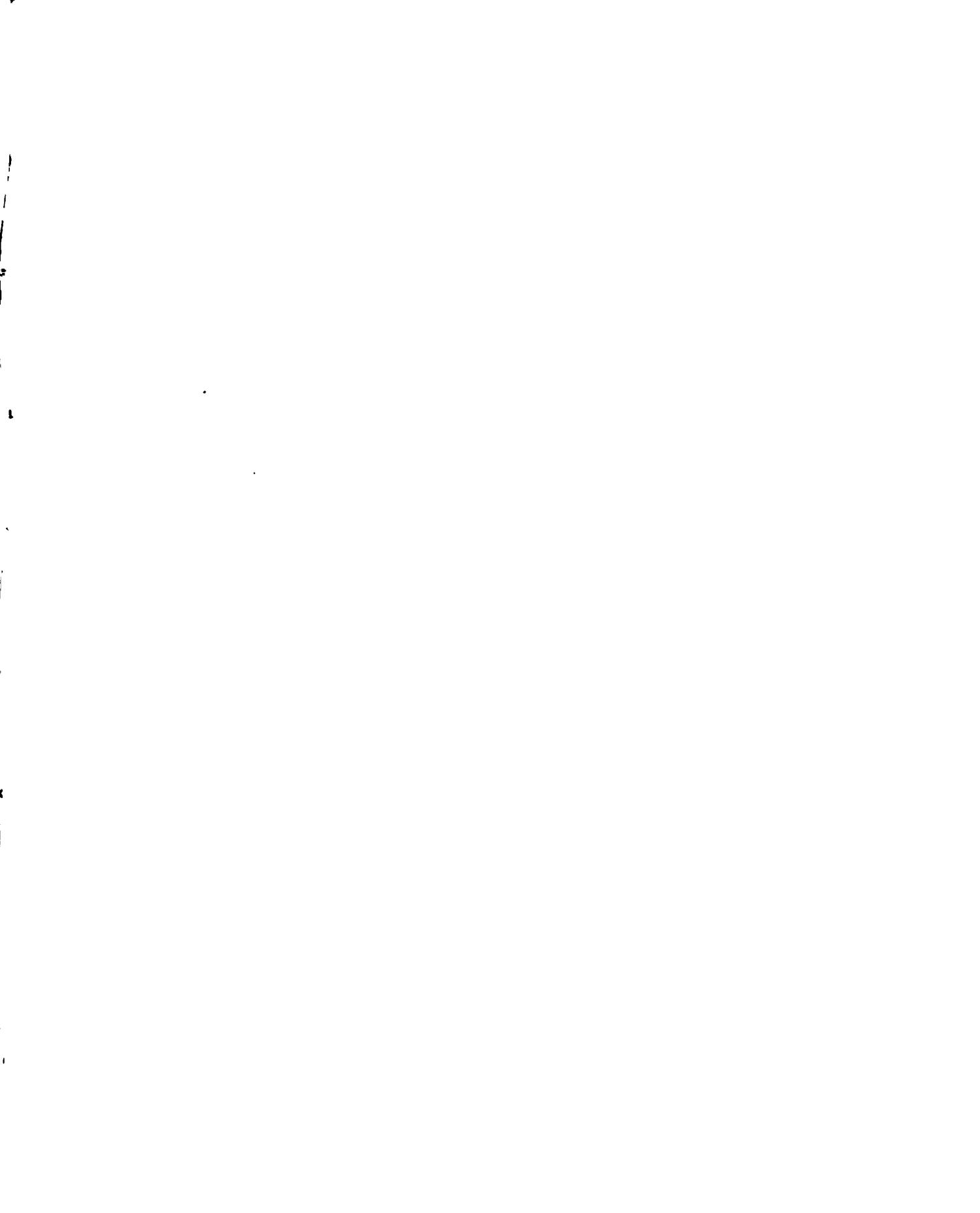
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS









**IMPRESSION ANASTALTIQUE
CULTURE ET CIVILISATION
115, AVENUE GABRIEL LEBON
BRUXELLES
1967**

JACOBI
BERNOULLI,
BASILEENSIS,
OPERA.

Tomus Secundus.



GENEVÆ,
Sumptibus Hæredum CRAMER
& Fratrum PHILIBERT.

M. DCC. XLIV.



N^o. LXVII.

NOTÆ

ET

ANIMADVERSIONES

TUMULTUARIÆ

In Geometriam

CARTESII.

Editæ primum

Ad calcem Editionis Francofurtensis

Anno

1695.



(667)



N O T Æ

Num.
LXVII.

E T

ANIMADVERSIONES

TUMULTUARIÆ

In Geometriam *CARTESII*.

IN LIBRUM I.

N O T A I.

*Quomodo ad æquationes perveniendum sit ,
quæ resolvendis Problematis inserviunt ; de
incog-*

Jac. Bernoulli Opera.

Q999

Num.
LXVII.

incognitarum delectu, & de ordine in analysi tenendo.

Pag. 3, ad
literam G,
& pag. 84,
ad lit. R.



PRIMUM, quod in resolutione alicujus Problematis faciendum præcipit Auctor noster, concernit quantitatum nomenclationem, in eo consistentem, ut lineæ omnes, quæ ad constructionem ejus necessariae videbuntur, tam cognitæ quam incognitæ, literis quibusdam Alphabeti designentur. Et ne hoc promiscue fiat, adjicit in posteriori loco, delectu quandoque opus esse circa incognitas; cum plurimi sæpe referat, quænam accipiantur pro incognitis, ut operatio, quantum fieri potest, brevis atque facilis reddatur. Ubi Tyrones sequentia moneri operæ pretium ducimus: Primo, si inter quantitates cognitæ nonnullæ sint, quæ a se mutuo dependant, seu quarum una per alteram determinetur; tum licebit quidem initio operationis cuique peculiarem literam tribuere, at postmodum in calculi progressu, aut fine, literæ istæ varie invicem permutandæ sunt, nunc earum valores substituendo, nunc restituendo literas; prout animadvertimus, hoc vel illo modo quantitatum terminos abbreviatum iri. Deinde conducit nonnunquam expendere, non tantum qualis quantitas pro incognita accipienda sit, sed etiam quis præcipue ordo sit tenendus in analysi, ut quæsitum quam facillime obtineamus: sæpe enim eadem retenta quantitate incognita, una quam alia via incedendo operatio expeditior evadit. Utrumque facili aliquo exemplo declarabimus.

P R O B L E M A.

Fig. 1. In semicirculo BMN , datis duorum arcuum BC & CE , sigillatim quadrante minorum, sinibus rectis CD & EF , quæritur sinus arcus compositi ex ipsis, nempe recta EG .

ANALY-

A N A L Y S I S.

Num.
LXVII.

Ad hanc indagandam, sunt Sinus totus $AC = a$, $CD = b$, $EF = c$, & $EG = x$; & quoniam prævideo necessarios quoque fore sinus complementorum AD , AF & AG , voco insuper AD , d ; AF , e ; & AG , y . Unde, cum ob æquales angulos ACD , AHG & FHE , triangula rectangula ADC , AGH & EFH sint similia; adeoque AD [d] ad DC [b] ut AG [y] ad GH , nec non AD [d] ad AC [a] ut EF [c] ad EH , reperiuntur $GH = by : d$, & $EH = ac : d$, ac proinde summa vel differentia utriusque, hoc est, quæsitæ EG , sive x , $= (ac \pm by) : d$, nempe $(ac + by) : d$ in sinistro, & $(ac - by) : d$ in dextro quadrante. Jam quoniam sinus complementorum AD , AF , & AG , seu d , e , & y , per sinus rectos CD , EF , & EG , seu b , c , & x , ita determinantur, ut sit $d = \sqrt{aa - bb}$, $e = \sqrt{aa - cc}$, & $y = \sqrt{aa - xx}$; hinc varie utor his valoribus ad quæsitum in terminis simplicissimis eliciendum: Primo ex æquatione tollo y , ut fiat $x = (ac \pm b \sqrt{aa - xx}) : d$ sive $dx - ac = \pm b \sqrt{aa - xx}$, & eorum quadrata $ddxx - 2acdx + aacc = aabb - bbxx$, factaque convenienti transpositione $bbxx + ddxx - 2acdx = aabb - aacc$. Deinde ad contrahendam æquationem substituo aa loco $bb + dd$, fietque $aaxx - 2acdx = aabb - aacc$; ubi quia addita utrobique $ccdd$, prior pars æquationis $aaxx - 2acdx + ccdd = aabb - aacc + ccdd$, fit quadratum, extraho utrinque radicem, ut habeatur æquatio $ax - cd = \sqrt{aabb - aacc + ccdd}$ sive $x = (cd + \sqrt{aabb - aacc + ccdd}) : a$; ad quam porro abbreviandam pro $aa - dd$ pono bb , & resultat $x = (cd + \sqrt{aabb - bbcc}) : a$, iterumque cc loco $aa - cc$; sic tandem fiet $x = (cd + \sqrt{bbcc}) : a = (cd + be) : a$, quæ simplicissima est expressio valoris x , quo indicatur sinum quæsitum arcus compositi haberi, si aggregatum rectangulorum sub sinibus rectis datorum arcuum & sinibus alternorum complementorum per sinum totum dividatur.

Ut vero etiam constet alterum, quando diximus quod, eadem

Qq q q 2

quan-

Num.
LXVII.

quantitate incognita retenta, sæpe præstet hoc quam illo modo solutionem aggredi; observandum est, æquationem nostram immediate absque substitutione vel reductione prævia ad hos terminos perducì posse, si quæsitum sinum EG, non per partes EH, HG, sed per ipsas EL, LG investigemus, faciendo ut AC ad CD, seu a ad b , sic AF, seu e , ad FK, sive LG, quæ propterea crit $be : a$; iterumque ob similitud. Triang. ACD & FEL [utpote quorum utrumque Triangulo FHL simile est] ut AC ad AD, sive a ad d , sic FE, seu e , ad EL, quæ proinde fit $cd : a$; hinc enim statim habetur tota $EG = (cd + be) : a$, ut antea. Ubi notare convenit, quod si vicissim ex datis sinibus EG, CD, inveniendus sit sinus differentiarum arcuum EF, compendiosior futura sit operatio, qua quæruntur partes GH, HE, quam qua partes GL & LE. Uterque autem modus ostendit, quæsitum sinum EF haberi, si differentia rectorum sub sinibus rectorum datorum arcuum & sinibus alternorum complementorum per sinum totum dividatur.

NOTA II.

Non semper necesse est ad constructionem, omnes Problematis æquationes indeterminatas ad unam determinatam reducere; sed præstat quandoque Problema conficere per Loca quæ suppeditant indeterminatæ æquationes.

Pag. 4. ad
lit H, &
pag. 150.
seqq.

CUM in Problemate aliquo determinato plures suppositæ fuerint literæ incognitæ, totidemque repertæ æquationes, solet Auctor, priusquam ad ejus constructionem accedat, has æquationes varie tractando, ac inter sese comparando, eo reducere, ut tandem una tantum in æquatione litera incognita remaneat, & sic ex omnibus æquationibus indeterminatis una determinata resultet: quod

quod deinde Commentator ejus SCHOOTENIUS p. 150, exemplo cujusdam Problematis illustrat; ubi postquam ad duas æquationes indeterminatas $aa + xx + yy = 2dy$, & $aac - cxx - cyy = 2aby$ pervenisset, exinde tertiam determinatam $y = \frac{aac}{(ab+cd)}$ elicit, ac tum demum Problematis constructionem molitur. Ad quæ notare convenit, quod communiter quidem hoc sit optimum, ubi tertia hæc æquatio non multo magis est composita, quam duæ reliquæ; ut in allato exemplo contingere videmus: nam si animadverterem fore, ut ex reductione indeterminatarum emergeret aliqua valde composita & constructu difficilis; satius tum esset statim subsistere in indeterminatis, & Problema conficere per *Loca*, construendo unumquemque Locum, seu æquationem indeterminatam, seorsim, ut per mutuas utriusque intersectiones postmodum quæsitum obtineatur; præsertim cum ejusmodi constructiones ab ipsa quasi natura subministratæ videantur, & casuum varietatem, possibilitatem, limites, totamque indolem Problematis multo melius ob oculos ponant, quam illæ, quæ Auctoris methodo ex tertia demum æquatione longis ambagibus & insuperabili sæpe labore eliciendæ forent, quæque propterea coactæ potius & minus naturales jure merito censendæ; ut maxime & ipsæ proprie non aliter nisi per *Loca*, id est, per descriptionem duarum Linearum absolvantur.

His explicandis idoneum nobis exemplum suppeditat Problema illustre de quadrifecando Triangulo Scaleno per duas normales rectas, cujus analysis, quam hic brevitate studio omittimus, inserta legitur *Actis Erudit. Lips.* m. Novemb. 1687 * Apparet, hoc Problema duas condiciones includere, quarum una requirit, ut rectæ bisecantes Triangulum illud una quadrifecent; altera, ut bisecantes rectæ ad angulos rectos se decussent; quarum unaquæque, seorsim & abstracte ab altera spectata, Problema indeterminatum relinquit, peculiaremque æquationem subministrat, duas complectentem incognitas litteras x & y , quæ pro denotandis

Q q q q 3 seg-

* Supm N° XXIX. pag. 328.

Num.
LXVII.

segmentis lateris duas quadrifecantium extremitates recipientis affumendæ fuerunt. Prior *Æquatio*, quæ quadrifecctioni respondet, hæc est: $yy - 4ay + 4xy + \frac{1}{2}aa - 4ax + xx = 0$. Posterior, quæ anguli qualitatem respicit, ista: $4xxy \pm 2aey \pm 2afx \pm aaf = aadd$, ex quarum mutua collatione oritur tertia *æquatio* determinata octo dimensionum, pluriumque membrorum; cujus constructionem si quis Auctoris methode investigandam susciperet, non tantum per superfluas & non naturales ambages incederet, sed & opus immensi fortassis laboris aggrediretur: cum contra facilis & expedita pateat via quæsitum consequendi, absque tertiæ *æquationis* ope, per solam constructionem Locorum jam reperorum, & quæ ipsa Problematis natura ad id negotii sponte suggestisse videtur. Constat autem ex iis, quæ Auctor lib. 2 exponit, *æquationem* priorem denotare Locum ad hyperbolam; alteram ad curvam quandam tertii generis, seu sectionibus conicis duobus gradibus altiolem; quarum descriptiones ita habent:

Fig. 2.

Construct. Æquat. prioris. Erecto super base Trianguli cujusvis AC quadrato ACXY, ductisque diagoniis AX, CY, sese decussantibus in S, trifecetur CS in T & V, centroque V, ac vertice T ad axem CT Hyperbola describatur mTn, cujus transversum latus sit TS, & rectum ejus triplum CY. Dico, si ei intra quadratum applicetur quævis recta RF [rf] basi CA perpendicularis, & huic ex parte A æqualis abscindatur AD (Ad), puncta D & F (d & f) futura talia, ut ex illis duæ rectæ inflecti possint, quæ Triangulum propositum quadrifecent [quamvis subinde ad alios & alios angulos]; adeoque hyperbolam descriptam fore Locum prioris *æquationis*, quæ quadrifecctionem respicit: $yy - 4ay + 4xy + \frac{1}{2}aa - 4ax + xx = 0$. Ad quod demonstrandum, per punctum Hyperbolæ R agantur rectæ RZ, RP, parallelæ oppositis quadrati lateribus, & secantes diagonalem CY in L & l; nec non Rs perpendicularis diagonio CY; & per punctum V recta VI parallela lateri CX, secans ductam RZ in Q, basin CA in t, & hyperbolam productam infra basin in I: ponaturque AC = a, Rs = p, Vs = q, CD, hoc est PR, seu pL,

pL, aut pY = x, & AF, seu PY, vel Pl = y; adeoque LY = x√2, & lY = y√2. Quo facto erit ex natura hyperbolæ, rectangulum SsT seu Ss in sT, hoc est, (q + ½a√2) in (q - ½a√2), seu qq - ¼aa, ad quadr. Rs, seu pp, sicut TS ad CY seu 1 ad 3; adeoque, multiplicatis extremis & mediis, pp = 3qq - ¼aa. Porro, quoniam Ll bisecta est in s per rectam Rs, propter angulos ad s rectos, & semirectos ad L & l, ac proinde Ls = sR = sl, fiet sY, seu semissis summæ rectarum LY & lY = ½(x + y)√2, demtaque VY = ¾a√2 [ob CY = a√2] habebitur sV seu q = ½(x + y)√2 - ¾a√2: similiterque reperietur Rs vel p = ½Ll, sive semissi differentię inter LY & lY = ½(x - y)√2; qui valores literarum p & q, si in æquatione pp = 3qq - ¼aa substituantur, dabunt æquationem: yy - 4ay + 4xy + ½aa - 4ax + xx = 0, quæ prorsus convenit cum proposita, quam proin rite constructam esse constat. Addimus obiter: si ex juncta & producta T t abscindatur Ti = VI, erit juncta Vi hyperbolæ hujus asymptotos.

Num. LXVII.

Constr. Equat. poster. Demissa ex vertice Trianguli perpendiculari BK, & bisecta base AC in M, assumtoque in eadem puncto utcunque F ad partes ipsius C, abscindatur ad eadem partes recta AN tertia proportionalis ad AM & AF, ad oppositas vero ipsa KO tertia proportionalis ad KN & BK; ut & CD media proportionalis inter CM & CO: quo facto, si basi in puncto F normaliter applicetur recta FR = AD, erit punctum R ad curvam optatam gRh, respondentem alteri æquationi, quæ anguli conditionem implet: 4xxyy ± 2acyy ± 2afxx ± aaf = aadd; id est, erunt puncta D & F talia, ut per illa ductæ rectæ bisecantes Triangulum DE, FG, sese mutuo in H ad angulos rectos intersecent. Quod sic patet: Assumptis, præter supra memoratas quantitates, perpendiculari BK = d, segmento CK = e, & segm. AK = f (plane ut in analysi Problem. loc. cit. *Act. Lips.* * factum fuit) habetur per constr. AN = 2yy : a, & KO = dd:

Fig. 3. 4. & 5.

* Supra pag. 330. 33

Num.
LXVII.

$dd: (2yy: a \pm f)$; adeoque $CO = dd: (2yy: a \pm f) \pm e$ [variantibus sc. signis, prout perpendicularis intra vel extra Triangulum, & ad hanc illamve partem basis cadit]: unde cum CM sit $\frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a$ in $dd: (2yy: a \pm f) \pm e = \text{rect. } MCO =$ [per const.] CD^2 [seu PR^2 in fig. 2] $= xx$; factaque reductione $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef = aadd$. Quod erat ostendendum.

Fig. 6.

Eadem constructio non ineleganter sic variabitur: Ductis rectis ax , $\delta\phi$, ad angulos rectos sese decussantibus in β , abscindantur in iis rectæ βx & $\beta\phi$, quarum illa sit media proportionalis inter CM & CK , hæc inter AM & AK ; factoque rectangulo $a\beta\gamma\delta =$ Triangulo dato ABC , jungantur rectæ δx & $a\phi$; vel assumpta harum alterutra ad libitum, mediante rectangulo reperiatur altera, [nota, quod in fig. 4. recta βx semicirculo super $\beta\delta$, & in 5^o $\beta\phi$ semicirculo super βa descripto applicanda est; cætera vero peragenda, ut dictum;] quo facto, junctæ rectæ δx , $a\phi$, statim denotabunt ipsas x & y , abscindendas in base Trianguli pro quæsitis CD & AF , vel pro YZ & ZR in fig. 2, ad habendum punctum R quæsitæ Curvæ gRh . Et sic tot alia puncta hujus Curvæ reperiri possunt, quot alia rectangula dato triangulo sigillatim æqualia super rectis indefinitis $a\beta$, $\beta\delta$ constituta fuerint; quæ rectangula omnia una opera determinantur, si per punctum γ inter Asymptotos βa & $\beta\delta$ describatur hyperbola $\gamma\zeta$, ut ex natura hujus curvæ constat. DEM. Cum enim per constr. βx sit $= \sqrt{\frac{1}{2}ae}$, & $\beta\phi = \sqrt{\frac{1}{2}af}$, ponanturque $x\delta = x$, & $\phi a = y$; erit $\beta\delta = \sqrt{xx \pm \frac{1}{2}ae}$, & $\beta a = \sqrt{yy \pm \frac{1}{2}af}$, adeoque rectang. ad , id est, per constr. Triang. ABC , sive $\frac{1}{2}ad = \sqrt{((xx \pm \frac{1}{2}ae) \times (yy \pm \frac{1}{2}af))}$; qua reducta habetur $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef = aadd$, eadem æquatio cum illa, quæ construenda proponebatur.

Postquam sic ambæ curvæ mRn & gRh , quæ ambabus æquationibus indeterminatis singulæ singulis respondent, descriptæ & eidem figuræ adaptatæ fuerint, manifestum est, punctum ipsarum commune R , in quo se mutuo interfecant, utrique simul satisfacturum esse, ipsumque adeo Problema per illud penitus deter-

determinatum iri. Quocirca, demissa ex hoc puncto in basin Num.
LXVII. rrianguli perpendiculari RF, si huic æqualis abscindatur AD, erunt puncta D & F talia, ut si per illa ducantur rectæ DE, FG, triangulum datum seorsim bisecantes [quod quomodo fiat, in vulgus notum est] illud simul & quadrifecent, & se mutuo ad angulos rectos fecent. Quod initio faciendum proponebatur.

Quod si Curvæ intra angulum rectum gCh nullibi se mutuo secuerint, nullam quoque illo casu Problema solutionem admittet: sic ut hinc totam Problematis naturam, possibilitatem, limites, determinationes, & casuum varietates, uno quasi obtutu perspicere liceat; quod ex alia constructione methodo Auctoris investigata difficulter cognosceretur. *

N O T A III.

De Ordinibus Curvarum æstimandis.

AUctor subinde confundere videtur duplicem Curvarum re- Pag. 11. §.
Primo au-
tem, & pag.
24. §. Cate-
rum. spectum, juxta quem considerari possunt Curvæ, quatenus vel *per ipsas alia*, vel *per alias ipsa* construuntur; unde non satis sibi constat in distinguendis per certa genera Curvis, illasque quas modo ad diversa Linearum genera retulit [quod diversorum graduum æquationes *per ipsas* possent construi], mox iterum sub eodem gradu complectitur, quoniam ipsas vicissim *per eandem* construi posse animadvertibat. Quod ex pag. 11, sic ostenditur: Cum quæstio PAPPY in 12 lineis est proposita, pervenitur ad æquationem sex dimensionum; & cum in lineis 16, ad æquationem dimensionum octo, monente Auctore p. 25. Sed æquationes sex dimensionum ab ipso construuntur ope Curvæ, quæ ad Cubum ascendit, lib. 3^{to} p. 97, pariterque æquationes octo dimensionum possunt construi per aliam, quæ assurgit ad Quadrato-quadratum. Quare cum ad construendum Problema in

Jac. Bernoulli Opera.

R r r r

16

* Vide infra Notam XIII.

Num. 16 lincis, Auctor requirat, pag. 11, Curvam *uno gradu* altiore
 LXVII. illa, qua construitur in lincis tantum 12, omnino colligendum
 videtur, quod illi propositum fuerit Curvas Cubicas & Quadra-
 to-quadraticas ad duo diversa Linearum genera vel duos diffe-
 rentes gradus referre. Quemadmodum etiam concludi potest ex
 eo, quod habetur pag. 23, §. *Quod si*, ubi curvam EC, quæ
 per intersectionem Regulæ GL, & Lineæ CNK describitur, per-
 petuo diversi ab hac generis esse innuit, cum tamen ex calculo
 facile appareat, æquationem Curvæ EC nunquam plus una di-
 mensione superaturam æquationem Curvæ CNK; adeo ut &
 hinc sequatur, Curvas ex. gr. trium & Curvas quatuor dimensio-
 num ad duo diversa Linearum genera referendas esse. Et tamen
 ipsemet Curvas istas in paragr. statim subsequenter non obscu-
 re, imo libro 2°, p. 21 & 24, alibique disertis verbis sub eo-
 dem gradu complectitur; sicut etiam illas Curvas, quæ ad Sur-
 de-solidum & Quadrato-cubum adscendunt, promiscue eidem
 Curvarum generi includit.

Ut itaque in re dubia certi quippiam statuatur, consultum fue-
 rit Curvas ita distinguere, ut ipsarum gradus æstimentur ex nu-
 mero dimensionum, ad quas ascendunt æquationes ipsarum na-
 turam exprimentes; quo pacto Conchoidem Veterum Sectioni-
 bus conicis, non uno tantum, ut facit Dnus DES-CARTES
 p. 24, sed duobus gradibus altiore constitutum, propter qua-
 tuor dimensiones, quas hujus Curvæ æquatio acquirit, ut ex
Commentario apparet pag. 250. Nec ut aliter statuamus, persua-
 dere nobis potest ratio ab Auctore allata pag. 24, dum regulam
 dari asserit, qua ad Cubum reducuntur omnes difficultates, quæ
 adscendunt ad Quadrato-quadratum, & ad Surde-solidum om-
 nes illæ quæ adscendunt ad Quadrato-cubum; alludens procul
 dubio ad id, quod lib. 3°. pag. 79, ostendit, ubi æquationem
 biquadratam in duas quadratas resolvere docet, quarum secundi
 termini per æquationem cubicam inveniuntur. Etenim si mens
 Auctoris hæc sit [nec liquet quæ alia esse possit] Curvas qua-
 tuor dimensionum Curvis trium propterea non esse dicendas
 magis compositas, quod illæ possint construi inveniando tantum
 radi-

Fig. 1.

N. 67.

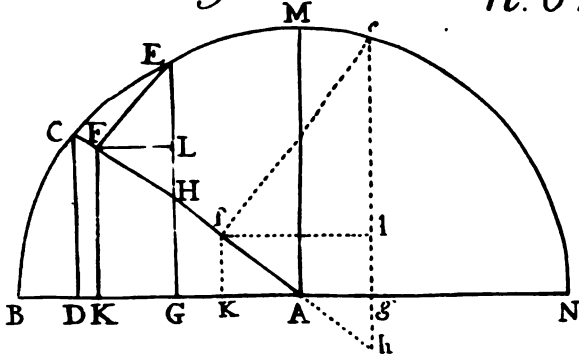


Fig. 2.

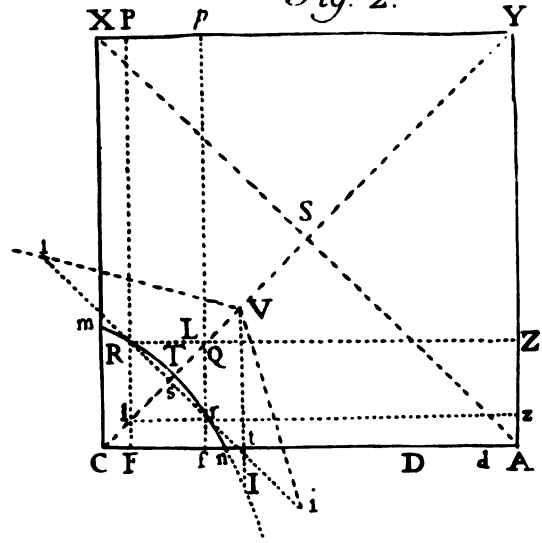


Fig. 3.

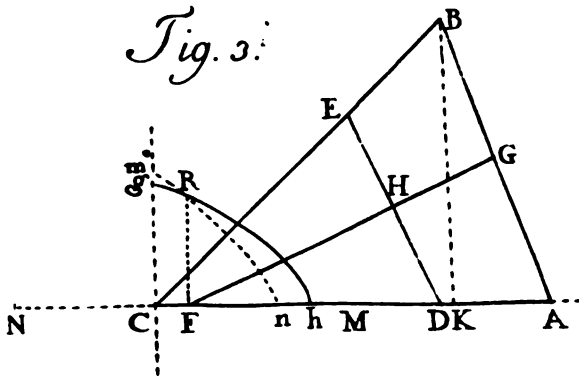


Fig. 4.

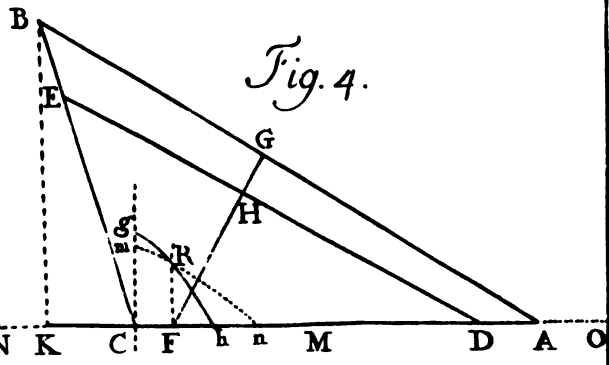


Fig. 5.

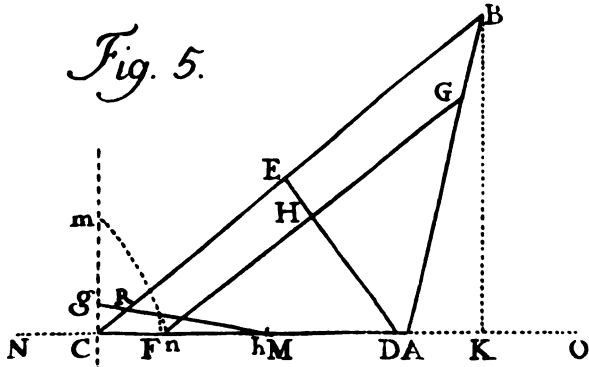
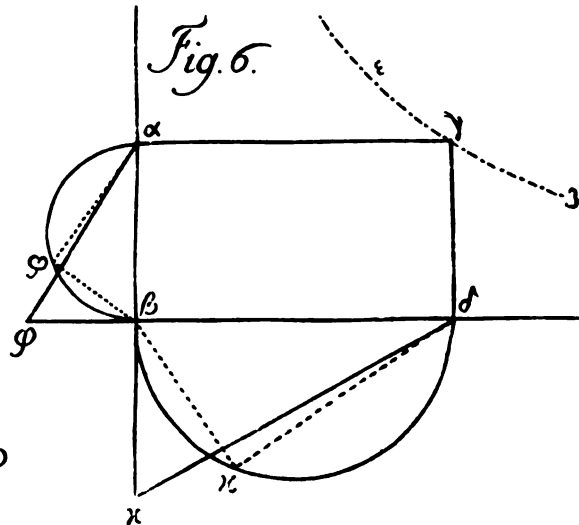
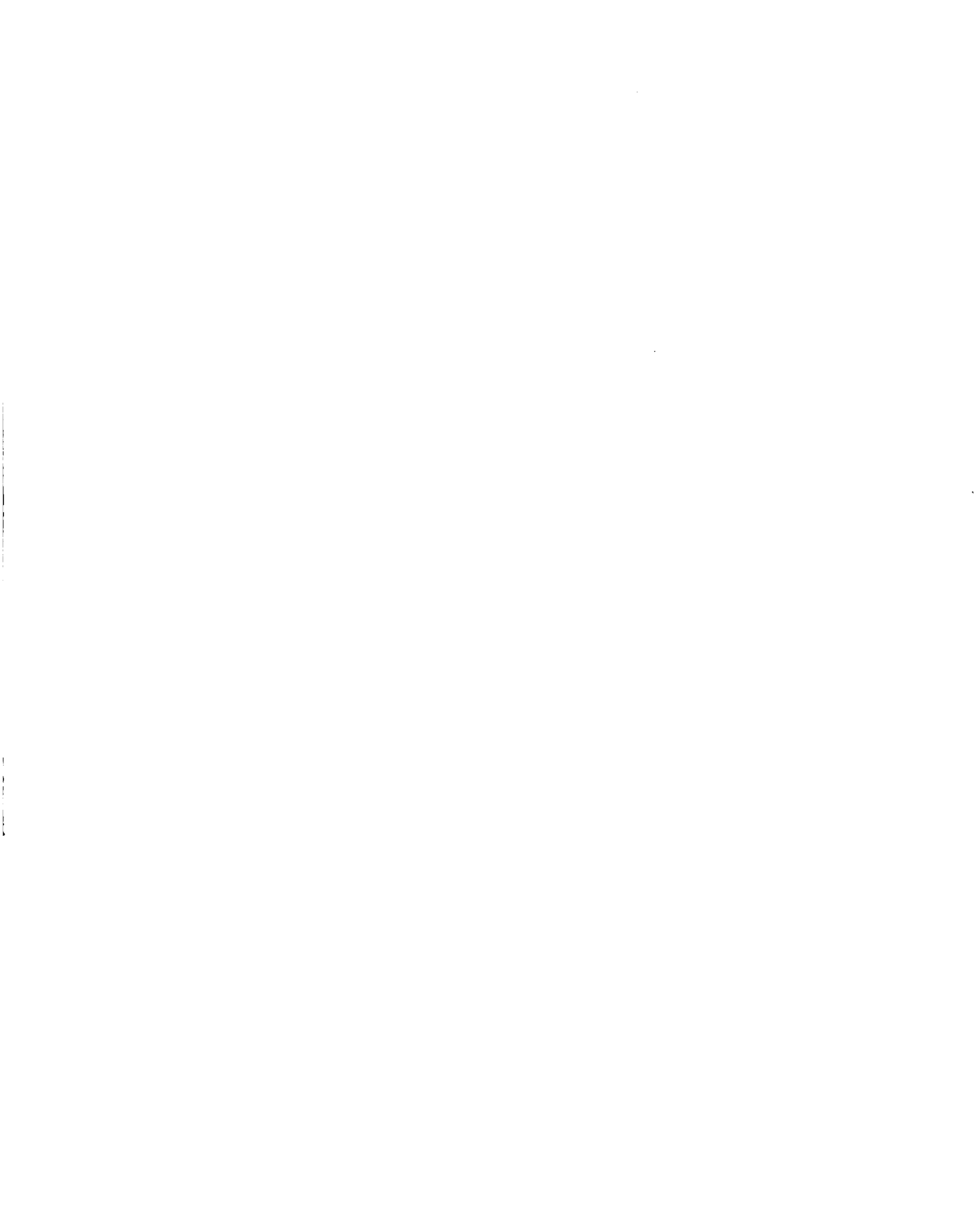


Fig. 6.





radicem alicujus æquationis trium dimensionum ; sequetur , quod Curvæ etiam quam maxime compositæ sæpenumero ejusdem generis habendæ cum simplicissimis ; quotiescunque enim quantitarum indeterminatarum altera unam tantum duasve in æquatione dimensiones obtinet , sumpta ad libitum altera , quæ plurium dimensionum fuerit , possunt Curvæ puncta per solam regulam & circinum inveniri ; adeo ut si constructionis simplicitas attendetur , ejusmodi Linea cum primi gradus Curvis connumeranda foret. Deinde notandum est , per accidens tantum fieri , ut Æquatio Biquadrata , p. 79 , ad una dimensione minorem , sive Cubicam , reducatur , nec propterea in Quadrato-cubica , ut Auctor existimat , pariter procedere debere ; utpote quam eo sensu non ad Surde-solidam , sed ad Æquationem 15 aut 10 dimensionum perduxit HUDDENIUS lib. 1. de Red. Æquat. p. 488 & 489.

Num.
LXVII.

N O T A I V.

De infimi Ordinis curvis , per quas æquatio data potest construi.

Q Uoniam Auctor in omnibus suis constructionibus Circulum adhibuit , qui Locus est duarum tantum dimensionum ; hinc factum , ut per Curvas cujusque gradus construere potuerit duntaxat æquationes duplo plurium dimensionum , quam sunt illæ , quibus earundem Curvarum natura exprimitur. Cum tamen ostensu perfacile sit , quod cujuslibet generis Curvæ aptæ sunt ad construendas æquationes tot dimensionum , quot indigitat quadratum numeri dimensionum , ad quas ascendunt æquationes curvarum illarum naturam exprimentes. Ita per Curvas trium dimensionum construi possunt non solum æquationes bis trium , seu sex , sed ter trium , seu 9 dimensionum ; quales Auctori non possent construi nisi ope Curvæ 5 dimensionum , ut ex locis alleg. colligitur. Etenim si proponantur duæ æquationes indeterminatae

Pag. 11. §.
eod. sub finem , ad verba, Ex-
cepto in
13, & pag.
106.

Num. LXVII. *tæ*, puta $ay = x^3$, & $y^3 = bbx + c^3$; in quarum una y sit unius tantum & x trium dimensionum, in altera vero & y dimensionum totidem; atque valor ipsius y juxta priorem æquationem inventus substituat in altera, manifestum, quod resultans æquatio $x^9 = a^6 bbx + a^6 c^3$, futura sit ter trium seu novem dimensionum, quæ per consequens mediantibus duabus Curvis, quibus duæ illæ indeterminatæ æquationes 3 dimens. respondent, construi poterit; adeo ut si peccatum sit censendum in Geometria [quod alicubi appellat Auctor] ad ejus constructionem Curvam magis compositam adhibere, ipsemet ab ejus labe haudquam immunis pronuciari possit, [de quibus fusius in *Act. Lips.* 1688, m. Jun. p. 329 *]. Id vitii jam olim animadverterat præclarus Geometra Gallus FERMATIUS, & post ipsum HIRIUS in Tractatu *de Constructionibus Æquationum*, ubi nobiscum agnoscit quod per Curvas trium dimensionum æquationes ad 9 usque dimensiones construantur, in eo tamen non minus culpandus, quod pro æquationibus altioribus, propriæ suæ in Dnum. DES-CARTES stricturæ velut oblitus, etiamnum ipse Curvas justo altiores adhibet, & verbi gr. pro construenda æquatione dimensionum 16, quæ juxta Regulam nostram ope duarum Curvarum 4 dimensionum construitur, Curvam 5 dimensionum requirit; quod equidem propterea facere coactus fuit, quia pro Curvarum altera perpetuo talem selegit, quæ æquatione *duobus tantum terminis* constante exprimitur [quemadmodum Dno. DES-CARTES erroris ansa fuit, quod pro illa Curvam *duarum tantum dimensionum*, sive Circulum adhibuit.] Nam si pro utraque tales assumantur Curvæ, quæ æquationibus exprimuntur ejusdem quidem gradus, at plurium, vel, si opus sit, omnium terminorum, nil ob stare video, quo minus per illas æquatio proposita, etiamsi completa fuerit, construi possit: quoniam duæ ejusmodi æquationes locales plures simul differentes terminos complectuntur, ut facile ostendi potest, quam æquatio proposita determinata comprehendit; adeoque omnes quantitates cogni-

* Supra N°. XXXI. pag. 343.

cognitas, quæ in proposita occurrunt, includere possunt. Sic duæ æquationes locales completæ decem dimensionum plures simul continent differentes terminos, quam æquatio determinata & completa 100 dimensionum continet; quod sufficit ad ostendendum, constructionem æquationis completæ 100 dimensionum per duas 10 dimensionum non esse impossibilem. Differentes autem voco terminos æquationum localium, in quibus altera vel utraque indeterminatarum literarum x & y diversum numerum dimensionum habet, ut axy , bxy^3 , $cxxyy$, qui tres differentes termini sunt.

Num.
LXVII.

IN LIBRUM II.

NOTA V.

*Curvæ transcendentes a Geometria non sunt
excludendæ.*

Spiralis, Quadratrix, Cyclois, aliæque ejusmodi Curvæ, quæ non sunt algebraicæ, hoc est, nullis æquationibus algebraicis certi & definiti gradus possunt exprimi, sed omnes æquationum gradus quasi transcendunt, *transcendentales* inde appellatæ, ab Auctore nostro in sua Geometria non potuerunt non negligi, quoniam earum tractatio hujus regulis haudquaquam subjacet, sed reconditoris cujusdam Geometriæ fundamentis innixa est. Idem tamen interim jure vapulat Cel. Geometræ LEIBNITIO, quod Curvas istas propterea e censu geometricarum Linearum eliminaverit; cum non tantum plurimas magni momenti proprietates possideant, nullatenus cedentes iis, quibus cæteræ gaudent, sed eas etiam vere geometricas exacteque demonstrabiles. Cui non obstat, quod motus quibus describuntur, nullam inter se relationem habeant, quæ exacte mensurari possit; quandoquidem ob hanc rationem potius ex Mechanica repudiandæ forent,

Rrrr 3

quæ

Pag. 18. lin.
7. a fine.
Verum enim vero,
& Pag. 38.
§. Ac proinde.

Num. LXVII. quæ describendis seu construendis magnitudinibus occupatur, quam ex Geometria, quæ jam positarum & descriptarum affectionibus demonstrandis potissimum insumitur. Ut ipse alias, initio Lib. 2^{di}, contra Veteres argumentatus est Auctor, qui pleraque etiam algebraicas e Geometria exclusas voluerunt.

NOTA VI.

*Error CARTESII arbitrantis curvarum & re-
ctarum linearum rationem nullo modo
posse cognosci.*

Pag. 30. §. *Quemad-
modum.* Popularis fuit antehac Geometrarum error, existimantium re-
cti & curvi tam disparem esse naturam, ut ratio unius ad al-
terum ab hominibus nullo modo cognosci aut comprehendi va-
leat. Quibus hic assentire videtur sagacissimus Auctor noster,
mutaturus haud dubie sententiam, si paucis annis fato suo super-
vixisset. Paulo enim post ejus obitum HEURATIUS *BATAVUS*,
(quaque primæ inventionis gloriam NELIO suo tribuant
Angli) Curvæ æqualem rectam assignavit, edita anno 1659 ad
SCHOOTENIUM Epistola, quæ ad calcem I^{te} Part. hujus *Geo-
metria* adjecta legitur. Ab illo vero tempore infinitæ aliæ diver-
sorum generum Curvæ, modernorum industria, rectificationem
nactæ sunt.

NOTA VII.

Methodus Tangentium CARTESII promota.

Pag. 40. §. *K. Pag. 244
& Pag. 262
seq.* Methodus hæc, qua Auctor ad inveniendas Curvarum data-
rum perpendiculares seu tangentes, SCHOOTENIUS
etiam ad *Maximi* & *Minimi* determinationem utitur, (quæque
in eo consistit, ut duæ radices æquales in æquatione concipiantur,)
ad

ad plura quoque alia Problemata, si dextre tractetur, adhiberi poterit, ad quæ alias Geometriam hanc haud facile extendi posse quis existimet. Et ne repetamus ea, quæ passim in *Actis Lips.* m. Jan. & Mart. 1692 *, m. Jun. 1693, † & m. Octob. 1694 ‡, hanc in rem publicata prostant; lubet tantum uno alterove exemplo ostendere, quo pacto nonnunquam eadem methodo ex data tangentium, non modo rectarum, sed etiam curvarum conditione, ipsa vicissim proposita Linea inveniri debeat.

EXEMPL. PRIMUM: Proponatur invenienda Linea ACc, quæ tangat vel tangatur ab infinitis Parabolis BCD, bDc, &c. super eodem axe AE constitutis, & vertices singulos B, b, &c. in singulis axis punctis, parametroque AB, Ab; &c. distantis verticum ab extremo ejus puncto A æquales habentibus. Ad lineam hanc investigandam cogitabimus, quod duæ quævis harum Parabolarum, ut BC, bc, se mutuo interfecare debeant alicubi citra quæsitam Lineam ACc; indeque vicissim colligemus, quod ex quovis citra lineam ACc dato puncto velut D, duæ ejusmodi Parabolæ inflecti possint, quæ parametros habeant verticum suorum distantis ab A æquales, sed eo futuræ sibi propiores, quo punctum D quæsitæ lineæ ACc propius assumptum fuerit; ita quidem ut si hoc in ipsa lineam ACc accipiatur (rectis AE, ED coordinatis ejus existentibus) ambæ Parabolæ prorsus sint coalituræ, junctis in communi puncto verticibus earum B & b, ipsaque tum æquatio ab AB vel Ab denominata duas æquales radices habitura: unde deinceps in Problemate pergere non erit difficile: Positis enim $AE = x$, $ED = y$, AB vel $Ab = s$, adeoque BE vel $bE = x - s$, habebitur, ex natura Parabolæ, rectang. ABE, vel AbE, seu $xs - ss = yy$, seu ED^2 , ordinataque æquatione a litera s, $xs - ss + yy = 0$, quæ terminotenus comparata cum æquatione duarum radicum æqualium $ss -$

265

* N°. XLVI, pag. 466. 471. & N°. XLVII, pag. 473, seq.

† N°. LVI. pag. 560.

‡ N°. LXII. pag. 638. seq.

Num.
LXVII.

$2es + ee = 0$, dabit $y = e$, & $x = 2e$, ac proinde $x = 2y$, quod indicat Lineam quæsitam ACc rectam esse, rationemque abscissæ ad applicatam constanter duplam. Addimus, quod tamen loco simplicium Parabolæ, proponatur series Paraboloidum, vel Cubicorum, vel Biquadraticorum, vel cujusvis altioris gradus, Linea ipsas omnes tangens nihilominus recta invenitur, ratione tantum inter abscissam & applicatam variante.

Fig. 8.

EXEMPL. SECUNDUM: Sit porro invenienda Curva GHhK, quæ tangat omnes Parabolas, quas globi bellici in singulis mortarii elevationibus ex puncto F constante vi explosi describunt. Ad hujus Problematis solutionem, ex arte Balistica ut demonstratum supponimus, quod globi, vi nitrati pulveris projecti, aut missilia quævis in aere Parabolas describunt, quarum altitudines supra planum horizontis sint in duplicata ratione sinuum angulorum elevationis tormenti. Quo posito, considero quod duæ quævis harum Parabolæ FMP, Fmp, quæ curvam quæsitam tangunt in H & h, sese necessario alicubi intra eandem secant; adcoque etiam reciproce, quod ex quovis intra illam dato puncto, velut O, duæ diversæ Parabolæ duci possint, quæ præscriptam tangant, præterquam quando punctum O in ipsa curva GHK assumptum fuerit; quo casu ambæ Parabolæ in unam coalescent, æquatis earum tum amplitudinibus FP & Fp, aut amplitudinum semissibus FL & Fl, tum altitudinibus LM & lm. Unde rursus calculum proficere non arduum erit. Esto namque altitudo jactus perpendicularis FG = a , FL = s , LM = t , FN = x , NO = y , & ducatur FR tangens Parabolam FMP in F & occurrens axi LM in R; fietque propter Parabolam LR = $2t$, & FR = $\sqrt{(ss + 4tt)}$: quare cum tangens FR repræsentet lineam directionis mortarii seu globi, eo momento quo ex mortario egressus Parabolam describere incipit, erit, per Lemma præsuppositum, FG ad LM, seu a ad t , ut quadratum sinus totius FR ad quadratum LR sinus anguli LFR, sive ut $ss + 4tt$ ad $4tt$; unde manat $ss = 4at - 4tt$, æquatio prior, quæ positionem curvarum FMP, Fmp determinat. Rursus ut LM ad QM sive t ad

t ad $t - y$, ita FL^2 ad QO^2 , hoc est, ss ad $xx - 2xs + ss$; ac proinde $yss - 2txs + txx = 0$, æquatio altera, quæ naturam Parabolæ respicit. Harum duarum æquationum beneficio eliminetur alterutra litera s vel t , puta t , ut habeatur æquatio $ss - \frac{x^3 + 2axy}{xx + yy} s + \frac{axxy + \frac{1}{4}x^4}{xx + yy} = 0$, in qua quia litera s duos æquales valores habere concipitur, comparetur ipsa cum æquatione $ss - 2es + ee = 0$, ut supra; vel quia æquatio duarum duntaxat dimensionum est, quærantur, per doctrinam pag. 7, ejus ambæ radices, nempe $s = (\frac{1}{2}x^3 + axy \pm xy \sqrt{(aa - ay - \frac{1}{4}xx)}) : (xx + yy)$, quæ cum æquales esse nequeant, nisi quantitas post signum radicale evanescat, sequetur $aa - ay - \frac{1}{4}xx = 0$, quod arguit lineam quæsitam GHK itidem Parabolam existere, cujus vertex G , axis FG , basis FK dupla FG , & latus rectum ipsius FK duplum.

Num.
LXVII.

Notandum hic primo, quod si infinitæ hæc Parabolæ, quarum communis tangens quæritur, aliam quamcunque positionem habere concipiantur, verbi gr. talem, ut ipsarum vertices existant in linea recta, aut in circumferentia circuli, aut in alia quavis curva data, prior tantum duarum præcedentium æquationum $ss = 4at - 4tt$ variabit; præterquam cum sunt in Ellipsi, cujus axis minor FG majoris est semissis; quoniam enim ipsa hæc Ellipsis æquationis nostræ Locus est, non differet eo casu Parabolæ positio a præsentem. Si vero quæstio proponatur etiam in aliis curvis quam Parabolis, tunc & altera æquatio variabit; adeo ut hinc generaliter constet, quo pacto quibuslibet lineis positione datis, alia invenienda sit Linea, quæ ipsas omnes tangat, vel ab iis tangatur.

Deinde etiam sciendum est, quod idem Problema sub alia adhuc forma proponi possit hunc in modum: Quæritur, qualis sit curva, quæ jungit omnia puncta G, h, K , eorum quæ globi ex F constante vi explosi in planis acclivibus FG, Fh, FK , attingere possunt remotissima. Problematis enim hujus identitas cum præcedente hinc patescit, quod ducta Parabola $Fmhp$, quæ cur-

Num.
LXVII.

vam supra repertam GhK tangat in ipso puncto h , in quo cam fecat planum Fh , omnes aliæ ex F eductæ Parabolæ curvam GhK alibi quam in puncto h tangere debebunt, proindeque cum totæ intra eandem jaceant, planum Fh necessario citra punctum h secabunt. Quæ quidem consideratio hunc usum præbet, ut inveniri possit angulus elevationis mortarii, e quo jactus globi in dato plano inclinato Fh fiat omnium longissimus; uti maximum esse constat in plano horizontali FK , si fiat explosio sub angulo 45 gr. id quod in re militari usum quandoque non contemnendum habere potest. Etenim, cum ob angulum datum nFh , nota sit ratio lateris Fn ad nh , seu x ad y , (quæ ponatur ut a ad b) habebitur $ay = bx$, quod substitutum in æquatione $s = (\frac{1}{2}x^2 + axy) : (xx + yy)$ valorem unius radicum æqualium ipsius s denotante, gignit $s = (\frac{1}{2}aax + aab) : (aa + bb)$; in æquatione vero $aa - ay - \frac{1}{2}xx = 0$ suffectum exhibet $\frac{1}{2}xx = -bx + aa$, ac proinde $\frac{1}{2}x = -b + \sqrt{(aa + bb)}$; quo valore porro surrogato in æquatione modo inventa $s = (\frac{1}{2}aax + aab) : (aa + bb)$, habebitur $s = aa : \sqrt{(aa + bb)}$, & hoc denique substituto in æquat. $ss = 4at - 4st$ ad habendum $2t$, fiet $2t = a + ab : \sqrt{(aa + bb)}$. Quare tandem cum FL , seu s , sit ad LR , seu $2t$, hoc est, $aa : \sqrt{(aa + bb)}$ ad $a + ab : \sqrt{(aa + bb)}$, ut sinus totus a ad tang. ang. LFR , crit tangens ista $b + \sqrt{(aa + bb)}$. Quod innuit, tangentem anguli quæsitæ elevationis mortarii esse aggregatum tangentis & secantis anguli inclinationis dati plani nFh : quod investigandum erat.

NOTA VIII.

De Circulo curvam osculante, simulque tangente ac secante.

Pag. 44, ad verba, Tangat ibidem curvam li-
neari CE , nec ipsam fecit.

Subintellige: nisi forte osculetur. Fieri enim potest, ut recta PO curvæ perpendicularis sit, & tamen circulus centro P per C descriptus, curvam in C non tangat, sed fecet: nempe si concursui

curfui duarum interfectionum five contactui tertia interfectio accefferit, & fic id quod *Osculum* dicitur, effecerit. Eadem cum restrictione est intelligendum, quod in fequenti paragrapho habetur, ubi afferitur, æquationem, per quam invenitur linea CM, vel MA, continere debere duas radices inæquales, fi circulus curvam lineam in C fecet: hoc enim tantum de fimplici curvarum fectione valet, non de composita, quæ ex trium pluriumve fimplicium concursu coaluit, totidemque radicum æqualium index est. Neglexit vero Auctor hanc restrictionem, quod ejus tempore nihil adhuc expliciti de natura Osculorum notum fuerat, quæ demum acutiffimo Geometræ LEIBNITIO distinctius confiderari, mox etiam aliis plenius excuti & ventilari cœpit; qua de re fufius in *Actis Lipsf.* menf. Jun. 1686, Mart. & Sept. 1692*, & Jun. 1693†. Interim tamen verum est, hac animadverfione non everti fundamentum methodi Auctoris, quippe quod in eo tantum pofitum est, ut cum recta PC curvæ perpendicularis est, faltem duæ radices æquales in æquatione adfint: adfunt autem hæ, five circulus tangat curvam, five osculetur; cum tres plurefve radices æquales duas non excludant, fed includant.

Num.
LXVII.

N O T A IX.

Quando fecunda Ovalis CARTESII tranfeat in Circulum, & qualem?

Q Uoniam non definitum nec demonstratum extat, in quem Circulum tranfeat fecunda hæc Ovalis, quando FA, AG, & GA, AG, in eadem ratione funt; utrumque hic loci fupplebimus: utemur autem figno = ad indigitandam proportionalitatem quatuor magnitudinum, quibus interferitur, ut difcurfum utrunque contrahamus.

Pag. 52, &
270. ad lit.

In recta FG abfcindatur ad partes G recta AX, quæ fit quar-

Sfff 2

Fig. 9.
ra

* Supra N°. XLVII. pag. 473, feq. & N°. LV. pag. 543.

† N°. LVI. Art. II. pag. 559.

Num. LXVII. ta proportionalis ad AF — AG, AG, & 2FA, ductisque ad commune punctum 2 curvæ A 2 rectis F 2, A 2, G 2 & X 2, demittatur ex illo perpendicularis 2P. Quo facto, cum A 5 : A 6 = AF : AG, [per hyp.] crit permutando A 5 : AF = A 6 : AG, seu AS [per V. 7.]; componendoque F 5 : AF = S 6 : AG, hoc est, F 2 : AF = G 2 : AG. Quare tum angulus F 2 G bisectus est per rectam A 2 [VI. 3], tum etiam rect. F 2 G : rect. FAG = quadr. F 2 : quadr. FA [VI. 2 2]; unde dividendo rect. F 2 G — rect. FAG [sive quadr. A 2 per Theor. part. post. Geom. pag. 370.]: rect. FAG = quadr. F 2 — quadr. FA : quadr. FA, rursusque permutando quadr. A 2 : quadr. F 2 — quadr. FA = rect. FAG : quadr. FA = AG : AF [VI. 1], & convertendo quadr. A 2 : quadr. F 2 — quadr. FA — quadr. A 2 [sive 2 rect. FAP per II. 2] = AG : AF — AG = [per constr.] AX : 2FA = rect. XAP : rect. 2FAP [VI. 1]. Quocirca rect. XAP = quadr. A 2 [V. 9]; ac proinde XA : A 2 = A 2 : AP [VI. 17] hoc est, in Triangulis XA 2, 2AP, latera circa communem angulum A sunt proportionalia. Ergo Triangula similia [VI. 6]. Ergo cum angulus ad P sit rectus, erit etiam angulus A 2 X rectus; igitur in semicirculo [III. 31]. Peripheria ergo circuli est Curva A 2 X, ejusque diameter recta AX. Quod determinandum demonstrandumque erat.

NOTA X.

Ovalis primi & tertii generis in rectam, secundi in hyperbolam, quarti in ellipsin abire potest.

Pag. 55. lin. 11. Quod si vero, &c. **Q**uod positis A 5 & A 6 lineis æqualibus, Ovalis primi & tertii generis abeat in Lineam rectam, secundi in Hyperbolam, quarti in Ellipsin, ita facile ostenditur: Quia per constr. AR vel AS = AG, vel AH. & per hypoth. A 6 = A 5, crit demtis

demtis additivæ æqualibus, *In I & III Ovali*: R_6 , vel $S_6 = G_5$, vel H_5 ; quare circulus, centro G vel H , radio R_6 vel S_6 , descriptus alterum centro F per 5 descriptum in ipso puncto 5 continget. *In II Ovali*: S_6 [hoc est, per construct. G_2] $= AG + A_5$; & *in IV^{ta}*, R_6 sive $H_4 = AH - A_5$; utrobique vero F_5 , hoc est, F_2 vel $F_4 = FA + A_5$. Unde patet differentiam rectarum F_2 , G_2 , differentiarum ipsarum FA , GA ; nec non summam $F_4 + H_4$, summæ $FA + AH$ æuari. Constat autem aliunde, illam *Hyperbola*, hanc *Ellipseos* proprietatem existere.

Num.
LXVII.

NOTA XI.

Lens hyperboliformis radios lucis [homogeneos] accurate colligens in unum punctum.

Quoniam enim, per hyp. $d - e$ est ad e , sicut g ad AM , Pag. 65. lin. seu x , erit componendo d ad e , sicut $g + x$ ad x , hoc est, 5. Et denique si AM , &c. sicut differentia rectarum GC & GA ad AM ; ac proinde per naturam harum Ovalium AM sive $AH - HM$ debet etiam æuari differentiarum ipsarum AH & HC , hoc est, HC debet esse $= HM$, quod fieri nequit, nisi focus H infinite distet a puncto C vel M , lineaque CH ipsi AM parallela fiat; quo casu curvam AC Hyperbolam evadere constat per ea, quæ pag. 274 a SCHOOTENIO demonstrata sunt. Idem etiam simili modo de altera curva CY ostendetur. Quod si vero linea AM major minorve inveniat quam $ge : (d - e)$, haud absimili ratiocinio colligitur, focus H finito intervallo a puncto C vel M ad dextram sinistramve ejus statuendum esse, quod arguit curvam AC primi tertive generis Ovalem esse, plane ut Auctor asseruit.

Num.
LXVII.

NOTA XII.

De Focis linearibus, seu Lineis causticis & dia-causticis.

Pag. 65.
§. Possim
quoque.

Superflua hæc est limitatio Auctoris; potest enim Problema generaliter confici, qualiscunque sit data vitri superficies, ut bene animadversum ab Ill. HUGENIO in *Tractatu de Lumine* pag. 113. Quemadmodum etiam circa totam materiam opticam, quæ in hoc secundo libro pertractatur, multo universaliora nunc detecta habentur, postquam a Geometris, præter puncta solitaria, quæ Focos appellarunt, integræ cœperunt considerari Lineæ, a radiorum reflexorum & refractorum concursibus formatæ, quas Cæl. Dn. LEIBNITIUS apposite Focos Lineares, alii Causticas ac Diacausticas nuncupare solent. De harum linearum affectionibus legi merentur ea quæ passim in *Actis Erud. Lips.* prodierunt, præsertim quæ habentur mens. Mai. 1692, & Jun. 1693*, ubi non tantum fundamentum omnium *Cartesianarum* exponitur, & reliquorum inventorum fons aperitur, sed & plurima alia scitu jucunda atque utilia exhibentur. Quomodo vero etiam præsentis Problematis constructio ex iisdem possit elici, haud obscurum est, si consideremus, illo nihil aliud præcipi, quam ut data linea curva reperiat alia, cujus diacaustica ex dato puncto conveniat cum datæ diacaustica ex alio dato puncto. Quod consequi poterimus, si quæramus prius Curvam, cujus Evoluta (hæc autem quid sit, ibi vide) conveniat cum diacaustica datæ curvæ ex dato puncto, & deinde illa mediante aliam, cujus diacaustica ex altero dato puncto cum inventæ evoluta coincidat. Quorum utrumque per ibi tradita facillimo negotio effectui dare licet, modo datæ curvæ rectam perpendicularem inveniri posse concedatur.

IN

* N°. XLIX, pag. 491. seq. & N°. LVI, pag. 549. seq.

IN LIBRUM III.

Num.
LXVII

NOTA XIII.

*De simplicissima Problematis construendi
ratione.*

SI sola Dni. DES - CARTES auctoritate standum sit, e pluribus Curvis, per quas aliquod Problema construi potest, semper illa eligenda venit, quæ generis est simplicissimi; ut maxime constructionem & demonstrationem Problematis multo impeditiorem reddat, quam alia, quæ uno alterove gradu magis composita est. At si asserti rationes desideremus, altum silentium. Et sane, cum totum negotium geometricum, vel manuum, vel mentis operatione absolvatur, illa constructio omnium optima censebitur, quæ utramque præ cæteris faciliat: quicquid sit de curvæ genere graduve, cujus ope hæc constructio peragitur. Nam quanquam curva gradus altioris quiddam forte habeat in natura sua magis compositi, quam alia inferioris; ratiocinium tamen, quo id colligimus, in constructione Problematis non attenditur, sed tanquam jam antea factum supponitur; & nunc solummodo spectatur curvæ descriptio, ejusque ad optatam constructionem applicatio, quæ nonnunquam, vel ipso fatente Auctore, facilius simpliciorque existit, quam si alia inferioris generis curva assumeretur. Exemplum ejus rei illustre habemus in Problemate *Quadrisectionis Trianguli Scaleni per duas normales rectas*, quod supra * construximus ope Hyperbolæ & Curvæ alicujus 4 dimensionum, tamen si duabus curvis trium idem præstari potuisset in hunc modum: Attollatur æquatio 8 dimensionum, quæ ambas Problematis condiciones includit, facta multiplicatione per x , ad
9 di-

Pag. 67. §.
Tamen si.

* Nota II. pag. 671. seq.

Num.
LXVII.

9 dimensiones, & sublato secundo termino reducatur ad hanc formulam: $x^2 \cdot m x^7 \cdot n x^6 \cdot p x^5 \cdot q x^4 \cdot r x^3 \cdot s x x \cdot t x \cdot v = 0$; tum sumpto ad libitum Loco aliquo 3 dimensf., puta Parabola Cubica, quæ exprimitur per $a a y = x^3$, substituatur valor iste ipsius x^3 in 5 vel 6 primis terminis æquationis propositæ 9 dimensionum: sic habebitur pro Loco altero æquatio indeterminata $a^6 y^3 \cdot a^4 m x y y \cdot a^4 n y y \cdot a a p x x y \cdot a a q x y \cdot a a r y$ [vel $r x^3$] $s x x \cdot t x \cdot v = 0$, quæ itidem trium tantum dimensionum existit. Ubi apparet, quod etiamsi methodus ista resolvendi æquationem propositam in duo Loco, multoties expeditior sit, constructionesque longe faciliores suppeditet illa, qua Dn. DES-CARTES uti solet, fieri tamen potest, ut facta substitutione coefficientium æquationis propositæ loco literarum $m, n, p, &c.$ Locus iste $a^6 y^3 \cdot &c.$ fiat constructu tam difficilis, ipsaque demonstratio tam impedita & coacta, ut nemo non præferendam videat nostram constructionem, ad quam insuper ipsa Problematis natura sponte quasi nos deduxit, ut maxime 4 dimensionum curvam postulet.

Sed & hoc denique addere non pigebit, quod si curvarum simplicitati nolimus scrupulosius inhærere, possimus unamquamque æquationem generaliter & facillime constructam exhibere, mediante curva aliqua, quæ licet tot dimensionum sit quot habet æquatio proposita, ejus tamen omnia puncta per solas lineas rectas inveniri possunt. Modus talis est: Primus æquationis terminus adæquetur reliquis, dein dividatur tota æquatio per potestatem radicis proxime inferiorem maxima, ut radix ab una parte sola habeatur; quemadmodum si proposita sit æquatio $x^5 = a x^4 + b b x^3 - c^3 x x - d^4 x + e^5$, fiat divisio per x^4 , ut proveniat $x = a + b b : x - c^3 : x x - d^4 : x^3 + e^5 : x^4$; tum assignato in recta indefinita AB puncto A, abscindatur ex illa arbitraria AB, quæ vocetur x , & quærantur tertia proportionalis ad hanc x & b , quarta ad x & c , quinta ad x & d , &c. cæque omnes, una cum quantitate a , pro signorum + & — varietate, sibi mutuo addantur demanturve, & quæ provenit recta BC normaliter applicetur ipsi AB in puncto B; sic erit punctum C ad curvam desideratam CC. Ducta enim recta AC, quæ cum ipsa AB angulum semi-

Fig. 10.

femirectum constituat, curvamque in punctis C, C secet, designabunt demissæ ex illis perpendiculares CB, CB, omnes radices propositæ æquationis: quod ex ipsa operatione per se manifestum est; quandoquidem recta BC, quatenus ad curvam applicata est, æquatur per constructionem quantitati $a + bb : x - c^3 : x^2 - d^4 : x^3 + c^5 : x^4$, eademque, quatenus est subtensa anguli femirecti, æquatur ipsi AB, seu x . Sciendum vero etiam est, quod idem liceat consequi, si loco primi termini æquationis quivis alius cæteris adæquetur. BARROWIUS celebris Geometra *Anglus* in *Lect. Geom.* pag. 145. homogeneum comparationis, seu ultimum terminum, reliquis adæquare solet. Sed & infinitis prope-modum modis ista variari possunt. Et habent sane hujusmodi constructiones in limitum, maximorum item & minimorum determinationibus, aliisque, suos usus, qui in aliis constructionibus vix locum habere possunt.

Num.
LXVII.

NOTA XIV.

De æquationum superiorum generatione per multiplicationes inferiorum.

POSSET aliquis Tyro, vel Tyrone major, hic quærere, cur ad explicandam æquationum generationem & naturam quantitates adæquandæ sint nihilo, priusquam multiplicentur, & cur non potius ita statim liceat arguere: Quia $x = 2$, iterumque $x = 3$, erit facta multiplicatione æqualium x & 3 per æqualia x & 2, productum $xx = 6$; quæ diversa plane est æquatio ab illa, quæ invenitur multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$. Ad hunc scrupulum sibi eximendum, scire debent Analytices studiosi, recte quidem colligi hoc ratiocinio, quod x , qua est 3, multiplicatum per x , qua est 2, hoc est, xx faciat 6; at sic quantitatem xx spectari ut rectangulum duorum valorum inæqualium, secus atque accipitur in æquationibus ex Problematis vel Theorematis alicujus resolutione ortis, ubi semper denotare solet quadratum.

Jac. Bernoulli Opera.

T t t t

dra

Num.
LXVII.

dratum unius ejusdemque valoris. Quo etiam sensu venit in modo formandi æquationes, quem hic præscribit Auctor. Posito namque $x = 3$, vel $x - 3 = 0$, si multiplicetur $x - 3$ per quamcunque quantitatem, velut per $x - 2$, sequitur productum $xx - 5x + 6$ nihilo æquale fore, cujuscunque valoris ponatur x in quantitate $x - 2$, adeoque terminum xx non minus ternarii quadratum, quam quodvis aliud rectangulum innuere posse. Quod similiter quoque de quadrato binarii est intelligendum, si cubi insuper posuerimus $x = 2$.

NOTA XV.

Cautio adhibenda in æquationum præparatione ad constructionem.

Pag. 74. lin. 7. *Et insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semiffis secundi major sit.* **I**nter alia, quæ ad æquationum præparationem ab Auctore requiruntur, ista quoque conditio adjecta est, ut usui postmodum esse possit in construenda æquatione sex dimensionum $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0$, prout ex seq. pag. 97 & 98 videre est. Etenim si quantitas cognita tertii termini q minor poneretur quam $\frac{1}{2}pp$ quadratum semiffis secundi, fieri posset ut constructio secundum regulam Dni. DES-CARTES instituenda redderetur impossibilis; utpote secundum quam Parabola describenda est, cujus Parameter sit $= \sqrt{(t : \sqrt{v + q} - \frac{1}{2}pp)}$.

NOTA

N^o. 67.

Fig. 7.

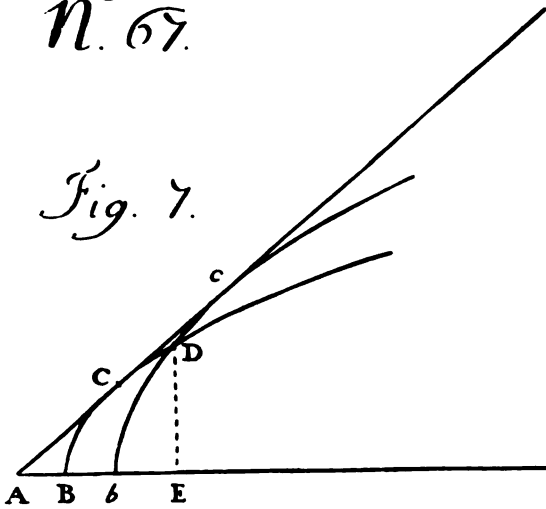


Fig. 8.

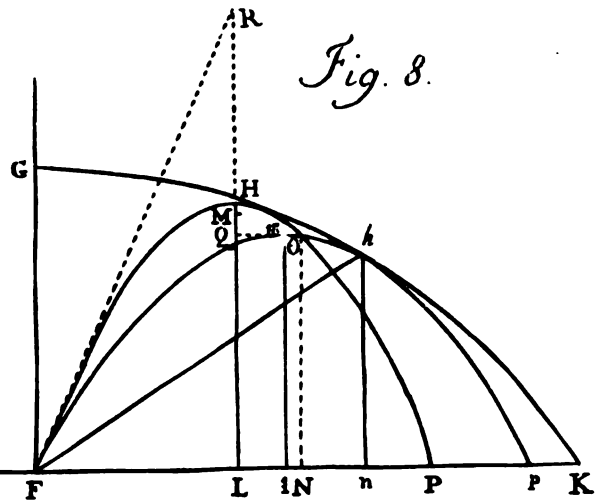


Fig. 9.

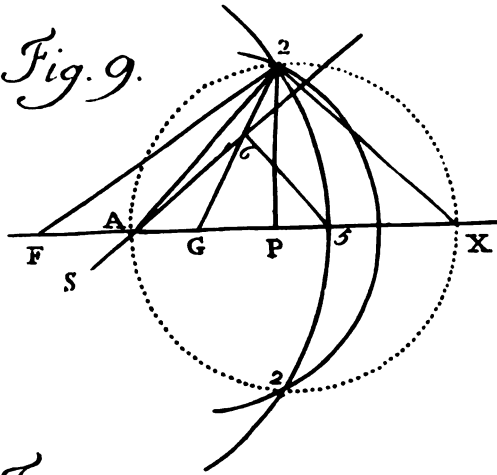


Fig. 10.

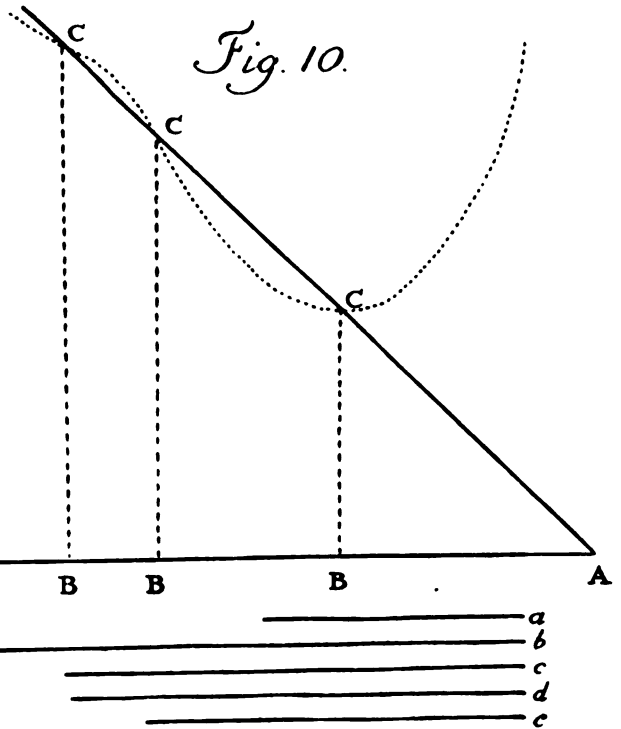
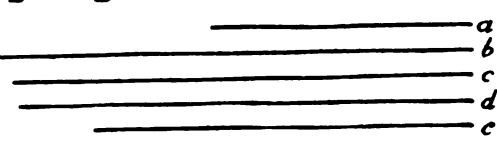
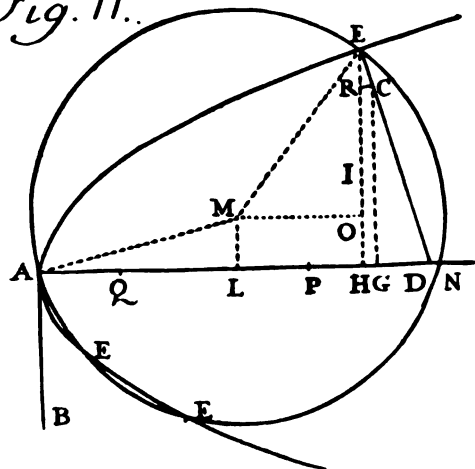
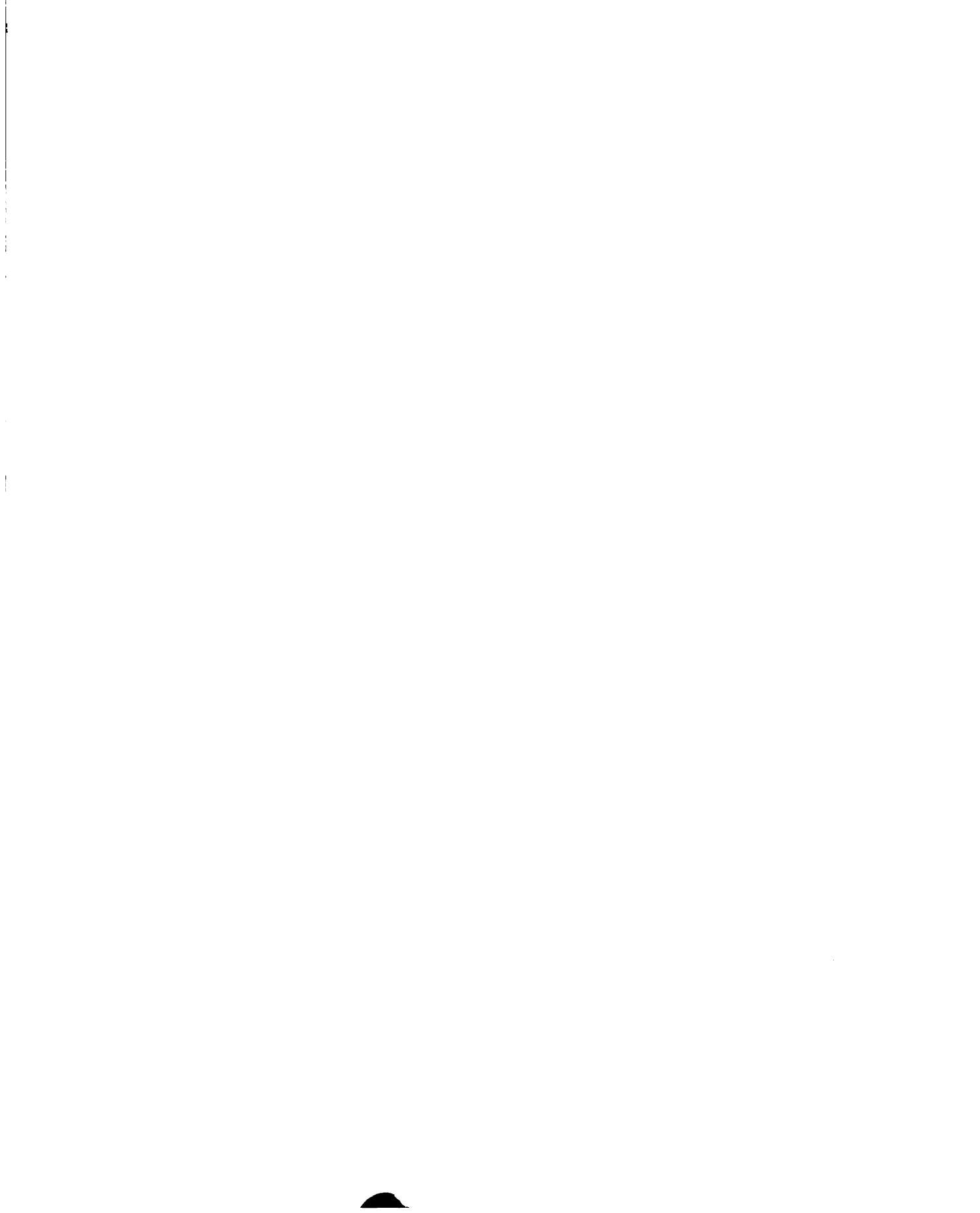


Fig. 11.





NOTA XVI.

Num.
LXVII.

Transformatio æquationis datæ in aliam, cujus terminus quilibet coefficientem habeat datæ magnitudinis.

Generaliter quantitas cognita seu coefficientis cujuslibet termini æquationis propositæ $x^4. p x^3. q x x. r x. s = 0$, transmutatur in aliam datam a , multiplicando radices æquationis, juxta doctrinam pag. 75, per $a : p$, si sit coefficientis secundi termini, quem transmutare velis; aut per radicem quadratam ex $a : q$, si sit coefficientis tertii; aut per radicem cubicam ex $a : r$, si quarti; aut per quadrato-quadratam ex $a : s$, si quinti; & ita consequenter, si plures termini adfuerint. Pag. 76. §. Quo Operatio.

NOTA XVII.

Dividendo æquationem datam per binomium, quod illius radicem esse suspicamur, cur juvet divisionem incipere a termino ultimo.

Cur Auctor divisionem incipere jubet a fine, ratio est, quia si fieri non possit, tum id plerumque initio statim operationis cognoscitur. Ex. gr. Examinaturus, num æquatio $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, dividi possit per $yy + 8$, divido primum -64 per $+8$, & habeo -8 , factaque per yy multiplicatione $-8yy$, quæ subtracta ex $-124yy$ relinquunt $-116yy$. Hoc vero quia non amplius per 8 sine residuo dividi potest, confestim concludo, divisionem per hoc binomium $yy + 8$ succedere non posse; quod alias factò initio ab y^6 non constitisset, nisi postquam tota operatio ad finem perducta fuisset. Pag. 77. §. Incipio ab ultimo termino.

Tttt 2

NOTA

Num.
LXVII.

NOTA XVIII.

Problemata Solida, quomodo per exiguam aliquam Sectionis Conicæ particulam construantur.

Pag. 85. lin. 14. *aut etiam per ipsarum particulam aliquam.* **Q**uomodo Problemata Solida per exiguam aliquam portionem Sectionis Conicæ construi possint, cum Auctor id non exponat, paucis hic indicare operæ pretium duximus. Primo quia data est Sectionis portio, dabitur quoque vertex Sectionis [*Vid. MYDORG. Conic. lib. 4. prop. 34.*], ejusque axis, & ab extremitatibus Sectionis demissæ in axem perpendiculares, quarum major vocetur *a* & minor *b*. Deinde per regulas Dni. DE BEAUNE, quas secundæ Parti *Geometria* hujus insertas legimus, quærantur Limites æquationis propositæ, considerando num cadant intra perpendiculares *a* & *b*, nec ne: nam si intra illas cadant, hoc est, si uterque limes minor sit quam *a*, & major quam *b*, perspicuum est æquationem absque ulteriori reductione per regulas, quas hic mox subjungit Auctor, construi posse. At si limitum alteruter, vel uterque, cadat extra *a* & *b*, sive major sit quam *a*, aut minor quam *b*, tum perpendendum porro est, utrum ab æqualitatis ratione magis minusve recedant quam perpendiculares *a* & *b*; & si magis, eousque saltem coarctandi sunt, donec ad æqualitatem æque vel propius accedant; quod video variis modis fieri posse: Ex. gr. Esto proposita æquatio $z^4 * - 463zz + 4980z - 14508 = 0$, sitque $a = 63$, & $b = 28$: Limes æquationis major est $\sqrt{463}$, & minor $\frac{14508}{4980}$ [*per 1 Prop. Cap. 7. de Limit. Æquat.*] adeoque radices singulæ æquationis minores quam 22 , & majores quam 2 ; sed quia 22 & 2 magis recedunt ab æqualitate quam *a* & *b*, seu 63 & 28 , constituo inter 22 & 2 tot medios numeros, quot requiruntur, ut bini ipsorum proximi ad æqualitatem æque vel propius accedant, nempe, 22 ,

10, 5, 3, 2. Quo facto, propositam æquationem transponendo & dividendo per z^3 ita reduco, ut habeatur z ab una parte sola, puta $z = 463 : z - 4980 : zz + 14508 : z^3$; tum pro z in denominatoribus pono successive valores 22, 10, 5, 3, 2, consideroque num valores inde resultantes ipsius z positis majores minoreſve evadant. Et quoniam posito $z = 22$, resultans valor minor fit quam 22; posito vero $z = 10$, resultat valor major quam 10; quemadmodum etiam posito z æquali uni reliquorum numerorum, valores inde resultantes positis identidem majores fiunt; hinc concludo, inter 22 & 10 necessario vel unam, vel omnes tres radices cadere; & si una, duas reliquas aut inter 10 & 5, aut 5 & 3, aut 3 & 2 conjunctim contineri, aut prorsus imaginarias esse. At quoniam omnes hi limitibus intercepti numeri infra 63 & 28, ceu extremas applicatas datæ particulæ Sectionis Conicæ, consistunt; idcirco prius ad illas multiplicatione elevandi sunt, juxta doctrinam pag. 75, faciendo $z = \frac{22}{27} y = \frac{10}{27} x = \frac{5}{27} * = \frac{3}{27} t$, vel etiam $z = \frac{10}{27} y = \frac{5}{27} x = \frac{3}{27} * = \frac{3}{27} t$, & sic transformando propositam æquationem in totidem alias ab $y, x, *$ & t denominatas, quarum deinde constructiones ope datæ portionis Sectionis Conicæ, per regulam pag. 87, seq. præscriptam ordine tentandæ sunt. Ita hic per primam obtinebitur unus valor pro y , & per secundam duo valores pro x , quibus cognitis & z innotescet; nec opus est progredi ad constructionem reliquarum æquationum, cum jam omnes tres radices propositæ æquationis inventæ sint: quanquam etiam ex aliis quandoque circumstantiis haud ita difficulter cognoscatur, quid primo sit tentandum, quid ultimo, ut perpensis iis multum sæpe superflui laboris rescindi possit. Sed succinctior multo fiet tota hæc operatio, si proposito adhibeamus ea quæ habentur in *Act. Erud. Lips.* mens. Sept. 1689 *, ubi modus docetur non inelegans appropinquandi continue radicibus æquationum per solas rectas lineas & circulos, quantum quis proxime voluerit. Postquam enim, hujus methodi ope, limites radicum sufficienter coarctati,

Num.
LXVII.

T t t t 3

ipsa-

* N^o. XXXVII. pag. 411. seq.

Num. LXVII. ipsaque æquatio, si opus sit, convenienti multiplicatione radicis in aliam transformata fuerit, poterit ipsa statim beneficio datæ portionis Sectionis Conicæ infallibiliter construi; quorum omnium prolixiori explicatione non indiget, qui præcedentia probe intellexerit.

IN COMMENT. SCHOOTENII

IN LIBRUM I.

NOTA XIX.

Constructio æquationis $z = (cd + ef) : g$.

Pag. 160. ad exemplum $z = (cd + ef) : g$. **A** Liter hoc ita resolvitur: Fiat ut g ad c , ita d ad quartam h ; nec non ut g ad e , ita f ad quartam i , summaque $h + i$ vocetur b , erit $z = b$. Vel etiam hoc pacto: Statuatur Triangulum rectangulum, cujus unum crus æquetur mediæ proportionali inter c & d , alterum mediæ inter e & f , & quæratur ad g & hypotenusam trianguli tertia proportionalis, quæ sit b , erit $z = b$.

NOTA XX.

Constructio æquationis

$$z = (acdd - aacc) : (d' + acd).$$

Ibid. sub finem. **S**CHOOTENIUS tres proportionales adhibet. Brevius id per duas proportionalitates obrinetur, faciendo, ut d ad a , ita c ad quartam m ; erit $dm = ac$, & $ddmm = aacc$; unde pro $\frac{acdd - aacc}{d^3 + acd}$ poterit scribi $\frac{d^3m - ddmm}{d^3 + ddm}$ seu $\frac{dm - mm}{d + m}$: quare si fiat denuo, ut $d + m$ ad $d - m$, ita m ad quartam b , erit $z = b$.

NOTA

NOTA XXI.

Num.
LXVII.

Constructio æquationum $z = \sqrt{(aa + bb)}$ & $z = \sqrt{((aadd - aaff - a^4) : (dd + 2df + ff))}$.

PRO *priore quantitate*: Ponatur $\sqrt{(aa + bb)}$ esse hypotenusa Pag. 162.
 alicujus Trianguli rectanguli, cujus unum crus sit a , & alte- ab initio.
 rum b : vel transmutetur bb in rectang. ab , ac deinde inter a &
 $a + b$ quærat media proportionalis &c. Ita quantitas $\sqrt{(aa$
 $- bb)}$ considerari potest, vel ut media proportionalis inter $a +$
 b & $a - b$, vel ut crus unum Trianguli rectanguli, cujus hypo-
 thenusa sit $= a$, & alterum crus $= b$, &c. Pro *posteriore quan-*
titate: Quærat per modo tradita $\sqrt{(aa + ff)}$, quæ vocetur m ;
 ac deinde $\sqrt{(dd - mm)}$, quæ dicatur n ; tandemque fiat ut d
 $+ f$ ad n , sic a ad quartam b , erit $z = b$. Eiusdem vero quan-
 titatis constructionem ipse quoque exhibuit SCHOOTENIUS
 pag. 153.

IN COMMENT. SCHOOTENII

IN LIBRUM II.

NOTA XXII.

*In puncto Flexus contrarii, recta nulla cur-
 vam tangere potest.*

RECÈ hic Commentator, in puncto Flexus nullam rectam Pag. 270. §.
 tangere Trochoidem; quod in omni Flexu contrario verum. Ubi notan-
 Etenim si recta quæpiam infinita tangens curvam, eandemque dum.
 præterea secans alibi, ita super illa rotari concipiatur, ut conta-
 ctus

Num.
LXVII.

Aut punctum totam successive curvam perambulet, fiet ut contactus iste, qui solus ex duabus intersectionibus coaluit, in puncto Flexus contrarii tertiæ insuper intersectioni jungatur, evanescente alterutra portionum curvæ, quæ ad easdem rectæ tangentis partes jacuerant; quo fit, ut contactus proprie talis esse desinat, inque sectionem transmutetur quæ *osculatio* dicitur. Cui etiam illud consentaneum est, quod circuli omnes curvam osculantes [osculo ex tribus intersectionibus conflato] curvam non tangunt, sed secant, ut supra annotavimus *. Nam, quod de universis constat, id speciatim quoque de illo valebit, qui curvam in puncto Flexus osculatur. Sed hic, cum perpetuo infinite magnus esse debeat, ut ex loco *Act. Lips.* ibid. allegato apparet, † a linea recta osculante non differt; quæ proinde & ipsa curvam secare, non tangere censenda est. Et quemadmodum osculantes circuli, sic & puncta Flexus contrarii, ob trium intersectionum concursum, per tres radices æquales reperiuntur, quod qua ratione ab HEURATIO in Conchoide sit præstitutum, pag. 258 *Geometria* hujus videre est.

IN COMMENT. SCHOOTENII

IN LIBRUM III.

NOTA XXIII.

Promotio Regulæ pro inveniendis commode divisoribus æquationis propositæ.

Pag. 307,
& 308.

Accidit sæpenumero, ut præstitis iis omnibus, quæ hic fieri jubet Commentator, numerus tamen divisorum utilium per quos divisio tentanda foret, adhuc nimius sit. Id qui cavere velit,

* Nota VIII. pag. 684, 685. † Vide tamen Num. LXXVI, infra,

velit, poterit radices propositæ æquationis initio statim operationis pluribus aliquot numeris, puta unitate, binario, ternario, denario &c. augere minuereve, transformataque æquatione in totidem alias, divisores ex omnibus conspirantes seligere. Nam tum aut nulli conspirabunt; aut si qui conspirant, raro per illos divisio frustra tentatur. Recte autem monet, pag. 308 lin. 27, sequujuslibet æquationis terminum ultimum, quo solo ad hoc negotium indigemus, posse reperiri, ut integra æquatione non sit opus. Hoc enim fit, multiplicando coefficientes terminorum propositæ æquationis per numeros continue proportionales ab unitate: videlicet ultimum terminum per unitatem, coefficientem penultimi termini per numerum quo augere vel minuere volumus radices, coefficientem antepenultimi per numeri hujus quadratum, sequentis per cubum, & ita deinceps; atque tribuendo productis eadem ubique signa, quæ occurrunt in æquatione data, si radices minuendæ; mutando vero illa in locis paribus ab ultimo, si augendæ sint. Aggregatum namque omnium productorum erit ultimus terminus æquationis quæsitæ. Ex. gr. Esto proposita æquatio: $x^3 - 3xx - 30x + 72 = 0$, & explorandum sit, num dividi possit per $x +$ vel $-$ divisore aliquo ultimi termini. Multiplico coefficientes terminorum retrorsum per 1, 1, 1, 1; per 1, 2, 4, 8; per 1, 3, 9, 27, &c. per 1, 10, 100, 1000. &c. servatis, si ita lubet, iisdem signis æquationis datæ, productaque omnia ejusdem ordinis addo, hac ratione:

$$\begin{array}{r}
 + 1x^3 - 3xx - 30x + 72 = 0 \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 8 & 4 & 2 & 1 \\
 27 & 9 & 3 & 1 \\
 1000 & 100 & 10 & 1
 \end{array} \\
 \hline
 + 1 - 3 - 30 + 72 = + 40 \\
 + 8 - 12 - 60 + 72 = + 8 \\
 + 27 - 27 - 90 + 72 = - 18 \\
 + 1000 - 300 - 300 + 72 = + 472
 \end{array}$$

Num.
LXVII.

Sic prodibunt 40, 8, 18 & 472, pro ultimis terminis æquationum, quarum radices unitate, binario, ternario, ac denario minores sunt radicibus æquationis propositæ.

Divisores autem numeri 40 sunt $\pm 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$.

8 . . $\pm 1, 2, 4, 8$.

18 . . $\pm 1, 2, 3, 6, 9, 18$.

472 . . $\pm 1, 2, 4, 8, 59, 118, 236, 472$.

horum primi unitate aucti efficiunt

tum $+ 2, 3, 5, 6, 9, 11, 21, 41$; tum etiam $- 0, 1, 3, 4, 7, 9, 19, 39$.

secundi binario aucti exhibent

tum $+ 3, 4, 6, 10$; tum $+ 1$ & $- 0, 2, 6$.

tertii aucti ternario dant

tum $+ 4, 5, 6, 9, 12, 21$; tum $+ 2, 1$, & $- 0, 3, 6, 15$.

quarti denique denario aucti gignunt

tum $+ 11, 12, 14, 18, 69, 128, 246, 482$; tum etiam $+ 9, 8, 6, 2$, & $- 49, 108, 226, 462$.

Qui quidem omnes inter se & cum divisoribus numeri 72, [qui sunt $\pm 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$] collati, ex affirmativis unum senarium, cumque unicum, consentientem habent, ex negativis nullum: unde suspicio est, unam verarum radicum æquationis propositæ esse $+ 6$, eamque proinde dividi posse per $x - 6 = 0$, quemadmodum reapse dividi potest, oriturque æquatio irreducibilis $xx + 3x - 12 = 0$.

NOTA XXIV.

*Analysis & Constructio Problematis Hugeniæni:
E puncto dato rectam educere quæ datæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.*

Pag. 322.

Cum non constet, utrum Problematis hujus constructio & demonstratio *Hugeniæna* aliquando lucem viderit, nec si vidit, omnium manibus teratur; idcirco lubet hic exponere, qualiter

liter existimemus illam a subtilissimo Viro olim concinnatam fuisse :

Num.
LXVII.

ANALYSIS ita habet: Data sit Parabola EAE, cujus vertex Fig. 11. A, latus rectum AB, & axis AG, sitque datum intra extrave illam punctum C, per quod ducere oporteat rectam ECD Parabolæ perpendiculararem. Esto hunc in finem demissa ex C in axem normalis CG, & ponatur $AB = a$, $AG = b$, $GC = c$, & $EH = x$; adeoque ex natura Parabolæ $AH = xx : a$, & $HD = \frac{1}{2}a$. Quo facto, propter simil. Triang. EHD & CGD, erit EH ad HD, sive x ad $\frac{1}{2}a$, ut GC, seu c , ad GD, quæ sic fiet $ac : 2x$; ac proinde $HD = GD$ sive $HG = \frac{1}{2}a - ac : 2x$, & $AH + HG = xx : a + \frac{1}{2}a - ac : 2x$, quod, ut apparet, æquatur ipsi b seu AG: unde facta reductione habetur $x^2 = * + abx - \frac{1}{2}aax + \frac{1}{2}aac$. Quæ æquatio cum ad pauciores dimensiones deprimi non possit [quod hic absque ulteriori tentamine ex Regulis *Hudden.* 12 & 14 colligitur] indicat Problema solidum existere. At quia in quæstionis datis ipsa jam Parabola includitur, poterit, illa mediante, constructio solis rectis lineis & circulo absolvi hoc modo :

CONSTR. Facta $GN = \frac{1}{2}AB$, bisecetur AN in L; erectaque super axe perpendiculari $LM = \frac{1}{2}CG$, describatur centro M, radio AM, circulus. Hic secabit Parabolam in punctis E, E, E, a quibus ductæ per C rectæ EC Parabolæ perpendiculares erunt.

DEMONSTR. Ad hoc synthetice demonstrandum, jungantur porro rectæ AM, ME, & demissa in axem perpendiculari EH, ductisque axi parallelis MO, CR, bisecetur RH in I, sumanturque in axe $LQ = LH$, & $GP = GN$. Hinc quoniam $AM = ME$, erit quoque $AM^2 [AL^2 + LM^2] = ME^2 [MO^2 + OE^2]$, demtisque æqualibus $AL^2 - MO^2$ seu $LH^2 = OE^2 - LM^2$ seu HO^2 . Sed $AL^2 - LH^2 = HAQ$, & $OE^2 - HO^2 = HEI$. Igitur & $HAQ = HEI$: unde HA est ad HE [hoc est, ex natura Parabolæ HE ad AB] sicut EI ad AQ, & permutando

V u u u 2

HE

Num.
LXVII.

HE ad EI, sicut AB ad AQ. Est vero $AB = 2GN$ [*Constr.*]
 $= PN$, & $AQ = HN$ [ob $AL = LN$, & $LQ = LH$],
 quare & HE ad EI, sicut PN ad HN, & convertendo HE ad
 HI, sicut PN ad PH; sumptisque consequentium duplis HE ad
 HR, ut PN ad 2PH [seu PG ad PH], iterumque convertendo
 HE ad RE, ut PG ad HG seu RC. Cum ergo propter simil.
 Triang. HED & REC, HE sit ad RE, ut HD ad RC; erit
 quoque HD ad RC, sicut PG ad RC; ac proinde PG, seu
 $\frac{1}{2}AB = HD$. Notum autem aliunde, hoc casu rectam ECD
 Parabolæ perpendicularem existere. Quare constat propositum.

NOTA XXV.

De Osculo Circuli & Parabolæ.

Pag. 339. §.
Præterea.

Optime hic animadvertit Commentator, quod ubi tres rectæ
 NM, CB, DE omnes sunt æquales, coincidentibus nimirum
 tribus intersectionum punctis M, B & E, futurum sit, ut Cir-
 culus Parabolam, quam hoc casu osculari dicitur, non tangat, sed
 secet; quod plane conforme est iis, quæ supra * ex *Actis Lips.*
 de contactu Osculi huc transtulimus.

IN ADDITAMENTUM.

NOTA XXVI.

Corrigitur lapsus calculi Schooteniani, qui BARTHOLINUM in errorem induxerat.

Pag. 385.
ad lit. F.

Mysterium hic quærit SCHOOTENII Commentator BARTHO-
 LINUS in eo, quod lapsus tantum calami fuit in SCHOOTE-
 NIO.

* Nota VIII, pag. 684, 685. & Nota XXII, pag. 697. 698.

N 10. Nescio enim, qua incuria factum, ut vera signa quantita-
tum BM, HC & 3DE in contextu immutata fuerint. Commem-
tator hoc factum propterea existimavit, quod alias membra ne-
gativa prævalerent affirmativis; sed in subjuncto calculo paralo-
gizat, & ex inconsequenti falsum infert. *Inconsequens* est, dum
arguit:

Num.
LXVII.

	144 p q	major est quam	72 q q.
auferatur	144 p p	major quam	36 q q.
<hr/>			
	relinquetur 144 p q — 144 p p major quam		36 q q.

Nam 12 major quam 7, & 10 major quam 3; nec tamen 12
— 10 seu 2, major quam 7 — 3 seu 4. Deinde etiam absolu-
te *falsum* est quod concluditur: Ergo 144 p q major quam 144 p p
+ 36 q q; quoniam 144 p p + 36 q q est summa quadratorum ex
12 p & 6 q, sicut 144 p q duplum rectangulum laterum, quod
summa quadratorum perpetuo minus esse constat. Quod vero
144 p q hic loci etiam minor sit quam 144 p p + 27 q q, adeoque
signa perperam mutata fuerint, sic liquet: Progressu calculi, ut
videre est ad lit. D & I, invenitur PA esse ad AQ, sicut $\frac{1}{2}q$ —
7 q : 16 $\sqrt{3}$ ad $\frac{1}{2}q + 7q$: 16 $\sqrt{3}$; ergo componendo PQ ad AQ,
hoc est, q ad p, sicut q ad $\frac{1}{2}q + 7q$: 16 $\sqrt{3}$: unde $p = \frac{1}{2}q + 7q$:
16 $\sqrt{3}$, & $pp = \frac{7}{2}q^2 + 7q$: 16 $\sqrt{3}$; qui valores in quantitibus
propositis loco p & pp substituti dabunt 72 q q + 21 q q $\sqrt{3}$ pro
144 p q, & 72 $\frac{7}{2}q^2 + 21 q q \sqrt{3}$ pro 144 p p + 27 q q. Sed 72 q q
+ 21 q q $\sqrt{3}$ minor est quam 72 $\frac{7}{2}q^2 + 21 q q \sqrt{3}$, ut apparet.
Quare & 144 p q minor quam 144 p p + 27 q q; quod ostenden-
dum erat.

Num.
LXVII.

NOTA XXVII.

Alter BARTHOLINI lapsus corrigitur.

Pag. 388. **E** Tiam hic impingit Commentator. Nam & altera radix
lit. N, ad (16842 — 390√785) : 6481 major est quam 7 : 16√3.
verba, Dicendum fuisset, radicem (16842 + 390√785) : 6481 negli-
Quam qui- gendam esse, quod major sit quam 1, qua minor esse deberet,
dem radi- ob SV (*fug*) minorem quam AV (*qn*).
cem.

IN EPISTOLAM PRIMAM HUDDENII
DE REDUCTIONE
ÆQUATIONUM.

NOTA XXVIII.

*De Methodo Huddeniana inveniendi maxi-
mum communem Divisorem duarum quan-
titarum.*

Pag. 422. **M**odus iste *Huddenianus* quærendi maximum communem Di-
visorem duarum quantitarum algebraicarum reapse non dif-
fert ab illo vulgari, quo Auctor *Princ. Math. Univ.* ad fractio-
num abbreviationem utitur Part. II. *Geom.* hujus, in Exemplis pag.
22, & quem in numeris præscripsit EUCLIDES Prop. 2. Lib. 7.
Id quod in præsentis exemplo, ubi calculum secundum hanc ope-
rationem apposuero, palam fiet: Redactis quantitatibus in ordi-
nem secundum literam aliquam, velut *d*, ut habeatur $d^3 - add$
 $- 2abd + 2aab$, & $d^4 - (bb + aa)dd + aabb$, divido
istam,

istam, in qua litera d plures dimensiones obtinet, per alteram in qua pauciores, dicendo: d^3 in d^4 habeo d ; quod multiplicatum per divisorem & detractum ex dividendo relinquit $ad^3 - (bb - 2ab + aa)dd - 2aabd + aabb$; & quia video literam d etiamnum tot dimensiones possidere in residuo quot in divisore, pergo dividere ad^3 per d^3 , ut fiat a , quod in divisorem ductum & subtractum ex residuo relinquit $-(bb - 2ab)dd + aabb - 2a^2b$. Hic vero quia lit. d non amplius tot dimensiones habet quot in divisore, inverto terminos, ponendo divisorem loco dividendi, & residuum loco divisoris, denuoque divido ita: $-(bb - 2ab)dd$ in d^3 habeo $d: (-bb + 2ab)$, facta multiplicatione & subtractione manet residuum $-add + (aa - 2ab)d + 2aab$; & quoniam sufficientes adhuc dimensiones adsunt literæ d , pergo dicere: $(-bb + 2ab)dd$ in $-add$ dat $-a: (-bb + 2ab)$, facta operatione restat $(aa - 2ab)d - a^3 + 2aab$. Hoc jam propter d unius dimensionis pono loco divisoris, sicut $(-bb + 2ab)dd + aabb - 2a^2b$ loco dividendi, atque dico: $(aa - 2ab)d$ in $(-bb + 2ab)dd$ invenio $(-bb + 2ab)d: (aa - 2ab)$ &c. remanetque $(-abb + 2aab)d + aabb - 2a^2b$, quod rursus divisum per $(aa - 2ab)d$ &c. in quotiente exhibet $(-abb + 2aab): (aa - 2ab)$, remanetque nihil. Unde colligitur, propositas quantitates compositas esse, earumque maximam communem mensuram haberi, si per denominatorem ultimi quotientis $aa - 2ab$ dividatur ultimus divisor; qui quidem ipsemet optatus divisor esset, si quotiens quantitas integra fuisset. Quod si quis hanc operationem cum *Huddeniana* conferre non pigratus fuerit, eadem fere in utraque vestigia deprehendet.

Num.
LXVII.

Num.
LXVII.

NOTA XXIX.

De Valore fractionis, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt.

Pag. 424. **R** Ecce hic observat Ampliff. Dn. HUDDENIUS, fieri quandoque posse, ut duæ quantitates habeant communem divisorem, etiamsi is per literam aliquam, eo modo qui hic docetur, inveniri nequeat. Id enim tum fit, cum litera illa, quæ tanquam incognita spectatur, in communi divisore non reperitur; quemadmodum hic *b* non reperitur in $d - a$: quo casu, priusquam concludatur, non dari duarum quantitatum seu æquationum communem divisorem, videndum est, num termini cujuscumque ad arbitrium sumpti cognita quantitas, aut quantitatis divisor aliquis utramque æquationem tollat: nam si non tollit, neque etiam per Reg. *Huddenianam* communis divisor invenitur, tum demum certum fit, plane nullum dari. Verum quidem est, aliud hic criterium proponi quo id cognoscatur: sed cœpitavit Auctor falsa nixus hypothesi, quod valor alicujus quantitatis expressæ per fractionem, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt, inveniri nequeat. Et quantum, post revisionem horum, ipsemet errorem correxerit in peculiari Scheda ad calcem prioris Partis *Geom.* subnexa, restringendo assertum ad illas tantum fractiones, quarum ambo termini per eandem quantitatem sunt indivisibiles; frustra tamen hæc videtur esse limitatio: quandoquidem omnis fractio quæ terminos habet nihilo æquales, si rationalis est, illos quoque habet communiter dividos; & si irrationalis est, quanquam terminos habeat communiter individos, valorem tamen habet omnino definitum & determinatum, non secus ac rationalis quæpiam fractio.

Sed

Sed quia non facile apparet, quo pacto valor fractionis ejusmodi per methodum Dni. DES-CARTES inveniri debeat, & tamen scrutinium istud elegans est, & minime vulgare, lubet hic modum, quo id institui possit, in gratiam Amatorum Geometriæ hujus exponere. Num. LXVII.

Proposita sit Fractio quæcunque, composita inter alias ex quantitibus a & z , atque talis ut, posita $z = a$, ambo ejus termini evanescant: quæritur quis tum sit fractionis valor? Ad hoc indagandum, converto primo terminos datæ fractionis in alios, eliminando literam z , illamque ponendo majorem vel minorem quam a quantitate aliqua indeterminata x . Deinde pono numeratorem æqualem quantitati tx , ortamque hinc æquationem a surditate libero, adhibitis, si quantitates valde sint implicitæ, iis subsidiis, quæ Dn. HUDDENIUS, pag. 429, seq. explicuit: quo rite peracto, necessario destruentur vel deficient unus pluresve termini in fine æquationis, sic ut illa per x , aut xx , aut x^3 &c. dividi possit. Hinc, præter illos terminos qui per se deficient, etiam ultimum eorum qui remanserint pono nihilo æqualem, & ex hac hypothefi valorem quæro literæ t , quem in locum numeratoris propositæ fractionis substituo. Tandem etiam simili modo cum denominatore operor, eaque ratione novam fractionem propositæ æqualem obtineo. Et si hujus ambo termini adhuc sint æquales nihilo, repeto de novo operationem, ponendo singulos datæ fractionis terminos $= txx$; & si valor literæ t etiamnum evanescat pro utroque termino, pono illos $= tx^3$, hinc tx^4 , tx^5 , &c. donec prodeat fractio, cujus non uterque terminus evanescit, quod necessario aliquando fiet. Quod si vero, post primam operationem, pro utroque termino valor ipsius t prodiret infinitus, ordiret etiam novam operationem, sed ponerem successive fractionis terminos $= t\sqrt{x}$, $t\sqrt[3]{x}$, $t\sqrt[4]{x}$, &c. donec t pro alterutro vel utroque termino finitum valorem acquireret. In quibus operationibus illud cum primis observandum est, quod non opus sit tota æquationum reductione uti, sed tantum quatenus ultimo termino inveniendi conducit, qui plerun-

Num. LXVII. que levi negotio ab attento Analyſta eructur. Exemplis res clarior fiet.

EXEMPL. 1. Sit propoſita Fractio $(ab - b\sqrt{(2aa - xx)}) : (\sqrt{(2aa - xx)} - \sqrt[3]{(2a^3 - x^3)})$, cujus ambo termini, poſita $x = a$, evaneſcunt: quæritur ejus valor? Pro x pone $a + x$, erit fractio $(ab - b\sqrt{(aa - 2ax - xx)}) : (\sqrt{(aa - ax)} - \sqrt[3]{(a^3 - 3aax - 3axx - x^3)})$. Fiat $tx = ab - b\sqrt{(aa - 2ax - xx)}$; ſublata ſurditate habebis $bbxx + ttxx + 2abbx - 2abtx * = 0$, poſitoque ultimo termino $2abbx - 2abtx$ æquali 0, invenies $t = b$, qui novus eſt fractionis numerator. Fiat iterum $tx = \sqrt{(aa - ax)} - \sqrt[3]{(a^3 - 3aax - 3axx - x^3)}$, ſive [ponendo brevitatis ergo p loco $\sqrt{(aa - ax)}$, & q loco $\sqrt[3]{(a^3 - 3aax - 3axx - x^3)}$] $tx = p - q$, vel $q = p - tx$. Cubetur æquatio, & prodibit $q^3 = p^3 - 3pptx + 3ptxx - t^3x^3$, omnibuſque membris, quæ ſignum radicale exuerunt, ad unam partem translatis, fiet $q^3 + 3pptx + t^3x^3 = p^3 - 3ptxx$, quæ ſi porro quadretur, æquationem producet $(q^3 + 3pptx + t^3x^3)^2 = pp(pp + 3ttxx)^2$, quæ ab omni ſurditate libera eſt. At quoniam non integra hac æquatione indigemus, ſed tantum quatenus duobus ultimis terminis inveniendis inſervit, poteris in ſubſtitutione omnes illos negligere, in quibus x plures dimenſiones acquirit; quocirca loco q^3 pone tantum $a^3 - 3aax$, loco $3pptx$ tantum $3aatx$, loco $(pp + 3ttxx)$ ſolummodo $a^4 - 2a^3x$, &c. atque ſic loco inventæ æquationis $(q^3 + 3pptx + t^3x^3)^2 = pp(pp + 3ttxx)^2$, non niſi $a^6 - 6a^5x + 6a^4tx$ &c. $= a^6 - 3a^5x$ &c. adeoque ſublata a^6 , quæ ſe ſponte deſtruit, $-6a^5x + 6a^4tx$ &c. $= -3a^5x$ &c. ſive $6a^4tx$ &c. $= 3a^5x$ &c.; unde poſito $6a^4tx - 3a^5x = 0$, habebis $t = \frac{1}{2}$ pro novo Denominatore fractionis propoſitæ, cujus propterea valor erit $b : \frac{1}{2}$, ſeu $2b$.

EXEMPL. 2. Proponatur Fractio $(a - x)\sqrt{(2aa - 3ax + xx)} : (a - \sqrt{(2ax - xx)})$, cujus termini, in caſu $x = a$, ruruſ evaneſcunt, quæque poſito $x = a - x$ in iſtam tranſmutatur $x\sqrt{(ax + xx)} : (a - \sqrt{(aa - xx)})$. Pone $tx = x$
 $\sqrt{(ax)}$

$\sqrt{(ax+xx)}$, & sublata surditate $ax^3+x^4=txx$, fac ultimum terminum txx æqualem nihilo, & habebis $t=0$; vel brevius ita: Quia $tx=x\sqrt{(ax+xx)}$, erit $t=\sqrt{(ax+xx)}$, hoc est, cum x , propter $x=a-x$, fingatur nihilo æquari, erit quoque $t=0$. Pone deinde $tx=a-\sqrt{(aa-xx)}$, fiet $txx+xx-2atx=0$, & quia $2atx$ evanescere debet, erit etiam $t=0$; adeoque fractio proposita $=\frac{0}{0}$. Sed quia valor ejus nondum sic cognoscitur, pone denuo $txx=x\sqrt{(ax+xx)}$, habebisque $x^4-ax^3:(tt-1)=0$, & quia $ax^3:(tt-1)$ debet evanescere, colliges ipsum t pro numeratore valoris esse infiniti. Simili modo operare cum denominatore, ponendo $txx=a-\sqrt{(aa-xx)}$, & invenies $t=\frac{1}{2}a$; adeo ut ipsa fractio absolute infinita censenda sit, quæ contra prorsus evanesceret, si numerator finita, denominator infinita quantitas fuisset. Sed, quod hic peculiariter observandum venit, si post secundam hanc operationem ambo fractionis termini, qui post primam evanuerant, infiniti redderentur, sic ut nec ita fractionis valor cognosci posset, non assumendum esset in seq. operat. tx^2 , tx^4 &c. neque etiam $t\sqrt{x}$, $t^3\sqrt{x}$, &c. sed $tx\sqrt{x}$, &c. Omitto alias observationes & cautelas, quas attenta harum rerum meditatio Lectori suggeret*.

Num. LXVII.

N O T A X X X.

Retegitur ars, qua HUDDENIUS Regulam suam XI invenire potuerit.

Cum inventio tot tamque differentium Theorematum, quæ hac Regula continentur, non possit non magnam admirationem excitare apud ignaros, quos artificium methodi latet, non

Pag. 439.
seq. ad
Reg. XI.

X x x x 2

ingra-

* De hujusmodi Fractionum valore inveniendò, videatur *Analysis inf. parv.* Art. 163. seq. Item *Job. BERNOULLI* Schediasma, *Alf. Erud. Lips.* pag. 375. m. Aug. 1704

Num.
LXVII.

ingratum iis spero fore, si quaecunque arcanum retegam, & in una alterave parte Regulæ modum ostendam, quo non tantum ista, sed & pleraque alia ab ingeniosissimo Epistolæ hujus Auctore inveniri potuerunt. Methodus enim ubique eadem est, & in eo consistit, ut supponantur statim duæ æquationes ejusmodi quales quaruntur, ac deinde, facta ipsarum multiplicatione per se invicem, comparentur separatim omnes termini productæ cum omnibus terminis propositæ æquationis, quo inde coefficients quæsitæ æquationum elici & determinari possint. Quæ quidem methodus non differt nisi in applicatione ab illa, qua ipse Dnus. DES-CARTES in constructionibus Problematum solidorum & hypertolidorum invenendis usus est, & quam alias etiam solennem sibi fuisse fateatur, pag. 49. Imo hæc illa est, qua quicquid in Geometria ardui & præclari uspiam habetur, reperiri debuit; cum frustra sane hæc & talia a priori tentarentur.

Quod speciatim Regulam hanc undecimam concernit, observamus primo, quod sese extendat tantum ad illas æquationes, quæ ex multiplicatione duarum produci possunt, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt; cujus rei ratio est, quod si quis similia condere vellet Theoremata pro illis, quæ ex duabus completis producuntur, is incideret in æquationes nihilo simpliciores iis, quas sibi resolvendas proposuit. Deinde animadvertimus, quod nonnulli Divisores copulantur vocula *et*, quando videlicet formula æquationis propositæ uno tantum modo in duas æquationes resolvi, sed ejus Divisor ex plurium terminorum collatione determinari potest: alii disjunguntur vocula *vel*, quoties illa etiam pluribus modis in duas resolvablem existit.

Ex. gr. Sit proposita æquatio hujus formæ $x^6, *, *, *, sxx, tx, v = 0$, deturque illam dividi posse in duas alias, quarum una sit unius, altera γ dimensionum. Ponantur hæc esse $x + y = 0$, & $x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, e quarum ductu producitur $x^6 + ax^5 + bx^4 + cxx + dxx + ex + ey = 0$,
 $+ y + ay + by + cy + dy$
 quæ terminotenus comparata cum proposita $x^6, *, *, *, sxx,$
 $tx,$

$tx, v=0$, sequentes exhibet æquationes, $a+y=0, b+ay=0, c+by=0, d+cy=s, e+dy=t, \& ey=v$; sive $a=-y, b=-ay=yy, c=-by=-y^2, d=s-cy=s+y^2, e=t-dy, \& ey=v$. Et quoniam in æquatione x^3+ax^2 &c. aliquis terminus nihilo æqualis requiritur, videndum quis ille sit: facile autem apparet, nec a , nec b , nec c , nihilo æquari posse, cum secus etiam evanesceret y , contra hyp. neque etiam e , qui ultimus terminus esse debet; sed solum d ; quo casu fiet $y^2=-s, e=t, \& ey=v$: unde porro fluit $y=v:t=s\pm\sqrt{\sqrt{-s}}=-st^2:v^3=\&c.$ adeoque $x+y=x+v:t=x\pm\sqrt{\sqrt{-s}}=x-st^2:v^3=\&c.$ qui sunt ipsissimi Divisores æquationis propositæ, qui in Auctore habentur, pag. 442.

Num. LXVII.

Rursus proponatur Æquatio $x^3, px^2, *, *, sx, t=0$, ponaturque dividi posse per æquationem completam duarum, & aliam trium dimensionum. Sunt hæ $xx+yx+z=0, \& x^3+axx+bx+c=0$, e quarum multiplicatione oritur æquatio

$$\begin{array}{cccc} x^3 + ax^2 + bx^3 + cxx + cyx + cz = 0 \\ + y \quad + ay \quad + by \quad + tz \\ + z \quad + az \end{array}$$

conferenda cum proposita

$x^3, px^2, *, *, sx, t=0$. Quod quinque novas æquationes subministrat: $a+y=p, b+ay+z=0, c+by+az=0, cy+bx=s, \& cz=t$. Sed quia in æq. x^3+axx &c. aliquis terminus deficere surponitur, videoque duos hic deficere posse, pono primo $a=0$. deletisque in novis his æquationibus iis membris, in quibus a habetur, reperio per primam earum $y=p$, nec non collatis 2, 3 & 5^{ta} æquationibus, $z=\pm\sqrt{(t:p)}$; vel, coll. 2, 3 & 4^{ta} æq. $zx-ppz+s=0$, vel, coll. 2, 4 & 5^{ta} æq. $x^3+sz-pt=0$; vel denique coll. 3, 4 & 5^{ta} æq. $z=ppz:(ps+t)$; adeo ut æquatio proposita semper dividi hoc casu possit per $xx+px+z$, existente vel $z=\pm\sqrt{(t:p)}$, vel $zx-ppz+s=0$, vel $x^3+sz-pt=0$, vel $z=\pm ppz:(ps+t)$, quorum divisorum omnium tantum primus in Auctore occurrit, pag. 447.

Num.
LXVII.

Si deinde ponam $b = 0$, delendo ea membra, in quibus b habetur, invenio iterum collatis omnifariam æquationibus quaternis varios valores pro y & z . Sed Auctor illorum tantum rationem habuit, qui fluunt ex comparatione tum 1, 2, 4 & 5^{te}, tum 2, 3, 4 & 5^{te} æquationis; quippe quarum illa præbet $y = p + 1 : s$, & $z = y : s$; hæc $y = \pm s \sqrt{s : t}$, & $z = \pm \sqrt{s}$.

Postquam ita singulos terminos intermedios in æquatione $x^3 + axx$ &c. nihilo æquales supposuimus, nunc ambo simul deficere supponendi essent, faciendo a & $b = 0$; sed statim apparet, non posse utramque evanescere, quin, contra hyp. evanescat quoque x . Adeo ut Æquatio 5 dimens. ejus formæ cujus est proposita, non possit ex æquatione quadrata completa per cubicam nisi gemino modo produci, nempe sic, ut in cubica vel deficiat secundus terminus tantum, vel tertius tantum. Atque ad eundem quoque modum prolixiora illa Theoremata quartæ & quintæ partis Regulæ hujus Tyrones invenire seu examinare possunt, in quo scrutinio illud cumprimis observare debent, ut omnes variationes possibiles enumerent, quibus fieri potest, ut hi vel illi termini in altera duarum æquationum, e quarum ductu proposita produci fingitur, deficiant.

NOTA XXXI.

Analysis Regulæ XVII. Huddenianæ.

Pag. 469 & 470. ad Reg. XVII. **E**Xhibet hic porro Auctor Epistolæ quædam Theoremata pro reducendis æquationibus, quæ per alias nullo termino carentes dividi possunt. Horum primum & simplicissimum, quod æquationibus quadrato-quadratis inservit, sic eruitur: Positis duabus æquationibus quadratis, $xx + ax + b = 0$, & $xx + yx + b = 0$, comparetur productum ipsarum

$$\begin{array}{r} x^4 + ax^3 + bxx + byx + bh = 0, \\ + y \quad + ay \quad + ab \\ + b \end{array}$$

quoad

quoad singulos terminos cum æquatione proposita $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ut exinde prodeant quatuor novæ æquationes, $a + y = p$, $b + ay + h = q$, $by + ah = r$, & $bh = s$. Deinde, neglecta secunda, qua non indigemus, cæteræ conferantur inter se, quo fiet ut eliminatis ipsarum ope literis a & b , inveniatur $y = (r - hp) : (s : h - h)$. Excepto tantum, cum s determinatur ad hh , & simul r ad hp ; quo casu ambo fractionis termini evanescent, & in causa sunt, cur y ex his solis datis inveniri nequeat: quare tum, relicta tertia æquatione, secunda in auxilium vocanda est, qua cum cæteris debito modo collata, reperitur $y = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + 2h - q)}$. E quibus manifesta fiunt Theoremata, quæ hic dedit Auctor; simulque cætera quoque difficiliora investigandi modus patescit.

Num.
LXVII

NOTA XXXII.

Ratio Regulæ Huddenianæ ad transformandam æquationem propositam in aliam cujus ultimus terminus pauciores habeat divisores.

Rationem hujus operationis satis percipiet attentus Lector ex iis, quæ supra * commentati sumus; cum perinde sit, addere producta coefficientium æquationis per numeros continue proportionales ab unitate; atque surrogare hunc, qui unitatem sequitur, in locum x , & tunc aggregatum ipsorum terminorum sumere.

Pag. 480.
S. Assumpto.

* Nota XXIII. pag. 698. & seq.

Num.
LXVII.

I N G E O M E T R I Æ
P A R T E M I I.

N O T A X X X I I I.

Cautio observanda in Divisionibus instituendis.

Pag. 15. &
Pag. 16. **I**N Divisionis operatione id præprimis Tyrones monendi sunt, ut assumpto membro aliquo Divisoris [in quo quædam litera plurimas vel paucissimas dimensiones habet] pro principali Divisore, non primum quodlibet quod occurrit Dividendi membrum per ipsum dividant, sed tale seligant, in quo eadem litera itidem maximum vel minimum dimensionum numerum habet; quod similiter in toto operationis decursu, quotiescunque de novo inveniendo quotiente agitur, attendendum venit. Ita si in Exemplo 2°. pag. 15 *, pro primario divisore statuamus $\frac{2}{3}ab$, ubi litera a minimum, aut b maximum numerum dimensionum habet, dividi per ipsum debet $\frac{4}{9}a^2b^3$, non $\frac{1}{3}a^4b$, & si pro divisore seligamus $\frac{1}{2}aa$, dividenda quantitas a^5 [ut factum ab Auctore Introductionis] non alia. Quod si vero in divisore pariter atque in dividendo plura habeantur membra, in quibus litera aliqua maximum vel minimum divisorum numerum habet; illa litera neglecta, habenda est ratio reliquarum. Ita quoniam in secundo Exemplo pag. 16 †, dividendus continet duo membra $4f^4u^4q$ & $+4f^3u^4q$, in quibus lit. u quatuor, & divisor duo, in quibus eadem duas dimensiones obtinet, nempe $ffuu$ & f^3uu ; siquidem lubeat per alterutrum horum, puta $+f^3uu$ divisionem instituere, divido per ipsum $4f^4u^4q$, non vero $+4f^3u^4q$; cum reliqua litera f plures ibi quam hic dimensiones

* Ubi dividendus proponitur $\frac{1}{3}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5$ per $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa$.

† Ubi $\frac{1}{4}q - \frac{1}{2}fq + f^2u^2q - fu^2q - 4f^4u^4q + 4f^3u^4q$ dividendus proponitur per $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}f - ffuu + f^3u^2$.

nes habeat, uti quoque plures habet in $+f^{\text{num}}$ quam in $-ff^{\text{num}}$. Num. LXVII.
 Horum vero observatio ideo necessaria est: quia secus si Tyrones faxint, atque cum semper in dividendo ordinem sequi velint, quo propositæ sunt quantitates, fieri inter operandum potest, ut subinde in orbem redeant, & vel nullum divisionis finem inveniunt, vel cum demum post superfluas circuitiones assequantur.

NOTA XXXIV.

Dignoscere num propositæ quantitates surdæ communicantes sint, nec ne.

POtest adhuc aliter cognosci, num propositæ quantitates surdæ Pag. 35. §.
 communicantes sint, necne; neque opus est partem illarum Ratio autem.
 prius ex signo radicali liberare, quod sæpe ob divisorum multitudinem non parum molestum. Criterium tale: Ducta quantitarum propositarum una in alteram, si sint affectæ latere quadrato; aut in quadratum alterius, si sint affectæ latere cubico; aut in cubum, si biquadrato; aut in biquadratum, si surdesolido &c. consideretur, an productum inde ortum sit perfectum quadratum, aut cubus, aut biquadratum, aut surdesolidum, &c. nam si tale sit, quantitates datæ communicantes erunt; sin minus, non erunt: & si communicantes sunt, erunt ad se invicem, ut dicti producti radix quadrata, aut cubica &c. ad alteram quantitarum rationalium, cum cujus potestate multiplicatio facta fuit.
 Ex. gr. Quantitates $\sqrt{27}$ & $\sqrt{48}$ sunt communicantes, quia 1296 productum 27 per 48 est quadratum; cujus radix cum sit 36, erit $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{48}$, ut 27 ad 36, seu ut 3 ad 4. Ita $\sqrt[3]{40}$ & $\sqrt[3]{135}$ sunt communicantes, quoniam 216000 productum quadrati ex 40 per 135 est cubus, cujus radix 60; unde $\sqrt[3]{40}$ ad $\sqrt[3]{135}$ est, ut 40 ad 60, seu 2 ad 3. Sed $\sqrt[3]{20}$ & $\sqrt[3]{140}$ non communicantes sunt, quia 22400000 productum biquadrati ex 20 per 140 non est perfectum surdesolidum.

Simili indicio constat, num duæ quantitates surdæ potentia
Jac. Bernoulli Opera. Y y y sint

Num.
LXVII.

sint commensurabiles : Facta enim multiplicatione quadrati unius per alteram, ubi sunt affectæ latere cubico ; aut per quadratum alterius, ubi latere biquadratico ; aut per cubum, ubi surfsolido &c. si productum inde ortum deprehendatur esse verus cubus, aut quadrato-quadratum, aut surfsolidum &c. quantitates datæ saltem potentia commensurabiles sunt, earumque quadrata erunt, ut producti radix competens ad alteram quantitatum rationalium, cum cujus potestate variabili multiplicatio facta fuit. Ex. gr. $\sqrt[3]{243}$ & $\sqrt[3]{576}$ sunt potentia commensurabilia, eorumque quadrata, sicut 324 ad 576, sive 9 ad 16 ; quoniam 324 est radix cubica numeri 34012224 producti ex multiplicatione quadrati 243 per 576. Non secus etiam, si cubus alterutrius e datis quantitibus ducatur in alteram, vel in quadratum alterius, vel cubum, vel surde-solidum &c. prout affectæ sunt vel latere biquadratico, vel surde-solido, vel quadrato-cubico &c. atque ex hac multiplicatione producatum perfectum biquadratum, vel surde-solidum, vel quadrato-cubus &c. erunt propositæ quantitates potentia cubica commensurabiles, seu ipsarum cubi erunt ut numerus ad numerum. Et ita consequenter eandem semper observando progressionis legem pro superioribus potentiis. Plerunque vero non est opus huc progredi. Quotiescunque enim quantitates surdæ sunt commensurabiles secundum aliquam potentiam, cujus exponens ad exponentem signi radicalis sit primus, etiam secundum longitudinem cæterasque omnes potentias commensurabuntur. Et si divisor maximus exponentium signi radicalis & potentiæ, secundum quam propositæ quantitates commensurantur, est binarius, etiam secunda potentia, omnibusque illis quas binarius metitur, commensurari poterunt. Et si divisor exponentium maximus est ternarius, poterunt commensurari secundum tertiam potentiam omnesque illas quas ternarius metitur. Adco ut si datæ quantitates surdæ nec longitudine, nec potentia secunda, nec tertia &c. sunt commensurabiles, etiam commensurari nequeant secundum ullam aliam, cujus & signi radicalis exponentes tales sunt, ut unitas, binarius, aut ternarius &c. ipsorum maxima

xima fit communis mensura. Sed non attinet istis diutius immorari. Num. LXVII.

NOTA XXXV.

Demonstratio Regulae extrahendi Radicem quadratam ex binomiis.

Regula hæc extrahendi Radicem quadratam ex Binomiis, Pag. 46. De Extrahione Radicis &c. fundatur in Prop. 55 & seqq. Lib. X. *Elem. EUCL.* potuitque analyticè sic inveniri: Ponatur binomium $a + \sqrt{b}$, ejusque radix $x + \sqrt{y}$; erit igitur quadratum hujus $xx + y + 2x\sqrt{y} = a + \sqrt{b}$. Fiant duæ æquationes separatæ, $xx + y = a$, & $2x\sqrt{y} = \sqrt{b}$: per primam habetur $xx = a - y$, per alteram $xx = b : 4y$; unde & $a - y = b : 4y$, seu $yy = ay - \frac{1}{4}b$, & $y = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa - b}$; ac proinde $xx [a - y] = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa - b}$. Quare tandem fiet $x - \sqrt{y}$ radix quæsitæ binomii $= \sqrt{(\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa - b})} + \sqrt{(\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{aa - b})}$; quod id ipsum est, quod hæc Regula præcipit.

FINIS.

N^o. LXVIII.

NOVA

ET SINGULARIS

GEOMETRIÆ PROMOTIO,

*Circa dimensionem quantitatum Curvarum,**per D. T. **

Ab. Erud.
Lipf. 1695.
Nov. p. 489

CUm variæ in Mathesi dentur viæ ad easdem veritates invenien-
das ducentes, plurimum in eo ponendum est studii, simplicissima
ut investigetur. Quamvis enim hoc ipsum non sit apprime ne-
cessarium in omnibus difficultatibus particularibus, maxime ta-
men requiritur in principiis fundamentisque ponendis, quæ ita sunt ge-
neralia, ut tota iisdem Mathesis innitatur; ad quæ pertinet *genesis om-
nium curvarum*. Quapropter, postquam harum omnium facillimam des-
criptionem *per focos* reperi, statim eandem cum Publico communicavi
in *Medicina mentis*, ostendens, quam latum hæc campum nobis aperiat,
infinitorumque novorum, singularium, & facillimo negotio decerpendo-
rum inventorum feracem, ut augmentum veritatis, quod non unius est
hominis, conjunctis viribus ab eruditis Viris eo melius promoveretur.
Neque parvam mihi attulerunt lætitiæ ea, quæ Dnus. LEIBNITIUS,
& doctissimorum nobile par Fratrum BERNOULLIORUM jam præ-
stiterunt, *Actis*que inseruerunt *Eruditorum*. Sed cum hæc curvarum ge-
nesis per focos nimiam præ se ferat simplicitatem, tantique momenti
non videatur, ut ex ea tanta tamque præclara & utilia possint derivari;
non ipse solum alia nova inventa in *Actis Eruditorum* exhibui, sed in
posteriori quoque *Medicina mentis* editione, alia quædam corollaria non
vulga-

* DR TSCHIRNHAUSEN.

vulgaria adjeci, ut alios quoque ad hanc rem penitus pensandam excitarerem. Nota mihi quidem plura, elegantia, præstantiaque sunt confectaria, quorum hæcenus nullam, nisi privatim apud Viros maximi ingenii, feci mentionem; arbitratus illa quondam ob novitatem usumque singularem fore gratiora, cum publici juris ea faciendi mihi dabitur occasio. Quoniam vero an brevi hoc futurum sit, cum eo non vivam in otio, quod hæc studia vel maxime requirunt, nescio; nonnulla ex his in publicum producere constitui, ejus quidem momenti, ut non displicitura credam Geometris; eo fine, ut vel hoc ipso augmentum veritatis, sin minus per me ipsum, per alios tamen, qui magis abundant otio, promoveatur.

Num.
LXVIII.

I. Ex hac ergo curvarum genesi per focos intellexi, præter unicam & simplicissimam *Hugenianam* evolutionem dari innumeras alias; ita ut quælibet curva infinitis possit. modis evolvi, sequanturque hinc dimensiones curvarum infinitis modis, ut alio tempore ostendi. Perspexi etiam, ipsam spatiorum curvilinearum dimensionem generalissime hinc derivandam, & ea quidem ratione, quæ admodum simplex est, & in qua singularia hæc occurrunt. 1°. Uti notum pervulgatumque est, spatiorum circularium dimensiones absolvi ductu lineæ cujusdam rectæ in arcum circuli; ita universaliter hoc ipsum omnibus competit *spatiis curvilinearis*, ut scilicet sint *aqualia producto alicujus rectæ in arcum curvæ alicujus*, occurrantque hic plurima circulari dimensionem analoga. 2°. *Curvæ quarum ope reliquarum curvarum metior spatia*, quæque primæ quasi curvæ existunt & præcipue sunt considerandæ, proprietates. habent valde notabiles, & in his, quod multis erit inexpectatum, *curvæ quoque sunt mechanica*, quas *CARTESIUS* ex Geometria perperam, ut in *Medicina mentis* clare probavi, eliminavit, quarum proinde usus hinc redditur in Geometria manifestior. 3°. *Curvæ illæ*, per quas mensurantur reliqua spatia, *in lineas rectas abeunt, cum spatium aliquod absolute est quadrabile*. Unde facile ex ipsa genesi dijudicari potest, utrum aliquod spatium quadrabile sit, necne. Derivatur quoque inde, figuras clausas non admittere quadraturam, intellige ordinariam; id quod consentit cum iis, quæ habet Dominus *NEWTON**; neque difficulter cognosci potest, quænam figuræ clausæ sint, cum alias multa possint earum figurarum afferri exempla, quæ videntur quidem, nullatenus tamen sunt clausæ.

Ut autem mens mea eo melius possit intelligi, exemplo, quod dictum est illustrabo. Sit ellipsis *AFGE* [*Fig. 1*]; sumptoque radio æquali semidiametro minori, describatur ex centro *C* circumferentia *BFD*, tandemque pro lubitu ducatur ex *C* recta *CG*, & *HG* parallela *AE*. Dico restangulum

Y y y 3

gulum

† Vide N°. *LXVI* pag. 650, Nota g, & N. *LXXI*, *LXXII*, Art. 2.

Num. ^o LXVIII. ^o gulum ex recta AE in arcum circulearem HD esse semper quadruplum sectoris elliptici CGE †, ac proinde hoc modo facile *spatium ellipticum in aequales partes ex puncto C dividi potest*. Idem obtinet in parabola & hyperbola, si his omnia, ut decet, adplicentur; ea tamen cum differentia, ut quemadmodum in ellipsi, prout jam vidimus, dimetienda adhibetur arcus curvæ circularis HD, seu talis curvæ, ubi normalis ad tangentem est constans seu datæ rectæ æqualis; ita in hyperbola qualibet mensuranda adhibendus sit arcus curvæ, in qua tangens ipsa est constans seu datæ rectæ æqualis, adeoque curvæ, quæ ex mente CARTESII est mechanica; in parabola vero alia curva, ubi normalis ad tangentem & ipsa tangens sunt æquales constanti quantitati, hoc est, linea recta, assumatur. Atque sic unico theoremate omnium sectionum conicarum per rectangulum ex constante recta in aliam curvam aut rectam ducta traditur dimensio. Quæ quidem spero Geometris non minus grata futura, quam monitum HUGENII, quo simile quid in hyperbola æquilatera a se deprehensum indicavit; cum hæc omnia modis plane diversis eruta, multoque sint universaliora, nec solum omnibus hyperbolicis, sed infinitis aliis curvis applicari possunt.

Quænam autem porro hinc conclusiones in curvis superiorum graduum, quæ tres pluresve focos habent, consequantur, periti harum rerum insigni cum voluptate per se ipsos facile experientur. Possem enim plura huc elegantia & universalia theoremata adferre; sed ne ipsis desiderium minuat hæc suo Marte indagandi, unico tantum exemplo assertioni meæ fidem faciam.

Sit curva FG [Fig. 2], quæ descripta sit ope quatuor focorum A, B, C, D, sitque E centrum gravitatis quatuor punctorum A, B, C, D: dico, si ex quinque his punctis, versus duo puncta F & G pro lubitu assumpta in curva, ducantur rectæ, spatia AFG, BFG, CFG, DFG quadrupla esse semper spatii EFG; si autem quinque essent foci, fore quintupla, & sic porro in infinitum. Sed de his satis. *

II. Notum est in circulo circumferentias esse inter se ut diametros & spatia circularia similia ut diametrorum quadrata; non autem pervulgatum est, quod animadverti, dari unicum tale theoremata pro omnibus curvis ejusdem speciei, ex quo, verbi gratia, curvarum ellipticarum & hyperbolicarum ratio ad invicem innotescit, quæ nos hactenus latuit, possuntque infinita nova & singularia circa omnes curvas derivari. Id quod specimine aliquo illustrabo.

Sint duæ parabolæ AE & BD [Fig. 3] quarum focus C; ducaturque recta CDE. Dico *curvam parabolicam AE esse ad curvam parabolicam*

† Vid. N^o. sequenti, Art. I.

* Ibidem, Art. II.

bolicam BD , ut *minoris latus reſtū ad majoris latus reſtū*. Unde ſi ratio laterum reſtorum ſit dupla, curva AE dupla erit curvæ BD . Neque absolute neceſſe eſt, ut eundem focum C habeant; poteſt enim punctum ad libitum aſſumi, & nihilominus tamen ratio, quam curvæ ad ſe invicem habent, determinari. *

Num.
LXVIII.

III. Cognita quoque eſt ratio, quam partes curvæ circularis ad ſe invicem habent, ſed circa quaſvis alias curvas hæc nondum oſtenſa fuit a Geometris. Illis ergo forte non ingratum accidet, ſi ipsis ſignificavero, me methodi univerſalis eſſe compotem, *in qualibet curva, data portione ejuſdem, aliam ſemper aſſignandi, que datam rationem ad priorem obrinet*; cujus rei ſpecimen quoque exhibebo.

Sit parabola $ACDEF$ [*Fig. 4*], cujus focus B , ſitque data portio curvæ CD , & alia aſſignanda EF , ita ut CD ſit ad EF , ut data linea GH ad IK . Duſtis lineis BC & BD , fiat ut quadratum GH ad quadratum IK , ita reſta BC ad reſtam BE , & BD ad BF : Dico curvæ parabolicæ portionem CD ad EF eſſe in ratione data. Sit, exempli gratia, GH ad IK ut 1 ad 2 , & fiat BE quadrupla BC , & BF quadrupla BD , erit portio curvæ EF dupla partis CD †. Occurrit hic quidem caſus, ubi peculiaris quædam obſervanda; ſed cui demonſtratio præcedentium nota, facile videbit quid ſibi agendum, aliaque egregia hinc eliciet; verbi gratia, modum *in curvis aſſignandi ſpatia datam rationem habentia, licet ipſorum dimenſio ſit incognita*, prout hoc in ſpecie circa præſens exemplum in hyperbola æquilatera, cujus dimenſio analogæ eſt parabolicæ, nova & hætenus incognita ratione fieri poteſt, ut aſſignentur ſpatia quæ datam lineæ ad lineam rationem inter ſe habent: multa que alia præclara & plane nova theoremata, vel circa ipſas conicas ſectiones, quæ tamen hætenus nocturna diurna que manu quaſi verſatæ fuerunt a Geometris. Demonſtrationes enim horum omnium afferre & prolixum nimis foret & ſupervacuum, cum hæc inventa præcipue dicata ſint Geometris primi ordinis, quibus jam notum eſt, quomodo ex datis concluſionibus univerſalibus circa dimenſionem quantitatum, demonſtrationes, via retrograda, facile poſſint inveſtigari.

IV. Conſtitueram hic ſubſiſtere, ſed commodum incidit in manus meas *Johannis BERNOULLII* meditatio de dimenſione curvarum linearum per circulares; quod egregium inventum & mirifice me delectavit, & effecit, ut hæc pauca adjicienda duxerim. Vir hic Celeberrimus præcipue reſpexit in eruendo hoc Problemate ad evolutionem *Hugenianam*; ſed quia juxta deſcriptionem meam curvarum per focos, quælibet curva infinitis modis poteſt evolvi, hinc ejus doctrina infinities amplificari poterit,

* Vide N°. ſeq. Art. III.

† Ibidem, Art. IV.

Num. terit, adeoque Geometria singulare hoc modo augmentum recipiet. Ad-
 LXVIII. dam vero & aliud, quod in tempus aliud reservaveram. Notum est,
 quod dato cuilibet spatio infinita alia spatia, diversæ naturæ, æqualia
 perfacile inveniri possint; sed idem in curvis lineis efficiendi nemo ad-
 huc ostendit rationem. Si enim via ordinaria rem aggrediamur, ad tan-
 gentium methodum inversam deducimur, cujus ingeniosissima nobis spe-
 cimina dedit Illustrissimus Vir *Marchio* HOSPITALIUS. Licet autem
 hanc quoque methodum probe excoluerim, & mihi fere omnimode satis-
 fecerim, non tamen ea hic præstat, quod comparari possit cum methodo
 universali, quam non ita pridem inveni, ope cujus *infinitæ diversæ cur-
 væ possunt designari datæ curvæ absolute æquales*. Specimina hujus rei alio
 tempore exhibiturus sum: jam enim vix licuit ob circumstrepentia ne-
 gotia ad amicorum instantiam præcedentia litteris consignare.



Nº. LXIX.

JACOBI BERNOULLI
 OBSERVATIUNCULA

Ad ea quæ Mense Novembri 1695

De Dimensionibus Curvarum publicata leguntur,
Auctore D. T.

Acta Erud.
Lips. 1696.
Jun. p. 260.

P Ræclara sunt, & e maxime desideratis illa, quæ hic promi-
 misit Nobilissimus D. T. * atque si ullatenus præstari pos-
 sunt, ab ejus certe ingenio expectanda erunt. Oportan-
 dum tantum esset, ut cum de excellentia Methodi, quam te-
 gere voluit, per exempla nobis judicandum sit, talia selegisset
 quæ

* DE TSCHIRNHAUSEN. Nº. præced.

quæ haud facile aliunde solvi possent, aut aliis exceptionibus obnoxia forent; qualia num ista sint, quæ dedit Vir eximius, paucis examinandi veniam ab ipso flagitamus. Num. LXIX.

Primo, quod de spatio elliptico nos docet in *Fig. 1*, nulla singulari methodo videtur indiguisse, cum ex natura ellipsis simplici proportione concludatur; juncta enim CH & producta GH donec ipsi CF occurrat in I, quoniam ubique IH est ad IG sicut CD est ad CE, erunt tum spatia IHDC, IGEC, tum triangu-
la IHC, IGC, tum his ablatis sectores CHD [sive $\frac{1}{2}$ CD in DH] & CGE, ut CD & CE, hoc est, erit CE in DH = 2 CGE. Et patet generaliter, quod si loco circuli & ellipsis substituuntur quævis aliæ curvæ ejusdem generis, hoc est, quæ habeant applicatas IH, IG in constante ratione, fore in eadem illa ratione etiam sectores CHD, CGE.

II. Quod deinde proprietatem spectat, quam focus curvarum per fila descriptarum attribuit, *Fig. 2*, omnibus illa indifferenter punctis est communis, & ex generalissima centri gravitatis natura manat; sumptis etenim in quacunque curva quibuscunque & quotcunque punctis A, B, C, D, eorumque centro gravitatis E, semper vel summa trilineorum AFG, BFG, CFG, DFG; vel [si punctorum nonnulla ad convexas curvæ partes assumantur] differentia trilineorum quæ ab una & eorum quæ ab altera parte sunt, trilinei EFG totuplex erit quot assumpta puncta fuerint. Sed & præter punctum E infinita alia puncta idem præstant, quæ in axe aliquo æquilibrii per E transeunte existunt. (*) Considerationem igitur focorum nihil hic ad rem facere apparet.

Jac. Bernoulli Opera.

Z z z z

III. Quod

(*) Nempe, si ducatur recta FG, & in eam demittantur ex singulis punctis A, B, C, D, E normales Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; erit, ex natura centri gravitatis $4Ee = Aa + Bb + Cc + Dd$ adeoq. $4Ee \times \frac{1}{2} Fg = Aa \times \frac{1}{2} Fg + Bb \times \frac{1}{2} Fg + Cc \times \frac{1}{2} Fg + Dd \times \frac{1}{2} Fg$, hoc est quater Trian-

gulum rectil. $EFG = \text{Triang. rectil. } AFG + BFG + CFG + DFG$; & addito utrinque segmento FG quater, erit quater spatium curv. $EFG = \text{spatii } AFG + BFG + CFG + DFG$. Manifestum autem est idem præstare singula puncta sumpta in recta quæ per E ducitur parallela ipsi FG.

N.LXIX. III. Quod porro asseritur de portionibus parabolæ communem focum habentium, *Fig. 3*, etiam procedit cum diversos habent, modo punctum C , e quo recta CE educenda est, tale assumatur, ut ipsa CA , CB , sint in ratione Parametrorum; at nihil hic peculiare tribui video parabolis, quod non idem quoque valeat de omnibus *eiusdem speciei* curvis, hoc est, curvis similibus & circa communes axes, focos, centra, aliave puncta similia similiter constitutis; puta, si curvæ AE , BD , forent duæ ellipses vel hyperbolæ similes circa eundem axem AC , & communem focum, seu centrum, aliudve punctum simile C similiter constitutæ, semper essent abscissæ portiones curvarum AE , BD , in ratione rectarum similibus abscindentium AC , BC , vel CE , CD , utraq; nimirum in ratione constante: quorsum applicari possunt ea, quæ jam anno 1692 Mense Maio * ad spiram mirabilem de triangulo circa angulum [hic infinite parvum ECD] rotato & proportionaliter fluente dicta sunt.

IV. Quod denique subjungit Nobilissimus Auctor de assignandis in parabola portionibus datam ad invicem rationem habentibus, *Fig. 4*, id rogo ut revideat; deprehendet enim rem aliter se habere, atque in locis a vertice A tantillo remotioribus portionem CD ad EF semper minorem obtinere rationem, quam GH ad IK . Quorum omnium ingeniosissimum Auctorem non ideo commonefacimus, ut præstantissima ejus inventa, quibus ipsi plenam fidem adhibemus, ullatenus suspecta reddamus, sed illum invitemus potius, ut vel ipsam suam methodum præclarissimam nobiscum communicare dignetur, vel si hanc diutius nos latere cupit, selectioribus saltem speciminibus eandem nobis comprobet. Quibus si addere velit nonnulla methodum tangentium inversam concernentia, tentare poterit tum Problema Decembris 1655 †, cujus & ego solutionem dabo proxime, tum alia hinc inde in *Actis* occurrentia, quæ nondum solutionem acceperunt, ipsique adeo uberem materiam Publico gratificandi suppeditabunt.

N°. LXX.

* N°. XLIX. pag. 301. Vide etiam *ibid.* Not. l. Prop. I. pag. 497

† Supra N°. LXVI. pag. 663.



Nº. LXX.

JACOBI BERNOULLI
 C O N S T R U C T I O
 G E N E R A L I S

*Omniium Curvarum Transcen-
 dentium,*

Ope simplicioris Tractoriae & Logarithmicæ.

Methodus Tangentium inversa, in qua dubio procul sum-
 mus Geometriæ apex consistit, tribus potissimum parti-
 bus absolvitur, quarum prima versatur in reducendis
 differentialibus altiorum generum [seu differentio-differentiali-
 bus] ad differentialia primi generis ; altera in separandis litteris
 indeterminatis cum suis differentialibus a se invicem ; & tertia in
 construendis æquationibus hoc modo reductis. In singulis perfici-
 endis varie huc usque occupati fuimus , quotquot promotioni
 hujus Scientiæ operam nostram addiximus. Ad primam inter alia
 pertinet Theorema de radiis circulorum osculantium, cujus Men-
 se Decembri 1695, pag. 538 * mentionem injeci, quodque in
 secundis differentiis ad primas reducendis usum habere dixi, ut
 suo tempore uberius explicabo †. Ad secundam spectat, quod

*Alta Erud.
 Lips. 1696.
 Jun. p. 261.*

Z z z z 2

ibi-

* Supra pag. 641.

† Vid. N^o. CIII. Art. X.

No. LXX. æquatio fuerit $r dy = t dx$, & r etiam indeterminata sit, sed data per y , constructio nihilo difficilior evadit; posito enim $r dy = a dz = t dx$, constat ex præcedente constructione, inveniri posse relationem inter x & z , itemque inter y & z , quare etiam inter x & y innotescet. Patet autem etiam ex allatis, quod si data sit relatio trium linearum CG, GH & GD [quod contingit, quandocunque Trajectoria HI est ex numero algebraicarum;] curva LM possit construi per solam logarithmicam sine adjuvamento alterius mechanicæ; unde novum criterium pro dignoscendis curvis hoc modo construibilibus resultat, quod Lectores nostri cum olim * exhibitio conferre possunt.

* N^o. LVIII, pag. 591, 592. De quo vide N^o. LXIV, pag. 631, & LXVI, Art. III, pag. 646, 647.



N^o. LXXI.

G. G. L. *

NOTATIUNCULA

AD ACTA DECEMBRIS 1695,

Pag. 537 & sequentibus †.

AGa Erud.
Lips. 1696.
Mart. p. 145

I Niquus sim, si non agnoscam, excellentis Mathematici Jacobi BERNOULLII Basileensium Professoris meditationibus plurimum debere scientias istas profundiores, & me potissimum ipsi pariter ac Fratri ejus Ingeniosissimo, Joanni BERNOULLIO, nunc apud Groninganos Professore Clarissimo obstrictum esse, qualiacunque a me jacta Analyseos

* Goth. Gul. LEIBNITII.

† Ad Num. LXVI.

lyseos cujusdam superioris fundamenta ad varios usus applicuere, suis-**N. LXXI.** que inventis mirifice auxere, & ut magis magisque innotescerent ac celebrarentur effecere. Virum autem Celeberrimum *Jacobum* BERNOULLIUM, cujus nupera me ad hoc Schediasma invitavere, persuadere sibi velim, longissime a me abesse animum de meritissimis ejus laudibus detrahendi. Gloriam inventarum figurarum Elasticarum [ex hypothese scilicet valde verisimili] ipsi illibatam relinquo. Theoremata de radiis circulorum osculantium, etsi mihi non ignota, ne attigissem quidem, nisi originem, eorum pariter ac similium aliorum, ex singulari quodam differentialis calculi genere simplicissimam exponendam occasione data putassem. Ut iis in Elasticis figuris uterer in mentem non venit, quod figuris illis quærendis nunquam animum adjecissem; non quod res sit pulchra & inquisitu digna, sed quod in tanta agendorum copia, quæ ab illo recte acta putavi, nollem denuo agere; incertus etiam, an possem. Itaque non est, cur imputet Theorematum de osculis defectui, cum ipse agnoscat, etiam publicatis illis, nondum vel HUGENIUM, vel me, de lineis illis Elasticis satis meditato fuisse. Ac ne nunc quidem, exposita analysi Viri Egregii, a me impetrare possum ut hunc campum, licet pulcherrimum, ingrediar; cujus rei plures habeo rationes, quam vellem. De cætero video eum a mea de constructionibus sententia vix dissentire; optaremque ipsum, si vacat, ulterius cogitare de constructione transcendentium per puncta algebraice inventa: id enim magis analyticum fuerit, etsi non æque sit in potestate hactenus, ac reductio quadratarum ad Euthynes*. De ^{* rectifica-} numero radicum osculi candide professus sum dudum, me re diligentius ^{siones.} excussa sententiam ipsius amplecti (*). Quod instantiam a me postulat (b) curvæ ordinariæ rectificabilis in se redeuntis, succurrit nunc Epicycloidalis, quam punctum describit fixum in circulo provoluto super alio circulo. Hanc rectificabilem esse, a Celeberrimis Viris HUGENIO & TSCHIRNHAUSIO est ostensum; esse autem in se redeuntem, hæc constructio ipsa monstrat, cum circumferentiæ sunt commensurabiles (*). Præclare facient BERNOULLII Fratres, si conjunctis, vel etiam separatis studiis, velariæ figuræ contemplationem cœptam absolvant. Quod medias directiones attinet, de quibus Ego in *Ephemeridibus Gallicis* Mensis Septembris 1693 (d), cum tendentiæ puncti mobilis sint infinitæ, puncta tendentiarum intervallulis æqualibus assumi arbitrarium putem. Diversis autem punctis tendentias exercentibus, ex punctorum progressibus haberet & progressus communis centri gravitatis, nempe conferendo ejus situm ante progressum, cum situ proximo post progressum punctorum elementarem.

(*) Vide N°. LXVI. Art. III. pag. 647.

(b) Ibid. Art. IV. pag. 650, 651.

(*) Vide Num. seq. Art. II.

(d) Vide N°. LXVI. Art. V. pag. 656-658.

N. LXXI. tarem. Quod si punctorum impulsorum tendentias consideremus, quæ sæpe ab impellentium tendentia diversa est, tendentia media ab iis recepta eodem modo definitur. Eaque omnia pro re nata sunt varianda, sed in his prompte eleganterque exhibendis a Viro Clarissimo non vulgaria expecto, ac publico eum nomine rogandum censeo, ut sua de fluidorum motibus aliisque meletemata præclara diutius non premat. Quod controversias attinet inter D. D. HUGENIUM & RENAUDUM Ingeniarium rei apud Gallos marinæ Generalem, ipse HUGENIUS [cujus certe Summi Viri amissi & ipse desiderium tanto fero ægrius, quanto propius mihi cum eo commercium erat, notioresque maximæ dotes, in quibus vis animi candorque certabant] me sententiam rogare dignatus est; sed tunc nondum erant ad manus utrinque agitata. De re ipsa alias. Recte notatur, eundem ventum magis impellere navem quiescentem, quam procedentem, & discrimen aliquando non esse negligendum. Puto etiam, diversa venti vi, declinationem [*la Dérive*] secus quam D. RENAUDUS supposuit, non esse æqualem, sed eo majorem quo major est venti violentia. Modum generalem construendi tangentium inversas, Mense Augusto, 1695, pag. 373 (°) ipse non nisi pro Mechanismo venditavi. Utilissima cogitatio est, de iisdem ad quadraturas redigendis, separandisve ad invicem indeterminatis. *Problema* (†) de eo præstando circa æquationem differentialem $ady = y^p dx + b y^m q dx$ solvere possum, & reduco ad æquationem, cujus forma est $\dots dv + \dots v dz + \dots dz = 0$, ubi per punctata intelliguntur quantitates utcunque datæ per z . Talis autem æquatio generaliter per me reducta est ad quadraturas, ratione Amicis jam communicata, quam hic exponere necessarium non puto; contentus effecisse, ut Acutissimus Auctor Problematis agnoscere possit methodum [ut opinor] non dissimilem suæ. Neque enim dubito & hoc ipsi innovuisse (‡). Et sunt a me in istis multa olim tentata, non pauca etiam præstita, quæ jacent dispersa in schedis, nec mihi ipsi in numerato habentur, copia inopi, ut simul habere videar & non habere. Hæc tamen facilius suppeditavit memoria, ea ipsa die, qua *Lipsiensia Acta* Mensis Decembris 1695 sum nactus, id est hesternæ, in ipsis scilicet Nundinis Brunsvicensibus, ubi hæc inter distractiones utcunque in chartam conieci.

(°) Supra, N°. LXIV, p. 635, 636. L 10, supra N°. LXVI, pag. 663.

(†) Propositum a BERNOULL- (‡) Vide Num. sequentem.



N°. L X X I I

JACOBI BERNOULLI
 PROBLEMA BEAUNIANUM
 Universalius conceptum,

Sive Solutio Æquationis nupero Decembri pro-
positæ, ad $y = y p dx + b y^n q dx$; cum
aliis quibusdam annotatis.

I. **Q**uod olim CARTESIO a BEAUNIO propositum, & *Alta Erud.*
 aliquot abhinc annis resuscitatum fuit Problema, [vid. *Lips. 1696.*
Ephem. Gallic. mense Sept. 1692, & *Acta Lips.* mense
 Mai. 1693] universaliter ita proponi potest: *Data quavis Curva,*
seu algebraica, seu transcendente, seu libera tantum manu formata;
invenire aliam ita comparatam, ut ejus applicata ad subtangentem
eandem rationem habeat, quam habet constans quadam linea a ad
summam differentiamve applicatarum curva data & quesita; vel
etiam reciproce, quam hac summa differentiave habet ad constan-
tem a. In casu enim *Beauniano*, ubi loco datæ Curvæ, *Recta*
 assumitur angulum semi-rectum cum axe constituens, utrovis
 modo conceptum Problema in idem recidit; alias duplex est &
 maxime diverfum. Posterioris ego solutionem hac vice cum pu-
 blico communicabo; sed ommissa analysi, & prioris quoque eno-
 datione Lectori relicta, ut si majorem, quam fortasse existima-
Jac. Bernoulli Opera. A a a a rat

Rum.
LXXII.

rat, in recessu difficultatem repererit, eo benignius operam hic præstiram interpretetur. Esto [Fig. 1] Curva data AC vel Ac, axis AB, & sit abscissa AB = x, BC, vel Bc = q, data per x, & BD = y; erit ex præscripto Problematis $dy : dx = y \pm q : a$, hoc est, erit $ady = ydx \pm qdx$. Est autem hæc Æquatio non casus tantum, ut apparet, specialis æquationis, mense Decemb. propositæ, $ady = ypdx + by^n qdx$, sed ipsamet potius hæc æquatio simplicioribus duntaxat terminis expressa, cum una ad alteram perpetuo reduci possit; consentiente illo quod Celebrerrimus D. LEIBNITIUS observavit, ubi dictam æquationem in hanc transformat $\dots du + \dots u dx + \dots dz = 0$; hæc enim & ipsa ulterius ad allatam formulam $ady = ydx \pm qdx$ reduci valet; si nempe, quod intelligo, q concipiatur dari per x non modo in terminis algebraicis, sed in transcendentibus, veluti si q ponatur $= f(dx \sqrt{aa - xx})$ hoc est, si curva data AC fingatur esse ex mechanicarum numero (a). Quantæ igitur universalitatis hoc Problema sit, quantumque conferat ad promotionem methodi Tangentium inversæ nemo non videt, gaudeoque præfatum Virum Celeberrimum illud sua quoque opera dignum cen-

(a) Ponatur $y^{1-n} = u$, vel $y = u^{1/(1-n)}$, eritque $dy = \frac{1}{1-n} u^{n/(1-n)} du$, quibus substitutis in æquat. $ady = ypdx + by^n qdx$, ea transformabitur in hanc $\frac{a}{1-n} u^{n/(1-n)} du = u^{1/(1-n)} p dx + b u^{n/(1-n)} q dx$, vel dividendo per $u^{n/(1-n)}$, in hanc $\frac{a}{1-n} du = u^{1/(1-n)} p dx + b q dx$, quæ reductio est Leibnitiana. Ponatur ulterius $pdx =$

dt , atque $dx = dt : p$, & $qdx = qdt : p$, & æquatio $\frac{a}{1-n} du = updx + bqdx$, abibit in hanc $\frac{a}{1-n} du = u dt + b q dt : p$, quæ est reductio Bernoulliana. Nam, quia $pdx = dt$, & p datur per x, dabitur x per t, saltem transcendentem; igitur p & q, qui dantur per x, dabuntur per t; ideoque $bq : p$ dabitur per t. Ergo æquatio $\frac{a}{1-n} du = u dt + b q dt : p$ ejusdem est formæ cum ista $ady = ydx \pm qdx$, ubi q datur per x.

cenſuiſſe: hoc enim præſtantię & utilitatis ejus argumentum eſſe poteſt.

Num.
LXXII.

Solutionem meam quod attinet, ad quam tres quatuorve ducentes vias habeo, illa præter curvam AC, quæ ut jam delineata ſupponitur, ſolam requirit Logarithmicam, qua mediante inveniri debet alia, per cujus quadraturam quæſitæ ED puncta obtineantur, id quod hoc modo fit: Eſto Logarithmica FG [Fig. 2] cujus ſubtangens = a = AF [quanquam omnis alia idem præſtet, ſed prolixitatem vito] AC curva data, AL utriuſque axis, AB vel aB = x , & BC = q ; fiatque alia curva AH, cujus applicata BH quarta ſit proportionalis ad BG, BC, & AF; tum ſpatio curvilineo ABH ad AF applicetur æquale rectangulum FL, ruruſſumque ſtatuatur BD quarta proportionalis ad AF, BG & AL [vel ML, ſumpto ubivis in axe AL puncto fixo M] erit D punctum in optata curva ED, exiſtente BD y æquationis $a dy = +y dx \pm q dx$, vel $a dy = -y dx \pm q dx$; quorum illud obtinet, ſi AB dicatur x , & M ad ſiniſtram dextramve puncti L conſtituatur; hoc vero, ſi ſit aB quæ vocetur x , atque M viciffim ad dextram ſiniſtramve ipſius L collocatum fuerit (^b).

A a a a a z

Notatu

(^b) Conſtructionis hujus en Analyſin, ex N^o. CIII, Art. 12, petita. Sit $y = mn$, & $ady = [amdn + andm] ydx + qdx [mndx + qdx]$. Pone $amdn = mndx$, & $andm = qdx$; & prior æquatio diviſa per mn dabit $adn : n = dx$. Igitur $x = \text{Log. } n$, vel $n = \text{numero cujus logarithmus } x$, id quod ſic designabimus $n = Nx$. Hic valor ipſius ſubſtitutus in æquatione poſteriore $andm = qdx$, illam mutat in hanc, $adm = qdx : Nx$, vel, integrando $am = \int (q dx : Nx)$. Igitur $y = mn = \frac{Nx}{a} \int (q dx : Nx)$. Unde ſluit Auſtoris conſtructio. Nam cum ſit AB

= x , erit [propter Logarithmicam FG] $BG = Nx$; & BH, quarta proportionalis ad BG [Nx], BC [q] & AF [a], erit $aq : Nx$, atque ideo ſpatium ABH = $\int (aq dx : Nx) = FL$, & AL = $\int (q dx : Nx)$. Ergo BD, quæ quarta eſt proportionalis ad AF [a], BG [Nx] & AL [$\int (q dx : Nx)$,] erit = $\frac{Nx}{a} \int (q dx : Nx) = y$.

Vel ſic, per methodum Cel. DE MAUPERTUIS [*Comm. Acad. Reg. Par. 1731*]. Æquatio $a dy = y dx + q dx$, multiplicando per A variabilem, & tranſponendo, induat hanc formam $Aq dx = a dy - Ay dx$, atque

Num.
LXXII.

Notatu dignum hic est, quod si q simpliciter denotat potestatem aliquam integram & positivam ipsius x , hoc est si curva data AC est ex genere Paraboloidum, curvilineum ABH semper mediante logarithmica quadrabile existit, adeoque curvæ quæsitæ puncta immediate per logarithmicam absque quadraturis inveniri possunt; quod sequenti exemplo monstrabo, e quo lex progressionis in cæteris satis perspicitur: Esto, ut antea Logarithmica FG [Fig. 3], subtangens ejus = AF = a , Parabola quædam surfolida IC, vertice I ubivis in axe AB accepto, proinde IB = x , & BC = $x' : a^t$, productaque infinite BC secect logarithmicam in G, tum construantur termini progressionis sequentis, 1. 2. 3. 4. 5. a ; 2. 3. 4. 5. x ; 3. 4. 5. $xx : a$; 4. 5. $x^3 : aa$; 5. $x^4 : a$; $x^5 : a^4$; [quod ipsum quoque logarithmicæ beneficio expeditissime peragitur, applicando ipsi, in distantiiis æqualibus AH, HL, LM, MN, NO, rectas HP, LQ, MR, NS, & OT, quarum prima HP sit = IB = x ; cæteræ enim ordine erunt $xx : a$; $x^3 : aa$; $x^4 : a^3$; & $x^5 : a^4$, quarum multiplices seriei nostræ, ut apparet, terminos constituunt] quo facto in recta GB abscindatur ex puncto G, vel deorsum versus axem, vel sursum in partes oppositas, pro signi ambigui varietate, pars GD, quæ sit æqualis vel aggregato terminorum hujus seriei, si habeatur $a dy = + y dx \pm q dx$; vel differentiæ inter summas terminorum in locis paribus & eorum qui sunt in imparibus, si fuerit $a dy = - y dx \pm q dx$, eritque semper quod hoc pacto obtinetur, punctum D in curva desiderata ED (*). Demonstratio-

nem

que integrando $\int A q dx = a A y - c \int y dA - \int A y dx$. Ponantur duo posteriores termini simul æquales nihilo, eritque, $-adA : A = dx$, vel Log. $c - \text{Log. } A = x$, aut $c : A = Nx$, vel $A = c : Nx$. Igitur cum sit $\int A q dx = a A y$ vel $y = \int A q dx : a A$, erit $y = \int (c q dx : Nx) : (ac : Nx) = \frac{Nx}{a} x$

$\int (q dx : Nx)$; quæ æquatio ad Autoris constructionem quasi manuducit.

(*) Vide N^o. CIII, Art. 12. §. 2 & 3. Vel hanc accipe Analytin commode in plurimis casibus similibus adhibendam. Integranda proponitur æquatio (A) $a dy = - y dx + x^t dx : a^t$ vel $a dy + y dx - x^t dx : a^t = 0$. Ponatur

nem non addo, quod unusquisque illam ex constructionibus istis haud difficulter eliciet. Forte autem recordari poterit Celeberrimus D. LEIBNITIUS, an & quousque sua Problematis solutio cum ista conspiraret.

Num.
LXXII.

II. Priusquam hinc digrediar, *Notatiuncula*, quam hic Vir Martio præterito ad *Acta* Decembris communicavit *, in uberio- rem veritatis explanationem pauca quædam hic subnectere liceat. Problematis Elastici solutionem, cujus ipse primo loco meminit, tam generalem puto me dedisse, ut ad omnem indefinite hypo- thesin, veram non minus ac verisimilem, æque se extendat, in- superque fulcra vectium non supponat, sed inveniat; quod totum illud est, quod in hac materia jure requiri potest, quandiu spe- ciales tensionum leges nobis ignotæ sunt.

Constructionem Transcendentium per puncta algebraice inven- ta fateor rem egregiæ speculationis fore: dubito tamen hic, ut in aliis, generale quidpiam inveniri posse; etiamsi fortasse in pau- cis quibusdam res succedere deprehenderetur. Itaque negotium tanti non videtur esse, ut ei implicari sit necesse, præsertim cum

A n a a a 3

alia

natur $y = x^5: a^4 + p$, & $dy = 5x^4 dx$:
 $a^4 + dp$, atque A migrabit in (B)
 $adp + pdx + 5x^4 dx: a^3 = 0$. Fiat $p =$
 $-5x^4: a^3 + q$, & $dp = -4.5x^3 dx$:
 $a^3 + dq$, atque B mutabitur in (C)
 $adq + qdx = 4.5x^3 dx: a^2 = 0$. Sta-
 tuatur $q = 4.5x^3: a^2 + r$, & $dq =$
 $3.4.5x^2 dx: a^2 + dr$, atque C abibit in
 (D) $adr + rdx + 3.4.5x^2 dx: a = 0$.
 Sumatur $r = -3.4.5x^2: a + s$, & $dr =$
 $-2.3.4.5x dx: a + ds$, atque D tran-
 sinit in (E) $ads + sdx = 2.3.4.5x dx$
 $= 0$. Fac denique $s = 2.3.4.5x$
 $+ t$, & $ds = 1.2.3.4.5 dx + dt$, atque
 transformabitur E in (F) $adi + tdx$
 $+ 1.2.3.4.5 adx = 0$, vel $dx =$
 $-adi: (t + 1.2.3.4.5.a)$, aut inte-
 grando, $x = -\text{Log.}(t + 1.2.3.4.5.a)$.

Igitur $= -1.2.3.4.5.a - Nx$. Est
 autem $y = x^5: a^4 + p = x^5: a^4 - 5x^4:$
 $a^3 + q = x^5: a^4 - 5x^4: a^3 + 4.5x^3:$
 $a^2 + r = x^5: a^4 - 5x^4: a^2 + 4.5x^3:$
 $a^2 - 3.4.5x^2: a + s = x^5: a^4 - 5x^4:$
 $a^3 + 4.5x^3: a^2 - 3.4.5x^2: a +$
 $2.3.4.5x + t = x^5: a^4 - 5x^4: a^3 +$
 $4.5x^3: a^2 - 3.4.5x^2: a + 2.3.4.5x -$
 $1.2.3.4.5.a - Nx$. Atqui ex constru-
 ctione Auctoris GD $= x^5: a^4 - 5x^4:$
 $a^3 + 4.5x^3: a^2 - 3.4.5x^2: a + 2.3.4.$
 $5x - 1.2.3.4.5.a$, & GB $= Nx$. Igi-
 tur BD $= x^5: a^4 - 5x^4: a^3 + 4.$
 $5x^3: a^2 - 3.4.5x^2: a + 2.3.4.5x - 1.2.$
 $3.4.5x - Nx = y$. Poni etiam po-
 tuisset t constans atque, $dt = 0$, de-
 quo vide Num. LXXVII.

* N^o. præced.

Num. LXXII. alia præsto sint, quæ defectum hic supplere possint; & considerandum Lectoribus relinquo, an alius generalior simul, simplicior, & ad praxin' accommodatior construendi modus reperiri possit illo, qui fit per tractiones, atque nuperrime a me ad *Acta* communicatus *, nescio an etiam publicatus fuit.

Quæstionem de numero radicum osculi consensus Viri Celeberrimi jam extra controversiam ponit. Mutuo cum ipso candore acturus, quæ de curvis in se redeuntibus putabam olim me demonstrare potuisse, corrigo, gratiasque habeo, quod exemplo me edocuerit tales quandoque rectificationem admittere posse, sine quo fortasse nunquam huc animum advertissem. Fecit autem Viri Nobilissimi monitum, ut discursum, Mense Januario 1691, pag. 21 ** hanc in rem allatum denuo examinarem, deprehenderem, cum in hoc laborare, quod supponit, unam duntaxat dari æquationem quæ relationem ipsius x ad t , arcus ad tangentem exprimat. In curvis enim in orbem redeuntibus, quæ rectificationem admittunt, & in quibus x portionem curvæ, una cum integra perimetro semel aliquotiesve accepta, significare potest; ratio ipsius x ad tangentem aliamve functionem pro numero vicium quibus perimenter accipitur subinde variat, peculiaremque æquationem deposcit.

Quæ vero porro subjicit Vir Acutissimus de mediis directionibus, haud ita facile a me assensum impetrant; nec enim satis capio, quo sensu puncta tendentiarum æqualibus intervallis assumi arbitrarium existimet. Mentem meam exemplo declaro: [*Fig. 4.*] Sit ventus aliquis circumfusus æqualiter arcui circulari Bbb , vel etiam potentia quæpiam trahens, circumposita opposito arcui Ccc , agatque in singulis arcus punctis in centrum A viribus, quæ proportionentur rectis AD , Ad secantibus arcuum Bb vel Cc , quo pacto puncta omnium tendentiarum particularium d, d , reperientur in recta tangente Ddd ; adeoque determinabuntur intervallulis inæqualibus dd, dd , ob æqualia arcuum elementa bb, bb ,

* N°. LXX.

** Supra N°. XLI, pag. 440.

bb, bb, vel cc, cc. Nam si quis existimet, intervalla dd æqualia assumi posse, is vicissim statuere debet inæqualia arcuum elementa bb vel cc, ac proinde, ob æqualiter circumfusam potentiam, ejus vires censebit esse in ratione composita elementorum bb vel cc & secantium Ad: non ergo sunt in simplici ratione secantium Ad, igitur nec puncta tendentiarum in tangente Dd; utrumque contra hypothesin. Addo, quod inventio centri gravitatis punctorum dd inæqualiter distantium pendet a circuli & hyperbolæ relatione nondum cognita, æqualiter distantium a simplici bisectione rectæ Dd; unde si sit arbitrarium illa fingere, ut lubet, Problema directionis mediæ simul & simplex erit & transcendens; quæ denuo repugnant.

Num.
LXXII.

Navem quiescentem ab eodem vento fortius impelli, quam procedentem, mecum agnoscit Vir Eximius; idemque videt unusquisque, si considerat, tantam semper velocitatis venti partem motu navis reddi irritam, quanta velocitate ipsa navis progreditur: unde cum hæc, ut dictum alibi, partem velocitatis venti satis notabilem, eoque majorem quo velum spatiosius fuerit, adæquet, constat etiam discrimen oriri, quod in usu navigationis minime contemni possit. At quod deviationem seu declinationem navis attinet, hic rursus diversum sentire cogor; hanc enim ab intensiore vel remissiore venti vi non alterari, mihi extra dubium est; prout etiam assumit Ingeniarius Gallicus [sive RENAVIUM appelles *RENAU* cum Auctore Gallico *Hist. Oper. Erud.* sive malis *RENAUDUM* *RENAUD* cum D. LEIBNITIO] nec diffretur HUGENIUS, etsi prior in ejus quantitate definienda aberret, posterior definire plane abstineat. Ex systemate meo motus fluidorum illam sic determino [Fig. 5.]: Ponatur navis AB figuram habens rectangulam oblongam [hæc enim pro diversitate figuræ variant] proram conversam in E, velumque ad rectos angulos ventum excipiens, cujus sit directio AD, verus navis cursus fiat per lineam striatam AF, sic ut ejus declinatio censeatur EF; reperio, qualiscunque venti sit velocitas, semper fore DE ad EF in ratione dimidiata ejus quæ componitur ex ratione DE ad AE, & ex ratione longitudinis parallelogrammi

AB

Num.
LXXII.

AB ad ejus latitudinem. E quo illud confectarium fluit, quod quandoque EF æquare vel etiam superare possit ipsam ED, contra Ingeniarii Gallici hypothefin, nempe tum cum sinus anguli DAE ad sinum complementi ejus æqualem vel minorem rationem habuerit, quam latitudo navis ad longitudinem. Sed & aliud hic singulare occurrit velocitates navium concernens, & quod multis paradoxum videbitur, sed tamen verissimum; nimirum, quod tum navis AB cæteris paribus velocius movebitur in via sua AF, quam eadem posita in AC, proramque juxta ipsam directionem venti AD conversam habens, per AD progredetur; ac proinde, si, exempli gratia, Nauta nave vectus, cujus longitudo latitudinis sit decupla, flante Borea iter in Austrum meditetur, veloque ad ventum recto proram a Meridie parumper deflectat angulo 5 gr. 43 min. illam dirigendo in plagam fere mediam inter Austrum & Rumbum huic proximum, Nautis *Zuid-sen-Oosten*, vel *Zuid-sen-Westen* dictum [quo pacto ob accedentem declinationem illum præcise in Austrum ferri ex ante dictis constat] iter hoc suum celeritate revera majore prosequetur, quam si manente velo ad ventum recto navigii cursum recta in Austrum instituisset; quanquam hæc velocitatum differentia in praxi tam sit exilis, ut unicam tantum leucam in quadringentis lucreferi hac ratione posse deprehendam (*). Horum vero omnium demonstrationes, quæ fluidorum corporumque motorum in fluidis affectiones concernunt, cum justis fere voluminis materiam præbere possint, malo aliquando junctim exhibere, ubi Deus vitam tranquilliorē firmioremque indulserit valetudinem, quam hinc inde quædam sparsim, atque imperfecte indicando, pretium illorum imminuere.

III. Dum hæc meditabar, accipio Clarissimi NIEUWENTII ambos Tractatus de *Analysi infinitorum*, ubi præter quædam bonæ notæ, quæ habet, non contemnenda, id quoque agit, ut difficultates quædam nobis proponat contra principia Geometrarum
hucuf-

(*) Videatur N^o. CIII. Art. 13.

N.º 68 et 69.

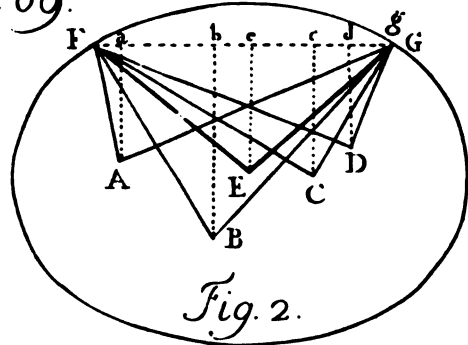
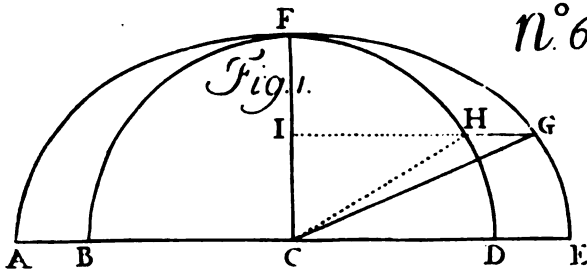
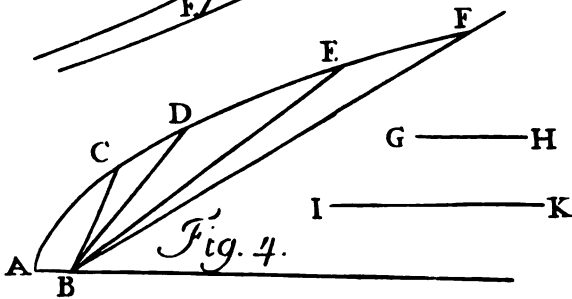
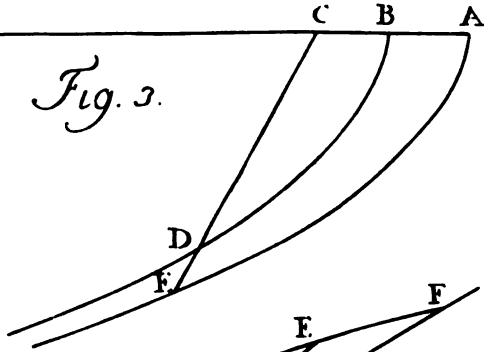


Fig. 3.



N.º 70.

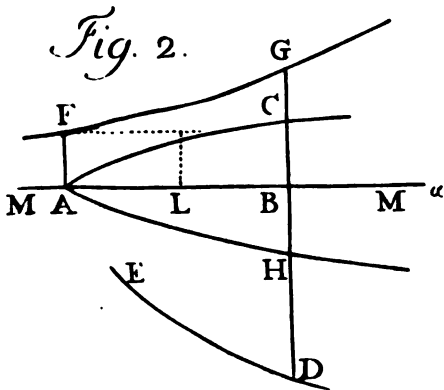
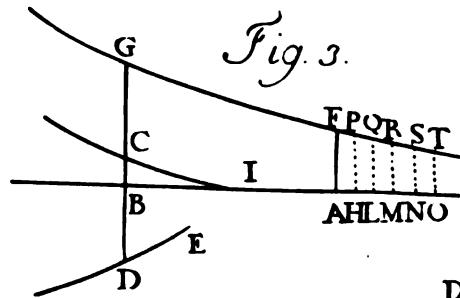
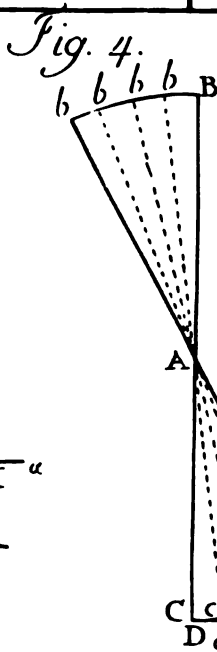
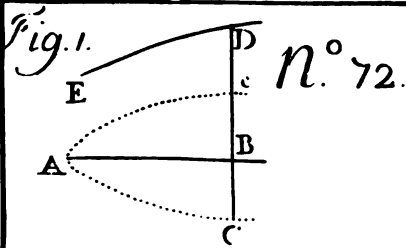
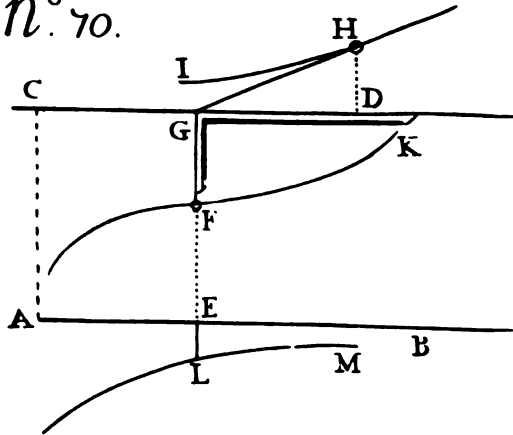
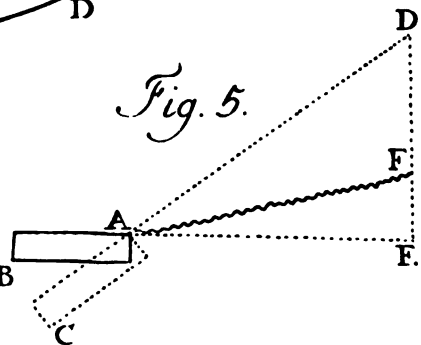


Fig. 5.



hucusque recepta, præsertim contra calculum nobis usitatum, copotissimum tendentes, ut differentiationum successionem, seu differentio-differentialia, ceu purum *non ens* vel *nihil*, ut vocat, eliminat; quod nonnullis conclusionibus absurdis & manifesto falsis, quas ex iis admittis sequi existimat, evincere conatur. Meum itaque esset, ut calculi nostri probitatem hic loci adversus objectiones ejus vindicarem, maxime quia mea suo tractatui occasionem dedisse scribit. Sed quia causa communis ipsum jam calculi Auctorem Celeberrimum D. LEIBNIT IUM defensorem nacta est, qui Mense Julio superioris Anni scrupulis omnibus tum sibi, tum mihi objectis sufficientissime & plane ad mentem meam respondit; superfluum esset, veritatem pluribus contra D. NIEUWENTIIT asserere, vel ostendere, quam multis ipse contradictionibus per sua principia sese implicet.

Num.
LXXII.



Nº. LXXIII.

JACOBI BERNOULLI

COMPLANATIO

Superficierum Conoidicarum



Sphæroidicarum.

Occasione Problematis *Florentini*, inter alias solutiones ante hoc quadriennium Mense Augusto 1692 * exhibitas, pri-
Jac. Bernoulli Opera. B b b b mus
Acta Erud. Lips. 1696. Oct. p. 479.

* Supra Nº. LII, pag. 512. seq.

Num.
LXXIII.

mus aperui artificium ex superficie Sphærica portionem abscindendi dato cuius plano æqualem. Habui quidem jam tum modum istud efficiendi mechanice in quavis alia superficie conoidica, vel sphæroidica; cum & simplicioris quodammodo sit inventionis, & meditati mihi primo sese obtulerit; sed quoniam rectificationem lineæ circularis supponebat, contempsit. Nunc quia video *Fratrem* hæc dignari, quorum mentionem faceret publice, placet etiam Lectori breviter exponere, quid ego hic tum præstiterim.

Sint duæ Curvæ [*Fig. 1.*] quæcunque AHC & PEF in eodem plano existentes, & sumptum in priore indefinite punctum H, e quo demissa intelligatur in axem normalis HI secans curvam PEF in E, nec non ducta tangens HM, eique perpendicularis radius osculi HN secans axem in G, & curvam PEF in F. Esto etiam punctum aliquod in axe fixum O, & sit ducta OH secans curvam PEF in P, eique normalis OR tangenti HM occurrens in R. Quibus positis, inveni quod si sumatur quarta proportionalis ad tangentem HM, subtangentem MI, & applicatam IE, eique ex peripheria circuli HKL rotatione puncti H circa axem AD descripti æqualis abscindatur arcus HK [quod fieri potest mediante Quadratrice, Trochoide, Linea sinuum, aut aliter,] atque hoc ubique fiat, junganturque in superficie Conoidis omnia puncta K curva AK, æquabitur trilineum gibbum AHKA spatio curvilineo plano AIEPA (*). Quod si fiat arcus
HK

(*) Intelligatur trilineum AHK divisum in infinitas zonas, seu zonarum potius partes, qualis KHhk; quæ, ut ex *Archimedeis* inventis facile sequitur, æqualis est rectangulo, sub arcu HK & curvæ particula Hh, pro recta propter exiguitatem habenda. Pariter intelligatur spatium AIE divisum in infinita trapeziola, quale IeE, quod, cum infinite partium differant rectæ IE, ie, censetur

æquale rectangulo sub IE & Ii. Jam vero, si sit, ex Auctoris præscripto, HK ad IE, ut IM ad MH, vel [ob sim. Triang. IMH. $\eta h H$], ut ηh , vel Ii, ad hH; erit rect. sub HK & hH æquale rect. sub IE & Ii; hoc est, elementum HhkK trilinei AHK æquale elemento IieE spatii AIE. Est igitur trilin. AHK spatio AIE æquale.

Num.
LXXIII.

puto tamen neminem, perspecta constructionis meæ analyfi, late-
re posse methodum hoc universaliter præstandi, indeque omnia
determinandi Conoidea, in quibus negotium absolute succedat.

Esto [Fig. 2.] AIC curva, ut antea revolutione sua circa
axem AD generans Conoides, cujus basis circulus BHC, in cu-
jus plano sit projecta data curva PEF, tum vero in plano per
axem Conoidis ADC, concipiatur alia curva LMN ita compara-
ta, ut applicata GM ubique sit æqualis rectæ IK ductæ ab in-
terfectione I ad axem AD normaliter curvæ AIC. Quo posito,
sumatur indefinite aliud quodvis planum per axem ADH, for-
mans in superficie Conoidis curvam ARH eandem cum AB vel
AC, & ex Puncto H agatur radius HD, & recta HQ perpen-
dicularis ipsi BD, quarum illa secet curvam datam PEF in F,
hæc in P. Dico, si ex curvilineo ADN, refecetur portio
AGML, quæ sit æqualis vel semissi quadrati rectæ DE, vel toti
rectangulo HQP, atque refectæ portioni curvæ AI ex ARH æ-
qualis abscindatur AR, idque semper fiat, fore trilineum gib-
bum ARSA, in priori casu, æquale portioni dati plani BDFPB;
in posteriori, æquale portioni BQPB; hic enim iterum res var-
ie conficitur: & observari potest, quod si loco portionis AGML
altera DGMN æqualis ponatur semissi dicti quadrati DE vel di-
cto rectangulo HQP, atque abscissæ curvæ CI æqualis ubique
statuatur HR, tum quadrilincum gibbum BHR S dato plano
BDEPB vel BQPB futurum est æquale (⁴). E quibus patet,
quo-

(⁴) Constructionis hujus funda-
mentum continetur in hoc LEM-
MATE.

*Area AGML ad superficiem geni-
tam ex rotatione curvæ AI circa axem
AG, eandem rationem habet quam
radius ad peripheriam.*

Intelligentur enim recta gim paral-
lela & vicinissima rectæ GIM, sic ut
GgmM, quod æquale censetur re-
ctangulo sub Gg & GM, habeatur

pro elemento Areæ AGML. Ele-
mentum vero superficiæ genitæ ex
rotatione curvæ AI circa axem AG,
vel zonula genita ex rotatione par-
ticulæ iI circa dictum axem AG, æ-
qualis est rectangulo sub Ii & peri-
pheria cujus radius est GI. Habet
igitur elementum prius ad posterius
rationem eandem quam rect. sub Gg
& GM, ad rect. sub Ii & periphæria
cujus radius GI; vel rationem com-
positi-

quoties curvilineum $ADNL$ quadrabile est, hoc est, curva AIC talis existit, ut summa omnium perpendicularium IK ductarum in elementa abscissarum AG geometricè haberi possit [quod non tantum in circuli peripheria, sed etiam in linea re-
cta, curva parabolica, & infinitis aliis in casibus contingit,] semper dato plano æquale spatium ex superficie Conoidis abscindi posse; & utile est, simpliciores casus, qui præ cæteris elegantiora Theoremata suppeditant, speciatim annotasse. Sed & hoc tenendum est, quod in ejusmodi Conoidibus omnibus eadem
B b b b 3 quoque

positam ex rationibus Gg , vel iO , ad Ii & GM ad peripheriam cujus radius GI . Sed iO ad Ii , ut GI ad IK vel GM . Quare ratio composita ex rationibus iO ad Ii & GM ad peripheriam cujus radius GI , eadem est ac composita ex rationibus GI ad GM , & GM ad dictam peripheriam, quæ simul efficiunt rationem GI ad peripheriam radio GI descriptam. Igitur elementum $GgmM$ areæ $AGML$ est ad elementum superficiæ genitæ ex rotatione curvæ AI circa axem AG ut radius ad peripheriam. Ergo superficies, quarum hæc elementa sunt, eandem inter se rationem habent.

Corollarium. $AGML$ est ad portionem ARR superficiæ genitæ ex rotatione curvæ AI , comprehensam inter duos meridianos ARH , Arh ; ut radius DH ad peripheriæ $BHCB$ arcum Hh inter hos meridianos comprehensi. Nam $AGML$ ad superficiem integram genitam ex rotatione curvæ AI ut radius DH ad peripheriam integram $BHCB$. Sed superficies integra ad portionem ejus ARR , ut peripheria integra $BHCB$ ad par-

tem proportionalem Hh . Ergo, ex æquo, $AGML$ ad ARR , ut DH ad Hh .

His positis, cum sit $AGML$ ad ARR ut DH ad Hh , vel [ob sim. Triang. DHh , DEe] ut DE ad Ee , aut ut quadr. DE ad rect. sub DE & Ee ; si sit, ex Auctoris constructione, $AGML$ æquale dimidio quadrati De , erit ARR æquale dimidio rectanguli sub DE & Ee , a quo dimidio non differt triangulum DEe . Sed elementa sunt ARR superficiæ ARS , & DEe plani BDE . Sunt igitur hæc superficies inter se æquales.

Pariter, quoniam est $AGML$ ad ARR ut DH ad Hh , & sit DH ad Hh , ut HQ ad hT vel Qq [ob sim. Triang. DHQ , HhT]; erit $AGML$ ad ARR ut HQ ad Qq , vel ut rect. HQP ad rect. PQq . Si fiat igitur, ut docet Auctor, area $AGML$ æqualis rect. HQP , erit ARR æqualis rect. PQq , vel trapeziolo $PQqp$: hoc est, erunt æqualia elementa superficiæ ARS & plani $BQPB$. Quare sunt hæc superficies æquales.

Num. LXXIII. quoque facilitate absolvatur conversum Problematis, nempe : *Datam portionem superficiei Conoidica vel Spharoidica in planum projicere, seu planum construere illi aequale; quod pluribus explicare opus non videtur.*

Quoniam hæc omnia occasione Problematis quod Celeberrimus VIVIANUS Magni Ducis *Hetruria* Mathematicus, edito A. 1692, scripto * publice proposuit, in medium allata sunt, non alienum erit hoc loco memorare, quod paucis Lectorum nostrorum animadvertum puto : nempe constructionem Problematis, quam Clarissimus ejus Auctor ope torni instituendam exhibuit, reipia plane convenire cum ea, quam dederam Mense Augusto 1692, pag. 370, articulo I. † quod ita demonstro : In base hemisphærii [*Fig. 3.*] ABCDE, cujus centrum F, diameter BD, radiis BF, FD tanquam diametris alii duo circelli BHF, FLD describantur, quorum uterque sit basis alicujus cylindri recti, quo velut trepano perforari intelligatur globus. Sumatur in circumferentia alterutrius circelli BHF quodvis punctum H, e quo excitetur HI recta ad planum basis BHF, occurrens sphericæ superficiei in I, quod sic unum erit eorum, in quibus superficies spherica & cylindræca se mutuo interfecant. Dico hoc idem quoque reperiri per meam constructionem : Ductis enim BH, HF, FI, ac demisso per I quadrante verticali AIG, liquet, quod in Triangulis BHF & FHI, propter $BF = FI$, latus commune HF & angulos BHF & FHI rectos, latera BH & HI quoque æquentur; unde & arcus BG & GI, quorum sinus ista latera sunt, æquabuntur; id est, si circulus BCDE fingatur esse æquator, A polus, BAD primus meridianus, AIG meridianus loci I, longitudo puncti I ipsius latitudini æquabitur. Quod ipsum est, quod nostra constructio Articuli primi præscribit.

* Supra N°. LI, pag. 511. 512.

† N°. LII. pag. 512.

N^o. LXXIV.

POSITIONUM
DE
SERIEBUS
INFINITIS,
PARS TERTIA,

Tractans
De earum usu
In quadraturis Spatiorum
& rectificationibus Curvarum.

Quam

Præfide

JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.

defendit

JACOBUS HERMANNUS, Basil. Magist. Cand.
Ad diem 14 Novemb. M. DC. XCVI.

Edite primum

BASILEÆ.

1696.



P O S I T I O N U M
D E
S E R I E B U S I N F I N I T I S
Pars Tertia.

De Ufu Serierum Infinitarum in Quadraturis
Spatiorum & Reſtificationibus
Curvarum.



OSTQUAM prima parte laboris nostri defuncti sumus, variarumque, quoad fieri potuit, Serierum summas exhibuimus; superest, ut ad alteram instituti partem transeamus, ostendendo modum eas applicandi ad dimensiones quantitatum geometricarum, praesertim illarum, quas transcendentis nuncupant; licet seriebus, quae hic usui venient, raro contingat esse ex numero earum,

Jac. Bernoulli Opera.

C c c c c

earum,

Num.
LXXIV.

earum, quas proxime contemplati sumus, quarumque summas in potestate habemus. Observarunt enim Geometra, plurimas dari quantitates, cujusmodi sunt pleraque Linea Curva, & pleraque ab iis comprehensa spatia, qua nullis numeris, vel rationalibus, vel surdis, quantumvis compositis exprimi, hoc est quarum relationes ad alias datas sub nulla aequatione algebraica definiti gradus cogi possent, sed qua omnes aequationum gradus quasi transcenderent; ac idcirco attentandum duxerunt, num quas uno aliquo numero effari non poterant, per seriem saltem infinitorum, maxime rationalium, exprimere liceret, quibus ita continuo ad quæsitum accederetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fieret, totaque series exactum quæsiti valorem exhiberet. Inventum, quod, quantum constat, vergente demum hoc seculo a MERCATORE, GREGORIO, NEWTONO, LEIBNITIO, in lucem productum fuit. Quid primi tres de his memoria prodiderint, etiamnum ignoramus. Summus Geometra LEIBNITIUS, qui rem haud dubie longissime promovexit, inter alias series quas nobis in Actis Lipsi. impertivit, unam, initio Actorum 1682, pro circuli magnitudine dedit; sed methodum, qua illuc pervenit, nusquam exposuit. Quantum conjicio, non differt illa a nostra: nam & in easdem cum illo series incidimus, & ipsius subinde Calculo differentiali usi sumus, uti posthac patebit. Principia hujus calculi exponere nimis longum & alienum foret. Ea Vir perillustri D. Marchio HOSPITALIUS in Libro De Analyti infinite parvorum nuperrime edito perspicue tradit, ad quem proin Lectorem φιλομαθῆν remittimus.

DEFINITIO.

Num.
LXXIV.

Mixtam Seriem voco, cujus termini multiplicatione sunt conflati ex terminis ejusdem ordinis aliarum Serierum. Ita si sint series $a, b, c, d, e, \&c.$ & $f, g, h, i, k, \&c.$ mixta ex utraque erit $af, bg, ch, di, ek, \&c.$

XXXVI.

Fractionem $l : (m - n)$ convertere in *seriem infinitam* quantitatum *geometricè proportionalium*.

Fit hoc per divisionem continuam numeratoris per denominatorem, hoc pacto: m in l habeo $l : m$, quod multiplicatum per divisorem $m - n$, & subtractum ex dividendo l relinquit $ln : m$; hoc rursus divisum per m facit $ln : mm$, quod ductum in $m - n$ & subtractum ex dividendi reliquo efficit residuum $lnn : mm$; hoc denuo divisum per m , facit $lnn : m^2$, quo ducto in $m - n$ & subtracto, remanet $ln^2 : m^2$; atque ita deinceps sine fine in infinitum: semper enim aliquid dividendum superest, cum unius membri dividendus a divisore bimembri nunquam sine residuo exhauriri possit. At hoc residuum, continuata operatione, positoque $m > n$, perpetuo decrescit, & tandem data quavis quantitate minus fit, ut patet. Est ergo fractio proposita

$$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} \&c.$$

quæ series est quantitatum geometricè progredientium in ratione m ad n ; quandoquidem quilibet ejus terminus ex constructione in n ductus & per m divisus proxime sequentem exhibet.

Idem brevius sic evincitur: Summa Progressionis geometricæ $\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} \&c.$ est $\frac{l}{m-n}$, per Corollar. VIII.

Ergo reciproce valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem seriem exprimere licet.

Num.
LXXIV.

XXXVII.

Fractionem 1: (m+n) resolvere in seriem infinitam geometricè proportionalium.

Facta divisione continua numeratoris per denominatorem, eadem resultat series, quæ antea, nisi quod termini ejus alternatim fiant positivi & negativi. Est igitur quantitas $\frac{l}{m+n} =$
 $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^2} - \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} \&c.$ saltem si ponatur $m > n$: tum enim quod post singulas divisiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione profus evanescat.

Idem quoque sic elucescit: Quoniam in serie quantatum $\frac{l}{m}, \frac{ln}{mm}, \frac{lnn}{m^2}, \frac{ln^2}{m^3}, \frac{ln^3}{m^4} \&c.$ ex hyp. primus terminus est ad secundum, ut tertius ad quartum, & quintus ad sextum &c. nec non secundus ad tertium, ut quartus ad quintum, & sextus ad septimum, &c. erit etiam, ex æquo, primus ad tertium, ut tertius ad quintum, & quintus ad septimum, &c. quod docet, primum, tertium, quintum, septimum &c. terminos, exemptis reliquis, etiam geometricè proportionales esse, quorum adeo summa per Corollar. VIII, invenitur $\frac{lm}{mm - nn}$. Eodem pacto ostenditur, secundum, quartum, sextum &c. terminos seriem geometricè proportionalium efficere, cujus summa $\frac{ln}{nm - nn}$. Igitur differentia harum duarum serierum, seu $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^2} - \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} \&c. = \frac{lm - ln}{mm - nn} = \frac{l}{m+n}$, ac propterea quantitas $\frac{l}{m+n}$ in istam seriem vicissim convc.ti potest.

COROLL. I. In omni Progressione geometrica descendente
[primo

[primo termino existente determinato, signisque + & — alternatim se excipientibus] summa seriei limites habet, quos nequit attingere, nedum egredi, qualiscunque statuatur ratio progressionis. Cum enim per hyp. $n > 0$, & $< m$, erit $\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+0} = \frac{l}{m}$; & $> \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m}$, hoc est, valor seriei perpetuo minor est ipso primo termino, & major ejus semisse.

COROLL. 2. Si tamen $m = n$, fiet $\frac{l}{m+n} = \frac{l}{2m}$, & series $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lmm}{m^3} - \frac{lm^2}{m^4}$ &c. $= \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. unde paradoxum fluit non inelegans, quod $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. $= \frac{l}{2m}$. Etenim si ultimus seriei terminus signo — affectus concipiatur, termini omnes se mutuo destruere apparebunt, & si signo +, æquari videbuntur ipsi $\frac{l}{m}$, non $\frac{l}{2m}$. Ratio autem paradoxo est, quod continuata divisione ipsius l per $m+n$, residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi l æquale manet; unde quotiens divisionis proprie non est sola series $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. sed $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. + vel $-\frac{l}{2m}$, faciendo scil. fractionem ex residuo & divisore, illamque signo + vel — afficiendo, prout ultimus seriei terminus vicissim — vel + habere fingitur.

XXXVIII.

Fractionem 1: (m — n)² transmutare in seriem infinitam.

Quoniam quantitas $\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lmm}{m^3} + \frac{lm^2}{m^4}$ &c. per

XXXVI, facta utrinque multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$, habebitur

Num. LXXIV. $\frac{l}{(m-n)^2} =$ serici A, cujus termini singuli de novo in totidem alias series B, C, D, E, F, &c. per eandem XXXVI Prop. convertantur. Quo facto serierum istarum termini homologi in unam summam conflati novam seriem Z constituent, æqualem propterea quantitati propositæ $\frac{l}{(m-n)^2}$, mixtamque ex serie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, &c. & quantitatum geometricæ progressionalium $\frac{l}{mm}, \frac{ln}{m^3}, \frac{l n n}{m^4}, \frac{ln^3}{m^5}$ &c.

$$\frac{l}{(m-n)^2} = A \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{mm - mn} = \frac{l}{mm} + \frac{ln}{m^3} + \frac{l n n}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} \text{ \&c.} = B \\ \frac{ln}{m^3 - m m n} = \frac{ln}{m^3} + \frac{l n n}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} \text{ \&c.} = C \\ \frac{l n n}{m^4 - m^3 n} = \frac{l n n}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} \text{ \&c.} = D \\ \frac{ln^3}{m^5 - m^4 n} = \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6} \text{ \&c.} = E \\ \frac{ln^4}{m^6 - m^5 n} = \frac{ln^4}{m^6} \text{ \&c.} = F \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} = \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$Z = \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3l n n}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} \text{ \&c.} = \frac{l}{(m-n)^2}$$

Eadem series Z elici quoque potest divisione continua numeratoris l per denominatorem mm - 2mn + nn, dicendo: mm in l, habeo l: mm, quod ductum in divisorem & subtractum ex dividendo relinquit + 2ln: m - lnn: mm; tum porro mm in + 2ln: m, reperio + 2ln: m^3, quod multiplicatum & subtractum, ut decet, residuum efficit + 3l n n: m m - 2ln^3: m^3, atque ita ulterius pergendo in infinitum: quo pacto, observabitur post singulas operationes duo membra reliqua manere, sed illa usque & usque

usque minora, tandemque data quavis quantitate propius ad nihilum vergentia. Num. LXXIV.

Idem etiam ostenditur ex lege reciprocorum, resolvendo seriem Z, methodo Prop. XIV, in infinitas series geometricas B, C, D, E, F &c. harum enim summæ cum novam progressionem A constituent, quæ ipsa summam efficit $l : (m m - 2 m n + n n)$, sequitur reciproce, & hanc quantitatem $\frac{l}{(m-n)^2}$ per seriem Z legitime efferri posse.

XXXIX.

Fractionem $l : (m + n)^2$ convertere in seriem.

Si operatio instituat methodo Propos. præced. eadem, quæ ibi, obtinebitur series, nisi quod termini locorum parium acquirant signum —, sic ut habeatur: $\frac{l}{(m+n)^2} = \frac{l}{m m} - \frac{2 l n}{m^3} + \frac{3 l n n}{m^4} - \frac{4 l n^3}{m^5} + \frac{5 l n^4}{m^6} - \frac{6 l n^5}{m^7} \&c.$

XL.

Fractionem $l : (m - n)^2$, aut $l : (m + n)^2$, exprimere per seriem.

Ex analogia operationum præcedentium liquet modus hoc efficiendi; quorsum igitur plura? En operationem:

$$\frac{l}{(m-n)^2} = \frac{l}{m m} + \frac{2 l n}{m^3} + \frac{3 l n n}{m^4} + \frac{4 l n^3}{m^5} + \frac{5 l n^4}{m^6} \&c. \text{ per}$$

XXXVIII, factaque hinc inde multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$,

$$\frac{l}{(m-n)^3}$$

Num.
LXXIV.

$$\frac{l}{(m-n)^3} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{m^3 - m^2n} = \frac{l}{m^3} + \frac{ln}{m^4} + \frac{lnn}{m^5} + \frac{ln^2}{m^6} + \frac{ln^3}{m^7} \&c. \\ \frac{2ln}{m^4 - m^3n} = \frac{2ln}{m^4} + \frac{2lnn}{m^5} + \frac{2ln^2}{m^6} + \frac{2ln^3}{m^7} \&c. \\ \frac{3lnn}{m^5 - m^4n} = \frac{3lnn}{m^5} + \frac{3ln^2}{m^6} + \frac{3ln^3}{m^7} \&c. \\ \frac{4ln^2}{m^6 - m^5n} = \frac{4ln^2}{m^6} + \frac{4ln^3}{m^7} \&c. \\ \&c. = \dots \&c. \end{array} \right\} \text{per Prop. XXXVI.}$$

$$\frac{l}{m^3} + \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} + \frac{10ln^2}{m^6} + \frac{15ln^3}{m^7} \&c. = \frac{l}{(m-n)^3}$$

Eodem pacto habetur $\frac{l}{(m+n)^3} = \frac{l}{m^3} - \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} - \frac{10ln^2}{m^6} + \frac{15ln^3}{m^7} \&c.$

Constantur autem termini harum serierum ex ductu terminorum progressionis geometricæ in numeros trigonales 1, 3, 6, 10, 15, &c.

Si quis idem per divisionem continuam consequi desideret, is observabit, post singulas operationes tria superesse membra, sed ea subinde minora, ultimoque prorsus evanescentia.

Idem etiam regrediendo a serie inventa patebit, si illa, methodo Prop. XIV, in alias resolvatur, &c.

SCHOL. Haud dissimili operatione reperitur $\frac{l}{(m \pm n)^4} = \frac{l}{m^4} \pm \frac{4ln}{m^5} + \frac{10lnn}{m^6} \pm \frac{20ln^2}{m^7} \&c.$ ut $\&c. \frac{l}{(m \pm n)^5} = \frac{l}{m^5} \pm \frac{5ln}{m^6} + \frac{15lnn}{m^7} \pm \frac{35ln^2}{m^8} \&c.$ seriebus mixtis ex geometrica & serie pyramidalium, trianguli-pyramidalium, & ita consequenter in omnibus altioribus,

bus, servata semper eadem analogiæ ratione, ut non opus sit ^{Num.} his diutius immorari. LXXIV.

XLI.

Si proponatur series differentialium, qua mixta sit ex serie geometrica quantitatum indeterminatarum, & alia quavis serie quantitatum constantium seu coefficientium, integralia eorum absoluta seriem constituent mixtam ex eadem serie coefficientium, simili geometrica indeterminatarum, & alia quadam harmonica.

Patet ex princ. calc. different. vel summatorii, juxta quæ quantitatis differentialis $nx^m dx$ integrale absolutum reperitur $\frac{n}{m+1}x^{m+1}$; hinc enim si coefficientes n sint progressionis cujusvis, & exponentes m progressionis arithmeticæ, hoc est ipsa x^m progr. geometricæ, erunt quoque $m+1$ arithm. adeoque x^{m+1} geometr. & $1:(m+1)$ harmonicæ progressionis. Ut si proponatur series differentialium $ax dx, bx^3 dx, cx^5 dx, fx^7 dx$ &c. mixta ex serie quavis a, b, c, f &c. & geometrica $x dx, x^3 dx, x^5 dx, x^7 dx$ &c. erunt eorum integralia $\frac{1}{2}ax^2, \frac{1}{4}bx^4, \frac{1}{6}cx^6, \frac{1}{8}fx^8$ &c. mixta ex eadem serie a, b, c, f &c. geometrica simili xx, x^4, x^6, x^8 &c. & harmonica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ &c.

XLII.

Exhibere arcam Hyperbola inter Asymptotas per seriem infinitam.

Mod. I. Per Arithm. Infin. WALLISII. Esto Hyperbola PCQ, [Fig. 1.] cujus centrum A, asymptotæ AD, AS, applicatæ BC, IO [10], quærendumque sit spatium CBIO [CB10]. Sumto autem $AB = 1 = BD, BC = b, BI [B_1] = x$, quæ non sit $\gt AB$ vel BD , hoc est, unitate. Dividatur $BI [B_1]$ in partes aliquot æquales $BE, EF, FG, GR, RI [B_2, \phi, \phi\gamma, \gamma\rho, \rho\iota]$ quarum numerus sit n , & singulæ dicantur d , sic ut nd sit $= x = BI [B_1]$. Tum circumscribantur [in-scribantur] hyperbolæ parallelogramma $BK, EL, FM, GN, RO [Bx, e\lambda, \phi\mu, \gamma\nu, \rho\theta]$, ductis applicatis $EK, FL, GM, RN, IO [e\alpha, \phi\lambda, \gamma\mu, \rho\nu, \iota\theta]$,
fac. Bernoulli Opera. D d d d d quæ

Num. LXXIV. quæ ex natura hyperbolæ ordine reperiuntur $= b : (1 \mp d)$,
 $b : (1 \mp 2d)$, $b : (1 \mp 3d)$, $b : (1 \mp 4d)$, &c. usque ad ultimam
 $b : (1 \mp nd)$. Singulis igitur in d ductis, habentur arcæ parallelogrammorum, quæ porro in series convertendæ sunt per XXXVI & XXXVII, ut sequitur:

$$\text{BK [B}_n] = bd : (1 \mp d) = bd \pm bdd + bd^2 \pm bd^3 + bd^4 \pm bd^5 \pm bd^6 \&c.$$

$$\text{EL [e}_\lambda] = bd : (1 \mp 2d) = bd \pm 2bdd + 4bd^2 \pm 8bd^3 + 16bd^4 \pm 32bd^5 \pm 64bd^6 \&c.$$

$$\text{FM [\phi}_\mu] = bd : (1 \mp 3d) = bd \pm 3bdd + 9bd^2 \pm 27bd^3 + 81bd^4 \pm 243bd^5 \pm 729bd^6 \&c.$$

$$\text{GN [\gamma}_\nu] = bd : (1 \mp 4d) = bd \pm 4bdd + 16bd^2 \pm 64bd^3 + 256bd^4 \pm 1024bd^5 \pm 4096bd^6 \&c.$$

$$\text{Ult. RO } [\rho] = bd : (1 \mp nd) = bd \pm nbdd + nmbd^2 \pm n^3bd^3 + n^4bd^4 \pm n^5bd^5 \pm n^6bd^6 \&c.$$

Harum serierum primi termini æquantur, secundi progrediuntur ut numeri naturales, tertii ut eorundem quadrata, quarti ut cubi, &c. Hinc, posito numero serierum seu parallelogrammorum n infinito, [quo quidem casu summa parallelogrammorum seu inscriptorum seu circumscriptorum ab ipso curvilineo CBIO vel CB₁₀ non differt,] summa terminorum primæ seriei perpendicularis erit æqualis, terminorum secundæ dimidia, tertiæ subtripla &c. summæ totidem, hoc est, n terminorum ultimo æqualium, per ea, quæ docet WALLISIUS in *Arithm. Infinit.* nosque demonstrabimus alibi*: ac propterea summa omnium serierum perpendicularium, id est omnium parallelogrammorum, seu area spatii hyperbolici CBIO [CB₁₀] hac serie exprimetur:

$$nbd \pm \frac{1}{2}n^2bd^2 + \frac{1}{3}n^3bd^3 \pm \frac{1}{4}n^4bd^4 + \frac{1}{5}n^5bd^5 \pm \frac{1}{6}n^6bd^6 \&c.$$

sive, loco nd substituendo x ,

$$bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5 \pm \frac{1}{6}bx^6; \&c.$$

Mod. 2. *Per Calc. differ.* LEIBNITII. Positis, ut prius, AB $= 1 = BD$, BC $= b$, & BI [B₁] $= x$, ejusque elemento RI [ρ₁] $= dx$, crit ex natura hyperbolæ IO [10] $= b : (1 \mp x)$, & elementum spatii hyperbolici RO [ρ₀] $= bdx : (1 \mp x) =$ seriei geometricæ $bdx \pm bxdx + bxxdx \pm bx^3dx + bx^4dx \&c.$

* In *Arte Conjectandi*, Part. II, Cap. 3.

per XXXVI & XXXVII, adeoque summa elementorum $\int(bdx^i$ ($x \mp x$)), sive spatium CBIO [CB₁₀] = $bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5$ &c. eadem series, quæ supra, mixta scil. ex geometrica & harmonica, per præced. Hæc igitur si summari possit, daretur Hyperbolæ quadratura.

Num.
LXXIV.

COROLL. 1. Si BI = B₁, dabitur tum summa tum differentia spatiorum CBIO & CB₁₀ per seriem ex geometrica & harmonica mixtam: cum enim sit ostensum

$$\begin{array}{l} \text{CBIO} = bx + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5 + \frac{1}{6}bx^6, \text{ \&c.} \\ \text{CB}_{10} = bx - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5 - \frac{1}{6}bx^6, \text{ \&c.} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{si t facta} \\ \text{additione \&} \\ \text{subtractione,} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{CBIO} + \text{CB}_{10} = 2bx \qquad + \frac{2}{3}bx^3 \qquad + \frac{2}{5}bx^5 \qquad \text{\&c.} \\ \text{CBIO} - \text{CB}_{10} = \qquad bx^2 \qquad + \frac{1}{2}bx^4 \qquad + \frac{1}{2}bx^6 \text{ \&c.} \end{array}$$

COROLL. 2. Posita BI [x] = BA [1] fit spatium interminatum hyperbolicum PCBAS = $b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}b + \frac{1}{6}b$ &c. simplici seriei harmonicæ, quæ cum infinita sit per XVI, arguit & aream hujus spatii talem esse. Conf. Cor. 4. ejusd. Prop.

COR. 3. Sin & B₁ [x] = BD [1] = BC [b], resultat pro spatio CBDQ series harmonica $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. hoc est, subducendo unumquemque terminum signo — affectum a præcedenti, series $\frac{1}{1} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}$ &c. cujus termini per saltum excerpti sunt ex serie reciproca trigonalium Q, Prop. XV, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c. Quod si statuatur quadr. AB, BC vel BD quadruplo minus, nempe $\frac{1}{4}$, exhibebitur etiam spatium CBDQ per seriem prioris subquadruplam $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. quæ per saltum formatur ex serie I Propof. XVII. Conf. *Act. Lips.* 1682. p. 46. (*)

X L I I I.

Invenire aream spatii ABEFS [BDφ] comprehensæ asymptotæ Hyperbolæ AD, & Curvæ BEF [Bφ], qua talis, ut rectangulum D d d d d 2 *sub*

(*) Ibi, Seriem eandem, sed sine Demonstratione, dedit LEIBNITIUS.

Num. LXXIV. *Sub ejus applicata IE [10] & recta constante AB, BC vel BD [quæ sit 1] agetur spatium hyperbolico CBIO [CB10]. Fig. 2.*

Quoniam, posita $BI = x$, spatium hyperbolicum $CBIO = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. per præced. eadem quoque series denotabit [ob AB vel $BC = 1$] longitudinem applicatæ IE , quæ propterea ducta in IR , seu dx , producit $x dx + \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{1}{3}x^3 dx + \frac{1}{4}x^4 dx + \frac{1}{5}x^5 dx$ &c. $= RE$, elem. spatii BIE . Hujus seriei terminos summamdo, fit spatium $BIE = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{30}x^6$ &c. seriei mixtæ ex geometrica & reciproca trigonalium, quæ posito insuper $BI [x] = BA [1]$ mutatur in simplicem trigonalium reciprocam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. cujus summa $= 1$, per XV. Est igitur totum spatium $ABEFS$ absolute quadrabile, æquale quippe quadrato ipsius AB (^b). Nota hic exemplum Curvæ mechanicæ, ubi quadratura specialis succedit absque generali; simplicis enim seriei summam dedimus, mixtæ non item.

Eadem ratione ostendetur ex altero latere spatium $B10 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{20}x^5$ &c. totumque spatium $BD\phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$ &c. (^c)

COROLL. Completis rectangulis CD & BQ aio fore curvilineum mechanicum $BD\phi =$ duplo curvilineo hyperbolico CQL , differentiam curvilinearum $ABEFS$ & $BD\phi =$ duplo spatio CQH , & summam eorundem $= 2 CBDQ$ (^d); quæ sic palam

(^b) *Aliter.* Sit $CBIO = z = IE \times 1$, eritque $dz = dx : (1-x)$, & spat. $BIE = \int x dx = zx - \int x dx = zx - \int (x dx : (1-x)) = zx + x - \int (dx : (1-x)) = zx + x - z$. Pro z scribatur valor ejus $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ &c. & invenies $BIE = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, &c. Posito autem $BI [x] = 1$, $BASFB [zx + x - z]$ reducitur ad $x = 1 = AB^2$.

(^c) Eodem argumento, invenies, si $CB10$ ponatur $= y$, esse $B10 = yx - x + y$. Et, ubi $B1 [x]$ ponitur $= 1$,

fit $B1\phi = 2y - 1$. Scriit e pro y valore e jus $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ &c. & habebis eadem series quas hic dat Noster.

(^d) Igitur $BD\phi [2y - 1] = 2CBDQ - CBDM = 2(CBDQ - LBDQ) = 2CLQ$. Et $ABEFS - BD\phi = 1 - 2y + 1 = 2 - 2y = 2CBDH - 2CBDQ = 2CQH$: Atque $ABEFS + BD\phi = 1 + 2y - 1 = 2y = 2CBDQ$.

palam fiunt : Si a serie $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \&c.$ subducatur $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \&c.$ auferendo sigillatim primum terminum a primo, secundum a secundo, tertium a tertio, &c. relinquetur $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{18} + \frac{1}{24} - \frac{1}{30} \&c. =$ spatio $BD\phi$, ut ostensum. Si vero eadem series ex altera sic tollatur, ut primus ejus terminus dematur ex secundo alterius, secundus ex tertio, tertius ex quarto &c. orietur $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \&c. =$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \&c. - 1 =$ (per præced.) duplo spat. hyperb. $CBDQ - BH = 2CBDQ - 2DL = 2CLQ.$ Ergo $BD\phi = 2CLQ$ Igitur cum ostensum etiam sit $ABEFS = 1 = BH = 2DL = 2LH$, erit $ABEFS - BD\phi = 2LH - 2CLQ = 2CQH$; nec non $ABEFS + BD\phi = 2DL + 2CLQ = 2CBDQ.$ *Qua erant demonstranda.*

Num. LXXIV.

XLIV.

Invenire aream spatii ABKGMT [BDNγK] comprehensi asymptota Hyperbola AD, & Curva KGM [KγN], qua talis, ut recta BIG [Bγ] sub ejus applicata IG [γ] & indeterminata BI [B], aequetur spatium hyperbolico CBIO [CB10]. Fig. 2.

Quia positus omnibus, ut prius, spatium hyperb. $CBIO = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \&c.$ per XLII, erit, per hyp. facta divisione per BI seu x , recta $IG = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 \&c.$ adeoque RG elem spat. $BIGK = dx + \frac{1}{2}xdx + \frac{1}{3}x^2dx + \frac{1}{4}x^3dx \&c.$ omniaque RG seu spatium $BIGK = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \&c.$ & posita $x = 1$, spatium totale $ABKGMT = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c.$ seriei reciprocae quadratorum, cujus summam etiamnum desideramus. Conf. Prop. XVII, sub fin. (°)

Haud dissimili modo reperitur ex altera parte spatium $B\gamma K = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \&c.$ sumtaque $x = 1$, totale spatium $BDN\gamma K = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \&c.$

D d d d 3 Co

(°) Imo ibi, [pag. 399] post Cel. EULERUM ostendimus Seriem reciprocam quadratorum [atque ideo spatium ABKGMT] esse æqualem

sextæ parti quadrati, cujus latus est peripheria circuli, diametro existente = 1 = AB.

Num. LXXIV. COROLL. Spatium ABKGMT duplum est spatii BDN γ K; cum enim summa utriusque sit $\frac{1}{1} + \frac{2}{9} + \frac{1}{25}$ &c. differentia $\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{1}{36}$ &c. erit utique summa ad differentiam, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$ &c. hoc est, ut 3 ad 1, per XXIV; unde spatium unum alterius duplum esse necesse est, ut maxime neutrius absolutam magnitudinem exploratam habeamus. Vid. Schol. ibid. (f).

XLV.

Exhibere Quadraturam Circuli aut Rectificationem lineae circularis per seriem. [Fig. 3.]

In peripheria semicirculi BCD, sumto indefinite puncto H, demittatur ex illo in radium AB perpendicularis HE; & sit AB = 1, & BE = x, adeoque, ex natura circuli, EH = $\sqrt{(2x - xx)}$; quo posito, cum ob simil. Trianguli characteristici LGH & Trianguli HEA, HE sit ad HA, sicut LG vel EF, elem. abscissae BE, ad LH, elem. arcus circ. BH; reperitur LH = $dx : \sqrt{(2x - xx)}$, factaque multiplicatione per $\frac{1}{2}$, semissem radii AH, sector HAL seu elem. sectoris HAB = $dx : 2\sqrt{(2x - xx)}$. Haec igitur quantitas, cum absolute summari nequeat, in seriem convertenda est; sed prius tollenda irrationalitas, quod eo fere modo fit, quo in Problematis *Diophanteis* uti vulgo suserunt. In hunc finem pono $\sqrt{(2x - xx)} = x : t$, seu $2x - xx = xx : tt$; ubi, quia divisio fieri potest per x, ipsaque non nisi unius dimensionis in aequatione relinquitur, ejus valor in rationalibus prodibit, unde & dx, & per hypoth. $\sqrt{(2x - xx)}$ seu x : t, ipsaque adeo fractio $dx : 2\sqrt{(2x - xx)}$, rationales fient; nempe $x = 2tt : (1 + tt)$, $dx = 4tdt : (1 + tt)^2$, $\sqrt{(2x - xx)} = x : t = 2t : (1 + tt)$, & denique $dx : 2\sqrt{(2x - xx)} = dt : (1 + tt)$; hinc fractio in seriem geometricam per XXXVII conversa exhibet $dt - ttdt + t^2dt - t^3dt + t^4dt$ &c. Summa igitur elementorum HAL, seu totus sector HAB = $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$ &c. eoque per semissem radii $\frac{1}{2}$ diviso,

(t) Supra pag. 531. 532.

fo, arcus $BH = \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 \&c.$ quæ series mixtæ sunt ex geometrica & harmonica, per XLI, a quarum proin summatione decantatum illud de Circuli Tetragonismo Problema dependet.

Num.
LXXIV.

Nota, ductis ex B & H tangentibus circuli BI, HI, sibi mutuo occurrentibus in I, junctaque HD, quæ radium AC secet in K, fore BI vel IH = AK, utramlibet autem = t. Nam 2. ang. BAI = BAH = AHD + ADH = 2ADH. Ergo BAI = ADH; cumque & ABI & DAK anguli, nec non latera AB & AD æquentur, erit quoque BI = AK. Deinde cum sit per hypoth. 1 ad t, ut $\sqrt{(2x - xx)}$ ad x; itemque, ob sim. Triang. DAK & DEH, AD seu 1 ad AK, sicut DE ad EH, hoc est, ex natura circuli, HE ad EB, seu $\sqrt{(2x - xx)}$ ad x; erit utique $1 : t = 1 : AK$, ac proinde AK seu BI = t.

COROLL. 1. Sumta $t = 1$, quo casu & BE, x seu 2tt : (1 + tt), æquatur BA, 1, fiet quadrans BAC = simplici seriei harmonicæ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \&c.$ = [subducto reapse unoquoque termino signo — affecto a præcedente] $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} \&c.$ Hinc quia quadratum radii est ad quadrantem circuli, sicut quadratum diametri ad totum circulum, sequitur si quadratum diametri, hoc est quadratum circulo circumscriptum sit 1, ac proin eidem inscriptum $\frac{1}{2}$, totius circuli aream per modo memoratam seriem expressum iri; adeoque si quadratum circulo inscriptum sit $\frac{1}{4}$, circuli aream fore $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} \&c.$ cujus seriei termini per saltum excerpti sunt ex serie H Prop. XVII. Conf. *Acta Lips.* 1682. p. 45. (8).

COROLL. 2. Posita Tangente BI = t, erit arcus, cujus tangens est, = $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 \&c.$ utpote semissis arcus BH. Confer. *Acta Lips.* 1691. pag. 179. (8).

XLVI.

Exhibere generaliter Sectorem cujusvis Sectionis Conica ex centro per seriem. [Fig. 4 & 5.]

Esto

(*) Ubi LEIBNITIUS eandem seriem affert, sed sine demonstratione-

Num. LXXIV. Esto Coni-secōio quæcunque, Hyperbola sive Ellipsis, BCD, cujus centrum A, vertex B, semi-latus transversum $AB = a$, semi-axis conjugatus $AL = 1$, adeoque semi-latus rectum $= 1 : a$, & ratio laterum, ut aa ad 1. Ponanturque porro abscissa indeterminata $BG = x$, $AG = z = a \pm x$ [\pm significat + in Hyperbol. & — in Ellips. uti \mp vicissim — in Hyp. & + in Ell.] ejusque elementum FG vel $CH = dx = \pm dz$, ordinata $GD = y$, ejus elementum $DH = dy$, & jungens D cum centro recta $AD = u = \sqrt{(zz + yy)}$. Ducta etiam intelligatur HCI parallela axi, secansque curvam in C & rectam AD in I, atque ex C demissa concipiatur in AD perpendicularis CE. Quibus positis, erit primo ex natura curvæ $aa : 1 = \pm zz \mp aa [2ax \pm xx] : yy$; unde fit $aa yy = \pm zz \mp aa [2ax \pm xx]$, & differentiando $aa y dy = \pm z dz$, & denique $dy = \pm z dz : aa y = z dx : aa y$. Deinde quoniam, ob sim. Triang. DGA & DHI, DG [y] est ad GA [z], sicut DH [dy] ad HI, invenitur $HI = z dy : y$, ac proinde $CI [HI \mp HC] = z dy : y - dz = (z dy - y dz) : y$. Quare denuo propter Triang. sim. AGD & IEC, ut AD [u] ad DG [y], sic IC [$(z dy - y dz) : y$] ad CE; unde reperitur $CE = (z dy - y dz) : u$, quæ ducta in semissem AD, seu $\frac{1}{2}u$, dat aream trianguli elementaris ACD $= \frac{1}{2}z dy - \frac{1}{2}y dz = [\text{posito loco } dy \text{ valore ejus}] \pm z dz : 2aa y - \frac{1}{2}y dz = \pm (z dz - aa y dz) : 2aa y = [\text{substituendo } \pm z z \pm aa \text{ loco } aa y y] (\pm z dz \mp z dz \pm a dz) : 2aa y = \pm a dz : 2ay = adx : 2ay = [\text{loco } ay \text{ furrogando } \sqrt{(2ax \pm xx)}] adx : 2\sqrt{(2ax \pm xx)}$, de qua in seriem convertenda & summanda agitur. Primo autem irrationalitas ex illa tollenda, mediante alia indeterminata, quæ loco x furrogari debet, ut in præc. Pono itaque $\sqrt{(2ax \pm xx)} = x : t$, unde fluit $x = 2at : (1 \mp tt)$, & $dx = 4at dt : (1 \mp tt)^2$, & $\sqrt{(2ax \pm xx)} = x : t = 2at : (1 \mp tt)$, & denique $adx : 2\sqrt{(2ax \pm xx)} = adt : (1 \mp tt) = \text{seriei geom. } adt \pm at^2 dt + at^4 dt \pm at^6 dt + at^8 dt \text{ \&c. per XXXVI \& XXXVII. Summa igitur omnium sectorum elementarium ACD, id est, area torius Sectoris ABCD} = at \pm \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{5}at^5 \pm \frac{1}{7}at^7 + \frac{1}{9}at^9, \text{ \&c}$

rectan-

rectangulo scil. comprehenso sub a semi-latore transverso & re-
cta, cujus longitudo est $t \pm \frac{1}{7}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$ &c. Unde pa-
tet, quo pacto generaliter quadraturæ sectionum Conicarum ad
summas serierum ex geometricis & harmonicis mixtarum redu-
cantur. Num.
LXXIV.

Nota, ductis per verticem B & curvæ punctum D tangenti-
bus BM, DM, sibi mutuo occurrentibus in M; dico fore BM
 $= t$. Quoniam enim $AG:AB = AB:AT$, per 37 Lib. I
APOLLONII, ac idcirco convertendo $AB:TB = AG[x]:$
 $BG[x]$; nec non [ob sim. Tr. TBM & CHD], $TB:BM$
 $= CH[dx]:HD[dy] = [ex æquatione Curvæ differentiali]$
 $ay:x$; erit, ex æquo perturbate $AB[a]:BM = ay:x$; un-
de obtinetur $BM = x:ay = x:\sqrt{(2ax \pm xx)}$, adeoque $\sqrt{(2ax$
 $\pm xx):x = 1:BM$. Verum, per constructionem, $\sqrt{(2ax$
 $\pm xx):x = 1:t$. Ergo omnino $BM = t$. Conf. *Acta Lipsf.*
1691, pag. 179.

Vide Num. XC.

E P I M E T P A.

I.

F *Alfissimum est, nihil a nobis dici posse, quod non sit dictum
prius.*

II.

*Argumentum CARTESII pro existentia Dei, ab idea entis perfe-
ctissimi desumptum, est sophisticum.*

III.

*Illud etiam, quo Philosophus realem mentis a corpore distinctio-
nem probare nititur, est ficulneum.*

IV.

*Naturam enim corporis in sola extensione consistere, nobis equi-
dem nondum persuasit.*

Jac. Bernoulli Opera.

E c c e e.

V.

Num.
LXXIV.

V.

Sed & hoc videtur nobis $\delta\rho\omega\mu\omicron\nu$, quod cum inter mentem & corpus reale discrimen statuat, idem non agnoscat inter diversas mentis facultates, qua non minus separatim possunt concipi, ac illa.

VI.

Distinctio perceptionis rei corporea in imaginationem & conceptum purum nulla est; omnis enim perceptio rei materialis est imaginatio.

VII.

Qui contra MEISNERUM, PERERIUM, THOMAM Aquinatem, & alios, possibilem vel extensionis, vel durationis Mundi infinitatem negant, munimen sua sententia quarant adversus hoc argumentum; Quod omni assignabili quantitate majus est, infinitum est, per definit. Geom. Quod omni assignabili quantitate majus esse potuit, infinitum esse potuit: Et analogice: Quod omni assignabili tempore prius est, æternum est: Quod omni assignabili tempore prius esse potuit, æternum esse potuit: Sed Mundus, nemine contradicente, omni assignabili quantitate & tempore major & prior esse potuit. Ergo infinitus & æternus esse potuit.

VIII.

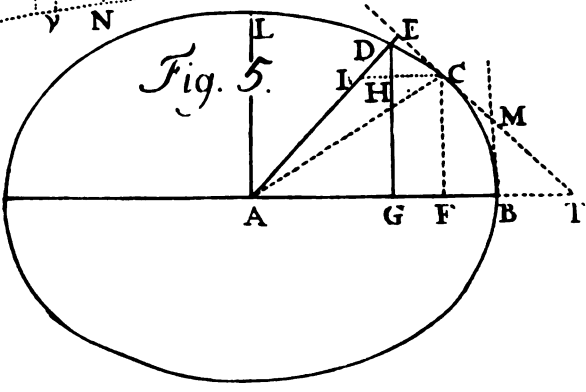
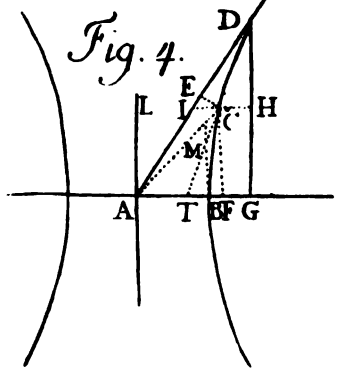
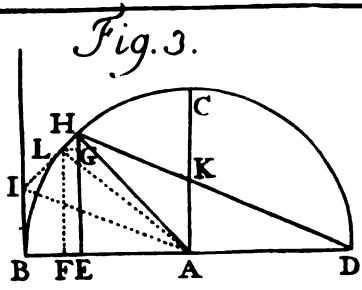
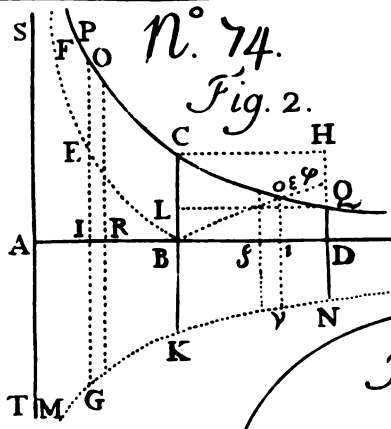
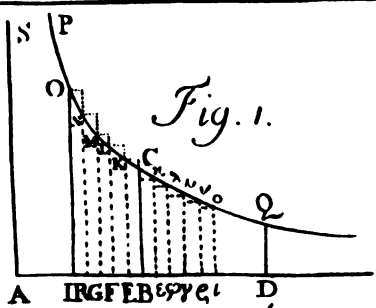
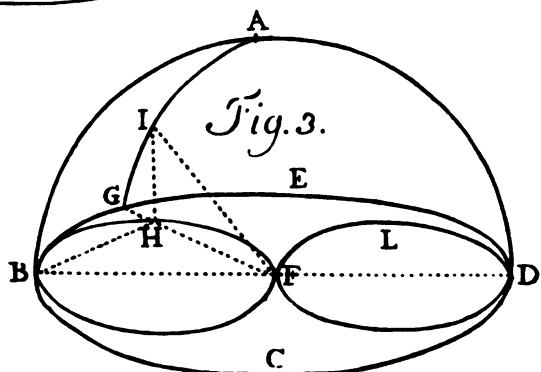
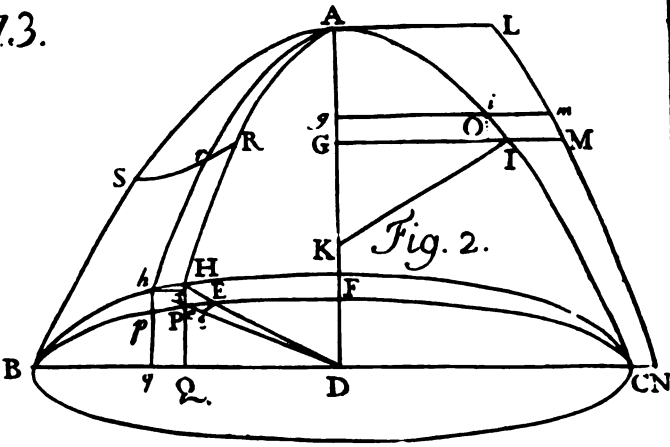
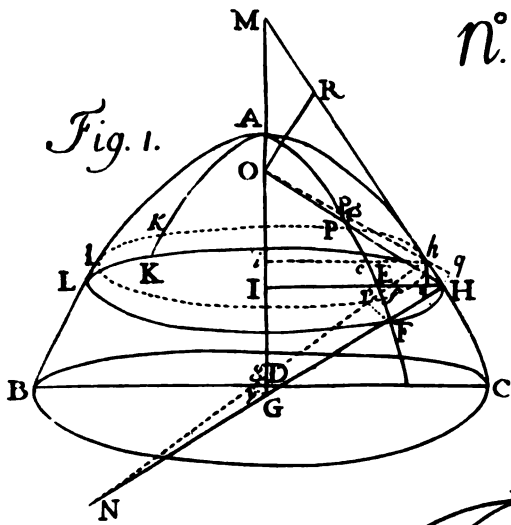
Cur, in Versione LOBWEASS. Psalmi CIX, ultimi versus. pleurarumque stropharum omni mensura destituantur, causa est, quod cum impari constant syllabarum numero, nequeunt esse Iambici masculini. Vitium vitasset Auctor, si vel omnes fecisset Trochæscos, ut in stroph. 2, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, &c. vel Amphibrachycos, ut in stroph. 5, 12, 33, 55, 62, 72, 75, 77, 83, vel saltem Iambicos femininos, qui cum versibus antepenultimis rythmos constituerent, ut fecerunt BEZA & CONRADUS in versionibus suis gallicis.

IX.

In vulgaribus Systematibus Arithmetica perperam omittitur illa species Regulæ Dupli, qua ex duabus proportionibus reciprocis componitur.

X.

N. 73.





X.

Num.
LXXIV

Axioma Euclideanum: Si ab æqualibus æqualia auferas, residua sunt æqualia, absolute verum non est, quando residua hac incomparabiliter parva sunt respectu datarum vel ablatarum magnitudinum: ad quod proin in calculo infinite parvorum caute advertendum, ne in paralogismum incidamus.

XI.

Cl. Dnus. NIEUWENTH. dum prima quantitatum elementa, seu differentialia recte admittit; secunda, seu differentio-differentialia inepte rejicit.

XII.

Modus inscribendi generaliter omnia Polygona regularia in circulo, quem ex RENALDINO citat Celeb. STURMIUS in Mathesi enucleata, pag. 38. manifeste fallax est; ut mirum sit illum non statim a Viro Cl. repudiari. Sumit enim inscriptionem Heptagoni pro Problemate plano, quod solidum esse constat. Ut taceam, quod ne quidem in Pentagono & Octogono succedit. Peccat autem, in toto circuitu, pro Pentagono circiter min. 13, in defectu; pro Heptagono, min. 37; & pro Octogono min. 90, in excessu (a).

Ecccc 2

XIII.

(a) Qualis sit iste modus inscribendi in circulo Polygona regularia, discas vel ex RENALDINO ipso, *De resolutione & compositione mathematica*, vel ex STURMIO, loco citato, vel ex WOLFIO, *Elem. Analyf. finit.* Probl. 136. §. 192. Hæc autem ratio, quando & quantum fallat, facile colligitur comparando latus Polygoni hac methodo determinatum cum vero latere. En utriusque formulam. Sit radius circuli = 1, numerus angulorum Polygoni = n, erit latus verum = $((\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n} - (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n}) \sqrt{-1}$, latus Renaldianum

= $\sqrt{(nn + 4n + 16 - \sqrt{(n^4 + 8n^3 - 14nn + 512n - 512)}): (2nn - 4n + 8)}$. Igitur si n sumatur successive pro 3, 4, 5, 6, &c. comparatio valorum ex utraque formula derivatorum manifestabit quibus in casibus Regula Renaldiniana succedat, aut fallat, & erroris quantitatem determinabit. Nec arbitror eam in aliis Polygonis quam in Triangulo, Quadrato, & Hexagono succedere. Certe, si universalis esset, determinaretur facile periphæria circuli. Nam, si fiat n = ∞, formula lateris Renaldiniani reduceretur ad $\sqrt{(nn + 4n + 16 - nn - 4n + 80, \&c.): (2nn - 4n + 8)}$

Num.
LXXIV.

XIII.

Quid contra sentiendum sit de Scholio dicti Auctoris, pag. 182, quo Quadraturam circuli Leibnitianam suspectam velle reddere videtur, superius ex nostra Prop. XLV colligitur.

XIV.

Titius apud Caium omnia sua bona fœnori exponit; ea conditione, ut sibi quotannis in sui alimentationem, ultra convenientem usuram, qua sola non sufficeret, partem sortis tantam reddat qua, una cum dicta usura, determinatam quandam summam, de qua conventum est, constituat. Queritur, quamdiu suffectura sint ejus bona? Resp. Observetur mira identitas Questionis in speciem diversissima, cum Problemate penultimi Corollarii Disputationis nostra præcedentis De Seriebus, ubi quaesitum fuit, quot antlia haustibus aer recipiens ad datum raritatis gradum perducatur. Nam si ponatur

Sors integra - - - = a = - - - - Cavitas recipientis
Eadem cum usura primi anni = b = Cavitas recipientis & antlia simul
Pensio annua - - - = c = - - - - Densitas aeris naturalis
Id quod, elapso primo anno,
sorti demendum - - - - = f = - - - - Densitas aeris optata
Numerus annorum, quibus
bona exhauriuntur - - = x = Numerus haustuum antlia
reperitur utrobique $x = (\text{Log. } c - \text{Log. } f) : (\text{Log. } b - \text{Log. } a)$. (^b)

+ 8)) = [propter $n = \infty$] $\sqrt{(48: m)} = \frac{4}{n} \sqrt{3}$. Hoc latus Polygoni, si multiplicetur per n numerum laterum, habebitur pro peripheria Polygoni infinitilateri, id est, circuli, $4\sqrt{3} = 6.928 +$, quod veræ peripheriæ longitudinem multum excedit.

(^b) De numero haustuum requisito ut aer in dato recipiente conten-

tus ad datam raritatem reducatur, videfis, N^o. LIV, pag. 541, Notam n ; ubi hoc tantum animadvertendum est, [si formulam $x = \log. r : \log. a$, ad literas hic ab Auctore usurpatas revocare velis,] rationem r . vel $r : 1$ eam esse quæ hic $c : f$; & rationem a , vel $a : 1$, eam quæ hic $b : a$ dicitur. Igitur $\log. r = \log. c - \log. f$, atque $\log. a = \log. b - \log. a$; nec non

non $x = [\log. r : \log. a] = (\log. c - \log. f) : (\log. b - \log. a)$.

Problema quod attinet hujus Coroll. illud sic potest concipi. *Caius Titio* singulis annis non modo debitam usuram $b - a$ solvit sortis a , cujus summæ debitor remanet, sed insuper ipsi foeneratur summam f quæ cum usura $b - a$ efficit c , [adeo ut sit $c = b - a + f$] cujus summæ f , cum usuris, & usurarum usuris, creditor sit apud *Titium*, donec creditum singulis annis crescens tandem compenset debitum a . Anno igitur primo creditum est f ; quod anno secundo, propter usuras excrevit ad $\frac{b}{a}f$, cui adjicitur summa f . Anno

tertio, hæc summa cum foenore æquatur $\frac{bb}{aa}f + \frac{b}{a}f$ cui additur pariter f , sicque singulis annis augetur creditum, quod tandem post elapsos x annos, æquale est $((b : a)^x - 1 + (b : a)^{x-2} + \dots + b : a + 1)f = [\text{per Prop. 8, pag. 381}] ((b : a)^x - 1)f : (b : a - 1)$; quod si ponatur $= a$ [scil. ut crediti debiti- que fiat compensatio] erit $(b : a)^x = (b - a + f) : f = c : f$. Igitur $x = \log. (b : a) = \log. (c : f)$; aut $x = \log. (c : f) : \log. (b : a)$, vel $x = (\log. c - \log. f) : (\log. b - \log. a)$.

Num.
LXXIV.





N°. L X X V.

JACOBI BERNOULLI S O L U T I O

PROBLEMATUM FRATERNORUM

Peculiari Programmate Cal. Jan. 1697, Groningæ, nec non Actorum Lips. mense Junio & Decemb. 1696, & Febr. 1697, propositorum; una cum Propositione reciproca aliorum.

*Acta Erud.
Lips. 1697.
Mai. p. 211.*

G Eometræ methodum de *Maximis & Minimis* ad illa duntaxat Problemata huc usque adhibuerunt, in quibus ex infinitis partibus seu functionibus unius datæ curvæ aliqua maxima minimave requiritur; neque cogitarunt de ejus applicatione ad talia, ubi ex ipsis infinitis curvis non datis una desideratur, cui maximum aliquod minimumve competat; licet & hæc subtilitate inventionis & utilitatis præstantia cæteris minime sint inferiora. In eorum numero est, quod *Frater* Mense Junio primum proposuit, cujusque solutioni terminum elapsi anni finem statuit, Problema de invenienda *Curva Oligochrona*, per quam descendendo grave a dato puncto brevissimo tempore perveniat ad aliud datum punctum. Quanquam autem hac *Fratris* provocatione me non teneri existimabam; nihilominus cum superaccessisset

cessisset humanissima Celeberrimi Domini LEIBNITII invitatio, N. LXXV. laborem solutionis amplius subterfugere non potui. Postquam enim hic Vir, litteris die 13 Septembris ad me datis, significasset se solvisse Problema, juxtaque desiderare ut & alii tentarent: ad ejus sollicitationem aggressus sum quod alias intactum reliquisset, idque optato protinus successu: solutionem enim sexto Octobris jam habui, & ab illo tempore Amicis ostendi. Cur autem non potius ad *Acta* communicarim, causa est, quod cum terminum solutionis in exterorum gratiam ad Pascha usque præsentis anni prorogatum intelligerem; ego interea speculationem ad alia quoque difficiliora Problemata nunc una proponenda promovere statuissem. Priusquam vero ad solutionem præsentis Problematis accedam, sequens præmitto *Lemma*.

Si curva ACEDB [*Fig. 1*] talis sit, quæ requiritur; hoc est, per quam descendendo grave brevissimo tempore ex A ad B perveniat, atque in illa assumantur duo puncta quantumlibet propinqua C & D: Dico, portionem curvæ CED omnium aliarum punctis C & D terminatorum curvarum illam esse, quam grave post lapsum ex A brevissimo quoque tempore emetiat. Si dicas enim, breviori tempore emetiri aliam CFD, breviori ergo emetietur ACFDB, quam ACEDB; contra hypothésin.

Esto igitur in plano utcunque ad horizontem inclinato [nec enim verticale sit, necesse est] curva desiderata ACB [*Fig. 2*] per quam descendens grave ex A breviori tempore perveniat ad B, quam per aliam quamcunque in eodem plano positam; & sint in illa sumpta ubivis duo puncta C & D infinite propinqua, ductæque intelligantur recta horizontalis AH, ejusque perpendicularis CH, & huic normalis DF, bisectæque CF in E, compleatur parallelogrammum DE ducta recta EI. Quæritur in hac punctum G, id est, inclinatio particularum curvæ CG, GD ad se invicem, quæ faciat, ut tempus descensus per CG + tempus descensus per GD [quod sic denoto $t_{CG} + t_{GD}$, intellige semper post lapsum ex A] sit minimum. Ad hoc indagandum, intelligatur in recta EI aliud punctum L, sic ut GL sit incompara-

N.LXXV. parabiliter minor ipsa EG; ductisque CL, DL, super C & D descripta concipiantur arcuum elementa LM, GN; erit, ex natura minimi, $tCL + tLD = tCG + tGD$; adcoque $tCG - tCL = tLD - tGD$, (^a) quo posito, sic arguo:

CE:

(^a) Notabile est in primis istud Problema, quod primum fere dedit occasionem Geometris cogitandi de hujusmodi quæstionibus, in quibus non investigatur in data curva maximum aliquod, minimumve; sed curva desideratur quæ sit ipsa maximum aut minimum, hoc est, hanc habeat curvaturam quæ proposito alicui fini optime conveniat. Quoniam autem Synthesin meram, particularem, nec ad similes casus facile applicandam, hic protulit Noster, æquum est ut Analysin magis generalem proponamus, rem Geometris notissimam, sed Tyronibus, quorum in gratiam scribimus, forte utilem. Igitur, post Lemma Auctoris nostri, quo docet conditionem maximi minimive qua tota curva gaudet, etiam singulis ipsius particulis infinite parvis competere, & istud ostendendum erat, quod assumit; si curva ACGD [Fig. A.] atque ejus particula CGD tempore brevissimo percurratur, vel, generatim, omnium optime præstet aliquem effectum, esse, sumta GL incomparabiliter minori ipsa EG, $tCG + tGD = tCL + tLD$; ubi tCG , non modo tempus descensus per CG, sed effectum quemcunque qui præstatur per CG denotare potest. Scil. Si CAD, C/D, CLD, CGD, C_gD, C_γD repræsentent omnes curvas

possibiles a C ad D ductas, inter quas desiderata sit CGD; patet, si maxima sit effectus propositi quantitas in CGD, eandem crescere debere eundo a CAD ad CGD, & decrescere pergendo a CGD ad C_γD. Ergo in CGD neque crescet, neque decrescet, sed stabit. Idem erit igitur effectus per C_gD, & ipsi vicinissimam CLD; hoc est, erit $tCG + tGD = tCL + tLD$, vel $tCG - tCL = tLD - tGD$.

Hoc posito, sit $A = tCG$, & $dA = tCG - tCL$; nec non $a = tGD$, & $da = tLD - tGD$. & erit $dA = da$. Sed, ut habeatur dA , A non est simpliciter differentianda, sed ita, ut maneant constantes x [AH], dx [HP vel CE], y [HC], s [AC]. Nam cum CL transit in CG, solæ CL, [ds], EL [dy] mutantur. Ista crescit incremento LG [ddy]; illa augmento GM [dds] = $d\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dyddy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ [est enim dx constans] = $dyddy : ds$. Igitur si A sit functio ipsarum x, dx, y, dy, s, ds , ejus differ. dA , induet hanc formam $Bddy + Cdds = Bddy + Cdyddy : ds = (B + Cdy : ds) ddy$. Pariter, ut habeatur da , attendendum est quid maneat, quid mutetur, quando GD transire ponitur in LD. Manent autem AP [ξ], PQ = LO = GK [$d\xi$]. Sed PG [v] decrescit, atque DK [dv], quod

$$\begin{array}{l} \text{CE} : \text{CG} = \text{tCE} : \text{tCG} \\ \text{CE} : \text{CL} = \text{tCE} : \text{tCL} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ex natura} \\ \text{descenf. grav.} \end{array} \right\} \text{N.LXXV.}$$

$$\text{Ergo } \frac{\text{CE} : \text{CG} - \text{CL} [\text{MG}]}{\text{CE} : \text{CL}} = \frac{\text{tCE} : \text{tCG} - \text{tCL}}{\text{tCE} : \text{tCL}}$$

$$\text{Sed } \text{MG} : \text{GL} = \text{EG} : \text{CG} \quad [\text{ob sim. tr. MLG, CEG}]$$

$$\text{Quare} : \text{CE} : \text{GL} = \text{EG} \times \text{tCE} : \text{CG} \times (\text{tCG} - \text{tCL})$$

EF :

quod evadit DO, crescit quantitate GL [ddy]; ACG [σ] reducitur ad ACL & minuitur lineola GM [dyddy: ds], GD [dσ] vero, quod fit DL, augetur incremento LN [ddσ] = d√(dξ² + dv²) = [ob dξ constans] dv ddu: dσ = dv ddy: dσ. Ergo dα habebit hanc formam — φdv + βddv — γdσ + xddσ = — φddy + βddy — γdyddy: ds + xdvddy: dσ = (—φ + β — γdy: ds + xdv: dσ) ddy. Hoc si æquale ponatur ipsi dA, erit, utrinque dividendo per ddy, B + Cdy: ds = —φ + β — γdy: ds + xdv: dσ, vel, transponendo φ + γdy: ds = β — B + xdv: dσ — Cdy: ds. Est autem β — B = dB & xdv: dσ = Cdy: ds = d(Cdy: ds). Nam B, C, dy, ds, auctæ suis incrementis, fiunt β, γ, dv, dσ. Igitur φ + γdy: ds = d(B + Cdy: ds). Unde hæc fluit Regula. Differentietur quantitas proposita tGD, α, vel tCG, A, perinde enim est, ponendo x, dx, dy, & ds constantes, ac faciendo ipsius y differentiale = 1, ipsius vero s differentiale = dy: ds, & habebis φ + γdy: ds. Iterum differentietur A, ponendo x, dx, y & s constantes, ac faciendo ipsius dy differentia-

Jac. Bernoulli Opera.

le = 1, & ipsius ds differentiale = dy: ds, habebisque B + Cdy: ds. Pone igitur differentiale prius ipsius A æquale differentię more vulgari sumptæ posterioris differentialis, & habebis æquationem ad Curvam. In hujus autem Regulæ usu hoc animadverti sane meretur, quod si ipsius A differentiale prius sit = 0, id quod accidit, quoties expressionem A non ingrediuntur quantitates y & s; tum quoniam d(B + Cdy: ds) = 0, erit B + Cdy: ds differentiale posterius æquale ponendum quantitati constanti: quo casu, Regula mira facilitate negotium absolvit.

Hanc Regulam exemplis nonnullis illustremus. Ac primo, quæritur curva celerrimi descensus. Hic, quoniam tempus est ut spatium ds directe & velocitas √x inverse, tCG, vel A, exprimetur per ds: √x. Hanc autem expressionem cum non ingrediuntur variables y & s, ejus differentiale prius erit = 0. Igitur quantitati constanti æquandum est differentiale posterius, in quo x constans, ds crescere per incrementum dy: ds ponitur. Unde fit dy: ds√x = constanti = 1:√x, quæ æquatio,

Fffff

multi-

N.LXXV.

Pariter

$$\begin{array}{l} EF : GD \\ EF : LD \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ = \end{array} \quad \begin{array}{l} tEF : tGD \\ tEF : tLD \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \text{ ex natura} \\ \} \text{ desc. gravium} \end{array} \right.$$

$$\text{Ergo } EF : LD - GD [LN] = tEF : tLD - tGD$$

$$\text{Sed } LN : LG = GI : GD \text{ [ob sim. tr. LNG, GID]}$$

$$\text{Quare } EF [CE] : LG = GI \times tEF : GD \times (tLD - tGD)$$

ideo-

multiplicando & quadrando, fit $ady^2 = xds^2 = xdy^2 + xdx^2$, aut $x dx^2 = (a - x) dy^2$, atque $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{a - x}$ quæ est æquatio ad Cycloidem.

2°. Quæritur Solidum minimæ resistantiæ. [Vid. Num. LVI, Not. i, pag. 569]. Resistentia quam patitur solidum genitum ex rotatione figuræ planæ circa axem, est ut $\int (x dx^3 : ds^2)$, [Vide ibid. Notam h, pag. 569], cujus differentiale prius = 0. Igitur differentiale posterius, quod est $\frac{2x dx^3 ds dy : ds}{ds^4} =$

$\frac{2x dx^3 dy}{ds^4}$, æquetur quantitati constanti $2a$, & habebimus $x dx^3 dy = a ds^4$, ad naturam curvæ exprimendam.

3°. In hisce exemplis differentiale prius quantitatis A evanescebat. En alterius generis exemplum. Quæritur curva ejus naturæ ut $\int y^n ds$ sit maximum. Est igitur $A = y^n ds$. Hujus differentiale prius est $ny^{n-1} ds$;

posterius $y^n dy : ds$. Ergo $ny^{n-1} ds = d \frac{y^n dy}{ds} = (ny^{n-1} ds dy^2 + y^n ds ddy - y^n dy dds) : ds^2$, vel $ny^{n-1} ds^3 - ny^{n-1} ds dy^2 = y^n ds ddy - y^n dy dds$. Pro ddy scribe $ds ds : dy$, id enim postulat dx constans: & erit $ny^{n-1} ds^3 - ny^{n-1} ds dy^2 = y^n ds^2 dds : dy - y^n dy dds = (y^n ds^2 dds - y^n dy^2 dds) : dy$, vel [quia $ds^2 - dy^2 = dx^2$], $ny^{n-1} ds dx^2 = y^n dx^2 dds : dy$, aut denique $ny^{n-1} dy ds - y^n dds = 0$. Hæc autem potest integrari, si per ds^2 divisâ ponatur. Nam ipsius $(ny^{n-1} dy ds - y^n dds) : ds^2$ integrale est $y^n : ds$, quod si ponatur æquale constanti $a^n : dx$, habebimus $y^n dx = a^n ds$, æquationem ad curvam.

ideoque $EG \times CE : CG \times (CG - CL) = GI \times EF : GD \times (LD - GD)$ N.LXXV
 & permus. $EG \times CE : GI \times EF = CG \times (CG - CL) : GD \times (LD - GD)$
 $= [\text{ex nat. minimi, ut dictum}] = CG : GD$

Sed $EG \times CE : GI \times EF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}}$, ex nat. desc. gr.

Quare $\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD.$

Ubi in transitu considerandum proponimus Celeberrimo Domino NIEUWENTIIIT usum differentio-differentialium [quæ ipse immerito explodit] in eo, quod assumere coacti fuimus particulam GL ipsis EG, GI infinite parvis infinities adhuc minorem; absque quo, non video quomodo ad solutionem Problematis via patuisset. Sunt enim EG, GI elementa abscissarum AH, quemadmodum CG, GD elementa ipsius curvæ, & HC, HE ipsæ ejus applicatæ, earumque elementa CE, EF; adeo ut Problema ad puram Geometriam redactum huc redeat, ut inveniatur curva, quæ elementa sua habeat composita ex elementis abscissarum directe, & radicibus applicatarum inverse: qua quidem proprietate *Isochronam* illam *Hugenianam*, nunc & *Oligochronam* futuram, tritam nempe notamque Geometris *Cycloidem*, gaudere deprehendo; quod in Fig. 3, ubi ACP semi-Cycloidem, CM, GN duas ejus tangentes, RQP semi-circulum genitorem refert, ita porro demonstro:

$GD : GI = GN : GX^* = VP : VX = VR : RX = \sqrt{RP} : \sqrt{RX} [\sqrt{HE}]$	* ex Nat. Cycloid.
$GI : EG = \dots \dots \dots GI : EG$	
$EG : CG = CS : CM^* = QS : QP = RS : RQ = \sqrt{RS} [\sqrt{HC}] : \sqrt{RP}$	
$Ergo GD : CG = \sqrt{RP} \times GI \times \sqrt{HC} : \sqrt{HE} \times EG \times \sqrt{RI}$	
$= GI \times \sqrt{HC} : EG \times \sqrt{HE} = \frac{GI}{\sqrt{HE}} : \frac{EG}{\sqrt{HC}}.$	<i>Q. E. D.</i>

Quod si nunc determinanda sit Cyclois, quæ transeat per data puncta A & B, describenda est super basi horizontali AH quo-
 Fffff 2 vis

N.LXXV. vis circulo genitore Cyclois AT, quæ ductam rectam AB, & productam, si sit opus, secet in T; quemadmodum enim recta AT est ad rectam AB, sic diameter circuli genitoris Cycloidis AT est ad diametrum genitoris quæsita AB ^(b). Alterius generis nec minus elegans Problema foret, si jam porro quæreretur, quænam ex infinitis Cycloidibus [aut saltem Circulis, Parabolis aliisque curvis] per A transeuntibus, ac super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendicularum ZB appellat. Qui speculationem de maximis & minimis promovere volet, tentabit ^(c). Nobis sufficiat proposuisse.

Atque ita curva hæc, quæ tot Mathematicorum ingeniis exercita fuit, ut nihil in illa eruendum restare videretur, nova proprietate conspicuam sese nobis sistit, quam velut perfectionum suarum colophonem, quasi nihil futuris sæculis debitura, sub finem adhuc præsentis adipisci voluit, postquam initio ejusdem natales, ac medio dimensiones omnes cum aliis præclaris affectionibus accepisset.

Cæterum monendum est, quod iisdem insistendo vestigiis, pari facilitate reperiri possit curva, quam mobile per medium inæqualis densitatis vel raritatis latum minimo tempore percurrat, quæ quidem convenienter principio *Leibnitiano* Mense Junio 1682 ^(d) demonstrato, eadem reperitur necesse est cum *Curva Refractionis*, quam HUGENIUS in Tractatu *de Lumine* pag. 44. contemplatur, & cujus identitatem cum illa, quam primo consideravit Celeberrimus Dnus. LEIBNITIUS mense Septembri 1692, ^(e) pag. 446, nosque mense Junio 1693, pag. 254, construximus ^(f), conficio *Fratre*, jam olim deprehendi ^(g).

Sed per has speculationes ad alia quoque difficiliora Problemata

^(b) Quia scil. omnes Cycloides sunt inter se similes.

^(c) Vide Num. LXXVIII.

^(d) Radium scil. luminis via facilissima a puncto ad punctum ferri;

hoc est, via, quæ tempore minimo percurratur.

^(e) N^o. LV. pag. 548.

^(f) N^o. LVI. pag. 570.

^(g) Vid. Num. CIII. Art. XIV

mata patet accessus, qualia sunt, quæ de figuris Isoperimetris^{N.LXXV.} formari possunt. Quæritur, exempli gratia, quænam ex iis omnium sit capacissima [vulgo creditur esse circulus, & recte, sed sine demonstratione;] Quænam centrum gravitatis areæ & peripheriæ suæ habeat a basi remotissimum, quam *Frater* observavit esse Funiculariam, sed ex diverso fundamento &c. Hæc itaque & talia per Methodum *Maximorum* ei resolvenda proponimus. Præsertim vero, si vicem reddere volet, sequens generale tentabit: Quæritur ex omnibus Isoperimetris super communi basi BN constitutis illa BFN [Fig. 4] quæ non ipsa quidem maximum comprehendat spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata rectæ PF, vel arcus BF; hoc est, quæ sit quotacunque proportionalis ad datam A & rectam PF, curvamve BF? Huic, ne detrectare possit, adjungimus alterum quod de infinitis Cycloidibus supra motum fuit, majoremque cum suo affinitatem habet. Et cum iniquum sit, ut quis ex labore, in alterius gratiam & cum proprii temporis dispendio rerumque suarum damno, suscepto nihil emolumenti percipiat, prodit nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo *Fratri*, ultra laudes promeritas, honorarium quinquaginta imperialium decrevit; hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione mensem se suscepturum promittat, ipsasque solutiones finito anno, utcunque licet per quadraturas exhibeat. Hoc enim elapso si nemo dederit, meas exhibebo. (a)

Hæc itaque occasione Problematis Physico-mathematici a *Fratre* mense Junio primum propositi hac vice dicta sufficient. Quæ ibidem de complanatione superficierum Conoidicarum attigit, cum me propius spectarent, jam mense Octobri * pertractavi. Nobilissimum Tschirnhausium uterque eodem mense Junio notavimus †. Unicum igitur in Schediasmate *Fraterno* superest, quod, ne quid intactum prætereamus, enucleandum restat;

Fffff 3 metho-

(a) Vide Num. LXXXII. * N°. LXXIII. † N°. LXIX.

N.LXXV. methodus videlicet, quam celavit, inveniendi curvam ex sola data relatione ipsorummet curvæ punctorum ad se invicem. Quærenda sit, exempli gratia, curva AEC [Fig. 5.] talis, ut projecta utcumque ex dato puncto D recta DC, secante curvam in C & E, rectangulum CDE æquetur constanti spatio, puta unitati, quod primum est exemplum *Fratris*. Ad datam positione rectam DG ordinatim applicentur EF, CG in angulo arbitrario, & fit $DE = x$, $EF = y$, $DC = z$ & $CG = t$, erit, per hypothesein, CDE, seu $xz = 1$, & $x = z^{-1}$; dein propter sim. Tr. DEF & DCG, EF seu $y = tx$: $z = tz^{-2}$. Fundamentum solutionis: Talis supponatur æquatio, seu ratio inter x & y , ut substitutis ipsarum valoribus modo inventis, similis vel eadem inter z & t ratio resultet, quæ inter x & y ; quod hic ita fit: Pono $y = ax^m + bx^n$, erit, facta substitutione, $tz^{-2} = az^{-m} + bz^{-n}$, sive $t = az^{-m+2} + bz^{-n+2}$; quæ ut assimiletur priori $ax^m + bx^n$, comparo az^{-m+2} cum bx^n , & bz^{-n+2} cum ax^m , ac reperio utrobique $b = a$, nec non $n = 2 - m$; unde concludo, naturam curvæ quæsitæ esse $y = ax^m + ax^{2-m}$, vel, quod eodem modo ostendetur, $y = ax^m + ax^{2-m} + bx^n + bx^{2-n}$.

Haud absimiliter solvuntur duo sequentia, quæ habet, Problemata pag. 266, quorum posterius in Programmate suo generaliter ita proponit, ut loco utriusque segmenti sumatur quæcunque ipsorum potestas quæ sit m . Huic curva satisfacit ⁽¹⁾, quæ exprimi-

(1) Nisi fallor, ista fuit Auctoris nostri Analysis. Quoniam $x^m + z^m = 1$, erit [multiplicando per $x^m - z^m$,] $x^{2m} - z^{2m} = x^m - z^m$, vel $x^m - z^{2m} = x^m - x^{2m}$. Pone $y^r = ax^p + bx^q$, & quoniam eadem est inter t & z ratio, quæ est inter y & x , erit quoque $t^r = az^p + bz^q$.

Denique, quia $x : y = z : t$, vel $x^r : y^r = z^r : t^r$, aut, æquando media extremis, $t^r x^r = z^r y^r$; erit [substitutis valoribus ipsorum y^r & t^r ,] $az^{p-r} + bz^{q-r} = ax^{p-r} + bx^{q-r}$. Comparetur hæc æquatio cum prima $x^m - z^{2m} = x^m - x^{2m}$, & invenietur $a = 1$, $b = -1$, $p - r = m$, vel

exprimitur per $y = x(x^m - x^{2m})^n$. Quæ vero ultimo subjungit pag. 267 (k) sed absque solutione; his curvæ satisfaciunt mechanicæ, quarum natura est $y = x(a + f(dx:xlx))^n$ pro fig. 2; & $by + cyy + cy^2$, &c. $= (a + f(dx:xlx))^n$ pro fig. 3, [intellige per lx logarithmum ipsius x]. Quanquam tacere non possum, assumi hic aliquid dubiæ & suspectæ veritatis; videlicet, portiones semper esse unius ejusdemque numero curvæ, quæ eadem æquatione denotantur. Dari enim possunt exempla in contrarium, saltem in curvis mechanicis, ubi hoc non contingit, eademque æquatio diversas numero curvas designat, quod vel ex his ipsis exemplis liquet; quandoquidem hæ æquationes $y = x(a + f(dx:xlx))^n$ &c. non magis quadrant pro hypothese $xxz = 1$, quam pro quavis alia xx^3 , aut xx^2 , aut $xx^p = 1$; quibus tamen hypothesebus omnibus unam eandemque curvam satisfacere implicat. Hoc itaque ulteriori Lectorum scrutinio perpendendum relinquimus.

Pene hæc absolveram, cum præferrentur ad nos *Acta* mensis
No-

vel $p = m + r$, & $q = r = 2m$, vel $q = 2m + r$. Igitur æquatio assumpta $y^r = ax^p + bx^q$ abit in hanc $y^r = x^{m+r} - x^{2m+r}$, aut $y^r = x^r (x^m - x^{2m})$ vel radicem r extrahendo, $y = x(x^m - x^{2m})^{1/r}$, aut,

faciendo $\frac{1}{r} = n$, $y = x(x^m - x^{2m})^n$.

Sed facile apparet particularem esse solutionem, quæque non sine aliqua sagacitate, ad alios casus similes applicari poterit. Universalior est Celeb. NEWTONI Solutio (*Acta Erud.* 1697, Mai. pag. 223) quam illustrarunt Viri Celeb. HERMANNUS,

Comm. Acad. Petrop. Tom. IV, pag. 40, CLAIRAUT & FONTAINE, *Act. Acad. Paris.* ad ann. 1734, pag. 196, & 527, Edit. Paris. pag. 268, & 724, Ed. Amst.

(k) Quærebatur curva ejus proprietatis, ut ducta a dato puncto recta qualibet curvam in duobus punctis secante, solidum sub uno segmento & alterius quadrato constans esset. Sed observarunt Erud. Galli sub finem notæ præcedentis laudati, hujusmodi conditionibus nullam curvam satisfacere. Quare non satis capio, quid sibi cum solutione sua velit Noster, & ipse ejus insufficientiam satis animadvertisse videtur.

N.LXXV. methodus videlicet, quam celavit, inveniendi curvam ex sola data relatione ipsorummet curvæ punctorum ad se invicem. Quærenda sit, exempli gratia, curva AEC [Fig. 5.] talis, ut projecta utcumque ex dato puncto D recta DC, secante curvam in C & E, rectangulum CDE æquetur constanti spatio, puta unitati, quod primum est exemplum *Fratris*. Ad datam positione rectam DG ordinatim applicentur EF, CG in angulo arbitrario, & fit DE = x , EF = y , DC = z & CG = t , erit, per hypothefin, CDE, seu $xz = t$, & $x = z^{-1}$; dein propter sim. Tr. DEF & DCG, EF seu $y = tx: z = tz^{-2}$. Fundamentum solutionis: Talis supponatur æquatio, seu relatio inter x & y , ut substitutis ipsarum valoribus modo inventis, similis vel eadem inter z & t relatio resultet, quæ inter x & y ; quod hic ita fit: Pono $y = ax^m + bx^n$, erit, facta substitutione, $tz^{-2} = az^{-m} + bz^{-n}$, sive $t = az^{-m+2} + bz^{-n+2}$; quæ ut affimiletur priori $ax^m + bx^n$, comparo az^{-m+2} cum bx^n , & bz^{-n+2} cum ax^m , ac reperio utrobique $b = a$, nec non $n = 2 - m$; unde concludo, naturam curvæ quæsitæ esse $y = ax^m + ax^{2-m}$, vel, quod eodem modo ostendetur, $y = ax^m + ax^{2-m} + bx^n + bx^{2-n}$.

Haud absimiliter solvuntur duo sequentia, quæ habet, Problemata pag. 266, quorum posterius in Programmate suo generaliter ita proponit, ut loco utriusque segmenti sumatur quæcunque ipsorum potestas quæ sit m . Huic curva satisfacit (1), quæ expri-

(1) Nisi fallor, ista fuit Auctoris nostri Analysis. Quoniam $x^m + z^m = 1$, erit [multiplicando per $x^m - z^m$,] $x^{2m} - z^{2m} = x^m - z^m$, vel $z^m - z^{2m} = x^m - x^{2m}$. Pone $y^r = ax^p + bx^q$, & quoniam eadem est inter t & z relatio, quæ est inter y & x , erit quoque $t^r = az^p + bz^q$.

Denique, quia $x:y = z:t$, vel $x^r:y^r = z^r:t^r$, aut, æquando media extremis, $t^r x^r = z^r y^r$; erit [substitutis valoribus ipsorum y^r & t^r ,] $az^{p-r} + bz^{q-r} = ax^{p-r} + bx^{q-r}$. Comparetur hæc æquatio cum prima $z^m - z^{2m} = x^m - x^{2m}$, & invenietur $a = 1$, $b = -1$, $p - r = m$, vel

exprimitur per $y = x(x^m - x^{2m})^n$. Quæ vero ultimo subjungit pag. 267 (k) sed absque solutione; his curvæ satisfaciunt mechanicæ, quarum natura est $y = x(a + f(dx:xlx))^n$ pro fig. 2; & $by + cyy + cy^2$, &c. $= (a + f(dx:xlx))^n$ pro fig. 3, [intellige per lx logarithmum ipsius x]. Quanquam tacere non possum, assumi hic aliquid dubiæ & suspectæ veritatis; videlicet, portiones semper esse unius ejusdemque numero curvæ, quæ eadem æquatione denotantur. Dari enim possunt exempla in contrarium, saltem in curvis mechanicis, ubi hoc non contingit, eademque æquatio diversas numero curvas designat, quod vel ex his ipsis exemplis liquet; quandoquidem hæ æquationes $y = x(a + f(dx:xlx))^n$ &c. non magis quadrant pro hypothese $xzx = 1$, quam pro quavis alia xz^3 , aut xz^4 , aut $xz^p = 1$; quibus tamen hypothesebus omnibus unam eandemque curvam satisfacere implicat. Hoc itaque ulteriori Lectorum scrutinio perpendendum relinquimus.

Pene hæc absolveram, cum præferrentur ad nos *Acta* mensis No-

vel $p = m + r$, & $q - r = 2m$, vel $q = 2m + r$. Igitur æquatio assumpta $y^r = ax^p + bx^q$ abit in hanc $y^r = x^{m+r} - x^{2m+r}$, aut $y^r = x^r (x^m - x^{2m})$ vel radicem r extrahendo, $y = x(x^m - x^{2m})^{1/r}$, aut,

faciendo $\frac{1}{r} = n$, $y = x(x^m - x^{2m})^n$.

Sed facile apparet particularem esse solutionem, quæque non sine aliqua sagacitate, ad alios casus similes applicari poterit. Universalior est Celeb. NEWTONI Solutio (*Acta Erud.* 1697, Mai. pag. 223) quam illustrant Viri Celeb. HERMANNUS,

Comm. Acad. Petrop. Tom. IV, pag. 40, CLAIRAUT & FONTAINE, *Act. Acad. Paris.* ad ann. 1734, pag. 196, & 527, Edit. Paris. pag. 268, & 724, Ed. Amst.

(k) Quærebatur curva ejus proprietatis, ut ducta a dato puncto recta qualibet curvam in duobus punctis secante, solidum sub uno segmento & alterius quadrato constans esset. Sed observarunt Erud. Galli sub finem notæ præcedentis laudati, hujusmodi conditionibus nullam curvam satisfacere. Quare non satis capio, quid sibi cum solutione sua velit Noster, & ipse ejus insufficientiam satis animadvertisse videtur.

N LXXV. Novembris in quibus Nobilis Auctor *Meditatorum Geometricorum* *, eodem mense Anni 1695 publicatorum, motis sibi scrupulis nonnullis satisfacere ac sua vindicare satagit, eoque ardentius in nobis desiderium accendit videndi, penitusque introspiciendi tam præclara inventa. Dixi enim me nullatenus dubitare quin, pro excellenti quo pollet acumine, quicquid pollicitus est præstare possit; atque optare tantum, ut speciminum loco talia promat, quæ etiam iis, quibus de vastissimo Viri ingenio aliunde non constat, persuadere queant; quo nomine ipsum iterata vice & perhumaniter pulsandum censemus, Nam quod proprietatem spectat, quam focus curvarum attribuit, cum ea quibusvis punctis, adeoque non focus, qua focus, competat, difficulter quis capiat, quid hæc ad naturam focorum, aut curvarum per focos cognoscendam conducatur. Quemadmodum etiam intellectu haud facile existimo, quomodo quæ *figur. 1 & 3* † de Ellipsi & Parabola ostendit, ad omnes alias etiam dissimiles & diversorum generum curvas applicari possint, cum illa duntaxat ejusdem generis & speciei curvis quadrent, ac præsertim posterius illius tantum generalioris consecutarium sit, quod jam Anno 1692 ** exhibui. Et quod ultimo docet de abscindendis ex quavis curva portionibus in data ratione; hoc plane fallere dixi in Parabola, quod etiam agnoscere videtur Acutissimus Auctor; aut si dubitet, ego paratus sum demonstrare: unde, si nihil aliud, saltem hoc novo exemplo roborari opus haberet.

* N°. LXXVIII.

† N°. LXVIII.

** N°. XLIX. pag. 501.



Nº. LXXVI.

JACOBI BERNOULLI
S O L U T I O
DIFFICULTATIS CUJUSDAM,

Circa naturam Flexus contrarii.

Dixeram in Meditatione de natura osculi, Mense Martio ABsErud. Lipf. 1697. Sept. p. 410
1692, pag. 116 *, Quod in *omni Flexu contrario Circulus osculator infinite magnus, adeoque Curvedo Linea nulla.*

Hoc enim ex notione flexus contrarii, & illa naturæ lege, qua constanter salrum abhorret, satis, puto, per se manifestum. Illustrissimus tamen Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS ingeniose mihi objecit casus quosdam particulares, ubi contrarium evenit, & circulus osculator infinite parvus est; ut in curva GAg [*Fig. 1.*] cujus natura est $ax^3 = y^3$, & quæ in vertice A habet flexum contrarium, tamen radius osculantis circuli ibidem sit nullus, quippe quæ ex evolutione curvæ IAi per ipsum verticem A transeuntis describitur. In quo sane Vir laudatissimus quiddam valde singulare detexit; cum hoc assertionem meam dictamque naturæ legem prorsus evertere videatur. Stante enim hoc Axio-
mate Natura non facit saltum, sed etiam in minimis agit gradatim, difficulter concipi potest, quomodo partes curvæ, uno sensu inflexæ, sensu contrario flecti & incurvari possint, nisi prius amissa curvedine situm inter se directum acquirant, Ergo ubicun-

Jac. Bernoulli Opera.

G g g g

que

* Nº. XLVII. pag. 480, 481.

Num.
LXXVI.

que id accidere videtur, credendum est, in illo puncto virtualiter contineri omnes curvedinis gradus intermedios; quod sic explico. Loco curvæ $ax^3 = y^5$, concipio hanc $ax^3 = y^5 - bby^3$, quæ curva hujusmodi plexus format, quales in Fig. 2 præsentantur, eritque posita $AH = x$, & $HG = y$, applicata in vertice $AC = b$, & applicata in extrema ora sinus ACS , scilicet $ST = b\sqrt{\frac{2}{3}}$ (*). Radius circuli osculatoris [facta insuper $ayy - abb = s^3$, $5yy - 3bb = tt$, & $5yy - 9bb = uu$] universaliter reperitur $(9s^4 + t^4)\sqrt{(9s^4 + t^4)} : 6asuny$ (b). Unde discimus, primo, radium oculi fore infinitum, si vel s , vel u , vel y sit $= 0$, id est, si y sit $= 0$, si $= b$, si $= 3b : \sqrt{5}$. Secundo, aliis vero in casibus semper finitum, ut in puncto S , cum $y = b\sqrt{\frac{2}{3}}$, quo casu radius hic [posito $\frac{2}{3}abb = z^3$] fit $= \sqrt{\frac{2}{3}}az$. Tertio, eundem fore positivum, si vel ambæ s , & uu sint negatæ, hoc est, si sit $y < b$; vel affirmatæ ambæ, id est, si $y > 3b : \sqrt{5}$. Quarto, negativum autem, si existente s affirmata, uu maneat negata, id est, si y sit $> b$, & $< 3b : \sqrt{5}$. E quibus porro colligimus, curvam in parte ASC , & $EF G$ [supposita in E applicata $y = 3b : \sqrt{5}$] versus axem cavam

(*) Nam, in puncto S ordinata tangens est; igitur $dx = 0$. Differentietur itaque æquatio $ax^3 = y^5 - bby^3$, tractando x ut constantem, & habebis $0 = 5y^4 dy - 3bbyy dy$, aut, dividendo per $yy dy$, $5yy = 3bb$, atque $y = b\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(b) Æquationis $ax^3 = y^5 - bby^3$, vel $x = a^{-\frac{1}{3}}(y^5 - bby^3)^{\frac{1}{3}}$, differentiale est $dx = \frac{1}{3}a^{-\frac{1}{3}}(y^5 - bby^3)^{-\frac{2}{3}}(5y^4 - 3bbyy) dy = (5yy - 3bb)yy dy : 3(ayy - abb)^{\frac{2}{3}}yy$, seu faciendo $5yy - 3bb = tt$, & $10ydy = 2tdt$, nec non ayy

$- abb = s^3$, atque $2aydy = 3ssds$, est $dx = ttdy : 3ss$, & $ddx = (6sst dt - 6tts ds) dy : 9s^4 = (6s^3 t dt - 6tts ds) dy : 9s^4 = (30s^3 y dy^2 - 4att y dy^2) : 9s^4 = (30s^3 - 4att) y dy^2 : 9s^4 = (10ayy - 18abb) y dy^2 : 9s^4 = 2auny dy^2 : 9s^4$ [faciendo $uu = 5yy - 9bb$]. Est etiam elementum curvæ $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(t^4 dy^2 : 9s^4 + dy^2)} = dy \sqrt{(9s^4 + t^4)} : 3ss$. Igitur cum radius osculi sit [Vid. Num. LVIII. pag. 578] $= dz^3 : dyddx$, invenietur, substitutis his valoribus $((9s^4 + t^4)\sqrt{(9s^4 + t^4)} dy^3 : 27s^6) : (2auny dy^3 : 9s^4) = (9s^4 + t^4)\sqrt{(9s^4 + t^4)} : 6asuny$.

cavam esse, in parte CDE convexam; & puncta A, C & E esse puncta flexuum contrariorum, ibique nullam curvedinem esse; in puncto vero aliquo duobus flexibus intercepto, ut & alio quodam ultra flexum extremum E, puta in punctis B, D & F curvedinem esse maximam, ac proinde curvam a G versus A ordine describi alterna convolutione & evolutione curvarum IKLMNOPQR r q p o n m l k i. Jam si b sensim intelligatur minui, ac tandem evanescere, ut loco æquationis $ax^3 = y^3 - by^3$ resultet $ax^3 = y^3$, manebunt quidem radii circulorum osculatorum in punctis A, C & E infiniti; sed radius puncti S fiet nullus quippe $= \sqrt{\frac{3}{5}ax}$; quapropter, cum hæc omnia puncta tum coalescant in unum punctum A, sequitur, in hoc puncto radium circuli osculatoris esse simul & 0 & ∞ ; adeoque punctum illud A eminenter in se continere omnes curvedines a maxima ad minimam, omnesque evolutas KLMN &c. nmlk in unam rectam, axem videlicet curvæ AH, coincidere. Ex quo tandem illud evincitur, quod in *Fig. 1*, Evoluta curvæ GAg proprie non sit sola curva IAi, sed una cum assumpto axe HAh, ita quidem ut gignatur per convolutionem & evolutionem hoc ordine factam IA H h Ai, radiusque circuli osculatoris in extremitatibus tantum puncti A [si ita loqui fas est] nullus sit, in parte vero intermedia infinitus.

Explicationem nostram confirmat insuper hoc, quod circulus super quolibet puncto axis infiniti AH per A descriptus, adeoque & ipsa linea recta MN, ob axem AH curvæ in A perpendicularem, curvam ibidem tangit, eandemque ob flexum contrarium simul secat; quod cum, nemine nunc refragante, signum habeatur osculi, sequitur infinitos hos circulos curvam in A osculari, omnesque proin curvedinis gradus eminenter in hoc puncto contineri. Id quod hac vice ostendendum suscepi, ad assertionem meam olim editam cum Illustrissimi D. *Marchionis* observatis utcunque conciliandam. Habui quidem hanc speculationem jam dudum, sed neglecta jacuit, jacuissetque diutius, nisi animadversionem Viri perillustri nuperrime in *Supplementorum* To-

Num. mo III, Sectione II, pag. 78, ex *Commentariis Mathematico-Physicis*
 LXXVI. *Parisiensibus* recensitam, atque etiam in ejus *Analyfi infinite-par-*
vorum pag. 19, publicatam vidissem.



Nº. LXXVII.

JACOBI BERNOULLI
 A D D E N D A
 A D C O N S T R U C T I O N E M
 P R O B L E M A T I S
 B E A U N I A N I. *

Atk. Erud.
Lipf. 1697.
Sept. p. 412 **D**ixi tum, quod si curva data AC [Vide ibidem *Fig. 1.*]
 sit ex genere Paraboloidum, denotante v æquationis
 $a dy = y dx \pm x^r dx$, numerum quemcunque integrum
 & positivum, curva quæsitæ ED obtineri potest absque quadra-
 turis, per solam Logarithmicam; sed non adjeci, curvam hanc
 omnino quoque posse esse algebraicam. Itaque nunc dico ampli-
 us :

1. Quod eo casu semper duæ satisfaciunt curvæ, Mechanica
 & Algebraica. (a)

2. Idque

* Nº. LXXII.
 (a) Mechanica nempe, quando
 in æquatione ultima F [Vide Num.
 LXXII, Not. c, pag. 734, 735.]

ponitur t variabilis. Tunc enim æq.
 (F) $a dt + t dx + 1.2.3.4.5 a dx$
 $= 0$, integrata dat $t = -1.2.3.4.5 a$
 $- Nx$; ubi Nx , quantitatem trans-
 cen-

N.º 75.

Fig. 2.

Fig. A.

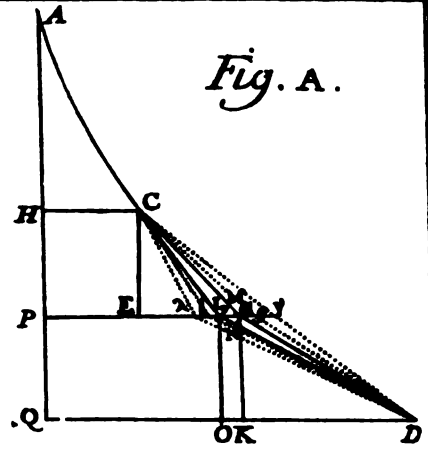
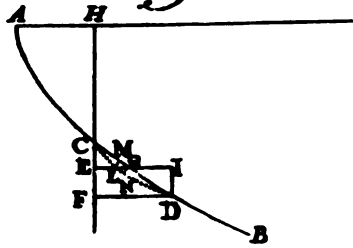
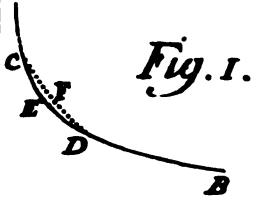
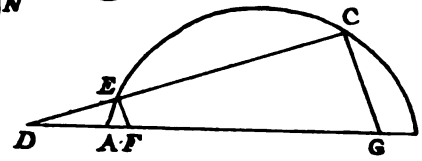
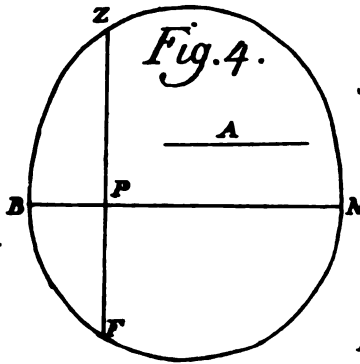
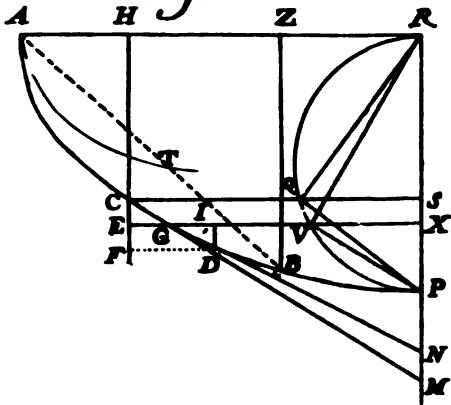


Fig. 3.

Fig. 4.

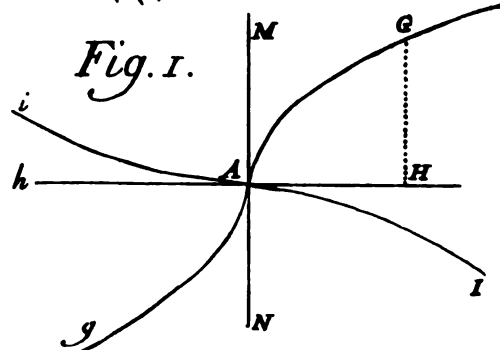
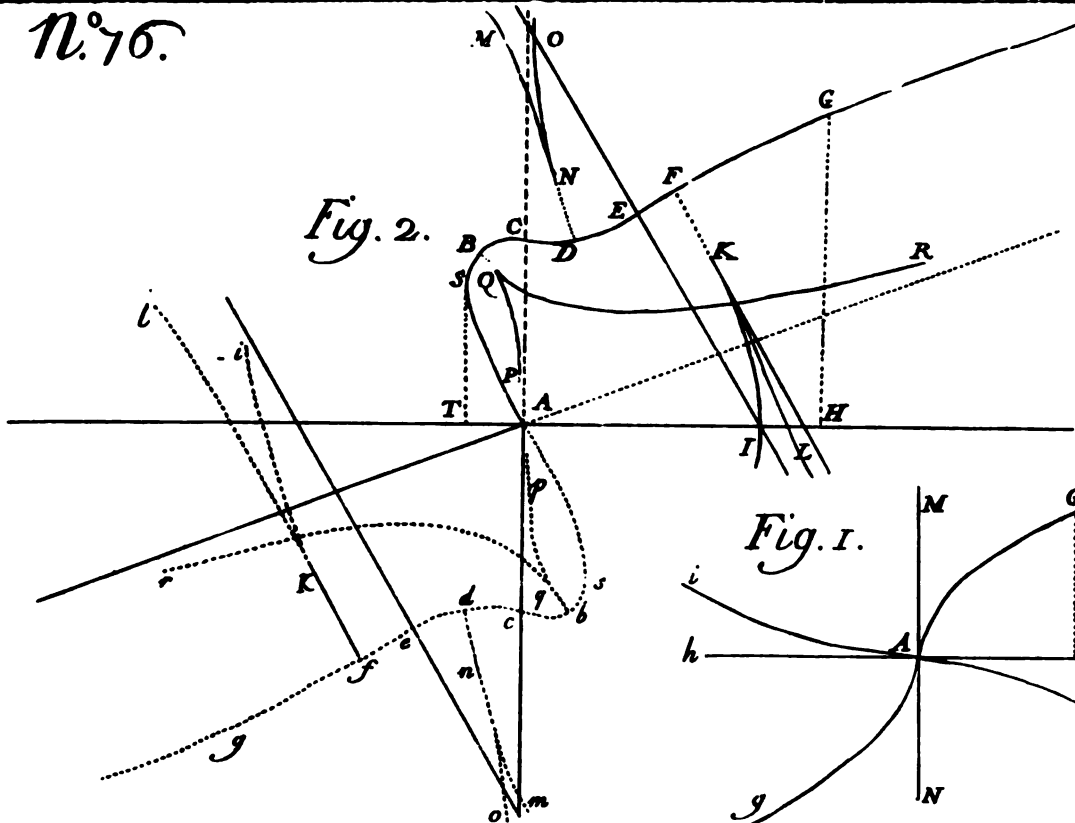
Fig. 5.



N.º 76.

Fig. 2.

Fig. 1.



Num. LXXVII. talis erit; sed si AC est Parabola cubica, erit saltem ED una ex curvis secundi generis &c.

5. Quod dictum de æquatione $ady = ydx \pm x^v dx$, idem quoque intelligendum de æquationibus differentio-differentialibus, $aaddy = ydx^2 \pm x^v dx^2$; $a^3 dddy = ydx^3 \pm x^v dx^3$, aliisque altiorum graduum in infinitum, quibus singulis [sumptis dx æqualibus] in casu exponentis v integri & positivi, transcendentes pariter & algebraicæ curvæ satisfacere possunt. (c)

Unicum exemplum esto loco omnium: Sit curva data AC vel IC [ibidem Fig. 2, vel 3,] cujus applicata $BC = x^3 : aa - 3xx : a + bx : a$, hoc est, sit æquatio construenda $ady = ydx - x^3 dx : aa + 3xx dx : a - bxdx : a$. Dico, si in recta infinita BG, seu ex G puncto logarithmicæ, seu ex B puncto tantum axis, abscindatur sursum quantitas algebraica $x^3 : aa + bx : a + b$; fore, ut obtineatur utrovis modo punctum in opta

ta

(*) Id unico exemplo ostendisse sufficiat. Proponatur æquatio $aaddy = ydx^2 + Ax^3 dx^2 + Bx^2 dx^2 + Cxdx^2 + Ddx^2 = 0$. Pone $y = Ax^3 + p$, aut $dy = 3Ax^2 dx + dp$, ac $ddy = 6Axdx^2 + ddp$ & æquatio inutabitur in $aaddp = pdx^2 + Bx^2 dx^2 + (C + 6aaA)xdx^2 + Ddx^2 = 0$. Fac $p = Bx^2 + q$, unde erit $ddp = 2Bdx^2 + ddq$, & æquatio abibit in $aaddq = qdx^2 + (C + 6aaA)xdx^2 + (D + 2aaB)dx^2 = 0$, quæ, posito $q = (C + 6aaA)x + r$, ac $ddq = ddr$, abit in hanc $aaddr = rdx^2 + (D + 2aaB)dx^2 = 0$, vel faciendo $(D + 2aaB) = E$, in $aaddr = rdx^2 + Edx^2 = 0$, quæ jam resolvenda venit. Manifestum autem est poni posse $ddr = 0$, atque erit constans $r = E = D + 2aaB$. Igitur æquatio $y = Ax^3 + Bx^2 + (C + 6aaA)x$

$+ (D + 2aaB)$, satisfacit. Sed ponatur r variabilis, & multiplicando per $2dr$ singulos terminos æq. $aaddr = rdx^2 + Edx^2 = 0$, ea fiet integrabilis, $2aaddrdr = 2rdr dx^2 + 2Edr dx^2 = 0$. Ejus enim integralis [addita constante $ccdx^2$] est $aadr^2 = rrdx^2 + 2Er dx^2 + cc dx^2 = 0$, quæ dividendo ac radicem extrahendo induit hanc formam $dx = aadr : \sqrt{(rr - 2Er + cc)} =$, quæ rursus integrata, erit [addita constante e] $x + e = aa$. Log. $(r - E + \sqrt{(rr - 2Er + cc)})$, unde, scribendo Nx pro numero cujus Logarithmus est $x + f$, habetur $r = E + \frac{1}{2}Nx + (EE - cc) : 2Nx$. Est itaque $y = Ax^3 + Bx^2 + (C + 6aaA)x + E + \frac{1}{2}Nx + (EE - cc) : 2Nx$, quæ non differt ab æquatione algebraica, nisi in duobus terminis ultimis.

ta curva ED; quæ propterea priori casu transcendens fiet, posteriori algebraica, & ejusdem generis cum data AC vel IC. Num.
LXXVII.

Ex quibus omnibus, nescio an observatis hætenus, præclare confirmatur ejus veritas, quod ad Problemata Groningani Programmatis nuperrime * notavi, fieri scilicet posse, ut una eademque æquatio differentialis differentes numero graduque curvas designet. Hic enim exempla produxi infinitarum talium, quæ curvis etiam toto genere diversis quadrant.

* N°. LXXV, pag. 777.



N°. LXXVIII.

JACOBI BERNOULLI DEMONSTRATIO SYNTHETICA PROBLEMATIS

*De infinitis Cycloidibus,
absque adminiculo infinite parvorum;*

*Item Constructio aliorum huic affinium
a se propositorum mense Maio Anni 1697. **

CUm sub finem Anni 1696 solutione mea Problematis de curva celerrimi descensus, quam omnibus nunc constat esse Cycloidem, *Lipsiam* paranda occuparer; animum subiit aliud, huic quidem quoad materiam affine, sed quoad applica-

*Act. Evud.
Lipf. 1698.
Mai. p. 223.*

* N°. LXXV. p. 774.

Num.
LXXVIII

plicationem methodi *de Maximis & Minimis* plane diversum; quo videlicet porro quæritur, quænam ex infinitis Cycloidibus illa fit, per quam descendens grave ad datam quandam positione lineam citissime pertingat. Et quoniam ex consideratione similitudinis Cycloidum solutioni viam patere illico videbam, indeque animadvertēbam modum operandi in omnibus aliis curvis similibus eundem existere, imo non ad descensum tantum celerrimum, sed ad plurimas alias curvarum functiones applicari posse; quemadmodum si quæretur ex infinitis curvis similibus illa, cujus inter commune principium & datam positione lineam interceptus vel arcus, vel area, vel nata conversione arcus superficies, aut spatii conversione solidum sit minimum &c constitui Problema, non minus utile quam elegans, publice proponere, ut & alii ejus contemplationi vacare, mecumque in partem solutionis venire possent.

Ad imitationem itaque *Fratriis*, qui in Programmate suo Problemati de curva celerrimi descensus, alia minus principaliora adjunxerat, primario meo de Figuris Isoperimetris Problemati ipsi vicissim proponendo alterum hoc secundarium subjeci, sed duobus tantum verbis, & in casu duntaxat simplicissimo lineæ rectæ verticalis, nec nisi Cycloidis, Circuli, Parabolæque facta mentione, studioque etiam suppressa voce curvarum *similium*, tum quod persuasum haberem, qui in una quæsitum præstiterit, in omnibus pariter illud præstiturum esse, tum quoque ne fundamentum solutionis nimis aperte darem. Factum autem est, hoc non obstante, ut, præter *Fratrem*, Vir Illustrissimus Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS adyta Problematidis optime penetraret, solutionemque non tantum hujus, sed & aliorum hujus occasione a *Fratre* Mensē Augusto 1697, *Diarii Gallici* * propositorum, nupero *Actorum* Januario exhiberet. Ego itaque, ne actum agam, nec tamen etiam nihil inventi mihi asseram, cum totum jure potuissem, illa tantum, quæ ab Illustrissimo Viro *Fratre*que meo intacta relicta sunt, delibare breviter; ac primo quidem Proble-

* Vide Num. sequentem.

Problematis a me in Cycloide propositi demonstrationem syntheticam citra adjumentum infinite parvorum, in gratiam eorum qui horum calculum vel ignorant vel improbant, exhibere animus est; quod faciam suppositis tantum vulgo notis *Lemmatibus*, Num. LXXVIII.

1°. Quod arcus circuli major ad sinum suum majorem habeat rationem, quam minor ad suum.

2°. Quod Tangens major sit arcu suo.

P R O P O S I T I O.

Si super eadem basi horizontaliter constituta AR dua consistant Cycloides AFC, ABP, [Fig. 1] quarum altera AFC, datum perpendicularum ZB ad angulos rectos secat in C, ac dimittantur super illis due gravia ex communi principio A, illud quod per AFC descendit breviori tempore ad perpendicularum appellet.

D E M O N S T R A T I O.

Sunto axes Cycloidum ZC, RP; semicirculi genitores ZLC; RTP, quorum ille radio GL in duos quadrantes sit divisus. Fiant AR, AZ, AH proportionales, ducanturque rectæ HF, FDS, CI, BE, illa perpendicularis, hæ parallelæ basi, nec non ZDI & huic parallela FM, ut ex figura liquet: erunt AR & AZ, AZ & AH, RP & ZC, RTE & ZLD partes Cycloidum similes, adeoque proportionales. Quare

1°. *Hypothesis.* Si $AR > AZ$. $LD : GS < LZ : GZ$ [*Lem. 1*], & permutando $LD : LZ < GS : GZ$, componendoque $DLZ : LZ < SZ : GZ$; sumptis consequentium duplis $DLZ : CLZ < SZ : CZ = SD : CI < SD : CD$ [*Lem. 2*]; inverse & permutatim $CLZ : CD > DLZ : SD$, & tandem per conversionem $CLZ : DLZ > DLZ : DLZ - SD$, hoc est, ex natura Cycloidum AZ ; $AM < AM : AH$; unde $\sqrt{AZ} : \sqrt{AH} [= \sqrt{RP} : \sqrt{CZ}] < AM [DLZ] : AH = ETR : AZ =$
Jac. Bernoulli Opera. H h h h h ETR:

Num.
LXXVIII.

ETR : CLZ. Ergo $ETR : \sqrt{RP} > CLZ : \sqrt{CZ}$. Sunt autem hæc quantitates, ut tempora descensuum per AB & per AC, demonstrante HUGENIO in Tractatu de *Pendulis*, & nuper id quoque assumente Illustrissimo HOSPITALIO. Tempus igitur per AB majus est tempore per AC. *Q. e. d.*

2°. *Hypothesis.* Si $AR < AZ$. $ZM = FD = CD > DS = HM$; cum igitur hoc casu fiat $AH > AZ$, erit AM major media arithmetica, eoque fortius media geometrica inter AZ & AH; unde statim in ipsis terminis habetur $AZ : AM < AM : AH$, e quo cætera deducuntur ut prius.

Cæterum generaliter observabam, in omnibus ejusmodi quæstionibus, ubi ex infinitis curvis similibus aliqua invenienda est, quæ functionem quampiam optime præstet, quod duarum curvarum quarum intersectione quæsitum determinatur, altera semper possit esse *Linea*, quam voco, *Functionis*, adeoque nunc mechanica, nunc algebraica, dum altera perpetuo est algebraica: quod hujus vices ipsa semper recta præstare possit; quo casu altera, utut plerunque a *linea functionis* diversa, ab ejus tamen descriptione dependet: quod ambæ denique datæ cuidam e curvis similibus sic adaptari queant, ut earum ordinatæ vel inter se sint parallelæ, vel hujus fiant tangentés, aut perpendiculares, aut alio aliquo modo illi applicentur. (*) Exempla sunt:

I. *Ex*

(*) Longe alia est harumce quæstionum solvendarum ratio, quando propositæ curvæ, inter quas illa quæritur cujus functio quæpiam maxima vel minima est, sunt inter se similes; alia, quando dissimiles. Ratio discriminis patebit, si fingamus rectam positione *FB*, [Fig. A] ad quam terminari ponuntur curvæ propositæ *KδA*, *KδD*, *KB*, &c. motu parallelo ferri ab *FB* in *ED*, *ed*. Facile enim concipiemus aliam esse curvam *KB* cujus functio maxima est

vel minima, quando hæc recta in *FB* existit, aliam curvam *KD* vel *Kδ*, quando ista situm obtinet *ED*, vel *ed*. Simul, intelligitur lineam *AδDB*, quæ per omnia puncta maximæ minimæve functionis transit, rectam esse, quando curvæ *Kδ*, *KD*, *KB* similes sunt; curvam ubi dissimiles. In eo igitur casu unum id requiritur, ut inveniatur positio rectæ *ADB*, vel angulus *FAR*; in isto, curva *ADB* describenda est.

Primum casum unice attigit Noster,

I. Ex infinitis Circulis per A tranſſentibus & centra habentibus in horizontali AB, illum invenire, per quem deſcenſus fit celerrimus ex puncto A ad datum perpendicularum. [Fig. 2.]

Num. LXXVIII.

Hhhhh 2.

COR-

ſter, ſi forte excipias ſpecimen aliquod poſterioris, quod N^o. CIII, Art. 4 videatur. Generaliorem tentabimus ſolutionem, poſt breve aliquod in Auctoris inventa commentarium.

Sint itaque primum curvæ *KD*, *KB* [Fig. B] ſimiles & circa datum punctum *A* ſimiliter poſitæ, atque ad datam poſitione rectam *ED* terminatæ, inter quas illa ſeligenda ſit *KD*, cujus functio quæpiam propoſita ſit *maximum minimumve*. Ex iis quælibet *KB* ad arbitrium ſumatur, quæ principalis dicetur; & ducta intelligatur recta *ADB*, quæ per omnia puncta *δ*, *D*, *B*, maximæ vel minimæ functionis tranſit. Nunc, cum ſimiles ponantur curvæ *KD*, *KB*, ſimiles erunt functiones illarum, & erunt inter ſe functiones iſtæ *fKD*, *fKB*, ut poteſtates ejuſdem dimensionis rectarum *AD*, *AB*: hoc eſt, ſi functio propoſita ſit linearis, ſeu primi gradus, erit $fKD : fKB = AD : AB$; ſi functio ſit ſuperficialis aut ſecundi gradus, erit $fKD : fKB = AD^2 : AB^2$; ſi ſolida vel gradus tertii, erit $fKD : fKB = AD^3 : AB^3$; ſi ſit gradus *n*, erit $fKD : fKB = AD^n : AB^n$. Sumantur curvæ *KB* abſciſſæ *AF* [*x*] ab origine *A* in recta *AEF*, applicatæ *FB* [*y*] ſint parallelæ rectæ poſitione datæ *ED*; dicaturque *AE*, *a*; & functio ipſius *KB*, ſeu *fKB*, *f*. Et ſi ea ſit gradus *n*, erit $fKD : fKB [f] = AD^n :$

$AB^n = AE^n [a^n] : AF^n [x^n]$. Igitur $fKD = a^n f : x^n$. Hæc autem maxima minimave ponitur. Hujus itaque differentiale $a^n (x^n df - n x^{n-1} f dx) : x^{2n}$ æquandum nihilo, unde eſt $x^n df = n x^{n-1} f dx$, vel, dividendo per x^{n-1} , $x df = n f dx$, aut $f = x df : n dx$. Invenietur itaque ſitus rectæ *AB*, quæ omnia puncta *δ*, *D*, *B* maximi minimive determinat, quærendo ubinam, in curva principali, functio propoſita *f* ſit $= x df : n dx$. Id vero poſſumus aſſequi mediantibus duabus curvis, altera *CHb*, quæ *linea functionis* dicitur, cujus ordinatæ *FH*, *fb* proportionales ſint functionibus pertinentibus ad curvas *KB*, *KBb*; altera *LHl*, cujus ordinatæ *FH*, *fl* ſint æquales fractionibus $x df : n dx$. Hæc igitur algebraica eſt; ponitur enim $df : dx$ quantitas algebraica. Sed poteſt etiam æquatio $x df = n f dx$, converti in hanc $\frac{1}{n} x = f dx : df$, ex qua patet, ſubtangente *FT* [$f dx : df$] lineæ functionis, eſſe ad abſciſſam ejus *AF* [*x*] in puncto maximi, ut 1 ad *n*. Quæ proprietas maxime univerſalem ſuppeditat conſtructionem. Deſcripta nimirum curva *MN*, cujus ordinatæ *FN* ſint æquales ſubtangente *FT* lineæ functionis *CH*, [a qua proinde curvæ *MN* deſcri-

Num.
LXXVIII.

CONSTRUCTIO. Datus sit semicirculus AQB divisus in duos quadrantes ANC , BNC , in cujus circumferentia sumpto indefinite puncto Q agantur rectæ QP , QB , quarum illa parallela est radio NC , hæc ipsum secant in T : & fiat Linea Functionis ASX , nempe talis, ut ejus ordinata PS tempus descensus per AQ representet, hoc modo: Super diametro circuli AB erigatur quadrans curvæ Lemniscatæ ARB [vide *Acta Lips.* 1694, pag. 337, + & 1695, pag. 543. *] cujus nodus A , e quo subtendatur curvæ recta AR media proportionalis inter AB & $2PQ$, ac sumatur $PS =$ arcui AR pro sinistro, aut $ARB + BR$ pro dextro circuli quadrante. Quo facto, fiat curva algeb. aica AVX , cujus applicata PV quarta sit proportionalis ad rectas AR , AB & $2NT$; hæc priorem interfecabit in puncto aliquo X ; unde demissa in AB perpendiculari XM erit, ut AM ad AB , sic distantia perpendiculari a puncto unde grave dimittitur, ad diametrum circuli quæsit. (b)

II. Positis

descriptio pendet], ducta insuper recta AN quæ cum AF angulum comprehendat FAN talem ut sit AF ad FN , ut π ad 1, ea occurret curvæ MN in puncto N , per quod acta NFB positione datæ DE parallela, determinabit punctum B , rectamque AB . Id quod synthetice demonstrare facillimum esset.

Sed elegantior plerumque nascitur Problematis constructio, si functiones curvæ principalis, non ipsius applicatis, sed ipsius tangentibus applicentur; quemadmodum ostendimus infra [Not. d]. Ordo enim postulat, ut solutionem jam expositam binis exemplis, quæ Noster adducit, illustremus.

* N°. LX. pag. 609, 610; & N°. LXVI. pag. 649, 650.

(b) In isto exemplo, curvæ sunt circuli, quorum principalis AQB , qui, posito $AN = 1$, definitur æquatione $yy = 2x - xx$. Functiones sunt tempora descensus per arcus AQ , quæ tempora analytice exprimuntur per $f(ds : \sqrt{y})$. Hujus functionis gradus n est $\frac{1}{2}$. Nam ipsius ds dimensio est 1, ipsius \sqrt{y} dimensio $\frac{1}{2}$. Ergo ipsius $ds : \sqrt{y}$ dimensio $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Igitur, in hoc casu speciali, æquatio generalis $f = xdf : ndx$ reducitur ad $f(ds : \sqrt{y}) = 2xds : dx\sqrt{y}$; cujus utrumque membrum sic construit Noster. Quia $yy = 2x - xx$, erit $ds = dy : \sqrt{(1 - yy)}$ & $PS = f(ds : \sqrt{y}) = f(dy : \sqrt{(y - y^3)})$. Sed [N°. LXIV. Nota f. pag. 649] $\frac{1}{2}af(adx : \sqrt{(axx - x^3)})$ exprimit arcum Lem-

II. *Positis, qua prius, invenire Circulum, cujus inter punctum A & datum perpendicularum interceptus arcus sit minimus.* [Fig. 2].

CONSTRUCTIO. Fiat linea functionis, nempe Linea Sinuum ASX, sumpta ubique PS = arcui AQ: tum describatur curva algebraica AVX, facta PV = NT, & ex puncto intersectionis X demittatur perpendicularis XM, eritque ut supra, AM ad AB, sicut distantia perpendiculari a puncto A ad diametrum circuli quaesiti. (*).

Nota tamen, Problema simplicius quodammodo construi intersectione solius lineae rectae, & lineae functionis, si hujus ordinatae in tangentes datae curvae projiciantur. (d) Vide generalem

H h h h h 3 con-

Lemniscatae, cujus semiaxis = a , & cui subtenditur ex nodo recta = \sqrt{az} . Pone $a = 2 = AB$ & $z = 2y = 2PQ$, eritque arcus lemniscatae, cujus semiaxis AB, & cui ex nodo subtenditur AR = $\sqrt{4y}$, media proport. inter 2, & 2y, arcus, inquam, erit $\frac{1}{2} \sqrt{2} f(4dy : \sqrt{(8y - 8y^3)}) = f(dy : \sqrt{(y - y^3)}) = PS$, plane ut vult Neſter. Nec minus liquet esse PV = $2xds : dx \sqrt{y} = 2x : y\sqrt{y}$. [cum sit $ds : dx = 1 : y$]. Nam NT : BN [1] = PQ : BP = AP [x] : PQ [y], ob sim. Tr. BPQ, QPA. Ergo NT = $x : y$, & cum sit AR [$\sqrt{4y}$] : AB [2] = NT [2x : y] : PV, erit PV = $4x : y\sqrt{4y} = 2x : y\sqrt{y}$. In curvarum ASX, AVX concursu X est igitur $f(ds : \sqrt{y}) = 2x : y\sqrt{y} = 2xds : dx \sqrt{y}$. Ergo XM determinat abscissam AM curvae principalis, cui respondet arcus per quem celerimus sit descensus.

(*) Hic curvae propositae sunt rursus circuli, sed functiones sunt ip-

si arcus s , atque ideo sunt lineares & est $n = 1$. Aequatio igitur fundamentalis $f = xdf : ndx$, abit in $s = xds : dx$. Itaque linea functionis habet ordinatas PS aequales arcubus AQ. Altera AVX, ordinatas PV habere debet = $xds : dx = x : y = NT$ [Vide Not. praeced.]

(d) Ratio projiciendi functionem in tangentes curvae principalis haec est. Sit BG [Fig. B] tangens, terminata in G ad rectam AG ipsi ED positione datae parallelam, eritque BG = $xds : dx$. Nam sim. Tr. BGg, Bb^o , dant LG vel Ff [dx] : Bb [ds] = Bg vel AF [x] : BG. Ergo cum sit $f = xdf : ndx = \frac{df}{nds} \times \frac{xds}{dx} = \frac{df}{nds} \times BG$, erit BG = $nfds : df$. Abſcindantur itaque ex singulis tangentibus BG curvae principalis KB partes BG = $nfds : df$, & curva KOG quae per omnia puncta G transit, ejus erit naturae, ut rectam AG ipsi ED positione datae parallelam secet in quodam puncto G,

Num. LXXVIII. constructionem infra in solutione sex Problematum Fraternalium. N°. LXXX.

III. *Ex infinitis Curvis similibus, & circa punctum A axemque communem AC similiter constitutis, quarum una data sit AB, invenire aliam AD occurrentem recta positione data DE in D, e quo demissa in axem perpendiculari DM, vel comprehensum spatium ADM, vel nata conversione curva circa axem superficies, vel natam conversione spatii solidum, sit maximum minimumve* (°). [Fig. 3].

CONSTRUCTIO. Sumto indefinite in curva data AB puncto B, ducatur tangens BG, axi perpendicularis BC, & hinc tangenti perpendicularis CL; quo facto functio primæ quæstionis, hoc est, spatium ABC dividatur per $\frac{1}{2}$ CL; functio secundæ sive superficies sphaeroidis geniti conversione curvæ AB, per semicircumferentiam radii BC; functio tertiæ seu solidum spatii ABC rotatione effectum, per rectangulum sub dicta semicircumferentia & triente CL: quotienti semper abscindatur ex tangente æqualis BG, erit G ad curvam quandam AGH, quam secet recta AG datæ rectæ DE parallela in G. Ex G ducatur GB, tangens datam curvam, sit punctum contactus B; tum juncta AB, quæ datam DE secet in D, fiat curva AD similis ipsi AB. Hæc crit optata. (f).

G, unde ducta GB tangens curvam KB determinabit punctum B, rectamque desideratam AB. Sit ex. gr. fKB ipse arcus $KB = s$, unde fit $n = 1$ & $df = ds$, capienda est $BG [nfs : df] = 1sds : ds = s$. Igitur KOG est curva quæ ipsius KB evolutione describitur. Vide Num. LXXX. Probl. 6.

(°) Facile constat esse $CL = ydx : ds$, & cum notum sit esse spatium $ADM = f y dx$, superficiem vero natam conversione curvæ circa axem, posita cy circumferentia ra-

dii $y [BC]$, esse $fcyds$, quæ duæ functiones sunt secundi gradus; denique solidum rotatione spatii ADM genitum esse $f \frac{1}{2} cyydx$, quæ functio est tertii gradus: sequitur BG

$[nfs : df = f : \frac{1}{n}(df : ds)]$, capiendam esse in primo casu $= f : \frac{1}{2}(ydx : ds) = f : \frac{1}{2}CL$, in secundo $f : (\frac{1}{2}cyds : ds) = f : \frac{1}{2}cy$; in tertio $f : (\frac{1}{2}cyydx : dx) = f : \frac{1}{2}cy \times \frac{1}{2}CL$, ut habet Auctor noster.

(f) Sint curvæ KD, KB [Fig. A] dissimiles, adeoque ADB non jam

jam amplius recta, sed curva. Hæc vero describenda est.

1. Detur primum natura Curvarum KD , KB , & functio fKD [f], utraque algebraice expressa per constantes quascunque, & variables x , y , a , quæ ultima parametrum designet in unaquaque curva KD constantem, sed de curva in curvam variabilem, adeout hæc pro curva $K\Delta$ sit a , pro KD , $a + da$. Differentientur tam f quam æquatio curvæ, sintque hæc $A dx + B dy + C da = 0$, illa $df = D dx + E dy + F da$. Quod si x constans ponatur, habebimus $B dy + C da = 0$, vel dy , quæ hic representat $\Delta D = -C da : B$; nec non $df [fKD - fK\Delta] = E dy + F da = F da - CE da : B$, quod cum sit $= 0$ in casu maximi, erit, dividendo per da , $F = CE : B$, vel $BF = CE$, unde, eliminando a , ope æquationis ad curvas KD , habebitur æquatio ad curvam ADB ; in qua si fiat insuper $x = AF [c]$, invenietur $y = FB$, unde dabitur punctum quæsitum B .

2°. At si f detur transcender, per constantes & per variables x , a ; si sit v. g. $f = fAdx$, ubi A componitur ex a , x , & constantibus, tunc functio maxima vel minima est, cujus differentia [$fKD - fK\Delta$], posita x constante, æqualis est nihilo. Sed ille tota erraret via, qui putaret differentiam hanc sumi posse, faciendo $df = Adx$, & inde concludent $A = 0$. Etenim Adx non est $fKD - fK\Delta$, sed $fKD - fKd$. Hic igitur adhibenda methodus differentiandi de curva in curvam ma-

gnis viris G. G. LEIBNITIO & Job. BERNOULLIO usitatam, nec Num. LXXVIII. Nostro prorsus incognitam, ut ex N^o. CIII Art. V, constare potest. Hujus fundamentum est, quod differentia duarum quantitatum æqualis sit summæ differentiarum partium. Sic $fKD - fK\Delta$ composita intelligitur ex omnibus differentiis partium, qualis est $fDd - f\Delta\delta$. Habetur autem $fDd - f\Delta\delta$, si elementum functionis, quod est Adx , differentietur, manentibus x , & dx , sed fluente a . Sit differentiale hoc $Bdadx$. Illud nunc integrandum est, manente a & da , sed fluente x , ut habeatur differentiarum illarum summa a K ad D . Erit igitur $f(fDd - f\Delta\delta) = dafBdx$, quæ debet esse $= 0$. Igitur $fBdx = 0$. Ergo, pro qualibet curva KD , fiat alia AIE talis ut ordinata ejus sit semper $= fBdx$, & ubi hæc curva attingit rectam AF , velut in E , agatur ED applicatis parallela, quæ curvam KD secabit in puncto D pertinente ad curvam quæsitam ADB .

3°. Detur f per constantes, & per variables a , x , & y , differentieturque f , posita x manente & fiat $df = 0$. Si sit f quantitas algebraica, hujus differentiale habebit hanc formam $Bda + C\delta y$ [δy designat differentiale ΔD ipsius y , transeundo de curva in curvam]. Si sit $f = fAdx$ transcendens, differentietur de curva in curvam, & erit $df = f(Bdadx + C\delta ydx)$. Est igitur vel $Bda + C\delta y$, vel $f(Bdadx + C\delta ydx) = 0$. Inde vero nihil lucratur, nisi sciamus quid sit δy . Id vero innotescit æquationem cur-

Num.
LXXVIII.

væ KD differentiando de curva in curvam. Sit illa transcendens $dy = p dx$ [nam si algebraica poneretur, ope illius eliminando y , $A dx$ componeretur ex meris a, x , & constantibus, resque reduceretur saltem ad casum præced.], & ponamus primum p componi ex a, x , & constantibus. Differentietur $p dx$, x manente; sitque diff. $q dx$, quæ integretur, manente a , fluente x , habebiturque $\Delta D [\delta y] = da f q dx$. Supra autem habebamus vel $B da + C \delta y = 0$, vel $f(B da dx + C \delta y dx) = 0$. Erit itaque vel $B da + C da f q dx = 0$, vel $f(B da dx + C da f q dx) = 0$, aut dividendo per da , $B + C f q dx = 0$, vel $f B dx + f(C dx f q dx) = 0$. Fiat itaque pro qualibet curva KD alia AIE cujus ordinata sit vel $B + C f q dx$, vel $f B dx + f(C dx f q dx)$, & ubi hæc rectam AF secat in E , agatur ED , quæ in curva KD designabit punctum D pertinet ad curvam quæsitam ADB . Denique, ponamus in æquatione $dy = p dx$, p dari per constantes & per variables a, x, y . Differentietur $p dx$, x manente, sitque differ. $q da dx + r \delta y dx$. Igitur $\delta \delta y = q da dx + r \delta y dx$; quæ æquatio integranda est, manentibus a & da , fluentibus vero x, dx & y, dy . Id

fieri potest, ponendo $\delta y = m dx$, atque $\delta \delta y = [m d d n + d m d n] = q da dx + r \delta y dx = [q da dx + r m dx]$. Pone $m dx = q da dx$; atque $d m dx = r m dx$, vel $dm : m = r dx$ & erit Log. $m = f r dx$, vel m numerus cujus logarithmus est $f r dx$. quæ quantitas datis a, x , & y , data est. Igitur ob $da dx = q da dx : m$, erit $dn = da f(q dx : m)$. Est igitur $\delta y = m dx = m da f(q dx : m)$ data per a, x, y & da . Supra autem invenimus vel $B da + C \delta y = 0$, vel $f(B da dx + C \delta y dx) = 0$. Erit itaque vel $B da + C m da f(q dx : m) = 0$ vel $f(B da dx + C m dx da f(q dx : m)) = 0$, aut dividendo per da , vel $B + C m f(q dx : m) = 0$, vel $f(B dx + C m dx f(q dx : m)) = 0$. Fiat ergo pro qualibet curva KD alia AIE , cujus applicata sit vel $B + C m f(q dx : m)$ vel $f(B dx + C m dx f(q dx : m)) = 0$, prout f datur vel algebraice, vel transcendenter, & ex E puncto in quo illa secat rectam AF , agatur ED applicatis parallela, ea curvam KD attinget in puncto D , quod est ad curvam desideratam ADB .

Et ista quidem, paulo forsan abstractiora mererentur quæ exemplis illustrarentur. Sed deterrent tædia calculi & istius notæ nimia longitudo.

N^o. LXXIX.

P R O B L E M E S

A R E S O U D R E.

VOICI quelques Problèmes *De Maximis & Minimis*, que Monsieur *Journal des Savans* BERNOLLI, Professeur à Groningue, propose aux Géomètres, qui croient avoir des méthodes pour toutes les questions de cette nature. 1697. 33^e. Journal du 16 Aoust. p. 194, Ed. de Paris, p. 636, Ed. de Holl.

I. Deux points étant donnés sur une superficie convexe, on demande une manière d'y décrire géométriquement, d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte; supposé que cette surface soit géométrique, telles que celles de la Sphère, du Cone, du Cylindre, dans lesquelles le Problème est fort facile, de quelque manière que les points soient situés; mais dans les Conoïdes, & dans les Sphéroïdes, il devient très difficile. C'est pourquoi l'on propose, pour exemple, la superficie du Conoïde parabolique, dans laquelle il faille tirer la ligne la plus courte, qui joint deux points situés, non pas dans le même Méridien, [ce qui seroit encore facile, puisque la ligne recherchée seroit la portion du même Méridien comprise entre ces deux points;] mais situés dans des Méridiens différens. J'appelle ici *Méridien* toute parabole tirée du sommet du Conoïde jusqu'à sa base.

II. Toutes les ellipses possibles, ACB, ACB, ACB, &c. [*Fig. 1*] étant décrites sur l'axe AB donné de grandeur, & en ayant retranché des segmens égaux CDB, CDB, CDB, &c. on demande lequel de ces segmens a le point C le plus proche du point B; c'est-à-dire, qu'il faut déterminer l'ellipse ACB, dans laquelle la droite CB soit la plus courte.

III. Les mêmes choses supposées, on demande la nature & les touchantes de la courbe CCC.

IV. Sur l'axe BA [*Fig. 2*] donné de position étant décrites toutes les courbes d'une même espèce, par exemple, toutes les paraboles BC, BC, BC, &c. Et en ayant coupé des arcs égaux BC, BC, BC, &c. on

Num. on demande le point C le plus proche du point B; c'est-à-dire, qu'il
LXXIX. faut déterminer lequel de ces arcs a la plus courte soutendante BC.

V. Les mêmes choses supposées, on demande la nature & les touchantes de la courbe CCC.

VI. Une ligne droite DD étant donnée de position, laquelle rencontre les courbes BC aux points D; on demande le plus petit de tous les arcs BD.



N°. LXXX.

JACOBI BERNOULLI
S O L U T I O

SEX PROBLEMATUM
FRATERNORUM,

In Ephem. Gallic. 26 Aug. 1697,
propositorum.

PROBLEMA I.

Acta Erud. Lips. 1698. Mai. p. 227. **I**N superficie dati Conoidis, vel Spharoidis, exempli gratia Parabolici, inter duo data puncta geometricè describere lineam omnium in illa superficie sic ductarum brevissimam [Fig. 1].

SOLUTIO. Notanda primum ambiguitas in voce *geometricè*, quæ procul dubio in causâ fuit, cur Illustrissimus Dnus Marchio HOSPITALIUS in solutionibus suis mense Januar. *Actorum* exhibi

hibitis hoc Problema prorsus neglexerit. Si hac voce talis constructio poscatur, qua indefinite omnia puncta curvæ inveniantur per meras quantitates ordinarias, vel algebraicas; Dico, Problema in ipso Cono Cylindroque non minus difficile, imo impossibile, atque in cæteris Conoidibus Sphæroidibusque. Sin vero & illa constructio *geometrica* esse concedatur, in qua quantitates quoque transcendentales seu quadraturæ, quæ, ipso Celeberrimo Dno. LEIBNITIO adstipulante, non minori jure *geometricarum* quantitatum nomine veniunt, adhibentur; Problema in omnibus pariter Conoidibus ac Sphæroidibus æque ac in Cono Cylindrove, est facillimum.

Esto enim curva quæcunque ABC, cujus tantum tangens dari concedatur, sitque basis ejus $CD = a$, applicata quædam arbitraria basi parallela $BG = c$, alia indeterminata $MN = x$, tangens per x data $= t$; rotetur autem curva ABC circa axem AD, & gignat Conoides ABCFDA, cujus polus A, meridianus ABC, æquator CF, eique parallelus per M transiens MH. Tum sumpto æquatoris arcu $CF = \int (act dx : xx \sqrt{(xx - cc)})$, transeat per F meridianus AHF, secabit hic parallelum MH in puncto aliquo H curvæ cujusdam BH, quæ talis, ut quælibet ejus portio omnium aliarum in eadem superficie ductarum & iisdem punctis interceptarum curvarum sit brevissima (*). Ipsa autem longitudo curvæ $BH = \int (t dx : \sqrt{(xx - cc)})$.

Iiiii 2

Applica-

(*) Auctoris analysin vide N^o. CIII, Art. 6. Notemus tamen, per transfennam, solutionem Problematis generaliore, pro qualibet data superficie curva, deduci posse ex methodo generali investigandi curvas, quæ maximum minimumve constituunt, proposita N^o. LXXVI, Nota a, pag. 780. Sed prius dicendum est superficierum curvarum naturam exprimi posse æquationibus tres indeterminatas involventibus,

quemadmodum lineæ curvæ per æquationes quas ingrediuntur duæ indeterminatæ repræsentari solent. Nam si ad tria plana A, B, C sese mutuo ad datos angulos v. gr. rectos interfecantia [qualis est situs trium hedrarum angulum cubi solidum capientium] ex singulis superficiei propositæ punctis agantur rectæ duobus planis parallelæ, sic ut illæ quæ ad planum A ducuntur, quasque dicemus x , sint planis B
&

Num.
LXXX. *Applicatio constructionis ad Comm. [Fig. 2 & 3.]*

Sit Conus ACFD facta conversione Trianguli rectanguli ACD circa cathetum AD ; ponatur hoc Triangulum seorsim super recta

& C parallelæ , & illæ [y] quæ ad planum B , sint planis A & C parallelæ ; illæ verò [z] quæ ad planum C , sint parallelæ planis A & B , patet omnino determinari punctum quodcunque superficiei propositæ , determinatis tribus rectis x, y, z , ad illud pertinentibus : exprimi , igitur , superficiei naturam per æquationem tres indeterminatas x, y, z involventem . Et , si descripta intelligatur in ea superficiei linea quæpiam , rectæ z ex singulis ejus punctum in planum C demissæ , ibi delineabunt lineam , quam *projectionis* vocant , cujusque natura , per æquationem ex x, y , & constantibus compositam exprimitur . Ibi enim omnes z evanescent . De hujusmodi lineis in superficiei curva depictis eximium scripsit Tractatum Vir Cl. *Alexis CLAIRAUT*. Paris. 1731. *Recherche sur les Courbes à doubles courbures*.

Itaque ubi proponitur ducenda linea brevissima quæ in data superficiei curva describi possit , proprie quæritur qualem illa efficiat projectionis lineam . Facile autem intelligitur , hujus lineæ in superficiei curva descriptæ elementum esse $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, positis scilicet angulis planorum A , B , C , rectis . Est enim elementum illud hypothenusa trianguli rectanguli , cujus latus unum dz , aliud elementum lineæ

projectionis , quod est $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Igitur A , seu functio quæ minima esse debet , est $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, & differentiando , ratione in N^o. LXXV indicata , hoc est , manentibus x, y , & dx , sed fluentibus dy & dz , erit $dA = (dyddy + dzddz) : \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = (dyddy + dzddz) : A$. Quid vero sit ddz sic investigo . Differentietur æquatio ad superficiei , manente x , & fiat $dz = pdy$, ubi p datur per x, y , & constantes , ac rursus differentiando , manentibus x & y fiet $ddz = pddy$: quo substituto fit $dA = (dyddy + pdzddy) : A = (dy + pdz) ddy : A$. Differentietur nunc $a = \sqrt{(d\xi^2 + dv^2 + d\zeta^2)}$ manente $d\xi$, sed crescente dv per augmentum $ddv = ddy$, & $d\zeta$ per incrementum $dd\zeta = ddz = pddy$, eritque $da = (dvddv + d\zeta dd\zeta) : \sqrt{(d\xi^2 + dv^2 + d\zeta^2)} = (dvddy + pd\zeta ddy) : a = (dv + pd\zeta) ddy : a$. Igitur cum sit , ex natura minimi , $dA = da$, erit dividendo per ddy , $(dy + pdz) : A = (dv + pd\zeta) : a$ vel $dy : A - dv : a + p(dz : A - d\zeta : a) = 0$, hoc est $d\left(\frac{dy}{A}\right) + p d\left(\frac{dz}{A}\right) = 0$, vel $d\left(\frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}\right) + pd\left(\frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}\right) = 0$, quæ

Œta infinita GD ; centroque C radio CA describatur quadrans circuli KIG , & radio minori CD circulus PRQ ; tum sumto in latere conii puncto utcumque B , transferatur AB in CS , & ducatur SL parallela ipsi SK secans rectam KL ipsi CD parallelam in L , ac denique per punctum L intra asymptotos CD , CK trajiciatur Hyperbola LO : quo facto, per punctum quodvis O in Hyperbola acceptum duæ ducantur rectæ asymptotis parallelæ OI , OT , quarum illa quadrantem KIG secet in I , hæc latus conii AC in T ; arcuique quadrantis KI ex circumferentia minoris circuli PRQ , id est, basis conii CF , refecetur hinc inde æqualis arcus PR seu CF , qui nonnunquam totam circumferentiam excedit; ac tandem in latere conii per F transeunte sumatur $AH = CT$; eritque H punctum optatæ curvæ $BH = \sqrt{CT^2 - CS^2}$; adeoque nequit esse [quod quis suspicari posset] aliqua sectionum conicarum, cum harum nulla refectionem admittat: tota vero curva conum serpentis in modum ambit, duoque conii latera a supremo curvæ puncto B , utrinque æquidistantia sibi asymptota habet: subinde & unum tantum, cum curva conii superficiem aliquoties exacte circumit: circumit autem semel, ubi latus conii AC radii basis DC duplum est, bis ubi quadruplum, ter ubi sextuplum &c. Effici præterea potest facile, ut curva per duo quævis data puncta transeat, prout supremum ejus punctum B in alio aliove latere conii, propiusque vel remotius ab ejus vertice assumitur. (^b).

Num.
LXXX.

Iiii.3

SCHO-

quæ æquatio, si constans ponatur $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, reducitur ad $ddy + pddx = 0$. Vide ejusdem Celeb. CLAIRAUT Dissert. in *Actis Acad. Reg. Scient. Paris.* ad annum 1733, pag. 186, Ed. Par. p. 258, Ed. Amst. Hæc autem æquatio, licet simplicissima, cum sit differentialis secundi gradus, non poterit ad primum revocari, nisi in specialibus quibusdam casibus; de quibus vide-

fis Cel. EULERI Schediasma, in *Comm. Acad. Petrop.* Tom. III, pag. 110: præsertim vero Cel. JOH. BERNOULLI Dissertationem de eodem argumento, quæ mox, cum omnibus ejus Operibus, lucem visura est.

(^b) Videatur Num. CIII, Art. 7 & 8. Sed cum ibidem Noster hoc utatur principio, superficiem conicam posse in planum extendi, cumque

Num.
LXXX.

SCHOLION. Quia constructio hæc requirit, ut ex circulis utcunque inæqualibus KG , PQ æquales abscindantur arcus KI , PR , quod supponit anguli sectionem in data ratione; hæc vero gene-

que res sit in Cono recto facillima; miror ipsum in hujus superficie per ambages & Hyperbolam præstitisse, quod nullo negotio peragitur, posito hoc Lemmate.

In circulis inæqualibus æquales arcus assignare. Sint dati duo circuli ABD , abd [Fig. A] inæquales: & in illo datus arcus AB , cui æqualis capiendus est ad in isto. Fac angulum aCd , qui sit ad datum ACB , ut radius CA ad radium Ca . Dico factum. Nam, ob similes sectores ACB , aCb est $ab : AB :: Ca : CA :: [\text{per const.}] ACB : aCd :: [\text{VI. 33.}] ab : ad$. Quare $AB :: ad$.

Patet itaque solutionem pendere a sectione anguli in data ratione, atque ideo Problema esse transcendens, ubi radii CA , Ca sunt incommensurabiles; geometricum, ubi sunt commensurabiles; geometricum, stylo Veterum, hoc est planum, si radius CA sit vel multiplus quivis radii Ca , vel ejus submultiplus denominatus a quolibet termino hujus progressionis duplæ 2, 4, 8, 16, &c.

Quibus positis, si detur conus rectus AVL [Fig. B], cujus basis ABL , & in eo signentur duo puncta E , F , per quæ ducenda sit linea brevissima EGF in conis superficie: centro v , radio $va :: VA$ lateri conis, describatur circulus ald , in cujus peripheria sumatur arcus $alá$ æqualis pe-

ripheriæ baseos conis $ABLMA$, & erit, ut notum est, sector $abláa$ — superf. conicæ AVL , atque ipsi circumplicatus eam teget. Agantur itaque latera duo VA , VD per data puncta E , F , & capiatur arcus ad — arcui AD , nec non $ve :: VE$ & $vf :: VF$, ducaturque recta ef . Hæc, quoniam est in plano brevissima, in circumplicato sectore, hoc est, in conis superficie erit quoque curva brevissima. Id ergo unice requiritur, ut absque circumplicatione, quæ mechanica esset solutio, rectæ ef circumplicatæ puncta in conis superf. designentur. Proponatur punctum g . Age radium vgb , arcui ab cape æqualem AB , & in latere VB sume partem $VG = vg$, habebisque punctum G curvæ desideratæ EGF .

Pone punctum G esse vertici V proximum, hoc est, pone g esse centro v proximum, in quod nempe cadit perpend. vg ex centro; patet esse $ge :: \sqrt{(ve^2 - vg^2)}$, atque etiam erit $EG = \sqrt{(VE^2 - VG^2)}$.

Quod si lineam, ultra puncta E , F producere velis, prolonganda modo est ef recta in fb , & simili modo ad conis superficiem referenda in FH . Pars vero EI , ultra punctum E , respondebit rectæ $éi$, quæ determinatur, capiendo $vé :: ve$, & faciundo ang. $d éi :: v ef$. Nam circumplicatione sectoris $aláa$, cadit

generaliter non nisi per quantitates transcendentes absolvitur; constat, quod dixi, curvam *geometricæ*, id est, algebraice non esse descriptibilem. In superficie cylindrica puncta curvæ reperi-ri possunt continua arcus bisectione (^c), sed inventio omnium indefinite punctorum pariter sectionem arcus in data ratione vel ejus rectificationem supponit.

Num.
LXXX.

Atque hæc de primo Problemate dicta sufficiant: cætera supra laudatus Vir Illustrissimus D. *Marchio* HOSPITALIUS nupero Januario plene & eleganter soluta dedit. Sed quia observo, paulo generaliora a Fratre proponi potuisse (^d), ea sequentem in modum formo ac solvo.

PRO-

va super *vd*, & *e* super *é*, atque *éi* prolongatio est ipsius *fe*.

Ducti itaque radii *vl*, *vm* paralleli rectis *eb*, *éi*, respondebunt lateribus conii *VL*, *VM*, quæ sunt curvæ *IGH* asymptota. Parallelæ enim *vl*, *eb*; *vm*, *éi* non concurrunt. Ergo nec in superficie conii concurrent *VL*, *EFH*; *VM*, *EI*.

Verum, notandum est, ut omnis vitetur æquivocatio, licet curvæ *IGH* pars *EGF* inter *E*, *F* puncta sit brevissima, non tamen semper sequi ipsam *IGH* esse inter *I*, *H* puncta brevissimam. Fieri enim potest, ut ab altera parte verticis conii alia ducatur *INH* brevior, scil. si in sectore *aláva*, recta *inb* puncta *i*, *b* conjungens, brevior sit summa rectarum *id + eb*.

Quod si desideratur linea *IeγφH* quam linea *IGH* in basin projecta describit, ea facile construitur. Nam demissa *Gγ* in basi signat punctum *γ*, dividens radium *CB*, ita ut sit *CB: Cy = VB: VG = vb: vg*. Suma-

tur itaque in circulo baseos, arcus *AB = ab*, & capiatur *Cy* ad *CB*, ut *vg* ad *vb*, eritque punctum *γ* in desiderata *IeγφH*.

(^c) Et idem quoque præstare licet simplici arcus bisectione, quotiescunque latus conii radii baseos erit multiplus, aut etiam subduplus, subquadruplus, suboctuplus, &c. [Vide Not. præc.]

(^d) Generaliter Problema proponi sic potuisset; *Propositis infinitis curvis BC, BL, ordinatim positione datis, aliam reperire CL quæ a singulis auferat arcus BC, BL, quorum functiones quæpiam sint æquales*. Id vero ex principiis N^o. LXXVIII, Nota f, p. 793, 794, positus sic solvi potest. Si *BD* vocetur *x*, *DM*, *dx*, *DG*, *y*, *GK*, *dy*, *CC*, *dy*, *KC*, *dy*; & æquatio curvarum *BC, BL*, sit *dy = p dx*, ubi *p* datur per constantes & variables *x, y*, & *a* parametrum in unaquaque curva eandem, sed de curva in curvam variabilem; sitque ipsius

Num.
LXXX.

PROBL. II & III.

Axi ET insistant infinita curva BL, BF genere eadem, hoc est, quarum ordinata ML, MF constanter sint proportionales; sitque alia curva CL ex prioribus spatia auferens BLM, BCD, tum inter se, tum dato spatio aequalia. Quæritur, qua sit natura curva CL, qua ratio ducendi ejus tangentes, & quodnam in illa punctum alteri ubivis dato puncto proximum? [Fig. 4].

SOLUTIO. Esto data ex infinitis una BL, datumque in curva CL ubivis punctum C, e quo demissa in axem applicata CD, quæ secet

ipsius pdx , manente x , differentia $\equiv qdadx + rdydx$; ostensum est fore $\delta y = mda f(qdx : m)$ ubi m designat numerum cujus fdx est Logarithmus. Ponamus brevitatis causa $n = m f(qdx : m)$, aut $\delta y = n da$. Et cum sit ex hypoth. $fBC = fBL$, erit $fBL - fBG = fBC - fBG$. Sed, posita $fBL = fAdx$, erit $fBL - fBG = Adx$; & $fBC - fBG = f(Bdadx + Cdydx)$, [existente nimirum $Bda + Cdy$ differentia ipsius A , quæ prodit manente x] $\equiv da f(Bdx + Cndx)$, substituendo nimirum nda pro δy . Habemus itaque $Adx = da(fBdx + fCndx)$, vel $da = Adx : f(Bdx + Cndx)$; atque $GC = \delta y = nda = nAdx : f(Bdx + Cndx)$. Igitur $KC = dy = \delta y - dy = nAdx : f(Bdx + Cndx) - pdx$. Nec non $DT = ydx : dy = y : \left(\frac{nA}{f(Bdx + Cndx)} - p \right)$

Habemus igitur rationem ducendi tangentes curvæ CL, aut, quod

idem est, habemus curvæ æquationem differentialem $dy = nAdx : f(Bdx + Cndx) - pdx$. Ubi notare possumus in hoc Problemate illud contineri, quod propositum fuit & solutum N°. LXXVIII, Nota f. Nam ubi curva CL applicatam tangit, ibi eam secat curva BC cujus functio maxima est, vel minima. Fiat igitur dy infinita, & habebitur $f(Bdx + Cndx)$ vel $f(Bdx + Cndx) f(qdx : m) = 0$, ut ibi.

Sed hujusmodi solutiones generales fatendum est esse nimis abstractas, nec facile in usum convertendas. Quare utilius est ad speciales casus descendere, inter quos eminent casus curvarum ejusdem generis, quæ nempe habent ordinatas constanter proportionales, & casus curvarum similium. In illis, si functiones sint areæ, in his areæ vel arcus curvarum, qui sunt casus hic propositi, res tam facile succedit, ut ne calculo quidem opus sit, sed brevissima sufficiat synthetis.

secet datam curvam in G, ducatur tangens GE: super DE constituatur Rectang. EH æquale spatio dato BCD; fiatque CH: HD = DE: DT; juncta CT curvam CL tanget in C (°).

Num.
LXXX.

Nota ratione ducendi tangentes, natura curvæ latere nequit: estque semper, quod hic specialiter annoto, reducibilis ad casum Problematis *Beauniani* generalius concepti (†) mensis Decembri 1695*, adeoque construibilis per Logarithmicam, vide, Mensis Julio, 1696 †. Punctum curvæ CL proximum ipsi B quodnam sit, generaliter ostendit Vir perillustis, potestque nullo negotio ad aliud quodvis datum punctum accommodari (§).

PRO-

(°) Agatur EN ipsi CD parallela, quam secent in N & O, rectæ per L & G ductæ ipsi DE parallelæ. Et cum ponatur constans ratio ordinarum DC, DG erit spat. BCD, vel ipsi æquale BLM, ad BGD, ut DC ad DG, ac convertendo BLM: LMDG = DC: CG. Est autem, ex constr. BLM = DHIE, & LMDG, seu, quod ipsi æquale sumitur rect. MG = GKNO [I. 43]: Est igitur DHIE: GKNO = [DH: GK] = DC: CG, aut *altern.* DH: DC = GK: CG, vel *conv.* DH: CH = GK: CK = GK: LK + LK: CK = LM: EM + TM: LM = TM: ME, vel TD: DE. Ergo DH: CH = TD: DE.

(†) Sit DC = y, ED = s, functioni ipsius y datæ ex natura curvarum BC, BL: sit z abscissa curvæ quaesitæ CL; atque ideo subtangens TD = y dz: dy. Pone etiam spatium datum DHIE = cc, atque erit DH = cc: s, & CH = y - cc: s, & proportio DH: CH = TD: DE,

dabit hanc æquationem $dz = ccsdy: (syy - ccy)$, quam non opus est ad Problema *Beaunianum* reducere; nam facile construitur, cum indeterminatæ sponte sint separatæ: est enim s functio ipsius y.

* N°. LXVI. pag. 663.

† N°. LXXII. p. 731, & LXXVII. pag. 782.

(§) Illud nempe punctum curvæ CL dato puncto proximum est, in quod cadit perpendicularis ex dato puncto in curvam demissa. Ad hoc vero punctum, ut facile liquet, est dz ad dy, ut y - f ad z - g, positis f & g ordinata & abscissa puncti dati. Quamobrem, si in æquatione mox inventa $dz: dy = ccs: (syy - ccy)$, pro dz: dy substituaturs (y - f): (z - g), habebitur $z - g = (y - f)(syy - ccy): ccs$, qua determinatur relatio ipsarum z & y in puncto quaesito.

Jac. Bernoulli Opera.

K k k k k

Num.
LXXX.

P R O B L. IV. & V.

In eadem figura, sunt BC, BL infinita curva similes seu specie eadem, e quibus curva CL auferat arcus aequales BC, BL: Quæritur natura curva CL, ejus tangens in puncto C, & punctum curva dato cuipiam puncto proximum? [Fig. 4.]

Solutio. Exemplum proponit Frater in Parabolis. Huic sæpe laudatus Dnus. *Marchio* ita satisfacit, ut ducta per C Parabola BC, ejusque tangente CE, faciat $CE - BC : BC = BD : BT$. Addo, si in hac proportionem duntaxat BD vertatur in BE, constructio generaliter ad omnes curvas similes sese extendet; unde & componendo semper erit $CE : BC = ET : BT$ (b). Quemadmodum etiam si curva CL talis esse ponatur, ut ex curvis similibus areas abscindat æquales BCD, BLM, reperitur Triang. $CDE : spat. BCD = ET : BT$ (1); quæ Theoremata observari merentur. De natura curvæ CL, punctoque in illa alteri cuidam proximo eadem tenenda, quæ in Problemate præcedenti.

P R O-

(h) Si curvæ BL, BC sint similes & circa punctum B similiter positæ, sitque $BGL = BC$; erit, producta BL donec in Q occurrat curvæ BCF, $BL : BQ = BGL$, seu $BC : BCQ$, & *convert.* $BL : LQ = BC : CQ$, atque *alt.* $BL : BC = LQ : CQ = [ducta BV ipsi QCE parallela] = BL : BV$. Est igitur $BV = BC$. Ergo cum sit $EC : BV = ET : BT$, erit $EC : BC = ET : BT$.

(1) At si $BCD = BLM$; erit $BCQR : BLM$ vel $BCD = BQ^2 :$

BL^2 & *divid. invert.* $CQRD : BCD = BQ^2 - BL^2 : BL^2 = (BQ + BL)(BQ - BL) : BL^2 = [quia BQ, BL vix differunt] 2BL. LQ : BL^2 = 2LQ : BL$. Pariter $ECD : EQR = EC^2 : EQ^2$, & *div.* $ECD : CQRD = EC^2 : EQ^2 - EC^2 = EC : 2CQ$. Unde *compos. rationib.* est $ECD : BCD = 2LQ : EC : 2CQ. BL = EC : BL + LQ : CQ = EC : BL + BL : BV [ob sim. Tr. QLC, BLV] = EC : BV = ET : BT$, id est, $ECD : BCD = ET : BT$.

PROBLEMA VI.

Sint infinita curva similes BH, DL, circa idem punctum A similiter constituta, quas trajiciant dua recta positione data AH, ED, quarum altera AH transeat per A: Queritur arcuum ambabus rectis interceptorum maximus minimusve [Fig. 5].

Solutio. Data sit una curvarum similium BH secans rectam positionem datam AH in H, alterique positione datæ ED ducatur per A parallela AG. Evolvatur curva HB, principio evolutionis facta in H, & gignat curvam HG, quæ rectam AG secet in G; filum autem evolvens, dum describit G punctum, sit GB tangens curvam in B. Jungatur AB secans rectam ED in D, ac per D transeat portio curvæ DL similis portioni BH, erit arcus DL omnium rectis AH, ED interceptorum maximus minimusve (*).

COROLLARIUM. Patet hinc insignis evolutionum usus, nondum quod scio consideratus, nempe: si sit Curva quævis HB, cjus evolutione descripta HG, filum evolvens BG, atque

Kkkkk 2 ex

(*) Hæc constructio jam analytice demonstrata est N°. LXXVIII, Nota d, pag. 792. En synthefin. Arcus DL omnium similium rectis AH, ED interceptorum minimus est si vicinissimo dl sit æqualis. Agantur ADB, Adb, & BF ipsi ED parallela, eritque $\delta l : \beta b = A\delta : A\beta = \delta d : \beta b = dD : bB = AD : AB = DL : BH$. Ergo $\delta l + \delta d [ld] : \beta b + \beta b [bb] = DL : BH$.

Constabit igitur esse $dl = DL$, si probavero $bb = BH$. Id vero sic ostenditur. $BH : \beta b = AB : A\beta$. Convertendo $BH : BH - \beta b = AB : B\beta = AB : b\beta + b\beta : B\beta = AB :$

$b\beta + BG : AB$ [ob sim. Tr. $Bb\beta, ABG] = BG : b\beta$. Ergo $BH : BH - \beta b = BG : b\beta$. Sed ex natura evolutionis $BG = BH$. Igitur $b\beta = BH - \beta b$, & $BH = b\beta + \beta b = b\beta$. Ergo etiam $DL = dl$. Igitur arcus DL inter similes rectis AH, ED interceptos est minimus.

Et similiter ostendemus, ducta IM rectæ AC parallela, esse $ib = IH$, atque ideo $BI = bi$. Est igitur arcus BI omnium similium rectis BF, IM interceptorum minimus, maximusve, ut habet Noster in Coroll. sequenti.

Num. LXXX. ex punctis H & G inflectantur rectæ HA, GA concurrentes in quolibet puncto A, & posteriori per B agatur parallela recta infinita BF, erit evoluta BH omnium circa idem punctum A similiter descriptarum ac rectis AH, BF interceptarum curvarum maxima minimave. Quin & amplius, si accipiat in curva HG quodvis aliud punctum C, quod filum evolvens IC dum describit, tangit curvam BH in I; atque ex I recta agatur in IM ductæ CA parallela, erit arcus BI omnium rectis IM, BF interceptorum maximus minimusve.



Nº. LXXXI.

JACOBI BERNOULLI S O L U T I O

PROBLEMATIS FRATERNI

in Actis mensis Maii 1697 propositi,

*De Curva infinitas Logarithmicas ad angulos
rectos secante.*

Acta Erud. Lipf. 1698 Mai. p. 230. **P**roblema de curva invenienda, quæ infinitas lineas ordinatim positione datas tangit, jam Mense Octobri 1694 * solutum dedimus. Quæstio hic est de tali, quæ datas omnes ad angulos rectos

* Nº. LXII. pag. 618. seq.

N.º 80.

Fig. 1.

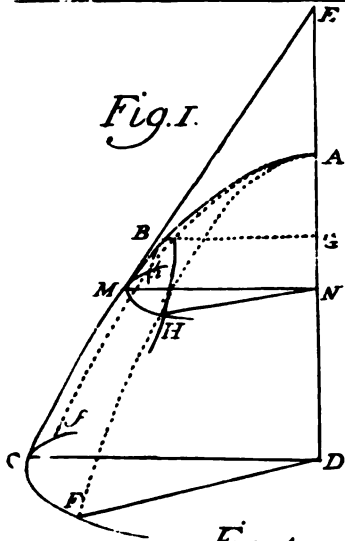


Fig. 2.

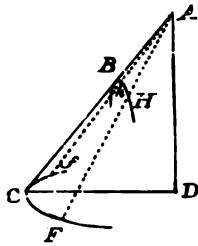


Fig. 3.

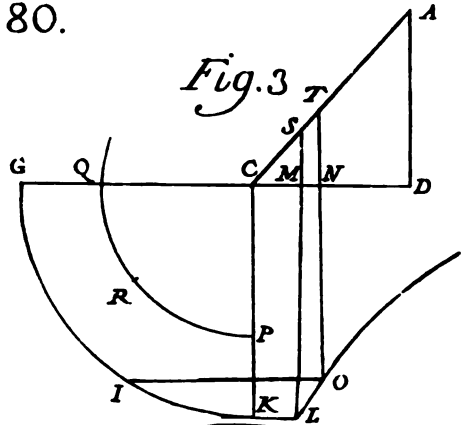


Fig. A.

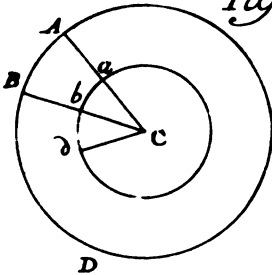


Fig. B.

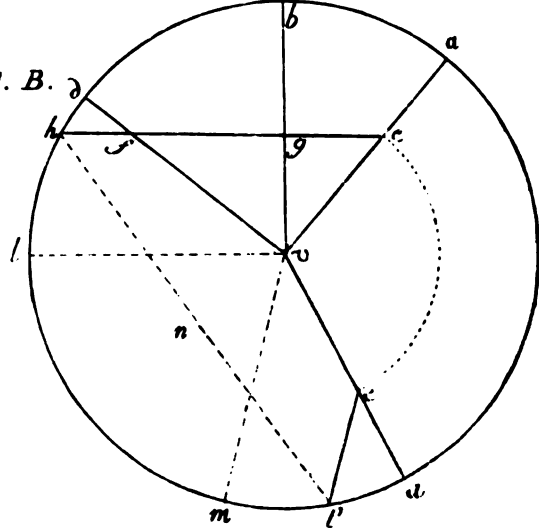
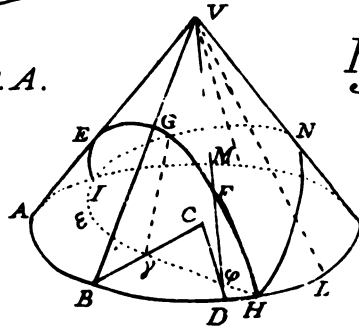


Fig. 4.

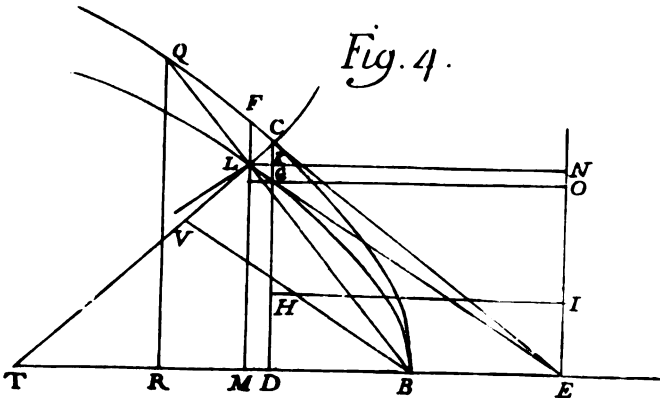
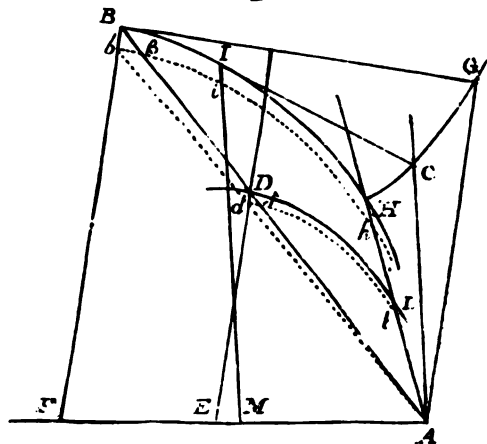


Fig. 5.



rectos secet. (*) Dependet autem Problema a methodo tangentium inversa, ut nullam generalem solutionem admittat, estque pro varia datarum positione miræ diversitatis; neque gradus vel species

Num. LXXXI.

Kkkkk 3

(*) Has curvas, quæ aliarum ordinatim positione datarum seriem ad rectos angulos secant, vocant Geometræ *Trajectorias orthogonales*, nomine ipsius indito a Celeb. Job. BERNOULLI. Id argumentum is tam subtiliter & accurate pertractavit in *Actis Erud.* 1720, Mai. pag. 223, & *Supplem.* Tom. VII, Sect. 7. pag. 303, & Sect. 8. pag. 337, ut exhaustum videatur. Inde ea quæ ad istius Numeri intelligentiam faciunt excerpemus.

Postquam universalissimam dedit Trajectoriarum formulam, qualis quidem dari potest, ad speciales casus delabitur; qui tamen ita sunt comparati ut unusquisque infinita sub se genera comprehendat. Hic autem tres eorum præcipue sunt recensendi.

I. Ubi Trajectoria quæritur quæ curvam eandem, sed motu parallelo latam semper ad angulos rectos secet. Sit [Fig. A] *AMm* curva data, cujus abscissa *AP* [*x*], applicata *PM* [*y*], earum elementa *Qm*, *dx*; *QM*, *dy*. Ea si fluere ponatur secundum axem *AR*, & perveniat in *BNn*, ibique secetur ad rectos angulos *SNn* a Trajectoria *SN*, cujus abscissa *AR* [*z*] & applicata *RN* [*y*], erit *ON* = *dy*, *OS* = - *dx*, quia crescente *y* decrescit *z*. Jam, ob rectum angulum *SNn*, est *ON*² = *SO* × *On* = *SO* × *Qm* [sunt enim

æquales *On*, *Qm*] vel analytice *dy*² = - *dx* *dx*. Datur autem *dx* in *y* & *dy*, quia data est curva *AMQ*: sitque *dx* = *Ydy*, [*Y* functionem ipsius *y* qualemcunque designante]. Igitur *dy*² = - *Ydx* *dy*, vel *dx* = - *dy* : *Y*, quæ est Trajectoriæ *SN* æquatio. Videantur exempla Notis b, c, d, e.

II. Ubi curvæ ad rectos angulos secandæ sunt ejusdem generis, hoc est, quarum ordinatæ ad eandem abscissam sunt inter se in ratione data. Quales sunt *AMm*, *BNn*, si assumpta ad libitum abscissa *CL* [*y*], applicatæ *LM* [*x*], *LN* [*z*] datam habeant rationem 1 : *g*, designante *g* quantitatem quandam, in eadem curva *BNn* constantem, variabilem vero, ubi de curva in curvam transferis. Igitur *LN* [*z*] = *gx*, & *On* = *gdx*. Sed *OS*, [*dz*] element. ordinatæ *LN*, quatenus ad Trajectoriam pertinet, est = - *dx*, atque *NO* = *dy*. Igitur, cum sit *ON*² = *SO* × *On*, erit *dy*² = - *gdx* *dx*. Datur autem, quia data est curva principalis *AMm*, *dy* in *dx*, sitque *dy* = *Xdx*: erit *XXdx*² = - *gdx* *dx*, vel *XXdx* = - *gdz* = - *zdx* : *x*, quoniam *g* = *z* : *x*. Habemus itaque *XXdx* = - *zdx*; quæ æquatio algebraice, si *XXdx* integrari possit, sin minus, transcendentem exprimit relationem ipsarum *x*, *z*; *LM*, *LN*. Assumpta igitur ad libitum abscissa *CL*, & sic determinata ordina-

Num.
LXXXI

species curvarum est caracter facilitatis vel difficultatis Problematis, cum nonnunquam in algebraicis res difficulter, in transcendentibus contra facile succedat.

Exempla promiscue algebraicarum & transcendentium curvarum in quibus solutio facilis.

I. Si eidem axi insistant infinita Parabola equalium parametrorum, sed diversorum verticium, sive [quod eodem recidit] si ex infinitis una super plano suo ita protrudatur, ut singula ejus puncta rectas describant axi parallelas, erit curva, quæ infinitas il-
las

ta LM, habebitur LN, atque punctum N Trajectoriæ quæsitæ. Exempla vide Notis f, h.

III. Ubi curvæ secandæ sunt similes. Sint AMm, DEF [Fig. B] curvæ similes & circa punctum A similiter positæ, inter quas eligatur principalis AMm; ductisque rectis AME, AmF describantur arculi MI, EG. Sitque AM, x; Im, dx; AE, vel AG, y; GH, — dy, quia crescente x in curva principali, decrescit y in Trajectoria KEH. Quia data est curva AMm, arcus MI dabitur in x & dx; sit ille Xdx, &, ob curvas similes AMm, DEF, habebimus EG = Xydx: x, & GF = ydx: x. Igitur cum sit, angulo FEH existente recto, EG² = FG × GH, seu XXyydx: xx = — ydx dy: x, erit XXdx: x = — dy: y, quæ æquatio, si f(XXdx: x) ad logarithmos reduci possit, algebraice; sin minus, transcendentem dabit relationem ipsarum x, y; AM, AE. Assumpta igitur ad libitum AM, dabitur AE, & punctum E Trajectoriæ KEG.

Vel, si curvæ principalis AMm

habeatur natura expressa per æquationem inter coordinatas AP [x], PM [y], sitque DEF curva inter similes talis ut ductis AME, AmF, sint 1: a = AM: AE = AP [x]: AN [ax] = PM [y]: NE [ay]. Jam si sit K punctum Trajectoriæ KEH vicinissimum puncto E, & variantibus a & x, differentientur AN, [ax], & NE [ay], inveniuntur TK = — a dx — x da, & ET = ady + y da. Præterea, cum sit, ob ang. rectum KEF, KT [— a dx — x da]: TE [a dy + y da] = TE: TF = [ob simil. curv. AMm, DEF] = MQ [dy]: Qm [dx], erit — adx² — xda dx = ady² + ydady, unde sit — da: a = (dx² + dy²): (x dx + y dy), quæ æquatio algebraice, si (dx² + dy²): (x dx + y dy) possit reduci ad logarithmos, aut transcendentem saltem, dabit relationem ipsius a ad ipsas x & y. Assumpta igitur ad libitum x [AP], quo ipso datur PM, habebitur a. Producatum itaque AM in E, donec sit AE: AM = a: 1, & habebitur punctum E Trajectoriæ desideratæ.

las Parabolæ seu unicam ita motam perpetuo ad angulos rectos secat, Logarithmica, cujus subtangens æquatur semiparametro Parabolæ (b). Et vicissim, si Logarithmica dicta ratione super axe promoveatur, curva quam continuo ad rectos secat angulos, est Parabola (c). Ita si Parabola cubica super axe propellatur, quam ad rectos secat, est Hyperbola; si altiores Parabolæ, ab altioribus gradatim Hyperbolis normaliter secantur, & vicissim &c. (d).

Num.
LXXXI.

II. Si infinita aequalium parametrarum Parabola axibus parallelis insistant, & vertices habeant in linea his axibus perpendiculari, sive, Si Parabola ita feratur, ut singula ejus puncta rectas describant axi perpendiculares; Curva quam infinitæ, vel unica sic mota normaliter interfecat, Parabola est cubicalis secundi generis, cujus latus rectum ad Parabolæ parametrum est, ut novem ad sexdecim. Si alia Paraboloidæ ita ferantur, aliis itidem Paraboloidæ normaliter secantur, & vice versa &c. (e).

III. Si

(b) Hoc exemplum ad Casum I, Notæ præced. pertinet. Parabolæ æquatio est $ax = yy$, seu $a dx = 2y dy$, aut $dx = 2y dy : a$. Igitur $Y = 2y : a$, & æquatio ad Trajectoriam $[dx = -dy : Y]$ erit $dx = -ady : 2y = -\frac{1}{2} ady : y$ ad logarithmicam.

(c) Æquatio ad logarithmicam est $dx = a dy : y$. Ergo $Y = a : y$. Igitur æquatio ad Trajectoriam $[dx = -dy : Y]$, fit $dx = -y dy : a$, vel $z = -yy : \frac{1}{2}a$, aut $-\frac{1}{2}az = yy$, ad Parabolam.

(d) Sit generaliter $a^{m-1} x = y^m$ ad Parabolæ cujuscunque gradus, seu $dx = my^{m-1} dy : a^{m-1}$: erit $Y = my^{m-1} : a^{m-1}$. Ergo dx

$$[-dy : Y] = -\frac{1}{m} a^{m-1} y^{1-m} dy, \text{ sive } z = -\frac{1}{m(2-m)} a^{m-1} y^{2-m} \text{ aut denique } y^{m-2} z = \frac{1}{m(m-2)} a^{m-1} \text{ ad infinitas hyperbolas.}$$

(e) At si fit $a^{m-1} y = x^m$, vel $x = a^{1-1:m} y^{1:m}$, aut $dx = \frac{1}{m} a^{1-1:m} y^{1:m-1} dy$, erit $Y = \frac{1}{m} a^{1-1:m} y^{1:m-1}$, & $dx = [-dy : Y] = ma^{1:m-1} y^{1-1:m} dy$, atque

Num.
LXXXI.

III. Si infinita Paraboloides ejusdem gradus [cujus index sit m] sed diversorum laterum rectorum, circa eundem axem & verticem consistant, Curva quæ has omnes normaliter trajicit, constanter est Ellipsis, cujus centrum in communi vertice, latus transversum in axe, ejusque ratio ad latus rectum, ut 1 ad m . (f).

IV. Si infinita aequalium subtangentium Logarithmica super eisdem axibus parallelis consistant, transcantque per commune punctum B; Queritur curva eas omnes normaliter interfecans? [Fig 1].

CONSTRUCTIO. Estæ una earum data FBf cum suo axe AG, inque hunc demissa perpendiculari BA, sumptoque quolibet in Logarithmica puncto F, agantur ad axem perpendicularis FG, tangens FL, & huic parallela BM, ac insuper ad partes Logarithmicæ ab axe remotiores statuatur in axe recta AN arbitrariæ longitudinis, major tamen subtangente GL: quo factò, sumatur inter duplam subtangentem & excessum quo NG superat AM, media proportionalis, eique in recta BA æqualis abscindatur BI seorsum deorsumve, prout punctum F supra infra ve B assumptum fuerit, ac denique ex I ducatur IH parallela axi secansque applicatam GF in H; erit H punctum in optata curva CHD, cui similes & æquales in cæteris rectorum BA, BC sese decussantium angulis constitui possunt.

Nota.

atque $z = \frac{m}{2-1:m} a^{1:m-1} x^{m-1} dx$, erit $X = ma^{1-m} x^{m-1}$.
 $y^{2-1:m}$, vel $z^m = \left(\frac{mm}{2m-1}\right)^m$ Ergo $[XXx dx =] mm a^{2-2m}$
 $a^{1-m} y^{2m-1}$, aut tandem $x^{2m-1} dx = -z dz$, & inte-
 $\left(\frac{2m-1}{mm}\right)^m a^{m-1} z^m = y^{2m-1}$ grando $\frac{1}{2} m a^{2-2m} x^{2m} = \frac{1}{2} cc -$
 Quod si ponas $m=2$, erit $\frac{1}{2} azz = y^2$ $\frac{1}{2} cz$ [$\frac{1}{2} cc$ est constans addita ad complendam æquationem,] seu, pro
 (f) Pertinet hoc exemplum ad Casum 2. Sit æquatio Parabolæ $x^{2m} scribingo a^{2m-2} yy, myy =$
 $a^{m-1} y = x^m$ vel $dy = ma^{1-m}$ $cc - zz$, æquatio ad ellipsim, cujus axis major $2c$, latus rectum $= 2cm$.

Nota, Maxima curvæ altitudo $BD = \sqrt{(2GL \times (AN - GL))}$. Num. LXXXI.

Si $GM = AN$, cadit IH in BC , fitque maxima curvæ latitudo. (8).

V. *Queritur denique Linea* [quod est speciale exemplum *Frætris*] *quæ omnes Logarithmicas super eodem axe & per idem punctum ductas ad angulos rectos secat?* [Fig. 2].

CONSTRUCTIO. Esto axis communis Am , punctum intersectionis Logarithmicarum B , earum una data FBf ; demissa in axem perpendiculari BA , per punctum F utcunque acceptum in Logarithmica agantur rectæ FT , FN secantes rectam BA in T & N , quarumque illa axi parallela sit, hæc tangat Logarithmicam [prætereaque supra T , siquidem punctum N inferior sit ipso T , abscindatur TN æqualis inferiori TN ;] quo facto, diametro AN , nempe $AT + TN$, describatur semicirculus APN , cui occurrat recta FT in P ; sumptaque arbitraria quadam constan-

(8) Sint BH , Bb [Fig. B] Logarithmicæ duæ vicinissimæ, quarum axes AD , ad , quas secet ad rectos angulos Trajectoria Hb . Hujus abscissa BC sit $= x$, ordinata $CH = y$, atque $BA = a$. Et ex natura Logarithmicæ erit $BC [x] = \log. (HG : BA) = \log. (a-y) : a$, aut $(a-y) : a = \text{numero}$, cujus x est logarithmus, id quod designabimus sic, Nx . Est igitur $a = y : (1 - Nx)$, & $y = a - aNx$, atque $IK = -adxNx$. Ergo $Ih [dy] = IH^2 : IK = -dx^2 : adxNx = -dx : aNx = \frac{-dx}{yNx : (1 - Nx)}$, vel $-ydy = dx - dx : Nx$, sive $ydy = -dx + dx : Nx$. Erit igitur integrando $\frac{1}{2}yy = c - x - 1 : Nx$, [c est constans addita

ad æquationem complendam]. Ergo y media proportionalis inter 2 , & $c - x - 1 : Nx$, hoc est inter duplam subtangentem Logarithmicæ cujuscumque, quæ subtangens GL pro unitate sumi potest, & excessum quo $NG = c - x$, [sumta $AN = c$], superat AM , quæ cum sit tertia proportionalis ad HG , EA , & GL , erit $= GL \times BA : HG$, hoc est $1 : Nx$, cum sit $GL = 1$, & $HG : BA = Nx$.

Est autem maxima curvæ altitudo, seu y maxima, quando $x + 1 : Nx$ minima est; hoc est, quando $x = 0$, & Nx atque $1 : Nx = 1$; tuncque sit $yy = 2c - 2$. Maxima vero curvæ latitudo est, quando $c = x + 1 : Nx$, quando $AN = GM$. Nam, ubi $c < x + 1 : Nx$, y imaginaria erit.

Num.
LXXXI.

stante L , abscindatur in BA ex puncto T recta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 \pm L^2)}$ & jungatur RP ; [vel, si punctum T superius sit ipso B , descripto super TR semicirculo, applicetur illi prius TP , ac tum demum jungatur RP ;] junctæ in recta FT æquales hinc inde abscindantur TS , TS ; eruntque puncta S , S ad curvam quandam $m C M C m$, quæ omnes Logarithmicas circa punctum B constitutas ad angulos rectos secabit, ut requirebatur.

Nota. Sumpta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 + L^2)}$, occurret curva axi in puncto m , ut sit $Am = L$: sed sumpta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 - L^2)}$, transibit inter puncta A & B , nec ad axem pertinet.

Maxima curvæ latitudo $BC = \sqrt{(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2)}$. (1).

Atque horum omnium solutio facilis admodum fuit: dari autem possunt aliæ curvarum positiones, quæ Problema magis arduum reddunt, & vel in simplici Parabola ad easus methodi tangentium inversæ nondum exploratos deducunt; veluti, *Si quaratur Curva, qua omnes Parabolas super eodem axe extractas, lateraque sua recta respectivis verticem a puncto fixo distantiis æqualia habentes, ad rectos angulos trajicit* (1) &c. Cui addi potest &

(1) Pertinet exemplum istud ad casum 2 Notæ a: sunt enim curvæ genere eadem. Sit $AT = y$, $TF = x = ly$, posita $BA = 1$, & erit $y = Nx$, atque $dy = dxNx$. Igitur $X = Nx$ & æquatio $XXdx = z dz$ fit $z dz = Nx^2 \cdot x dx$, vel integrando $\frac{1}{2} z z = \pm \frac{1}{2} cc + \frac{1}{4} Nx^2 - \frac{1}{2} xNx^2 = \pm \frac{1}{2} cc + \frac{1}{4} yy - \frac{1}{2} xyy$. Ergo $z [TS] = \sqrt{(\frac{1}{2}yy \pm cc - xyy)} = \sqrt{(\frac{1}{2}AT^2 \pm L^2 - TP^2)}$ [est enim $TP^2 = AT \times TN = xyy$, cum sit $TN = xy$, tertia nempe proport. ad subtangentem $= 1$, $AT = y$, & $TF = x$] $= \sqrt{(TR^2 - TP^2)} = PR$.

Maxima curvæ latitudo est, ubi $dz = 0$. Ergo ubi $y dy - yy dx =$

$2xy dy$ seu $dx Nx^2 - dx Nx^2 - 2x dx Nx^2 = 0$, hoc est ubi $x = 0$, scil. in BC , ibique illa est $\sqrt{(\frac{1}{2}yy \pm cc)} = \sqrt{(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2)}$; necnon ubi $Nx = y = 0$, scil. in Am , ibique illa, vel $= 0$, si sumatur $+cc$ [$+L^2$], vel imaginaria $\sqrt{-cc}$, si sumatur $-cc$ [$-L^2$].

(2) Solvitur istud Problema per casum 3 Notæ a. Sit curva principalis Parabola, cujus parameter $= 1$, æquatio $yy = x - 1$, & reducitur formula $-da: a = (dx^2 + dy^2): (x dx + y dy)$ ad $-da: a = (4yy + 1) dy: (2y^3 + 3y) = dy: 3y + \frac{1}{2} yy dy: (2y^3 + 3y) = dy: 3y + \frac{1}{2} \times 4y dy: (2yy + 3)$ quæ integrabilis est, & dat $1C =$

& hoc: *Quæritur Curva, quæ Parabolam, aut aliam datam Curvam super plano suo circa datum punctum in orbem conversam in angulo dato secat; (*)* quemadmodum constat, rectam ita conversam circa extremitatem suam in angulo recto secari a circulo, in obliquo a Logarithmica spirali. Num. LXXXI.

$la = \frac{1}{2}ly + \frac{1}{2}l(2yy + 3)$, aut regrediendo ad numeros $C: a = \sqrt[6]{((2yy + 3)^{1/2}yy)}$. Assumpta igitur y ut libet, dabitur a , & ejus ope curva describitur, vel etiam ejus æquatio algebraica potest inveniri.

(*) Sit [Fig. C] centrum conversionis C , ex quo describatur Circulus AGH , in quo assumatur punctum fixum A ; Trajectoria MBb , ipsa vero curva in orbem conversa sit BF , a cujus puncto quovis B ducatur BG , [y] & ad hanc normalis CD [s] tangenti BD occurrens in D . Sit $AC = I$, tangens anguli dati $bBD = t$, posito sinu toto = 1; estque tangens an-

guli $CBD = s : y$. Igitur tangens anguli $CBb = (ty - s) : (ts + y) = bI : IB = bI : dy$. Ergo $bI = (ty - s) dy = (ts + y)$. Sed $Cb [y] : bI [(ty - s) dy : (ts + y)] = Ce [I] Ee = (ty - s) dy : (tsy + yy)$. Igitur $AE = f((ty - s) dy : (tsy + yy))$. Assumpta itaque ad libitum $CB [y]$, dabitur arcus AE , atque sic punctum B trajectoriæ quæsitæ. Si datus angulus fuerit rectus, tunc ejus tangens t infinita evadit. Quare arcus AE simpliciter sumendus est $= f(ty dy : tsy) = f(dy : s)$. Non differt hæc solutio ab ea quam dedit Cel. Job. BERNOULLI in *Act. Erud.* 1698, Oct. pag. 474.





N°. LXXXII.

LETTRE

DE MR. BERNOULLI,

Professeur de Groningue, à Mr. VARIGNON.

*Du 15. Octobre 1697. **

Sur le Problème des Isoperimetres.

*Journal
des Savans
1697. 39.
Journal du
2^o. Dec. p.
458. Edit.
de Paris,
pag. 737.
Edit. de
Holl.*

IL y a près de trois mois que je vous fis part de quelques nouveaux Problèmes, proposés par mon Frère dans les *Actes de Leipsic*, au mois de Mai dernier. Il les a, dit-il, imaginés à l'occasion de celui que j'avois proposé sur la plus vite descente des corps pesans, lequel a été assez favorablement reçu, tant ici (*Hollande*) qu'aux pays étrangers; témoins les excellentes solutions, qui en ont été données par les plus savans Géomètres de ce tems (*), & qui toutes s'accordent merveilleusement avec la mienne.

Vous vous souviendrez, qu'en vous communiquant ces nouveaux Problèmes, je vous dis en même tems que j'en avois trouvé les solutions, le même jour que le mois de *Mai* de ces *Actes* m'étoit tombé entre les mains, & de plus qu'elles étoient infiniment plus generales que les conditions de ces Problèmes ne le demandoient. Je ne me serois peut-être pas attaché si-tôt à cette recherche, si je n'y eusse été comme obligé par un défi, qu'une loüable émulation, qui est entre mon Frère & moi, lui a fait me faire nommément à moi & en particulier.

* On trouve un Extrait de cette Pièce en Latin, dans les *Actes de Leipsic* 1698. Janv. pag. 52.

(*) Mrs. LEIBNITS, NEWTON, DE L'HOPITAL, BERNOULLI.

culier. Un Inconnu même, dont mon Frère est le garant, y ajoute une promesse de 50 impériales, ou écus blancs, pourvû que j'accepte publiquement ce défi dans trois mois, & que je donne les solutions requises avant la fin de cette année. Je ne manquai donc pas, dès le lendemain du jour que ces Problèmes vinrent à ma connoissance, de donner avis à Messieurs les Collecteurs des *Actes de Leipsic*, que j'en avois déjà trouvé les solutions, les priant d'en avertir le Public ^(b). Je ne manquai pas non plus d'envoyer incontinent mes Solutions à Mr. LEIBNITZ, & de les lui remettre comme en dépôt, avec l'analyse qui m'y avoit conduit; sûr que je ne pouvois mieux m'adresser en ce rencontre qu'à ce Géomètre incomparable. Je le suppliai de vouloir bien être nôtre Juge, ne doutant nullement que mon Frère ne s'en rapporte très volontiers à lui. Mr. LEIBNITZ y consentit, pourvu que de part & d'autre on en soit content. Tout ce que je viens de dire, se trouve inferé dans l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, au mois de Juin, où je donne aussi mes remarques sur les diverses solutions de mon Problème de la plus vite descente, qui ont paru dans les *Actes de Leipsic*.

Cependant, comme le tems s'en va expirer, & que je n'entends plus rien de l'Inconnu prometteur, j'ai jugé qu'il ne falloit plus attendre sa réponse, de peur qu'il ne laisât couler tout doucement le tems préfix, & qu'il ne me chicanât ensuite sur mon retardement.

Voici donc, Monsieur, mes solutions: Je m'assure que vous les trouverez dignes d'être communiquées au Public; & ce d'autant plus que mon Frère fait une estime singulière de ses Problèmes, tant pour leur subtilité, que pour leur difficulté. Avant que de les proposer, parlant de figures isopérimètres, il dit (*) qu'on croit communément, mais sans démonstration, [*vulgo creditur, & recte, sed sine demonstratione*] que le Cercle est la plus grande de toutes les figures d'un même circuit: mais il n'a pas pris garde, que PAPPUS l'a très-bien démontré dans les *Collections Mathématiques*, Liv. 5. Prop. 10. Je ne m'arrêterai donc pas à le prouver. Je dirai seulement en passant, qu'il y a long-tems que je fis part à Mr. LEIBNITZ d'une méthode que mon Frère me demande à cette occasion, comme s'il étoit le premier qui fût tombé sur cette spéculation, qui est de trouver la Courbe fuculaire, ou de la chaînette, par la considération de *Maximis & Minimis*, en ne faisant réflexion que sur ce que le centre de gravité de la chaîne doit descendre le plus bas qu'il est possible. Il suffit que Mr. LEIBNITZ en soit témoin; des raisons particulières n'empêchent de publier ma méthode.

LIII 3 Venons

(b) Ce qu'ils firent, dans les *Actes* de 1697, Oâob. pag. 485.

(c) Ci-dessus N°. LXXV. pag. 775.

Num. LXXXII. Venons au fait. La première question est telle : *D'entre toutes les Courbes isopérimètres constituées sur un axe déterminé BN, [Fig. 1] on demande celle, comme BFN, qui ne comprenne pas elle-même le plus grand espace ; mais qui fasse qu'un autre compris par la Courbe BZN soit le plus grand, après avoir prolongé l'appliquée FP, de sorte que PZ soit en raison quelconque multipliée, ou sous multipliée, de l'appliquée PF, ou de l'arc BF; c'est-à-dire, que PZ soit la tantième proportionnelle que l'on voudra d'une donnée A, & de l'appliquée PF, ou de l'arc BF. Le sens de cette question est de déterminer la Courbe BFN entre une infinité d'autres de même longueur qu'elle, dont les appliquées PF ou les arcs BF élevés à une puissance donnée, & exprimés par d'autres appliquées PZ, fassent le plus grand espace BZN.*

J'ai plus d'une solution de ce Problème : mais je ne mettrai ici que la plus simple ; elle suffit. Soit l'exposant de la puissance, n ; une droite arbitraire, a ; PF, ou BG, x ; BP, ou GF, y ; que l'on prenne GF, ou $y = f(x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}})$. Je dis que le point F sera à la courbe requise BFN, tellement que faisant PZ en raison de la puissance n de l'appliquée PF, l'espace BZN sera le plus grand de tous ceux qui se pourroient ainsi former par d'autres courbes constitués sur BN, & de même longueur que BFN ^(*d*).

D'où il est manifeste, que si $n = 1$, la courbe BFN sera la demi-circumference d'un cercle ; car y , ou $f(x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}})$ deviendra $= f(x dx : \sqrt{aa - xx}) = a - \sqrt{aa - xx}$. Or c'est justement ce qui doit arriver, la courbe BZN étant, dans ce cas, la même que BFN.

En faisant $n = 2$, c'est-à-dire, PZ comme les quarrés de PF, la Courbe BFN est celle que représente un linge pressé d'une liqueur, & que mon Frère attribué aussi à son Elastique.

Que si $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, si les PZ sont en raison sous-doublée des PF, alors BFN sera la Roulette ou Cycloïde ordinaire. De sorte que voilà encore une très-belle propriété de cette fameuse Courbe, contre l'attente de ceux qui croyoient, qu'après la découverte de la plus vite descente que nous y venons de faire, il n'y restoit plus rien à découvrir. Ce n'est pas encore tout : J'ose avancer, & au premier loisir que j'aurai, je le ferai voir par un échantillon qui ne déplaira pas aux Géomètres, que nonobstant toutes les recherches, & le rigoureux examen, que les plus habiles ont fait de cette Courbe depuis tant d'années,

^(*d*) Voyez sur ceci les Num. suivans, & sur tout le XCIII. & le XCVI.

nées, elle a encore bien des propriétés très - considérables qui leur sont échappées. (4) Num. LXXXII.

Au reste, je remarque en general, que toutes les fois que n est une fraction dont le numerateur est l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque, la courbe BFN se pourra toujours construire par la quadrature du Cercle; & si le dénominateur est un nombre impair quelconque, alors la courbe BFN sera tout à fait algébrique: (e) par exem-

(4) Mr. BERNOULLI veut parler ici de la Quadrature d'une infinité de Segmens & de Zones de Cycloide quarrables. Sur quoi voyez le N^o. XCII & suiv.

(e) Si l'on fait $a^n = c$ & $x^n = z$, on trouvera que $\int x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ se reduit à $\frac{1}{n} \int (z^{1:n} dz : \sqrt{(cc - zz)}) = m \int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$, en faisant $m = 1 : n$. Or $m \int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$ est $= -z^{m-1} \sqrt{(cc - zz)} + (m-1)cc \int (z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$. On peut s'en assurer par la differenciation, ou par cette analyse. Pour integrer $z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$, je le considère comme le produit de ces deux facteurs $t = -z^{m-1}$ & $ds = -z dz : \sqrt{(cc - zz)}$. Puis donc que $f ds = ts - f s dt$, aussi $\int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}) = -z^{m-1} \sqrt{(cc - zz)} + (m-1) \int (z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Mais ce dernier terme est égal à $(m-1) \int ((cc - zz) z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$ ou à $(m-1)cc \int (z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)}) - (m-1) \int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Donc $\int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}) =$

$-z^{m-1} \sqrt{(cc - zz)} + (m-1)cc \int (z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)}) - (m-1) \int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$, & en transposant $m \int (z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}) = -z^{m-1} \sqrt{(cc - zz)} + (m-1)cc \int (z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Ainsi l'intégration de $z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$ se reduira toujours à celle de $z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)}$, où l'exposant de z hors du signe est diminué de deux unités. En continuant cette dégradation de l'exposant, on le reduira à la fin à l'unité s'il est impair, ou à zero, s'il est pair: c'est-à-dire, que l'intégration de $z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$ dépend de $\int (z dz : \sqrt{(cc - zz)})$, ou de $\int (dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Or $\int (z dz : \sqrt{(cc - zz)})$ est intégrable & $= -\sqrt{(cc - zz)}$. Mais $\int (dz : \sqrt{(cc - zz)})$ exprime le rapport qu'a au rayon un arc de cercle, dont le rayon est c & le sinus z . Donc si m est pair, c. a. d. si $n [= 1 : m]$ est une fraction dont le numerateur est l'unité & le dénominateur un nombre pair, l'intégration de $mz^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$, ou de $x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ dépend de la quadrature du cercle: Mais cette quantité peut s'intégrer abso-

Num. exemple, si $n = \frac{1}{3}$, ou si PZ est en raison soustriplée de PF, l'on aura
 LXXXII. $y = 2a - (2a^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}) \sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

Avant que de passer outre, il ne sera pas hors de propos de donner ici une solution infiniment plus generale que ne requiert le Problème; en supposant que PZ, au lieu de n'être que comme une puissance donnée de PF, soit maintenant composée comme l'on voudra, de PF & de données; comme si l'on décrit une courbe donnée quelconque BH sur l'axe BG, parallele à PF, & qu'appliquant PZ = GH on veuille que l'espace BZN soit le plus grand: Je dis, que pour construire la courbe BFN il faut prendre GF, ou $y = \int (b dx : \sqrt{(aa - bb)})$; j'appelle b l'intégrale ou la somme des GH $dx : x$ (*). D'où il est évident, pour ce qui est de l'arc BF, qui fait l'autre partie du Problème, que quand même PZ ou GH seroit non seulement comme une puissance donnée de l'arc BF, mais aussi composé que l'on voudra de cet arc, de PF, & de données; on aura toujours une équation différentielle, si ce n'est pas du premier, au moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la courbe BFN.

Je ne puis passer sous silence une très-belle propriété que j'ai rencontrée sur nôtre courbe considérée en general. C'est que le rayon FS de la développée, ou du cercle baissant, est toujours à la portion FR comprise entre la courbe & sa base, comme b est à FZ ou GH (†). Et par conséquent, dans le cas simple qu'on me propose, lorsque PZ ou GH = x^n , on aura toujours FS à FR en raison constante, savoir FS : FR = 1 : n . Il est aussi à remarquer, que dans la même courbe, où $\int x^m dx$ est un *Maximum*, $\int (dt : x^m)$ sera un *Minimum*, je prends dt pour l'élément de la courbe. C'est ce qui fait que m étant $\frac{1}{2}$, la courbe BFN, comme nous avons remarqué ci-dessus, doit être la même que celle de la plus vite descente; puisque dans celle-ci $\int (dt : \sqrt{x})$ est un *Minimum* par sa nature.

Mais

absolument si m est impair, c. a. d. si n [= 1 : m] est une fraction dont le numerateur est l'unité, & le dénominateur un impair.

(†) L'Auteur a corrigé ceci dans le N°. LXXXIV. Il veut qu'on lise, J'appelle b les ordonnées GH; &

pour ce qui est de l'arc BF, &c.

(*) Dans le N°. LXXXIV, l'Auteur remarque qu'il faut lire, comme b est à GT, aiant tiré BT parallele à la tangente en H, ou si l'on aime mieux, comme la sous-tangente de la Courbe BH est à l'abscisse BG.

Mais en voilà assez, Monsieur, sur le premier Problème ^(^h). L'autre Num. LXXXII. consiste à déterminer la Cycloïde, qui entre toutes celles qu'on peut décrire d'une même origine & sur une même ligne horizontale, ait cet avantage, que sa portion comprise entre l'origine & une verticale donnée soit parcourüe dans le moindre tems possible, c'est-à-dire, en moins de tems que toute autre portion des autres Cycloïdes, pareillement comprise entre l'origine & la verticale donnée.

Il semble par la manière de parler de mon Frère, que c'est pour la solution de ce seul Problème, [quand même je n'aurois pas résolu le premier,] que nôtre Inconnu me promet le prix de 50 écus; car c'est en me proposant ce Problème-ci, qu'il dit, *prodit Nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri ultra laudes promeritas honorarium 50 imperia- lium decrevit.* Ainsi il faut qu'il l'ait jugé difficile. Cependant, si je me contentois de répondre simplement à la question, je le pourrois faire en trois mots; car il est visible que la solution de ce Problème n'est qu'un petit Corollaire, qui se tire immédiatement de ce que j'ai dit de la courbe Synchrones (¹), dans le mois de Mai des Actes dont il s'agit ici. Je dis donc, pour découvrir ce mystère, que la Cycloïde décrite par un cercle, dont la circonférence soit égale au double de la distance entre l'origine & la verticale donnée, satisfait à la question. Mais péne- trons plus avant. Si au lieu d'une verticale on suppose une ligne droite quelconque donnée de position, ou même une ligne courbe; le Problème n'en deviendra pas plus difficile; puis qu'il est visible par la nature de ma Synchrones, que la Cycloïde cherchée sera toujours celle qui rencontre à angle droit la ligne donnée de position. Pour en trouver présentement le cercle generateur, il n'y a qu'à décrire au hazard un cercle qui touche l'horizontale au point où elle est coupée par la droite donnée de position; faire ensuite, comme l'arc de ce cercle retranché du côté de l'origine des Cycloïdes par la ligne donnée de position, est à son diamètre, ainsi la partie de l'horizontale interceptée entre l'origine & l'intersection soit à une quatrième: Cette quatrième sera le diamètre du cercle generateur de la Cycloïde cherchée. C'est ainsi que mon Frère, voulant me proposer cette question comme difficile, y devoit substituer toute ligne droite donnée de position, au lieu de la verticale, pour me la faire dans toute son étendue: Je m'étonne que sa méthode ne le lui ait pas suggeré.

Jac. Bernoulli Opera.

M m m m m

On

(^h) On trouvera les Démonstrations de tout ceci dans les N^o. XCIII, & XCVI.

(¹) C'est celle qui retranche d'u-

ne infinité de Cycloïdes décrites d'une même origine, des arcs isochrones, c'est à dire, qui seroient parcourus dans des tems égaux.

Num. LXXXII. On voit donc que je lui ai plus que suffisamment répondu, & qu'ainsi je pourrais finir ici. Mais comme j'ai trouvé encore une autre solution de ce dernier Problème, laquelle s'étend non seulement aux Cycloïdes, mais aussi à toutes les courbes semblables, & semblablement posées; il me prend envie de la communiquer encore, & ce d'autant plus que mon Frère paroît en parler comme d'une chose désespérée, jusqu'à ne vouloir pas même la tenter, se contentant de l'avoir seulement proposée: *Qui speculationem, dit-il, de Maximis & Minimis promoveri volet, tentabit; nobis sufficiat proposuisse.* Il donne pour exemples les Cercles, ou les Paraboles à substituer à la place des Cycloïdes de ce Problème. Pour moi, je l'énonce & le résouds généralement ainsi. Soient AGB , AHD , &c. [Fig. 2] des Courbes données semblables & semblablement posées; GC une droite donnée de position: On demande par laquelle de ces Courbes, un corps pesant, commençant à descendre de leur origine commune A , arrive dans le moindre tems à la droite donnée GC .

SOLUT. Ayant choisi une des courbes semblables pour constante, comme AGB , on nommera l'ordonnée BL , y ; la courbe AGB , z ; ensuite on tirera à chaque point B une touchante BR , que l'on prendra $= \frac{1}{2} \sqrt{y} f'(dz : \sqrt{y})$; en sorte que les extrémités R de toutes ces touchantes décriront une courbe nouvelle AOR ; laquelle étant décrite, il faut tirer une ligne droite AR parallèle à GC ; du point R , auquel elle coupe la Courbe AOR , on mènera une droite RB qui touche la Courbe AGB au point B , duquel si l'on tire la droite AB qui coupe GC en D , & que l'on fasse sur AD une Courbe AHD semblable à AGB ; Je dis que la Courbe AHD sera celle par laquelle le corps descendant parviendra le plus vite à la droite GC (*).

En certains cas particuliers le Problème devient fort facile. Par exemple, si les courbes AGB , AHD , &c. sont des Cercles, alors la construction s'en fait fort aisément par la rectification d'une courbe que mon Frère comparoit autrefois à un nœud de ruban, dont nous nous étions servi pour la construction de l'Isochrone paracentrique de Mr. LEIBNITZ (1): De sorte que ces deux Problèmes ont entr'eux une dépendance mutuelle; c'est-à-dire, que par la construction de l'un l'on aura celle de l'autre. Si AGB , AHD , &c. sont des Paraboles, le Problème se réduit de même à la rectification d'une Courbe.

J'ai supposé que les Courbes AGB , AHD , &c. étoient semblables: j'ai pourtant aussi une méthode pour quand elles ne le sont pas (n).
Mais

(*) Voyez N°. LXXVIII, Note d
(n) Ibid. Note f.

(1) Ibid. Note b.

Mais parce que je n'ai pas encore eu le loisir de la mettre dans tout son jour , & que la construction en devient fort embarrassée dans l'exemple le plus simple des courbes dissemblables AGB , AHD ; quand même elles ne seroient que des Ellipses constituées sur un axe commun ; je la remettrai dans une autre occasion ; ceci suffisant tant à mon *Frère* , qu'à l'Inconnu prometteur , pour leur donner une satisfaction qui surpassera sans doute l'attente qu'ils avoient de moi ; puisque cette réponse comprend beaucoup plus qu'ils ne me demandoient. Me voilà donc surabondamment quitte : Il ne reste plus qu'à l'Inconnu prometteur de s'acquitter aussi. S'il ne le fait pas , qu'il sçache que c'est aux pauvres plutôt qu'à moi qu'il fait tort ; mon dessein ayant toujours été de leur faire distribuer cet argent , tant à cause que ces solutions m'ont trop peu coûté pour en profiter , que pour lui faire voir que je ne suis point mercenaire , & que la gloire suffit pour m'engager.

P. S. Je viens de recevoir une Lettre de M. le *Marquis de l'HOSPITAL* , par laquelle il me mande qu'il a aussi résolu le second Problème de mon *Frère* , où il s'agit de déterminer la Cycloïde , qui rencontrant une ligne verticale donnée , soit parcourüe dans moins de tems qu'aucune autre , décrite de la même origine & sur la même horizontale.



N° LXXXIII.

A V I S

*Sur les Problèmes dont il est parlé dans le
Journal des Savans ,
du 2. Décembre 1697.*

Monsieur BERNOULLI , Professeur à *Bâle* , Auteur de ces Problèmes , prétend que la solution du principal , qui concerne les figures isopérimètres , n'y est pas entièrement conforme

M m m m m 2

*Journal
des Savans
1698. 7^e.
Journal, du
17. Fevr.
p. 78 , Ed.
de Paris ,
p. 120. Ed.
à de Holl.*

Num. LXXXIII à la vérité. C'est pour cela qu'il veut bien accorder encore quelque temps aux Géomètres pour la chercher : Et si enfin personne ne la trouve, il s'engage à trois choses.

1°. A deviner au juste l'analyse qui a conduit son *Frère* à la solution qui se voit dans ce Journal.

2°. Quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier.

3°. A donner la véritable solution du Problème dans toutes ses parties.

Il ajoute, que s'il se trouvoit quelqu'un, qui s'intéressât assez à l'avancement des Sciences pour proposer quelque prix pour chacun de ces articles, il s'engage à perdre autant s'il ne s'acquitte pas du premier, à perdre le double s'il ne réussit pas au second, & le triple s'il manque au troisième.



N°. LXXXIV.

R E P O N S E

De Monsieur B E R N O U L L I ,
Professeur de Groningue,

*A l'Avis inseré dans le VII Journal des
Savans; du 17 Février 1698.*

*Journal
des Savans
1698. 15°.
Journal du
21. Avril,
pag. 172,
Ed. de Pa-
ris, p. 270,
Edit. de
Holl.*

JE vois bien par cet Avis de mon *Frère*, que l'Inconnu *Nonnemo* n'a guère envie de se rendre à la raison; de peur sans doute d'être obligé de s'acquitter de sa promesse; autrement il accepteroit l'offre que je

je lui ai faite, de nous en rapporter à la décision de Mr. LEIBNITZ ; Num. LXXXIV comme d'un des plus grands Géomètres de ce tems ; auquel , pour cet effet , j'avois envoyé mes solutions comme en dépôt ; & entre les mains de qui on devoit de même remettre le prix , si l'on ne veut passer pour juge & partie tout ensemble. Ou si l'on recuse cet habile Mathématicien , qu'on en dise la raison , & qu'on en nomme un autre ; car je suis prêt de subir le jugement de tout homme désintéressé , & versé dans ces matières. Sans cela, quoi qu'on objecte , je ne répondrai plus à rien , & je mépriserai constamment toutes les chicanes qu'on me fera , & que je prévois déjà bien qu'on me veut faire. Voici cependant ce que je veux bien encore répondre à cet Avis.

On est muet comme un poisson sur ma seconde solution ; ce qui fait déjà voir qu'on en est parfaitement content , vû l'extrême application où l'on est à me chicaner. Aussi prends-je ce silence pour les *laudes promeritas* , que mon genereux Promoteur m'a fait espérer pour la solution de ce Problème , qu'il jugeoit lui-même insoluble. Pour ce qui est de ma première solution , savoir celle du Problème sur les figures isopérimètres , [qu'on dit être le principal , quoique , selon les expressions de mon Frère dans les *Actes de Leipsic* , ce soit l'autre qu'il tient pour le plus difficile ,] on veut assurer qu'elle n'est pas *entièrement* conforme à la vérité. Mais ce mot , *entièrement* , fait assez voir , qu'on n'oseroit disconvenir qu'elle n'y soit du moins conforme en partie ; & un peu plus de bonne foi auroit fait avouer qu'elle y est même conforme dans toute l'étendue du Problème proposé ; & que s'il s'y est glissé quelque faute , ce n'est tout au plus que dans le surcroit d'étendue que j'ai donné moi-même à ce Problème. Pourquoi donc vouloir traiter cette solution de paralogisme ? N'étoit-il pas plutôt à présumer que cette faute ne venoit point du tout du fond de la méthode , mais uniquement de quelque circonstance accidentelle ? Effectivement , pour avoir trop hâté , [vû que dès le lendemain du jour que ces Problèmes vinrent à ma connoissance , j'envoyai mes solutions à Mr. L. E I B N I T Z , telles qu'elles ont été insérées depuis dans le Journal du 2 Décembre 1697 * , nonobstant le grand terme qu'on m'avoit donné , & dont j'aurois pu me prévaloir ,] pour avoir , dis-je , trop hâté , il se glissa une faute légère , non dans la méthode , ni dans la solution du Problème proposé , mais uniquement dans l'application de cette méthode au surplus d'étendue que j'ai donnée moi-même à ce Problème , au delà de ce qu'il en avoit tel qu'on l'avoit proposé : de sorte que cette méprise ne donne atteinte , ni à ma méthode , ni à la solution requise. C'est pourquoi je soutiens en-

M m m m m } core,

* Ci-dessus N°. LXXXII. pag. 816.

Num. LXXXIV core, que le Problème, tel qu'il a été proposé par mon Frère, (*Déterminer la Courbe entre les isopérimètres constituées sur une base donnée, dont la somme des ordonnées élevées à une puissance donnée, fasse un plus grand*) est entièrement résolu dans le Journal du 2 Décembre 1697, & conformément à tout ce que mon Frère demandoit. Ainsi ayant encore, de son aveu tacite, résolu son autre Problème; auquel des deux qu'il attache le prix de son *Nonnemo*, ce prix me sera toujours dû. Mais je l'ai dit, & je le dis encore, n'étant point un mercenaire, je le cède aux pauvres; & me chicaner sur le surplus qu'on ne me demandoit pas, c'est-à-dire, sur ce que je n'ai pas donné plus qu'on ne demandoit, ce ne peut être qu'un prétexte pour leur refuser cette aumône, ou plutôt pour leur nier cette dette.

J'en pourrais demeurer là, puisque je n'étois pas obligé à davantage. Mais il manque si peu de chose à ma première solution, pour lui donner le surplus d'étendue, que j'ai librement ajouté au Problème proposé, que trois mots suffisent pour réparer toute la faute de ma précipitation, tant elle est légère: pag. 462. ligne 7. du Journal du deuxième Décembre 1697, * où je dis, *J'appelle b l'intégrale ou la somme des GH dx : x*, effacez cela, & substituez simplement, *J'appelle b les ordonnées GH*: Omettez aussi le commencement de ce qui suit, savoir ces cinq mots, *D'où il est évident que*; car ce qui suit n'a point de connexion avec ce qui précède, comme je me le persuadois alors, pour y avoir été trop vite. Dans la même page, ligne 18 † à la place de, *comme b est à PZ, ou GH*, mettez, *comme b est à GT, ayant tiré BT parallèle à la tangente en H*; ou si on l'aime mieux, écrivez seulement, *comme la soutangente de la courbe BH est à l'abscisse BG*. Tout le reste va bien: Je défie le plus clairvoyant de m'y marquer la moindre faute.

Je répéterai ici en general la propriété très-remarquable, dont je n'avois fait mention que pour le cas particulier de mon Frère; ce qui sera voir en abrégé, en quoi consiste toute ma solution generale, & d'où mon Frère pourra juger si elle s'accorde avec la particulière: c'est que si GH, ou PZ, doit être non seulement comme une puissance donnée de PF, mais aussi composée de PF & de données en quelque manière que ce soit; alors on peut toujours trouver une même courbe, pour que $\int PZ dy$ fasse un plus grand, ou un plus petit; & pour que $\int (dx : PZ)$ fasse réciproquement un plus petit, ou un plus grand. Car j'ai trouvé [ce qui est admirable] que quand le sinus de l'angle mixtiligne BFP est à l'ordonnée GH, ou PZ, en raison constante, alors la courbe satisfait à l'un & à l'autre ††. Or comme j'ai fait voir dans les

Actes

* Ci-dessus pag. 818. lig. 12.

† Ligne 22.

†† Voyez N°. XCIII.

Actes de Leipzig du mois de Mai mille six cent quatre-vingts dix-sept, Num. LXXXIV cette propriété convient à la Courbe de la plus vite descente, dans toutes sortes d'hypothèses. Donc je puis dire avec raison, qu'ayant résolu généralement le Problème des *Brachystochrones*, j'ai aussi résolu celui des *Isopérimètres*, avant que mon *Frère* l'eût proposé.

Il en est de même de son autre Problème de la Cycloïde dont la portion, coupée par une verticale donnée, soit parcourue dans le moindre tems possible; puisque j'ai montré que la solution en suit immédiatement de ma *Synchrone*, & qu'elle n'en est qu'un cas particulier. Il est surprenant que mon *Frère* m'ayant voulu proposer deux des plus difficiles Problèmes qu'il pût imaginer, il soit justement tombé sur deux que j'avois déjà résolus; & que la solution s'en soit trouvée dans le même mois des *Actes* où il me les a proposés. C'est ce qui me fournit encore une réponse fort succincte aux deux questions qu'il me fait; savoir

1. *Que la première question sur les Isopérimètres est résolue par mes Brachystochrones, & en même tems qu'elles.*
2. *Que la seconde question sur la descente à la verticale donnée par la Cycloïde cherchée, est résolue immédiatement par ma Synchrone.*

Quant à l'autre partie du Problème des *Isopérimètres*, où l'on demande que PZ soit comme une puissance donnée de l'arc BF, [je ne fais si cette partie est jointe à l'autre copulativement, ou disjonctivement; les particules *vel.*, *ve.*, dont on se sert dans la proposition, paroissant n'exiger de moi que la solution de l'une ou de l'autre:] j'ai dit dans le Journal du 2 Décembre 1697, qu'on aura toujours par ma méthode une équation différentielle, sinon du premier, du moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la courbe. Comme je me contentois alors d'avoir trouvé la méthode qui y conduit, je ne me mis guère en peine d'en faire le calcul; mais depuis ayant eu le tems d'y penser, j'ai trouvé cette équation, $v = f(ddy: (dt^2 - dy^2))$, pour la détermination de la courbe, en prenant dt ou l'élément de la courbe pour constant: j'entends par v non seulement une puissance donnée de t , ou de l'arc BF, mais toute quantité composée de cet arc BF & de données. Si v est $= t$, la courbe se construit fort aisément par le moyen de la Logarithmique*.

Au reste je remarque, que c'est le paralogisme que mon *Frère* a cru voir dans ma méthode, qui a donné lieu aux deux premiers des trois articles de son Avis, & qu'il y a été un peu trop vite. Par le premier de ces Articles il s'engage à *déviner au juste l'analyse qui m'a conduit à la solution de son Problème sur les Isopérimètres*. Je sais bien qu'il pense que je me suis servi de la méthode des courbes qui se font par la pres-

sion

* Voyez N°. LXXXVIII & XCIII

Num. LXXXIV sion des fluides , que je considérois autrefois pour le calcul de la *Voilité*, comme composée de deux autres pressions collaterales, savoir d'horizontale & de verticale : qu'il dise de bonne foi , si je n'ai pas deviné au juste sa pensée. Mais il se trompe. Car quoique cette méthode [qui n'est qu'indirecte], employée adroitement , conduite aussi à la solution requise ; j'en ai pourtant d'autres , & même une directe, qui m'ont toutes fourni une même solution. Ajoutez qu'un si merveilleux accord n'est pas la seule preuve que j'aye de sa bonté , & que [s'il étoit besoin] je pourrois la prouver encore par une Démonstration Synthétique , faite à la manière des Anciens , & sur-tout à l'imitation de celle que PAPPUS a donnée pour prouver que le Cercle est la plus grande des figures isopérimètres. Je conseille donc fraternellement à mon *Frère* de retracter la gageure qu'il offre pour le premier Article de son Avis ; car il perdrait infailliblement. Il est de mon devoir de l'en avvertir.

Pour ce qui est du second article , j'espère qu'il aura assez de candeur pour le revoquer de son propre mouvement , après qu'il aura vu cet éclaircissement. Il n'y a rien à dire sur le troisième. Nous en jugerons quand il aura publié la solution qu'il nous promet depuis si long-temps.

Pour me conformer enfin à l'humeur de mon Inconnu *Nonnemo* , [je ne saurois le nommer autrement , puisqu'il ne veut pas se découvrir,] qui ne s'intéresse à l'avancement des Sciences, qu'autant qu'il y a de l'argent à gagner, je m'engage à perdre le quadruple de sa promesse , si avant la fin de cette année il me détermine géométriquement, [comme je promets de le faire, s'il ne le fait pas,] quelle *demi-ellipse*, de toutes celles qu'on peut décrire dans un plan vertical sur un même axe horizontal donné de grandeur, est parcourüe en moins de temps, supposé que le mobile commence son mouvement à une des extrémités de cet axe. Je permets que mon *Frère* le secoure *. J'ajoute à ce Problème les six autres que j'ai proposés dans le Journal du 26 Août 1697 †, dont Monsieur le Marquis de l'HOSPITAL a résolu les cinq derniers, pour les exemples particuliers que j'y donne ; mais je demande des solutions générales, sur tout pour les courbes dissemblables, dont il s'agit dans le quatrième & le cinquième. Voilà toute la Replique, que j'ai crû devoir faire à l'Avis de mon *Frère*.

* Voyez N°. LXXXVIII & CIII. Art. 4.

† Ci-dessus N°. LXXIX. Voyez N°. LXXX.



N°. LXXXV.

A V I S

DE MONSIEUR BERNOULLI,

Professeur des Mathématiques à Bâle,

Sur la Réponse de son Frère inserée dans le

Journal du 21 Avril 1698.

A VANT que de publier ma Réponse aux solutions de mon *Journal des Savans* Frère, je le prie de repasser tout de nouveau sur sa dernière, d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire ensuite si tout va bien; lui déclarant qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne seront plus écoutés.

Journal des Savans
1698. 202.
Journal du
26. Mai,
pag. 240,
Edit. de
Paris, pag.
377, Edit
de Holl.



N^o. LXXXVI.

REPONSE

DE MR. BERNOULLI,

Professeur de Groningue,

A l'Avis inseré dans le Journal du 26

Mai 1698.

Journal des Savans
1698. 24.
Journal du 23 Juin,
pag. 284,
Edit. de Paris, pag.
446, Edit. de Holl.

JE n'ai que faire de repasser sur mes solutions des Problèmes de mon Frère : Je sai qu'en penser, & mon temps sera assurément mieux employé à faire de nouvelles découvertes. C'est assez que mon Frère reconnoisse enfin que je possède la méthode, puisque c'est tout ce dont il s'agit ici ; la précipitation qu'il croit appercevoir dans ma réponse du 21 Avril dernier, ne faisant, ni pour, ni contre la validité de cette méthode. C'est donc en vain qu'on tâche de se tirer par tous ces détours ; & tandis que le *Nonnemo* refusera de se soumettre au jugement d'un tiers, comme il l'a refusé jusqu'ici, nonobstant toutes les assignations que je lui ai données ; tout le monde verra bien que c'est cause perdue pour lui. Cependant, pour couper pied à toutes ces chicanes, je soutiens

1. *Que j'ai exactement & légitimement resolu par mes Brachystochrones le Problème des Courbes, dont les ordonnées élevées à une puissance donnée font un plus grand.*

2. *Qu'entre toutes les Cycloïdes décrites d'une même origine, & sur une base horizontale, celle qui rencontre à angles droits une ligne droite (verticale,) est aussi celle par laquelle le mobile descend le plus vite à cette même ligne droite, en commençant son mouvement à l'origine commune des Cycloïdes.*

C'est là tout ce que ma partie m'a demandé. Ainsi, pour répondre juste, c'est à ces deux propositions précisément qu'elle doit répondre, oui

oui, ou non : c'est assez ; & se jeter sur le surplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ces deux Problèmes, c'est prendre le change, ou le vouloir donner, puisqu'il ne s'agit point du tout de ce surplus, quoi-
 Num. LXXXVI
 qu'il soit aussi parfaitement conforme à la vérité.

Au reste, puisque dans ce nouvel *Avis*, on ne fait aucune mention des Problèmes que j'ai proposés à mon *Nonnemo* dans ma *Réponse* du 21 Avril dernier ; j'en conclus qu'il n'ose risquer seulement le quart de ce que j'expose, c'est - à - dire, de tout ce que je lui ai laissé la liberté de parier. Je lui donne encore cinq semaines, à compter du jour que ceci paroitra, pour déclarer s'il veut accepter la gageure. Ces Problèmes sont à la portée de l'esprit humain, puisque je les ai résolus. Ainsi, s'il est brave, & aussi habile qu'il le veut paroître, il doit accepter ce défi, & ne pas reculer.



N°. LXXXVII.

EXTRAIT

D'UNE LETTRE

De Monsieur BERNOULLI de Bâle, *

Du 26 Juin 1698.

Contenant l'examen de la solution de ses Problèmes, insérée dans le Journal du
 Décembre 1697.

Comme cette Lettre étoit faite dès le temps que l'*Avis* de Monsieur BERNOULLI, inséré dans le *Journal* du 17 Février 1698, fut publié, il n'a pas jugé à propos d'y rien changer pour

NNNN 2

Journal des Savans
 1698. 30e.
Journal du
 4 Aout. p.
 355. Edit.
 de Paris,
 pag. 560,
 Edit. de
 Holl.
 l'autre

* A Mr. VARIGNON.

Num. LXXXVII *L'autre solution du 21 Avril; se reservant de répondre séparément à cette solution, qu'il dit être contraire à la première.*

Lorsque je proposai, dans les *Journaux de Leipzig*, à mon *Frère* quelques Problèmes de Géométrie, ce fut principalement dans la vûe, & dans l'espérance qu'il nous en donneroit un jour la solution. Car outre que je considérois, que nous pouvons avoir bonne part à la gloire de ceux qui se rendent habiles dans une Science, dont il n'y a pas long temps que nous leur avons donné les premières ouvertures; j'avois encore des raisons particulières pour souhaiter qu'il y pût réussir, & gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, Monsieur, pour vous faire comprendre le plaisir que j'ai eu à lire la solution de mes Problèmes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, & plus encore à y remarquer d'abord quelque conformité avec la mienne, laquelle me faisoit croire qu'il s'en étoit acquitté en habile homme. Mais que ce plaisir a duré peu! Il a été bien-tôt suivi du chagrin de voir mon attente frustrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonstances avec soin, j'ai trouvé que la solution de mon premier & principal Problème étoit très-défectueuse, & même fautive en tout sens; bien qu'en un cas elle nous fasse trouver par accident la pure vérité. Pour prévenir la surprise qu'un aveu de cette nature pourroit causer, il faut considérer qu'en raisonnant juste sur une hypothèse vraie, l'on arrive toujours à une conclusion vraie; qu'en raisonnant juste sur une hypothèse fautive, l'on arrive toujours à une conclusion fautive; (comme l'on voit par les démonstrations qu'on appelle *ad absurdum*;) mais qu'en raisonnant fautive sur une hypothèse fautive, il se peut faire quelquefois, qu'on arrive à une conclusion vraie; une fausseté, pour ainsi dire, corrigeant l'autre. C'est justement ce que je crois être arrivé à mon *Frère*, qui, selon toutes les apparences, s'est d'abord jetté dans un principe faux, d'où par le moyen d'un Sophisme, il a tiré une solution, qui par un bonheur extraordinaire, ne laisse pas d'être en partie véritable. Quoique je ne parle que par conjectures, [il seroit à souhaiter, pour en juger avec certitude, qu'il nous eut donné
l'ana-

l'analyse , ou du moins la démonstration de cette solution , comme j'ai fait celle de son Problème de la plus vite descente * :] je m'assure pourtant que ces conjectures sont tellement fortes , que vous ayant expliqué la manière dont je m'imagine qu'il s'y est pris , vous m'avouerez qu'il est comme impossible qu'il se soit servi d'une autre. Num.
LXXXVII

Mais quand il n'y auroit rien à redire à la solution en elle-même , je ne trouve pas encore qu'il puisse prétendre au prix qu'on y a joint ; d'autant qu'il n'a résolu le Problème , ni suivant mon intention , ni pleinement , & en toutes ses parties. Vous vous souvenez sans doute , Monsieur , que j'ai proposé mes Problèmes , à l'occasion de celui de mon *Frère* , dont j'avois donné la solution par des principes de pure Géométrie ; en sorte qu'il est visible que mon intention étoit d'inviter mes Lecteurs à les résoudre par la même voye. Mais il est très-probable , comme je le ferai voir , que mon *Frère* ne s'est servi dans cette recherche que d'un principe étranger & mécanique , qu'il devoit plutôt prouver que supposer ; c'est pourquoi l'on ne sauroit aucunement dire , qu'il ait agi suivant mon intention. A quoi j'ajoute , que celui qui aspire au prix d'un Problème , est obligé d'en donner une solution complète , qui satisfasse à tous les points de la question proposée. C'est ainsi que je fis à l'égard des Problèmes proposés par mon *Frère* dans son Programme de l'année passée : j'eus soin de les résoudre tous , & en toutes leurs parties , jusqu'à marquer même un endroit où mon *Frère* pouvoit s'être trompé , en prenant des courbes différentes pour une même \dagger . Et c'est ce qu'on ne peut pas dire de la solution qu'il nous donne à présent de mon Problème ; puisque , quand j'accorderois tout le reste , il ne l'a pas résolu dans la partie qui concerne l'arc BF , ou plutôt parce qu'il l'a résolu fausement , comme je dirai ci-après.

Mais entrons en matière , & voyons quelle peut avoir été l'analyse de mon *Frère*. Il dit qu'il avoit trouvé la solution du Pro-

N n n n n 3

blème ,

* Ci-dessus N°. LXXV. pag. 770.

† Ibid. pag. 777.

Num.
LXXXVII

blème, le même jour qu'il vint à sa connoissance ; & dans l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, au mois de Juin 1697, Art. 2, où il nous annonce sa solution, il restreint ce jour-là à trois minutes. Ce peu de temps me fit aussitôt soupçonner, qu'il ne l'avoit cherchée que par quelque principe étranger, ou indirect, & tel qu'il saute naturellement aux yeux ; sachant par expérience que celle qui se tire de la pure Géométrie est trop recherchée pour être ainsi trouvée tout d'un coup. Je remarquai aussi, qu'il n'y avoit rien qui se présentât plus naturellement à l'esprit, que ce principe de Méchanique : *Que les corps pesans descendent, jusqu'à ce que leur centre de gravité soit le plus bas qu'il soit possible* ; par exemple, qu'un lambeau de linge BTN soutenu par ses extrémités B, N, & rempli de quelque liqueur jusqu'à sa base BN, ou bien qu'une corde BTN chargée de differens poids dans tous les points de sa longueur, doit prendre une figure telle, que le centre de gravité de cette liqueur, ou de ces poids, descende plus bas qu'il ne feroit dans toute autre. Et c'est à mon avis le principe dont mon Frère s'est servi en cette rencontre. Voici comme il l'applique. Il suppose un linge B T N rempli jusqu'à la base BN d'une certaine liqueur, qu'il conçoit être de différente pesanteur spécifique, & telle que le poids de chaque filet PF soit comme GH divisé par BG ; d'où il suit, que faisant $BP = y$, $PF = x$, $BF = t$, & GH , ou PZ , $= p$; le poids du petit trapèze PC sera $p dy : x$ [je marque la division par : à la façon de Mr. LEIBNITZ, pour la commodité de l'Imprimeur, vous priant de rendre cette Lettre publique,] sa force mouvante, *momentum*, à l'égard de la ligne BN sera $= \frac{1}{2} p dy$; & par conséquent la somme de ces forces $= \int \frac{1}{2} p dy$; & cette somme devant déterminer la distance du centre de gravité de la liqueur à la base BN, laquelle par l'hypothèse est la plus grande qu'elle puisse être ; il conclut que $\frac{1}{2} \int p dy$, ou bien son double $\int p dy$, c'est-à-dire, la somme des trapèzes QZ, ou l'espace BZN est un *Maximum*, ce que la question demande. Il s'imagine donc que, pour en venir à bout, on n'a qu'à chercher la courbure d'un tel linge, suivant la méthode que j'ai autrefois pratiquée pour la Voilière ;

ce qui se fait ainsi. Par ma Théorie de la pression des fluides, le poids PC étant $p dy : x$, il pousse la portion du linge FC, suivant sa perpendiculaire FD, avec une force $FD = p dt : x$, laquelle par la doctrine de la communication des mouvemens se peut résoudre en horizontale $FE = p dx : x$, & en verticale $ED = p dy : x$. Que toutes ces petites forces verticales, qui agissent sur la partie du linge FT, soient ramassées dans le corps L, & toutes les horizontales en M: Que ces deux corps tendent les deux filets FI, TI, qui touchent le linge en F & T; il faudra les mêmes puissances en F & en T, pour soutenir les corps L & M, qu'il faut pour soutenir le linge FT, & parce que la puissance T demeure constamment la même, en quelque endroit du linge que l'on applique l'autre F, il s'ensuit que la partie de cette puissance, qui est employée à soutenir le corps $L = f(p dy : x)$ somme des forces verticales, qui agissent sur la partie du linge BF, jointe au corps $M = f(p dx : x)$ sommes des forces horizontales qui agissent sur la partie FT, & que la puissance T porte toute seule, fait une somme constante. Ceci étant posé, l'on peut considérer, suivant votre beau Théorème, dont je me sers en beaucoup de rencontres très-utilement, que le corps L est à la partie de la puissance T qui le soutient, c'est-à-dire, $f(p dy : x)$ à $1 - f(p dx : x)$, comme le sinus de l'angle FIT ou CFV au sinus de l'angle FIK ou FCV: c'est-à-dire, comme CV à FV, ou dx à dy : proportion qui se réduit justement à l'égalité que mon Frère donne pour la Courbe cherchée, qui est $dy = dx \frac{f(p dx : x)}{\sqrt{(1 - (f(p dx : x))^2)}}$ ou [en mettant b au lieu de $f(p dx : x)$] $b dx : \sqrt{(1 - b b)}$, & [dans le cas particulier de $p = x^m$] $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme l'on peut voir en ce que par la substitution de ces valeurs les termes de la proportion s'identifient (*).

Par un semblable raisonnement on peut prétendre de trouver
la

(*) On peut voir aussi le N°. XLVIII, pag. 483, Note (a,) en remarquant, que ce qui est là nommé p , est ici $p : x$.

Num. LXXXVII la Courbe BTN, dont $f(dt : x^m)$ est un *Maximum* ou un *Minimum*, en feignant que cette Courbe est représentée par une corde chargée dans tous les points F de petits poids réciproquement proportionnels à x^{m+1} ; par ce moyen le poids de la portion FC deviendra $dt : x^{m+1}$, la force de ce poids à l'égard de la droite BN, $dt : x^m$, & la somme de ces forces, qui doit marquer la distance du centre de gravité de tous les poids à la droite BN [& par conséquent un *Maximum*] $f(dt : x^m)$, comme il est requis. Le calcul en est le même que ci-dessus; on doit seulement remarquer, que le corps M étant nul en cette rencontre, la puissance T qui est constante, & que l'on peut nommer $1 : m$, est toute employée à soutenir le corps L ou $f(dt : x^{m+1})$; de sorte que l'on a cette proportion, $f(dt : x^{m+1}) : \frac{1}{m} = dx : dy$. D'où

l'on tire encore l'égalité précédente $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme mon Frère l'a trouvée (6).

Vous voyez, Monsieur, quelle peut avoir été l'analyse qui l'a conduit à la solution qu'il nous donne de mon Problème. Il ne faut pas être fort attentif, pour y découvrir deux défauts considérables. Il suppose d'abord, sans fondement, que s'il y a plusieurs figures Isopérimètres chargées de poids en certaine proportion par dedans, ou autour de leurs circonférences, le centre de gravité de ces poids est plus éloigné de l'axe dans celle que les poids auroient

(6) $dx : dy = m f(dt : x^{m+1})$, x^{m+1} , soit $dt dx ddx : (dt^2 - dx^2)$ en différentiant se réduit à $(dy ddx - dx ddy) : dy^2 = m dt : x^{m+1}$; ou, $\sqrt{(dt^2 - dx^2)} = m dx : x^{m+1}$, dont l'intégrale est $-dt : \sqrt{(dt^2 - dx^2)} = -x^m$ ou $(dx^2 + dy^2) : dy^2 = x^{2m}$, [mettant pour ddy sa valeur $-dx ddx : dy$, qui résulte de $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constante] à $dt^2 ddx : dy^3 = m dt :$ d'où l'on tire $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$

roient donné à un linge ou à une corde, que dans toutes les autres. J'avoué que lorsqu'il y a toujours une même quantité de poids, qui agit successivement sur quelque matière flexible que ce soit, ces poids doivent se ranger de telle sorte que leur centre de gravité se trouve le plus bas qu'il soit possible; mais dans la supposition précédente, la quantité des poids n'est pas la même dans les différentes figures Isopérimètres; ou quand il y en auroit une même quantité, il est impossible que ces poids faisant prendre successivement à la matière fluide des figures différentes, puissent acquérir ou retenir d'eux mêmes cette proportion ou disposition qu'on leur suppose. Soient, par exemple, deux figures Isopérimètres BTN & $Bb_{1n}N$, dont celle-ci renferme un espace $Bb_{1n}N$ plus grand que BTN de tout l'espace $Bb_{1n}N$, puisqu'on fait que les Isopérimètres ne sont pas égales; qu'on conçoive à la place de la figure BTN un linge rempli jusqu'à la base BN de quelque liqueur ordinaire, & telle que le poids de chaque filet PF soit proportionel à la longueur PF , c'est le seul cas possible dans la nature; que cette liqueur agissant ensuite librement sur le linge, lui fasse prendre la figure $Bb_{1n}N$: Il est clair, qu'après cela, elle n'ira plus qu'en b_{1n} , & que par conséquent le centre de gravité de l'espace b_{1n} doit bien être plus bas que celui de l'espace BN ; mais il n'est nullement évident qu'ajoutant par dessus celui-là la portion $Bb_{1n}N$, le centre de gravité de tout l'espace $Bb_{1n}N$ soit encore plus bas que celui de BTN , ou de telle autre figure Isopérimètre qu'on voudra. Je soutiens même que cela est faux, & que la figure d'entre les Isopérimètres, dont le centre de gravité est le plus éloigné de l'axe, n'est pas celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre que j'enveloppe dans cette anagramme, pour donner le loisir à mon Frère de la chercher aussi, s'il veut persuader à nos Lecteurs qu'il possède la véritable méthode pour ces Problèmes: $a^{12} b^2 c^3 e^2 g^2 hi^7 l^6 m^3 n^6 o^4 p^7 qr^2 s^2 t^7 v^4$. (*).

Jac. Bernoulli Opera.

O o o o o

Ce-

(*) Le sens de cette Anagramme est celui-ci: *Ille nempe* [figura] *qua signum*

Num.
LXXXVII

Num. LXXXVII. Cependant quoi que le centre de gravité de l'espace absolu ne soit pas le plus bas dans la figure du linge, on peut du moins conclure que le centre de cette portion, qui est remplie par la masse liquide, doit être plus bas que le centre d'une portion égale qu'on pourroit couper depuis le sommet de telle autre figure isopérimètre qu'on voudra; comme effectivement je le trouve par mon analyse: marque indubitable de sa bonté & de sa justesse. Et c'est avec cette limitation qu'il faut entendre ce que j'ai dit du centre de gravité de la Courbe élastique, dans les *Actes de Leipsic* de l'an 1694. pag. 276. *

Ibid. 31^e. L'autre erreur qui se trouve dans l'analyse précédente de mon Journal du Frère, n'est pas moins considérable. Elle consiste, en ce qu'il 11 Aoult, pag. 361, Edit. de Paris, pag. 570. Edit. de Holl. marque la distance du centre de gravité des poids par la somme de leurs forces; & chacun fait que cette distance se détermine par la somme des forces appliquée à la somme des poids, & qu'ainsi elle ne peut se proportionner à la seule somme des forces, que lorsque la somme des poids demeure constamment la même; ce qui n'arrive pas ici, comme je viens de le remarquer.

Voilà donc deux faussetés assez palpables dans un même raisonnement; mais aussi deux faussetés, dont l'une redresse l'autre si heureusement, qu'elles font trouver dans quelques cas la véritable solution; quoique cela ne puisse être que l'effet d'un pur hazard, qui ne donne pas plus de droit à la gloire d'avoir réussi, qu'auroit celui, qui pour soutenir qu'un caillou est de la pierre, le prouveroit par ce raisonnement: *Tout homme est pierre; Tous caillou est homme; Donc tout caillou est pierre.* Marque de cela, c'est que l'on peut proposer tel Problème, où l'une des faussetés venant à cesser, l'autre nous conduiroit à une conclusion nécessairement fausse: comme si l'on proposoit de trouver entre une infinité de Courbes Isopérimètres BTN, B₁N, &c. [qui seroient toutes chargées dans leurs circonférences, en sorte que le poids

num anguli tangentis & applicatae cubae applicatae proportionalem habet: par ou l'on désigne la courbe dont l'é-

quation est $dy = x^3 dx: \sqrt{(a^6 - x^6)}$.
* N°. LVIII. pag. 599.

N^o 81.

Fig. A.

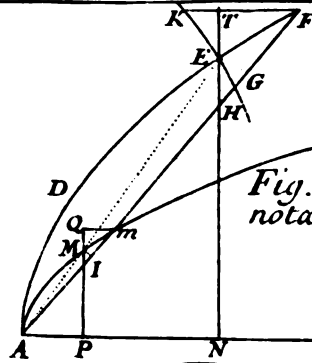
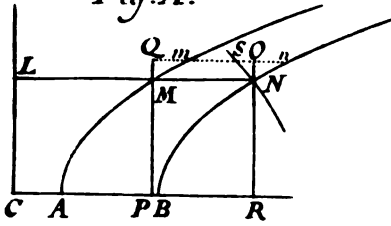


Fig. B.
nota a.

Fig. B.
nota g.

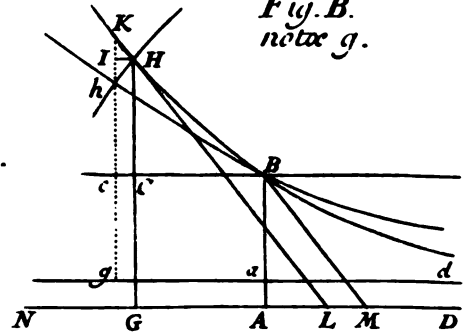


Fig. 1.

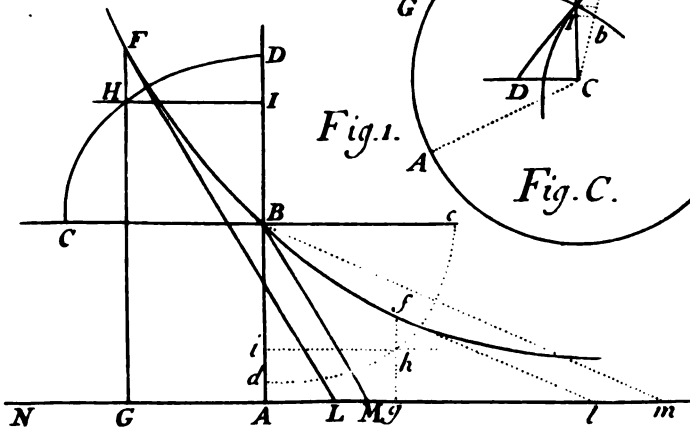


Fig. C.

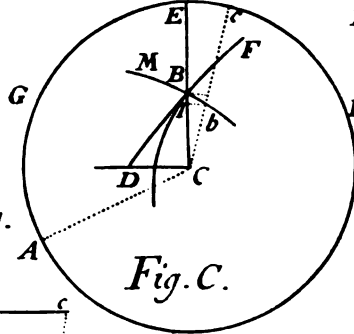
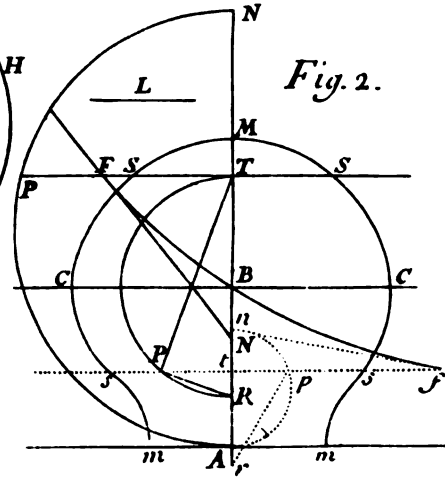
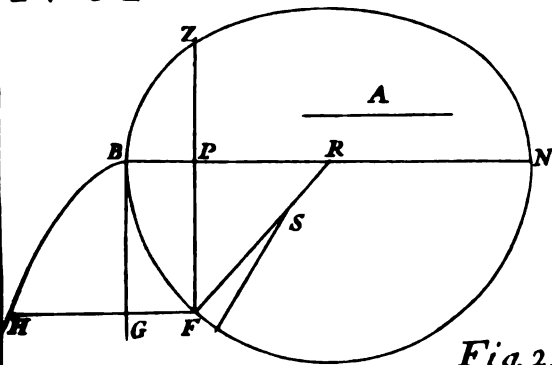


Fig. 2.



N^o 82.

Fig. 1.



N^o 87.

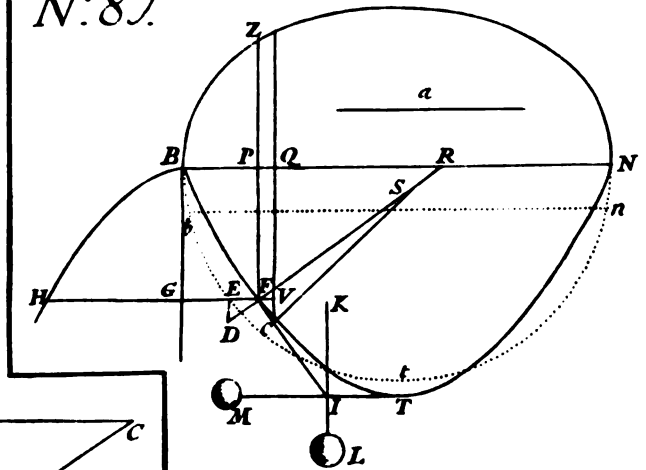
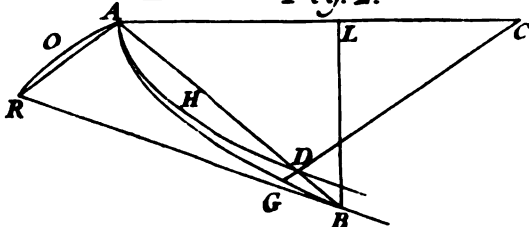


Fig. 2.



poids de chaque portion FC fût comme la portion correspondante de la base PQ] celle qui a le centre de gravité de ces poids le plus éloigné de l'axe; car en ce cas on trouve que la chaînette est une parabole, ainsi que je l'ai dit dans les *Actes* de 1691 au mois de Juin, pag. 288 †, au lieu que la courbe cherchée doit être un cercle; parce que la somme des poids étant ici comme la somme des PQ ou comme la base BN, & par conséquent la même dans toutes les Courbes Isopérimètres, la distance du centre de gravité des poids à la base est véritablement proportionnelle à la somme de leurs forces, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2} \int x dy$, laquelle on fait n'être la plus grande que dans le Cercle.

Num.
LXXXVII

Mais quoiqu'il en soit de tout ceci, il est sûr que la solution de mon *Frère* généralement parlant est fautive; sur tout, que celle qui regarde l'arc BC, l'est même dans tous les cas: ce qui me confirme entièrement dans la persuasion où je suis, que l'analyse, qui l'y a conduit, ne peut être différente de celle que j'ai rapportée, & qui fait trouver si justement sa solution. Tout le monde sait, qu'il est assez ordinaire qu'on arrive à une même vérité par différentes voyes; parce que la vérité n'est qu'une, & toujours simple: mais le faux étant infini en nombre, il est moralement impossible qu'on arrive à une même fausseté par deux raisonnemens aussi plausibles & aussi apparens que celui-là. Et c'est cette considération qui a donné lieu au premier des trois articles du mois de Février dernier de ce Journal où je me suis engagé à deviner l'analyse de mon *Frère* *. Vous jugerez, Monsieur, si je puis avoir bien rencontré.

Au reste, il y auroit lieu de s'étonner, si une analyse, aussi défectueuse que celle-là, n'étoit pas sujette à plusieurs contradictions: Aussi l'est-elle à plus d'une. Premièrement j'observe que, si au lieu de se représenter la Courbe, dont $\int x^m dy$ est un *Maximum*, comme un linge, & celle dont $\int (dx : x^m)$ est un *Minimum*, comme une corde, l'on peut tourner la chose, en se servant de la con-

O o o o o 2

sidéra-

† N°. XLII. pag. 449

* Ci-dessus N°. LXXXIII, pag. 822

Num.
LXXXVII

sidération de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci; & alors on trouvera des solutions très-differentes de celles qu'on a trouvées. J'observe aussi que la raison du choix de mon *Frère*, qui a préféré le linge pour la première, a été, sans doute, parce qu'il a vu que, s'il faisoit autrement, la solution qu'il trouveroit ne l'accommoderoit pas pour le cas de $m = 1$, auquel on fait que la courbe doit être un cercle. Je ne parle point ici de ce que suivant cette analyse, la qualité $f(ds : x^m)$ de la courbe cherchée devoit plutôt être un *plus grand*, qu'un *plus petit*; je remarque seulement que cette courbe se peut encore trouver, si on la considère comme un rayon de lumière, qui passe par un milieu inégalement transparent, & dont la rareté à la hauteur BG est comme GH; mais qu'elle ne s'accorde avec celle qui se trouve par la considération de la corde, que lorsque GH est comme une simple puissance de BG; ce qui est peut-être cause que mon *Frère*, après avoir donné la Courbe dont $spdy$ est un *plus grand*, généralement pour tous les rapports de GH à GB, ou de p à x , n'ose faire la même chose de $f(ds : p)$, & qu'il se contente de nous dire simplement quelle est la courbe dont $f(ds : x^m)$ est un *plus petit*; bien que cette précaution ait été assez superflue, & qu'il eût pu nous donner hardiment tout ce qu'il a trouvé sur cette dernière supposition, l'analyse qui s'y fonde étant tout autrement évidente que celle qui prend la courbe pour une corde. Il faut cependant avouer qu'elle n'est pas plus propre que les autres pour faire trouver la courbe dont $f^m dy$ est un *plus grand*, ou un *plus petit*; puisque l'on conçoit aisément que les longueurs BF de différentes Isopérimètres, qui correspondent à une même hauteur BG, étant différentes, il faudroit que les GH qui y ont rapport, & qui marquent la rareté du milieu, fussent aussi différentes à la même hauteur BG; ce qui est absurde. Enfin, Monsieur, cela est si clair, qu'il n'y a pas lieu de douter que mon *Frère* n'ait bien vu & bien connu tout cela. Mais le moyen d'y remédier? Il s'étoit déjà précipité de publier par tout qu'il avoit trouvé la véritable solution, & il n'y avoit plus moyen de s'en dédire: le
 temps

temps pressoit, le terme alloit expirer, & il n'en avoit pas trouvé de meilleure. Il falloit donc publier celle qu'on avoit, malgré l'inévidence & toutes les contradictions qui s'y rencontrent. Num. LXXXVII

Deux autres Anagrammes, dont peut-être on donnera un jour la clef.

$a^{44} b^3 c^{25} d^{20} e^{65} f^3 g^4 h^2 i^{58} l^{21} m^{32} n^{32} o^{17} p^{19} q^8 r^{30} s^{39} t^{42} v^{54} x.$

$a^{45} b^3 c^{16} d^{10} e^{50} f^3 g^7 h^2 i^{40} l^7 m^{15} n^{33} o^7 p^{13} q^4 r^{18} s^{33} t^{40} u^{30} x^4.$

NB. Touchant le sens de ces deux Anagrammes, voiez le N°. CIII, Articles 4 & 5.



N°. LXXXVIII.

A V I S

SUR LA REPONSE

*Insérée dans le Journal du 23 Juin
dernier 1698.*

JE n'ai jamais cru que mon *Frère* possédât la véritable méthode pour le Problème des Isopérimètres; mais maintenant j'en doute plus que jamais, vû la difficulté qu'il fait de repasser sur ses solutions. Car enfin pourquoi nous refuser une chose si-tôt faite, si ce n'est qu'il ne se fie pas lui-même à sa méthode? S'il n'a employé que trois minutes de temps, comme il le dit, pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le mystère, il y a apparence que la revue de ce qu'il a trouvé, ne lui en coûtera pas Ibid.
pag. 364
Ed. de Paris, & p. 575. Edit. de Holl.

O o o o o 3

pas

Num.
LXXXVIII.

pas davantage: d'ailleurs quand il y en mettroit le double, est-ce que six minutes, employées à cet examen, diminueroient tant le nombre de ses nouvelles découvertes? Mais quelque peu de peine que cela lui doive donner, je veux bien encore lui faire grace de plus de la moitié, en le priant seulement de retoucher ce qui concerne l'arc BF, ou du moins de nous dire, s'il n'y a point de faute d'impression dans son égalité $dv = ddy: (dt^2 - dy^2)$. Il fait que cela fait *une partie de ce que j'ai demandé*, [quoiqu'il le dissimule,] & qu'ainsi il est indispensablement obligé de reformer sa solution, si elle est fausse, comme je le soutiens, à moins qu'il ne veuille se désister de ses prétentions. Autrement, sur quoi veut-il que nos Lecteurs fondent leur jugement, n'ayant vu de lui ni analyse ni démonstration? [parce que peut-être il n'en ose donner.] Je déclare, que bien loin de refuser dans tout ce différend l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ, je veux encore accepter de bon cœur celui de Mr. le Marquis de L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, comme de tous les plus excellens Géomètres de ce temps; pourvu qu'ils veuillent surcoir leur jugement, jusqu'à ce que j'aie parlé à mon tour, & que j'aie achevé de répondre aux deux solutions que mon Frère nous a données dans le Journal.

Je ne dis rien des nouveaux Problèmes par lesquels mon Frère tâche de faire diversion dans l'esprit des Lecteurs; tant parce que n'ayant pas encore satisfaction sur le mien, je ne m'y crois pas obligé, que parce qu'il semble n'en vouloir proprement qu'à son *Nonnemo*. Je ne fais si celui-ci nous en donnera un jour la solution; mais je fais bien qu'il est homme à le faire, & peut-être l'a-t-il fait déjà. Du moins, si l'on est sage, on en demeurera là, & on ne le poussera pas davantage.



N^o. LXXIX.

EXTRAIT

D'UNE LETTRE

*De Monsieur BERNOULLI, Professeur
de Groningue, du 22 Aoust 1698,
Pour servir de Réponse à celle de son Frère
Professeur à Bâle, inserée dans les
Journaux des 4 & 11 du
même mois.*

Comme les dates pourroient être ici de quelque considération, *M. V.* * Journal des Savans 1698. 40^e. Journal du 8. Dec.
croit devoir avertir qu'il a reçu cette Lettre dès le 2 Septembre dernier, & que les vacances du Journal n'ont pas permis qu'elle parût plutôt.

Il est bien surprenant, qu'en voulant ménager une personne, il se trouve qu'on l'offense. Je croyois n'avoir affaire qu'à un Inconnu; je prenois toutes les mesures possibles pour ne point donner sujet à mon Frère de se plaindre de moi; je tâchois de conserver l'union & la charité qui doit être entre deux frères; & je me trouve malheureusement trompé: l'extrait de sa Lettre, que je reçus hier, me faisant voir, que tant de mesures & tant d'égards pour lui n'ont pu l'empêcher de s'intéresser de toute la force pour cet Inconnu, & de prendre parti contre moi, mais d'une manière si chaude & si violente, qu'il n'y a personne qui ne voye qu'au lieu de cette louable émulation dont je me flattois,
ce

* VARIGNON.

Num. LXXXIX ce n'est qu'une aveugle envie qui le conduit. C'en est fait, son imagination plus forte & plus vive que celle de ces prétendus forciers, qui croient se trouver corporellement au Sabbat, l'a séduit; il se laisse entraîner au torrent de ses vaines conjectures; en un mot, il ne paroît plus donner cours à la raison, ni même en état d'entendre tout ce que je lui en pourrois alleguer. Je l'abandonne donc à ses passions; & je me contenterai de faire voir au Lecteur l'absurdité de ses attaques.

Mon *Frère* avouë qu'il n'a point encore vû mon analyse; cependant il la refute: étrange manière de refuter! Il s'en forge d'abord une; il me l'attribuë à faux; il y raisonne à perte de vuë; il en déduit des absurdités, des contradictions, & je ne sai quelles niaiseries: il n'en fait pas davantage; il est entêté; il me les impute toutes; ce sont des suites de ma prétenduë Analyse; il en parle dans tout le cours de sa Lettre positivement comme de la mienne, & avec une assurance inconcevable. Quelle témérité! Quelle impudence! de me vouloir imputer à outrage une analyse, qui n'est point la mienne, dont je me défens, & que je désapprouve moi-même. Que veut-il davantage? Voici toute la force de son attaque abattue: Car je lui nie absolument, que l'analyse, qu'il entreprend de refuter, soit la mienne. Il me semble que j'ai été meilleur prophète que lui, en ce qu'au XV^e Journal, pag. 176 * j'ai si bien deviné ses conjectures; mais d'où vient qu'il n'a pas lû cet endroit-là? J'y dis expressément que ma Méthode est directe, géométrique, & telle qu'il la demande; que celle des fluides employée adroitement [& non comme mon *Frère* l'employe] conduit à la même & véritable solution. En vérité, s'il avoit lû sans prévention tout ce que je dis en cet endroit, il se seroit épargné la peine d'écrire tout son galimatias, lequel ne me touche aucunement, & qui n'est pas plus contre moi que contre le grand Turc. Je passe volontiers sous le silence toutes ses grosses expressions, sûr qu'il s'en repentira dès qu'il reviendra à soi. C'est pourquoi je ne m'arrêterai qu'à ce qui m'oblige indispensablement d'y répondre.

On feroit bien mieux de se taire, que de prétendre nous avoir donné quelque ouverture dans cette science. Je crois que ces ouvertures se sont données mutuellement; & si nous voulions entrer en compte, je ne fais à qui on seroit en reste. Je prie seulement mon *Frère* de se ressouvenir à qui il est redevable de la première Théorie des chainettes, de laquelle il se sert présentement en Maître dans toute sa Lettre: les gens qui le savent sauront qu'en penser; ces sortes de reproches sentent trop la vanité.

Mon

* N^o. LXXXIV. pag. 825. 826.

Mon Frère dit, pag. 830. que le plaisir qu'il avoit eu d'abord, de voir Num. LXXXIX
quelque conformité entre ma solution & la sienne, a été bien-tôt suivi du
chagrin de voir son attente frustrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les cir-
constances avec soin, il a trouvé que la solution de son premier & principal
Problème étoit très-défectueuse.

S'il a eu du plaisir, plutôt que du chagrin, de voir quelque confor-
mité entre ma solution de son premier Problème & la sienne, que ne
me rend-il donc justice sur ma solution de son dernier Problème, que
j'ai résolu infiniment au delà de sa condition, & même dans les cas qu'il
tenoit lui-même pour désespérés? Que ne témoigne-t-il la joye qu'il
en a? Qui est-ce qui le rend si muet? Est-ce l'excès du plaisir qui
lui lie la langue?

Il est ridicule que mon Frère se réserve, pag. 831, dans son inten-
tion des conditions qu'il n'a pas exprimées, savoir que son intention étoit
d'inviter les Lecteurs à résoudre ses Problèmes, par des principes de pure
Géométrie. Pourquoi n'a-t-il pas ajouté cette condition dès le commen-
cement? Peut-être pour avoir matière de chicaner ensuite. Si la que-
stion est légitimement résolue, que lui importe de quelle méthode on se
soit servi? Il a exigé une Solution & non pas une Méthode: ce n'est
pas que je n'aye une méthode directe & purement géométrique, qu'il
verra un jour; mais il suffit présentement qu'on voye la foiblesse de
cette reservation mentale, que les honnêtes gens abhorrentont toujours
comme des artifices frauduleux. S'il est permis d'en user ainsi, je prou-
verai sans peine que la solution de ma Brachystochrone, donnée par
Monsieur NEWTON, n'est pas légitime; parce qu'il n'y a ni démon-
stration, ni analyse, parce qu'il l'a tirée peut-être d'un principe mécha-
nique. Il ne me sera pas difficile non plus de faire des conjectures, de
forger une analyse fautive; enfin, de démontrer, par l'argument de mon
Frère, que Monsieur NEWTON n'a rencontré la vérité que par le
moyen de deux faussetés qui se redressent mutuellement. Mais je suis
de trop bonne foi, pour imputer de telles pauvretés à personne.

Sur la fin de la même page, mon Frère se vante qu'il a résolu tous
mes Problèmes, & en toutes leurs parties, jusqu'à marquer même un endroit
où je pouvois m'être trompé, en prenant des courbes différentes pour une
même. Je le prie de me dire cet endroit, & de me marquer, non où je
puis m'être trompé, mais où je me suis trompé en effet. De plus il
n'a pas trop à se glorifier, d'avoir satisfait à tous mes Problèmes. Dans
les Actes de Leipzig, page 216. an. 1697 (*), il confesse ingénûment,
que sa solution d'un de mes Problèmes, implique une manifeste con-

Jac. Bernoulli Opera.

P p p p p

tradic-

(*) N°. LXXV. pag. 777.

Num. LXXXIX tradition : cela s'appelle-t-il refoudre ? S'il n'a point d'autre solution, je lui en donnerai une légitime, s'il la souhaite, & même par une courbe géométrique; ou bien qu'il la demande à Monsieur LEIBNITZ, à qui je l'ai communiquée il y a plus d'un an, & qui l'a trouvée fort bonne.

Page 833. Mon Frère s'arroge à tort la Théorie de la pression des fluides suivant la perpendiculaire. Il y a long-temps qu'elle a été connue de Messieurs MARIOTTE, WALLIS, NEWTON, & d'autres, qui ont écrit sur cette matière; mais il lui arrive fort souvent de venir *post festum* : C'est ainsi qu'il croyoit être le premier qui pût démontrer, que le Cercle est la plus grande figure de ses isopérimètres, ignorant que PAPPUS l'a déjà fait très géométriquement. Il se regardoit aussi comme le premier inventeur des Théorèmes pour l'expression des développées dans les Spirales, qu'il se persuadoit n'avoir été inconnus, & long-tems après que Monsieur le Marquis de L'HOSPITAL les avoit rendus publics, &c.

Ibid. 410. Dans l'autre membre de sa Lettre, page 837, mon Frère soutient : qu'il est moralement impossible qu'on arrive à une même fausseté, par deux raisonnemens aussi plausibles & aussi apparens que les siens. Mais pourquoi n'est-il pas aussi moralement impossible, que je sois arrivé par deux raisonnemens faux à une même vérité ? C'est que le premier l'accommode, pour fortifier ses conjectures.

Journal du
15 Dec.
pag. 481,
Edit. de
Paris, pag.
765, Edit.
de Holl.

Je remarque dans ce qui suit, un paralogisme semblable à celui-ci : Tout caillou est pierre ; Donc toute pierre est caillou : lors qu'il dit que, si au lieu de se représenter la courbe dont $f(x^m)dy$ est un Maximum, comme un linge ; & celle dont $f(dt : x^m)$ est un Minimum comme une corde, l'on peut tourner la chose, en se servant de la considération de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci ; Car il est bien vrai que si $f(dt : x^m)$ est un Minimum, aussi $f(x^m)dy$ sera toujours un Maximum : mais la converse ne s'ensuit aucunement ; puisque j'ai trouvé par mes analyses directes & indirectes, qu'il y a des courbes où $f(x^m)dy$ fait un plus grand, sans que pour cela $f(dt : x^m)$ fasse un plus petit. Ce paralogisme de mon Frère vient de ce qu'il n'a pas pris garde, que son Problème des isopérimètres souffre plusieurs solutions ; & c'est pour la seconde fois qu'il choppe contre ce même écueil : Mr. LEIBNITZ lui ayant très bien objecté la même faute, qu'il a déjà commise, touchant la courbe Paracentrique, lorsqu'il croyoit qu'il n'y en avoit qu'une. C'est ce qui m'a fait prendre la précaution de dire en general, pag. 824, qu'on peut toujours trouver une même courbe, pour que $fGHdy$ fasse un plus grand, ou un plus petit, & pour que $f(dt : GH)$ fasse réciproquement un plus petit, ou un plus grand : pour marquer que mes Brachystochrones satisfont

toujours aux Isopérimètres ; mais qu'il y a d'autres courbes qui y satisfont aussi, lesquelles ne sont pas des Brachystochrones. Nom. LXXXIX

Au commencement de la page 838, il semble que mon *Frère* soit dans la pensée, qu'en faisant $m = 1$, auquel cas on fait que la courbe doit être un cercle pour $\int x dy$ *Maximum*, elle ne le soit pas de même pour $\int (dt : x)$ *Minimum*. Cependant je puis prouver par une démonstration synthétique, faite à la manière des Anciens, sans faire attention ni à son linge ni à sa corde, qu'effectivement le cercle a cette propriété ; que $\int (dt : x)$ soit un *Minimum*. Je ne saurois donc pénétrer ce qu'il veut dire par la raison du choix, que je dois avoir tenu dans cette recherche ; puisque c'est une même courbe considérée de l'une & de l'autre façon : c'est-à-dire, posant que $\int x dy$ soit un *Maximum*, ou que $\int (dt : x)$ soit un *Minimum*. Je ne comprends rien non plus dans tout ce qu'il dit de son linge & de sa corde ; & je puis dire en conscience qu'en découvrant cette belle convenance entre $\int (dt : GH)$ *Maximum*, & $\int GH dy$ *Minimum*, ou entre les Problèmes des Brachystochrones & Isochrones, je n'ai pas songé au chiffon de linge & à la corde, dont il fait tant de bruit, qu'aux Lapons. Il devoit donc reconnoître par cette seule découverte que je fis, que ce n'est ni par hasard, ni par la supposition de deux faussetés, que j'ai rencontré la vérité ; mais que c'est plutôt parce que j'en possède la véritable méthode ; & que si dans mon premier écrit il se glissa une faute légère, que je corrigeai si aisément dans le second, ce n'étoit tout au plus qu'une faute de précipitation, qui laisse la méthode sans atteinte. Si je ne proposai cette propriété dans le premier écrit, que pour la simple puissance de BG, c'est parce qu'il ne s'agissoit que de répondre au Problème de mon *Frère*, & qu'il n'étoit pas question de pousser ma découverte plus avant. Mais s'il avoit voulu lire ce que je dis à la page 818, où je la donne pour générale, il auroit pû se passer de son injuste *peut-être* & suspendre le jugement qu'il tire de ses fausses conjectures.

Voilà, Monsieur, tout ce que j'ai pû remarquer à la hâte dans la Lettre de mon *Frère* : touchons un peu à l'avis qui la suit immédiatement. Il me reproche d'abord que je me vante de n'avoir employé que trois minutes de temps pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le mystère. Qu'il prenne la peine de réfléchir un peu sur ce que ces Problèmes, publiés dans les *Actes de Leipsic* au mois de *Mai* 1697, ne font venus à ma connoissance que sur la fin du même mois ; que ma Lettre assez longue, écrite à l'Auteur de l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, s'y trouve insérée au mois de *Juin* suivant ; que l'Auteur l'a retardée, à cause de la Figure qu'il y falloit faire graver ; & que sans cela ma Lettre auroit paru dès le même mois de *Mai*, ainsi que l'Auteur

Num. LXXXIX lui-même me l'a écrit : combien de temps me restoit-il donc , pour y avoir pû penser ? Si mon *Frère* veut considérer tout cela , il trouvera , sans doute , qu'il n'y a point de gasconade si palpable qu'il semble penser dans ce que j'ai dit ; du moins il verra qu'il s'en faut bien que je n'y aye employé les trois mois qu'il m'avoit accordés. Mais ce sont choses différentes , que d'inventer une méthode , & la mettre en pratique , ou d'en faire le calcul : il est quelquefois facile de trouver une méthode , dont l'analyse devient pourtant très-pénible & très-prolixé. Je dis donc à mon *Frère* que j'ai bien repassé , & plus d'une fois , sur ma méthode , parce qu'il s'agit là d'examiner s'il n'y a point de faux raisonnement , mais de repasser sur la solution ou sur l'analyse , comme c'est l'affaire d'un écolier que d'examiner s'il n'y a point de faute de calcul , il n'est pas besoin que je m'en mette en peine , me fiant entièrement à ma méthode ; outre que je soutiens , comme tout le monde le peut voir , que ce qui concerne l'arc BF n'est qu'une partie disjonctive , & non copulative de ce qu'il a demandé. Mais qu'il examine bien sa solution ; peut-être que si elle est différente de la mienne , [ce que je ne fais pas encore] c'est elle qui est fautive : il n'est pas infallible. Il commence dans cet Avis d'admettre tout ; il n'y a plus que l'égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ qui lui fasse de la peine. Si par hasard sa solution touchant la simple puissance de l'arc BF ou de t , consiste en cette égalité $a^m y = t^{m+1}$, laquelle donneroit une construction de la courbe fort aisée ; qu'il sache que sa solution seroit absolument fautive. Quoi qu'il en soit , j'ai bien de la joye de ce qu'enfin il veut bien accepter l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ ; je suis aussi content de celui de Mr. le *Marquis de L'HOSPITAL* , & de celui de Mr. NEWTON : s'il avoit accepté plutôt cet expédient , il auroit pû éviter bien d'inutiles débats. Il y a long-temps que j'ai envoyé en dépôt à Mr. LEIBNITZ toutes mes solutions avec mon analyse , * & mes méthodes tant directes qu'indirectes , lesquelles il a fort approuvées & louées ; bien loin d'y trouver ces sortes de faussetés , qui en se redressant font rencontrer la vérité. Je prie donc mon *Frère* d'envoyer aussi incessamment les siennes , tant méthode que solution & analyse , à Mr. LEIBNITZ , lequel les rendra publiques toutes à la fois , afin que nos Lecteurs , sur tout Messieurs nos Juges , puissent les confronter , les examiner , & en juger. Demeurons-en là donc , & que mon *Frère* se taise jusqu'à ce que nos solutions & nos méthodes aient paru : aussi n'accepterai-je plus rien de lui , à moins qu'il n'ait livré les siennes à Mr. LEIBNITZ , & qu'elles soient publiées avec les miennes en même temps , & en même lieu. La justice demande aussi que son ami inconnu remette le prix entre les

mains

* Voyez le N^o.

mains de quelqu'un de nos Juges; & il le fera, s'il est homme de bien & d'honneur. J'ai déjà dit, & je le dis encore, que je n'y prétends rien; mais les pauvres y prétendent. Num. LXXXIX

Quant aux nouveaux Problèmes, que je lui ai proposés, mon *Frère* dit que cet Inconnu est homme à les résoudre, & me conseille [si je suis sage] d'en demeurer là, & de ne le pas pousser davantage. Je suis obligé à mon *Frère* de ce conseil: mais il me permettra de dire, que cet Inconnu [quel qu'il soit] est très peu sage de n'avoir pas accepté un défi aussi avantageux pour lui que le mien, s'il est vrai qu'il soit si habile homme, & qu'il en ait déjà trouvé les solutions, comme mon *Frère* nous l'assure.

P. S. Du 4 Octobre, reçu entre le 14 & le 20.

Comme je n'ai jamais soutenu, que la figure d'entre les Isopérimètres, dont le centre de gravité est le plus éloigné de l'axe, & celle d'un linge rempli de liqueur, soient une même figure; Je ne vois pas pourquoi mon *Frère* s'écrie en l'air, & s'efforce tant pour prouver leur diversité: cependant il ne m'a pas falu tant de loisir pour trouver celle-là; la voici cachée [à l'exemple de mon *Frère*] sous cette anagramme.

$a^8 b^6 c^2 d^3 e^8 i^7 l^2 m^2 o^2 p^2 q^3 r^5 s^7 t^6 v^9 x^2 y.$ †

Dont je donnerai la clef après la décision de nôtre differend, quand mon *Frère* aura donné la sienne. Pour cet effet, [à moins que mon *Frère* ne veuille faire trainer ce procès en longueur,] il me semble qu'il vaudroit mieux le remettre au seul arbitrage de Mr. LEIBNITZ, ou d'un autre, si ce grand homme, tout désintéressé qu'il est, lui paroît suspect. Pour lui ôter toute excuse & tout soupçon de collusion, je m'engage à deux choses très-avantageuses pour lui: la première, que je m'en tiendrai à la décision de Mr. LEIBNITZ, quand même il décideroit contre moi: la seconde, qu'en cas qu'il décidât en ma faveur, & que mon *Frère* ne s'en trouvât pas satisfait, je lui permettrai d'en appeller au jugement de Mr. le Marquis de L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, tant s'en faut que je les refuse. Voilà deux articles que mon *Frère* acceptera infailliblement, s'il ne craint déjà pour sa cause. N'est-ce pas assez de condescendance, que de me priver de mon droit d'appeller pour le céder entièrement à mon *Frère*?

† Le sens de cette anagramme est *vocetur r, erit positus de aequalibus dy* celui-ci: *Si spatium curvæ quasitæ æquale x s r d x.*

N°. X C.
P O S I T I O N U M
D E
S E R I E B U S I N F I N I T I S ,
E A R U M Q U E U S U

In quadraturis Spatorum & rectificationibus
Curvarum,

P A R S Q U A R T A ,

Quam

Præfide

J A C O B O B E R N O U L L I ,
Math. P. P.

defendit

N I C O L A U S H A R S C H E R U S Magist. Cand.
Ad diem 16 Decemb. M. DC. XCVIII.

Edita primum
B A S I L E Æ.

1698.

No. XC. te Acut. **LEBNITIO** in *Act Lipf.* 1684, p. 473, ut Subtangentes ejus omnes AK , RN , ρv sint æquales. Applicetur in A recta AB , & sumto quovis in curva puncto E [ι], ducatur recta EI [$\iota \iota$] parallela axi SA ; voceturque AB , ι ; BI [$B \iota$], x ; adeoque AI [$A \iota$], seu RE [$\rho \iota$], $\iota \mp x$; nec non AR [$A \rho$] y , & constans curvæ subtangens b . Dato itaque numero RE [$\rho \iota$] ejus logarithmus AR [$A \rho$] sic invenitur. Quoniam ex natura generali curvarum, elementum applicatæ EF [$\iota \phi$] dx , est ad elementum abscissæ FG [$\phi \gamma$] dy , sicut applicata RE [$\rho \iota$] $\mp x$, ad curvæ subtangentem RN [ρv] b , habebitur $dy = b dx : (1 \mp x) =$ [fractione in seriem resoluta per **XXXVI** & **XXXVIII**] $b dx \pm b x dx + b x x dx \pm b x^3 dx + b x^4 dx \pm b x^5 dx$ &c. ideoque facta summatione, y , hoc est, AR [$A \rho$] $= b x \pm \frac{1}{2} b x^2 + \frac{1}{3} b x^3 \pm \frac{1}{4} b x^4 + \frac{1}{5} b x^5 \pm \frac{1}{6} b x^6$ &c. quæ intuper in casu speciali BI [$B \iota$] $= BA = BD$, seu $x = 1$, fit $b \pm \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} b \pm \frac{1}{4} b + \frac{1}{5} b \pm \frac{1}{6} b$ &c.

COROLL. 1. Identitas hujus Seriei cum illa, quam supra Prop. **XLII** *, pro spatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perspicuumque facit, quod sumtis in utraque Fig. 1^a. N^o. **LXXIV** & 1^a. hujus, ipsis BI [$B \iota$] æqualibus, spatium Hyperbolicum $CBIO$ [$CB \iota$] æquetur rectangulo sub unitate AB & logarithmo AR [$A \rho$]. Unde porro inferitur, quod sumtis utrobique AB , $A \iota$, AD , hoc est, AB , $\rho \iota$, σx continue proportionalibus, quo casu ex natura Logarithmicæ $A \sigma$ dupla fiet ipsius $A \rho$, spatium Hyperbolicum $CBDQ$ duplum quoque sit ipsius $CB \iota \sigma$, indeque $CB \iota \sigma$, & DQ spatia futura sint æqualia.

COROLL. 2. Quoniam evidens est, existente $BI = AB$, hoc est, evanescente AI seu RE , logarithmum AR reddi infinitum; sequitur & seriem harmonicam logarithmum hunc exprimentem, $b + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} b + \frac{1}{4} b + \frac{1}{5} b$, &c. talem esse; unde denuo veritas Prop. **XVI** † constat.

COROLL.

* Pag. 755, & seq.

† N^o. **XXXV.** pag. 392. seq.

COROLL. 3. Dato quovis logarithmo, puta binarii, deter- No. XC.
minari potest ex illo curvæ subtangens b ; cum enim posita BD
 $\equiv 1 \equiv AB$, adeoque $AD \equiv \sigma x \equiv 2$, ostensum sit $A\sigma$ log-
mum binarii esse $\equiv b - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}b$ &c. $\equiv b$ in $(1 - \frac{1}{2} +$
 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \&c.)$ erit vicissim $b \equiv \text{Log. 2: } (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \&c.)$ (*).

XLVIII.

*Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per se-
riem.*

In eadem Figura, centro A per B descriptus esto circuli qua-
drans $BH\sigma$, quem producta EI secet in H, erit AI, seu RE, si-
nus arcus $H\sigma$, & AR ejus logarithmus, existente videlicet radii
AB, seu unitatis, logarithmo $\equiv 0$. Ponatur sinus complementi
 $IH \equiv x$, ut fiat sinus rectus AI, seu RE, $\equiv \sqrt{(1 - xx)}$,
ejusque elementum $EF \equiv -x dx : \sqrt{(1 - xx)}$, erit, ex na-
tura generali curvarum, $EF [-x dx : \sqrt{(1 - xx)}]$ ad FG,
elementum log- mi AR; ut RE $[\sqrt{(1 - xx)}]$ ad subtangen-
tem logarithmicæ RN, quæ sit 1; adeoque $FG \equiv -x dx :$
 $(1 - xx) \equiv$ [per XXXVI¹] $-x dx - x^3 dx - x^5 dx -$
 $x^7 dx$ &c. Quare summando, fient omnia FG, seu log- mus
AR $\equiv -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{10}x^{10}$, &c. negativus
scilicet, quia numerus ejus RE minor est unitate AB; at si fiat
positivus $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{8}x^8$ &c. hoc est, si AR transfera-
tur ex altera parte in Aρ, erit is proprie logarithmus rectæ ρσ,
id est [ex natura log- morum] tertiæ proportionalis ad ip-
sum sinum RE & radium AB; qui tamen log- mus immediate
quoque reperiri potuisset ex valore numeri sui $\rho\sigma \equiv 1 : \sqrt{(1 -$
 $xx)}$.

Idem etiam D. LEIBNITIUS *Act. Lipsf. 1691*, p. 180, ele-
ganter hoc modo:

(*) Atque hinc supputare licet rum *Briggianorum*, esse o. 43429448
subtangente Logarithmicæ, ad 1903, &c. posito Logarithmo dena-
quam constructæ sunt Tabulæ vulgo rii $\equiv 1$.
extantes, seu Tabulæ Logarithmo-

$$\left. \begin{aligned} \text{Log.}(1-x) &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \&c. \} \text{ per} \\ \text{Log.}(1+x) &= +x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \&c. \} \text{ præc.} \end{aligned} \right\}$$

Log.(1-xx) = [ex nat. log.]

Log.(1-x) + log.(1+x) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 &c.

Log.√(1-xx) = \frac{1}{2}log.(1-xx) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 &c.

COROLL. Posito sinu complementi HI hujus fig. = BI vel B fig. 1^a Ni. LXXIV, æquabitur rectangulum sub logarithmo sinus recti AR & radio AB, dimidio excessui, quo spatium Hyperbolicum CBIO superat alterum CB₁₀. Patet ex COR. 1. XI.11 *, ubi CBIO — CB₁₀ serie præsentis dupla expressum legitur. Cæterum moneri potuisset ibi, quod sumta z tertia proportionali ad 1 & x, seu posita z = xx, series illa convertatur in aliam z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4, &c. qua quoque spatium Hyperbolicum, puta CBGM, existente BG = z vel xx, innuitur. Hinc enim patet, quod CBIO — CB₁₀ = CBGM; & CBIO — CBGM seu MGIO = CB₁₀; adeoque [cum his positis, AI (1-x) sit ad AG (1-xx) sicut AB (1) ad A₁ (1+x)], quod sumtis AI, AG, AB, A₁ utcunque proportionalibus, spatia segmentis IG, B₁ insistentia semper futura sunt æqualia.

X L I X.

Applicatam curva Catenaria exhibere per seriem.

Esto Curva μBλ, quam Catena ab extremitatibus suis libere suspensa proprio pondere format, dicta *Catenaria*; cujus centrum A; vertex B, axis ABD, parameter AB = 1, abscissa A₁ = z, & applicata λλ vel μμ = y. Constat ex iis, quæ *Act. Lips.* 1691, p. 274, &c. (b) hac de curva memoriæ prodita leguntur, clemen-

* Pag. 757. Pro B₁ [x] scribe A₁ — AB [z — a], & erit dy = adz : √(zz — aa) = dz : √(zz — 1) ubi statuitur a = 1.
 (b) Ostensum est N^o. XXXIX. pag. 426, positæ AB = a, & B₁ = x, esse dy = adx : √(xx + 2ax).

mentum applicatæ dy esse $\equiv dx : \sqrt{(zx - 1)}$. Hinc ad tollen. No. XC. dam surditatem pono $\sqrt{(zx - 1)} \equiv t - x$; unde fit $x \equiv (tt + 1) : 2t$, $dx \equiv (tt - 1) dt : 2tt$, $\sqrt{(zx - 1)} \equiv t - x \equiv (tt - 1) : 2t$, ac denique $[dy] dx : \sqrt{(zx - 1)} \equiv dt : t$. Quam porro fractionem ut in seriem convertam, facio denominatorem bimembrem, substituendo $1 + x$ loco t , & dx loco dt ; eritque $dt : t$ seu $dy \equiv dx : (1 + x) \equiv [\text{per XXXVII}] dx - xdx + xdx - x^2 dx + x^2 dx$ &c. unde omnia dy , seu y , $\equiv x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Quoniam autem $x \equiv (tt + 1) : 2t$, hoc est, $tt \equiv 2xt - 1$, & t seu $1 + x \equiv x + \sqrt{(zx - 1)}$, prodibit $x \equiv z - 1 + \sqrt{(zx - 1)} \equiv [\text{facta } tD \equiv \sqrt{(zx - 1)}] Bt + tD \equiv BD$; igitur data As , z , dabitur BD , x , indeque $\iota\lambda$, seu γ , per seriem.

COROLL. Ex serie inventa collata cum Prop. XLVII, liquet, y esse logarithmum numeri x ; unde data Logarithmica zBC , cujus subtangens $\equiv AB \equiv 1$, puncta Catenariæ reperire proclive. Cum enim z , hoc est, As vel $\sigma\lambda [S\mu] \equiv (tt + 1) : 2t \equiv \frac{1}{2}t + 1 : 2t$, patet, abscissis hinc inde logarithmis æqualibus $A\sigma [AS]$ ordinatam Catenariæ $\sigma\lambda [S\mu]$ semissem esse oportere summæ duarum ab AB æquidistantium ordinarum Logarithmicæ $\sigma\lambda$ & SC , quarum illa $\equiv AD \equiv t$, hæc ex natura Logarithmicæ $\equiv 1 : t$. Atque in hoc ipso consistit elegantissima hujus Curvæ constructio *Leibnitiana*, quam videsis in *Act. Lipsf. 1691*, p. 277, seqq.

L.

Datis Latitudine loci alicujus in curva Loxodromica & angulo Rhumbi cum Meridiano; exhibere Longitudinem loci per seriem.
[Fig. 2.]

Linæam Rhumbicam seu Loxodromicam vocant Nautæ, quam navis secundum eundem venti rhumbum constanter incedens in superficie Globi Terr-aquei describit; adeoque curva est, quæ omnes Meridianos eodem angulo obliquo interfecat. Incipit hæc in Æquatore, indeque versus alterutrum Polorum oblique recedendo, tandem in ipsum Polum, quem infinitis gyris ambit, desinit.

No. XC. Sunto in Fig. 2. sinus totus, idemque & radius *Æquatoris*, $AC = 1$, BCD Meridianus, B & D Poli, tangens anguli rhombici $= t$, H punctum in Loxodromica, ejus Latitudo HC , sinus Latitudinis AE , & sinus complementi HE , qui vocetur x , Longitudo vero seu arcus *Æquatoris* inter Meridianum loci H & principium Loxodromicæ interceptus dicatur x . His positis, per illa quæ in *Act. Lips.* 1691, p. 284, * ostensa sunt, invenitur elementum Longitudinis $dx = -t dx : x \sqrt{(1 - xx)}$; ad cuius tentandam reductionem pono primo $x = 1 : p$, unde fit $dx = -dp : p^2$, $dx : x = -dp : p$, $\sqrt{(1 - xx)} = \sqrt{(pp - 1)} : p$, & denique $[dx] - t dx : x \sqrt{(1 - xx)} = t dp : \sqrt{(pp - 1)}$. Porro quidem memini, ejusdem formæ fuisse elementum Catenariæ in præcedente: pergo ponere sicut ibi, $\sqrt{(pp - 1)} = p - q$ indeque elicio $[dx] t dp : \sqrt{(pp - 1)} = -tdq : q$, ac rursus statuendo $q = 1 - r$ tandem obtineo $[dx] - t dq : q = t dr : (1 - r)$; quæ quidem quantitas etiam immediate elici potuisset ex quantitate $-t dx : x \sqrt{(1 - xx)}$, si statim fecissem $x = (2 - 2r) : (2 - 2r + rr)$; at in tales hypothèses incidere sæpe numero difficile est, nisi jam usu compertum habeatur, quæ formulæ in quas transformari possint. Nota, $r = AC - BI$, excessui nempe radii supra tangentem semissis complementi Latitudinis puncti H ; etenim supposita $BI = 1 - r$, ductaque recta BH , cum similia sint triangula HEB , ABI , crit $HE [x]$ ad $EB [1 - \sqrt{(1 - xx)}]$ ut $AB [1]$ ad $BI [1 - r]$; unde resultat $x = (2 - 2r) : (2 - 2r + rr)$, ut oportet. Conversa autem, per XXXVI inventa quantitate $tdr : (1 - r)$ in seriem, habetur $dx = tdr + trdr + trrdr + tr^3 dr$ &c. & facta summatione $x = tr + \frac{1}{2}trr + \frac{1}{3}tr^3 + \frac{1}{4}tr^4$ &c. Patet igitur, quomodo ex data tangente semissis complementi Latitudinis inveniatur Longitudo.

Sciendum autem, elementum Longitudinis $-tdx : x \sqrt{(1 - xx)}$ adhuc aliter posse reduci, statuendo nempe $\sqrt{(1 - xx)} = y$; hinc enim fit $x = \sqrt{(1 - yy)}$, $dx = -ydy : \sqrt{(1 - yy)}$ & $[dx] - t dx : x \sqrt{(1 - xx)} = t dy : (1 - yy) =$ [per XXXVI]

* No. XLII. pag. 444. & seq.

XXXVI] $t dy + tyy dy + ty^2 dy + ty^3 dy$ &c. ac denique omnia dx . No. XC. seu $x = ty + \frac{1}{2}ty^2 + \frac{1}{3}ty^3 + \frac{1}{4}ty^4$ &c. ubi perspicuum est, y seu $\sqrt{(1 - zx)} = AE$ sinui recto arcus HC ; unde constat ratio definiendi etiam quæsitum ex sinu recto Latitudinis, quemadmodum fecit Dn. LEIBNITIVS *Act. Lips.* 1691, p. 181. Et patet, si in calculo, per quem ad initio memoratam æquationem $dx = -tdz : z\sqrt{(1 - zx)}$ perveni, loco quantitatis indeterminatæ ipsum sinum rectum AE præ sinu complementi HE selegissem, me statim ad alteram æquationem immediate in seriem convertibilem $dx = tdy : (1 - yy)$ perventurum fuisse. Cæterum ex eo, quod duæ inventæ series eandem quantitatem x denotant, obiter concludimus, quod si in circulo sinus cujuscumque arcus AE dicatur y , & $AC - BI$ excessus radii supra tangentem semissis complementi vocetur r , perpetuo futurum sit $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ &c. $= r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3$ &c. Notamus etiam, si locus H sit in ipso Polo, quo casu $r = t = y$, fore $x = t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t$ &c. vel $= t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t$ &c. quarum serierum summæ, cum sint infinitæ per XVI, docent Longitudinem loci H quoque infinitam esse, adeoque, quod dixi, curvam Loxodromicam infinitis Polum gyris ambire, priusquam in ipsum incidat.

COROLL. 1. Si in eadem Loxodromica, præter locum H , alius sit locus notæ Latitudinis, cujus sinus rectus $= v$, & excessus radii supra tangentem semissis complementi $= s$, erit similiter ejus longitudo $= t \times (v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3$ &c.) vel $= t \times (s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3$ &c.) adeoque differentia longitudinum utriusque loci erit utriusque seriei differentia, nempe $t \times (y \text{ s } v + \frac{1}{2}(y^2 \text{ s } v^2) + \frac{1}{3}(y^3 \text{ s } v^3)$ &c.) vel $t \times (r \text{ s } s + \frac{1}{2}(r^2 \text{ s } s^2) + \frac{1}{3}(r^3 \text{ s } s^3)$ &c.). Hinc si in alia quadam Loxodromica duo concipiantur loca Latitudine cum prioribus convenientia, erunt, manentibus y & v , vel r & s iidem, differentiæ Longitudinum ut tangentes angulorum, quos Rhumbi faciunt ad Meridianos. Vid. *Act. Lips.* 1691, p. 182, & 285*.

COROLL. 2. Ex collatione harum serierum cum seriebus
Propp.

* N^o. XLII, pag. 445.

No. XC. Propp. XLII †, XLVI *, & XLVII, liquet Problematis convenientia cum quadratura Hyperbolæ & logarithmis. Speciatim noramus, quod existente subtangente Logarithmicæ = t , quæ sita Longitudo puncti H sit ipse logarithmus rectæ $1 - r$, seu BI, ut patet ex XLVII; vel etiam [cum D. LEIBNITIO loc. cit.] semissis Log - mi quantitatis $(1 + y) : (1 - y)$, seu DE: EB, quod sic ostenditur:

$$\left. \begin{aligned} \text{Log.}(1+y) &= +ty - \frac{1}{2}ty^2 + \frac{1}{3}ty^3 - \frac{1}{4}ty^4 + \frac{1}{5}ty^5 - \frac{1}{6}ty^6 \&c. \\ \text{Log.}(1-y) &= -ty - \frac{1}{2}ty^2 - \frac{1}{3}ty^3 - \frac{1}{4}ty^4 - \frac{1}{5}ty^5 - \frac{1}{6}ty^6 \&c. \end{aligned} \right\} \text{per XLVII.}$$

$$\text{Log.}((1+y) : (1-y)) =$$

$$\text{Log.}(1+y) - \text{log.}(1-y) = 2ty + \frac{2}{3}ty^3 + \frac{2}{5}ty^5, \&c.$$

COROLL. 3. Data Longitudine & Latitudine loci, dabitur angulus rhombi cum Meridiano; cum enim $x = t \times (r + \frac{1}{2}rr + \frac{1}{3}r^3 \&c.) = t \times (y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \&c.)$ erit $t : 1 = x : r + \frac{1}{2}rr + \frac{1}{3}r^3 \&c.$ vel $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3, \&c.$ id est, tangens anguli quæ sita ad finem totum, ut arcus longitudinis ad log - mum BI, vel semissem log - mi (DE: EB); adeoque per *Coroll.* 1 hujus, ut differentia duarum longitudinum ad differentiam duorum Log - morum BI, vel semi - differentiam duorum DE: EB. Intellige hic logarithmos acceptos in Curva, cujus subtangens = radio = 1. Nota, si desideretur angulus Loxodromicæ, quæ non nisi post unam pluresve integras revolutiones in datum locum perducatur, augendus est arcus differentiæ Longitudinum integra peripheriæ Æquatoris ejusve multiplo.

SCHOLIUM. Ex hætenus dictis expeditus habetur modus construendi *Scalam* quandam *Loxodromicam* Esto in Fig. 1 huj. BM circumferentia Æquatoris in gradus suos & graduum minutias divisa; hæc extendatur in rectam AS axem Logarithmicæ CB*, ejusque divisionibus ordine ab A adscribantur gradus Longitudinum:

† Pag. 755. seq.

* Pag. 762. seq.

dimum : tum sumto indefinite in circumferentia hac puncto M, No. XC. bisectoque arcu Mσ per rectam AT occurrentem tangenti σx in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, secans Logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adscribatur numerus graduum in arcu BM: sic habebuntur etiam gradus Latitudinum; parataque erit Scala Loxodromica, quæ primario inserviet rhumbo, cujus anguli tangens æquatur subtangenti Logarithmicæ (c). Numeri enim graduum cujusvis datæ Latitudinis in Scala statim a latere aspectui offerunt respondententes Longitudinis gradus. Eadem tamen etiam cuilibet rhumbo prodesse poterit, si fiat per *Coroll.* 1 hujus, ut subtangens Logarithmicæ, e qua Scala constructa est, ad anguli rhumbici tangentem, sic Longitudo vel differentia Longitudinum per Scalam inventa ad Longitudinem vel differentiam Longitudinum quæsitam (d): adeo ut Scala ejusmodi in usum

Nauta-

(c) Nam, quia $dx = t dr : (1-r)$, seu $x : t = - \log. (1-r)$, vel $N(x : t) = 1-r$, ubi x est arcus longitudinis, & $1-r$ tangens semissis complementi latitudinis, veluti σT vel RE, si latitudo sit BM; erit, posita t tangente anguli rhumbici æquali subtangenti logarithmicæ, $Nx = RE$. Sed RE numerus est cujus AR logarithmus. Igitur $AR = x =$ arcui longitudinis respondentis latitudini BM. Itaque ascribatur puncto R numerus graduum arcus BM, & habebitur Scala loxodromica pro rhumbo, cujus anguli tangens t æqualis est subtangenti logarithmicæ.

(d) Quamobrem Canon jam supputatus Tangentium artificialium, seu Logarith. Tangent. erit Scala loxodromica numerica, pro angulo rhum-

Jac. Bernoulli Opera.

bic, cujus tangens est 0.4342944; hæc enim est subtangens logarithmicæ ad quam computatus est Canon *Brigianus* (Not. a, pag. 853). Sed unitates hujus Canonis sunt radii partes centum millesimæ, seu 0.000001. Quamobrem si velis unitates exprimere gradus, [sic enim partes peripheriæ exprimi solent], aut quod satius est, si velis Tangentes artificiales, refectis ad dextram quinque notis, exprimere gradus, quoniam gradus unus est radii pars 0.00174533 &c. augenda est Tangens anguli rhumbici 0.4342944, in ratione 0.001 ad 0.00174533 &c. & habebis 0.7579869, quæ tangens est anguli 37°. 9'. 42". At si velis, quod magis usitatum est, Tangentes artificiales, refectis ad dextram quatuor notis, exprimere mi-

R r r r r

nuta

- No. XC. Nautarum Circino proportionis insculpta, & lineæ partium æqualium, quæ Longitudinum gradus repræsentarent, juxta posita, Instrumentum foret omnium forsân, quæ Nautæ hæctenus tractarunt, compendiosissimum & utilissimum. Sed de his fatis. (d).

M O N I T U M.

ANTE QUAM pergamus, Lector advertere potest, quod hucusque in differentialium summatione pro quovis elemento semper ejus integrale purum seu absolutum substituimus, velut x pro dx , $\frac{1}{2}xx$ pro $x dx$ &c. At scire ipsum volumus, hoc minime esse perpetuum; quanquam enim una eademque quantitas x non nisi unum habeat differentiale dx , idem tamen differentiale dx infinita habet integralia, unum quidem purum x , reliqua admittione quantitatum constantium affecta $x + a$, $x - b$ &c. quorum in summationis negotio, pro re nata, nunc hoc, nunc illud seligendum est, neque adeo sine præsentis hallucinationis periculo indiscriminatim semper purum assumi potest. Restat itaque, ut ad vitandum scopulum, quem communem fere esse video omnibus iis, qui calculum hunc incautius tractant, subjiciamus adhuc ejus rei exemplum in uno alterove Problemate, e cujus enodatione Lectori constare possit, undenam, & quibus criteriis dignoscatur, quid pro quovis semper elemento summando substitui conveniat.

L I.

Exhibere longitudinem Curvæ Parabolicae per seriem. [Fig. 3.]

Fingamus BCD curvam esse Parabolam, cujus vertex B, axis BG, latus rectum $= a$, abscissa BG $= x$, applicata GD $= y$, ipsa BCD curva $= s$; proinde elem. FG vel CH $= dx$, DH $= dy$, & CD $[\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = ds$. Erit ex natura curvæ

nuta prima longitudinum; quoniam minutum unum est radii pars 0.0002908882 &c. augenda est tangens anguli rhombici 0.4342944 in

ratione 0.0001 ad 0.000290882 &c. & ea fiet 1.2633114 &c. quæ tangens est anguli $51^{\circ}.38'.9''$.

(d) Vide Num. sequentem.

curvæ $ax = yy$; hinc differentiando $adx = 2ydy$, quadrandoque **No. XC.**
 $aadx^2 [aads^2 - aady^2] = 4yydy^2$, & facta transpositione $aads^2$
 $= aady^2 + 4yydy^2$, extractaque tandem radice $ads = dy \sqrt{(aa + 4yy)}$,
 quæ quantitas est, de qua summanda agitur. Ad surdita-
 tem primo eliminandam pono $\sqrt{(aa + 4yy)} = z - 2y$, fiet
 $aa = zz - 4zy$, & $y = (zz - aa) : 4z$; hinc $dy = (2z +$
 $aa) dz : 4zz$, nec non $[z - 2y] \sqrt{(aa + 4yy)} = (2z + aa) :$
 $2z$, adeoque $[ads] dy \sqrt{(aa + 4yy)} = (z^2 + 2aaz + a^2) dz$.
 $8z^3 = [membris separatim positis] \frac{1}{8} z dz + \frac{1}{4} aadz : z + \frac{1}{8} a^2 dz :$
 z^3 , de quorum nunc summis dispiciendum. Hunc in finem
 considero relationem, quam habet assumpta litera indeterminata
 z ad ordinatas curvæ nostræ, camque, ex facta hypothese $\sqrt{(aa + 4yy)}$
 $= z - 2y$, cognosco talem esse, ut existente $y = 0$,
 z non pariter evanescat, sed sit $= a$, & quod crescente y eo
 fortius crescere debeat z ; quapropter extensa concipiatur ipsa z ir-
 recta EK a puncto E, & sit prima EA, quæ nascenti y respon-
 det, $= a$, ultimæque z , quæ respondet ultimæ y , seu applicatæ
 GD, esto EK. Tum fluere intelligatur ab A ad K indefinita
 recta AL vel KM, æqualis ubique $\frac{1}{8} zz$ [integrali scilicet puro
 primi membri $\frac{1}{8} z dz$], minimaque adeo in A & $= \frac{1}{8} aa$; sic
 ipsum fluentis lineæ incrementum fiet $\frac{1}{8} z dz$, & omnia incremen-
 ta quæ capit linea, dum ex A movetur in K, representabunt
 omnia $\frac{1}{8} z dz$, quæ ordinatis y a minima [0] ad ultimam [GD]
 ordine respondent, hoc est quæ pertinent ad curvæ parabolicæ
 portionem rectificandam BD. Constituunt autem omnia il-
 la incrementa, ut liquet, non integram KM [$\frac{1}{8} zz$] sed
 excessum tantum ejus supra rectam AL [$\frac{1}{8} aa$] hoc est, KM
 $- AL$ seu $\frac{1}{8} (zz - aa)$. Integræ igitur primi membri $\frac{1}{8} z dz$,
 quod huc quadrat, est $\frac{1}{8} (zz - aa)$. Similiter pro integrando
 tertio membro $\frac{1}{8} a^2 dz : z^3$, fingo z extendi in recta NP a pun-
 cto N, primamque quæ nascenti y respondet esse NO $= a$, &
 quæ respondet ultimæ, NP; hinc fluere concipio ab O versus P
 quantitatem $\frac{1}{8} a^2 : zz$, ceu integræ purum ipsius $\frac{1}{8} a^2 dz : z^3$, pu-
 ta rectam OR vel PQ, quæ proin maxima erit in O & $= \frac{1}{8} aa$,
 indeque versus P decrescet; decremента itaque, quæ patitur linea

R r r r r z

O R,

No. XC. OR, quousque pervenit in PQ, denotabunt omnia elementa $\frac{1}{2}a^4dx : z^3$, quæ portioni curvæ parabolicæ BD respondent: sed omnia illa decrementsa, ut apparet, non efficiunt rectam PQ seu $\frac{1}{16}a^4 : zz$, verum potius OR — PQ seu $\frac{1}{16}aa — \frac{1}{16}a^4 : zz$; quapropter integrale tertii membri $\frac{1}{2}a^4dx : z^3$ huc pertinens $= \frac{1}{16}(aa — a^4 : zz)$, summaque adeo primi & tertii [$\int \frac{1}{2}zdx + \int (\frac{1}{2}a^4dx : z^3)$] $= \frac{1}{16}(zz — aa) + \frac{1}{16}(aa — a^4 : zz) = \frac{1}{16}(z^4 — a^4) : zz$.

Restat intermedium adhuc membrum expediendum $\frac{1}{2}aadz : z$. Hoc cum absolute summari nequeat, in seriem converto, ponendo prius $z = a + t$, ut denominator fiat bimembris; hinc enim fit $\frac{1}{2}aadz : z = \frac{1}{2}aadt : (a + t) =$ [per XXXVII] $\frac{1}{2}adt — \frac{1}{2}t dt + \frac{1}{2}t dt : a — \frac{1}{2}t^3 dt : aa$ &c. & facta summatione, $\int (\frac{1}{2}a^2 dz : z) = \frac{1}{2}(at — \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3 : a — \frac{1}{4}t^4 : a^2 + \frac{1}{5}t^5 : a^3$ &c.)

Nota, quod hic pro quolibet seriei termino substituam ejus integrale purum, quoniam ex æquatione $z = a + t$ colligo, quod existente $z = a$ [hoc est $y = 0$], ipsa t , ut & quantitates fluentes omnes, $\frac{at}{4.1}, \frac{tt}{4.2}, \frac{t^3}{4.3a}$ &c. quoque sint $= 0$, id est, quod

hæ a 0 fluere seu incrementa sumere occipiant; hinc enim manifeste liquet, omnia ipsarum crementsa, nempe omnia $\frac{1}{2}adt, \frac{1}{2}tdt$ &c. ipsis quantitatibus ultimis $\frac{1}{2}at, \frac{1}{2}tt$ &c. æqualia fore. Quod

idem quoque, si quis examinet, in omnibus præcedentium Propp. exemplis contingere observabit, indeque concludet, recte a nobis factum, quod ibidem inter summandum pura temper integralia assumserimus, tametsi ejus rei rationem discrete non adjece-
rimus. Sed revertamur ad propositum: Inventa summa medii membri $\frac{1}{2}aadz : z$, si reliquorum summæ supra repertæ adjiciantur, emergit summa omnium $\int \frac{1}{2}zdx + \int (\frac{1}{2}aadz : z) + \int (\frac{1}{2}a^4dx : z^3)$, hoc est, $as = \frac{1}{16}(z^4 — a^4) : zz + \frac{1}{2}(at — \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3 : a — \frac{1}{4}t^4 : a^2$ &c.) & facta divisione per a , longitudo curvæ t seu BD $= \frac{1}{16}(z^4 — a^4) : azz + \frac{1}{2}(a — \frac{1}{2}tt : a + \frac{1}{3}t^3 : a^2 — \frac{1}{4}t^4 : a^3$ &c.) quæ denique posita $a = t = 4$, & $z = a + t = 8$, fit $\frac{1}{16} + \frac{1}{2} — \frac{1}{2} + \frac{1}{3} — \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. unde cum sit hoc casu $y = \frac{1}{2}(zz — aa) : z = \frac{1}{2}$, & $x = yy : a = \frac{1}{16}$, sequitur, quod existente latere recto
Parabolæ

Parabolæ 4, & absciffa BG $\frac{1}{2}$, aut applicata GD $\frac{1}{2}$, longitudo No. XC. curvæ parabolicæ BD æquetur $\frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ &c.

COROLL. Ex serie collata cum XLII, curvam parabolicam cum spatio hyperbolico inter asymptotas comparandi modus innotescit. Sufficit monuisse.

L I I.

Rectificare Curvam Logarithmicam per seriem & aliter. [Fig. 1].

Insistat axi SA σ curva Logarithmica CB x , cujus ordinata AB = 1, subtangens AK = b , alia quævis applicata RE [$\rho\epsilon$] = z , ejusque elementum EF [$\epsilon\phi$] = dz ; quæritur rectificatio portionis curvæ BE [B ϵ]? Quoniam, per XLVII, elementum absciffæ AR [A ρ], nempe FG [$\phi\gamma$] = $bdz : z$, erit EG² [EF² + FG²] = $dz^2 + bb dz^2 : zz = (zz + bb) dz^2 : zz$, indeque elementum curvæ EG [$\epsilon\gamma$] = $dz \sqrt{(zz + bb)} : z =$ [terminis fractionis per $\sqrt{(zz + bb)}$ æque-multiplicatis] $(zzdz + bbdz) : z \sqrt{(zz + bb)} = z dz : \sqrt{(zz + bb)} + bbdz : z \sqrt{(zz + bb)}$, de quorum summatione hic quæritur. Prioris membri integrale purum est $\sqrt{(zz + bb)}$, quod [ob primam $z = AB = 1$] inde a $\sqrt{(1 + bb)}$ decrefcere [crefcere] intelligitur ad usque $\sqrt{(zz + bb)}$; adeo ut omnia ejus decrementa [incrementa] huc quadrantia, seu $\int(zdz : \sqrt{(zz + bb)})$ sint = $\sqrt{(1 + bb)} - \sqrt{(zz + bb)}$ [$\sqrt{(zz + bb)} - \sqrt{(1 + bb)}$] hoc est, æqualia differentiaë duarum in B & E [ϵ] tangentium rectarum BK & EN [$\epsilon\gamma$]. Posterioris membri $bb dz : z \sqrt{(zz + bb)}$ integrale, quoniam ita planum non est, prævia reductione investigare conor, eaque simili huic, qua, supra Prop. L, pro curva Loxodromica fui usus, cum in elementis analogiam quandam observem. Pono itaque primo $z = bb : p$, coque mediante transformo $bb dz : z \sqrt{(zz + bb)}$ in $- bdp : \sqrt{(bb + pp)}$; deinde facio $\sqrt{(bb + pp)} = p + q$, sive $p = (bb - qq) : 2q$; indeque elicio [$bb dz : z \sqrt{(zz + bb)}$] $- bdp : \sqrt{(bb + pp)} = - bdq : q$, quod per XLVII, elementum esse cognosco absciffæ cujusdam in Logarithmica, quam tandem ita determino: Quoniam $p = (bb - qq) : 2q$, & $z = bb : p$,

Rrrrr 3

ficc

No. XC. fiet $x = 2bbq : (bb - qq)$, sicut vicissim $q = (-bb + b\sqrt{zx + bb}) : x$; & quia prima $x = AB = 1$, erit quæ huic respondet prima $q = -bb + b\sqrt{1 + bb}$. Pro constructione, abscindo in tangente BK partem $Ka = KA$, in ordinata AB partem $BV = Ba$, & in V statuo VX parallelam ipsi AK; pari modo in tangente $\nu\epsilon$ [idem imaginatione supple in NE] sumo $\nu r = \nu\rho$, hinc $\epsilon v = \epsilon r$, & duco vx parallelam $\nu\rho$; quo pacto constat fore $VX = primæ q = -bb + b\sqrt{1 + bb}$, & $vx = ultimæ q = (-bb + b\sqrt{zx + bb}) : x$. Quocirca si ambæ VX & vx, vel etiam loco harum sola quarta proportionalis ad VX, vx & AB [quæ sit SC vel σx] applicetur Logarithmicæ, erit intercepta applicatis VX & vx axis portio, vel etiam ipsis AB, SC [σx] interjecta portio AS [$A\sigma$] [ex natura enim curvæ æqualis utrisque intercipietur] $= f(bdq : q)$, id est, omnibus $bdq : q$, seu omnibus $bbdz : x\sqrt{zx + bb}$, pro portione curvæ BE [$B\epsilon$] rectificanda intervientibus. Et quoniam posita differentia inter AB & SC [σx] $= x$, resegmentum axis AS [$A\sigma$] $= bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4$, &c. per XLVII, erit hujus posterioris membri integrandi $bbdz : x\sqrt{zx + bb}$ summa etiam per seriem reperta. Additis itaque amborum summis fient omnia EG [$\epsilon\gamma$], seu longitudo curvæ BE [$B\epsilon$] $= \sqrt{1 + bb} \cup \sqrt{zx + bb} + bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4$ &c. $=$ differentiarum tangentium BK & EN [$\epsilon\nu$] una cum resegmento axis AS [$A\sigma$].

EPI MET P A.

I.

Cum Torcularia nostratia publica, quibus mustum quotannis e racemis exprimitur, consistant in prægrandi arboris trunco propemodum horizontali, cujus una extremitas fulcro firmata premedos racemos excipit, altera perpendiculariter in cochleam seminam excavata est, qua cochleam marem recipit, ingenti inferius sacoma-

se humi jacente instructam, & circumagendam, donec sacoma humo No. XC.
 levatum fuerit: *Quaritur, quid sentiendum de jurgiis inter Domi-
 num racemorum & Dominum torcularis frequenter oboriri solitis,
 quorum ille sacoma in aere pendulum altius elevari impense petit.
 hic anxie vetat?*

Resp. Uterque ridicule: cum onus etiam sesquipedali a terra in-
 tervallo sublatum haud quaquam majorem, quam pollicis tantum la-
 titudine ab eadem divulsam, vel racemis vel torculari vim inferat.

I I.

Bacillus teres & gracilis [Fig. 4.] ita notatus in C, ut sumtis
 continue proportionalibus AB, AC, AD, gravitas ejus ad gravitatem
 specificam alicujus liquoris se habeat ut BD ad AB; si extremitate
 sua A ita suspendatur e filo, ut altera extremitate B libere pendeat
 intra dictum liquorem, immergetur eidem usque ad notam C: modo
 per altitudinem puncti suspensionis id liceat. (*).

I I I.

Unde talis bacillus per totam longitudinem rite divisus novum
 quod-

(*) Etenim si bacillus AB, filo in
 A suspensus, & parte sui BC in li-
 quoremmersus, quiescat, necesse est
 æquilibrium dari inter binas vires,
 quibus instar vectis, hypomochlio
 existente in A, sursum deorsumque
 urgetur. Altera est ipsius bacilli pon-
 dus, quod deorsum tendens in E,
 bacilli medio, applicatum fingi po-
 test: altera, nifus liquoris bacillo
 gravioris, & partem immersam BC
 sursum propellentis, qui nifus in F
 puncto bisecante BC applicatus concipi
 debet. Sunt igitur hæ vires inter
 se, ut earum distantie ab hypomo-
 chlio: hoc est, ut AE ad AF ita ni-
 fus liquoris ad pondus bacilli. Est
 vero nifus liquoris ad pondus par-

tis BC, ut gravitas specifica liquoris
 ad pecificam bacilli gravitatem, id
 est, ut AB ad BD. Et pondus par-
 tis BC ad pondus totius bacilli (quia
 teres est) ut BC ad AB. Igitur ex
 æquo BC ad BD ut nifus liquoris
 ad pondus bacilli (seu AE ad AF).
 Et dividendo, BC ad CD ut AE ad
 EF, vel ut 2AE ad 2EF, id est, ut
 AB ad AC (nam EF = EB — BF,
 & 2EF = 2EB — 2BF = AB —
 BC = AC.) Quare AB ad AC, ut
 BC ad CD, & ut AB — BC ad
 AC — CD, seu AC ad AD. Sunt
 igitur AB, AC, AD, continue
 proportionales. Vide *Phoronomiam*
 HERMANNI, Lib. II. Sect. I. Cap.
 3. Prop. 14. pag. 159.

No. XC. quoddam genus exhibet Instrumenti Hygrostatici, quo gravitates liquorum examinari solent. Gallis Pécé - liqueur dicti.

IV.

Vulgares machinula qua huic usui inserviunt, consistuntque in bulla quadam vitrea instructa collo cylindrico oblongo & gracili, hoc defectu laborant, quod divisiones colli aequales habent. Haec enim ad demotandas aequales gravitatum differentias, versus bullam in proportione harmonica decrescere debent. (b).

V.

Sic etiam arcus circulares, qui scapis bilancium applicari solent, docente Cl. STURMIO in Collegio Curioso Part. 1. Ten. 14. Phænom. 4. perperam in partes aequales dividuntur. Anguli enim examinis & scapi, quos superpondia aequaliter aucta efficiunt, tales sunt, ut differentia tangentium ipsorum eadem proportione a scapo decrescant, qua in præced. Corollario, partes colli Instrumenti hygrostatici a summitate versus bullam diminuuntur (c).

VI. Dan.

(b) Sunt enim ejusdem corporis diversis liquoribus innatantis partes immerse inverse ut liquorum gravitates specificæ, docente Hydrostatica. Itaque si liquorum gravitates ponantur crescere in progressionem arithmetica, id est, per differentias æquales, decrescant partes Instrumenti in progressionem harmonica.

(c) Sit AB [Fig. 5] bilancis jugum, A & B pondera, DCF scapus, C punctum suspensionis, Ff arcus circulari scapo applicatus. Jam si pondera A & B sint æqualia, centrum gravitatis eorum bifecabit jugum AB , quod in horizontali situ consistet. At, si superpondio aliquo pondus alterutrum, veluti B , augetur, transferetur centrum gravi-

tatis in E , & jugum inclinabitur in ab , ut E centrum perveniat in e infra punctum suspensionis C , & scapus situm obliquum dCf obtineat. Sumpta Cd pro sinu toto, de tangens est anguli dCe , vel FCf quem scapus & examen comprehendunt. Sed, ex natura centri gravitatis B : $A = AE:BE$, & compon. $B + A : A = AB:BE$, & pondus A , atque jugum AB data sunt. Igitur pars BE summæ ponderum A & B reciproce proportionalis est. Crescente igitur pondere B , vel summa $A + B$, per æqualia superpondia ipsi B addita, decrescant partes BE vel be in progressionem harmonica. Igitur differentie tangentium de erunt differentie progressionis harmonice.

VI.

N XC.

Dantur aequationes locales, quas unica litera indeterminata ingreditur. Tales sunt $addx = dx^2$, $2x ddx = dx^2$, &c. quarum illa suo sensu locum ad Logarithmicam, hac ad Parabolam includit (4).

VII.

Davidis GREGORII Analysis curva Catenaria, nupero Actorum Lipsiensium Julio inserta, oportune ostendit, fieri utique posse, ut quandoque per inevidens & falsum, plausibile licet, ratiocinium ad veram conclusionem perducatur.

VIII.

Responsio Anonymi, mense Jun. 1697, art. 13, Diarii Berolinensis exhibita, ad argumentum pro possibili aeternitate mundi inter proxima nostra Disputationis Corollaria † ventilatum, nullius est pretii.

(4) Aequatio $2x ddx = dx^2$ induat hanc formam $2ddx : dx = dx : x$, & integrando, erit $2l(dx) = lx$, aut, addita constante $l(dy^2) = la$ homogeneitatis gratia, $2l(dx) = lx + l(dy^2) = la$, vel revertendo a logarithmis ad numeros, $dx^2 = xdy : a$, aut $dx \sqrt{a : x} = dy$, vel $a dx : \sqrt{ax} = dy$, atque integrando rursus, $2\sqrt{ax} = y$ vel $y + b$, quæ est ad Parabolam.

Aequatio autem $x ddx = dx^2$, cum reducatur ad $ddx : dx = dx : x$, erit, integrando & constante $l(dy) = la$ addita, $l(dx) = lx - la$

$+ l(dy)$, vel, quia logarithmorum æqualium æquales sunt numeri, $dx = xdy : a$, aut $a = x dy : dx$, ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$.

Sed $addx = dx^2$ ita reducitur; $ddx : dx = dx : a$, integrando & sublata constante $l(dy)$, fit $l(dx) = l(dy) = x : a$, aut redeundo ad numeros $dx : dy = N(x : a)$, seu $dy = dx : N(x : a)$ atque $y = b - aa : N(x : a)$, rursus ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$, sed inverso quodam situ positam.

† N^o. LXXIV. pag. 764.

F I N I S.



Nº. XCI.

JACOBI BERNOULLI
C I R C I N U S
PROPORTIONUM NAUTICUS,

*Scala Loxodromica instructus ,
bujusque Fabrica mire facilis.*

*Acta Erud.
Lipj. 1699.
Febr. p. 91.*

G Eometrae Problema de invenienda Longitudine puncti in Loxodromia ex ejus data Latitudine, eo quod transcendens esse & a summis Secantium dependere animadvertent, haud aliter quam approximando solvere sunt assueti, adhibitis cum in finem Mappis quibusdam seu Tabulis, quas *Latitudinum crescentium* vocant, ex additione plurium Secantium satis operose constructis. Solus haecenus rem accurate confecit omniscientiarum laude cumulatissimus Vir Dnus. **LEIBNITIVS**, sed calculi laborem non sustulit, Problemate quippe ad Logarithmos Sinuum versorum nondum supputatos redacto. *Vide Acta Lipf. 1691, Mense Aprilis, pag. 182.* Data nuper occasione, cum positionibus quibusdam *de Seriebus infinitis* * conscribendis occuparer, in modum incidi consequendi quaesitum absque ullo labore; animadverti enim, Scalam Loxodromicam in Logarithmorum, quae vulgo prostant, Tabulis ita jam paratam haberi, ut inde non tam calculo erui, quam exscribi solummodo opus habeat.

* Nº. praeced. Prop. L. pag. 855 & seq.

habeat. Modus talis: Notentur in columna A arcus Latitudi-No. XCI. num, seu partes quadrantis ordine per singulos gradus graduumve minutias a 0 ad 90° [sufficit in adjuncto laterculo rem exhibere in denis gradibus.] His in columna B respondeant totidem partes semiquadrantis a 45° ad 90°, differentiis progredientes, quæ sint semisses differentiarum columnæ A. Horum posteriorum ar-

A Grad. Lat.	B	C Grad. Long.
0	45	0
10	50	7.61865
20	55	15.47732
30	60	23.85606
40	65	33.13275
50	70	43.89341
60	75	57.19475
70	80	75.36812
80	85	105.80482
90	90	Infin.

cum excribantur in columna C Tangentes artificiales, dempto a singulis Logarithmo Sinus totius, quo pacto parata erit Tabella, significabuntque primæ ad sinistram notæ numerorum columnæ C, gradus Longitudinum integros, & quinque reliquæ ad dextram punctulis discretæ graduum partes centies milleumas. Respicit autem hæc Tabella primario Loxodromiam, cujus angulus cum meridianis est 37°. 9'. 42". (*) sed aliis interim quibuslibet Loxodromiis facile accommodabitur, si fiat, ut 7579869, tangens anguli prædicti, ad tangentem dati alterius cujusvis anguli

S s s s s 2

li

(*) Vide N°, præc. Prop. L. Schol. pag. 858, & 859.

No. XCI. In Rhumbici, sic Longitudo e regione datæ Latitudinis in Tabula reperta ad Longitudinem quæsitam. Ut vero & hujus operationis molestia leventur imperiti Nautæ, poterit ex ista Tabella Scala confici, eaque posthac cum linea Tangentium Circinis proportionum insculpi, hoc fere modo: Linea partium æqualium representet gradus Longitudinum eorumque partes; huic adjungatur alia, si lubet, parallela, quæ gradus Latitudinum comprehendat, & cujus divisiones sic instituantur, ut decimus gradus Latitudinis respondeat 7. 61865 gradui Longitudinis, vicesimus Latitudinis 15. 47732 gradui Longitudinis, & consequenter, prout ex laterculo apparet. Tandem etiam in utrumque Instrumenti crus projiciatur Scala Tangentium cum suis divisionibus, ejusque locus, qui incidit in $37^{\circ}. 9'. 42''$, asterismo notetur. Usus hujus Circini proportionum talis: Sit, exempli gratia, instituta velificatio in Rhumbo quinto, hoc est, in angulo $56^{\circ}. 15'$, a 20° Latitudinis parallelo ad usque 40^{um} & quærat Longitudinis evariatio: Sumo in Scala Latitudinum intervallum 20 & 40, illudque diductis, quantum satis est, Instrumenti cruribus in linea Tangentium asterismis applico; mox in hac linea distantiam accipio inter numeros $56^{\circ}. 15'$ utriusque cruris, eamque in lineam partium æqualium transfero; in qua sic abscindet optatam Longitudinum differentiam, quæ est 34. 85973 seu $34^{\circ}. 51'. 35''$. Potest vero etiam eadem facilitate conversum Problematis hujus expediri, & ope talis Circini proportionis ex datis Latitudinibus duorum locorum inveniri angulus Rhumbi, & si quæ solent alia his affinia inter Nautas Problemata agitari; unde vix aliud simplicius & ad praxin accommodatius adminiculum in usum horum Hominum excogitari posse, facile quis sibi persuadeat.



N°. XCII.

JACOBI BERNOULLI
 QUADRATURA
 ZONARUM CYCLOIDALIU

demonstrata.

OMnia, quæ circa Quadraturas spatiorum cycloidalium inveniri possunt, una Cycloidis proprietate dudum detecta nituntur, & ex ea tam aperte fluunt, ut Viri celeberrimi HUGENIUS & LEIBNITIUS, qui duo ejus segmenta quadrarunt, non potuissent non pari facilitate cætera omnia segmenta & sectores quadrabiles reperire, si animum intendere voluissent.

*Acta Erud.
 Lips. 1699.
 Sept. p. 427*

Cum enim, ut vulgo notum, BL æquetur arcui circulari AL, & spatium externum ABN segmento circulari ALI, poterit, proprietatis hujus ope, spatium cycloidalium quodvis imaginabile eo reduci, ut non nisi figuræ rectilineæ & segmenta quædam circularia habeantur; idcirco, ut spatium fiat quadrabile, illi tantum termini, qui ex segmentis circularibus constant, mutuo se destruere sunt fingendi, & nihilo æquales ponendi [quod fundamentum solutionis est]; e qua deinde suppositione, quantitates assumptæ facile determinantur. Quæritur ex. gr. quantæ sint assumendæ rectæ HK, HI, ut Zona IKDB quadraturam admittat: Pono HA = a , HK = x , HI = z , KM = p , IL = q , AM vel DM = s , AL vel BL = t ; erunt sectores AHM = $\frac{1}{2}as$, & AHL = $\frac{1}{2}at$; adeoque segmenta AKM [ADO] = AHM — KHM = $\frac{1}{2}as - \frac{1}{2}px$, & AIL [ABN]

Ssss 3

[ABN]

No. XCII. $[ABN] = AHL - IHL = \frac{1}{2}at - \frac{1}{2}qz$. Sed segmentum cycloïdicum $AKD = KO - ADO = KO - AKM = AK \times (KM + MD) - AKM = AK \times (\frac{1}{2}KM + AM) - AKM = (a - x) \times (p + s) - \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}px = ap - \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}as - xs$; & pariter segmentum alterum $AIB = ag - \frac{1}{2}qz + \frac{1}{2}at - zt$; ac proinde zona $IKDB = AIB - AKD = ag - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs$; ubi liquet, quatuor priora membra denotare figuras mere rectilneas; solasque quantitates reliquas, quas ingrediuntur t & s , impedire quo minus zona sit quadrabilis: facio ergo has æquales nihilo, ut sit $\frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$; ubi si posuero t habere ad s rationem quamcunque [numeri tamen ad numerum, ut, uno arcu dato, alter geometricè construi possit,] semper habebo æquationem, quæ, litteris t & s eliminatis, relationem ipsius z ad x patefaciet; nempe, si $t = 2s$, fiet $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x$; si $t = 3s$, habetur $z = \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}x$; si $t = 4s$, erit $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}x$, & sic perpetuo in eadem progressionè (*). Cumque etiam ex data recta HK , sinu nempe complementi arcus AM , per vulgata analysi reperiri possit sinus complementi arcus dupli, tripli, quadrupli, &c. poterit adhuc z in aliis terminis inveniri; nempe si $t = 2s$, erit $z = (2xx - aa) : a$; si $t = 3s$, $z = (4x^3 - 3aax) : aa$; si $t = 4s$, $z = (8x^4 - 8aaxx + a^4) : a^3$, &c. (b) qui valores cum superioribus, singuli cum singulis, collati, novas porro æquationes subministrabunt, per quas ipsa quoque x , seu HK , determinabitur.

Atque ad eundem modum infinita alia spatia quadrabilia detegi possunt.

(*) Nam cum ponatur $\frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$, vel $(a - 2z)t = (a - 2x)s$, si fiat $t = ns$ [n denotante numero quovis integro] erit $(a - 2z)n = a - 2x$, unde est $z = (n - 1)a : 2n + x : n$, hoc est, si $n = 2$, $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x$; si $n = 3$, $z = \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}x$; si $n = 4$, $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}x$, &c.

(b) Vide Num. XCVII. Jam vero $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x = z = (2xx - aa) : a$, dat $4xx - ax = \frac{1}{2}aa$, vel $x = (1 + \sqrt{41})a : 8$. Et $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x = z = (4x^3 - 3aax) : aa$ dat $12x^3 - 10aax - a^3 = 0$, &c.

possunt. Sic reperiri potest, ex. gr. sector quadrabilis D A B re- No. XCII.
ctis AB, AD comprehensus, vel zona BDLM, arcu cycloidali
BD & circulari LM intercepta, quæ quidem perpetuo sectoris
dupla est (*). Existente namque HK seu $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{33}$,
vel $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, vel $32x^4 - 32aaa xx - a^3x + 4a^4 = 0$; &c.
& assumpto arcu AL vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, &c.
ipsius AM, erit subinde sector BAD = triang. HAL —
triang. HAM, & zona differentię triangulorum dupla (d).

Methodum vero tam facilem haud alia fini pandere volui,
quam ut Frater, exemplo meo, ad paria præstanda incitatus, mei
quoque Problematis Isoperimetrici promissam analyfin tandem a-
liquando nobis impertiat.

Videatur Nus. XCV.

(*) Nam sector BAD = segm.
ADBA — segm. ADA, & zona
BDLM = sp. ABLMA — sp.
ADM. Est autem sp. ABLMA du-
plum segm. ADBA, & sp. ADM
duplum segm. ADA. Etenim sp.
ABLMA = ANBI — ANBDA
— AMLI = ANBI — 2AMLI
[quia ANBDA = AMLI] =
(a — z)(t + q) — at + qz =
aq — tz. Sed segment. ADBA
= ANB — sp. ANBDA =
ANB — AMLI = $\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}tz$. Pa-
riter spat. ADM = ap — sx, &
segm. ADA = $\frac{1}{2}ap - \frac{1}{2}sx$. Ideo
zona BDLM = aq — tz — ap
+ sx, & sector ABD = $\frac{1}{2}aq -$
 $\frac{1}{2}tz - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}sx$. Illa igitur

istius dupla.

(d) Ut tam zona quam sector
sint quadrabiles, pone terminos
— rz + sx, quos ingrediuntur t &
s, æquales nihilo, & erit rz — sx,
vel, si fiat t = ns, z = x : n, nec
non sector = $\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}ap = \frac{1}{2}HAL$
— $\frac{1}{2}HAM$. Sit n = 2, erit $\frac{1}{2}x =$
z = (2xx — aa) : a, unde est 4xx
— ax — 2aa = 0, cujus radix
x = $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{33}$. Sit n = 3, est
 $\frac{1}{2}x = z = (4x^3 - 3aax) : aa$, un-
de habetur 12x³ = 10aax, vel x =
a√ $\frac{1}{2}$. Fac n = 4, erit $\frac{1}{2}x = z =$
(8x⁴ — 8aaxx + a⁴) : a³, seu
32x⁴ — 32aaxx — a³x + 4a⁴
= 0, &c.

N^o. XCIII.

JACOBI BERNOULLI
S O L U T I O
P R O P R I A P R O B L E M A T I S
I S O P E R I M E T R I C I ,

Propositi in Actis Lips. mens. Maio 1697.

pag. 214. (^a)

Acta Erud. Lips. 1700. Jun. p. 261. **C**Um genuina solutio hujus Problematis nondum a quoquam fuerit exhibita, eam hic, donec suo tempore sequatur analysis, curioso Lectori in sequente Tabella contemplandam sisto, in

(^a) Problematis istius, quod inter præstantissimos Geometras BERNOULLIOS agitatum est satis diu, Solutionem communicavit *Johannes* cum LEIBNITIO, mense *Junio* 1698, cumque Noster istam suam Solutionem a^o. 1700 publici juris fecisset, Alter ad *Acad. Reg. Parisinam* Solutionem suam transmissit, Jan. 1701, sub sigillo, tum demum aperiendo, cum Frater analysim dedisset. Hanc vide N^o. XCV; *Johannis* vero Solutionem in *Actis Acad. Paris.* 1706. Deinde TAYLORUS in *Methodo increm.* a^o. 1715, idem Problema suo

more solutum dedit. Sed a^o. 1718 *Job. BERNOULLI* istud argumentum resumens, multo elegantius & simplicius rem exposuit; quam eodem fere tempore, eadem prope methodo tractavit HERMANNUS. Tandem EULERUS, an. 1732 & 33, in *Comm. Acad. Petrop.* Tom. VI. hoc idem Problema latissime acceptum solvit, & in Tom. VIII, qui dum hæc scribimus ad nos deferretur, idem exequitur, facillima usus methodo, cujus specimen dederamus N^o. LXXV, Nota a, pag. 770, quamque ideo, quia præoccupavit, accep-

in qua litteras a & b pono designare quantitates constantes, x & N. XCIII. y coordinatas curvæ quæsitæ, t ipsam curvam, p quantitatem quamcunque datam per x , & q quantitatem datam per t : (^b).

Si

acceptam ipsi referendam agnoscimus. Nunc satis erit, si æquationes Tabellæ sequentis, quanta poterimus brevitate, demonstremus, secundum D. Job. BERNOULLI methodum posteriorem.

(^b) Etsi Problema quod N. LXXV universaliter solutum est, cum Isoperimetrico aliquid habeat affinitatis, in eo tamen differunt, quod illud unquam complectatur conditionem, inveniendi scilicet curvam, cujus functio aliqua proposita sit *Maximum*, vel *Minimum*: istud vero insuper exigat ut curva quæsitæ sit datæ longitudinis. Quare non satis est hic spectare duo curvæ elementa, ut N. LXXV factum est: Non posset enim conditio *lex æquabilis* servari, cum nequeat esse [Vid. fig. A ibid.] $CG + GD = CL + LD$. Sed omnino consideranda sunt tria curvæ elementa, qualia sunt hic [fig. A & B] BC, CD, DE, quæ tribus infinite vicinis BF, FG, GE sint æqualia, & insuper talia, ut istorum functio proposita sit simili functioni illorum æqualis; quo fiet, ut hæc functio sit *Maximum*, *Minimum*ve. Id vero duplici ratione concipi potest: vel [fig. B] ut singula elementa BC, CD, DE singulis BF, FG, GE sint æqualia; fingendo nempe BC & ED circa polos B, E gyri incipere, & venire in situm BF, EG, talem ut sit

Jac. Bernoulli Opera.

$FG = CD$: Vel [Fig. A], ut æqualibus manentibus abscissarum [vel ordinarum] elementis QR, RS, ST, fingantur puncta C & D fluere in F & G, juxta rectas RO, SP; adeo ut, quanto breviores sunt rectæ BF, EG rectis BC, ED, tanto recta FG longior sit recta CD. In utraque autem hypothesi, binæ conditiones, isoperimetri altera, altera functionis maximæ, dabunt binas æquationes, exprimentes relationem inter CF & DG [Fig. A], vel inter Ca & Gb, vel Fa & Db [Fig. B], ex quarum æquationum comparatione deducetur æquatio curvæ ABCDE.

Inquiramus itaque statim quid ferat conditio isoperimetri, & primum in secunda hypothesi. [Fig. A]. Si centris B, K, E describantur arcus Fa, Cc, Dd, Gb, & ex æqualibus BCDE = BFGE auferantur æqualia Ba + Kc + Kd + Eb = BF + Kc + Kd + EG, remanebunt æqualia Ca + Db = Fc + Gd; unde est Fc - Ca = Db - Gd. Sed, si CF sumatur pro sinu toto, erunt Fc, Ca sinus angulorum FCc, CFa, vel CDO, BCN, & Fc - Ca differentia horum sinuum. Et, si DG sumatur pro sinu toto, erunt Db, Gd sinus angulorum DGb, GDD, vel DEP, CDO, & Db - Gd differentia horum sinuum. Ergo quoniam Fc - Ca = Db - Gd, erit

T t t t t

N. XCIII.

	Si	erit quantitas
1.	$dy = p dx : \sqrt{(aa - pp)}$	$\int p dy$ Maximum & $\int (dt : p)$ Minimum
2.	$dy = (a - p) dx : \sqrt{(2ap - pp)}$	$\int p dy$ Minimum
3.	$dy = ap dx : \sqrt{((bb - aa) pp - 2aap + a^4)}$	$\int (dt : p)$ Maxim.

4.

erit productum ex CF in diff. sinuum angul. BCN, CDO æquale producto ex DG in diff. sinuum ang. CDO, DEP, quæ producta servant uniformitatis legem; eundem enim situm habet lineola CF inter angulos BCN & CDO, quam lineola DG inter angulos CDO, DEP. Quamobrem, cum positis abscissis AQ, AR, &c. = x, ordinatis QB, RC, &c. = y, curva AB, ABC, &c. = t, sit CF = ddy, sinus ang. BCN vel CDO = dy : dt, & differentia sinuum ang. BCN, CDO = $d \frac{dy}{dt}$; conditio isoperimetri dabit, positis dx constantibus, $ddy \cdot d \frac{dy}{dt} = \text{constanti}$.

Et similiter, positis dy constantibus, habebitur $ddx \cdot d \frac{dx}{dt} = \text{constanti}$.

Sed in prima hypothesi elementi dt constantis [fig. B], si centro K describantur arcus Cc, Gg; cum sit CD = FG, erit quoque Fc = Dg. Igitur triangula Fdc, Deg, quæ similia sunt, ut liquet, erunt

æqualia, ideoque Fd = Dc, seu ab — aF = bD — be. At, si sumatur Ca pro sinu toto, erunt ad, aF tangentes angulorum aCd, aCF, vel ipsis æqualium CDO, BCN, & ad — aF est harum tangentium differentia. Sed, si sumatur Gb pro sinu toto, erunt bD, be tangentes angul. bGd, bGe, aut ipsis æqualium DEP, CDO, & bD — be harum tangentium differentia. Igitur, propter ad — aF = bD — be, erit productum ex Ca in diff. tangentium ang. BCN, CDO æquale producto ex Gb in diff. tangentium ang. CDO, DEP. Itaque cum sit Ca = ddy, & tangens anguli BCN vel CDO = dy : dx, atque differentia tangentium = $d \frac{dy}{dx}$; conditio isoperimetri dabit, positis dx constantibus, $ddy \cdot d \frac{dy}{dx} = \text{const.}$

Et similiter ostendi posset, ex eadem figura, quod, positis pariter dt constantibus, sit $ddx \cdot d \frac{dx}{dy} = \text{const.}$

Inquiramus nunc, quid ferat conditio

4.	$dy = adx : \sqrt{(pp - aa)}$	$f(dy:p)$ Maxim. & $spdt$ Minim.
5.	$dy = (p - a)dx : \sqrt{(2ap - aa)}$	$f(dy:p)$ Minim.
6.	$dy = adx : \sqrt{(bb - 2bp + pp - aa)}$	$spdt$ Max.

N. XCIII.

T t t t t 2

7.

ditio altera functionis cujuspian maximæ vel minimæ, percurrando casus omnes in Tabella Autoris enumeratos.

I. Si *Max.* vel *Min.* debeat esse $spdy$, seu summa functionis cujusvis p abscissæ [fBH] ductæ in elem. BN vel HI ordinatæ; erit [fig. A] ex natura *Maximi*, fBH . HI + fCI . IL + fDL . LM = fBH . Hi + fFi . il + fGl . lM, seu, demptis utrinque communibus ($fBH - fCI$). Ii = ($fCI - fDL$). Ll, quæ æquatio uniformitatis legem servat, cum Ii eodem modo se habeat respectu BH & CI, ac Ll respectu CI & DL. Est autem $fBH - fCI = dp$, & Ii = $d dy$. Quare conditio proposita dat $d dy$. $dp =$ constanti, positis nempe dx constantibus. Sed in eadem hyp. conditio isoperimetri dabat $d dy$. $d \frac{dy}{dt} =$ const. Data est igitur ratio inter $d dy$. dp & $d dy$. $d \frac{dy}{dt}$, seu inter dp & $d \frac{dy}{dt}$. Sit ratio hæc $a : 1$. Ergo $ad \frac{dy}{dt} = dp$, & integrando $ady : dt = p + c$, seu $ady = (p + c) dt$. Quod

si mavis æquationem inter elementa coordinatarum dx & dy , quadrando habebis $aa dy^2 = (p + c)^2 dt^2 = (p + c)^2 dx^2 + (p + c)^2 dy^2$, seu $\pm dy = (p + c) dx : \sqrt{(aa - (p + c)^2)}$. In qua formula universalis, si ponas constantem arbitrariam $c = 0$, habebis 1^{am}. æquat. Tabellæ. Si vero ponas $c = -a$, habebis 2^{am}. Utrum Curva inventa det $spdy$ *Maximum* vel *Minimum*, [præstat enim utrumque pro diversa ratione a ad c] quomodo agnoscat docet Noster N^o. XCVI. Probl. I.

Inde etiam derivantur æq. 4 & 5 Tabellæ. Nam si $f(dy:p)$ debeat esse *Max.* vel *Min.* pone $aa : p = p$. & erit $spdy$ *Max.* aut *Min.* atque ideo $\pm dy = (p + c) dx : \sqrt{(aa - (p + c)^2)} = (aa : p + c) dx : \sqrt{(aa - (aa : p + c)^2)} = (a + pc) dx : \sqrt{(pp - (a + pc)^2)}$. Quæ, ponendo $c = 0$, dat æq. 4; sed 5, ponendo $c = -1$.

II. Si *Maxim.* vel *Minim.* debet esse $spdt$, seu summa functionis fBH ductæ in BC elem. curvæ; erit ex natura *maximi*, fBH . BC + fCI . CD + fDL . DE = fBH . BF + fFi . FG + fGl . GE, seu, demptis communibus fBH . Ca - fCI . Fc = fCI . Gd - fDL . Db. Sed sunt Ca = BN

N. XCIII.

7.	$dy = q dt : \sqrt{(aa + qq)}$	$f q dy$ Maxim. & $f y dq$ Min. vel Max
8.	$dy = (a - q) dt : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$	$f q dy$ Min. & $f y dq$ Max. vel Min.

9.

$\frac{BN}{BC} CF, FC = \frac{CO}{CD} CF, GD = \frac{CO}{CD} GD, \& Db. = \frac{DP}{DE} GD$, quibus substitutis habetur æquatio uniformis & ordinata $(\frac{BN}{BC} fBH - \frac{CO}{CD} fCI)$

$$CF = (\frac{CO}{CD} fCI - \frac{DP}{DE} fDL) GD.$$

$$\text{Est autem } CF = ddy, \& \frac{BN}{BC} fBH = \frac{pdy}{dt}, \text{ atque } \frac{BN}{BC} fBH - \frac{CO}{CD} fCI = d \frac{pdy}{dt}.$$

Quare conditio proposita dabit $ddy. d \frac{pdy}{dt} = \text{const.}$ Sed isoperimetri conditio dat $ddy. d \frac{dy}{dt} = \text{const.}$ Data igitur ratio est

inter $d \frac{pdy}{dt}$ & $d \frac{dy}{dt}$. Sit ratio hæc

$$b : 1, \& \text{erit } bd \frac{dy}{dt} = d \frac{pdy}{dt}, \text{ atque}$$

integrando, constante addita, $b dy : dt = p dy : dt + a$, vel $b dy - p dy = a dt$; quadrando $(b - p)^2 dy^2 = a a dt^2 = a a dx^2 + a a dy^2$, unde fit $\pm dy = adx : \sqrt{(b - p)^2 - a a}$, quæ est æquatio 6, degenerans in 4, si facias $b = c$.

Inde vero fluunt æq. 3. & 1. Nam si $f(dt : p)$ debeat esse *Max.* vel *Min.*, pone $aa : p = p$, & erit $f p dt$ *Max.* vel *Min.* ideoque $\pm dy = adx : \sqrt{(b - p)^2 - a a} = adx : \sqrt{(b - aa : p)^2 - a a} = ap dx : \sqrt{(bp - aa)^2 - a app}$, quæ est æq. 3, degenerans in 1, ubi fit $b = 0$.

Ubi tamen notandum æquationes 3 & 6, non ad Maxima $f p dt$ & $f(dt : p)$, sed ad Minima pertinere.

III. Si *Max.* vel *Min.* debeat esse $f q dy$, id est, summa functionis cujusvis q arcus AB [fAB] ductæ in elem. BN ordinatæ, erit [fig. B] ex natura *Maximi*, $fAB. BN + fABC. CO + fABCD. DP = fAB. Bn + fABF. Fo + fABFG. Gp$, seu $fAB. (BN - Bn) + fABC. (CO - Fo) + fABCD. (DP - Gp) = 0 = fAB. Ca - fABC. (Ca + Gb) + fABCD. Gb$, aut denique $(fABC - fAB) Ca = (fABC - fABCD) Gb$, quæ est æquatio ad legem uniformitatis ordinata. Hæc vera, quia $Ca = ddy$, & $fABC - fAB = dq$, dat $ddy. dq = \text{const.}$ positis nempe dt constantibus. Sed, in eadem hyp. conditio isoperimetri dat $ddy. d \frac{dy}{dx} = \text{const.}$

Quaro

N. XCIII. quantitate quacunq̄e constante c ; eaque ratione id effici, ut curva inventa non tantum conditioni præscriptæ satisfaciatur, sed datæ quoque fiat longitudinis: exempli gratia, loco primæ æquationis $dy = p dx : \sqrt{(aa - pp)}$ substitui potest $dy = (p + c) dx : \sqrt{(aa - pp - 2cp - cc)}$ vel etiam ista, $dy = (p - c) dx : \sqrt{(aa - pp + 2cp - cc)}$; quibus curvæ denotantur, quæ Maximum $spdy$ comprehendunt, insuperque determinatam longitudinem, eamque pro quantitate litteræ c majorem minoremve, obtinent.

Sciendum etiam est, reperiri posse æquationes curvarum, quarum $spdy$, $sqdy$, &c. est *Maximum Minimum*ve, cum quantitates, quæ litteris p & q designantur, non tantum simpliciter datæ sunt per x vel z , sed etiam promiscue ex x & y , vel z & y compositæ. Hoc fini sumo differentiale ipsius p [considerando y instar constantis] quod voco mdx , facioque $r = fmdx$ & denique $dy = r dx : \sqrt{(aa - rr)}$; quo pacto habebō æquationem curvæ, cujus $spdy$ est *Maximum*. (4) Similiter si differentiale ipsius

g. quam primæ substituit Noster, $dy = (p + c) dx : \sqrt{(aa - (p + c)^2)}$, dabit quidem $spdy$ *Maximum* vel *Minimum*; non vero $f(di: p)$, cui convenit $dy = apdx : \sqrt{(bp - a^2)^2 - a^2p^2}$ a priori diversa, nisi quando illic c , hic b sunt $= 0$. Dedimus autem, in Nota superiore, pro singulis casibus æquationes completas.

(4) Si p sit functio ipsarum x & y quam designabimus sic $fAH \& HB$, tunc, ubi $spdy$ debet esse *Max.* vel *Min.* erit [fig. A] ex natura *Maximi*, $fAH \& HB$. $HI + fAI \& IC$. $I'L + fAL \& LD$. $LM = fAH \& HB$. $Hi + fAi \& iF$. $il + fAl \& lG$. lM , quod reducitur, demptis communibus, ad $(fAi \& iF$

$- fAH \& HB)$. $Ii - (fAi \& iF - fAl \& lG)$. $IL = (fAl \& lG - fAi \& iF)$. $lI - (fAl \& lG - fAL \& LD)$. LM , quæ debitam servat uniformitatem. Itaque cum $fAi \& iF - fAH \& HB$ sit differentiale functionis p , si dp ponatur $= mdx + ndy$ [quia p datur in x & y] erit $(fAi \& iF - fAH \& HB)$. $Ii = (mdx + ndy) ddy = mdxddy + ndyddy$. Sed $(fAi \& iF - fAl \& lG)$. IL designat productum ex $IL [dy]$ in differentiale functionis p ita sumptum, ut x manente [est enim $IC = iF]$ y augeatur quantitate ddy [Nam Ai dum sit AI , incrementum est $li = ddy$], hoc est $(fAi \& iF - fAl \& lG)$. $IL = nddy$. $dy = ndyddy$. Quare, id

ipsius q [sumta semper y constante] vocetur ndt , fiatque $v =$ N. XCII. $\int n dt$, ac $dy = v dt : \sqrt{(aa + vv)}$, prodibit curva, cujus $\int q dy$ est *Maximum*. (*) Esto, exempli gratia, $p = \sqrt{(xx + yy)}$, hoc est, supponendum sit in fig. * applicatam PZ vel GH æquari * Vid. Fig. 1. N. LXXXII. Tab. XXXVI chordæ BF, erit differentia ipsius p , $x dx : \sqrt{(xx + yy)}$. Curva igitur, cujus $\int dy \sqrt{(xx + yy)}$ est *Maximum*, fit $dy = [r dx :$

$$\sqrt{(aa - rr)} =] dx \int \frac{x dx}{\sqrt{(xx + yy)}} : \sqrt{(aa - (\int \frac{x dx}{\sqrt{(xx + yy)}})^2)}; \text{ni-}$$

hilque ad omnimodam Problematis resolutionem deest, præter artificium separandi quantitates indeterminatas a se invicem, quod profequi instituti nostri non est. Dantur vero etiam casus, ubi nec opus est separatione, nempe cum littera y non amplius ingre-

id quod constanti æquale ponendum est, est $m dx ddy + n dy ddy = ndy ddy = m dx ddy$. Ergo, cum conditio isoperimetri det $ddy. d \frac{dy}{dt}$ $=$ const., erit inter $m dx$ & $d \frac{dy}{dt}$ ratio constans, quæ si dicatur $a : 1$, habebimus $m dx = ad \frac{dy}{dt}$ & integrando $r [fmdx] = ady : dt$, vel $ady = rdt$, atque quadr. $aady^2 = rrdt^2 = rrdx^2 + rrdy^2$, ac denique $dy = rdx : \sqrt{(aa - rr)}$.

(*) Pariter si q designet $fAB \& AH$, sitque $\int q dy$ *Max.* vel *Min.*, erit [fig. B] ex natura Maximi, $(fAB \& AH)$. $Hi + (fABC \& AI)$. $IL + (fABCD \& AL)$. $LM = (fAB \& AH)$. $Hi + (fABF \& Ai)$. $Il + (fABFG \& Ai)$ IM , quæ æquatio reducitur ad $(fABC \& AI - fAB \& AH)$. $li - (fABC \& AI - fABF \& Ai)$. $Il - (fABCD \& AL - fABC \& AI)$. $li - (fABCD \& AL$

$- fABFG \& Ai)$. LM , quæ uniformis est in utroque membro. Analytice autem redditur sic. Quoniam $fAB \& AH = q$ data in t & y , erit $(fABC \& AI - fAB \& AH)$. $Ii = dq. ddy = (m dy + ndt) ddy = m dy ddy + ndt ddy$, atque $(fABC \& AI - fABF \& Ai)$. $Il = mddy. dy = mdy ddy$. Quare id quod constans ponendum est, nempe $(fABC \& AI - fAB \& AH)$. $Ii - (fABC \& AI - fABF \& Ai)$. Il , erit $= mdy ddy + ndt ddy - mdy ddy = ndt ddy$. Sed conditio isoperimetri dat $ddy. d \frac{dy}{dx} =$ const. Erit itaque data ratio [$a : 1$] inter $ndt ddy$ & $ddy. d \frac{dy}{dx}$, vel inter ndt & $d \frac{dy}{dx}$. Unde est $ndt = ad \frac{dy}{dx}$ & integrando $v = ady : dx$, vel $ady = v dx$. Quadrando $aady^2 = vdx^2 = v v dt^2 = v r dt^2$, atque tandem $dy = rdt : \sqrt{(aa + vv)}$.

N. XCIII. ingreditur differentiale ipsius p ; velut si ponatur $p = (xx + yy) : a$ vel $= (xx + yy - by) : a$, &c. hoc enim in casu æquatio curvæ non erit diversa ab ipsa $dy = xx dx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$; sic ut hinc concludamus, eandem curvam BFN Problemati satisfacere, sive applicatam PZ quadrato applicatæ PF, sive quadrato chordæ BF, aut infinitis aliis modis proportionari supponamus; pariterque etiam in aliis. Obiter hic noto, quod *Frater* mentione hujus curvæ facta in *Ephem. Gall.* (f) asserit, *illam esse, quam refert linteum a pondere liquidi expansum, quam ego quoque mea Elastica attribuo.* Dicendum potius fuisset, *esse Elasticam, quam ego quoque asseram figura linteæ*; quandoquidem, post demonstrationem a me in *Actis Lips.* (g) exhibitam de Elastica, nemo dubitare possit; cum contra de figura linteæ id aliter hucusque non constiterit, nisi quod illud sæpe numero affirmaverim in *Actis*, eo jam tempore, quo *Frater* adhuc longe diversum sentiebat. Sed gaudeo, Geometris veritatem asserti mei paulatim agnosci.

Quod *Minima* concernit, quæ Tabulæ inscriui, hoc noto peculiare; quod quamquam eadem sit curva, quæ Maximum $\int p dy$ & Minimum $\int (dt : p)$ suppeditat, ista tamen curva priore prærogativa in genere duntaxat figurarum Isoperimetrarum, altera vero in ordine ad omnes omnino curvas potitur (h). Secus se res habet cum Maximo $\int p dy$ & Minimo $\int (dt : p)$: præterquam enim quod non datur Maximum $\int (dt : p)$, quod tale sit in ordine ad omnes curvas, hoc quod tale tantum est iater figuras Isoperimétras,

(f) N°. LXXXII. pag. 816.

(g) N°. LXVI. pag. 640. seq.

(h) Quia scilicet in æquatione universalis pro $\int (dt : p)$ Minimo vel Maximo, $dy = ap dx : \sqrt{(bp - aa)^2 - aapp}$, facta est $b = 0$ ut degeneret in $dy = p dx : \sqrt{(aa - pp)}$. Sed $b : 1$ erat ratio inter $d \frac{dy}{pdt}$ & $\frac{dy}{dt}$ [Vid. Not. b. Art. II]

Idem igitur factum est, ac si posuissemus simpliciter $d \frac{dy}{pdt} = 0$, vel

$\frac{dy}{pdt} = \text{const.}$ id quod juxta Reg.

N°. LXXV, Not. a, pag. 771, suppeditat curvam quæ iater omnes dat $\int (dt : p)$ Minimum.

tras, eidem curvæ non competit, cui *Minimum* quadrat $\int p dy$, N. XCIII. ut ex Tabella liquet. Quemadmodum etiam non existimandum est, curvam illam, quæ uno in situ *Minimum* $\int p dy$ subministrat, in alio exhibere *Maximum*, sive, duas priores Tabulæ hujus æquationes designare positiones tantum diversas unius ejusdemque curvæ; quanquam in casu $p = x$ utraque conveniat circulo. Ratio est, quod si per p potentia quædam intelligitur ipse x , pro exponente habens fractionem, cujus numerator est unitas, denominator numerus quilibet n , curva æquationis $dy = (1 - p) dx : \sqrt{(2p - pp)}$ perpetuo mechanica est & a quadratura circuli dependet [solo, quem dixi, casu excepto, ubi $n = 1$,] cum, observante Fratre ⁽¹⁾, illa, quæ æquationi $dy = p dx : \sqrt{(1 - pp)}$ respondet, sit alternatim algebraica: reperio ^(k) enim si $n = 2$, applicatam y alterius curvæ fore $= (p+1) \sqrt{(2p - pp)} - f(dp : \sqrt{(2p - pp)})$; si $n = 3$, y fore $(pp + p + 3) \sqrt{(2p - pp)} - f(3 dp : \sqrt{(2p - pp)})$; si $n = 4$, $y = (p^3 + pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}) \sqrt{(2p - pp)} - f(\frac{1}{2} dp : \sqrt{(2p - pp)})$, & ge-

(1) N^o. LXXXII. pag. 817.

(k) Etenim, si $p = x^1 : n$, erit $x = p^n$ & $dx = np^{n-1} dp$, quo substituto, erit $y [f((1 - p) dx : \sqrt{(2p - pp)})] = n f((p^{n-1} - p^n) dp : \sqrt{(2p - pp)})$. Sed (A) $= n f(p^n dp : \sqrt{(2p - pp)}) = p^{n-1} \sqrt{(2p - pp)} - (2n - 1) f(p^{n-1} dp : \sqrt{(2p - pp)})$, ut facile liquet. Ergo $y = n f(p^{n-1} dp : \sqrt{(2p - pp)}) + p^{n-1} \sqrt{(2p - pp)} - (2n - 1) f(p^{n-1} dp : \sqrt{(2p - pp)})$ seu (B) $y = p^{n-1} \sqrt{(2p - pp)} -$

Fac. Bernoulli Opera.

$(n-1) f(p^{n-1} dp : \sqrt{(2p - pp)})$. In æquat. B, pro ultimo termino, substitue valorem ejus deductum ex æq. A, in hac scribendo $n - 1$ pro n , & habebis (C) $y = (p^{n-1} + p^{n-2}) \sqrt{(2p - pp)} - (2n - 3) f(p^{n-2} dp : \sqrt{(2p - pp)})$. Hic iterum mutando terminum ultimum juxta æquat. A, habebis (D) $y = (p^{n-1} + p^{n-2} + \frac{2n-3}{n-2} p^{n-3}) \sqrt{(2p - pp)} - \frac{2n-3 \cdot 2n-5}{n-2} f(p^{n-3} dp : \sqrt{(2p - pp)})$. Atque ita pergen- do, invenies eandem Seriem, quam hic tradit Noster.

V u u u u

N. XCIII.

& generaliter $y = (p^{n-1} + p^{n-2} + ap^{n-3} + bp^{n-4} + cp^{n-5} + \&c. \text{ usque ad } +e) \sqrt{(2p - pp)} - f(edp: \sqrt{(2p - pp)})$, fumendo nempe $a = \frac{2n-3}{n-2}$, $b = \frac{2n-3 \cdot 2n-5}{n-2 \cdot n-3}$, $c = \frac{2n-3 \cdot 2n-5 \cdot 2n-7}{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}$ & $e = \frac{2n-3 \cdot 2n-5 \cdot 2n-7 \dots \cdot 3}{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \dots \cdot 1}$.

Instituta jam collatione inter æquationem $dy = dx \int \frac{p dx}{x} : \sqrt{(1 - (\int \frac{p dx}{x})^2)}$ a Fratре mens. Dec. 1697 (1) exhibitam, & meam $dy = p dx : \sqrt{(1 - pp)}$ hic traditam; facile est animadvertere, utrique convenire non posse, nisi cum p simplicem potestatem denotat ipsius x , qui quidem ipsissimus ille casus est, quem ego initio proposueram: adeo ut si ejus solutione *Frater* acquievisset, neque extendere Problema latius voluisset, cæteraque dissimulasset, quod concernit arcum BF , sive *Maximum* $\int q dy$, nunquam certe in paralogismi suspicionem apud me incidisset; quandoquidem solo hoc superpondio, quo suam Solutionem generaliorrem efficere voluit, vitium methodi suæ mihi prodidit; sicque etiam iis, quæ in se alias proba erant, pretium ademit.

Dico dissimulandam fuisse omnino partem Problematis, quæ spectat arcum BF ; quippe quæ de illa profert generaliter fallunt, neque æquatio legitima huc pertinens est $dy = dx \int \frac{q dx}{x} :$

$\sqrt{(1 - (\int \frac{q dx}{x})^2)}$; uti per verba sua, *D'où il est évident, &c.*

innuere velle videtur; nec etiam $dy = q dx : \sqrt{(1 - qq)}$; sed potius juxta Tabulam æq. 7. $dy = q dt : \sqrt{(1 + qq)}$, quæ ab illis non modo plane diversa est, etiam quando per q simplex denotatur potestas ipsius t , verum quoque curvas representat, quæ

(1) N°. LXXXII. pag. 818.

quæ primam mechanicarum classem nunquam excedunt, qualif. N. XCIII. cunque statuatur ratio algebraica inter t & q (^m); præterquam quod omnes rectificationem admittunt, tangensque anguli, quem ipsæ cum suis applicatis constituunt, quantitati q semper proportionatur (ⁿ). In specie observare possumus, si q potentiam denotat ipsius t , cujus index est fractio pro numeratore habens unitatem, & pro denominatore quemvis numerum n , constructionem curvæ ope solius Logarithmicæ perfici posse, una coordinatarum x & y semper existente algebraica & altera mechanica; idque alternatim juxta ordinem numerorum 1, 2, 3, 4, &c. quos litera n significare potest. Reperio enim, (^o) si hæc

$$V u u u u z \quad \text{deno-}$$

(^m) Etenim, quamadmodum ex æq. $cdy = (q + c) dx$, deduximus Nota b, Art. III, $dy = (q + c) dt$: $\sqrt{(aa + (q + c)^2)}$, pariter deducitur $dx = adt : \sqrt{(aa + (q + c)^2)}$. Igitur si ad abscissam communem t , describantur duæ curvæ, quarum ordinatæ sint $(q + c) : \sqrt{(aa + (q + c)^2)}$, & $a : \sqrt{(aa + (q + c)^2)}$ erit area prioris proportionalis ordinatæ y , posterioris ordinatæ x curvæ quæsitæ.

(ⁿ) Hæc tangens, quæ est $dy : dx$ æquatur quantitati $(q + c) : a$. Igitur, quia Noster facit hic $c = 0$, tangens proportionatur ipsi c .

(^o) Etenim, si statuas $t = q^n$, & $dt = nq^{n-1} dq$, erit $dy [qdt : \sqrt{(1 + qq)}] = nq^n dq : \sqrt{(1 + qq)}$. Sed eadem ratione qua usi sumus N^c. LXXXII, pag. 817, Not. e, invenes y , seu $nf(q^n dq : \sqrt{(1 + qq)}) - q^{n-1} \sqrt{(1 + qq)} - (n-1) f(q^{n-2} dq :$

$\sqrt{(1 + qq)})$. Igitur y seu summatio ipsius $q^n dq : \sqrt{(1 + qq)}$ pendet a summatione ipsius $q^{n-2} dq : \sqrt{(1 + qq)}$, & eodem argumento hæc pendet a summatione ipsius $q^{n-4} dq : \sqrt{(1 + qq)}$, &c. Quare tandem deveniemus vel ad $q dq : \sqrt{(1 + qq)}$, quod integrabile est & $= \sqrt{(1 + qq)}$, vel ad $dq : \sqrt{(1 + qq)}$, quod perdet a Logarithmis seu quadratura Hyperbolæ. Istud accidit, si sit n par; illud si impar. Ergo y algebraice reperitur si n impar, per Logarithmos si n par. Verum $n [adt : \sqrt{(1 + qq)}] = nq^{n-1} dq : \sqrt{(1 + qq)}$ pendet a Logarithmis, si n impar, quia tunc $n - 1$ est par: algebraice vero determinatur, si n par, quia tunc $n - 1$ est impar. Ceterum, eadem methodo, quam adhibuimus Nota k, Series Auctoris nostri facillime investigatur.

N. XCIII. denotet numerum imparem, fore $y = (q^{n-1} - aq^{n-3} + bq^{n-5} - cq^{n-7} \&c. \text{ usque ad } \pm e) \sqrt{(1+qq)}$, & si parem $y = (q^{n-1} - aq^{n-3} + bq^{n-5} - cq^{n-7} \&c. \dots \dots \pm e) \sqrt{(1+qq)} = f(edq: \sqrt{(1+qq)})$, sumtis $a = \frac{n-1}{n-2}$,
 $b = \frac{n-1 \cdot n-3}{n-2 \cdot n-4}$, $c = \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5}{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6}$, \dots , & $e = \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5 \cdot \dots \cdot 2}{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6 \cdot \dots \cdot 1}$ pro priore hypothefi, vel $e = \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5 \cdot \dots \cdot 3}{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6 \cdot \dots \cdot 2}$ pro posteriore; ne quid dicam de altera coordinatarum x , quæ eodem modo per q definietur. Sumta igitur recta quadam indeterminata, quæ vocetur q , perfpicuum est inveniri per illam posse x & y , unam algebraice & per logarithmos alteram, longitudinemque curvæ t semper fore $= q^n$.

Memoratu porro digna sunt, ut alia præteream; Quod una eademque curva est, quæ (in diversis positionibus) simul & *Maxim. $\int q dy$* & *Max. $\int (dy:q)$* suppeditat (^P); Quod eadem quoque exhibet *Minimum Maximumve $\int y dq$* vel *$\int x dq$* (*Minimum*, si crescentibus x , y & t crescit q ; *Maximum*, si decrefcit:) & Quod denique *Catenaria* privilegio inter alia non contemnendo plura comprehendit *Maxima Minimaque*; nempe *Maxima $\int (dy:x)$* , *$\int t dy$* , *$\int (dy:t)$* , *$\int y dt$* , *$\int x dt$* ; *Minima $\int t dy$* , *$\int x dt$* , *$\int y dt$* , prout ex æquationibus 4, 7, 8, 9, 11 elucet, quæ omnes in casu $p=x$, & $q=t$ curvæ huic conveniunt (^Q).
 Cæte-

(^P) Nempe cujus æquatio est XXXIX ostendimus esse $dy = adx$:
 $dy = qdt: \sqrt{(aa+qq)}$ five $dx = \sqrt{(2az + zz)}$, vel pro z scribendo
 $ax = a$, $dy = adx: \sqrt{(xx - aa)}$,
 $\sqrt{(aa+qq)}$ five $dx = qdt: \sqrt{(aa + qq)}$,
 aut etiam $dy = a dt: \sqrt{(aa + tt)}$,
 nec non $dx = t dt: \sqrt{(aa + tt)}$.

(^Q) Cujus æquationem N^o.

Cæterum non possum quin moneam, superfluam *Fratrem* operam impendisse quærendis radiis curvaturæ seu osculi suarum curvarum; quippe quod jam dudum in *Actis Lips.* a me factum fuerat; excusanda tantum fuissent quæ habentur mens. Jun. 1694, p. 267. seq. (¹) cum hæ curvæ nil sint nisi totidem diversæ species mearum Elasticarum.

Hæc ad priorem Solutionem fraternam, quæ mens. Dec. 1697 (¹) comparuit, notanda fuerunt. Quod alteram Solutionem, seu prioris potius correctionem mens. Apr. 1698 (²) insertam concernit, notum me rogasse *Fratrem*, ut illam iteratæ revisioni subjiceret, ipsum vero in hunc usque diem nondum exorari se passum. Quapropter ejus hic vices suppleo, Lectoresque nostros moneo, conjecturas has secundas, quoad *Maximum spdy* recte quidem, at haud æque feliciter quantum ad *Maximum sqdy* cessisse; locoque æquationis dq [vocando q quod ipsi est v] $= ddy : (ds^2 - dy^2)$, scribendum fuisse $dq = addy : dx$, sumpto elemento non ipsius curvæ ds , sed ordinatæ dx pro constanti; quod ex æquatione 7^m. Tabulæ meæ facile ostenditur: Æquatio est $dy = qds : \sqrt{aa + qq}$; hinc fit $dx [\sqrt{(ds^2 - dy^2)}] = ads : \sqrt{aa + qq}$; adeoque $dy : dx = q : a$, hoc est $ady = qdx$, & differentiando $addy = dqdx$, sive $dq = addy : dx$. Q. E. D.

(¹) N°. LVIII. pag. 582. & seq.
(²) N°. LXXXIV.

(³) N°. LXXXII.

N^o. XCIV.

JACOBI BERNOULLI

NOVA METHODUS

Expedite determinandi radios osculi, seu curvaturæ, in curvis quibusvis algebraicis.

*Acta Erud.
Lips. 1700.
Nov. p. 508*

Methodus hæc, nec in radicum æqualitate, nec in Theorematis nostris *Jun. Act. 1694* * exhibitis fundata, sed singulari quadam cruta ratione †, radium curvaturæ in omni curva algebraica, citra ullum differentialium adminiculum, generaliter exhibet; idque tanta facilitate & promptitudine, ut nihil possit expeditius. Sufficit enim pro singulis æquationis terminis, e vestigio & nullo prævio calculo, alios quosdam substituere, prout e mox dicendis patebit.

Esto curvæ cujusvis algebraicæ [cujus utique tangens inventa supponitur] abscissa $AB = x$, applicata $BC = y$, & subnormalis $BD = z$, [quæ omnes datæ sunt, ob datum C punctum,] & sit inveniendus radius osculi, seu curvaturæ CE .

REGULA. Æquatione tota, quæ curvæ naturam exprimit, ad unam partem constituta; & deleta, si adsit, termino, quem neutra indeterminatarum x & y ingreditur; reliquorum singuli, in quibus reperitur sola x , repræsententur per $f x^m$; in quibus sola y , per $g y^n$, & in quibus reperiuntur junctim x & y , per $h x^r y^s$; deno-

* N^o. LVIII. pag. 578. 579. † N^o. CIII. Art. XXII. XXIII. XXIV.

denotantibus, nempe, litteris f, g, h , terminorum suorum co. N. XCIV. efficientes, & literis m, n, r, s exponentes potestatum ipsarum x & y . Tum vero fiat fractio

in cujus numeratore denominatore

$$\text{pro singulis } \left\{ \begin{array}{l} fx^m \\ gy^n \\ hx^r y^s \end{array} \right\} \text{ substituitur } \left\{ \begin{array}{l} + mfx^{m-1} x \dots \\ - ngy^n \dots \dots \\ + rhx^{r-1} y^s z \\ - shx^r y^s \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} + (m-mm)fx^{m-2} yy \\ + (n-nn)gy^{n-2} xz \\ + (r-rr)hx^{r-2} y^{s+2} \\ + (s-ss)hx^r y^{s-2} xz \\ - 2rshx^{r-1} y^s z \end{array} \right.$$

hoc est, loco datæ æquationis $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$ [quæ forma est, ad quam omnes referuntur,] scribatur $(mfx^{m-1}x - ngy^n + rhx^{r-1}y^s - shx^r y^s) : (+ (m-mm)fx^{m-2}yy + (n-nn)gy^{n-2}xz + (r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} + (s-ss)hx^r y^{s-2}xz - 2rshx^{r-1}y^s z)$; quo facto, ut denominator fractionis ad ipsius numeratorem, sic erit CD ad radii osculi quæsitum.

EXEMPL. I. Æquatio pro Parabolis omnis generis est $x - y^n = 0$. Conferatur x cum fx^m , & $-y^n$ cum gy^n ; erit $f = 1, m = 1, g = -1$, & $n = n$; quibus valoribus substitutis resultat fractio $(z + ny^n) : ((nn-n)y^{n-2}xz) = (z + nx) : ((nn-n)y^{n-2}xz) = [ob ny^{n-2}z = 1, ex natura Parabolæ] (z + nx) : ((n-1)z)$; unde $(n-1)z : z + nx = CD : CE$, sive $z : z + nx = CD : (n-1)CE$; quod propter subtangentem Parabolæ BF = nx , hanc facillimam Constructionem suppeditat. Ex puncto F, ubi tangens CF læcat axem, excitetur axi perpendicularis FG, cui

N. XCIV. cui occurrat producta DC in G, erit $DG = (n - 1) CE$;
 adcoque $CE = \frac{1}{n - 1} DG$.

EXEMPL. II. Sit æquatio curvæ $y^3 + x^3 + xxy - xyy + a^3 -$
 $aa y + aax - axx + ayy = 0$. Neglectis a^3 & collatis

$$\begin{aligned}
 &+ y^3 \text{ cum } gy^n, \text{ habetur } \dots\dots\dots g = 1, \text{ \& } n = 3 \\
 &+ x^3 \dots f x^m \dots\dots\dots f = 1 \text{ \& } m = 3 \\
 &+ xxy \dots h x^r y^s \dots\dots\dots h = 1, r = 2, s = 1 \\
 &- xyy \dots h x^r y^s \dots\dots\dots h = -1, r = 1, s = 2 \\
 &- aay \dots g y^n \dots\dots\dots g = -aa, n = 1 \\
 &+ aax \dots f x^m \dots\dots\dots f = aa, m = 1 \\
 &- axx \dots f x^m \dots\dots\dots f = -a, m = 2 \\
 &+ ayy \dots g y^n \dots\dots\dots f = a, n = 2
 \end{aligned}$$

quibus ubique surrogatis, exurgit fractio ($-3y^3 + 3xxz +$
 $2xyz - xxy - yyz + 2xyy + aay + aaz - 2axz - 2ayy$):
 ($-6yzx - 6xyy - 2y^3 - 4xyz + 2xxz + 4yyz + 2ayy - 2azx$).
 Dico hujus denominatorem ad numeratorem se habere ut CD
 ad quæsitam CE.

OBSERV. I. Cum data sit relatio inter x, y, z , seu AB,
 BC, BD, CD; poterit, ejus ope, semper una pluresve harum
 quantatum e fractione eliminari, eoque quæsitum in terminis
 plerumque simplicioribus exhiberi; ut supra, in *Exemplo I*, con-
 tigit.

OBSERV. II. Non opus est, ex data æquatione tollere prius
 fractiones & surditates, quando hæ simplices duntaxat potestates
 quantatum x & y innuunt. Tantundem enim est, ex. gr. $aa : x$
 atque $aa x^{-1}$, \sqrt{ax} atque $a^{1:2} x^{1:2}$, $\sqrt[3]{xyy}$ atque $x^{1:3} y^{2:3}$, &c.

OBSERV.

OBSERV. III. Imo nunquam illas tollere est opus, etiamsi **N. XCIV.** signa radicalia binomia & multinomia involvant. Non minus enim allignari potest, quid pro talibus in fractione sit substituendum. Sic si habeatur, in æquatione, quantitas furda $\sqrt[n]{(x^m + a^m)}$, brevitatis causa, dicta p ; ejus loco, in numeratore fractionis furrogo $(mx^{m-1}z):np^{n-1}$, in denominatore repono $+((m - mm)x^{m-2}yy):np^{n-1} + ((n-1)mmx^{2m-2}yy):nnp^{2n-1}$, pariterque etiam in aliis.

OBSERV. IV. Haud absimili methodo, tangentibus invenien-
dis Regula præscribi potest, quanquam eadem vulgari quoque
differentialium Calculo haud difficulter eliciatur. Sit rursus da-
ta æquatio $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$. Dico fore subnorma-
lem $BD = (-mfx^{m-1} - rhx^{r-1}y^s):(+ngy^{n-2} + shx^r y^{s-2})$;
subtangentem $BF = (-ngy^n - shx^r y^s):(+mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s)$;
segmentum axis $AF = (-ngy^n - shx^r y^s - mfx^m - rhx^{r-1}y^s):$
 $(+mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s)$; cui Regulæ similem in primo *Act-*
orum anno exhibuit Nob. D. TSCHIRNHAUS, nisi quod ipse, in
ordinanda æquatione, ad maximam potestatem y respicere jubeat,
quod hic non est necessè. Sufficit quod omnes termini æqua-
tionis ab una parte collocentur.

Atque hæc sunt, quæ publico hac vice impertiri lubuit. Eo-
rum veritatem qui examinare velit, Regulam nostram tentet in
variis curvis, de quorum radiis curvaturæ per alias methodos
jam constat: qui vero in artificium inventionis ipsum curiosius
inquirat, hoc sibi ad solvendum, velut ænigma, proponat; do-
nec solum dederit ipse.

Vide Num. CIII. Art. XXII. XXIII. XXIV.



Nº. XCV.

JACOBI BERNOULLI
 QUADRATURA
 ZONARUM CYCLOIDALIUM
 PROMOTA;

*Problema item centri gravitatis Sectoris solidi
 Cycloidici solutum.*

Confer. Num. XCII.

*Acta Erud.
 Lips. 1700.
 Dec. p. 551.*

Quemadmodum Problema sectionis angularis in ratione determinata numeri ad numerum, algebraicum est (*); sed indefinite in data ratione quacunque, transcendens: ita quoque Zonæ cycloidales quadrabiles, qualis IKDB, [Fig. 1] algebraice quidem determinantur, sicubi ratio arcuum AM & AL datur in numeris; indefinite vero, & generaliter, nulla æquatione algebraica finita exhiberi possunt; quamvis interim Problema facillime construere liceat, hoc modo: Sit AC portio cycloidis, A vertex, AH axis, AQ quadrans circuli genitoris, H centrum circuli. Fiat AP perpendicularis & æqualis ipsi AH, datoque in ea ubivis puncto G, bisecetur GP in R, ac junctæ HG ducatur parallela recta RS. Trajecta porro indefinite recta CEF parallela

(*) Vide Num. XCVII.

la ipsi HQ, quæ secet cycloidem in C, circulum genitorem in No. XCV. E, & axem in F; abscindatur in HQ quarta proportionalis ad AH, AG & CE, quæ sit HT: centro T, radio circuli genitoris, describatur arcus circuli secans cycloidem in duobus punctis, quorum remotius ab axe sit V, per quod transeat recta VN, parallela ipsi HQ & producta in O, ut sit NO = HF; erit O ad curvam quandam OSP, quæ rectam RS secabit in puncto optato S: hinc enim si demittatur in axem SK parallela HQ, cique abscindatur æqualis HI, ac per K & I agantur rectæ KD & IB, itidem parallelæ ipsi HQ, quæque secent cycloidem in D & B, circulum genitorem in M & L, erit & zona IKDB quadrabilis, hoc est, æqualis triangulis rectilineis HAL — HAM + IAL — KAM; & arcus AM ad AL in ratione data AG ad AH, ut requirebatur, Demonstrationem, quæ intellecta nostra analysi p. 427, A. 1699, (b) neminem latere potest, addere superfedeo. Inventio porro sectoris solidi IBAD, [Fig. 2.] oriundi ex conversione sectoris plani SAB circa axem AI, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile, calculum requirit prolixum magis, quam arduum. Salvo enim hujus errore, repe-

X x x x x 2 rio

(b) Vide Num. XCII. Ex quo liquet Zonam IKDB esse quadrabilem, si arcu AM ad arcum AL existente ut 1 ad n, ratio ipsius HI [z] ad ipsam HK [x] exprimitur per æquationem $z = (n-1)a : 2n + x : n$. Utrumque autem hic exequitur noster. Primo enim, si ponas AG ad AH [a] ut 1 ad n, cum sit AH: AG = [n:1] = CE: HT, erit HT = CE: n. Ductæ autem TV, HX, cum sint æquales radio atque adeo inter se, inter parallelas VN, CF, abscident æquales VX, HT. Est igitur VX = CE: n. Sed, ex nat. Cycloidis, VX = arc. AX, & CE = arc. AE. Igitur AX: AE

= 1: n. Hæc igitur est curvæ PSO natura, ut sumpta HF = NO, sit arcus AE ad arcum AX ut n ad 1. Itaque cum sit HI = SK, erit AL ad AM ut n ad 1. Deinde cum sit AP = AH = a, & AG = a: n, erit PR = GR [semidifferentia ipsarum AP, AG] = (n-1)a: 2n. Et cum sit HA: AG [= n:1] = HK [x]: KY, erit KY = x: n, adeoque SK = (n-1)a: 2n + x: n. Est autem SK = HI = z. Igitur $z = (n-1)a : 2n + x : n$.

Ergo, ex demonstr. N^o. XCII, Zona IKDB quadrabilis est & æqualis $\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px$ seu HA. IL = $\frac{1}{2}$ HI. IL = HA. KM + $\frac{1}{2}$ HK

894 QUADRATURA ZONARUM CYCLOIDALIUM.

No. XCV. rio quod, posita $AH = 1$, sumtaque $AK = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $KI = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$, distantia centri gravitatis Sectoris a vertice A, sit futura $(9 + 22\sqrt{\frac{1}{2}}) : (6 + 30\sqrt{\frac{1}{2}})$ (°).

$\frac{1}{2}HK.KM = 2HAL - HIL -$ (°) Vide Num. CIII. Art.
 $2HAM + HKM = HAL + IAL$ XXXI.
 $- HAM - AKM.$



No. XCVI.

N^o 92.

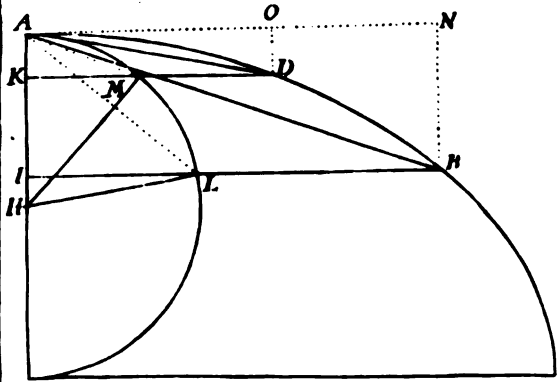


Fig. A. N^o 93.

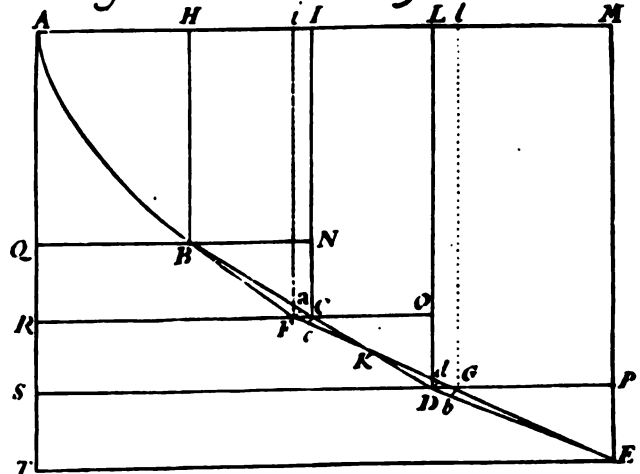
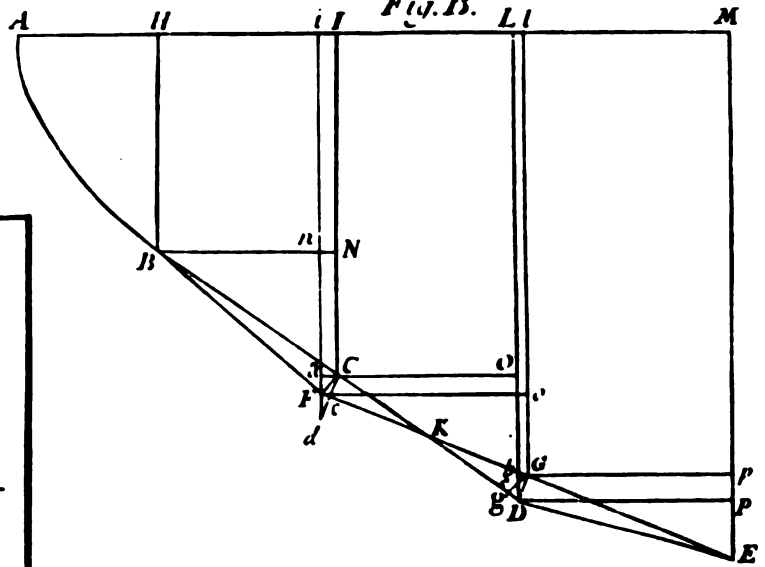


Fig. B.



N^o 94.

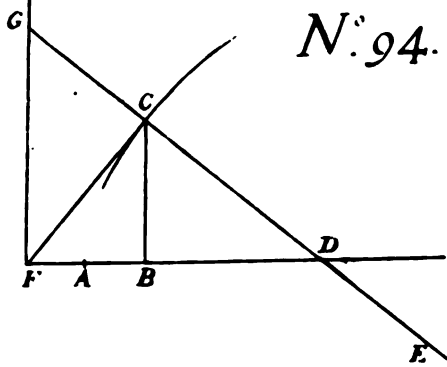
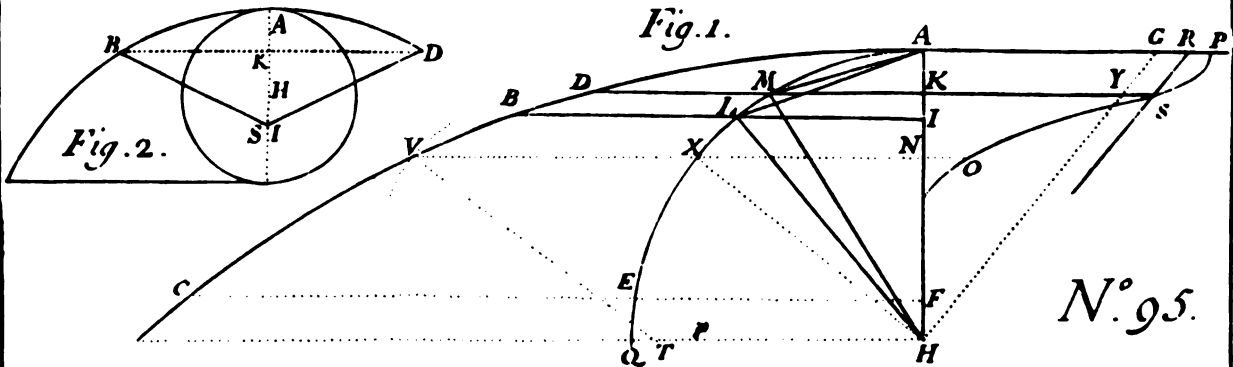
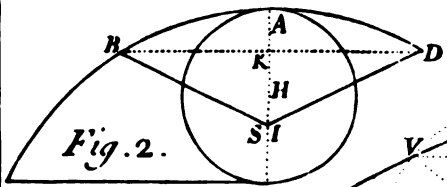


Fig. 1.



N^o 95.

Fig. 2.



Nº. XCVI.
Q. D. O. M. B. V.
ANALYSIN
MAGNI PROBLEMATIS
ISOPERIMETRICI,

In Actis Erudit. Lips. mens. Mai. 1697.

propositi,

Sub præsidio

JACOBI BERNOULLI
Math. Prof. & Academiæ p. t. Rectoris,

publice defendendam

Suscipit

Job. Jacobus EPISCOPIUS, Basil.

Ipsis Calendis Martiis 1701.

Edita primum

BASILEÆ;

1701.

Et in *Actis Erudit. Lips.* Mai. 1701. pag. 213.

INCOMPARABILIS
VIRORUM QUADRIGÆ,
Dn. MARCHIONIS HOSPITALII,
Dn. GODOF. GUILIELMI LEIBNITII,
Dn. ISAACI NEWTONI,
Dn. NICOLAI FATII DUILLERII,
Principum Mathematicorum,

Nominibus illustrissimis,

Analyfin suam devota mente inscribit,
æquissimis Censuris
demisse subjicit,

Præses.

A N A-



A N A L Y S I S

N. XCVI.

MAGNI PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI.



MAGNUM Problema appello, non tam ob solvendi difficultatem, [etsi tantam, ut certare facile possit cum difficillimis,] quam quod ad provehendos scientia fines, novasque regiones lustrandus viam nobis aperit. Cum enim cetera huc usque, seu in materia, seu in abstracto, proposita & agitata Problemata in primi secundique gradus differentialibus subsistunt; hoc unum, limitibus quasi tam artis circumscribi nescium, in altiosem penetrat elementorum classem. Neque Problematum natura pati videtur, ut via reperiat, qua sine tertii gradus differentiiis absolvi possit (*). Et quemadmodum aquatio simpliciter diffe-

(*) Vide tamen N°. XCIII, Nota b, pag. 875. seq.

N. XCVI. *differentialis exurgit, cum unius particula curva situs ad axem expenditur: nec non aequatio differentio-differentialis, cum duarum particularum mutua ad se invicem inclinatio consideratur, [quorum illud contingit, ubi data Curva affectio Tangentes duntaxat respicit; hoc, ubi Osculi seu Curvatura conditionem complectitur:] ita consentaneum est, ut ad tertias delabi differentias necessum sit, cum trium particularum curva inter se mutua relatio spectatur; tot enim, non pauciores, Isoperimetria conditio requirit: multiplicatis igitur objectis, perplexitatem auferi quid mirum? Hanc autem feliciter superaturis, arduique Problematis analysin methodice exhibituris, opera damanda est ut generalia separentur a specialibus, illaque his, Theorematum Lemmaticorum instar, pramittantur.*
Ad rem.

THEOREMA I.

In qualibet Curva, si plures applicata contigua se mutuo sequantur, quarum prima seu minima vocetur x' , vel x simpliciter, proxime major x'' , tertia x''' , quarta x'''' , &c. erit $x'' = x + dx$, $x''' = x + 2dx + ddx$, $x'''' = x + 3dx + 3ddx + dddx$, numeris scil. terminorum ordine exprimentibus coefficientes potestatum binomii. Si vero applicatarum maxima dicatur x , proxime minor x'' , sequens x''' , &c. erit $x'' = x - dx$, $x''' = x - 2dx + ddx$, $x'''' = x - 3dx + 3ddx - dddx$, signis insuper + & - alternatim se excipientibus, ut in potestatibus apotomiarum. Non secus si applicatarum differentia prima ordine vocentur dx' [vel dx], dx'' , dx''' , dx'''' , &c. erit $dx'' = dx \pm ddx$, $dx''' = dx \pm 2ddx + dddx$, $dx'''' = dx \pm 3ddx + 3ddd \pm dddd$. Et si earundem differentia secunda designentur per ddx' [ddx], ddx'' , ddx''' , &c. erit $ddx'' = ddx \pm dddx$, $ddx''' = ddx \pm 2ddd + dddd$. (\pm significat + in priore & - in posteriore hypoth.)

D E M O N S T R A T I O.

$$x' = x \pm dx. \quad dx'' = dx \pm ddx. \quad ddx''' = ddx \pm dddx.$$

$$x'' = x' \pm dx'' = x \pm 2dx + ddx. \quad dx''' = dx'' \pm ddx''' = dx \pm 2ddx + dddx.$$

$$x''' = x'' \pm dx''' = x \pm 3dx + 3ddx \pm ddx.$$

Q. E. D.

Simili modo, si abscissæ ab applicatis portiones axis ordine vocentur y [y], y'' , y''' , y'''' , &c. ostenditur, fore $y'' = y \pm dy$, $y''' = y \pm 2dy + ddy$, $y'''' = y \pm 3dy + 3ddy \pm dddy$; ut & $dy' = dy \pm ddy$, $dy'' = dy \pm 2ddy + dddy$. Et si relectæ portiones ipsius curvæ dicantur x' [x], x'' , x''' , &c. fore $x'' = x \pm dx$, $x''' = x \pm 2dx + ddx$, &c. nec non $dx'' = dx \pm ddx$, $dx''' = dx \pm 2ddx + dddx$, &c. Intellige, nisi forte differentiz primæ quantitatis variabilis y vel x ponantur æquales; quo casu altiores ejus differentiz omnes evanescent.

Nota, supponi, quod crescente vel decrescente quantitate variabili, crescant vel decrescant simul omnes ejus differentiz: quanquam enim plerumque secus accidit, id tamen calculum non turbat, nec aliud infert, quam differentias quasdam suppositionis nostræ esse negativas; cum negative crescere decrescere sit, & contra. Quæ autem differentiz in quovis particulari Problemate negativæ sint, quæ positivæ, absoluta demum analysi definiuntur.

T H E O R E M A I I.

Data sit positione recta AT, [Fig. 1] extraque illam, in diversis distantibus, puncta quatuor B, F, G, C, per qua transeant recta BH, FK, GL, CI perpendiculares, & BX, FY, GZ parallela ipsi AT. Tum, fixis manentibus extremis punctis B & C, reliqua F, G moveri incipiant super datis positione rectis FK, GL; hac tamen lege, ut summa trium jungentium rectarum BF +

Jac. Bernoulli Opera.

Y y y y

FG

N. XCVI. $FG + GC$ maneat constans & eadem : erit fluxio momentanea puncti F ad fluxionem momentaneam puncti G , hoc est, incrementum vel decrementum rectæ KF ad decrementum vel incrementum rectæ LG , ut differentia inter duo priora ad differentiam inter duo posteriora trium solidorum sub CZ , BF , FG ; sub GY , BF , GC ; & sub FX , FG , GC (^b).

Ut Theorema exprimatur symbolice, suntu

$$\begin{array}{l|l|l} BX = l & FX = p & BF = s \\ FY = m & GY = q & FG = t \\ GZ = n & CZ = r & GC = u \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{nec non } HB = b & \text{adeoque} \\ KF = f = b + p & df = dp \\ LG = g = b + p + q & dg = dp + dq. \end{array}$$

Dico, fore $df : -dg = rst - qsn : qsu - ptu$.

D E M O N S T R A T I O.

Partim propter triangula rectangula BXF , FIG , GZC ; partim ob puncta fixa B & C , ac per hypothesin; habentur sequentes sex æqualitates :

$$\begin{array}{l} BX^2 + FX^2 = BF^2. \text{ id est } ll + pp = ss \\ FY^2 + GY^2 = FG^2 \dots \dots mm + qq = tt \\ GZ^2 + CZ^2 = GC^2 \dots \dots nn + rr = uu \\ \begin{array}{l} BX + FY + GZ = \text{const.} \\ FX + GY + CZ = \text{const.} \\ BF + FG + GC = \text{const.} \end{array} \left| \begin{array}{l} l + m + n = \text{const.} \\ p + q + r = \text{const.} \\ s + t + u = \text{const.} \end{array} \right. \end{array}$$

unde,

(^b) Hoc Theorema idem est cum Not. b, de conditione æqualis perimetri, juxta secundam hypothesin.

unde, differentiando, emergunt, pro fluxu indeterminato pun- N.XCVI.
ctorum F, G, æquationes

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } ldl + pdp = sds & \text{IV. } dl + dm + dn = 0 \\ \text{II. } mdm + qdq = tdt & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } ndn + rdr = udu & \text{VI. } ds + dt + du = 0 \end{array}$$

pro quibus, in casu hujus Theorematis, ob fluxum punctorum F, G in rectis KF, LG [qui rectas BX, FY, GZ, seu l, m, n , invariatas relinquit, ipsasque proin dl, dm, dn cum tota æquatione IV evanescere facit] scribendæ,

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } pdp = sds & \\ \text{II. } qdq = tdt & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } rdr = udu & \text{VI. } ds + dt + du = 0 \end{array}$$

sic ut sex tantum differentialia & quinque æquationes remaneant, quarum beneficio quatuor ex illis omnifariam tolli, & reliquorum duorum ratio ad invicem inveniri potest. Nam ex. gr. per VI, habetur $du = -ds - dt$ & per V, $dr = -dp - dq$; qui valores in III loco dr & du substituti, faciunt $dt = (rdp + rdq - nds) : n$; & hic loco dt surrogatus in II, producit $ds = (rdp + rdq - qndq) : tu$; qui denique positus pro ds in I, exhibet $(ptn - rst)dp = (rst - qsn)dq$; unde $dp : dq = rst - qsn : ptn - rst$; nec non componendo $dp : dp + dq$ [hoc est, $df : dg$] $= rst - qsn : ptn - qsn$, seu, variatis signis secundi & quarti termini, $df : -dg = rst - qsn : qsn - ptn$.
Q. E. D.

THEOREMA III.

Ponantur, que in precedenti, rursusque summa rectarum BF + FG + GC constanter maneat eadem; sed stuant puncta F, G in peripheriis circularum super punctis fixis B, C descriptorum, secum
Yyyyyy 2 ducen-

N. XCVI. *ducentia rectas KF, LG; erit incrementum momentaneum recta KF ad decrementum momentaneum recta LG, aut vicissim decrementum illius ad incrementum hujus, ut differentia inter duo priora ad differentiam inter duo posteriora trium solidorum sub BX, FY, CZ; sub BX, GZ, GY, & sub FY, GZ, FX (°).*

Hoc est in symbolis, erit $df: -dg = lmr - lnq: lnq - mnp$.

D E M O N S T R A T I O.

Durante fluxu punctorum F, G in peripheriis circa B, C; cum invariatae mancant singulae BF, FG, GC, seu s, t, u ; evanescentque adeo ds, dt, du , una cum aequatione VI Theorematis praeced. caeterae ibidem pro fluxu punctorum indeterminato repertae aequationes ad has quinque reducuntur:

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } ldl + p dp = 0 & \text{IV. } dl + dm + dn = 0 \\ \text{II. } mdm + q dq = 0 & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } ndn + r dr = 0 & \end{array}$$

Per V habetur $dr = -dp - dq$, & per IV, $dn = -dl - dm$; quibus valoribus substitutis in III, fit $dm = (-rdp - rdq - ndl): n$; & hinc in II, $dl = (-mrdp - mrdq + nqdq): mn$, indeque tandem in I, $(mnp - lmr) dp = (lmr - lnq) dq$; quare $dp: dq = lmr - lnq: mnp - lmr$; & componendo $dp: dp + dq [df: dg] = lmr - lnq: mnp - lnq$; seu $df: -dg = lmr - lnq: lnq - mnp$. Q. E. D.

(°) Redit hoc Theorema ad id pothesim N°. XCIII, Nota b; quod demonstravimus de conditione isoperimetri, juxta primam hy-

pag. 876.

THEO-

T H E O R E M A I V.

Intelligentur in qualibet Curva ABD quatuor ordinatim applicata contigua HB, KF, LG, IC, intervallulis aequalibus & infinite parvis HK, KL, LI discreta. & intercipientes Curva portiunculam BFGC; quarumque [si vis] prima seu minima HB vocetur x, sicut AH, y, & AB, z. Tum vero mutetur paululum curveto portiuncula BFGC fluxu punctorum F, G super applicatis suis KF, LG; sic tamen ut longitudo particula inter extrema puncta fixa B, C non mutetur. Erit incrementum aut decrementum applicata KF ad decrementum vel incrementum applicata LG, ut $+dz^2ddx + dz^2dddz - dxddx^2$ ad $+dz^2ddx + 2dxddx^2$.

D E M O N S T R A T I O.

Casus hic est specialis Theorematis secundi, a quo non difert, nisi quod hic, ob infinite propinqua puncta B, F, G, C rectæ BX, FX, BF, &c. seu *l, p, s*, cæteræque, considerentur ut infinite parvæ, abeantque respectu Curvæ in differentialia seu elementa *dy, dx, dz, &c.* Unde per Theorema I, quantitates hæc fient

$$\begin{aligned} \text{BX seu } l &= dy' = dy \\ \text{FY} \dots m &= dy'' = dy + ddy \\ \text{GZ} \dots n &= dy''' = dy + 2ddy + dddy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FX seu } p &= dx' = dx \\ \text{GY} \dots q &= dx'' = dx + ddx \\ \text{GZ} \dots r &= dx''' = dx + 2ddx + dddx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BF seu } s &= dz' = dz \\ \text{FG} \dots t &= dz'' = dz + ddz \\ \text{GC} \dots u &= dz''' = dz + 2ddz + dddz \end{aligned}$$

N. XCVI. Solida vero ex illis rst , qsn , ptn , quorum differentiae, vi Theorematis secundi, quaesitum exhibent, multiplicatione inveniuntur, ut sequitur :

$$\begin{aligned} r &= dx + 2ddx + dddx \\ st &= dz^2 + dzddz \\ \hline rst &= dx dz^2 + 2dz^2 ddx + dz^2 dddx \\ &\quad + dx dz ddz + 2dx ddz ddx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= dz + 2ddz + dddz \\ qs &= dx dz + dx ddz \\ \hline qsn &= dx dz^2 + 2dx dz ddz + dx dz dddz \\ &\quad + dz^2 d dx + 2dx ddz ddx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= dz + 2ddz + dddz \\ pt &= dx dz + dx ddz \\ \hline ptn &= dx dz^2 + 2dx dz ddz + dx dz dddz \\ &\quad + 2dx ddz^2 \end{aligned}$$

& facta subtractione, eorum differentiae :

$$\begin{array}{l|l} rst - qsn = +dz^2 ddx + dz^2 dddx & qsn - ptn = dz^2 ddx + 2dx ddz ddz \\ \quad - dx dz ddz - dx dz dddz & \quad - dx dz ddz - 2dx ddz^2 \end{array}$$

ad quas abbreviandas eliminari possunt ddz & $dddz$, hoc pacto: Quoniam $dz^2 = dy^2 + dx^2$, atque, ob æquidistantes ex hypothesi applicatas, dy est constans; sumendo differentias habetur $dz ddz = dx ddx$; iterumque differentiendo $dz d d dz + d dz^2 = dx d d dx + d dx^2$, hoc est, $dz d d dz = dx d d dx + d dx^2 - ddz^2 =$ [delendo ddz^2] $dx d d dx + d dx^2 - dx^2 d dx^2 : dz^2$; quibus valoribus in locum $dz ddz$ & $dx ddz$, nec non dy^2 in locum $dz^2 - dx^2$ suffectis, exsurgit

$$rst - qsu = +dy^2 ddx + dy^2 dddx \quad | \quad qsu - ptu = dy^2 ddx + 2dx dy^2 ddx^2 : dz^2 \quad \text{N. XCVI.}$$

$$- dx dy^2 ddx^2 : dz^2$$

unde consequitur, quod Increm. KF : Decr. LG [$= rst - qsu$:
 $qsu - ptu$, per Theor. II.] $= dy^2 ddx + dy^2 dddx - \frac{dx dy^2 ddx^2}{dz^2}$:

$$dy^2 ddx + \frac{2 dx dy^2 ddx^2}{dz^2} = [\text{facta communi multiplicatione per}$$

$$\frac{dz^2}{dy^2}] dz^2 ddx + dz^2 dddx - dx ddx^2 : dz^2 ddx + 2 dx ddx^2$$

Q. E. D.

Nota, quantitates r, s, t , &c. earumque producta constare diversorum ordinum aut classium differentialibus, quorum posteriora prioribus gradatim sunt incomparabiliter minora; quocirca ne permisceantur, opera danda in sumendis solidis, ut, quæ sunt ejusdem ordinis, interque sese comparari possunt, in eodem sibi articulo respondeant. Pergendum autem est in operatione ad tertium usque ordinem, non ultra; cum primi & secundi ordinis quantitates omnes, in calculi progressu, se mutuo destruant; quæ vero tertium ordinem excedunt, ob contemnendam priorum respectu parvitatem, tuto negligantur; quemadmodum etiam supra factitatum videmus, ubi producta ex $dz ddx$ per $dddx$, ex $dz ddx$ & $dx ddx$ per $dddx$ in calculo compendiose insuper habentur.

THEOREMA V.

Sunto in qualibet Curva quatuor applicata consigne HB, KF, LG, IC, quarum rursus prima & minima HB vocetur x, uti AH, y, & AB, z; quæque intercipient tres Curva particulas æquales & infinite parvas BF, FG, GC. Mutetur vero paululum curvæ harum partium rotatione extremarum BF, GC circa puncta fixa B, C, sic temperata, ut nec singula, nec universa longitu-

N. XCVI. *gitudine variant. Erit incrementum vel decrementum applicata KF, ad decrementum vel incrementum applicata LG, ut* $dy^2 ddx + dy^2 dddx + dx ddx^2$ *ad* $dy^2 ddx - 2 dx ddx^2$.

D E M O N S T R A T I O.

Casus est Theorematis tertii; abeuntibus hic iterum rectis BX, FX, BF &c. seu l, p, s , cæterisque, in infinite parva seu differentialia dy, dx, dx , &c. Quapropter eorum solida lmr, lnq, mnp , & solidorum differentiarum, quæ per Theorema dictum quæsitam rationem manifestant, eodem modo reperiuntur, quo in præcedenti.

En operationem.

$$\begin{array}{r}
 r = dx + 2 ddx + dddx \\
 lm = dy^2 + dy ddy \\
 \hline
 lmr = dx dy^2 + 2 dy^2 ddx + dy^2 dddx \\
 \quad + dx dy ddy + 2 dy ddx ddy \\
 \\
 n = dy + 2 ddy + dddy \\
 lq = dx dy + dy ddx \\
 \hline
 lnq = dx dy^2 + 2 dx dy ddy + dx dy dddy \\
 \quad + dy^2 ddx + 2 dy ddx ddy \\
 \\
 n = dy + 2 ddy + dddy \\
 mp = dx dy + dx ddy \\
 \hline
 mnp = dx dy^2 + 2 dx dy ddy + dx dy dddy \\
 \quad + dx dy ddy + 2 dx ddy^2
 \end{array}$$

atque adeo

$$\begin{array}{r}
 lmr - lnq = + dy^2 ddx + dy^2 dddx \\
 \quad - dx dy ddy - dx dy ddy \\
 \left| \begin{array}{l}
 lnq - mnp = + dy^2 ddx + 2 dy ddx ddy \\
 \quad - dx dy ddy - 2 dx ddy^2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Porro

N. XCVI. *fas incremento infinite parvo differentes, erunt respectivæ earum applicatæ h & i sibi met contiguæ & proximæ, ac proinde $i = h + dh$. Q. E. D.*

T H E O R E M A VII.

Si curva ABD, inter omnes sibi Isoperimétræ iisdemque punctis A, D interceptas curvas, privilegio cujusdam Maximi Minimive potiatur, qualibet ejus particula BFGC eodem quoque, præ aliis omnibus, sibi equalibus, interque puncta B, C extensis lineis, privilegio gaudebit.

D E M O N S T R A T I O.

Gaudeat enim alia æqualis lineola BEC hoc privilegio, ut *Maximum* illud *Minimumve* contineat vel producat: majus ergo vel minus continebit aut producet BEC quam BFGC, additoque communiter quod continetur vel producit ab ipsis AB & CD, majus minusve continebit aut producet tota ABECD quam tota ABFGCD. Non ergo huic competit privilegium *Maximi Minimive*; contra hypothésin.

Nota. Sensus Theorematis vel Demonstrationis ejus videtur paulo obscurior, nec satis determinatus; sed planior fiet infra ex applicatione: quod moneo, ne quis morosior Propositionem statim sugillet, cui sensum fortasse ambiguum aut falsum affingi posse viderit.

Hactenus generalia,

Sequuntur nunc ipsa Problemata, ubi pro specialibus singulorum æquationibus inveniendis nihil jam superest aliud, quam ut ratio incrementi vel decrementi rectarum KF, LG, ex speciali cujusque Problematis natura, in aliis adhuc terminis reperiat; cui negotio facilitando, vel elementa dy , seu HK, KL, LI;

LI; vel elementa dx , seu BF, FG, GC ponenda sunt constantia N. XCVI. & æqualia; prout in quovis Problemate hoc vel illud simplicius videbitur. Quanquam enim id rem ipsam spectando sit indifferens, sæpe tamen unum quam alterum operationem haud paulo faciliorem reddere potest.

P R O B L E M A I.

Datis positione rectis normalibus AT, AM, & curva quacunque AN; quaritur ex omnibus Figuris Isoperimetris super communi base AT & inter eadem puncta A, D constitutis, illa ABD, e cujus singulis punctis B si ducantur bina recta BHP, BMN, normales ipsis AT, AM; ac statuatur pars prioris HP = MN; ut spatium inde ortum ATV omnium a ceteris Isoperimetris similiter genitorum spatiorum sit Maximum Minimumve. (4).

A N A L Y S I S.

Sit curva optata ABD, & Maximum Minimumve, quod ab illa producitur, faciendo ubique HP = MN, spatium ATV. Intellegantur in æqualibus interstitiis HK, KL, LI, quorum singula dicantur l , quatuor applicatæ contiguæ, HB = b . KF = f . LG = g . IC = c , totidemque aliæ per has similiter expressæ, proptereaque denotandæ per majusculas, HP = B , KR = F , LS = G , IQ = C . Erit, per Theor. VII, spatiolum PHIQ, hoc est $HK \times HP + KL \times KR + LI \times LS$, seu $lB + lF + lG = \text{Maximo Minimo}$ ve; adeoque ex natura Maximi Minimique, ejus differentiale $ldF + ldG = 0$, seu, dividendo per l , $dF + dG = 0$. [Ob fluxum enim punctorum F, G, quem super rectis KF, LG fieri concipio, solæ applicatarum mediæ KF, LG, KR, LS, seu f, g, F, G , longitudinem mutant, extremis HB, IC, HP, IQ, seu b, c, B, C , constanter iisdem manentibus.]

Zzzzz z

Pona-

(4) Videbis N°. XCIII, Nota b, §. I, pag. 875 & seq.

N. XCVI. Ponatur $dF = hdf : a$, & $dG = idg : a$; erit $hdf + idg = 0$; unde proportio, $df : -dg = i : h =$ [per Theor. VI] $h + dh : h$, & quia, per Theor. IV, generaliter quoque habetur $df : -dg = dz^2 ddx + dz^2 dddx - dx ddx^2 : dz^2 ddx + 2dx ddx^2$, sequitur fore, $h + dh : h = dz^2 ddx + dz^2 dddx - dx ddx^2 : dz^2 ddx + 2dx ddx^2$, ac dividendo $dh : h = + dz^2 dddx - 3dx ddx^2 : + dz^2 ddx + 2dx ddx^2$; unde extremis & mediis in se invicem ductis [omisso tamen, quod cæterorum respectu evanescit, producto $2dhdx ddx^2$] resultat æquatio specialis nostri Problematis $+ hdz^2 dddx - 3hdxdx^2 = + dh dz^2 ddx$, quæ, ut apparet, ad tertias usque differentias ascendit. Hanc autem ego porro ad secundas, indeque ad primas, sequente analysi reduco (°).

Primo, loco $dx ddx$ restituo $dz ddx$ [hoc fini, ut tot habeantur quantitates h, dz, ddx , una cum suis differentialibus $dh, ddz, dddx$, quot sunt æquationis membra] eritque $hdz^2 dddx - 3hdxdx ddx = dh dz^2 ddx$; deinde transfero omnia ad unam partem, atque divido per dz , ut sit $hdz dddx - 3hdxdx ddx - dh dz ddx = 0$. Jam fingo æquationem $h^m dz^n ddx^r = \text{const.}$ elevatis tribus quantitibus h, dz, ddx ad potestates ignotas, sed ex progressu determinandas, m, n, r ; factaque differentiatione obtineo $r h^m dz^n ddx^{r-1} dddx + n h^m dz^{n-1} ddx^r ddz + m h^{m-1} dh dz^n ddx^r = 0$, quæ divisione per $h^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$ contrahitur ad hanc, $rhdz dddx + nhddx ddx + mhdz ddx = 0$; hæc vero terminotenus collata cum æquatione Problematis $hdz dddx - 3hdxdx ddx - dh dz ddx = 0$, exhibet $r = 1, n = 3$, & $m = -1$: unde loco fictæ æquationis $h^m dz^n ddx^r = \text{const.}$ habetur $ddx : hdz^3 = \text{const.} =$ [ex lege homogeneorum & propter constans dy] $\pm 1 : aady$, æquatio nempe differentialis secundi gradus: ad quam ulterius deprimendam, pono rursus æquationem $adx = t dy$, e qua debite tractata fluunt sequentia.

ddx

(°) Vid. infra N°. CIII, Art. XXXII.

$cdx = dtdy : a$, $aadx^2 = tt dy^2$, & [addito $aady^2$] $ca dx^2 + aady^2$, id est, $aadz^2 = (aa + tt) dy^2$, & $dx = dy \sqrt{(aa + tt)} : a$.
 Hi vero valores, loco ddx & dx , in æquatione inventa $ddx : bdx^3 = \pm 1 : aady$, substituti producunt $aads : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)} = \pm hdy : aa = \pm bdx : at$, seu [instituta multiplicatione per $\pm t$] $\pm aats : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)} = bdx : a = [$ propter eandem f & x] $hdf : a = [$ per hyp.] dF ; unde, facta summatione, acquiritur partim $aa : \sqrt{(aa + tt)}$, partim $a - aa : \sqrt{(aa + tt)} = F$ (†), hoc est, applicatæ KR, seu huic contiguae HP aut MN; quam si deinceps vocare lubeat p , habebitur tum $p = aa : \sqrt{(aa + tt)}$, tum $p = a - aa : \sqrt{(aa + tt)}$; unde vicissim & $t = a \sqrt{(aa - pp)} : p$, & $t = a \sqrt{(2ap - pp)} : (a - p)$. Atque hi tandem valores, in posita æquatione $adx = tdy$, in locum t suffecti exhibent, partim $dy = p dx : \sqrt{(aa - pp)}$, partim $dy = (a - p) dx : \sqrt{(2ap - pp)}$, pro æquationibus simpliciter differentialibus curvarum, quæ Maximum Minimumve spatium ATV [$\int p dy$] suppeditant. Quod quidem principaliter inveniendum erat.

Utri vero harum curvarum Maximum, & utri Minimum $\int p dy$ conveniat, sic indagabimus: Prior æquatio est $dy = p dx : \sqrt{(aa - pp)}$; unde quadrando, $dy^2 = pp dx^2 : (aa - pp)$, & [addendo dx^2] $dy^2 + dx^2$, sive $dz^2 = aadx^2 : (aa - pp)$; & extrahendo radicem, $dz = a dx : \sqrt{(aa - pp)}$; quare $dy : dz = p : a$; hoc est, sumta constante dz , dy proportionatur ipsi p . Ergo, si crescentibus x crescere supponantur p , crescent una quoque ipsa dy ; quod indicium est, curvam æquationi huic respondentem versus axem AT cavam esse. Sit illa [Fig. 2] ABC, & rotetur circa chordam AC, gignens ex opposito aliam sibi isoperimetron AEC, ac utrique communis applicetur ordinata BEF. Quoniam igitur, ex hypothefi, p majoris applicatæ x , seu BF, major est ipsa p minoris applicatæ EF; erit quoque $p dy$ illius major

Zzzzz 3

(†) Non satis completa est hæc integratio. Potuisset enim scribi F vel $p = c \pm aa : \sqrt{(aa + tt)}$, unde haberetur $t = a \sqrt{(a^2 - (c - p)^2)} : (c - p)$, atque $dy = (c - p) dx : \sqrt{(a^2 - (c - p)^2)}$.

N. XCVI. major quam $p dy$ hujus; ac proinde omnia $p dy$ seu $sp dy$ curvæ ABC majora omnibus $p dy$ curvæ AEC, quo circa $sp dy$ curvæ ABC non potest esse *Minimum*. Superest ergo, cum sit alterutrum, ut sit *Maximum*. Quod si crescentibus x decrescant p , decrescent quoque dy , & curva versus axem AT convexa erit: Sit hæc AEC, ejusque rotatu circa chordam AC gignatur ex adverso alia Isoperimetros ABC, & utrique applicetur BEF; unde cum nunc, ex hypothesi, p minoris applicatæ EF reciproce major sit ipsa p majoris applicatæ BF, erit quoque $p dy$ illius major quam $p dy$ hujus; omniaque $p dy$ curvæ AEC majora omnibus $p dy$ curvæ ABC: quare $sp dy$ curvæ AEC nequit esse *Minimum*; rursùm igitur *Maximum* ut sit necesse. E quibus constat, quod curva prioris æquationis $dy = p dx: \sqrt{(aa - pp)}$ semper *Maximum* complectatur $sp dy$, utcunque se habeat p respectu x . Eodemque etiam modo ostendi posset, quod curva posterioris æquationis $dy = (a - p) dx: \sqrt{(2ap - pp)}$ in omni vicissim casu *Minimum* $sp dy$ continet. Sed cui Lectoris usui repetita crambe?

PROBLEMA II.

Queritur ex omnibus Figuris Isoperimetricis, [Fig. 1] super communi base AT & inter eadem puncta A, D constitutis, illa ABD, cujus singulis applicatis BH si respondeant alia HP, datam habentes relationem ad abscissas ipsius curva portiones AB; spatium hinc ortum ATV omnium a ceteris Isoperimetris similiter genitorum spatiorum sit Maximum Minimumve. (8).

(8) Videfis N°. XCIII. Nota b, §. III. pag. 875 & seq.

A N A L Y S I S.

Sic rursum, ut nuper, $HK = KL = LI = l$, insuperque

$$\begin{array}{l|l} \text{portio curvæ } AB = \beta & \text{adeoque} \\ AF = AB + BF = \beta + s \dots = \phi & d\phi = ds \\ AG = AF + FG = \beta + s + t = \gamma & d\gamma = ds + dt \end{array}$$

& per has similiter datæ, $HP = B$, $KR = \phi$, $LS = \gamma$. Quoniam igitur spatium ATV ex hypothese est *Maximum Minimumve*, erit quoque tale, per Theor. VII, ejus portio $PHIQ$, hoc est, $HK \times HP + KL \times KR + LI \times LS$ sive $lB + l\phi + l\gamma$; ac proinde, ex natura *Maximi Minimive*, ejus differentiale $ld\phi + ld\gamma = 0$, seu $d\phi + d\gamma = 0$ [conciendo nempe rursum, mutari curvedinem fluxu punctorum F, G super applicatis KF, LG , quo tollæ AF, AG , & per has datæ KR, LS mutantur, reliquis AB & HP non mutatis.] Ponatur $d\phi = h d\beta : a$ & $d\gamma = i d\beta : a$, fiet $h d\beta + i d\beta = 0$, seu $h ds + i ds + i dt = 0$, sive [loco ds & dt introducendo dp & dq , per duas primas æquationes Theor. II,] $h p dp : s + i p dp : s + i q dq . t = 0$, sive, sublatis fractionibus, $h p t dp + i p t dp + i q s dq = 0$; & æqualitate in proportionem versa, $dp : dq = - i q s : h p t + i p t$; componendoque, $dp : dp + dq [= df : dg] = - i q s : h p t + i p t - i q s$, ac denique mutatis lignis secundi & tertii termini, $df : - dg = i q s : h p t + i p t - i q s$. Surrogetur jam loco i , per Theor. VI, $h + dh$; & quantitates p, q, s, t vertantur, per Theor. I, in differentialia [ut factum in demonstr. Theor. IV, nisi quod in sumendis solidis ultra secundum differentialium ordinem nunc progredi non est necesse] hoc pacto:

$$\begin{array}{l|l} q s = dx dz + dz dx & p t = dx dz + dx dz \\ i = h + dh & h + i = 2h + dh \\ \hline i q s = b dx dz + b dz dx & h p t + i p t = 2h dx dz + 2h dx dz \\ & + dh dx dz \end{array} \quad \&$$

N. XCVI. & facta subtractione

$$hpt + ipt - iqs = bdx dz + 2bdx ddx \\ - bdx ddx$$

quocirca

$$df: - dg = bdx dz + bdx ddx: bdx dz + 2bdx ddx \\ + dbdx dz \quad - bdx ddx$$

sed, per Theor. IV,

$$df: - dg = dz^2 ddx + dz^2 ddx: dz^2 ddx + 2dx ddx^2 \\ - dx ddx^2$$

quare

$$bdx dz + bdx ddx: bdx dz + 2bdx ddx = dz^2 ddx + dz^2 ddx: dz^2 ddx + 2dx ddx^2 \\ + dbdx dz \quad - bdx ddx \quad - dx ddx^2$$

convertendoque

$$bdx dz + bdx ddx: + 2bdx ddx = dz^2 ddx + dz^2 ddx: + dz^2 ddx \\ + dbdx dz \quad - 2bdx ddx \quad - dx ddx^2 \quad - 3dx ddx^2 \\ + dbdx dz$$

seu [neglectis compendii gratia in primo & tertio termino differentialibus secundi ordinis, ceu nulli amplius usui futuris, cæterisque per dz divisis]

$$bdx: + 2bdx ddx = dz ddx: + dz^2 ddx \\ - 2bdx ddx \quad - 3dx ddx^2; \\ + dbdx dz$$

unde, ductis in se invicem extremis & mediis, resultat $bdx dz^2 ddx - 3bdx^2 ddx^2 = 2bdx^2 ddx^2 - 2bdx dz ddx ddx + dbdx dz^2 ddx$, hoc est; [compactis in unum secundo & quarto terminis, substitutione $dx ddx$ loco $dx ddx$,] $bdx dz^2 ddx = 2bdx^2 ddx^2 + bdx^2 ddx^2 + dbdx dz^2 ddx$; quæ est æquatio specialis hujus Problematis, ad tertias itidem differentias assurgens, quam simili qua

qua in præcedenti Problemate usus fui, analysi ad has duas æ-N.XCVI. quationes simplices $dy = qdz : \sqrt{aa + qq}$, & $dy = (a - q) dz : \sqrt{bb - 2aq + qq}$ reduco (^h). Operationem ipsam, ne tædio sim, omitto; sed veritatem asserti confirmabit omissæ analysi, haud ingrata nec inutili varietate, succenturianda synthesis. Meminerit solum Lector, dy rursum esse elementum constans, curvamque AB vel AF, quæ supra erat ϕ , jam vocari x ; & datam per ipsam HP vel KR, quæ dicebatur ϕ , nunc appellari q ; sic ut, loco $d\phi = hd\phi : a$, deinceps habeatur $dq = hdx : a$.

Æq. I. $dy = qdz : \sqrt{aa + qq}$.

Esto compendii gr. $\sqrt{aa + qq} = s$

$$\begin{aligned} dy &= qdz : s \\ dz &= sdy : q \\ dx &= a dy : q \\ dq &= hdx : a = h s dy : a q \\ ds &= q dq : s = h dy : a \\ ddx &= - a dy dq : qq = - h s dy^2 : q^3 \end{aligned}$$

$$ddd x = \left\{ \begin{array}{l} + 3 h s dy^2 dq : q^4 \\ - h dy^2 ds : q^3 \\ - s dy^2 db : q^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + 2 h h s s dy^3 : a q^4 \\ + a h h dy^3 : q^4 \\ - s dy^2 db : q^3 \end{array} \right.$$

quibus in æquatione inventa substitutis, fit

$$hdx dz^2 ddx = \left\{ \begin{array}{l} + 2 h^3 s^2 dy^5 : q^5 = 2 h dx^2 ddx^2 \\ + a a h^3 s s dy^6 : q^5 = h dx^2 ddx^2 \\ - a h s^3 dy^5 dh : q^6 = dh dx dz^2 ddx \end{array} \right.$$

Æq. II. $dy = (a - q) dz : \sqrt{bb - 2aq + qq}$.

Sit brev. ergo $\sqrt{bb - aa} = c$, $a - q = r$, $\sqrt{bb - 2aq + qq} = s$

Jac. Bernoulli Opera.

Λ a a a a a

dy =

(^h) Generalius ad $dy(c \pm q) dz : \sqrt{ac + (c \pm q)^2}$ reduci poterat.

N. XCVI.

$$\begin{aligned}
 dy &= r dx : s \\
 dz &= s dy : r \\
 dx &= c dy : r \\
 dr &= -dq = -h dx : a = h s dy : ar \\
 ds &= -rdq : s = -h dy : a \\
 ddx &= -c dy dr : rr = chs dy^2 : ar^3
 \end{aligned}$$

$$dddx = \left\{ \begin{array}{l} -3chs dy^2 dr : ar^4 \\ + ch dy^2 ds : ar^3 \\ + cs dy^2 db : ar^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + 2chhss dy^3 : aar^5 \\ + c^3 h b dy^3 : aar^5 \\ + cs dy^2 db : ar^3 \end{array} \right\}$$

quibus in æquatione inventa substitutis, fit

$$hdx dz^2 dddx = \left\{ \begin{array}{l} + 2ccb^3 s^4 dy^6 : aar^8 = 2h dx^2 ddx^2 \\ + c^3 b^3 ss dy^6 : aar^8 = h dx^2 ddx^2 \\ + ccb^3 dy^4 db : ar^6 = dh dx dz^2 ddx \end{array} \right.$$

Cum igitur utrobique in valores identicos desinant quantitates $hdx dz^2 dddx$ ab una, & tres reliquæ $2h dx^2 ddx^2$, $h dx^2 ddx$ & $dh dx dz^2 ddx$ ab altera parte inventæ æquationis; colligitur, curvas positivarum æquationum $dy = q dx : \sqrt{(aa + qq)}$, & $dy = (a - q) dx : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$, illas ipsas esse quæ desiderabantur, quibusque Maximum Minimumve $\int q dy$ inest. Horum vero utrum utri curvæ tribuendum, eodem quo nuper ratiocinio perquiro: Primo enim considero, an crescentibus x crescant decrescantve ipsa q ; deinde, an curva versus axem convexa sit, an concava; ac tertio, si circa chordam suam rotetur curva proposita, & ex adverso producat aliam æqualem & similem, an hæc majus habeat $\int q dy$, an minus: nam si majus, propositæ $\int q dy$ Minimum est, non Maximum; sin minus, contra. Hoc pacto reperitur, Maximum $\int q dy$ inesse Curvæ $dy = q dx : \sqrt{(aa + qq)}$, & Minimum $\int q dy$ alteri $dy = (a - q) dx : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$. Quæ erant inveniendæ.

PRO-

PROBLEMA III.

N. XCVI.

Si Linea flexilis ABD in tota sua longitudine ponderibus utcumque sit gravata, & ab extremitatibus suis A, D libere suspensa & quaritur inter infinitas curvedines, quas hæc linea successive induere potest, illa quæ faciat, ut centrum commune gravitatis ponderum a base AT plurimum minimumve distet, hoc est, [quia centrum commune gravitatis ponderum in se agentium naturaliter locum infimum affectat] quaruntur omnis generis Funicularia, seu Catenaria. (1).

ANALYSIS.

Assumptæ intelligantur in curva quæsitæ ABD tres vicinæ particulæ æquales & infinite parvæ BF, FG, GC; & sint, ut supra, $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$, nec non portio curvæ $AB = z$, & datum per z gravamen ejus $= q$; erit, per Theor. I, gravamen elementi $BF = dq$, elementi $FG = dq + ddq$, & elementi $GC = dq + 2ddq$ [omisso $dddq$, quod hic est superfium] unde momenta horum pondusculorum, respectu rectæ $AT = bdq + f(dq + ddq) + g(dq + 2ddq)$. Moveantur paululum puncta F & G in peripheriis circa puncta fixa B, C; sic tamen ut BF, FG, GC maneat invariatae longitudinis: manebunt quoque ponduscula iis appensa eadem, ut & applicata HB, solæque variabunt KF & LG; quod differentiale momentorum efficit $df(dq + ddq) + dg(dq + 2ddq)$. Sed hoc, ex natura *Maximi* & *Minimi*, debet æquari nihilo; cum enim distantia centri gravitatis ponderum a base AT, ob constantem ponderum summam, proportionetur summæ momentorum; sequitur, ex hypothesis, summam momentorum ponderum totius lineæ, adeoque & [per Theor. VII] partis lineæ cujuslibet BC, quoque fore

$Aaaaaa z$ Maxi-

(1) Redit hoc Problema ad §. IV, Notæ b, N. XCIII, quem videtis.

N. XCVI. Maximam Minimamve. Habebitur itaque $df(dq + ddq) + dg(dq + 2ddq) = 0$, ac proinde $df: -dg [= \text{per Theor. V, } dy^2 ddx + dy^2 dddx + dx ddx^2 : dy^2 ddx - 2dx ddx^2] = dq + 2ddq: dq + ddq$; dividendoque $+ dy^2 dddx + 3dx ddx^2 : + dy^2 ddx - 2dx ddx^2 = ddq: dq + ddq$, sive neglectis secundi & quarti termini quantitibus superfluis, $+ dy^2 dddx + 3dx ddx^2 : + dy^2 ddx = ddq: dq$; unde multiplicando extrema & media, fit $dq dy^2 dddx + 3dq dx ddx^2 = dy^2 ddq ddx$; [surrogandoque $- dy ddy$ loco $dx ddx$, ac dividendo per dy] $dq dy dddx - 3dq ddx ddy - dy ddq ddx = 0$; Æquatio scil. specialis hujus Problematis: quam primo, ope fitæ æquationis $dq^m dy^n dx$, $= \text{const.}$ in hanc differentio-differentialem $ddx: dq dy^3 = \pm 1: a dz^2$, ac deinde, ope hujus $ady = t dz$, in istas simpliciter differentiales, $dy = adz: \sqrt{aa + qq}$ & $dy = adz: \sqrt{aa + bb - 2bq + qq}$ resolvo (*) ; quarum proin altera Maximum $fxdq$, seu Maximam momentorum summam, Minimam altera suppeditabit. Utra vero utrum præster, sic exploro: Juxta priorem Æquationem $dy = adz: \sqrt{aa + qq}$ habetur $dx [\sqrt{dz^2 - dy^2}] = q dz: \sqrt{aa + qq}$; quare $dy: dx = a: q$, & sumta dy constante, dx proportionatur ipsi q . Cum igitur gravamen curvæ q crescat cum ejus longitudine z , sequitur etiam cum utroque crescere dx ; atque adeo curvam basi AT convexitatem obvertere. Sit ergo curva hæc ADC, [Fig. 2] ac rotetur circa chordam AC, ut nascatur ex opposito alia Isoperimetros ABC. Statuatur etiam Chordæ normalis recta BD, abscindens ex utraque curva partes similes & æquales AB, AD, & denique ducantur applicatæ BF, DG. Quoniam igitur applicata DG, seu x , curvæ ADC minor est applicata BF, seu x , alterius curvæ ABC; erit quoque $x dz$ [& hinc $x dq$] prioris curvæ minor, quam $x dz$ [& $x dq$] posterioris; & consequenter $fxdq$ illius minor, quam $fxdq$ hujus. Curvæ igitur propositæ $dx = adz: \sqrt{aa + qq}$ ipsum $fxdq$ non est Maximum; relinquatur ergo ut sit Minimum. Eodemque modo colligitur, quantitatem $fxdq$ alterius Curvæ $dy = adz:$

$$\sqrt{aa}$$

(*) Prior æquatio in posteriore continetur, & ex ea nascitur faciendo $t=0$.

$\sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)}$ vicissim Maximam esse, non Minimam (1). Quæ erant determinanda.

Notamus hic bonitatis Methodi nostræ argumentum in eo, quod quæ pro Funiculariis, seu Catenariis, ex alio fundamento per notiores methodos eruuntur curvæ, præcise cum nostris conveniant (2). Addimus, æquationem nostram priorem $dy = adz$: $\sqrt{(aa + qq)}$, inversas, verticibusque suis sursum spectantes, Catenarias referre; ambas autem coincidere cum curvis præcedentis Problematis, quæ Maximum Minimumque $\int q dy$ continent; nisi quod hic & ibi abscissæ cum applicatis appareant permutatæ.

Sed laboris denique hic nostri metam figimus; cum tria allata Exempla sufficere possint ad explicandum modum, quo uti convenit in aliis omnibus. Unicum hoc tacere nefas, quod eadem Methodus non ad solas Figuras Isoperimétras, sed & pluribus aliis modis affectas curvas, puta ad Figuras æqualium arearum, superficies conoidicas æquales, aut solida conoidea æqualia, &c. mutatis mutandis accommodari potest; ita nimirum, ut ex infinitis illis reperiat una, quæ quidpiam optime præstet, seu quæ proprietatem quandam in eminenti gradu possideat (3): in quibus omnibus singularis quædam observatur reciprocatio. Quemadmodum enim ex. gr. inter omnes Figuras ejusdem perimetri

Aaaaaa 3

Cir.

(1) Dicendum potius utramque curvam dare $\int x dq$ Maximum vel Minimum, prout in æquatione sumitur $+ dy$, vel $- dy$, æquale sive adz : $\sqrt{(aa + qq)}$ sive adz : $\sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)}$.

(2) Vide N°. XXXIX, Nota *. pag. 426, Col. 1.

(3) Quærendo nimirum, in tribus elementis curvæ, primum quid per totam curvam constans detur ex conditione æqualis areæ, vel æqualis superficiæ conoidicæ, aut æqualis solidi conoidæ, eodem modo quo de-

terminavimus N°. XCIII, quid constantis daret conditio isoperimetri: deinde quærendo quid constans prodeat ex altera conditione proprietatis quam in eminenti gradu curva possidere ponitur: ac denique rationem illorum productorum constantium æquando rationi constanti commode assumptæ, ut homogeneitas terminorum servetur. Quod generalissime executus est Celeb. EULERUS *Comm. Acad. Petrop.* Tom. VI, pag. 123, præsertim vero Tom. VIII, pag. 159.

N. XCVI. Circulus maximam possidet aream, Catenaria maximam conversione sui gignit superficiem, solidumque maximum Elastica; sic inter omnes vicissim Figuras, quæ aut æqualibus gaudent arcibus, aut æquales rotatione gignunt superficies, solidave æqualia, Circulus, Catenaria & Elastica minimo clauduntur ambitu; quod pariter procedit in omnibus aliis (°). Et latent profecto in istis, quæ novum speculandi campum amplissimum Geometris aperire valent. DEO autem immortalis, qui imperscrutabilem inexhaustæ suæ sapientiæ abyssum leviusculus radius introspicere, & aliquoufque rimari concessit mortalibus, pro præstita nobis gratia, sit laus, honos & gloria in sempiterna secula.

(°) Ratio est, quia eodem modo solvitur v. g. Problema de inveniendâ, inter omnes curvas ejusdem perimetri, illa quæ maximam habeat aream, quo solveretur Problema de inveniendâ Figura, quæ, inter omnes ejusdem areæ, minimum haberet perimetrum. In utroque enim, considerando tria curvæ elementa, po-

nuntur constantes, tam trium simul sumtorum longitudo, quam magnitudo spatii ab iis elementis, ordinatis curvæ, & portione basis contenti. Hæc enim hypothesis non minus quadrat conditionibus æqualis perimetri & maximæ areæ, quam conditionibus æqualis areæ & minimæ perimetri.



N° XCVII.



N^o. XCVII.

SECTION INDEFINIE
DES ARCS CIRCULAIRES,

en telle raison qu'on voudra ;

Avec la manière d'en déduire les Sinus, &c.

Par Mr. BERNOULLI , Professeur
à Bâle.

*Extraite d'une de ses lettres écrite de Bâle ,
le 13 Juillet 1702.*

Dans ce que mon Frère donna des Segmens & des Secteurs *Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1702. pag. 281, Ed. de Paris, & pag. 374, Edit. de Holl.* cycloïdaux quarrables, au mois de Juillet des *Actes de Leipzig* de 1699, il dit qu'il avoit aussi l'art d'en trouver une infinité de Zones quarrables, dont il donnoit seulement quelques exemples, en supprimant sa méthode. J'y pensai, & le mois de Septembre suivant j'en donnai une très simple, dans les mêmes *Actes* *, laquelle fournit aussi une infinité de parcelles Zones quarrables, que je déterminai ensuite, [au mois de Décembre 1700 de ces *Actes* †] par le moieu d'une courbe, laquelle

* Cy-dessus N^o. XCII, pag 871.

† N^o. XCV, pag. 892.

N.XCVII quelle [quoique mécanique] a cela de singulier , qu'outre la Cycloïde en question , elle n'exige pour sa construction que des lignes droites & circulaires ; ce qui me parut résoudre le Problème tout aussi simplement , que le seroit un Problème solide par la seule règle & le compas , outre la Section conique qu'on y voudroit supposer.

Cependant , les mêmes vérités se pouvant trouver par des voies souvent très différentes , cette méthode n'étoit point celle de mon Frère. Il a marqué ensuite , au mois d'Avril des *Actes de Leipzig* de 1701 , que la sienne consistoit dans une progression , telle que sont celles qu'il y donne. Mais prévoyant assez comment une telle progression se pouvoit aussi trouver par la méthode , qui m'a donné autrefois celles de Mr. LEIBNITZ pour la détermination des Sinus , &c. par le moyen des arcs donnés , j'en suis demeuré là ; jusqu'à ce qu'enfin Mr. HERMAN étant parvenu depuis , par une route très différente & très belle * , à une progression , qui peut servir de même à couper telle courbe qu'on voudra en raison donnée , il me prit envie d'essayer jusqu'ou ma méthode me pouvoit conduire de ce côté là : & non seulement j'aperçûs aussi-tôt que la section indéfinie de l'arc circulaire , & l'invention de son Sinus , &c. tirée de cet arc lui-même , ne faisoient proprement qu'un même Problème ; mais encore arrivai-je enfin à celle de Mr. HERMAN. Voici pour ce qui regarde la question présente.

L E M M E.

Si l'on appelle f la corde CD [Fig. 1] d'un arc quelconque d'un cercle , dont le rayon soit pris pour l'unité , l'on aura $\sqrt{(4ff - f^2)}$ pour la valeur de la corde BD d'un arc double de celui-là.

* Voyez *Acta Erudit. Lips.* 1703 , Aug. p. 345.

D E M O N S T R A T I O N

N·XCVII

En effet, si outre le diamètre BF & le rayon AC, l'on fait les droites BC & CF; l'on aura deux triangles isosceles que leurs angles égaux CDB & AFC rendront semblables; & qui par conséquent donneront $AF:CF[\sqrt{(BF^2 - BC^2)}] = CD:BD$, c'est-à-dire, $1:\sqrt{(4-ff)} = f:BD = \sqrt{(4ff-f^2)}$, ou $BD^2 = 4ff-f^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il suit de là, que si dans le demi-cercle B C D F, on prend plusieurs arcs BG, BE, BC, BD, &c. en progression double; c'est-à-dire, dont le second BE soit double du premier BG pris à discrétion, le troisième BC double du second, le quatrième BD double du troisième, &c. & dont les cordes étant aussi BG, BE, BC, BD, celle du premier BG soit appelée x ; celle du dernier BD, a ; & celle de son complément DF au demi-cercle, $b = \sqrt{(4-aa)}$; Il suit, dis-je, du *Lemme* précédent que BE^2 [quarré de la corde de l'arc double de BG] est $= 4xx - x^2$; ce qui étant pris pour ff , l'on aura de même BC^2 [quarré de la corde de l'arc double de BE, ou quadruple de BG] $= 16xx - 20x^2 + 8x^4 - x^8$. Et en prenant encore cela pour ff , l'on aura encore de même BD^2 [quarré de la corde de l'arc double de BC, ou cétuple de BG] $= 64xx - 336x^2 + 672x^4 - 660x^8 + 352x^{10} - 104x^{12} + 16x^{14} - x^{16}$, &c. Et toujours de même, comme dans la Table suivante.

Arcs multiples de BG.	Quarrés des Cordes de ces arcs.
--------------------------	------------------------------------

1	xx
2	$4xx - x^2$
4	$16xx - 20x^2 + 8x^4 - x^8$
8	$64xx - 336x^2 + 672x^4 - 660x^8 + 352x^{10} - 104x^{12} + 16x^{14} - x^{16}$

Jac, Bernoulli Opera,

B b b b b

Pré-

N.XCVII Présentement pour trouver une expression générale de la corde d'un arc indéfiniment multiple d'un autre, il ne s'agit plus que d'observer, suivant quelle loi se fait la progression de coefficients de tous ces termes. Or je remarque que tous ces coefficients résultent de l'addition de nombres figurés entr'eux : Par exemple, les coefficients de la première rangée perpendiculaire, qui sont les quarrés 1, 4, 16, 64, &c. naissent de l'addition d'une double rangée de nombres triangulaires, c'est-à-dire, de nombres figurés du premier ordre ; les coefficients de la seconde rangée perpendiculaire, qui sont 1, 20, 336, &c. résultent aussi de l'addition d'une double rangée de nombres triangulo-pyramidaux ; c'est-à-dire, de nombres figurés du troisième ordre ; les coefficients de la troisième rangée perpendiculaire, qui sont 8, 672, &c. se forment encore de même de l'addition d'une double rangée de triang-triang-pyramidaux, c'est-à-dire, de nombres figurés du cinquième ordre ; Et ainsi à l'infini, comme on le voit dans la Table suivante.

	1. Ord. Fig.	3. Ord. Fig.	5. Ord. Fig.
1	$1 + 0 = 1$	$0 + 0 = 0$	$0 + 0 = 0$
2	$3 + 1 = 4$	$1 + 0 = 1$	$0 + 0 = 0$
3	$6 + 3 = 9$	$5 + 1 = 6$	$1 + 0 = 1$
4	$10 + 6 = 16$	$15 + 5 = 20$	$7 + 1 = 8$
5	$15 + 10 = 25$	$35 + 15 = 50$	$28 + 7 = 35$
6	$21 + 15 = 36$	$70 + 35 = 105$	$84 + 28 = 112$
7	$28 + 21 = 49$	$126 + 70 = 196$	$210 + 84 = 294$
8	$36 + 28 = 64$	$210 + 126 = 336$	$462 + 210 = 672$

C'est pourquoi la manière de trouver tous les derniers termes de chaque rangée de nombres figurés, par le moyen du nombre de ceux qui les précèdent, étant connue ; il est visible, que l'on aura aussi celle de trouver tous les termes de la progression dont il

il s'agit ici : Par exemple, si n est le nombre des termes, on **N.XCVII** trouvera

$$\begin{array}{ll}
 n n & \text{pour le dernier de la première rangée;} \\
 \frac{nn.(nn-1)}{3.4} & \text{pour le dernier de la seconde;} \\
 \frac{nn.(nn-1).(nn-4)}{3.4.5.6} & \text{pour le dernier de la troisième;} \\
 \frac{nn.(nn-1).(nn-4).(nn-9)}{3.4.5.6.7.8} & \text{pour le dernier de la quatrième.} \\
 & \&c.
 \end{array}$$

D'où l'on voit qu'en supposant l'arc BD indéfiniment multiple de BG, c'est-à-dire, comme valant l'arc BG, pris autant de fois qu'il y a d'unités dans n ; l'on aura BD^2 [quarré de la corde BD] ou $aa =$

$$nnxx = \frac{nn.(nn-1)}{3.4} x^4 + \frac{nn.(nn-1).(nn-4)}{3.4.5.6} x^6 - \frac{nn.(nn-1).(nn-4).(nn-8)}{3.4.5.6.7.8} x^8 + \&c.$$

Et DF^2 ou $bb = 4 - aa =$

$$4 - nnxx + \frac{nn.(nn-1)}{3.4} x^4 - \frac{nn.(nn-1).(nn-4)}{3.4.5.6} x^6 + \frac{nn.(nn-1).(nn-4).(nn-8)}{3.4.5.6.7.8} x^8 - \&c.$$

Lesquelles valeurs donneront celles de a & de b , par le moyen des interpolations de Mr. WALLIS, ou en la manière que voici.

Soyent deux progressions feintes $a = nx - px^3 + qx^5 - rx^7 + sx^9 - tx^{11} + \&c.$ Et $b = 2 - pxx + qx^4 - rx^6 + sx^8 - tx^{10} + \&c.$

qu'il faut ensuite quarrer pour avoir

$$\begin{array}{l}
 aa = n n x x - 2 n p x^4 + 2 n q x^6 - 2 n r x^8 + 2 n s x^{10}. \&c. \\
 \quad \quad \quad + p p \quad - 2 p q \quad + 2 p r \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + q q
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 Et bb = 4 - 4 p x x + 4 q x^4 - 4 r x^6 + 4 s x^8 - 4 t x^{10} \&c. \\
 \quad \quad \quad + p p \quad - 2 p q \quad + 2 p r \quad - 2 p s \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + q q \quad - 2 q r
 \end{array}$$

Lesquels quarrés comparés terme à terme avec les correspondans
 B b b b b b 2 dans

N.XCVII dans des progressions qu'on vient de trouver, détermineront les valeurs des coefficients $p, q, r, s, \&c.$ & de cette manière l'on aura $a =$

$$nx - \frac{n.(nn-1)}{4.6} x^3 + \frac{n.(nn-1).(nn-9)}{4.6.8.10} x^5 - \frac{n.(nn-1).(nn-9).(nn-25)}{4.6.8.10.12.14} x^7 + \&c.$$

Et $b =$

$$2 \cdot \frac{nn}{4} xx + \frac{nn.(nn-4)}{4.6.8} x^4 - \frac{nn.(nn-4).(nn-16)}{4.6.8.10.12} x^6 + \frac{nn.(nn-4).(nn-16).(nn-36)}{4.6.8.10.12.14.16} x^8 - \&c.$$

où la loi de la progression est très-facile à reconnoître. Mais parce que dans la première 1, 9, 25, &c. expriment les quarrés de tous les nombres impairs, & que dans la seconde 4, 16, 36, &c. expriment aussi les quarrés de tous les nombres pairs, on voit que quelque nombre entier rationel que soit n , il y aura toujours quelque terme qui s'évanouïra, avec ceux qui le suivent, dans l'une ou dans l'autre de ces progressions: de manière qu'alors cette progression se changera en une équation algebraïque finie, laquelle disposée, comme l'on dispose d'ordinaire celle dont le premier terme n'est point affecté, se changera en celle-ci,

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n.(n-3)}{2.} x^{n-4} - \frac{n.(n-4).(n-5)}{2.3} x^{n-6} + \frac{n.(n-5).(n-6).(n-7)}{2.3.4} x^{n-7} \dots$$

... $\left. \begin{array}{l} \text{Si } n \text{ est impair, } \pm nx \mp a \\ \text{Si } n \text{ est pair, } \pm nnxx \mp 2 \pm b. \end{array} \right\} = 0$, laquelle donne tout d'un coup celle de telle Section déterminée qu'on voudra, en prenant n pour le nombre des parties requises: Par exemple, si l'on veut diviser un arc de cercle ou un angle en 3, 5, 7, ou en 6 parties égales; il faut prendre $n = 3, 5, 7$, ou 6, dans la précédente équation générale; & elle se changera en celles-ci pour les Sections requises, lesquelles sont précisément les mêmes qui se trouvent par la voie ordinaire.

$$\begin{aligned}
 x^3 - 3x + a &= 0 \\
 x^5 - 5x^3 + 5x - a &= 0 \\
 x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + a &= 0 \\
 x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 + b &= 0
 \end{aligned}$$

Voilà pour ce qui regarde la Section des arcs circulaires, ou des angles, en tel nombre de parties égales qu'on voudra. Présentement ces arcs étant donnés, voici la manière d'en trouver les cordes, ou les sinus : le passage de l'un à l'autre est facile. Pour cela, concevons que la corde BG, [que nous avons appelée x] est infiniment petite ; de manière qu'elle se confonde avec l'arc BG, & que le nombre n , [qui marque combien de fois cet arc BG est surpassé par l'arc BD] soit infini ; alors on aura l'arc BD [que j'appelle présentement f] $= nx$. Cela posé, les nombres 1, 9, 25, &c. de même que 4, 16, 36, &c. se trouvant nuls par rapport à nn , les équations $a = nx$, &c. & $b = 2 - \frac{1}{3}nnxx$ &c. qu'on vient de trouver, se changeront en

$$\text{celles-ci : } a = nx - \frac{n^3 x^3}{4 \cdot 6} + \frac{n^5 x^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{n^7 x^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \text{ \&c.}$$

$$\text{\& } b = 2 - \frac{nnxx}{4} + \frac{n^4 x^4}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{n^6 x^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{n^8 x^8}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}$$

— &c. lesquelles [à cause de $nx = f$] se changent encore en

$$\text{BD} = a = f - \frac{f^3}{4 \cdot 6} + \frac{f^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{f^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \text{\&c.} \text{ \& en}$$

$$\text{DF} = b = 2 - \frac{ff}{4} + \frac{f^4}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{f^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{f^8}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}$$

— &c. C'est ainsi que l'arc BD étant donné, j'en ai autrefois déterminé la corde BD, & celle de son complément DF.

Si présentement on veut le sinus d'un arc proposé, soit cet arc BC [$\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}f$] $= g$, son sinus BH [$\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}a$] $= s$; AH [$\frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}b$] $= c$; HC $= v$. A ce compte, l'on aura $a = 2s$, $b = 2c$, & $f = 2g$; lesquelles valeurs de a , b , f étant substituées en leurs places, dans les deux dernières égalités pré-

$$\begin{aligned} \text{N.XCVII cédentes, l'on aura } s \text{ [Sinus droit de l'arc BC]} &= g - \frac{g^3}{2.3} + \\ &\frac{g^5}{2.3.4.5} - \frac{g^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c. \text{ } c \text{ [Sinus du compl.]} &= 1 - \frac{gg}{2} + \\ &\frac{g^4}{2.3.4} - \frac{g^6}{2.3.4.5.6} + \&c. \text{ } \text{Donc } v \text{ [Sinus versé]} &= 1 - c = \frac{gg}{2} - \\ &\frac{g^4}{2.3.4} + \frac{g^6}{2.3.4.5.6} - \frac{g^8}{2.3.4.5.6.7.8} + \&c. \text{ } \end{aligned}$$

lesquelles progressions sont précisément les mêmes que celles que Mr. LEIBNITZ a données dans les *Actes de Leipsic*, au mois d'Avril de 1691, pag. 179. Et de cette manière l'on voit que nous avons donné la solution de deux Problèmes à la fois: savoir, la division d'un angle ou d'un arc de cercle en raison donnée, & réciproquement le sinus d'un arc circulaire, ou d'un angle donné quelconque. Au reste il est à remarquer que Mr. NEWTON en resolvant le premier de ces Problèmes, est tombé dans la même progression que nous, comme on le voit dans la pag. 384 de l'*Algèbre* de Mr. WALLIS imprimée à *Oxford*, en 1693.

P. S.

Un des principes sur lesquels Mr. HERMAN s'est fondé dans la recherche de la multisection de l'angle, est la propriété du quadrilatère inscrit dans le cercle, dont le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés: sur quoi j'ai trouvé que l'on peut aussi déduire nôtre formule de cette même propriété, en cherchant sans interruption les cordes, ou les carrés des cordes de l'arc, double, triple, quadruple, quintuple, &c. & non par sauts, comme j'ai fait celles de l'arc double, quadruple, octuple, &c. par l'autre méthode. En voici la démonstration.

Dans le quadrilatère inscrit au cercle B G F C, [*Fig. 2*] soit BG = FC = x , GF = s , BF ou GC = t , & BC = v ; l'on aura, par la dite propriété, $tt = xx + sv$; & par conséquent $v =$
 $tt -$

$(tt - xx): s$, & $vv = (t^4 - 2ttxx + x^4): ss$. Or si GF, ou s , est posée égale à BG, ou x ; BF, ou t , sera la corde de l'arc double, & BC, ou v , la corde de l'arc triple de BG; & si s est la corde de l'arc double, t sera celle du triple, & v celle du quadruple de l'arc BG, & si s est celle du triple, t sera celle du quadruple, & v celle du quintuple, & ainsi de suite. Donc la corde de l'arc simple étant x , & celle du double $\sqrt{(4xx - x^4)}$ l'on connoitra par cette équation celle du triple, & de même par la corde de l'arc double, & par celle du triple, on trouvera celle du quadruple; & par celles des arcs triple & quadruple, l'on saura celle du quintuple, & ainsi de suite, comme l'on voit ici.

Quarrés des cordes.

1	xx
2	4xx — x ⁴
3	9xx — 6x ⁴ + x ⁶
4	16xx — 20x ⁴ + 8x ⁶ — x ⁸
5	25xx — 50x ⁴ + 35x ⁶ — 10x ⁸ + x ¹⁰
6	36xx — 105x ⁴ + 112x ⁶ — 54x ⁸ + 12x ¹⁰ — x ¹²
&c.	

Cordes elles-mêmes.

1	x
2	x√(4 — xx)
3	3x — x ³
4	(2x — x ³)√(4 — xx)
5	5x — 5x ³ + x ⁵
6	(3x — 4x ³ + x ⁵)√(4 — xx)

Où l'on remarque avec plaisir, que toutes les cordes, dont l'exposant du multiple est un nombre impair, deviennent rationnelles, pendant que les autres sont sourdes; mais toutes commensurables entr'elles, & divisibles par $\sqrt{(4 - xx)}$.



N^o. XCVIII.

DEMONSTRATION
GENERALE,

*Du Centre de Balancement ou d'Oscillation ,
tirée de la Nature du Levier.*

Par Mr. BERNOULLI , Professeur
à Bâle.

Lettre du 13. Mars 1703.

*Histoire de
l'Acad. des
Sciences de
Paris 1703.
pag. 78 ,
Ed. de Pa-
ris, & pag.
96, Edit.
de Holl.*

ON fait que toute la doctrine du Balancement , que feu Mr. HUYGENS nous a laissée dans la quatrième Partie de son excellent *Traité de la Pendule* , est fondée sur cette hypothèse , que le Centre commun de gravité de plusieurs corps liés ensemble , doit remonter précisément à la même hauteur d'où il est descendu ; soit que ces poids remontent conjointement , ou , que se détachant à la fin de leur chute , ils remontent ensuite separement , chacun avec la vitesse qu'il aura pour lors acquise. Mais on fait aussi qu'il y a eu bien des gens , à qui cette demande a paru un peu hardie , & qui n'ont jamais pû tomber d'accord de son évidence , quoiqu'ils la crûssent vraisemblable. Il y en a eu même qui ont nié ce principe , entr'autres un Auteur illustre * en a donné

* Mr. l'Abbé de CATELAN.

donné ses raisons dans les *Journaux des Savans* de 1681 & 1682. Nam.
XCVIII.
 Mais le hazard m'ayant alors, je ne sçais comment, engagé à l'examen de ces raisons, je trouvai (de même que Mr. HUYGENS) que cet Auteur se trompoit lui-même, en ce qu'il supposoit que *la vitesse totale d'un Pendule doit être égale à la somme des vitesses de ses parties séparées.* Car ayant considéré, que la pesanteur agissant uniformément sur toutes les parties d'un Pendule, celles de ces parties, qui sont les plus éloignées de l'axe de son mouvement, & qui doivent décrire de plus grands arcs, se doivent moins ressentir de cet effort, que les moins éloignées; je vois que celles-ci, dans leur mouvement, devoient s'appuyer d'un côté sur les plus éloignées, & de l'autre sur l'axe du Pendule, où il se perd toujours quelque chose de ce mouvement: & je conclus de là que la vitesse totale du Pendule devoit nécessairement être plus petite que ne seroit la somme des vitesses de ses parties, si elles étoient tombées séparément. C'est ce qui me fit concevoir dans le Pendule une espèce de Levier, & penser à même tems si on ne pourroit pas aussi trouver, par ce principe, ce qu'a trouvé Mr. HUYGENS, par un autre, beaucoup plus sujet à contestation que celui du Levier. J'en proposai le dessein aux Géomètres dans les *Actes de Leipsic*, de 1686*, où j'expliquai mon sentiment. Mr. le *Marquis de L'HOSPITAL* fut le premier qui s'apperçut de la justesse de cette pensée; & il en fit voir la convenance avec la doctrine de Mr. HUYGENS, dans les *Journaux de Rotterdam* de 1690 †, par l'induction de deux, de trois, de quatre poids, &c. après quoi je trouvai le moyen d'étendre la démonstration à un nombre quelconque de poids égaux ou inégaux, tous situés en même ligne droite; comme on le peut voir dans les *Actes de Leipsic* de 1691 ††. Mais je ne pouvois encore aller plus loin, ni appliquer mon principe à des lignes courbes, ni à des surfaces, ou à des solides, à cause de quelque difficulté qui m'arrêta. Je ne la surmontai que

Jac. Bernoulli Opera.

C c c c c c

quel-

* N^o. XXIII, pag. 277.

†† N^o. XLV, pag. 460.

† N^o. XLIII, pag. 454

Num.
XCVIII.

quelques années après, en résolvant ce Problème dans toute son étendue ; en trouvant même plus que je ne cherchois. Car non-seulement je renferme, dans une équation courte & aisée, tout ce que Mr. HUYGENS nous a donné sur ce sujet ; mais outre cela, je prouve démonstrativement, en retournant sur mes pas, ce que cet Auteur a avancé sans preuve ; sçavoir que le Centre commun de gravité des parties d'un Pendule, qui se brise en descendant contre quelque chose qui les oblige à réfléchir, doit nécessairement remonter à la hauteur d'où il est descendu. Je démontre encore, en suivant les mêmes traces, l'identité des Centres de Balancement & de Percussion. Enfin, je détermine par cette méthode une nouvelle espèce de Centre, que j'appelle *Centre de tension* *, où l'Hypothèse de Mr. HUYGENS, ne sauroit avoir lieu : j'expliquerai en son tems ce que j'entens par là. Et comme je n'ai encore rien publié de tout cela, je veux vous l'envoyer par parties, pour pouvoir être présenté à l'Académie, si vous trouvez qu'il le mérite. Je commence par la première.

Principe du Levier tiré ou poussé par des Puissances qui sont en mouvement.

Soient [Fig. 1] AC, AC, AD, AD, les branches d'un Levier, mobile autour du point A : soyent C, C, D, D, des poids, ou des puissances, mêlés avec des vitesses CB, CB, DE, DE, lesquelles fassent impression suivant les directions CB, CB, DE, DE, perpendiculaires aux bras de levier AC, AC, AD, AD. Je suppose, que si tous les produits des puissances C par AC & CB, sont égaux à tous les produits des puissances D [qui agissent en sens contraire] par AD, & DE ; ou bien, si tous les produits de C par AC & CB [entant qu'on conçoit toutes les
puif-

* Voyez N° CIII, Art. XXVI.

puissances agir en même sens] sont égaux à rien ; le Levier doit demeurer en équilibre. Num. XCVIII.

Ce principe a été démontré par feu Mr. MARIOTTE dans la Prop. 13, de la seconde Partie de son *Traité de la percussion des corps* ; & il n'y a personne qui en disconvienne.

S O L U T I O N.

Soit maintenant A [Fig. 2] l'axe horizontal du balancement ; AXM un plan vertical droit à l'axe ; AM le diamètre de la Figure qui balance , auquel l'on ait appliqué , dans le même plan, l'ordonnée CLD à angle donné ALD ; laquelle ait $CL = LD$ (*). Soient de plus C & D deux petites parcelles de la Figure, lesquelles décrivent dans leur balancement, les arcs CT, DS : soit aussi AM la longueur du Pendule simple, qui fait ses vibrations dans le même tems que la Figure qui balance.

De ce que le balancement, tant de M que de C & D, s'achève, par l'hypothèse, en même tems, il s'ensuit que les vitesses, dont ces poids se meuvent à chaque instant, sont proportionnelles à leurs distances AM, AC, AD de l'axe A ; & que par conséquent leur mouvement peut être continué avec ces vitesses, sans que les poids C & D agissent en aucune manière l'un sur l'autre : De sorte, qu'il ne faut considérer que la seule impulsion que la pesanteur ajoute à chaque moment aux vitesses acquises. Soit donc ce choc, ou cette impulsion, représentée par les petites lignes verticales & égales MN, CO, & DP : ensuite, après avoir mené les droites NK, OT, & PV, perpendiculaires

C c c c c 2

res

(*) C'est ici une restriction considérable à l'universalité de cette méthode, qui ne pourroit s'appliquer, sans de très longs calculs, aux Figures qui ne sont pas divisées en deux parties égales par un Diamètre. On ne trouvera pas ce défaut dans la

Méthode de Mr. Jean BERNOULLI, pour déterminer le Centre d'Oscillation, qu'on peut voir dans les *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris*, & dans les *Actes de Leipzig*, pour l'année 1714.

Num.
XCVIII.

res aux arcs MK, CT, DV; soient conçus les mouvemens par MN, CO, DP, comme étant composés chacun de deux autres, sçavoir du mouvement de M en K, & de K en N; de C en T, & de T en O; de D en V, & de V en P. Et là, il est encore visible, que celui qui se fait par KN, TO & VP, se répand tout sur l'axe A, & qu'il s'y perd entièrement. Ainsi il n'y a que le seul mouvement par MK, CT, DV, qui ait son effet; mais non sans quelque changement: d'autant que M étant parvenu en K, les poids C & D [à cause de l'isochronisme qu'on suppose] ne sauroient être en T & en V; ils doivent se trouver en des points comme R & S, tels que les arcs MK, CR, DS, soient semblables. C'est ce qui fait que l'effort de pesanteur, qui agit sur le poids C, n'est pas épuisé au point R, & que le reste RT doit être employé à pousser le corps D par VS. Mais, parce que ce corps D doit résister autant qu'il est poussé, c'est comme si, étant en S, il y avoit une force qui tâchât de le repousser de S en V. De sorte, que voilà un levier CAD, sur lequel des poids, comme C, tirant ou poussant d'un côté, avec des forces ou vitesses RT, & de l'autre des poids, comme D, tirans ou repoussans en sens contraire, avec des forces ou vitesses SV, sont équilibre. Donc, suivant le précédent Principe du Levier, les sommes des produits $C \times AC \times RT$, d'une part, est égale à celle des produits $D \times AD \times VS$, de l'autre; ou [ce qui revient au même] la somme des produits $C \times AC \times RT$, entant qu'on y comprend aussi ceux de l'autre côté, est égale à rien. En voici l'Analyse.

Soyent MN, CO, DP, prolongées, avec leur parallèle LH, jusques-à ce qu'elles coupent toutes l'horizontale AX en X, G, I, & H. Soit de plus AE perpendiculaire sur SD, & qu'on fasse

MN

MN = CO = DP =	MN : MK = AL : AH,
[Sin. tot. = a	a : b = x : $\frac{bx}{a}$.
MK = b	Sin. tot. Sin. HLC = LC : HG ou HI.
Sin. ang. LAE = g	a : b = y : $\frac{hy}{a}$.
Sin. ang. HLC = h	AG = AH + HG = $\frac{bx + hy}{a}$.
AC = l	AI = AH - HI = $\frac{bx - hy}{a}$.
AD = m	
AM = t	AC : AG = CO : CT.
AL = x	l : $\frac{bx + hy}{a}$ = a : $\frac{bx + hy}{l}$
LC = LD = y	AD : AI = DP : DV.
C = D = dp	m : $\frac{bx - hy}{a}$ = a : $\frac{bx - hy}{m}$.

Sin. tot : Sin. LAE = AL : LE.

a : g = x : $\frac{gx}{a}$.

AC² = AL² + LC² + 2CLE.

ll = xx + yy + $\frac{2gxy}{a}$.

AD² = AL² + LD² - 2DLE.

mm = xx + yy - $\frac{2gxy}{a}$.

AM : MK = AC : CR = AD : DS.

t : b = l : $\frac{bl}{t}$ = m : $\frac{bm}{t}$.

RT = CT - CR = $\frac{bx + by}{l}$ - $\frac{bl}{t}$

SV = DS - DV = $\frac{bm}{t}$ - $\frac{bx - by}{m}$.

Ccccc 3

Cx

$$\text{Num. XCVIII. } C \times AC \times RT = dp \times l \times \left(\frac{bx+hy}{l} - \frac{bl}{t} \right) = (bx+hy - \frac{bl}{t}) \times dp$$

$$[\text{ en effaçant } ll] = (bx+hy - \frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at}) \times dp.$$

$$D \times AD \times SV = dp \times m \times \left(\frac{bm}{t} - \frac{bx-hy}{m} \right) = (\frac{bmm}{t} - bx+hy) \times dp$$

$$[\text{ en effaçant } mm] = (\frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at} - bx+hy) \times dp.$$

Donc tous les $C \times AC \times RT$ égaux à tous les $D \times AD \times SV$, donneront $f(bx+hy - \frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at}) dp = f(\frac{bxx+byy}{t} -$

$\frac{2bgxy}{at} - bx+hy) dp$. Et par conséquent [en ajoutant

$$f(\frac{bxx+byy}{t} + \frac{2bgxy}{at} + bx - hy) dp, \text{ de part \& d'autre }] f 2bx dp$$

$$= f \frac{2bxx+2byy}{t} dp; \text{ ou [en divisant par } 2b] f x dp = f \frac{xx+yy}{t} dp;$$

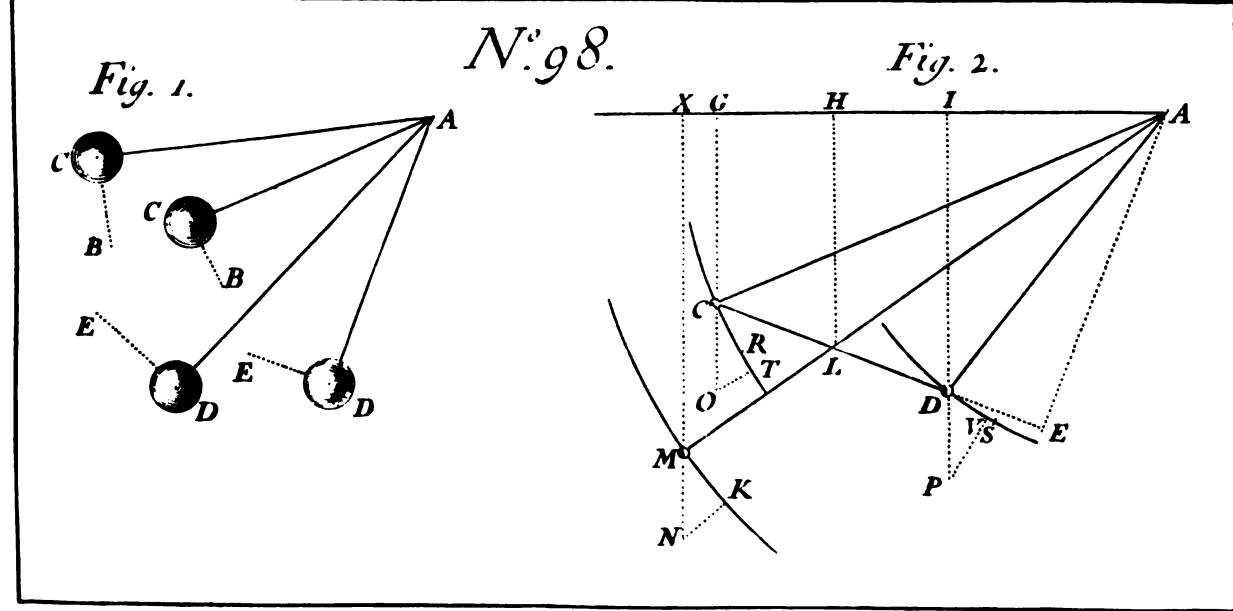
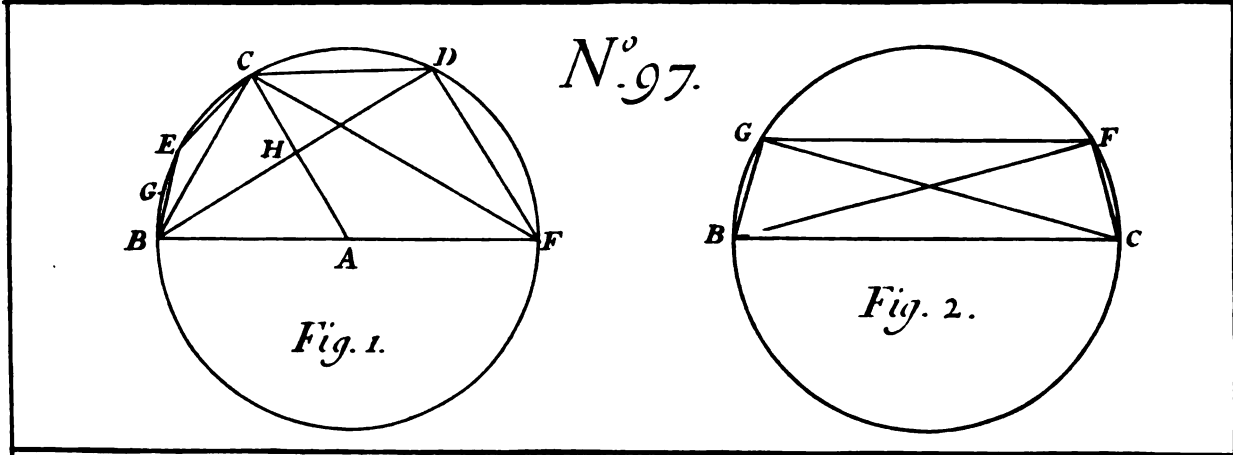
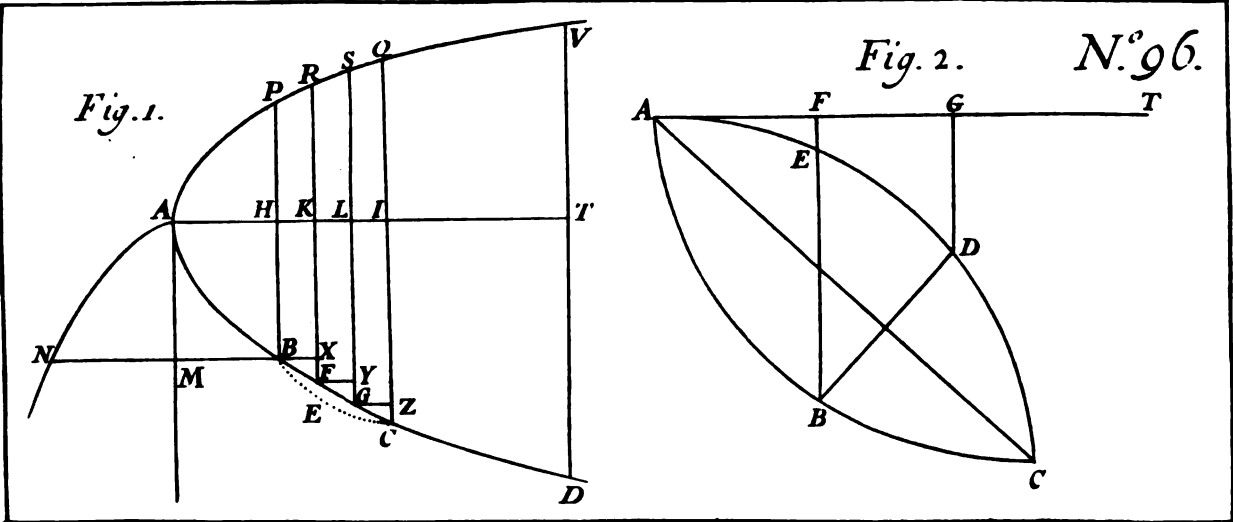
$$\& \text{ enfin } t = \frac{f(xx+yy) dp}{\int x dp} = \frac{f x dp + f y dp}{\int x dp}.$$

Ou bien de cette manière : Tous les $C \times AC \times RT = f(bx+hy - \frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at}) dp = 0$. Et par conséquent $f(bx+hy) dp$

$$= f(\frac{bxx+byy}{t} + \frac{2bgxy}{at}) dp; \text{ d'où résulte } t = \frac{f(bxx+byy+2bgxy: a) dp}{\int (bx+hy) dp}$$

ou, [en effaçant les membres dans lesquels y n'a qu'une dimension, parce que toutes les y positives sont détruites par autant de y négatives de l'autre] $t = \frac{f(xx+yy) dp}{\int x dp} = \frac{f x dp + f y dp}{\int x dp}$, comme ci-dessus.

Il reste maintenant à faire voir l'application de cette règle aux différentes figures dont Mr. HUYGENS a donné les Centres d'oscillation; mais ce sera pour une autre fois.



N^o. XCIX.

E X T R A I T

D' U N E L E T T R E

De Mr. B E R N O U L L I , Profess. à *Bâle*,en date du 11. *Sept.* 1703 ,

*Contenant l'application de sa Règle du Centre
de Balancement à toutes sortes de figures.*

Toute la doctrine de Mr. HUYGENS , touchant le Centre d'Oscillation ou de Balancement, roule sur la dimension de certains coins retranchés de la figure qui balance, & de la longueur de leurs souscentriques [*Subcentrica centri*] : Tellement que, pour faire voir la convenance de ma Règle avec cette doctrine, je n'aurai qu'à y faire remarquer ces coins : ce qui est très facile.

*Histoire de
l'Acad. des
Sciences de
Paris 1703.
pag. 272 ,
Ed. de Pa-
ris, & pag.
327, Edit.
de Holl.*

Soit la figure plane quelconque AB, [*Fig. 1*] dont G soit une des parties infiniment petites, & HAH sa tangente en A. Imaginons ensuite un cylindre droit sur cette figure, duquel un plan passant par HH, & incliné de 45 degrés sur celui de cette figure, retranche le coin ABDA. Soit de plus L le point de cette base perpendiculairement situé sous le centre de gravité de ce coin. Soit enfin GH la distance de G à la tangente HH, appelée x ; & G appelé dp ; Done la hauteur du petit prisme GK [qui a G pour base] étant égale à GH [x] à cause de
l'an-

N. XCIX. l'angle demi-droit de la section précédente, ce prisme sera $\equiv x dp$; & son moment [*momentum.*] à l'égard de la tangente HH, sera de même $\equiv x x dp$. Donc la solidité du coin, qui a ce prisme pour élément, c'est-à-dire, la somme de tous ces prismes, sera $\equiv \int x dp$, & son moment $\equiv \int x x dp$, lequel étant divisé par ce même coin, donnera la sous-centrique AL $\equiv \frac{\int x x dp}{\int x dp}$.

Si présentement on coupe le cylindre précédent par un autre plan incliné aussi de 45 degrés sur la base AB, lequel plan rencontre cette base dans une ligne perpendiculaire à la tangente HH de cette même base, & qu'on appelle *y* la distance de G à cette ligne; l'on aura un autre coin, dont le moment, à l'égard de cette ligne, sera de même $\equiv \int y y dp$. Et comme toutes ces quantités entrent dans l'expression littérale de ma Règle *, qui donne la distance du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement $\equiv \int (x x + y y) dp : \int x dp \equiv (\int x x dp + \int y y dp) : \int x dp$, on peut déjà entrevoir sa conformité avec la doctrine de Mr. HUYGENS †.

Mais il n'est pas besoin de m'expliquer davantage sur cela, ces coins m'étant inutiles. Depuis que le Calcul des différences est en vogue, on ne se charge plus l'imagination d'autres solides, ni d'autres figures, que de ceux, ou celles, qui sont données dans la question. C'est pourquoi je me contenterai de montrer ici la manière d'appliquer ma Règle à toutes sortes de grandeurs, en faisant simplement attention à cette quantité littérale $(\int x x dp + \int y y dy) : \int x dp$.

Pour cet effet, soit CADP [Fig. 2] un Conoïde ou Sphéroïde quelconque, qui balance sur un axe horizontal HAH: soit BCAD la figure ou la section qui résulte de ce corps coupé par un plan vertical, droit à l'axe HH du mouvement, & BPAQ celle qui résulte de même de ce corps coupé par le plan BHH:

II

* N^o. præced. pag. 936.† *De Horologio Oscillatorio*, Pars IV.

Il s'agit de trouver le Centre d'oscillation, tant du Conoïde, N^o XCIX. que des Figures BCAD, BPAQ; & des Lignes CAD, PAQ, considérées séparément hors du Conoïde: la Figure ou Ligne CAD ayant ses agitations *in latus*, & l'autre PAQ ayant les siennes *in planum*. Je conçois donc ce Conoïde divisé en une infinité de tranches parallèles à sa base & à l'axe du mouvement; qu'une de ces tranches est le cercle MKN I; que la commune intersection de ce cercle & du plan vertical, est le diamètre IK; que celle du même cercle & de la figure PAQ est le diamètre MN; & qu'une de ses ordonnées au diamètre IK, est GF. Cela conçu, je fais $AB = a$, $BC = b$, $AL = x$, $LK = v$, $LG = y$, $GF = z = \sqrt{(vv - yy)}$, AK , ou $AM = s$, la raison du diamètre à la circonférence $= r : p$; & par conséquent le cercle $IMKN = pvv : r$.

1^o. Comme tous les points de l'ordonnée GF, qui est supposée parallèle à l'axe HH du mouvement, se meuvent également vite, c'est comme si le petit rectangle GF étoit tout ramassé en G; & par conséquent comme si le cercle entier IMKN [$pvv : r$] étoit étendu le long de la ligne IK: Et parce que tous les points de cette ligne répondent à une même AL [x], il s'entuit que tous les $x dp$ du cercle IMKN [c'est-à-dire, tous les produits de ses élémens multipliés par x] s'expriment par $pvvx : r$, & tous ses $xx dp$ par $pvvxx : r$. Il n'en est pas de même de tous ses $yy dp$, à cause que les différens points du diamètre IK ne répondent pas à une même y . Pour les trouver, je considère que G étant chargé de tous les dp du petit rectangle GF [$z dy$], tous les $yy dp$ de ce rectangle sont $yyz dy$, & que l'intégrale de $yyz dy$ doit marquer tous les $yy dp$ du segment du cercle MLGF. Or l'intégrale de $yyz dy$ est $= \frac{1}{2} vv \times fz dy - \frac{1}{2} yz^2$ [comme il paroît (*)] en

Fac. Bernoulli Opera.

D d d d d

pre-

(*) Ou bien ainsi. Puisque $yy = vv - zz$, on aura $yyz dy = vyz dy - zz dy$, & en intégrant $yyz dy = vyz dy - \frac{1}{2} z^2 dy$, & en intégrant $yyz dy = vyz dy - \frac{1}{2} z^2 dy$. Mais v est constante, si l'on diffé-

rentie $zz = vv - yy$, on aura $z dz = -y dy$, & par conséquent $z y dz = -yyz dy$. Donc, écrivant $3yyz dy$, au lieu du dernier terme de l'équation $yyz dy = vyz dy - yz^2 + 3fz y dz$

N. XCIX. prenant la différence de chaque quantité, & en substituant $vv - yy$ au lieu de zz , & $-ydy$ au lieu de zdz]: De sorte que lorsque LG devient LK, & que l'ordonnée GF [z] s'évanouit; alors $\int zdy$ [c'est-à-dire, la somme de tous les rectangles zdy] devenant égale à tout le cercle $pvv:r$, l'on aura $\frac{1}{4}vv \times \int zdy = pv^2:4r$.

Après avoir ainsi trouvé que les sommes de tous les $x dp$, $xx dp$, & $yy dp$, par rapport au cercle IMKN, sont $pvx:r$, $pvx^2:r$, & $pv^2:4r$; si l'on multiplie chacune d'elles par dx , qui est l'épaisseur du cercle, ou de la tranche IMKN, les intégrales des produits $pvx dx:r$, $pvx^2 dx:r$, & $pv^2 dx:4r$, marqueront ces sommes par rapport à tout le Conoïde ou Sphéroïde CADP: De sorte que l'on aura la distance du Centre d'oscillation ($\int xxdp + \int yydp$): $\int xdp = (\int_r^p vx dx + \int_{4r}^p v^2 dx): \int_r^p vx dx = (\int vx dx + \int_{\frac{1}{2}v}^x v^2 dx): \int vx dx = \int (xx + \frac{1}{2}vv) v dx: \int vx dx$. D'où l'on voit que pour déterminer ce Centre, il ne reste plus que de mettre la valeur de vv en x dans cette Formule, suivant l'exigence de la Figure AKCB section du Conoïde par l'axe AB; & d'en prendre ensuite l'intégrale. En voici quelques Exemples (^b).

+ $3\int zzy dz$, elle se changera en $\int yzdy = v\int zdy - yz^2 = 3\int yzdy$, & transposant $4\int yzdy = v\int zdy - yz^2$, ou enfin $\int yzdy = \frac{1}{4}v\int zdy - \frac{1}{4}yz^2$.

(^b) Le Calcul de ces Exemples & des suivans, n'a rien que de facile pour ceux qui entendent les principes du Calcul Intégral.

Solide proposé	Valeur de vv .	Quantité $\frac{\int (xx + \frac{1}{2}vv) vvd x}{\int vvx dx}$	La même dans le cas de $x = a$
Cone suspendu par le sommet.	$bbxx : aa$	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}bbx : aa$	$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}bb : a$
Cone rectangle suspendu par le milieu de sa base.	$aa - 2ax + xx$	$\frac{3a^4 - 6a^3x + 10a^2x^2 - 9ax^3 + 3x^4}{6aax - 8axx + 3x^3}$	a
Cylindre.	bb	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}bb : x$	$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}bb : a$
Conoïde Parabolique.	$bbx : a$	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}bb : a$	$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}bb : a$
Conoïde Hyp. dont le côté transverse est $= AB$.	$\frac{bbx}{2a} + \frac{bbx}{2aa}$	$\frac{10a^2b^2 + 15ab^2x + 60a^3x + 6b^2x^2 + 48a^2x^3}{80a^3 + 60a^2x}$	$\frac{27}{35}a + \frac{21}{140}bb : a$
Sphère.	$ax - xx$	$\frac{10aa + 15ax - 18xx}{40a - 30x}$	$\frac{7}{16}a$
Demi-Sphère suspendue par le sommet.	$2ax - xx$	$\frac{20aa + 15ax - 9xx}{40a - 15x}$	$\frac{26}{37}a$
Demi-Sphère suspendue par le centre.	$aa - xx$	$\frac{15a^4 + 10aax - 9x^4}{30aax - 15x^3}$	$\frac{16}{15}a$

II°. Pour trouver le Centre d'oscillation du plan BCAD, qui fait ses agitations *in latus*; je considère que tous les points de l'appliquée LK [v] répondant toujours à une même abscisse AL [x], & ne répondant pas à une même LG [y], tous les xap & $xxap$ contenus dans LK, c'est-à-dire, tous les xy & $xxdy$, seront xv & xxv ; mais tous les $yydp$ ou $yydy$ seront $\frac{1}{2}y^2$, & par conséquent $\frac{1}{2}v^2$ pour toute l'appliquée LK. Donc en multipliant chacune de ces grandeurs xv , xxv , & $\frac{1}{2}v^2$, par la largeur

D d d d d d z dx

N. XCIX. dx du petit parallélogramme LK; & en prenant ensuite les intégrales des produits $xvdx$, $xxvdx$, & $\frac{1}{2}v^2dx$, après y avoir substitué la valeur de v en x , l'on aura les $\int xdp$, $\int xxdp$, & $\int yydp$, par rapport à toute la figure: Tellement que la distance $(\int x x dp + \int yydp) : \int xdp$ du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement sera $= (\int xxvdx + \int \frac{1}{2}v^2dx) : \int xvdx = \int (xx + \frac{1}{2}vv) vdx : \int xvdx$. Et il n'importe pas que l'angle ALK du diamètre & des appliquées soit droit ou oblique; la raison de dx à la largeur du petit rhomboïde LK, dans une même figure, demeurant toujours la même.

EXEMPLES.

Plan proposé, oscillant in <i>latus</i> .	Valeur de v .	Quantité $\frac{\int (xx + \frac{1}{2}vv) vdx}{\int xvdx}$	La même pour le cas de $x=a$
Triangle isoscèle suspendu par le sommet.	$bx : a$	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}b^2x : a^2$	$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}bb : a$
e même suspendu par le milieu de sa base.	$b - bx : a$	$\frac{4a^3b^2 - 6a^2b^2x + 4ab^2x^2 + 4a^2x^2 - b^2x^3 - 3a^2x^3}{6a^2x - 4aaxx}$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}bb : a$
Rectangle suspendu par le milieu d'un de ses côtés.	b	$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}bb : x$	$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}bb : a$
Parabole suspendue par le sommet.	$\sqrt{(bbx : a)}$	$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}bb : a$	$\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}bb : a$
La même suspendue par le milieu de sa base.	$b\sqrt{\frac{a-x}{a}}$	$\frac{7aabb + 8a^4 - (7aabb + 8a^4 - 14abbx + 4a^2x + 7bbxx + 3aaxx - 15ax^2) \times \sqrt{\frac{a-x}{a}}}{14a^4 - (14a^3 + 7aax - 21aax) \times \sqrt{\frac{a-x}{a}}}$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}bb : a$
Cercle.	$\sqrt{(ax - xx)}$	$\frac{(16x^2 + 8aax - 6aax - 9a^2)v + 9aas}{(32xx - 8ax - 12aa)^2 + 12aa^2}$ ^(c)	$\frac{3}{4}a$

(c) Dans cette formule s désigne l'arc de cercle, dont x est le sinus versé. Quel

Quelquefois les v font de différentes valeurs dans une même **N.XCIX.** figure, comme dans le parallélogramme ACBD [Fig. 3] suspendu à un de ses angles A : car en prenant la diagonale AB pour le diamètre a , & les droites LK parallèles à l'autre diagonale CD pour les appliquées v , les v du triangle ACD sont $=x$, & celles du triangle CBD $=a-x$. C'est pourquoi je cherche séparément toutes les $(xx + \frac{1}{3}vv) v dx$ du triangle ACD, que je trouve faire $\frac{1}{48} a^4$, & toutes celles du triangle CBD, qui font $\frac{1}{12} a^4$, dont la somme entière $\frac{1}{12} a^4$ marque $f(xx + \frac{1}{3}vv) v dx$ par rapport à toute la figure. Je cherche de même toutes les $xv dx$ du triangle ACD, qui font $\frac{1}{24} a^3$, & toutes celles du triangle BCD, qui font $\frac{1}{12} a^3$, & je les ajoute ensemble ; ce qui me donne $\frac{1}{8} a^3$. D'où je conclus que la distance $f(xx + \frac{1}{3}vv) v dx : f xv dx$, du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement, doit être ici $\frac{1}{12} a^4 : \frac{1}{8} a^3 = \frac{2}{3} a$.

Il en est de même du secteur de cercle ACN [Fig. 4], dans lequel en faisant AB $=a$, AD $=c$, DC $=b$, AL $=x$, & LK $=v$; les appliquées v du triangle ADC se trouvent $=bx : c$, & celles du segment BDC font $=\sqrt{(aa - xx)}$. (d).

D d d d d 3

Mais

(d) En suivant ces dénominations, on trouvera pour le triangle ADC, que $f(xx + \frac{1}{3}vv) v dx$ est $=\frac{1}{4} bx^4 : c + \frac{1}{12} b^3 x^4 : c^3 =$ [quand $x=c$] $\frac{1}{4} bc^4 + \frac{1}{12} b^3 c$. Et pour le demi-segment BDC, on trouvera en général $(\frac{1}{12} aax + \frac{1}{6} x^3) v + \frac{1}{4} a^2 r$. [r désignant l'arc dont x est le sinus]. Mais cette grandeur se rapporte à un second segment tel que ALE G. Donc faisant $x=a$, & $v=0$, on aura pour le quart de cercle ABG, $\frac{1}{4} a^3 s$, où s désigne le quart de circonférence BCG : & faisant $x=c$, & $v=b$, on aura, pour ADCG, $\frac{1}{4} a^3 r + (\frac{1}{12} aac b +$

$\frac{1}{6} c^3 b) = \frac{1}{4} a^3 r + \frac{1}{12} b^3 c + \frac{1}{4} bc^3$, [parce que $aa = bb + cc$], ce qui étant ôté de $\frac{1}{4} a^3 s$, il reste, pour le demi-segment BDC, $\frac{1}{4} a^3 (s - r) - \frac{1}{12} b^3 c - \frac{1}{4} bc^3 = \frac{1}{4} a^3 t - \frac{1}{12} b^3 c - \frac{1}{4} bc^3$ [t représentant l'arc BC], & si l'on ajoute $\frac{1}{4} bc^3 + \frac{1}{12} b^3 c$, pour le triangle ADC, on aura simplement $\frac{1}{4} a^3 t$ pour le secteur ABC. De même on trouve $f xv dx$, pour le triangle ADC $=\frac{1}{3} bx^3 : c = \frac{1}{3} bcc$, quand $x=c$. Et pour le demi-segment BDC, on trouve en général, $(\frac{1}{2} xx - \frac{1}{2} aa) v + \frac{1}{2} a^2$, ce qui se réduit, pour le quart de cercle ABG, à $\frac{1}{2} a^3$, & pour le second segment

N. XCIX. Mais souvent l'opération devient beaucoup plus courte, en concevant la figure divisée d'une autre manière ; comme il arrive dans le même secteur, si on le conçoit divisé en une infinité de petits secteurs AC, ou en de petits anneaux FK concentriques à l'arc BC. Pour le faire voir ; soit derechef $AB = a$, $AD = c$, $DC = b$, $AL = x$, $LK = y$, $AF = s$, & l'arc $BC = t$. Cela posé, on trouve sans peine que $x = cs : a$, $xx + yy = ss$, $cdt = adb$, dp , ou MK [petite portion de la figure] $= s ds dt : a$; ce qui donnera $(xx + yy) dp = s^3 ds dt : a$, dont l'intégrale, qui est [en faisant dt constante] $s^4 dt : 4a$, ou bien [en cas de $s = a$], $\frac{1}{4} a^4 dt$, marque toutes les $(xx + yy) dp$, par rapport au petit secteur AC, & l'intégrale $ts^3 ds : a$ [qui est telle, faisant s & ds constantes] marque toutes les $(xx + yy) dp$ par rapport à l'anneau FK. Et partant $\int (xx + yy) dp$ sera $= \frac{1}{4} a^3 t$ par rapport à tous les secteurs AC ; & par rapport à tous les anneaux FK, cette même intégrale sera $\frac{1}{4} s^4 t : a$ [en mettant a pour s] $= \frac{1}{4} a^3 t$; de sorte que de l'une & de l'autre manière la valeur $\int (xx + yy) dp$ du secteur entier ABC se trouve $\frac{1}{4} a^3 t$. On trouve de même $x dp = css ds dt : aa$, & $\int x dp$, par rapport au secteur AC, [qui fait c & dt constantes] $= \frac{1}{3} c s^3 dt : aa$ [en mettant a pour s] $= \frac{1}{3} a c dt = \frac{1}{3} aadb$. Et partant $\int x dp$, par rapport au grand secteur ABC, sera $\frac{1}{3} aab$. Ou bien $\int x dp$, par rapport à l'anneau FK [qui rend constantes s & ds] $= \frac{ss ds}{aa} \int c dt = \frac{ss ds}{aa} \times \int adb = bss ds : a$. Et partant $\int x dp$, par rapport à tous les anneaux, sera $\frac{1}{3} bs^3 : a$ [en mettant a pour s] $= \frac{1}{3} aab$, comme auparavant. Ainsi l'on doit conclure que $\int (xx + yy) dp : \int x dp$ doit être ici $\frac{1}{4} a^3 t : \frac{1}{3} aab = \frac{3}{4} at : b$.

III.

ment ADCG, à $(\frac{1}{3} cc - \frac{1}{3} aa) b + \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{3} b^3$, ce qui étant ôté de $\frac{1}{3} a^3$, il reste $\frac{1}{3} b^3$, pour le demi segment BDC ; auquel ajoutant $\frac{1}{3} hcc$, pour le triangle ADC, ou aura $\frac{1}{3} b^3 + \frac{1}{3} b^2 c = \frac{1}{3} aab$, pour

le secteur ABC. Divisant donc $\int (xx + \frac{1}{3} vv) v dx = \frac{1}{4} a^3 t$, par $\int x v dx = \frac{1}{3} aab$, on aura $\frac{3}{4} at : b$ pour la distance du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement,

III. Pour ce qui est maintenant du plan PAQ, [Fig. 1] qui N. XCIX. fait ses agitations *in planum*, & dont l'appliquée LM, parallèle à l'axe du mouvement HH, soit = z ; je considère que y étant ici nulle, la quantité $f(xx + yy) dp : fxdp$, se réduit à $fxx dp : fxdp$, qui marque justement la sous-centrique du coin qu'on auroit dressé sur la figure, & qu'un plan passant par HH, auroit coupé: ce qui me donne $fxx dp : fxdp = fxxz dx : fxx dx$, à cause que toutes les dp du petit parallélogramme LM sont chacune = $z dx$, & qu'elles répondent toutes à une même x . De sorte qu'il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z en x , suivant la nature de la courbe, & en prendre l'intégrale.

E X E M P L E S.

Plan proposé oscillant <i>in planum</i> .	Valeur de z .	Quantité $\frac{fxxz dx}{fxx dx}$	La même dans le cas de $x = a$.
Triangle isocèle suspendu par le sommet.	$bx : a$	$\frac{2}{3} x$	$\frac{2}{3} a$
Le même balançant autour de sa base.	$b - bx : a$	$(4ax - 3xx) : (6a - 4x)$	$\frac{1}{2} a$
Rectangle balançant autour de son côté.	b	$\frac{2}{3} x$	$\frac{2}{3} a$
Cercle.	$\sqrt{(ax - xx)}$	$\frac{(48x^2 - 8axx - 10aax - 15a^2)z + 15a^2s}{(64xx - 16ax - 24aa)z + 24aas}$	$\frac{1}{2} a$

IV. Qui aura compris l'application de ma Règle aux Solides & aux Surfaces, entendra aisément la manière de l'appliquer aux seules lignes, soit qu'elles se meuvent *in latius*, comme la courbe CAD [Fig. 2] ou qu'elles se meuvent *in planum* comme PAQ. Car

N. XCIX. Car les petites parties dp de ces sortes de grandeurs, n'étant que les simples élémens ds des courbes, il est évident que la quantité $f(xx + yy) dp : fxdp$ qui en détermine le Centre d'oscillation, se réduit à $f(xx + yy) ds : fxd ds$ dans les courbes qui balancent *in latus*, & à $fx x ds : fxd ds$ dans celles qui se meuvent *in planum*, dans lesquelles y est nulle. De sorte qu'il ne reste qu'à y substituer la valeur de ds en x & en dx , & à en chercher ensuite l'intégrale. C'est ainsi qu'on trouve pour le cercle [dont $ds = \frac{1}{2} adx : \sqrt{(ax - xx)}$] $f(xx + yy) ds : fxd ds = (\frac{1}{2} aas - \frac{1}{2} aay) : (\frac{1}{2} as - \frac{1}{2} ay)$, toujours $= a$ (^e); & $fx x ds : fxd ds = \frac{3}{4} a - xz : (2s - 2z) = [\text{en cas de } x = a] \frac{3}{4} a$. (^f).

D'où l'on voit que la circonférence d'un cercle, ou une partie quelconque de cette circonférence étant muë *in latus*, doit avoir son Centre d'oscillation distant de l'axe du mouvement de la longueur de son diamètre, & que cette circonférence entière muë *in planum*, doit avoir cette distance égale aux trois quarts de son diamètre.

En voilà, ce me semble, assez pour faire voir que ma Règle s'étend à tout ce que Mr. HUYGENS nous a laissé sur cette matière: Car ce qu'il ajoute des figures, qui balancent sur un axe pris au dehors de leur circonférence, n'a plus aucune difficulté; il ne faut qu'apporter quelque tempérament en prenant les intégrales; ce qui est facile. Et ce qu'il dit touchant les plans & les solides obliques, se peut de même déduire sans peine de ce que j'ai déjà dit.

$$\begin{aligned} & (\text{e}) \text{ Ou puisque } yy = ax - xx, \quad \sqrt{(ax - xx)} = \frac{3}{8} aas - \frac{3}{8} aaz \\ & \text{on a } xx + yy = ax, \text{ \& } f(xx + yy) ds = \frac{1}{4} aax. \text{ Et } fxd ds = f(\frac{1}{2} ax dx : \\ & = f ax ds = a f x ds. \text{ Donc } \frac{f(xx + yy) ds}{f x ds} \quad \sqrt{(ax - xx)} = \frac{1}{2} as - \frac{1}{2} az. \text{ Donc} \\ & = \frac{a f x ds}{f x ds} = a. \quad fxx ds : fxd ds = (\frac{3}{8} aas - \frac{3}{8} aaz - \frac{1}{4} aax) : \\ & \quad (\frac{1}{2} as - \frac{1}{2} az) = \frac{3}{4} a - xz : (2s - 2a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{f}) \text{ Car } fxx ds = [\text{puisque } ds \\ & = \frac{1}{2} adx : \sqrt{(ax - xx)}] f(\frac{1}{2} ax dx : \end{aligned}$$

Or quand $x = a$, alors $z [\sqrt{(ax - xx)}] = 0$. Donc dans ce cas $fxx ds : fxd ds$ se réduit à $\frac{3}{4} a$.



N°. C.

DEMONSTRATION

*du Principe de Mr. HUYGENS
touchant le Centre de Balancement ,
Et de l'identité de ce Centre avec celui de per-
cussion.*

Par Mr. BERNOULLI, Profess. à Bâle,

Lettre du 3 Avril 1704.

A Près la démonstration de la doctrine du Centre de Balancement, que je donnai l'année passée à l'Académie, par un principe incontestable, tiré de la nature du Levier ; il me sera présentement facile, en retournant sur mes pas, de démontrer la vérité du Principe de Mr. HUYGENS, qui peut être, sans cette démonstration, seroit plus sujet à être contesté ; sçavoir, que le Centre commun de gravité des parties d'un Pendule, qui descendent conjointement, & remontent ensuite séparément, chacune avec sa vitesse acquise, doit remonter précisément à la même hauteur dont il est descendu.

Pour cet effet, soit la Figure 1, repetée de mon Mémoire du 13 Mars de l'année passée, présenté à l'Académie le 25 Avril de la même année : soit, dis-je, encore A l'axe horizontal du balancement ; A XM un plan vertical droit à l'axe ;

Jas. Bernoulli Opera.

E e e e e

A M

No. C. *AM* le diamètre de la figure qui balance , auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée *CLD* à angle donné *ALD* ; en sorte que *CL* soit égale à *LD*, & dont *C*, *D*, soient deux petites parcelles de la figure , qui décrivent dans leur balancement les arcs *CT*, *DS* ; soit aussi *AM* la longueur du Pendule simple qui fait ses vibrations dans le même tems que la figure. Soient de plus les verticales *MX*, *CY*, *LH*, *DL*, lesquelles rencontrent l'horizontale *AX* en *X*, *G*, *H*, *I* ; & sur lesquelles, prolongées de haut en bas , soient prises des parties infiniment petites & égales *MN*, *CO*, *DP*, qui expriment chacune ce que la pesanteur ajoute d'impulsion, à chaque moment , à chacun des poids *M*, *C*, *D*. Ensuite après avoir mené les droites *NK*, *OT*, *PV*, perpendiculaires aux arcs *MK*, *CT*, *DV* ; soient *CB*, *LF* perpendiculaires sur *LH*, *DI*, & le reste comme on le voit dans la Figure.

Quant aux noms , soient encore , comme dans le Mémoire du 25 Avril 1703 * , $MN = CO = DP = a$, sinus total ; le sinus de l'angle $LAE = g$, $AC = l$, $AD = m$, $AM = t$, $AL = x$, $LC = LD = y$, $C = D = dp$. D'où l'on a trouvé dans ce Mémoire , $LE = gx : a$, $ll [AC^2] = xx + yy + 2gxy : a$, $mm [AD^2] = xx + yy - 2gxy : a$, & enfin $t = f(x x + y y) dp : f x dp$. Outre ces noms , soient aussi $NK = c$, & le sinus de l'angle $LCB = e$.

Cela fait , supposons que le diamètre de la figure qui balance , ainsi que le Pendule simple isochrone , soit descendu de *AX* en *AM*, & que les poids *M*, *C*, *D*, &c. s'étant ensuite détachés d'ensemble , remontent séparément chacun avec sa vitesse acquise. Il est clair que le poids *M* du Pendule simple doit remonter à la même hauteur *MX*, d'où il est descendu ; mais que les poids *C* & *D* remonteront à des hauteurs différentes , comme *CY*, *DZ*, lesquelles se trouveront de la manière que voici.

MN

* Ci-dessus N°. XCVIII. pag. 935.

MN [a]: NK [c] = AL [x]: LH [$\frac{cx}{a}$] = AM [t]: MX [$\frac{ct}{a}$] No. C.

AM² [tt]: AC² [ll] = MX [$\frac{ct}{a}$]: CY [$\frac{c ll}{at}$]

AM² [tt]: AD² [mm] = MX [$\frac{ct}{a}$]: DZ [$\frac{c mm}{at}$]

Sin. tot. [a]: Sin. ang. LCB [c] = LC ou LD [y]: LB ou DF [$\frac{cy}{a}$]

Ce qui donne $\left\{ \begin{array}{l} CG = LH - LB = (cx - cy): a \\ DI = LH + DF = (cx + cy): a \\ GY = CY - CG = cll: at - (cx - cy): a \\ IZ = DI - DZ = (cx + cy): a - cmm: at \end{array} \right.$

Donc le produit du petit poids C ou T par GY sera = $c l l d p : at - (c x d p - e y d p) : a$, & celui du petit poids D ou Z par IZ = $(c x d p + e y d p) : a - c m m d p : a t$. Et par conséquent la somme de tous les produits de T par GY [moment de tous les poids

T par rapport à la ligne AX] = $\int \frac{c l l d p}{a t} - \int \frac{c x d p}{a} + \int \frac{e y d p}{a} =$

$\frac{c}{a t} \int l l d p - \frac{c}{a} \int x d p + \frac{e}{a} \int y d p$. Et la somme de tous les produits

de Z par IZ [moment de tous les poids Z par rapport à la même ligne AX] = $\int \frac{c x d p}{a} + \int \frac{e y d p}{a} - \int \frac{c m m d p}{a t} = \frac{c}{a} \int x d p + \frac{e}{a} \int y d p$

$- \frac{c}{a t} \int m m d p$.

Or ces deux sommes sont égales entr'elles; ce qui se prouve par mon Mémoire du 25 Avril de l'année passée*, en ce que j'y démontrai $t = \int (x x + y y) d p : \int x d p$. Car si l'on multiplie

les deux parties de cette équation par $\frac{2c}{a t} \int x d p$, l'on aura $\frac{2c}{a} \int x d p$

Eeeee 2 = 2c

* N°. XCVIII, pag. 936.

No. C.
$$= \frac{2^e}{a^2} f(xx + yy) dp$$
 [à cause de $ll + mm = 2xx + 2yy$]
$$= \frac{e}{a^2} f(ll + mm) dp = \frac{e}{a^2} fll dp + \frac{e}{a^2} fmm dp$$
; & en ôtant de part & d'autre $\frac{e}{a} fxdp - \frac{e}{a} fyd p + \frac{e}{a^2} fmm dp$, on trouvera $\frac{e}{a} fxdp + \frac{e}{a} fyd p - \frac{e}{a^2} fmm dp = \frac{e}{a^2} fll dp - \frac{e}{a} fxdp + \frac{e}{a} fyd p$; c'est-à-dire que le moment de tous les Z est égal au moment de tous les Y par raport à la ligne AX. Donc le centre commun de gravité de tous ces poids se trouve dans la même ligne AX. Et par conséquent il est remonté aussi haut qu'il étoit descendu. *Ce qu'il falloit premièrement démontrer.*

La même chose se peut encore prouver d'une autre manière plus succincte, en faisant voir que la somme des produits de Y par GY, [en comprenant aussi sous Y les Z de l'autre côté,] est égale à zero; ce qui est facile. On n'a qu'à substituer simplement $xx + yy$ au lieu de ll , & effacer entièrement $\frac{e}{a} fyd p$; parce que toutes les $yd p$ positives d'une part, sont détruites par autant de $yd p$ de l'autre: de cette manière l'on aura $\frac{e}{a^2} f(xx + yy) dp - \frac{e}{a} fxdp$ pour la somme de ces produits, c'est-à-dire, [en mettant $f(xx + yy) dp : fxdp$ au lieu de t] $\frac{e}{a} fxdp - \frac{e}{a} fxdp = 0$. Car de là il suit encore, que le Centre commun de gravité de toutes les parties du Pendule se trouve dans la ligne AX (*).

(*) Puisque $fY \times GY - fZ \times IZ = 0$, le Centre de gravité des corps Y & Z, ceux-là supérieurs, ceux-ci inférieurs à la droite horizontale AX, leur Centre, dis-je, de gravité se trouve sur cette droite AX, a-

près que les poids sont remontés. Or c'est de cette même ligne horizontale qu'il est supposé descendu. Donc il remonte à la même hauteur dont il est descendu.

Identité

Identité des Centres d'oscillation & de percussion.

No. C.

Pour démontrer l'identité des Centres d'oscillation & de percussion ; soient conçus trois verges AC , AD , AT , inflexibles, sans pesanteur , & liées ensemble en un angle invariable CAD , dans la seconde Figure ; que les deux premières de ces verges soient chargées à leurs extrémités de poids égaux C , D ; & que la troisième passe par L Centre commun de gravité de ces poids. Il s'agit de trouver le Centre de percussion M , qui doit être tel, qu'ayant mù l'angle CAD autour du point A , les chocs , ou les *momens* de percussion , à l'égard du point M , comme de l'apui, soient égaux de part & d'autre. Pour cela soient menées CT , DS , perpendiculaires à AC , AD ; & MR , MS . perpendiculaires à CT , DS . Les droites CT , DS , seront les lignes de direction des poids, lorsque dans leur mouvement circulaire ils arriveront en C & en D : ainsi le produit du poids C par la vitesse AC & par la distance MR, & celui du poids D par la vitesse AD & par la distance MS , marqueront les chocs de ces poids , ou leurs *momens* de percussion , par raport à l'apui M . Ayant donc marqué les quantités homologues à celles du Mémoire du 25 Avril de l'année passée , par les mêmes lettres , répétées au commencement de cet Ecrit-ci * , nous trouverons ce qui suit.

$$AC : LC = \text{Sin. ang. ALC} : \text{Sin. ang. LAC}$$

$$l : y = \sqrt{(aa - gg)} : \sqrt{((aay) - ggy)} : ll$$

Et AD : LD = Sin. ang. ALD : Sin. ang. LAD

$$m : y = \sqrt{(aa - gg)} : \sqrt{((aay) - ggy)} : mm$$

Donc Sin. ang. ATC = $\sqrt{(aa - \frac{aay - ggy}{ll})} = \sqrt{(aall - aay + ggy)} : l$

Et Sin. ang. AVD = $\sqrt{(aa - \frac{aay - ggy}{mm})} = \sqrt{(aamm - aay + ggy)} : m$

Eccccc 3 c'est.

* Pag. 948.

No. C. c'est-à-dire, en mettant au lieu de ll & mm leurs valeurs

$$\text{Sin. ang. ATC} = \sqrt{(aaxx + 2agxy + ggyy)} : l = (ax + gy) : l$$

$$\& \text{Sin. ang. AVD} = \sqrt{(aaxx - 2agxy + ggyy)} : m = (ax - gy) : m$$

Après cela on trouve

$$\text{Sin. ang. ATC} : \text{Sin. tot.} = AC : AT$$

$$\frac{ax + gy}{l} : a = l : \frac{all}{ax + gy}$$

$$\text{Sin. ang. AVD} : \text{Sin. tot.} = AD : AV$$

$$\frac{ax - gy}{m} : a = m : \frac{amm}{ax - gy}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} TM = AT - AM = all : (ax + gy) - t \\ MV = AM - AV = t - amm : (ax - gy) \end{cases}$$

$$\text{De plus, Sin. tot.} : \text{Sin. ang. ATC} = TM : MR$$

$$a : \frac{ax + gy}{l} = \frac{all}{ax + gy} - t : \frac{all - axt - gyt}{al}$$

$$\text{Sin. tot.} : \text{Sin. ang. MVS ou AVD} = MV : MS$$

$$a : \frac{ax - gy}{m} = t - \frac{amm}{ax - gy} : \frac{axt - gyt - amm}{am}$$

$$\text{Donc } C \times AC \times MR = dp \times l \times (all - axt - gyt) : al$$

$$= (all - axt - gyt) dp : a \text{ [en mettant pour } ll \text{ la valeur]}$$

$$= (aax + ayy + 2gxy - axt - gyt) dp : a ;$$

$$\text{Et } D \times AD \times MS = dp \times m \times (axt - gyt - amm) : am$$

$$= (axt - gyt - amm) dp : a \text{ [en mettant pour } mm \text{ la valeur]}$$

$$= (axt - gyt - aax - ayy + 2gxy) dp : a.$$

Donc aussi puisque la somme de tous les produits $C \times AC \times MR$ doit être égale à la somme de tous les produits $D \times AD \times MS$; l'on aura

$$fxxdp + fyydp + \frac{2}{a}fgxydp - tfxdp - \frac{t}{a}fgydp$$

$$= tfxdp$$

N^o 99

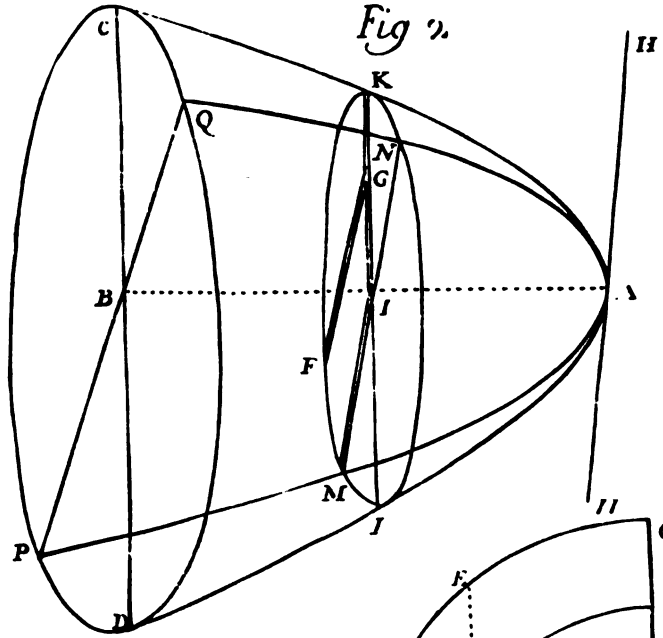
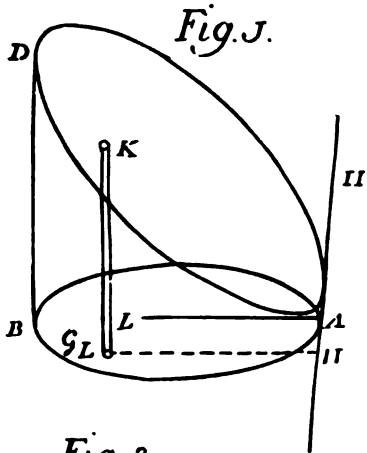


Fig. 3.

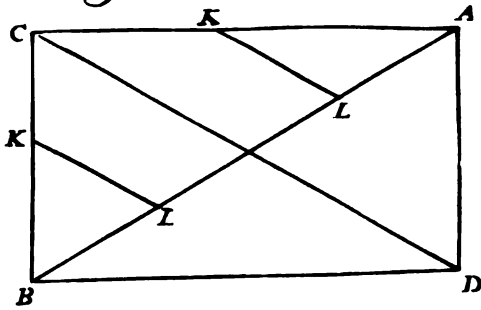


Fig. 4.

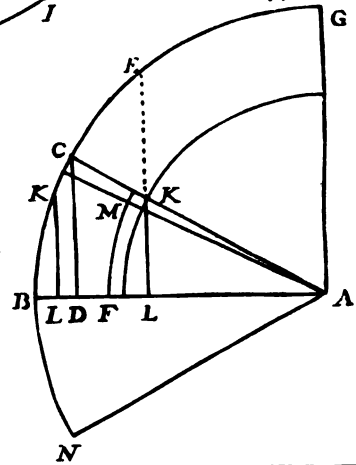
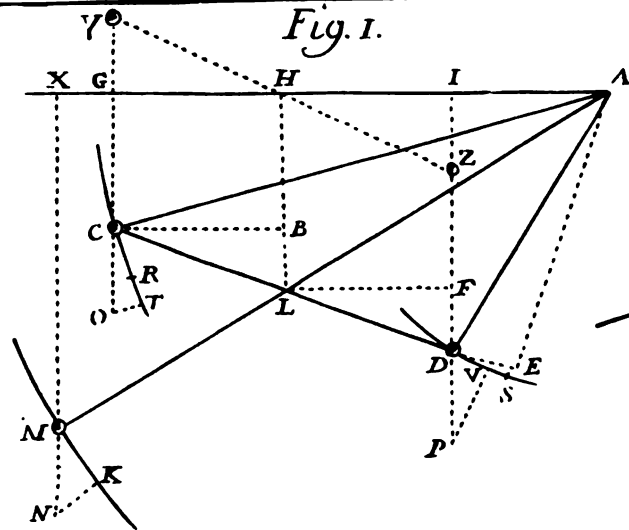
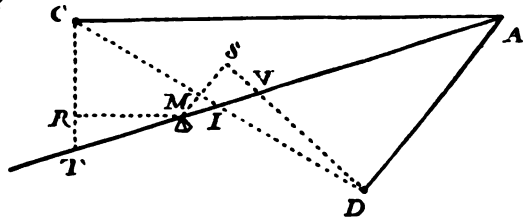


Fig. 1.



N^o 100.

Fig 2.





$= t f x d p - \frac{t}{a} f g y d p - f x x d p - f y y d p + \frac{2}{a} f g x y d p$; ce qui nous No. C.

fournit $t = (f x x d p + f y y d p) : f x d p = f(x x + y y) d p : f x d p$.
 On trouvera encore la même chose, en ne considérant qu'une seule des deux sommes précédentes, en effaçant tous les termes où y n'a qu'une dimension, & en égalant le reste à zéro : on trouvera, dis-je, encore de cette manière $t = f(x x + y y) d p : f x d p$, qui est la même quantité que nous avons trouvé pour le Centre d'oscillation, dans le Mémoire du 25 Avril de l'année passée. Donc le Centre d'oscillation & de percussion ne sont toujours qu'un seul & même point. *Ce qui est la seconde chose qu'il falloit ici démontrer.*



N^o. C I.
P O S I T I O N U M
D E
S E R I E B U S I N F I N I T I S ,
E A R U M Q U E U S U

In quadraturis Spatorum & reſtificationibus
Curvarum,

P A R S Q U I N T A ,

Quam

Sub Præſidio

V I R I C L A R I S S I M I
J A C O B I B E R N O U L L I , Math. Prof.

Utr. Soc. Reg. Scient. Gall. & Brandeb. Sodalis,

Patruſ ſus honoratiſſimi ,

defendit

N I C O L A U S B E R N O U L L I , N I C . F I L . B a ſ i l . M a g . C a n d .

Ad diem 8 Aprilis M. DCC. IV.

Edita primum
B A S I L E Æ .

1704.



P O S I T I O N U M
D E
S E R I E B U S I N F I N I T I S
Pars Quinta.

No. CI:



UM non omnes quantitates surda, nedum transcendentibus, differentialibus admixta, precedentibus modis in rationales transformari, inque Series converti possint, ad alia subinde nobis artificia recurrendum est ad obtinendum propositum: inter qua, ob universalitatem suam, eminent Interpolationes Wallisiana, vel Exaltatio binomii ad potestatem indefinitam, vel Assumptio Seriei fictæ instar quæsitæ, aut consimilia subsidia alia, quorum, pro re nata, nunc unum, nunc plura in usum verti queunt. Nos pauca eorum specimina, post generalia nonnulla, in uno alterove exemplo subjungemus.

Ffffff 2

PR

PROPOSITIO LIII.

Quantitatem quamcunque surdam, vel irrationalem, in Seriem infinitam rationalium convertere, per interpolationes Wallisianas.

Reducatur quantitas rationalis, cujus potestas fracta, sive radix, aut latus quæritur, ad fractionem hujus formæ $l : (m - n)$ [ponendo $m > n$]. Hujus fractionis potestates integræ, prima, secunda, tertia, &c. convertantur ope divisionis continuæ in totidem Series, per XXXVI usque ad XL Propp. * hoc pacto:

Exp.	Potest.
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 \text{ \&c.}$
1	$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{l^n}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \text{ \&c.}$
2	$\frac{ll}{(m-n)^2} = \frac{ll}{mm} + \frac{2lln}{m^3} + \frac{3lln^2}{m^4} + \frac{4lln^3}{m^5} + \frac{5lln^4}{m^6} \text{ \&c.}$
3	$\frac{l^3}{(m-n)^3} = \frac{l^3}{m^3} + \frac{3l^3n}{m^4} + \frac{6l^3n^2}{m^5} + \frac{10l^3n^3}{m^6} + \frac{15l^3n^4}{m^7} \text{ \&c.}$
4	$\frac{l^4}{(m-n)^4} = \frac{l^4}{m^4} + \frac{4l^4n}{m^5} + \frac{10l^4n^2}{m^6} + \frac{20l^4n^3}{m^7} + \frac{35l^4n^4}{m^8} \text{ \&c.}$

In his Seriebus observabis, coefficientes primorum terminorum constituere unitates, coefficientes secundorum numeros laterales, tertiorum trigonales, quattorum pyramidales, & sic porro; terminos vero puros ordine oriri ex ductu fractionis $l : m$ [ad potestatem elevatæ similem ei ad quam elevanda fractio $l : (m - n)$] in $1, n : m, nn : mm, n^3 : m^3$ &c. Hinc ad inveniendas potestates intermedias, sive radices [ccu media quædam geometrica, quorum exponentes sunt arithmetice medii inter exponentes integrorum] numeri terminorum figurati tantum sunt interpolandi, juxta

* No. LXXIV, pag. 749. & seq.

No. CI.

rici habebis $1 + \frac{1}{2} + \frac{1.2}{2.4} + \frac{1.2.4}{2.4.6} + \frac{1.2.4.6}{2.4.6.8} \&c. = [\text{perimentibus se mutuo dictis numeris}] 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \&c. = \infty$, per Cor. 2, XVI †; unde fortius altera $1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \&c.$ ob numeratores majores, infinita erit. Cæterum postremus terminus cujusque Seriei nunc nullus est, nunc infinitus; prout exponens potestatis p , vel prima Seriei fractio, unitate minor est, majorve. Sic ultimus terminus primæ Seriei $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \&c.$ nullus est; nam si quantus esset, etiam hic foret quantus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \&c.$, utpote cujus singuli factores singulis factoribus præcedentis termini ordine sumtis sunt majores; quare & utriusque productum quantum foret, nempe $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \&c.$ in $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \&c. = [\text{permittis alternatim utriusque factoribus}] \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \frac{\infty-1}{\infty} = [\text{ob numeratores omnes primum sequentes, \& denominatores ultimum præcedentes se mutuo perimentes}] \frac{1}{\infty} = 0$; quod absurdum. Ultimus contra terminus tertiæ Seriei $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \&c.$ infinitus est; nam si finitus esset, etiam hic foret finitus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \&c.$ utpote cujus singuli factores singulis illius sunt minores; quocirca & utriusque productum finitum foret; nempe $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \&c.$ in $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \&c. = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \dots \frac{\infty}{\infty-1} = [\text{destruentibus se mutuo numeratoribus qui ultimum præcedunt, \& denominatoribus qui primum sequuntur}] \frac{\infty}{2} = \infty$; quod pariter absurdum.

LIV.

Idem præstare per exaltationem binomii ad potestatem indefinitam.

Quantitas rationalis, cujus potestas per Seriem desideratur, sit expref-

† N°. XXXV. pag. 394.

expressa per binomium $1+n$ [ponendo $1 > n$]. Hujus binomii N^o. CI. potestas indefinita p , ut jam passim inter Geometras notum, per

$$\text{Seriem exprimitur } 1 + \frac{p}{1} n + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2} n n + \frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 + \frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} n^4 + \&c. \text{ ubi perspicuum est, quod quotiescunque}$$

exponens potestatis p est numerus integer & positivus, Series necessario aliquando abrumpetur; quandoquidem in continuatione ulteriori coefficientium $p \cdot p - 1 \cdot p - 2$. &c. necessario tandem devenietur ad $p - p = 0$; quod proin illum terminum & ab illo deinceps omnes evanescere facit. Sed quoties p numerus fractus est, aut negativus, coefficientes nunquam in nihilum abibunt; ac ideo Series in infinitum excurret: qua ratione habetur ex. gr. $\sqrt{(1+n)}$ [ubi p valet $\frac{1}{2}$] $= 1 + \frac{1}{2} n - \frac{1}{2 \cdot 4} n n + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} n^4 + \&c.$ & $\sqrt[3]{(1+n)}$ [ubi p valet $\frac{1}{3}$] $= 1 + \frac{1}{3} n - \frac{2}{3 \cdot 6} n n + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} n^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} n^4 + \&c.$ & $1 : \sqrt{(1+n)}$ [ubi p notat $-\frac{1}{2}$] $= 1 - \frac{1}{2} n + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} n n - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} n^4 - \&c.$ & pariter in cæteris:

Nota, quod exaltatio binomii ad potestatem indefinitam, & interpolationis negotium reapse in idem recidunt, unoque & eodem nituntur fundamento; quod consistit in proprietate quadam numerorum figuratorum supra jam prælibata Propos. XIX †; sed cujus demonstrationem, ne hic nimii simus, in aliam occasionem reservamus.

L V.

Duarum quantitatum indeterminatarum relationem unius ad alteram per Seriem exprimere, ope assumpta Series ficta instar quasita.

Ponatur

† N^o. LIV. pag. 521, Vide ibi Notam (b).

No. CI. Ponatur alterutra indeterminatarum x & y , quarum relatio ad se invicem quæritur, puta y , æquari Seriei $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. aut $a + bxx + cx^3 + ex^6$, &c. aut $a + bx^4 + cx^8 + ex^{12}$, &c. aut simili, prout opus videbitur (*); atque tum, in quantitate vel æquatione proposita, loco y substituatur hæc Series, nec non loco dy & ddy , &c. Seriei differentiale aut differentio-differentiale, &c. quo factò, ex comparatione homologorum terminorum determinari poterunt assumpti coefficientes a , b , c , &c. Sequuntur Exempla.

LVI.

Invenire relationem coordinatarum Curvæ Elasticæ per Seriem.

Flectatur Elater in curvaturam AQR [Fig. 1] a potentia applicata in A , & trahente juxta directionem AZ ; sitque AB , vel $RZ = a$, AE vel $PQ = x$, AP vel $EQ = y$, & $AQ = z$; ostensum est in *Act. Lips.* 1694, p. 272, & 1695, p. 538, † naturam hujus curvæ exprimi æquatione $dy = xdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, e qua qui methodo DIOPHANTI, qua in præcedenti parte usi fuimus, irrationalitatem tollere vellet, ætatem consumeret; cum deprehensum sit a Geometris, summam vel differentiam duorum biquadratorum, qualis est $a^4 - x^4$, nunquam posse constituere quadratum. Quare nobis confugiendum est vel ad Interpolationes, vel ad indefinitam Potentiam binomii, hoc pacto:

Primus

(*) Id nimis vagum est. Nam pro diversa relatione quantitatum x & y , forma Seriei assumendæ varianda est, tum quoad terminum primum, qui non semper erit quantitas constans a , tum quoad progressionem exponentium indeterminatæ x . Hanc formam invenire docuit NEWTONUS ope parallelogrammi cujusdam, quam methodum secutus est TAYLORUS, perfecerunt Cl. STIR-

LING & s'GRAVESANDE, ita tamen ut pauca quædam in melius mutari adhuc possint. Sed non satis generalem esse methodum parallelogrammi ostendit Cl. Nic. BERNOULLI, ille ipse qui Positiones istas defendit, aliamque longe universaliorrem substituit. At eam hic exponere non vacat.

† N°. LVIII, pag. 592, & N°. LXVI, pag. 641.

Primus Modus. Interpretemur x^+ tam per l , quam per n , & a^+ per m ; erit $x^+ : (a^+ - x^+) = l : (m - n)$; unde, per LIII, habetur $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$, id est, $\sqrt{\frac{x^+}{a^+ - x^+}}$ aut $\frac{xx}{\sqrt{(a^+ - x^+)}} = \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6}$ + $\frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}}$ + $\frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}}$ + &c. & [facta multiplicatione per dx] $\frac{xxdx}{\sqrt{(a^+ - x^+)}}$ seu $dy = \frac{xxdx}{aa} + \frac{1x^6dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}dx}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}dx}{2.4.6a^{14}}$ &c. & denique summando, AP seu $y = \frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}}$ + $\frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}}$ + &c.

Secundus Modus. Explicemus nunc a per 1 , & $-x^+$ per n ; erit $a^+ - x^+ = 1 + n$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^+ - x^+)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+n)}}$; unde, per LIV, fit $\frac{1}{\sqrt{(1+n)}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{(a^+ - x^+)}} = 1 + \frac{1}{2}x^+ + \frac{1.3}{2.4}x^+^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^+^3 + \dots$ & [multiplicand. per $xxdx$] $\frac{xxdx}{\sqrt{(a^+ - x^+)}} = xxdx + \frac{1}{2}x^6dx + \frac{1.3}{2.4}x^{10}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{14}dx + \dots$ & integrando, $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2.7}x^7 + \frac{1.3}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}x^{15} + \dots$ seu denique supplendo unitatem, $\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} + \dots$ ut antea.

COROLL. Sumta $x = a = 1$, fit tota $AZ = \frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} + \dots$ Conf. *Act. Lips.* 1694, pag. 274 & 369*.

Fac. Bernoulli Opera.

Gggggg

LVII.

† N^o. LVIII. pag. 596, & N^o. LXIV. pag. 632.

Rectificare eandem curvam per Seriem.

Quia æquatio curvæ, ut dictum, est $dy = xdx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$, fiet quadrando $dy^2 = x^2 dx^2 : (a^2 - x^2)$ & $dz^2 = dy^2 + dx^2 = x^2 dx^2 : (a^2 - x^2) + dx^2 = a^2 dx^2 : (a^2 - x^2)$, adeoque $dz = a dx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Exponamus a^2 nunc per l , nunc per m , &

x^2 per n , erit $\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}$ seu $\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{l}{m - n}}$; unde,

per LIII, fit $\sqrt{\frac{l}{m - n}}$ sive $\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{a^4} +$

$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{a^6} + \&c.$ & [multiplic. per dx] $\frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ seu $dz =$

$dx + \frac{1}{2} \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4 dx}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6 dx}{a^6} + \&c.$ tandemque summan-

do, z sive $AQ = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} \frac{x^5}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} \frac{x^7}{a^6} + \&c.$

Idem etiam, per LIV, simili modo ostendetur.

COROLL. Facta $x = a = 1$, habetur tota $AQR = 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \&c.$ Vid. *Act. Lips.* 1694, p. 274. †

LVIII.

Definire limites precedentium serierum.

Quoniam Series his methodis repertæ nimis lente convergunt, non abs re erit, si modum ostendam quo, levi labore, summis earum, quantum ad usum sufficit, approximare & limites constituere possimus. In exemplum propositæ sint proximæ duæ Series, quibus exprimitur applicata Elasticæ BR vel AZ , & longitudo ipsius curvæ AR ; nempe

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 15} + \&c.$

&c,

† N^o. LVIII. pag. 596.

& $1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \&c.$ Sumo quantitatem; cujus No. Cl. integrale haberi possit, datis $xxdx: \sqrt{(a^+ - x^+)}$ & $aadx: \sqrt{(a^+ - x^+)}$, e quibus Series propositæ fluxerunt, affinem, puta $x^+dx: \sqrt{(a^+ - x^+)}$, cujus integrale est $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^+ - x^+)}$, eamque pari methodo in Seriem resolvo, & Seriei terminis summatis, pro x & a unitatem pono; quo pacto Series emerget $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.12} + \frac{1.3.5}{2.4.6.16} + \&c.$ æqualis proinde $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^+ - x^+)}$ $= \frac{1}{2}$, seu 0.5000000. Colligo jam singularum Serierum terminos aliquot ab initio in unam summam [quod expedite fit per Logarithmos] ex. gr. decem primos terminos, qui collecti efficiunt, in prima Serie, 0.5102560; in secunda Serie, 1.2207187; in tertia, 0.4119014. Illius igitur reliqui post decimum termini [ad complendum $\frac{1}{2}$ seu 0.5000000] constituent 0.0880986, qui numerus additus summæ 10 primorum terminorum in prima & secunda Serie exhibet 0.5983546 & 1.3088173, summis totarum Serierum iusto minores, ob singulos tertiæ Seriei terminos minores homologis terminis reliquarum.

Deinde, quia undecimi termini in tribus istis Seriebus sunt $\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.43}$, $\frac{1.3.5\dots 19}{2.4.6\dots 20.41}$, $\frac{1.3.5\dots 19}{2.4.6\dots 20.44}$, liquet terminum hunc in Serie tertia ad eundem in Serie prima reciprocè esse ut 43 ad 44, & ad eundem in secunda ut 41 ad 44; terminorum vero sequentium singulos in tertia Serie ad ejusdem ordinis terminos in reliquis Seriebus habere rationem majorem quam 43 ad 44, & quam 41 ad 44: unde & summa omnium sequentium decimum in tertia Serie ad summam omnium post decimum in reliquis Seriebus majorem rationem habebit. Idcirco si fiat, ut 43 ad 44, nec non ut 41 ad 44, ita summa terminorum post decimum in tertia Serie, nimirum 0.0880986, ad 0.0901474 & ad 0.0945448; erunt hi numeri majores summis terminorum decimum sequentium in prima & secunda Serie: quapropter si addantur summis 10 priorum, quæ sunt 0.5102560 & 1.2207187, erunt quoque numeri prove-

No. Cl. nientes 0.6004034 & 1.3152635 majores summis totarum Serierum.

Reperti ergo sunt limites, quibus summæ primæ & secundæ Seriei definiuntur: limites illius sunt 0.5983546 & 0.6004034; hujus 1.3088173 & 1.3152635: unde applicata *BR* vel *AZ* major est quam 0.598, & minor quam 0.601^(b); ipsa vero curva *AR* > 1.308, & < 1.316^(c), sic ut tres istæ lineæ *KZ*, *AZ* & *AQR* proxime se habeant ut 10, 6, 13. Conf. *Act. Lips.* 1694, p. 274. *

SCHOLIUM. Quoniam ex natura descensus gravium demonstratur, quod tempus descensus Penduli alicujus per quadrantem circuli ad tempus descensus perpendicularis per ejus radium eam rationem habet, quam habet curva Elastica *AR* ad ejus axem *RZ*^(d), hoc est majorem, ut ostendimus, quam 1308 ad 1000, & minorem quàm 1316 ad 1000: tempus autem descensus perpendicularis per circuli radium ad tempus per semiradium, se habet ut $\sqrt{2}$ ad 1: & tempus per semiradium ad tempus per arcum minimum [consentiente HUGENIO in *Horol. Oscillat.* pag. 155. †] ut diameter circuli ad ejus semiperipheriam, hoc est ut 226 ad 355: inferri potest ex æquo, quod tempus descensus Penduli per quadrantem integrum ad tempus descensus ejus per arcum

(b) Applicatam *BR* invenit Cel. STIRLING esse = 0.59907011736779611, quam proxime.

(c) Curvam vero Elasticam idem reperit = 1.31102877714605987.

* N^o. LVIII, pag. 596.

(d) Sit $s = f(adu: \sqrt{aa - uu})$ arcus circuli, cujus sinus = u , radius = a ; & quia celeritas gravis delapsi per altitudinem u est \sqrt{u} , erit tempus descensus per arcum ad tempus descensus per sinum ut $f(ds: \sqrt{u})$ ad $f(du: \sqrt{u})$, hoc est ut $f(adu: \sqrt{aa - uu})$ ad $f(du: \sqrt{u})$. Pone $u = xx: a$, & erunt tempora des-

ensus per arcum & per sinum, ut $f(2xdx: \sqrt{axx - x^2: a^2}) = f(2adx: \sqrt{a: \sqrt{a^2 - x^2}})$ ad $f(\frac{2xdx: a}{\sqrt{xx: a}}) = f(2dx: \sqrt{a})$, hoc est, multiplicando utrumque terminum per $\frac{1}{2} \sqrt{a}$, ut $f(aadx: \sqrt{a^2 - x^2})$ ad $f(dx) = x$, sive, per Prop. LVII, ut arcus *AQ* Elasticæ ad ejus abscissam *AE* vel *PQ*. Itaque, quando $x = a = u$, tempus descensus per quadrantem est ad tempus descensus per radium, ut curva Elastica *AR* ad ejus axem *AB* vel *RZ*.

† Part. II. Prop. XXV.

arcum minimum, se habet in ratione majore quam 3400 ad 2888, No. CI. & in minore quam 3400 ad 2869 (°); unde rationem 3400 ad 2900, sive 34 ad 29, quam præfatus Auctor ibid. pag. 9, temporibus horum delcensuum assignat, extra hos limites cadere liquet.

LIX.

Dati Logarithmi Numerum invenire per Seriem.

Intelligatur Curva Logarithmica PCQ [Fig. 1 Nⁱ. LXXIV], cujus axis AD , subtangens constans $=t$, applicata $BC=1$, Logarithmus datus $BI [B_1] = x$, ejusque Numerus $IO [10] = y$; erit, ex generali curvarum natura, $\pm dy : dx = y : t$, adeoque $y = \pm t dy : dx$. Fiat, juxta præscriptum Prop. LV, $y = 1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c. & differentiando, $dx : dy = b + 2cx + 3exx + 4fx^3$ &c. eritque $1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. [$= y = \pm t dy : dx$] $= \pm bt \pm 2ctx \pm 3etxx \pm 4ftx^3 \pm 5gtx^4$, &c. & facta comparatione homologorum terminorum elicitur, $b = \pm \frac{1}{t}$, $c [\pm - \frac{b}{2t}] = \frac{1}{1.2t^2}$, $e [\pm \frac{c}{3t}] = \pm \frac{1}{1.2.3t^3}$, $f [\pm \frac{e}{4t}] = \frac{1}{1.2.3.4t^4}$, &c. unde, valoribus istis coefficientium b, c, e , &c. substitutis, resultat $y = 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2t^2} \pm \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \pm$ &c. Conf. *Act. Lips.* 1693, p. 179. (°)

Aliter idem absque differentialium adminiculo. Concipiatur Logus $BI [B_1]$ divitus in partes quotlibet æquales BE, FF, FG , &c. [$B_1, \phi, \phi\gamma$, &c.], quarum numerus sit n , & singulæ dicantur d . sic ut nd sit $= BI [B_1] = x$. Tum applicatis curvæ rectis totidem EK, FL, GM , &c. [$\epsilon x, \phi\lambda, \gamma\mu$, &c.] jungantur extremita-

Gggggg 3

(°) Ope numeri *Stirlingiani* Not. c inveni rationem hanc esse quam proxime 1.18034059901609618 ad 1, sive 34 ad 28.800524430242685441,

salvo errore calculi.

(ⁱ) Ibi LEIBNITIUS idem, eodem fere modo, demonstrat.

No. CI. mitates C & $K[x]$ duarum BC , $EK[\epsilon x]$ per rectam $CK[Cx]$; sitque axis portio inter productam $CK[Cx]$ & applicatam BC intercepta $= t$; quo pacto, propter triangula similia, fiet $t : 1 [BC]$

$$= t \pm d : 1 \pm \frac{d}{t} = EK[\epsilon x]. \text{ Et quoniam, ob æquales } BE,$$

EF , FG , &c. [$B\epsilon$, $\epsilon\phi$, $\phi\gamma$, &c.], ipsæ BC , EK , FL , &c. [BC , ϵx , $\phi\lambda$, &c.] in continua sunt proportione, earumque prima $BC = 1$, idcirco designabit $FL[\phi\lambda]$ secundam potestatem, $GM[\gamma\mu]$ tertiam, $RN[\rho\nu]$ quartam, &c. tandemque ultima $IO[\iota\theta]$, seu γ , ipsam n potestatem applicatæ $EK[\epsilon x]$ seu $1 \pm d : t$ [pro numero videlicet particularum, in quas divisâ est $BI[B\iota]$];

$$\text{quæ quidem potestas, per LIV, reperitur} = 1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot d^2}{1 \cdot 2 \cdot t^2}$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot t^3} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot d^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot t^4} \pm \&c. \text{ Quod si}$$

jam numerus particularum n ponatur infinitus; producta $CK[Cx]$ abibit in tangentem, & ipsa t in subtangentem Logarithmicæ; atque præterea numeri $1, 2, 3$, &c. evanescent præ n , sic ut $n-1, n-2, n-3$, tantundem valeant ac n : quare tum fiet

$$\gamma = 1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{ndd}{1 \cdot 2 \cdot t^2} \pm \frac{n^3 d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot t^3} + \frac{n^4 d^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot t^4} \pm \&c. = [\text{propter}$$

$$nd = x] 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1 \cdot 2 \cdot t^2} \pm \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot t^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot t^4} \pm \&c. \text{ ut supra.}$$

Nota, quod existente $x > t$, termini quidem Seriei aliquotifque crescunt, tandem tamen decrefcere pedetentim occipiunt, ultimoque vergunt in nihilum. Nam sumtis ab initio m terminis,

$$\text{erit, ex lege progressionis, sumtorum ultimus} \frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) t^{m-1}},$$

$$\& \text{ sequens ultimum} \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m t^m}; \text{ adeoque ratio illius ad hunc,}$$

ut mt ad x : unde cum ratio t ad x determinata sit, numerus vero terminorum m usque & usque major possit accipi, ratio quo-

quoque ms ad x tandem quavis data major fiet. Existente au- No. CI. tem $x =$ vel $< t$, Series ista, & alia hujus generis, statim ab initio celerrime convergunt, eoque celerius quo minor x : unde discimus quod multo commodius & minori cum labore Logarithmorum Canon adornari possit, si, per hanc Propositionem, ex Logarithmis datis Numeri, quam si vicissim, per XLVII, ex Numeris datis Logarithmi quærantur. Quanquam & illic compendium sese nobis offerat non contemnendum; quod quia in dicta Propositione intactum præterit, breviter hic indicandum restat: Quoniam positus in Logarithmica [Fig. 1 N°. XC] $AB = a$, subtangens $AK = t$, $BI = m$, & $Bs = s$, adeoque $RE = a - m$, & $ps = a + s$, invenitur, per XLVII, AR [Log-us ps] RE] $= t \times (\frac{m}{a} + \frac{mm}{2aa} + \frac{m^3}{3a^3} + \frac{m^4}{4a^4} + \&c.)$ & Ap [Log-us ps] $= t \times (\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.)$; sequitur ex natura Logarithmicæ, has duas Series inter se æquari, si tres applicatæ AE , AB , ps , seu, $a - m$, a & $a + s$ continue proportionentur; hoc est, si statuatur $m = as : (a + s)$; sed quia, per hanc hypothesin, perpetuo fit $m < s$, & nominatim hac sumta $= a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \&c.$ illa fit $= \frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{4}a, \&c.$ multo semper celerius prior Series converget posteriore: unde plurimum laboris in practica executione Logarithmorum rescindi poterit, si loco hujus illa surrogetur; ex. gr. si [facta $s = a$] loco Series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.$ hoc est, loco $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \&c.$ substituatur $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c.$ quippe per cujus primos 18 terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius; quod ipsum etiam ad Coroll. 3, XLVII, * in subtangente Logarithmicæ definienda observabitur. Sed rei utilissimæ uberiolem explicationem angustia paginæ non permittit. (4)

SCHO-

* N°. XC. pag. 853.

dabitur Log-mus fractionis $\frac{1}{2} =$

(4) Dato, v. g. Log-mo binarii, $\text{Log. } 1 - \text{Log. } 2 = - \text{Log. } 2.$
Itaque

No. CI. SCHOLIUM. Si summa quædam pecuniæ fœnori elocata sit, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ in sortem computetur; exponatur autem ipsa fors per BC seu 1 , [Fig. I N^l. LXXIV] tempus annum per BI , seu x , divisum in punctis $E, F, G, \&c.$ in momenta innumera æqualia, atque usura annua per $\frac{x}{t}$; inventa Series $1 + \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2.tt} + \frac{x^3}{1.2.3.t^3} + \&c.$ hoc est, [explicata forte 1 per a , & usura $\frac{x}{t}$ per b] $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3.aa} + \frac{b^4}{2.3.4.a^3} + \&c.$ indicabit valorem ejus, quod finito anno debetur. Cum enim, ut tempus annum BI ad primum ejus momentum BE , seu ut x ad d , ita se habeat usura annua $\frac{x}{t}$ ad partem proportionalem usuræ, erit hæc $\frac{d}{t}$, significabitque $1 + \frac{d}{t}$, seu applicata EK , sortem dicta parte proportionali usuræ auctam: unde fors aucta EK secundo momento pariet FL , & hæc pariter tertio momento pariet GM , & sic porro, propter $BC, EK, FL, GM, \&c.$ proportionales. Quare postrema applicata IO , quam Series inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapso toto anno debetur. Conf. *Act. Lips.* 1690, p. 222. *

L X.

Invenire aream spatii comprehensi a Curva genitrice Elastica, seu qua evolutione sui Elasticam describit. Fig. 1.

Describatur Elastica AQR ex evolutione curvæ MNT , & sit filium evolvens $QN [DG]$, quod productum secet axem in V ; pona-

Itaque cum in Coroll. 3, XLVII, subtangens Logarithmicæ inveniretur dividendo Log. 2, per Seriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \&c.$, quæ lente convergit, eadem inveniri poterit

dividendo eundem Log. 2 per Seriem $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} \&c.$ celerius convergentem.

* N^o. XL. pag. 429. 430.

ponaturque, ut supra, $RZ = a$, $PQ = x$, $AP = y$. Quoniam No. Cl. ex *Act. Lips.* 1694, p. 273 *, manifestum est, quod $QN = \frac{1}{2} QV$. crit & $NH = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} x$, & $NS = \frac{1}{2} FQ = \frac{1}{2} dx$; ac proinde, ob angulum rectum DQN , $DF : FQ$ seu $dy : dx = [$ ex natura Elasticæ] $xx : \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2} dx [NS] : \frac{dx \sqrt{(a^2 - x^2)}}{2xx} = 5G$ vel *HI*. Quare $HI \times NH$ seu rectang. $NI = x dx \sqrt{(a^2 - x^2)} : 4xx = (a^2 x - x^3) dx : 4xx \sqrt{(a^2 - x^2)} = a^2 x dx : 4xx \sqrt{(a^2 - x^2)} - x^3 dx : 4 \sqrt{(a^2 - x^2)} =$ elemento spatii $MNHZ$, de cujus summatione jam agitur. Posterioris membri $x^3 dx : 4 \sqrt{(a^2 - x^2)}$ integrale, pertinens ad partem curvæ RQ vel MN , est $\frac{1}{8} \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Prius autem $a^2 x dx : 4xx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ cum absolute summi non possit, sublata irrationalitate in Seriem convertetur, ut sequitur.

Ponatur $\sqrt{(a^2 - x^2)} = txx : a - at$, fiet $xx = 2a^2 t : (aa + tt)$, & differentiando $-x dx = (a^2 t t - a^2) dt : (aa + tt)^2$; nec non $txx : a - at$ seu $\sqrt{(a^2 - x^2)} = (aatt - a^2) : (aa + tt)$, & denique $-a^2 x dx : 4xx \sqrt{(a^2 - x^2)} = aadt : 8t$. Jam quia existente maxima $x = a$, ipsa quoque $t = a$, & illa decrescente crescit hæc, statuatur $t = a + s$, ut sit $aadt : 8t = aads : (8a + 8s) = \frac{1}{8} aa \times ds : (a + s) = \frac{1}{8} aa \times (\frac{ds}{a} - \frac{sds}{aa} + \frac{ssds}{a^3} - \frac{s^3 ds}{a^4} + \&c.)$

per XXXVII : unde facta summatione habetur $f(aadt : 8t) = f(a^2 x dx : 4xx \sqrt{(a^2 - x^2)})$, dissimulato nempe signo $-$, quod hic nota tantum est respectivi decrementi ipsarum x] $= \frac{1}{8} aa \times (\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.)$ demtoque $f(x^3 dx : 4 \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \frac{1}{8} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, resultat $f(a^2 x dx : 4xx \sqrt{(a^2 - x^2)} - f(x^3 dx : 4 \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \frac{1}{8} aa \times (\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.) - \frac{1}{8} \sqrt{(a^2 - x^2)} =$ spatio nempe quæsito $MNHZ$. Et quia, sumta $u =$

Jac. Bernoulli Opera.

H h h h h

$as :$

* No. LVIII, pag. 593.

No. CL. $as : (a + s)$, Series $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \&c.$ æquatur Serici $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.$ per Annot. præcedentis Propositionis, idcirco dictum spatium $MNHZ$ quoque sic exprimetur, $\frac{1}{2}aa \times (\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.) - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)}$.

Nota, si statuantur $aa = 8$, & $s = a$, adeoque t sive $a + s = 2a$, & x seu $\sqrt{(2a^3t : (aa + st))} = 2a\sqrt{\frac{1}{2}}$, & u vel $as : (a + s) = \frac{1}{2}a$: hoc est, si constructo super MZ , semisse ipsius RZ , semicirculo, inscribatur triangulum isosceles MCZ , cujus crus MC unitatem designet, atque curvæ MNT applicetur NH [$\frac{1}{2}x$] $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, prædictum spatium $MNHZ$ fiet $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \&c.$

$= \frac{1}{2}$, vel etiam $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c. - \frac{1}{2}$.

Conf. *Act. Lips.* 1694, p. 273, *.

COROLL. 1. Quoniam ex iis, quæ loco modo citato *Acto- rum* docuimus, colligi potest, quod $QV = aa : x$, & $QN = \frac{1}{2}QV = aa : 2x$, & DQ seu $dx = aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$; sequitur, triangulum QGD [$QD \times \frac{1}{2}QN$] $= a^4dx : 4x\sqrt{(a^4 - x^4)}$, & per consequens omnia triangula QCD seu spatium $RMNQ$ $= \int(a^4dx : 4x\sqrt{(a^4 - x^4)}) =$ [ut ostentum] spatium $MNHZ + \int(x^3dx : 4\sqrt{(a^4 - x^4)})$: unde cum $\int(x^3dx : 4\sqrt{(a^4 - x^4)})$ seu $\frac{1}{4}\sqrt{(a^4 - x^4)}$ exprimat quadrantem spatii Elastici $PQRZ$ [ut per se liquet], concludimus, spatium $RMNQ$ excedere arcam $MNHZ$ quarta parte ipsius $PQRZ$.

COROLL. 2. Quia differentiale $aadt : 8t$, ad quod reduxi-
mus elementum spatii $MNHZ$ vel $RMNQ$, elementum quo-
que denotat spatii hyperbolici inter asymptotas, cujus abscissa a
centro est $= t$, ipsa vero t , in assumpta hypothesi $\sqrt{(a^4 - x^4)}$
 $= txx$:

* No. LVIII, pag. 594

$\equiv txx: a - aa$, propter x decrefcentem ad nihilum, excrefcet No. CI. in infinitum; & fpatium hyperbolicum in infinitum protenfum fit infinitum; idcirco & fpatium totum interminatum genitricis Elafticæ *MNTXZ*, feu *NTXH*, infinitum erit. Vid. *Act. Lipf.* loc. cit.

E P I M E T P A.

I.

Logarithmus Sinus vel Tangentis arcus absolute nullius non est 0, ut vulgo habent Canones, fed ∞ : accurate enim loquendo, 0 est Logarithmus Sinus vel Tangentis arcus $0^{\circ}.0'.0''.0'''.0''''.$ $4'.27''.$ &c. & Logarithmi arcuum minorum funt negativi (^e).

II.

In Sciothericis planis hora quidem Italica & Babylonica recte, fed Judaica male per lineas rectas exhibentur (^e).

III.

*Regula, quam in Notis noftris Tumultuariis in Geometriam CARTESII * pro inveniendâ elevatione mortarii ad efficiendum jactum globi longiffimum in plano inclinato attulimus, brevius ita contrahetur: Angulus quæfitæ elevationis mortarii est aggregatum ex femiffe recti & femiffe anguli inclinationis Plani* (^e).

H h h h h h 2. IV.

(^e) Nam, ex constructione Canonis Logarithmici, 0 est Logarithmus unitatis. Quare 0 est Logarithmus illius sinus qui est $\equiv 1$, pofito radio $\equiv 1000000000$, hoc est, quia in tam parvis arcubus, arcus, sinus & tangens æquales cenfentur, illius arcus qui est radii pars 10000000000° , feu peripheriæ pars 62831853071° , qui continet igitur minuta quinta 4, fexta 27 &c.

(^f) Confule Scriptores Gnomonicos. Nèque enim id fat paucis verbis demonftrare poffum.

* N^o. LXVII, pag. 684.

(^g) Ibi demonftratum est angulum elevationis mortarii eum effe cuius tangens æquatur aggregato tangentis & fecantis inclinationis dati plani ad horizontem: hoc est, fi AB [Fig. A] fit horizon, AC planum datum,

No. CI.

IV.

Imago in Speculis convexis & concavis non conspicitur in concursu catheti incidentia & continuata reflexionis, ut ex ALHAZENO & VITELLIONE docent HEINLINUS, pag. 805, & DECHALES in Mundo Mathem. Tom. III. pag. 599: nec etiam, ut vult STEVINUS, in concursu linea reflexionis cum catheto incidentia ducta ad planum tangens speculum in puncto reflexionis (h).

V.

Quantitates infinite parva haud recte finitis, seu ordinariis, incomparabiliter minores vel incomparabiles dicuntur, cum his saepe comparentur: ut cum radius osculi, elementum curva & subtensa anguli contactus vocantur continue proportionales.

VI.

In casu Maxima vel Minima y, ejus differentiale dy non semper est = 0, vel = ∞, ut vulgo existimant: potest enim habere ad dx rationem quamcunque. Nec tamen hoc obstat, quominus per solutionem dy = 0, solutio semper obtineri possit: cum verus & adaequatus conceptus Maximi Minimeve requirat, ut posita y constante differentietur aequatio (i).

VII.

datum, cujus inclinationis tangens sit BC, secans AC; sumto nimirum AB pro sinu toto; & capiatur, in BC producta, CD æqualis CA, fore BAD angulum quæsitum elevationis mortarii. Itaque isosceles erit triangulum ACD; & æquales erunt anguli CAD, CDA, cui æqualis alternus DAE. Sunt igitur anguli BAC, BAD, BAE in progr. arithm. Medius igitur BAD est æqualis aggregato ex semisse extremorum, scil. recti BAE, & anguli BAC inclinationis plani.

(h) Vide BARROWII *Lectiones Opticas*, Sect. VI, VII, VIII, IX

& X.

(i) Etenim, ibi y Maxima est vel Minima, ubi vel crescere desinit nec dum incepit decrescere, vel decrescere cessat nec dum crescere cepit; hoc est ubi stat & quasi constans est. Ceterum in hoc Corollario Auctor digitum intendere videtur ad puncta Curvarum duplicia sive nodos, qui quanquam dy ad dx rationem habere possit finitam, nihilominus inveniuntur ponendo dy vel dx = 0. Sed de his vide quæ commentati sunt in *Actis Acad. Scient. Paris.* Viri Cl. GUISSNE a^o. 1706, & SAURIN, a^o. 1716, 1723, & 1725.

VII.

No. CL.

*Pro differentiali ipsius xx , quod proprie est $2xdx + dx^2$, omnes semper sine delectu scribunt $2xdx$, omisso dx^2 ; sed perperam: dantur enim casus ubi omisso $2xdx$ ponendum dx^2 ; & rursus alii, ubi ponendum utrumque. De observationis pretio cognoscet, qui sciverit illam nos manu duxisse ad singulare illud inventum de radiis osculi expedite determinandis in curvis quibusvis algebraicis, in Actis Lipsi. 1700 *, publicatum, quod sine hac observatione fortassis aeternum latiturum fuisset.*

VIII.

Dum. Cl. PAPINUS, in Tractatu suo de Ossibus emolliendis, modum nostrum ponderandi aeris sub aqua in recipiente † superfluitatis damnat, illique Boyleanos suosve aequiparat, non videtur comprehendisse quid discriminis inter ambos intersit. Melius id agnovit Societas Regia Anglicana, qua nostri experimentum, ipso fatente PAPINO, cum successu instituit.

IX.

Idem etiam inique conqueritur de injuria BOYLEO per assertionem meam illata, qua dixi, † ponderationem aeris in vesica Philosopho huic non improbari. Fatemur quod hunc ponderandi modum agnovit esse minus perfectum [quis enim hoc non videret?] At quod eundem sophisticum prorsus atque fallacem esse ipse, vel quisquam alius, ante nos fuerit suspicatus, pernegamus. Perpendat, si placet, verba qua habet in suo Proloquio ad D. BROWNER, immediate ante Paradoxum primum hydrostaticum: Etenim non poterat hic objici, uti fit contra ponderationem aeris in vesica [quibus tamen objectionibus facile mihi esset respondere, si nunc conveniret] ac rem &c. & judicet, num ita scripsisset, si tale quid ominatus fuisset.

* No. XCIV, pag. 888 & seq.
Vide Num. CIII, Art. XXII,
XXIII, XXIV.

† No. XI. pag. 199.
‡ No. XIII. pag. 204.

F I N I S.

H h h h h 3

No. CII.



N^o. CII.

VERITABLE HYPOTHESE
DE LA RESISTANCE
DES SOLIDES,

*Avec la Démonstration de la Courbure des Corps
qui font ressort :*

Par Mr. BERNOULLI, Profess. à Bâle.

Lettre du 12 Mars 1705.

*Histoire de
l'Acad. des
Sciences de
Paris 1705.
pag. 176,
Ed. de Pa-
ris, & pag.
250, Edit.
de Holl.*

Pour faire mieux entendre ce que je dirai en son temps du Centre de Tension *, suivant la promesse que j'en ai faite dans mon Mémoire du 13 Mars 1703 †, je crois devoir expliquer auparavant une hypothèse qui me paroît le véritable Principe de la Résistance des Solides, & en tirer la démonstration de la courbure que prennent les ressorts pliés, à laquelle on a donné le nom d'Elastique.

GALILÉ'E (*) est le premier qui ait examiné cette Résistance des corps, & qui ait cherché, combien il falloit plus de force

* Voyez N^o. CIII, Art. XXVI. *chanique & le Mouvement*, Dial. I. & II.

† N^o. XCVIII, pag. 932.

(*) Dans les *Discours sur la Mé-*

ce pour rompre un corps solide, en le tirant directement suivant sa longueur, que pour le rompre transversalement. Pour cet effet, il considéra une poutre, une planche, ou une perche prismatique ABCD [Fig. 1] fichée horizontalement dans un mur AB, avec un poids P suspendu à son extrémité ; & s'imaginant un levier mobile sur son appui A, il a trouvé par son raisonnement, que la force qui arracherait cette poutre du mur, suivant la direction horizontale AD ou BC, doit être au poids P capable de la rompre transversalement suivant la direction CD, comme la longueur AD à la moitié de la hauteur AB (^b).

Mrs. LEIBNITZ (^c) & MARIOTTE (^d) poussèrent ensuite cette spéculation ; & retenant la même hypothèse du levier, ils conclurent de plus dans tous les corps solides une infinité de fibres, lesquelles, avant que ces corps plient & rompent transversalement, doivent être tendues plus ou moins, suivant qu'elles sont plus ou moins éloignées de l'appui du levier, & doivent par conséquent résister autant qu'elles sont tendues. C'est ce qui leur a fait trouver que la force nécessaire pour arracher une poutre directement, est à celle qu'il faut employer pour la rompre transversalement, en raison de AD au tiers de la hauteur AB (^e).
Ce

(^b) GALILÉE a supposé les corps inflexibles & incapables d'extension, en sorte que toutes les fibres BF, HK, NM, résistent également & se rompent en même tems. Dans cette hypothèse, il est clair qu'on doit concevoir chaque point du bras AB du levier coudé ABD, comme tiré par des puissances égales ; lesquelles on peut supposer toutes réunies & concentrées dans leur centre de gravité, qui sera au milieu de la droite AB. Ainsi la résistance de la section AB est au poids P, comme AD à $\frac{1}{2}$ AB, par la nature du Levier.

(^c) Dans un Mémoire intitulé, *Demonstrationes novae de Resistencia Solidorum*, inséré dans les *Actes de Leipzig*, 1684, Juillet, pag. 319.

(^d) Dans le *Traité du Mouvement des eaux*, Part. V. Disc. 2.

(^e) Ils ont supposé la résistance de chaque fibre proportionnelle à son extension. D'où ils ont conclu que chaque point H du bras de levier AB doit être conçu tiré par une puissance HK proportionnelle à la distance HA du point H au point d'appui A. Ainsi toutes ces puissances seront représentées par toutes les ordonnées BF,

No. CII. Ce qui approche beaucoup plus de la vérité que ce qu'en a dit GALILÉE. Mais aucun de ces Auteurs (f) ne considérant les corps comme sujets à compression, & sur-tout leur hypothèse des tensions des fibres proportionnelles aux forces tendantes, ne s'accordant pas précisément avec la nature, c'est la raison pourquoi ils n'ont pas encore rencontré assez juste, & que leur doctrine a besoin de quelque correction. Ainsi Mr. VARIGNON a eu raison de dire dans les *Mémoires de l'Acad. de 1702*, pag. 88, que cette hypothèse, quoique très vraisemblable, pourroit n'être pas encore au gré de tout le monde. Voici [je crois] la véritable, à laquelle Mr. VARIGNON pourra appliquer sa Règle générale, comme il l'a déjà appliquée aux deux hypothèses précédentes.

Pour ce qui est de la courbure des Corps à ressort; on n'en a parlé jusqu'ici que d'une manière fort douteuse. GALILÉE y a aussi pensé; il s'est imaginé que cette courbure étoit parabolique; mais cette conjecture est très fautive. Depuis lui, je ne sais personne qui ait rien donné de meilleur. Il y a environ onze ans que j'entrepris le premier de déterminer cette courbure géométriquement: j'en donnai la construction dans les *Journaux de Leipzig*;

BF, HK, NM du triangle BAF. On peut les supposer toutes réunies à leur centre de gravité, qui est en H, prenant $AH = \frac{2}{3} AB$. Donc le moment de toutes les puissances qui tirent ce bras est $ABF \times \frac{2}{3} AB$. Et le moment du poids P étant $P \times AD$, on aura, à cause de l'égalité de ces moments, $P : ABF = \frac{2}{3} AB : AD$. Mais pour arracher directement la poutre, il faut une puissance capable d'étendre toutes les fibres de la section AB, de la longueur BF, ou de surmonter une résistance représentée par le rectangle ABFO, double du triangle ABF. Soit R cette rési-

stance. Donc $ABF = \frac{1}{2} R$; ce qui étant substitué dans la proportion ci-dessus, la change en $P : \frac{1}{2} R = \frac{2}{3} AB : AD$ ou $P : R = \frac{1}{3} AB : AD$.

(f) Mr. MARIOTTE fait mention de cette compression. Il est vrai qu'il suppose deux choses très-douteuses, & même opposées à l'expérience; 1°. qu'une moitié des fibres est comprimée, tandis que l'autre est étendue. 2°. qu'il ne faut ni plus, ni moins de forces pour comprimer une moitié des fibres, & étendre l'autre moitié, que pour étendre toutes les fibres, dans l'hypothèse de la Note précédente.

Leipsic (°); mais d'une manière encore assez imparfaite, ne con-
 No. CII.
 sidérant alors que les fibres extérieures des surfaces de la lame
 pliée, au lieu qu'il faut faire attention à toutes celles qui compo-
 sent son épaisseur. C'est pourquoi, je vai tâcher de suppléer à ce
 défaut, & de perfectionner le principe de la Résistance des Soli-
 des, & ma construction de la courbe Elastique. L'un & l'autre
 se fera en même temps en se servant des Lemmes qui suivent.

LEMME I.

*Des Fibres de même matière & de même largeur, ou épaisseur,
 tirées ou pressées par la même force, s'étendent ou se compriment
 proportionnellement à leurs longueurs.*

DEMONSTRATION.

1°. Soient deux fibres AB, AE [Fig. 2] dont la plus lon-
 gue AE soit divisée en parties AB, BC, CD, DE, égales cha-
 cune à la plus courte AB de ces deux fibres : qu'on affermissé
 la plus longue au point D, & qu'on attache à son extrémité E
 le poids P; la partie DE s'étendra autant que la plus courte fi-
 bre AB l'est par son poids P égal à l'autre; à cause de (hyp.)
 $DE = AB$. Qu'on affermissé ensuite la fibre AE en C, & qu'on
 ôte l'arrêt, ou l'attache qu'on vient de supposer en D; la partie
 CD s'étendra aussi autant que fait la plus courte fibre AB, à cau-
 se de l'action continuelle de la pesanteur du poids P. Qu'on lâ-
 che l'arrêt en C, & qu'on affermissé la fibre AE en B & enfin
 en A; on trouvera de même que chacune de ces parties BC,
 AB, s'étendra encore autant. Donc l'extension EK de toute
 la fibre AE, sera à l'extension BI de la plus courte fibre AB,
 comme AE est à AB. *Ce qu'il falloit premièrement démontrer.*

Fac. Bernoulli Opera.

Iiiiiii

2°. Soient

(*) N°. LVIII, pag. 580 & suiv. & N°. LXVI, pag. 639 & suiv.

No. CII. 2°. Soient encore deux fibres de longueur inégale AD, AB [Fig. 3], dont la plus grande AD soit encore divisée en parties AB, BC, CD, égales chacune à la moindre AB de ces fibres. Qu'on soutienne l'autre AD en B; sa partie AB se comprimera par le poids P, qu'on aura mis dessus, autant que fait la plus courte fibre AB par un poids égal; à cause de (*hyp.*) $AB = AB$. Qu'on soutienne ensuite la fibre AB en C, & puis en D, ôtant chaque fois le soutien de l'endroit où il étoit auparavant; chacune de ses parties BC, CD souffrira encore la même compression, à cause de l'action continuelle du poids P. Donc la compression AK de toute la fibre AD, est à la compression AI de la fibre AB, comme AD est à AB. *Ce qu'il falloit secondement démontrer.*

L E M M E II.

Des Fibres homogènes & de même longueur, mais de différentes largeurs ou épaisseurs, s'étendent ou se compriment également par des forces proportionnelles à leurs largeurs.

D E M O N S T R A T I O N.

Soit AF [Fig. 3 & 4.] la plus grosse de ces fibres, laquelle on imaginera divisée selon sa largeur BF en d'autres fibres, qui soient chacune de la largeur ou grosseur de la plus menue AB. Il est clair que chacune de ces fibres, résultantes de la division de la grosse AF, pour être étendue ou comprimée autant que la fibre AB, demande un poids égal au sien; & par conséquent que toutes ces fibres ensemble, c'est-à-dire, la fibre entière AF, pour arriver au même degré d'extension ou de compression AI que la moindre fibre AB, requiert un poids Q, d'autant plus grand que le poids P, que la largeur ou épaisseur de la fibre AF est plus grande que celle de la fibre AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME

L E M M E III.

Des Fibres homogènes de même longueur & largeur, mais chargées de différens poids, ne s'étendent ni ne se compriment pas proportionnellement à ces poids; mais l'extension ou la compression causée par le plus grand poids, est à l'extension ou à la compression causée par le plus petit, en moindre raison que ce poids-là n'est à celui-ci.

D E M O N S T R A T I O N.

Si les compressions étoient proportionnelles aux poids qui les causent, il s'en suivroit qu'ayant chargé la fibre AB [Fig. 3] d'un poids R qui fut au poids P en plus grande raison que la longueur de la fibre AB n'est à AI quantité de la compression faite par le poids P; la fibre AB se comprimeroit plus que de toute sa longueur: ce qui est absurde. Donc la compression d'une même fibre, ou de fibres égales en tout, causée par le plus grand poids R, doit nécessairement être à la compression faite par le plus petit P, en moindre raison que le poids R n'est au poids P.

Il en doit être de même des extensions des fibres; l'extension n'étant autre chose qu'une compression négative; comme la force tendante n'est autre chose qu'une force négativement comprimante. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

C'est aussi ce que l'expérience confirme. Car ayant pris une corde de boyaux longue de 3 piés, je l'ai chargée successivement de 2, 4, 6 & 8 livres: j'ai remarqué qu'elle s'étendoit de 9, 17, 23 & 27 lignes: au lieu qu'elle eût dû s'étendre 9, 18, 27, 36 lignes, si les extensions étoient proportionnelles aux poids.

No. CII.

C O R O L L A I R E.

Si l'on conçoit une ligne $TVN\upsilon\theta$ [Fig. 5], dont les abscisses NR , NQ marquent les forces tendantes, & $N\rho$, $N\kappa$ les forces comprimantes; les appliquées RT , QV les extensions, & $\rho\theta$, $\kappa\upsilon$ les compressions d'une fibre de longueur & grosseur données: Cette ligne $TVN\upsilon\theta$, que j'appelle *ligne de tension & de compression*, ne peut être droite, mais courbe, concave vers l'axe $R\rho$, ayant du côté de $N\theta$ une asymptote parallèle à cet axe; parceque la raison de RT à QV [$\rho\theta$ à $\kappa\upsilon$] doit être moindre que celle de NR à NQ [$N\rho$ à $N\kappa$], & que $\rho\theta$ ne sauroit jamais excéder la longueur donnée de la fibre. Au reste, il est probable que cette Courbe est différente à l'égard de différens corps, à cause de la différente structure de leurs fibres.

L E M M E I V.

La même force qui fait plier une poutre ou perche $ABCD$ [Fig. 1] de AB en GF , en étendant une partie de ses fibres de la quantité du triangle BSF , & comprimant l'autre de la quantité du triangle ASG , seroit capable d'étendre l'assemblage de toutes les fibres, sur l'appui A , de la quantité du triangle ABF ; ou bien de comprimer cet assemblage, sur l'appui B ou F , de la quantité du triangle BAG ou FAG .

D E M O N S T R A T I O N.

Concevons, pour un moment, la poutre appuyée en A pour empêcher sa compression; le poids P la fera un peu plier, comme de AB en AF . Qu'on ôte ensuite l'appui A , après que la fibre BF est tendue autant qu'elle le peut être; le point F servira d'appui, & le même poids P fera encore baisser la poutre, comme de FA en FG . Or il est clair, que si l'on eut laissé librement
aller

aller la poutre, sans l'appuyer en A, le poids P l'auroit d'abord No. CII. fait plier de AB en GF. Donc la force qui peut tout à la fois étendre une partie de ses fibres de la quantité du triangle BSF, & comprimer l'autre de la quantité du triangle ASG, est la même que celle qu'il faudroit, pour étendre l'assemblage de toutes les figures sur l'appui A de la quantité du triangle ABF, ou pour les comprimer sur l'appui F de la quantité du triangle AFG ^(h).

Cela paroît encore, en ce que la fibre en H étant tendue sur l'appui A de la longueur HK, & comprimée en même tems sur l'appui F de la longueur KI, c'est tout comme si elle étoit seulement tendue de la longueur $HI = HK - KI$, & que la fibre en N étant tendue sur l'appui A de la longueur MN, & comprimée sur F de la longueur ML, c'est tout comme si elle étoit seulement comprimée de la longueur $NL = ML - NM$. Or toutes les HI & NL font les triangles BSF & ASG, ainsi que toutes les HK font le triangle ABF, & toutes les KI le triangle AFG ⁽ⁱ⁾.

I i i i i 3

Co-

^(h) J'avouë que ce raisonnement ne me paroît point concluant, & je ne vois pas ce que l'Auteur pourroit répondre à Mrs. PARENT [*Essais & Recherches de Math. & de Phys.* Tom. III. Art. 14] & BULLFINGER [*Comm. Acad. Petrop.* Tom. IV. pag. 178], qui lui objectent qu'il est vrai, géométriquement parlant, ou quant à la simple situation, que c'est la même chose de porter AB d'abord en AF, & puis en FG, ou de le porter tout d'un coup en FG: mais qu'il ne s'ensuit nullement que la même force soit capable de produire indifféremment l'un ou l'autre de ces effets. Et il est aisé de voir que la force requise pour produire la compression ASG doit être plus grande que la

force nécessaire pour produire la compression AFG; quoique, géométriquement parlant, ASG ne soit qu'une partie de AFG. Mais il faut remarquer que les fibres qui remplissent le Triangle ASF, loin de résister à la compression, aident au contraire le poids P à comprimer les fibres du triangle ASG, parce qu'elles ont été tendues au delà de leur longueur naturelle, & qu'elles font effort pour se resserrer. Donc il faudra moins de force pour comprimer AFG que pour comprimer ASG, & à plus forte raison il en faudra moins que pour comprimer ASG, & étendre en même tems BSF.

⁽ⁱ⁾ Ce raisonnement ne conclut pas mieux que le précédent, parce qu'on

C O R O L L A I R E.

La force qui peut étendre la poutre sur l'apui A de la quantité du triangle ABF, est donc la même que celle qui peut la comprimer sur l'apui B ou F de la quantité du triangle BAG ou FAG : parceque chacune de ces forces est la même que celle qui peut l'étendre & le comprimer tout à la fois, sans apui, de la quantité des deux triangles BSF & ASG.

P R O B L E M E I.

Trouver combien il faut plus de force pour rompre une poutre directement, c'est-à-dire, en la tirant suivant sa longueur, que pour la rompre transversalement.

S O L U T I O N.

Soit la poutre ABCD [Fig. 1] que l'on regarde comme composée d'une infinité de fibres homogènes de même longueur, & chargée à son extrémité du poids P, qui la fasse plier de AB en GF, en étendant une partie de ses fibres de la quantité du triangle BSF, & comprimant l'autre de la quantité du triangle ASG;
&

qu'on n'y considère pas les points d'apui sur lesquels se font ces extensions & ces compressions. De ce que HI est égale à HK moins KI, comment suit-il que la fibre en H résistera autant à être étendue de la longueur HK sur l'apui A, & à être comprimée de la longueur KI sur l'apui F, qu'à être étendue simplement de la longueur HI sans apui. Ce Lemme reste donc sans démonstration. On peut même prouver qu'il est erroné & que cette erreur influë

sur les deux Problèmes suivans. Il seroit trop long d'y substituer des Solutions plus exactes. Cette matière demanderoit un Volume. Contentons-nous donc de renvoyer le Lecteur aux Dissertations de Mrs. PARENT & BULLFINGER citées dans la Note précédente, & à celle de Mr. MUSCHENBROEK dans son Recueil intitulé *Dissertationes physicae experimentales & geometrica*, Lugd. Bat. 1729. 4°.

& que la force de ce poids soit précisément celle qu'il faut pour No. CN. rompre la poutre. Il paroît, par le *Lemme 4*, que si l'on soustenoit la poutre d'un apui en A, le même poids P étendrait ses fibres de la quantité du triangle ABF, c'est-à-dire, sa fibre extrême de la même longueur BF, & une des moyennes de la longueur HK, qui sont les appliquées du triangle ABF. Qu'on représente ces longueurs BF & HK par les appliquées de la ligne de tension RT & QV [Fig. 5] ainsi que les forces requises pour étendre ces longueurs, par les abscisses NR & NQ. Soient nommées AB, b ; AD, c ; BF [RT], t ; HK [QV], p ; NR, m ; NQ, n . L'on aura BF [t]: HK [p] = AB [b]: AH [$bp:t$]; dont la différentielle $bdp:t$ marquera la largeur de la fibre EH. Et parceque la résistance que fait la fibre en H, est proportionnée à la force absolue NQ dont elle est tirée, à la largeur de la fibre EH par le *Lemme 2*, & à la distance de l'apui AH par la nature du levier; cette résistance sera $n \times \frac{bdp}{t} \times \frac{bp}{t} = \frac{bbnpdp}{tt}$; & par conséquent la résistance que font toutes les fibres ensemble, sera $= \frac{bb}{tt} \int npdp$, c'est-à-dire, $\frac{bb}{tt} \int mt dt$ par rapport à tout le triangle ABF. Donc cette résistance étant égale à l'action du poids P, laquelle a pour valeur [momentum] AD \times P, l'on aura $\frac{bb}{tt} \int mt dt = AD \times P = c \times P$, & par conséquent aussi $P = \frac{bb}{ctt} \int mt dt$.

Supposons maintenant qu'il faille rompre la poutre suivant la direction AD ou BC; il est clair que toutes les fibres comprises dans l'épaisseur AB [b] de la poutre, doivent être toutes également tendues, chacune de la longueur BF; & par conséquent tirées chacune de la même force NR, ou m ; ce qui donne bm pour la somme de toutes ces petites forces. D'où l'on voit que la force requise pour rompre la poutre en BF directement, c'est-à-dire, en la tirant suivant sa longueur AD ou BC, est à celle que doit avoir le poids P pour la rompre transversalement au même

No. CII. me endroit, comme bm est à $\frac{bb}{ctt} \int m t d t$, c'est-à-dire, comme la longueur $[c]$ de la poutre est à $\frac{b}{mst} \int m t d t$. Or cette quantité $\frac{b}{mst} \int m t d t$ est toujours plus petite que le tiers de la hauteur AB. Car de ce que $t:p < m:n$, par le Lemme 3, il s'enfuit que n est toujours $< mp:t$, $npdp < mppdp:t$ & $fnpdp < \frac{m}{t} \int p p d p = \frac{1}{3} m p^3:t$. Donc tout le triangle ABF donnera $\int m t d t < \frac{1}{3} m t^3:t < \frac{1}{3} m t t$. & enfin $\frac{b}{mst} \int m t d t < \frac{b}{mst} \times \frac{1}{3} m t t = \frac{1}{3} b = \frac{1}{3} AB$. Ce qui s'accorde avec les expériences de Mr. MARIOTTE, qui a toujours trouvé cette quantité moindre que le tiers, & plus grande que le quart de la hauteur AB. Voyez son *Traité du Mouvement des Eaux*, Part. 5. Disc. 2.

C O R O L L A I R E.

Si l'on conçoit la poutre comme soutenue d'un apui en F, & comprimée de la quantité du triangle AFG, & qu'on représente les racourcissens de la fibre extrême AG, & d'une de ses moyennes KI, par les appliquées de la ligne de compression [Fig. 5] $\rho\theta$, xv , ainsi que les forces comprimantes de ces fibres par les abscisses $N\rho$, Nx ; nommant AG [$\rho\theta$], τ ; KI [xv], π ; $N\rho$, μ ; Nx , ν ; on trouvera de même que la résistance que toutes les fibres font ensemble à leur compression, par rapport au triangle KFI, est $\frac{bb}{\tau\tau} \times \int \nu\pi d\pi$, & $= \frac{bb}{\tau\tau} \int \mu\tau d\tau$, par rapport au triangle AFG. Donc puisque [Lem. 4.] il faut la même force pour vaincre la résistance que les fibres font à leur compression, que pour vaincre celle qu'elles font à leur extension, l'on aura $\frac{bb}{st} \int m t d t = bb$

$$= \frac{bb}{\tau\tau} \int \mu r d\tau, \text{ \& par conséquent aussi } \tau\tau : \tau\tau = \int m t d t : \int \mu r d\tau. \text{ No. CII.}$$

D'où il paroît que les lignes de tension & de compression étant données, c'est-à-dire, m étant donnée par t , & μ par τ , le rapport qu'il y a entre t & τ [entre BF & AG, ou entre BS & AS] sera aussi donné; & qu'ainsi le point S, qui ne souffre ni extension ni compression, sera trouvé.

P R O B L E M E II.

Trouver la courbure de la Ligne Elastique, c'est-à-dire, celle des lames à ressort qui sont pliées.

S O L U T I O N.

La lame IKCN [Fig. 5] est un parallélogramme rectangle en son état naturel, affermie ou clouée à l'un de ses bouts IK, & chargée à l'autre N du poids P, qui lui fait prendre la courbure IBN ou KAC; EA est une de ses parties infiniment petite, étendue en dehors de la quantité du triangle BSF, & comprimée en dedans de la quantité du triangle ASG; EH & FG prolongées concourent au point M, centre du cercle osculateur de la courbe. Soient maintenant AD ou NX = x , ND ou AX = y , l'épaisseur de la lame IK ou AB = b , le poids P = bb , la longueur de la fibre EB ou AH = dz , la longueur de celle pour laquelle est construite la ligne de tension & de compression = f , & enfin la force qui peut étendre la fibre EB de la longueur BF soit marquée par NR = m , & celle qui peut comprimer la fibre AH de la longueur AG, par Np = μ .

Or [Lem. 4.] le poids P pourroit étendre la particule EA de la lame sur l'appui A de la quantité du triangle ABF, en vertu du levier DAB; ou bien la comprimer sur l'appui F de la quantité du triangle FAG, en vertu du levier CFG; les bras des leviers AD & FC sont ici considérés comme égaux, à cause du peu

Jac. Bernoulli Opera.

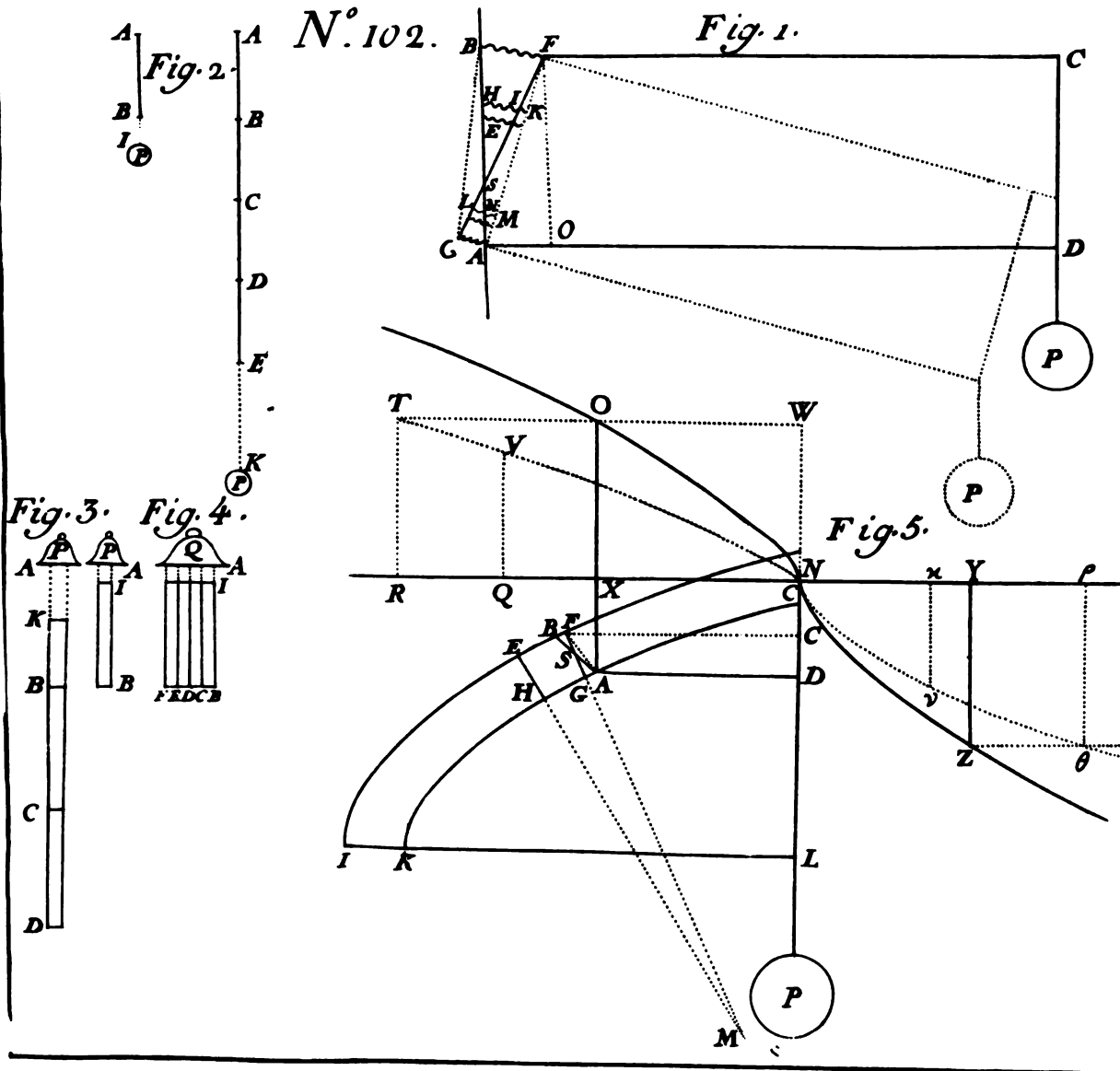
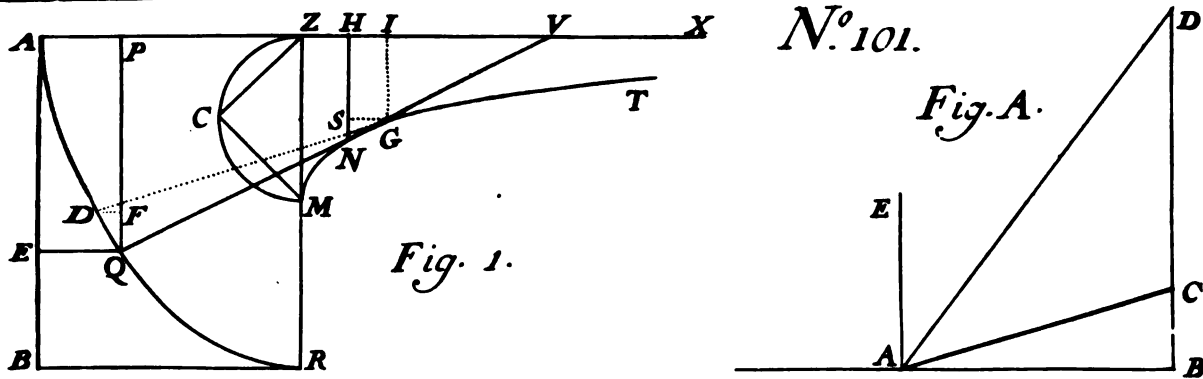
Kkkkkk

d'c.

No. CII. d'épaisseur AF de la lame. C'est ce qui nous donne $bbx [P \times AD, \text{moment du poids } P] = \frac{bb}{tt} \int m t d t$ quantité de la résistance des fibres [par le *Probl. 1.*] Ainsi en divisant par bb , l'on aura $x = \frac{1}{tt} \int m t d t$. Le *Corol. du Prob. 1.* donne aussi $\frac{1}{tt} \int m t d t = \frac{1}{\tau\tau} \int \mu\tau d\tau$. On aura de plus [*Lem. 1.*] $f : t [RT] = dz [EB] : \frac{tdz}{f} [BF]$; comme aussi $f : \tau [\rho\theta] = dz [HA] : \frac{\tau dz}{f} [AG]$. Et parceque $BF : AG = BS : AS$; donc $BF + AG [(tdz + \tau dz) : f] : BF [tdz : f] = AB [b] : BS [bt : (t + \tau)]$. Enfin à cause des triangles semblables BSF & HMG , l'on aura $BF [tdz : f] : BS [bt : (t + \tau)] = HG [qui ne diffère pas sensiblement de AH ou dz] : HM [bf : (t + \tau)]$ rayon du cercle osculateur, lequel, comme l'on fait, dans toutes les courbes s'exprime généralement par $dx dz : ddy$. Donc on aura $bf : (t + \tau) = dx dz : ddy$, ou $bf ddy = (t + \tau) dx dz$, & en prenant les sommes, $bf dy = dz f(t + \tau) dx$ & en quarrant $bbff dy^2 = dz^2 \times (f(t + \tau) dx)^2 = (dx^2 + dy^2) \times (f(t + \tau) dx)^2$, ou bien $(bbff - (f(t + \tau) dx)^2) \times dy^2 = dx^2 (f(t + \tau) dx)^2$; & en tirant la racine quarrée $dy \sqrt{(bbff - (f(t + \tau) dx)^2)} = dx f(t + \tau) dx$, ou enfin $dy = dx f(t + \tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t + \tau) dx)^2)}$, qui est la différentielle de l'ordonnée de la courbe que l'on cherche.

Nous avons donc trouvé trois équations: savoir $x = \frac{1}{tt} \int m t d t$, $\frac{1}{tt} \int m t d t = \frac{1}{\tau\tau} \int \mu\tau d\tau$, & $dy = dx f(t + \tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t + \tau) dx)^2)}$; dont la première exprime le rapport qui est entre t & x , l'autre entre t & τ , & la troisième celui d'entre x & y ; ce qui détermine entièrement les points de la courbe.

Pour la construire, on tracera premièrement la courbe ONZ, telle que faisant $OX = RT = t$, & $YZ = \rho\theta = \tau$, NX soit



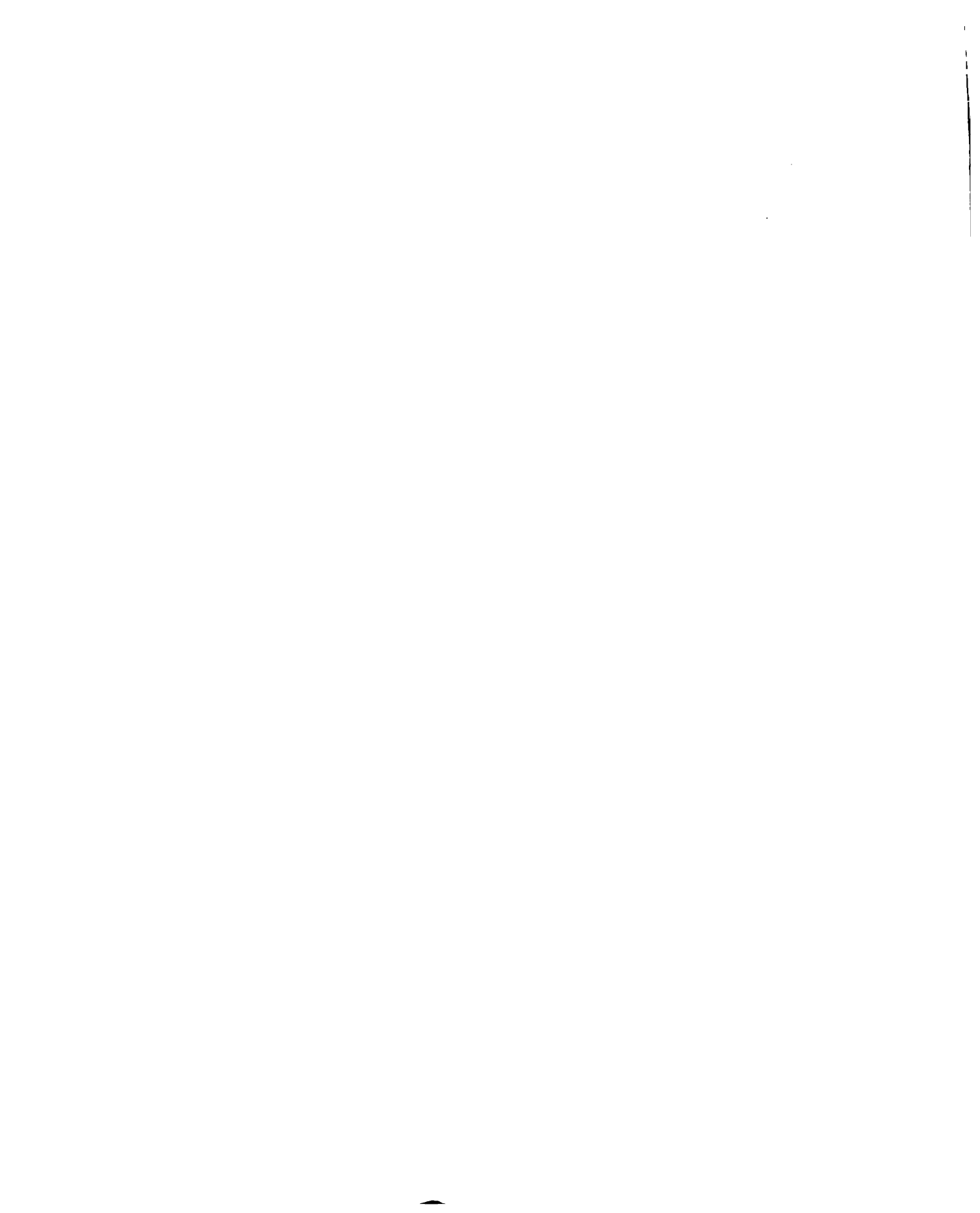
$= \frac{1}{tt} \int m t d t$, & $NY = \frac{1}{\tau\tau} \int \mu \tau d \tau$; car ayant coupé indéfiniment ^{No. CII.}

dans l'axe $NX = NY$, si l'on fait $XA = \int (dx f(t + \tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t + \tau) dx)^2)})$, le point A sera dans la courbe requise K A C.

Supposé donc, par exemple, que les lignes de tension & de compression fussent droites [quoiqu'elles ne soient jamais telles par le *Corol. du Lem. 3.*] ayant alors $NR : RT [= m : t] = a : g$ & $N\rho : \rho\theta [= \mu : \tau] = s : h$; l'équation différentielle de la courbe sera $dy = x dx : \sqrt{(4aabbff : 9(g + h)^2 - x^2)} = (g + h) x dx : \sqrt{(\frac{4}{9} aabbff - (g + h)^2 x^2)}$, & $BS : AS = g : h$.

Mais supposé que ces lignes-là fussent des paraboles, que g fût le paramètre de la première, & h celui de la seconde; alors cette équation deviendra $dy = x dx \sqrt{x} : \sqrt{(gbbff : 16(g + h + 2\sqrt{gh}) - x^3)}$, & $BS : AS = \sqrt{g} : \sqrt{h}$, &c.

Voiez N°. CIII, Art. XXVI & XXVIII.





V A R I A

No. CII

P O S T H U M A
J A C O B I B E R N O U L L I .

A R T I C U L . I .

*Attollere Infinitinomialium ad potestatem
indefinitam.*

AUDIO Cl. MOIVRÆUM docere, in *Transact. Anglicanis* 1697, modum attollendi Infinitinomialium $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$ ad potestatem indefinitam m . Sed quia Infinitinomialium hoc est particulare, nec adeo Canones Auctoris applicari possunt ad quævis alia Infinitinomialia, ex. gr. ad $ax + bx^3 + cx^6 + dx^{10} + ex^{15} \&c.$ (*); methodum

(*) Quidni possent? Pone modo $a = a, b = 0, c = b, d = 0, e = 0,$
 $f = c,$

No. CIII. dum docebo conficiendi rem generalissime, posito Infinitinomio $a + b + c + d + e + f + \&c.$ ubi per litteras a, b, c &c. non soli coefficientes, sed ipsi termini integri intelliguntur. Id vero gemino modo efficio.

MODUS PRIMUS.

Quia per combinationum Doctrinam [Vide *Stochastice* meam Part. II. cap. 8.] discimus, membra potestatis cujusvis Multinomiali alicujus aliter non exprimi, nisi per coacervationem combinationum partium radices, factarum secundum exponentem æqualem potestatis indici; coefficientem vero termini cujusvis exprimi, per numerum permutationum litterarum illum terminum constituentium (^b): idcirco si Series convergens $a + b + c + d + e$ &c. elevanda sit ad potestatem m , multiplico a^m per 1; a^{m-1} per

$f = c, g = 0, h = 0, i = 0,$
 $k = d, \&c.,$ & formula quæ exhibet $(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + ix^9 + kx^{10} + \&c.)^m$, dabit $(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.)^m$. Imo si terminus primus esset a , non ax ; nihil aliud requireretur quam ut Infinitinomiali potestas m divideretur per x^m .

(^b) Etenim multinomiali $a + b + c + d + \&c.$ quadratum habetur ducendo singulos terminos in singulos; unde nascuntur omnes biniones $aa, ab, ac, \&c. ba, bb, bc$ &c. ca, cb, cc &c. omnium litterarum. Cubus habetur ducendo quadratum in radicem, hoc est, jungendo singulas litteras cum singulis binionibus; un-

de fiunt omnes terniones a^3, aab, aac &c. $aba, abb, abc, \&c. aca, acb, ace$ &c.: nec non baa, bab, bac &c. $bbb, bbc, \&c. bca, bcb, bcc$ &c. atque $caa, cab, cac, \&c. cba, cbb, cbc$ &c. cca, ccb, ccc &c. &c. Pariter biquadratum est coacervatio omnium quaternionum, &c.

Solent autem in unum conflare termini, qui iisdem constant litteris varie tantum transpositis, quippe qui eandem quantitatem designant. Sic pro $aab + aba + baa$ scribere expedit $3aab$, & pro $abc + acb + bac + bca + cab + cba$ scribitur $6abc$, &c. Igitur coefficientis termini cujusvis est numerus permutationum litterarum ex quibus ille terminus constituitur.

No. CIII. Ita, ex. gr. terminus $a^{m-3} b^3$, [ubi p valet $m-3$, & q 3.] coefficientem habebit $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; terminus $a^{m-3} b^2 c$, [ubi $p = m-3, q = 2, r = 1$] pro suo adsumet $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \times 1 \cdot 2}$; terminus $a^{m-10} b^2 c^3 d^5$, [ubi $p = m-10, q = 2, r = 3, s = 5$] pro suo obtinebit $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot m-6 \cdot m-7 \cdot m-8 \cdot m-9}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.
 Et sic de reliquis omnibus.

M O D U S A L T E R.

Elegantior est & legem progressionis melius ob oculos ponit.

Ponatur $(a + b + c + d + e + f \&c.)^m = p + q + r + s + t + u \&c.$: unde, sumptis utrinque logarithmis, fit $m l(a + b + c + d + e + f \&c.) = l(p + q + r + s + t + u \&c.)$; differentiandoque emergit $(mda + mdb + mdc + mdd + mde + mdf \&c.) : (a + b + c + d + e + f \&c.) = (dp + dq + dr + ds + dt + du \&c.) : (p + q + r + s + t + u \&c.)$ [ubi pro nota differentialis ponitur d ad distinctionem termini d], &, multiplicando decussatim,

$$\begin{array}{l}
 mpda + mpdb + mpdc + mpdd + mpde + mpdf \&c. = adp + adq + adr + ads + ads + adu \&c. \\
 +mqda + mqdb + mqdc + mqdd + mqde \&c. \quad +bdp + bdq + bdr + bds + bds \&c. \\
 +mrda + mrdb + mrdc + mrdd \&c. \quad +cdp + cdq + cdr + cds \&c. \\
 +msda + msdb + msdc \&c. \quad +ddp + ddq + ddr \&c. \\
 +mda + mdb \&c. \quad +eda + edb \&c. \\
 +muda \&c. \quad +fda \&c. \\
 \&c. \quad \&c.
 \end{array}$$

Igitur, facta comparatione terminorum ejusdem ordinis, habetur

$$1. mpde$$

1. $mpda - adp = 0$
 2. $mqda - adq = bdp - mpdb$
 3. $mrda - adr = bdq - mqdb + cdp - mpdc$
 4. $msda - ads = bdr - mrdb + cdq - mqdc + ddp - mpdd$
 5. $mida - ads = bds - msdb + cdr - mrdc + ddq - mqdd + edp - mpde,$
- &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c.

quarum æquationum prima $mpda - adp = 0$, dat $p = a^m$ (°).
 Ad cæteras resolvendas (d), fingatur generalis æquatio $myda -$
 $ady = dz$; sitque $y = a^m h$, erit $dy = a^m dh - ma^{m-1} hda$;
 adeoque $myda - ady$ [= dz] = $ma^m hda - a^{m+1} dh -$
 $ma^m hda = -a^{m+1} dh$; indeque $dh = -dz : a^{m+1}$, & $h =$
 $\int (-dz : a^{m+1})$, & $y [a^m h] = a^m \int (-dz : a^{m+1})$; quo ca-
 none ad præcedentes æquationes applicato, [quod fit interpre-
 tando pro secunda y per q & dz per $bdp - mpdb$, pro tertia
 y per r & dz per $bdq - mqdb + cdp - mpdc$, &c.] eliciun-
 tur

LIIIIII 2

1. $p =$

(°) Æquationis $mpda - adp = 0$
 vel $adp - mpda = 0$ seu, divi-
 dendo per a^{m+1} , æquat. $(adp -$
 $mpda) : a^{m+1} = 0$, aut $(a^m dp$
 $- ma^{m-1} pda) : a^{2m} = 0$, in-
 tegrale est $p : a^m = \text{const.} = C$
 unde est $p = Ca^m$. Simplicioris
 formæ ergo, Noster posuit $C = 1$,
 & $p = a^m$.

(d) Sine assumpta æquatione,

facile resolvuntur æquationes 2, 3,
 &c. Verbi gr. $mqda - adq =$
 $bdp - mpdb$, vel $adq - mqda$
 $= mpdb - bdp$, dividendo per
 a^{m+1} , abit in $(adq - mqda) :$
 a^{m+1} , seu $(a^m dq - ma^{m-1} qda) :$
 $a^{2m} = (mpdb - bdp) : a^{m+1}$
 cujus integrale est $q : a = \int \frac{mpdb - bdp}{a^{m+1}}$
 unde fit $q = a^m \int \frac{mpdb - bdp}{a^{m+1}}$.

No. CIII.

1. $p = a^m$

2. $q = a^m \int \frac{mpdb - bdp}{a^{m+1}}$

3. $r = a^m \int \frac{mqdb - bdq + mpdc - cdp}{a^{m+1}}$

4. $s = a^m \int \frac{mrdb - bdr + mqdc - cdq + mpdd - ddp}{a^{m+1}}$

5. $t = a^m \int \frac{msdb - bds + mrdc - cdr + mqdd - ddq + mpdc - cdp}{a^{m+1}}$

&c. &c.

e quibus lex progressionis facile patescit. Liquet igitur, cum data sint a & m , dari p , adeoque & dp ; igitur cum & data sint b & db , dari quoque q & dq ; ac proinde propter data c & dc , dari quoque r & dr ; & sic porro.

NOTA. Idem valores litterarum p, q, r, s, t , &c. valent etiam pro Multinomio finito, puta Trinomio $a + b + c$, ad potestatem indefinitam m elevando: solum enim litteræ sequentes, d, e, f , &c. earumque differentialia dd, de, df , &c. nihilo sunt æquales ponendæ.

Exemplo fit Infinitinomialium $ax + 6x^3 + 7x^6 + \delta x^{10} + \epsilon x^{15} + \&c.$ ubi

$a = ax$	$da = a dx$	<table border="0"> <tr> <td colspan="2">e quibus eliciuntur</td> </tr> <tr> <td>$p = a^m x^m$</td> <td>$dp = ma^{m-1} x^{m-1} dx$</td> </tr> <tr> <td>$q = m \cdot a^{m-1} 6x^{m+2}$</td> <td>$dq = m \cdot (m+2) a^{m-1} 6x^{m+1} dx$</td> </tr> <tr> <td>$r = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} 6^2 x^{m+4} + m a^{m-1} 7x^{m+5}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$r = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} 6^2 x^{m+4} + m a^{m-1} 7x^{m+5}$</td> <td></td> </tr> </table>	e quibus eliciuntur		$p = a^m x^m$	$dp = ma^{m-1} x^{m-1} dx$	$q = m \cdot a^{m-1} 6x^{m+2}$	$dq = m \cdot (m+2) a^{m-1} 6x^{m+1} dx$	$r = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} 6^2 x^{m+4} + m a^{m-1} 7x^{m+5}$		$r = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} 6^2 x^{m+4} + m a^{m-1} 7x^{m+5}$	
e quibus eliciuntur												
$p = a^m x^m$	$dp = ma^{m-1} x^{m-1} dx$											
$q = m \cdot a^{m-1} 6x^{m+2}$	$dq = m \cdot (m+2) a^{m-1} 6x^{m+1} dx$											
$r = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} 6^2 x^{m+4} + m a^{m-1} 7x^{m+5}$												
$r = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} 6^2 x^{m+4} + m a^{m-1} 7x^{m+5}$												
$b = 6x^3$	$db = 36x^2 dx$											
$c = 7x^6$	$dc = 67x^5 dx$											
$d = \delta x^{10}$	$dd = 10\delta x^9 dx$											
$e = \epsilon x^{15}$	$de = 15\epsilon x^{14} dx$											
&c.	&c.											

ARTICUL. II.

Regulæ pro constructionibus curvarum quarundam transcendentium per rectificationes algebraicarum (²).

SIt indeterminata x , & ponantur coordinatarum quæsitæ curvæ algebraicæ una $\sqrt{(bx^m + cx^n)}$, altera $\sqrt{(bx^m - cx^n)}$; erunt, facta differentiatione, elementa coordinatarum $(bmx^{m-1} + enx^{n-1}) dx : 2\sqrt{(bx^m + cx^n)}$, & $(bmx^{m-1} - cnx^{n-1}) dx : 2\sqrt{(bx^m - cx^n)}$; indeque quadrata elementorum coordinatarum $(bbmmx^{2m-2} + 2bcmnx^{m+n-2} + ccnnx^{2n-2}) dx^2 : (4bx^m + 4cx^n)$ & $(bbmmx^{2m-2} - 2bcmnx^{m+n-2} + ccnnx^{2n-2}) dx^2 : (4bx^m - 4cx^n)$, quibus ad idem nomen reductis & additis, habetur quadratum elementi curvæ algebraicæ $(b^3mmx^{3m-2} + (bccnn - 2bccmn)x^{m+2n-2}) dx^2 : (2bbx^{2m} - 2ccx^{2n})$, & facta divisione per x^{2m} , extractaque radice, ipsum elementum $= dx\sqrt{(b^3mmx^{m-2} + (bccnn - 2bccmn)x^{2n-m-2})} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2n-2m})}$. Ut evanescat quantitas $(bccnn - 2bccmn)x^{2n-m-2}$, ponatur $n = 2m$, & erit hoc elementum $dx\sqrt{b^3mmx^{m-2}} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2m})} = bmx^{\frac{1}{2}m-1} dx\sqrt{b} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2m})} = \frac{bm}{c}x^{\frac{1}{2}m-1} dx\sqrt{\frac{1}{2}b} : \sqrt{(\frac{bb}{cc} - x^{2m})}$. Sunt autem

LIIIIII 3

coor-

(²) Methodum universalem redu-
cendi quadraturas transcendentis cu-
jusvis gradus ad longitudines curva-

rum algebraicarum dedit Vir celeb.
Job. BERNOULLI, in *Actis Erud.*
Lipsf. 1724. Aug. pag. 356.

No. CIII. coordinatæ, per hypothesin, una $\sqrt{(bx^m + cx^n)}$, altera $\sqrt{(bx^m - cx^n)}$, hoc est, propter $n = 2m$, una $\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}$, altera $\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}$; quæ si nominentur y & z , habebitur.

$$\left. \begin{array}{l} yy + zz = 2bx^m \\ yy - zz = 2cx^{2m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^m = (yy + zz) : 2b \\ x^{2m} = (yy - zz) : 2c \end{array} \text{ Ergo } \frac{yy + zz}{2b} = \sqrt{\frac{yy - zz}{2c}}$$

Est igitur $\frac{bm}{c} x^{2m-1} dx \sqrt{\frac{1}{2} b : \sqrt{\left(\frac{bb}{cc} - x^{2m}\right)}}$ elementum curvæ algebraicæ, cujus æquatio relationem coordinatarum exprimens est $(yy + zz) : 2b = \sqrt{(yy - zz) : \sqrt{2c}}$, posita $y = \sqrt{(bx^m + cx^{2m})}$ & $z = \sqrt{(bx^m - cx^{2m})}$. Hinc

R E G U L A.

Si Fractio differentialis talis sit, vel ad talem reduci possit, ut numerator fiat rationalis, denominator radix quadrata differentie quantitatis data & potestatis indeterminata x, cujus potestatis index quadruplus sit indicis ejusdem x unitate aucti in numeratore, erit ejus integrale portio curva algebraica.

E X E M P L A.

I. $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Quia hic $2m = 4 = 4 \times (0 + 1)$ & $\frac{bm}{c} \sqrt{\frac{1}{2} b} = aa$, & $bb : cc = a^4$, erit $m = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2aa}$;
 $y [\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{aaxx + x^4}{2aa}}$, $z [\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{aaxx - x^4}{2aa}}$, & tandem $yy + zz = a \sqrt{(yy - zz)}$.

II. $adx\sqrt{a} : \sqrt{(aax - x^3)}$, facta divisione per \sqrt{x} reducatur ad $\frac{adx\sqrt{a:x}}{\sqrt{(aa - xx)}}$. Quia hic $2m = 2 = 4 \times (-\frac{1}{2} + 1)$ & $\frac{bm}{c} \sqrt{\frac{1}{2} b} = a\sqrt{a}$, & $bb : cc = aa$; erit $m = 1$, $b = 2a$, $c = 2$;
 $y [\sqrt{\dots}]$

$y [\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}] = \sqrt{(2ax + 2xx)}$, $x [\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}] = \sqrt{(2ax - 2xx)}$, & tandem $yy + zx = 2a\sqrt{(yy - zx)}$. No. CIII.

III. $ad x : \sqrt{(x^4 - a^4)}$, facta divisione per axx reducatur ad $\frac{1}{xx} dx : \sqrt{(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4})}$. Quia hic $2m = -4 = 4 \times (-2 + 1)$,

& $\frac{bm}{c} \sqrt{\frac{1}{2}b} = 1$, & $bb : cc = 1 : a^4$, erit $m = -2$, $b = \frac{1}{2}a^4$,

$c = \frac{1}{2}a^6$; $y [\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{a^4 xx + a^6}{2x^4}}$; $x [\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{a^4 xx - a^6}{2x^4}}$, & tandem $yy + zx = a\sqrt{(yy - zx)}$.

Hoc modo rectificationem curvæ Elasticæ & constructionem Isochronæ paracentricæ Leibnitianæ inveni, mediante rectificatione curvæ algebraicæ Lemniscatæ. Vide *Act. Lips.* mens. Sept. 1694, pag. 356. (b)

ALIA REGULA.

Posita $m = 2$ in superiori generali elementi formula, reducitur hoc elementum ad $dx \sqrt{(4b^3 + (bccnn - 4bccn)x^{2n-4})} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2n-4})}$, & facta divisione per $\sqrt{2cc}$, ad $dx \sqrt{\frac{2b^3}{cc} + (\frac{1}{2}bnn - 2bn)x^{2n-4}} : \sqrt{(\frac{bb}{cc} - x^{2n-4})}$.

Sit igitur differentiale datum $dx \sqrt{\frac{f + gx^r}{h - x^r}}$; fient, instituta collocatione, æquationes hæ: $2n - 4 = r$, $2b^3 : cc = f$, $\frac{1}{2}bnn - 2bn = g$, & $bb : cc = h$; unde reperiuntur $n = \frac{1}{2}(r + 4)$, $c = \frac{f}{2h\sqrt{h}}$, $b = f : 2h$, ut & $b = 2g : (nn - 4n) = 8g : (rr - 16)$; adeoque $f : h = 16g : rr - 16$. Quod hanc Regulam suggerit.

REGULA.

(b) N°. LX, pag. 608. Vide Notam b, pag. 610

No. CIII.

R E G U L A.

Si fractio differentialis talis sit forma $dx \sqrt{\frac{f+gx^r}{h-x^r}}$, aut ad talem reduci possit; sitque $f:h = 16g:rr - 16$, erit ejus integrale portio curva algebraica, cujus ordinatae sunt $[\sqrt{(bx^m+cx^n)}] \sqrt{(\frac{f}{2h}xx + \frac{f}{2h\sqrt{h}}x^{\frac{1}{2}r+2})} \& [\sqrt{(bx^m-cx^n)}] \sqrt{(\frac{f}{2h}xx - \frac{f}{2h\sqrt{h}}x^{\frac{1}{2}r+2})}$.

E X E M P L U M.

$dx \sqrt{\frac{4a^6+5x^6}{a^6-x^6}}$; quia hic $f[4a^6]:b[a^6] = 16g[80]:rr - 16[20]$; idcirco integrabitur rectificatione curvæ, cujus ordinatae sunt $\sqrt{(2xx+2x^2:a^2)}$ & $\sqrt{(2xx-2x^2:a^2)}$.

T E R T I A R E G U L A.

Sit differentiale hujus formæ $dx \sqrt{(ffx^m - ggx^n)}$, cujus quadratum dispescatur in duas partes $(ffx^m - 2fgx^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} + ggx^n)dx^2$ & $(2fgx^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} - 2ggx^n)dx^2$; quarum partium radices sunt $(fx^{\frac{1}{2}m} + gx^{\frac{1}{2}n})dx$ & $dx \sqrt{(2fgx^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} - 2ggx^n)} = x^{\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}n} dx \sqrt{(2fg - 2ggx^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m})}$.

Manifestum est integralia harum radicum fore coordinatas curvæ, cujus elementum exprimitur per differentiale propositum; quæ curva proin erit algebraica, si ambæ radices absolute integrari possint. Prioris quidem $(fx^{\frac{1}{2}m} - gx^{\frac{1}{2}n})dx$ integrale semper est $\frac{f}{\frac{1}{2}m+1}x^{\frac{1}{2}m+1} - \frac{g}{\frac{1}{2}n+1}x^{\frac{1}{2}n+1}$. Posterius autem tantum integrationem admittit, quando index potestatis indeter-

mina

minatæ extra vinculum [$\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$] ab indice potestatis intra [$\frac{1}{2}n$ No. CIII. — $\frac{1}{2}m$], vel a multiplo hujus indicis [$\frac{1}{2}cn - \frac{1}{2}cm$] unitate deficit (c), hoc est, quando $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n + 1 = \frac{1}{2}cn - \frac{1}{2}cm$, seu quando $n = (2cm + m + 4) : (2c - 1)$, hoc est, [posita successive $c = 1, 2, 3, 4, \&c.$], quando $n = \frac{3m+4}{1}$, aut $\frac{5m+4}{3}$, aut $\frac{7m+4}{5}$, aut $\frac{9m+4}{7}$, &c. Unde

R E G U L A.

Si differentiale talis sit forma, aut ad talem reduci possit. $dx \sqrt{(ffx^m - ggx^n)}$, in qua n aequatur vel $\frac{3m+4}{1}$, vel $\frac{5m+4}{3}$, vel $\frac{7m+4}{5}$, vel $\frac{9m+4}{7}$, & sic porro (d): erit ejus integrale portio alicujus curvæ algebraica, ordinatam unam habentis $\frac{f}{\frac{1}{2}m+1} x^{\frac{1}{2}m+1}$ — g

(c) Nondum constat alios dari casus, quibus integrari possit quantitas $x^p dx \sqrt{(e + fx^q)}$ præter hos: quando scil. $(p+1) : q$, numerus est positivus integer; qui casus ille est quem Auctor indicat, & demonstrabitur N^o. sequenti; vel etiam quando $(p+1 + \frac{1}{2}q) : q$ numerus est integer negativus, qui casus ex præcedenti facile fluit, dividendo $\sqrt{(e + fx^q)}$ per $\sqrt{x^q}$ & multiplicando $x^p dx$ per $x^{\frac{1}{2}q}$. Ex isto autem sequitur quantitatem $x^{\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n} dx \sqrt{(2fg$

$- 2ggx^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m})$ esse integrabilem, atque ideo $dx \sqrt{(ffx^m - ggx^n)}$ ad rectificationes reduci, quoties $n = \frac{m-2}{2}$, vel $\frac{2m-2}{3}$, vel $\frac{3m-2}{4}$, vel $\frac{4m-2}{5}$, &c.

(d) In genere $n = \frac{(2c+1)m+4}{2c-1}$, vel etiam, ex Nota præced. $= \frac{cm-2}{c+1}$,posito c integro positivo.

No. CIII. $\frac{g}{\frac{1}{2}n+1} x^{\frac{1}{2}n+1}$, alteram $\int (x^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{(2fg-2ggx^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m})})$,
 qua quantitas quomodo summetur sequenti articulo docebitur.

E X E M P L A.

I. $dx \sqrt{(a^2-x^2)}$; quia hic $f=aa$, $g=1$, $m=0$ & $n=4$
 $[\frac{3m+4}{1}]$; idcirco integratur rectificatione curvæ, cujus or-
 dinatæ sunt $ax - \frac{1}{2}x^2$ & $\int (x dx \sqrt{(2aa-2xx)}) = -\frac{1}{2}(aa$
 $+xx) \sqrt{(2aa-2xx)}$.

II. $dx \sqrt{(ax-x^2)}$. Quia nunc $f=a$, $g=1$, $m=1$, &
 $n=3$ $[\frac{5m+4}{3}]$; ideo rectificatione curvæ integrabitur, cu-
 jus ordinatæ sunt $\frac{2}{3}ax \sqrt{x} - \frac{2}{3}xx \sqrt{x}$ & $\int (x dx \sqrt{(2a-2x)}) =$
 $(\frac{2}{3}xx - \frac{2}{15}ax - \frac{2}{15}aa) \sqrt{(2a-2x)}$. (°)

Q U A R T A R E G U L A.

Sit differentiale tale $(fx^m + gx^{m+n}) dx : \sqrt{(ff-ggx^{2n})}$, hoc
 est $(f+gx^n) x^m dx : \sqrt{(ff-ggx^{2n})}$; erit [divisione facta per
 \sqrt{f}

(°) EXEMP. III. $dx \sqrt{(x^2-a^2)}$:
 quia hic $f=1$, $g=a$; $m=2$,
 & $n=0$ $[\frac{2-2}{2}]$, integrabitur,
 secundum Notam c, rectificatione
 curvæ, cujus ordinatæ sunt $\frac{1}{2}xx -$
 ax , & $\int (dx \sqrt{(2ax-2aa)}) =$
 $\frac{2}{3}(x-a) \sqrt{(2ax-2aa)}$,
 quæ Parabola est biquadrato-cubi-
 ca. Est autem $\int dx \sqrt{(xx-aa)}$
 area Hyperbolæ æquilateræ, cujus
 complementum quadratur per recti-

ficationem Parabolæ vulgaris. Ita-
 que quoniam area curvæ, una cum
 ejus complemento, efficit rectangu-
 lum sub coordinatis, erit arcus Pa-
 rabolæ vulgaris, una cum arcu Pa-
 rabolæ biquadrato-cubicæ, recti-
 ficabilis: uti jam olim docuit Cel.
 Job. BERNOULLI in *Actis Lipsf.*
 1698. Octob. pag. 464. Calculum
 non addo, qui nihil habet difficul-
 tatis.

$\sqrt{(f+gx^n)}] x^m dx \sqrt{\frac{f+gx^n}{f-gx^n}}$, ejusque quadratum $\frac{f+gx^n}{f-gx^n} x^{2m} dx^2$, No. CIII.

hoc est $\frac{f-gx^n+2gx^n}{f-gx^n} x^{2m} dx^2$, quod in partes duas dispescitur

$\frac{f-gx^n}{f-gx^n} x^{2m} dx^2 = x^{2m} dx^2$ & $2gx^{2m+n} dx^2 : (f-gx^n)$, qua-

rum partium radices sunt $x^m dx$, & $x^{m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{\frac{2g}{f-gx^n}}$. Patet

igitur harum radicum integralia denotare coordinatas curvæ, cujus elementum sit differentiale propositum: ipsius autem $x^m dx$

integrale semper est $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$, alterius $x^{m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{\frac{2g}{f-gx^n}}$

integrale tantum habetur [idque per doctrinam sequentis articuli] quando index potestatis indeterminatæ extra vinculum [$m+\frac{1}{2}n$] ab indice potestatis intra [n], aut duplo, triplo, quadruplo, &c. hujus indicis unitate deficit; quod fit ubi $n = \frac{2m+2}{1}$,

aut $\frac{2m+2}{3}$, aut $\frac{2m+2}{5}$, aut $\frac{2m+2}{7}$ &c. (†). Unde

R E G U L A.

Si differentiale talem habeat formam, aut ad talem reduci possit, $(fx^m + gx^{m+n}) dx : \sqrt{(ff - ggx^{2n})}$, ubi n æquatur ipsi $2m+2$, vel ejus tertia, quinta, septima, parvi, & sic porro; erit ejus integrale portio curva algebraica ordinarum unam habentis

M m m m m m 2 tis

(†) Nam, posito c integro quovis, positivo esse debet $m + \frac{1}{2}n + 1 = en$, unde fit $n = (2m+2):(2c-1)$.

Sed $x^{m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{\frac{2g}{f-gx^n}}$ integrari

potest etiam, atque ideo $(fx^m +$

$gx^{m+n}) dx : \sqrt{(ff - ggx^{2n})}$, ad rectificationem reduci, quando $1 - m$ æquatur multiplo ipsius n , uti

patet dividendo tam $x^{m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{2g}$,

quam $\sqrt{(f-gx^n)}$ per $x^{\frac{1}{2}n}$ vel \sqrt{x} .

No. CIII. *tis* $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$, alteram $f(x^{m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{\frac{2g}{f-gx^a}})$; *qua quomodo summetur sequenti articulo docebitur.*

E X E M P L A.

I. Sit differentiale $(aa + xx) dx: \sqrt{(a^4 - x^4)}$, quo exprimitur summa elementorum curvæ Elasticæ & applicatæ ejusdem (*): Quia hic $f = aa$, $g = 1$, $2n = 4$, $n = 2$, $m + n = 2$, adeoque $m = 0$, & $n[2] = 2m + 2$; integrabitur illud ope curvæ, cujus ordinatæ sunt x & $f(x dx \sqrt{\frac{2}{aa - xx}}) = \sqrt{(2aa - 2xx)}$.

Est autem hæc curva Ellipsis, cujus axis minor est $2a$ & major $2a\sqrt{2}$. Unde patet, quomodo aggregatum Elasticæ curvæ & applicatæ ejus æquetur arcui alicujus Ellipsis: veluti docui in *Actis Lips.* m. Sept. 1694, pag. 338 (h).

II. $(aaxx + x^4) dx: \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Quia hic $f = aa$, $g = 1$, $m = 2$, $n = 2$ [$= \frac{2m+2}{3}$]; igitur integrabitur rectificatione curvæ, cujus ordinatæ sunt $\frac{1}{3}x^3$ & $f(x^3 dx \sqrt{\frac{2}{aa - xx}}) = (\frac{1}{3}xx + \frac{2}{3}aa) \sqrt{(2aa - 2xx)}$.

(*) Vide Num. LVIII, pag. 590 & seq.

(h) N°. LX, pag. 611 & 612.

ARTICUL. III.

Regulæ quædam de summatione differentialium.

I.

Summatio quantitatis $ax^n dx (fx^m + g)^{l-1}$

REGULA

Si index potestatis indeterminata extra vinculum unitate auctus aquatur indici in vinculo, aut ejusdem est multiplus; hoc est, si $n + 1 = m$, aut $=$ multiplo ipsius m ; hoc est, si $\frac{n+1-m}{m} = 0$, aut $=$ numero cuicunque integro & positivo; quantitas proposita est absolute integrabilis (*).

M m m m m m 3

Posito

(* Pone $fx^m + g = z$, & erit $x = (\frac{z-g}{f})^{1:m}$, atque $dx =$

$\frac{1}{m} (\frac{z-g}{f})^{(1-m):m} dz$, quibus

substitutis, erit $ax^n dx (fx^m + g) = \frac{a}{mf} (\frac{z-g}{f})^{(n+1-m):m} z^{l-1} dz$.

Hæc autem quantitas est manifeste integrabilis, quoties $(n+1-m):m$ est vel 0, vel integer positivus.

Nam isto in casu, elevetur $\frac{z-g}{f}$ ad potestatem $(n+1-m):m$ quæ constabit terminis numero finitis, & multiplicentur singuli termini

per $\frac{a}{mf} z^{l-1} dz$, eruntque singuli integrabiles, nisi forsan unus adsit, in quo, post multiplicationem per $\frac{a}{mf} z^{l-1} dz$, index indeterminatæ z sit $= -1$, id quod accidet quando $l = 0$, vel integer negativus. Tunc vero, terminus ille unicuique ad Logarithmos reduci poterit. Sed, quod non videtur animadvertisse Auctor noster, est etiam quantitas $ax^n dx (fx^m + g)^{l-1}$ integrabilis, quoties $(-lm-n-1):m$ est vel 0, vel positivus integer. Nam si dividatur quantitas in vinculo per z^m

E X E M P L A.

No. CIII.

I. $x' dx \sqrt{(2bb - 2xx)}$: quia hic $a = 1, f = -2, g = 2bb,$
 $l - 1 = \frac{1}{2},$ adcoque $l = \frac{3}{2}, m = 2, n = 5,$ & $\frac{n+1-m}{m} =$
 $p = 2;$ invenietur ejus integrale per hos Canones $(-\frac{1}{14} x^4 -$
 $\frac{2}{35} bbxx - \frac{1}{105} b^4) \times (2bb - 2xx) \sqrt{(2bb - 2xx)},$ hoc est, $(\frac{1}{7} x^6$
 $- \frac{1}{15} bbx^4 - \frac{1}{105} b^4 xx - \frac{1}{105} b^6) \sqrt{(2bb - 2xx)}.$

II. $x' dx: \sqrt{(2bb - 2xx)}$; quia hic rursus $a = 1, f = -2,$
 $g = 2bb, m = 2, n = 5,$ & $\frac{n+1-m}{m} = p = 2;$ at $l - 1$
 $= -\frac{1}{2},$ & $l = \frac{1}{2};$ reperitur ejus integrale per Canones $(-\frac{1}{10} x^4$
 $- \frac{2}{15} bbxx - \frac{1}{15} b^4) \sqrt{(2bb - 2xx)}.$

II.

Summatio quantitatis $(ax^n + bx^{n+m}) dx. (fx^m + g)^{l-1}.$

Ponatur ejus integrale $hx^s (fx^m + g)^l,$ quod differentiatum fa-
 cit $hsx^{s-1} dx (fx^m + g)^l + flm x^{s+n-1} dx (fx^m + g)^{l-1} =$
 $hsx^{s-1} dx (fx^m + g) (fx^m + g)^{l-1} + flm x^{s+n-1} (fx^m + g)^{l-1} =$
 $(ghsx$

$+g)^{l-1}.$ Pone $mp+m-1=n$ $dx (fx^m + g)^{l-1}$ erit $=$
 seu $p = (n+1-m): m,$ & $lqm +$
 $pqm = a,$ seu $q = a: mf(l+p),$
 $\frac{apg}{mff(l+p)(l+p-1)} x^{m(p-1)} (fx^m$
 & erit $f(lqm + pqm) x^{mp+m-1}$
 $+g)^{l-1} - f \frac{aggp(p-1)}{ff(l+p)(l+p-1)} x^{m(p-1)-1}$
 $dx (fx^m + g)^{l-1} = [f(ax^n dx (fx^m$
 $+g)^{l-1}] = \frac{a}{mf(l+p)} x^{mp} (fx^m + g)^l$
 $- f \frac{apg}{f(l+p)} x^{mp-1} dx (fx^m + g)^{l-1}$
 Et eodem ratiocinio $f \frac{apg}{f(l+p)} x^{mp-1}$
 $dx (fx^m + g)^{l-1},$ atque ita por-
 ro, donec per $p-1, p-2, p-3,$
 &c. pervenias ad $p-p=0,$ quæ
 quantitas, cum afficiat terminum in
 quo primum comparet atque sequen-
 tes omnes, ibi series terminatur.

No. CIII. $(ghsx^{s-1}dx + fhsx^{s+m-1}dx)(fx^m+g)^{l-1} + fhlmx^{s+m-1}dx(fx^m+g)^{l-1} = (ghsx^{s-1} + (fhs + fhlm)x^{s+m-1})dx(fx^m+g)^{l-1}$.
 Facta nunc comparatione inter $ghsx^{s-1}$ & ax^n , nec non inter $(fhs + fhlm)x^{s+m-1}dx$ & bx^{n+m} ; habentur $s-1 = n$, $ghs = a$, $fhs + fhlm = b$; indeque $s = n+1$, $h = [a:gs] = a:g(n+1)$, ut & $b = [b:f(s+lm)] = b:f(lm+n+1)$; unde apparet esse debere $a:g(n+1) = b:f(lm+n+1)$, hoc est $a:b = g(n+1):f(lm+n+1)$. Hinc

R E G U L A.

Si in proposita quantitate $(ax^n + bx^{n+m})dx(fx^m + g)^{l-1}$, sit $a:b = g(n+1):f(lm+n+1)$, erit illa absolute integrabilis, etiamsi neutra partium $ax^n dx(fx^m + g)^{l-1}$, nec $bx^{n+m} dx(fx^m + g)^{l-1}$, seorsim talis sit: fiet enim ejus integrale $[hx^s(fx^m + g)^l]$

$$\frac{a}{g(n+1)} x^{n+1} (fx^m + g)^l.$$

E X E M P L U M.

$(3ccx - 4x^4):\sqrt{(cc - xx)}$; quia hic $a = 3cc$, $b = -4$, $n = 2$, $m = 2$, $f = -1$, $g = cc$, $l-1 = -\frac{1}{2}$, & $l = \frac{1}{2}$; insuperque $a:b = [3cc:-4] = g(n+1):f(lm+n+1)$; erit integrale quaeritum $x^3\sqrt{(cc - xx)}$.

III.

*Summatio quantitatis $(ax^n + bx^{n+m} + cx^{n+2m})dx$
 $\times (fx^m + g)^{l-1}$*

Sit ejus integrale $hx^s + ix^{s+m})(fx^m + g)^l$, quod differentiatum, ut supra, facit $(ghsx^{s-1} + (fhs + gi(s+m) + fhlm)x^{s+m-1} + (fi(s+m) + film)x^{s+2m-1})dx(fx^m + g)^{l-1}$: ubi, facta comparatione cum terminis propositae quantitatis, emergit $s = n + 1$.

+ 1, $h = a : g(n+1)$, $i = c : f(lm+m+n+1)$, & deni- No. CIII.
 que $(lm+n+1)af : g(n+1) - b + (m+n+1)cg : f(lm$
 $+m+n+1) = 0$. Unde

R E G U L A.

Si in proposita quantitate $(ax^n + bx^{n+m} + cx^{n+2m})dx (fx^m + g)^{l-1}$ observetur quod $(lm+n+1)af : g(n+1) - b + (m+n+1)cg : f(lm+m+n-1) = 0$; quantitas proposita est absolute integrabilis, tamen nec singula, nec bina ejus partes tales sint:

est autem integrale $(\frac{a}{g(n+1)}x^{n+1} + \frac{c}{f(lm+m+n+1)}x^{n+m+1}) (fx^m + g)^l$. Nota, hoc procedere etiam cum $b = 0$.

E X E M P L A.

I. $(xx + \frac{1}{2}x^4 + 2x^6)dx : \sqrt{(1+xx)}$. Quoniam hic $a = 1$;
 $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$, $f = 1$, $g = 1$, $n = 2$, $m = 2$, $l = \frac{1}{2}$, ad-
 coque $(lm+n+1)af : g(n+1) - b + (m+n+1)cg : f(lm$
 $+m+n+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, idcirco reperitur integrale
 $(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^5) \sqrt{(1+xx)}$.

II. $(5xx - 8x^6)dx : \sqrt{(1+xx)}$. Quia hic $a = 5$,
 $b = 0$, $c = -8$, $f = 1$, $g = 1$, $n = 2$, $m = 2$, $l = \frac{1}{2}$, ideo-
 que $(lm+n+1)af : g(n+1) - b + (m+n+1)cg : f(lm+$
 $m+n+1) = \frac{5}{2} - 0 - \frac{8}{2} = 0$; ideo reperitur integrale $(\frac{5}{2}x^3$
 $-\frac{8}{2}x^5) \sqrt{(1+xx)}$.

IV.

$$\text{Summatio quantitatis } (ax^p + bx^{p+m} + cx^{p+n})dx$$

$$(fx^m + gx^n + h)^{l-1}.$$

Sit ejus integrale $ix^s (fx^m + gx^n + h)^l$, quod differentiatum,
 ut nuper, exhibet $(his x^{s-1} + (film + fis) x^{s+m-1} + (giln +$

Jac. Bernoulli Opera.

N u n n n n

g i s

No. CIII. $g i s) x^{s+n-1} dx. (fx^m + gx^n + h)^{l-1}$; ex cujus collatione cum proposita eruuntur $s = p + 1$, $i = a : b(p + 1)$, nec non $\frac{af}{b} \left(\frac{lm}{p+1} + 1 \right) = b$ & $\frac{ag}{b} \left(\frac{lm}{p+1} + 1 \right) = c$. Unde

R E G U L A.

Si, in quantitate proposita $(ax^p + bx^{p+m} + cx^{p+n}) dx (fx^m + gx^n + h)^{l-1}$, habeatur simul $\frac{af}{n} \left(\frac{lm}{p+1} + 1 \right) = b$, & simul $\frac{ag}{n} \left(\frac{lm}{p+1} + 1 \right) = c$, erit illa absolute integrabilis, ut maxime nulla partium ejus talis sit: integrale autem hoc erit $\frac{a}{h(p+1)} x^{p+1} (fx^m + gx^n + h)^l$.

E X E M P L U M.

$(3x + 6x^2 + 8xx) dx : \sqrt[3]{(x^3 + 2x + 1)}$. Quia hic $a = 3$, $b = 6$, $c = 8$, $f = 1$, $g = 2$, $h = 1$, $m = 3$, $n = 1$, $p = 1$, $l = \frac{2}{3}$, & præterea $\frac{af}{n} \left(\frac{lm}{p+1} + 1 \right) = 6 = b$, nec non $\frac{ag}{n} \left(\frac{lm}{p+1} + 1 \right) = 8 = c$: igitur integrale invenitur $\frac{2}{3} xx \sqrt[3]{(x^3 + 2x + 1)^2}$.

V.

Regula generalissima pro summanda quantitate quotlibet terminorum [integrorum & rationalium] in & extra vinculum.

Sit integrandæ quantitatis Typus, $(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + ex^{n-4} \dots + \gamma x^2 + \delta x + \alpha) dx \times (fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + ix^{m-3} + kx^{m-4} \&c.)^{l-1}$. Dico, si absolute summani possit,

SUMMATIO DIFFERENTIALIUM. 1013

possit, ejus integrale fore $(qx^p + rx^{p-1} + sx^{p-2} + tx^{p-3} + ux^{p-4} \text{ \&c.}) \times (fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + ix^{m-3} + kx^{m-4} \text{ \&c.})^l$; positus, ut sequitur,

$$\begin{aligned}
 p &= n + 1 - m \\
 q &= \frac{a}{f(p + lm)} \\
 r &= \frac{b - gq(p + l(m - 1))}{f(p - 1 + lm)} \\
 s &= \frac{c - gr(p - 1 + l(m - 1)) - bq(p + l(m - 2))}{f(p - 2 + lm)} \\
 t &= \frac{d - gs(p - 2 + l(m - 1)) - br(p - 1 + l(m - 2)) - iq(p + l(m - 3))}{f(p - 3 + lm)} \\
 u &= \frac{e - gt(p - 3 + l(m - 1)) - bs(p - 2 + l(m - 2)) - ir(p - 1 + l(m - 3)) - kq(p + l(m - 4))}{f(p - 4 + lm)} \\
 &\text{\&c.}
 \end{aligned}$$

Sin quantitas proposita absolute summabilis non sit, erit ejus integrale rursum hæc quantitas $(qx^p + rx^{p-1} + sx^{p-2} \text{ \&c.}) \times (fx^m + gx^{m-1} + \text{\&c.})^l$, sed assumpta ecum hac quantitate transcendente, $f(\varphi + \chi x + \psi xx - \dots - \xi x^{m-2}) dx \times (fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + ix^{m-3} \text{ \&c.})^{l-1}$, positus $q, r, s, \text{ \&c.}$ ut antea, & præterea

$$\begin{aligned}
 \varphi &= a - lix - kt \\
 \chi &= c - 2lhx - (1 + l)is - 2ks \\
 \psi &= \gamma - 3lgu - (1 + 2l)ht - (2 + l)is - 3kr \\
 &\text{\&c.} \quad \text{\&c.}
 \end{aligned}$$

ubi tamen observandum, quod litteræ $n, t, s, \text{ \&c.}$ $k, i, h, \text{ \&c.}$ non semper eisdem terminos denotant, quos in majori laterculo indicant: Sed quod hic n & k semper ultimos terminos, in quibus x nullius dimensionis est; t & i coefficientes penultimorum,

N n n n n 2 ubi

No. CIII. ubi x est unius; s & b antepenultimos, ubi x est duarum dimensionum; & pari ratione reliqui anteriorum terminorum coefficientes designare intelliguntur (^b).

Patet hinc, quod si omnes coefficientes quantitatis transcendentis ϕ , χ , ψ , &c. nihilo æquales reperiantur, evanescere quoque debeat ipsa quantitas transcendens; adeo ut, illo casu, proposita quantitas absolute sit summabilis. Si autem non omnes ϕ , χ , ψ , &c. evanescant, quantitas proposita quadantenus tantum integrata fuerit; sed, in illa parte quæ non integrata manet, index maximæ potestatis extra vinculum ab indice maximæ potestatis in vinculo semper binario aut amplius deficiat. Unde cum nullum, quantum sciam, detur exemplum differentialis ejusmodi, ubi index maximus extra vinculum binario aut amplius ab indice maximo intra deficiat, quod absolute summari possit, aut a quoquam unquam summatum sit, [intellige tamen, si prius omnis

(^b) Quantitatis $(ax^n + bx^{n-1} + \dots + a)$ termini sunt $n + 1$ numero: quantitas autem $(qx^p + rx^{p-1} + \dots + c)$ non habet nisi $p + 1$, hoc est, $n + 2 - m$ coefficientes. Quare si differentiale ipsius $(qx^p + rx^{p-1} + \dots + c) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)$ comparetur cum $(ax^n + bx^{n-1} + \dots + a) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)$ $^{l-1}$, habebuntur $n + 1$ æquationes ad determinandos $n + 2 - m$ coefficientes. His igitur determinatis, restarent $m - 1$ æquationes, quæ essent totidem conditiones, siue relationes coefficientium a , b , c , &c. quibus locum obtinentibus, quantitas $(ax^n + bx^{n-1} + \dots + a) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)$ $^{l-1}$ esset integrabilis. At vero, si locum non habeant hæ conditiones, quantitati

$(qx^p + rx^{p-1} + \dots + c)(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)^l$ adjicienda est quantitas transcendens $f(\phi + \chi x + \psi x^2 + \dots) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)^{l-1}$, ut introducantur novi coefficientes ϕ, χ, ψ , &c. qui esse debent $m - 1$ numero, ut satis fiat $m - 1$ æquationibus superstitibus. Quamobrem incipiendo a $\phi + \chi x + \dots + \xi x^{m-2}$ &c. pergendum est usque ad ξx^{m-2} . Denique ut determinentur coefficientes omnes, sumendum est differentiale quantitatis $(qx^p + rx^{p-1} + \dots + c) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)^l + f(\phi + \chi x + \dots + \xi x^{m-2}) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)^{l-1}$ & illud comparandum cum quantitate proposita $(ax^n + bx^{n-1} + \dots + a) dx$ $(fx^m + gx^{m-1} + \dots + g)^{l-1}$.

omnis possibilis reductio sub vinculo instituta fuerit : nam ex. gr. No. CIII. $x\sqrt{(aax^4 + x^6)}$ summari potest, ut maxime index 1 extra vinculum plus quam binario deficit ab indice 6 intra, ob rationem quod quantitas $x\sqrt{(aax^4 + x^6)}$ reducitur ad $x^3\sqrt{(aa + xx)}$ colligi potest, me hic omne præstitisse, quodcunque præstari potuit : nam aut totam quantitatem per Canones meos absolute summo, aut partem tantum ejus, relicta alia parte quam certum est summari non posse.

E X E M P L A.

I. Sit integrandum differentiale $(x^7 - 2x^6 + 3x^5 * - 2x^3 + \frac{731}{40}x^2 - \frac{317}{16}x + \frac{927}{240})dx : \sqrt{(x^4 * - 3xx + 2x + 1)}$. Notentur valores coefficientium, computatis etiam terminis qui deficiunt, non secus ac si adessent, ita

$$\begin{array}{l|l|l|l} a = 1 & \gamma = +\frac{731}{40} & f = 1 & l = \frac{1}{2} \\ b = -2 & \beta = -\frac{317}{16} & g = 0 & n = 7 \\ c = +3 & \alpha = +\frac{927}{240} & h = -3 & m = 4 \\ d = 0 & & i = 2 & \\ e = -2 & & k = 1 & \end{array}$$

Hinc $p = n + 1 - m = 4$; sic ut quæsitum integrale $(qx^p + \&c)$. $(fx^m + \&c)^l$, fiat $(qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u)\sqrt{(x^4 * - 3xx + 2x + 1)}$, ubi tantum determinandæ supersunt per Canones nostròs litteræ q, r, s, t, u ; hoc pacto.

$$\begin{aligned} q &= a : f(p + ml) = 1 : 1 \times 6 = \frac{1}{6} \\ r &= (b - gq(p + (m - 1)l)) : f(p - 1 + ml) = (-2 - 0) : 1 \times 5 = -\frac{2}{5} \\ s &= (c - gr(p - 1 + (m - 1)l) - hq(p + (m - 2)l)) : f(p - 2 + ml) = (+3 - 0 + \frac{1}{2}(4 + 1)) : 1 \times 4 = (3 + \frac{1}{2}) : 4 = \frac{11}{8} \\ t &= (d - gs(p - 2 + (m - 1)l) - hr(p - 1 + (m - 2)l) - iq(p + (m - 3)l)) : f(p - 3 + ml) = (0 - 0 - \frac{6}{5}(3 + 1) - \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{2})) : \text{Nnnnnn } \frac{1}{5} \times 3 \end{aligned}$$

No. CIII. $1 \times 3 = (-\frac{2^4}{3} - \frac{1}{3}) : 3 = -\frac{25}{18}$

$$u = (e - gt(p - 3 + (m - 1)l) - hs(p - 2 + (m - 2)l) - ir(p - 1 + (m - 3)l) - kq(p + (m - 4)l) : f(p - 4 + ml) = (-2 - 0 + \frac{2^3}{3}(2 + 1) + \frac{2}{3}(3 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(4 + 0)) : 1 \times 2 = (-2 + \frac{2^2}{3} + \frac{1^2}{3} - \frac{1}{3}) : 2 = +\frac{1501}{240}.$$

Priusquam autem constet totum differentiale integratum esse, quaerendi sunt etiam coefficientes ϕ , χ , ψ , &c. quantitatis transcendens $\int((\phi + \chi x + \psi x^2) dx : \sqrt{(x^4 * - 3xx + 2x + 1)})$ juxta breviores Canones, ubi contingit litteras u, t, s &c., k, i, h , &c. eisdem terminos denotare quos in amplioribus. Quare

$$\phi = a - lin - 1kt = +\frac{227}{240} - \frac{1501}{240} + \frac{25}{18} = 0$$

$$\chi = \beta - 2lhu - (i + l)it - 2ks = -\frac{217}{16} + \frac{1501}{80} = \frac{63}{16} - \frac{11}{4} = 0$$

$$\psi = \gamma - 3lgu - (1 + 2l)bt - (2 + l)is - 3kr = +\frac{731}{240} - 0 - \frac{63}{4} - \frac{11}{4} + \frac{6}{4} = 0$$

Unde cum singuli hi coefficientes evanescent, colligitur quantitatem propositam totam esse integratam, ejusque integrale perfectum fore $(\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{25}{18}x + \frac{1501}{240}) \sqrt{(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1)}$.

II. Esto differentiale $(x^7 - 2x^6 + 3x^5 * - 2x^4 * + 4x + 3) dx : \sqrt{(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1)}$. Quia coefficientes omnes, exceptis ultimis a, β, γ , sunt iidem qui in praecedenti Exemplo; hinc etiam per majores Canones eadem quantitates reperiuntur pro q, r, s, t, u . Sed variant ϕ, χ, ψ . Nam

$$\phi = a - lin - 1kt = +3 - \frac{1501}{240} + \frac{25}{18} = -\frac{377}{240}$$

$$\chi = \beta - 2lhu - (1 + l)it - 2ks = +4 + \frac{1501}{80} + \frac{63}{16} - \frac{11}{4} = +\frac{421}{16}$$

$$\psi = \gamma - 3lgu - (1 + 2l)bt - (2 + l)is - 3kr = 0 - 0 - \frac{63}{4} - \frac{11}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{73}{4}$$

Unde colligitur integrale quantitatis propositae esse $(\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{25}{18}x + \frac{1501}{240}) \sqrt{(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1)} + \int((- \frac{377}{240} + \frac{421}{16}x - \frac{73}{4}xx) dx : \sqrt{(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1)})$.

NOTA. Operatio, qua Prima & Quinta Regula hujus Articuli inventae sunt, ob prolixitatem non apponitur, sed uniformis est

est in omnibus. Ponitur enim integrale fictum, cujus differentiale termino tenus confertur cum differentiali proposito, ad eliciendum exinde assumptos coefficientes. No. CIII.

ARTICUL. IV.

Demonstratio Anagrammatis

Ephemerid. Paris. 11. August. 1698. (a)
inserti.

$a^{44} b^3 c^{25} d^{20} e^{65} f^3 g^4 h^2 i^{58} l^{21} m^{32} n^{32} o^{17} p^{19} q^8 r^{30} s^{39} t^{42} u^{54} x.$
cujus hic est sensus.

Ex infinitis curvis genere iisdem, illa gravi celerrimum descensum ad datum perpendicularum concedit, qua tempus totius descensus, positis celeritatibus in ratione subduplicata altitudinum, duplum; in subtriplicata, triplum; in subsequaltera sesquialterum efficit summa quorundam elementorum, qua ad respectiva tempuscula rationem habent duplicatam elementorum applicata ad clementa curva. Constat igitur, quomodo hac per intersectionem duarum transcendentium determinetur. Imo dico amplius, in specialibus quibuscumque curvis, quasitam etiam unius transcendentis & algebraica ope semper inveniri posse (b).

DEMONSTRATIO.

Sit optata curva ABD [Fig. 1], eique infinite propinqua & genere eadem AIN: ergo, ex natura *minimi*, tempora descensusum

(a) N°. LXXXVII. pag. 839.

(b) Vide N°. LXXVIII. Notam f, pag. 792.

N^o. CIII. suum per utramque præcise æquabuntur. Ductæ intelligantur Tangentes BF, IF, quæ, propter curvas genere eadem, in eodem axis puncto concurrent. Sitque constans EN = p, ND = dp: indeterminatæ AG = x, GI = γ, FG = r, FI = t, AI = s; ipsi vero IL parallela intelligatur BM; eritque EN [p]: ND [dp] = GI [γ]: IB [ydp:p], & FI [t] = √(FG² + GI²) [√(rr + yy)]; loco y sumendo y + ydp:p, & differentian- do habebitur FB — FI = $\frac{y}{t} \times \frac{ydp}{p} = yy dp: tp$; quare FI [t]: FB — FI [yydp:tp] = IL [ds]: BC — IL [yydpds:ptt]. Po- nantur IL, BC, seorsim, & super illis erigantur rectangula IQ, BP, quorum altitudines LQ, CP reciprocentur celeritatibus qui- bus describuntur particulæ, hoc est, radicibus altitudinum IG, BG; adeo ut LQ sit = 1:√y; significabunt utique rectangula hæc IQ, BP tempora quibus particulæ IL, BC describuntur: Omnia ergo rectangula IQ omnibus BP æquari debent, ut &, ablatis communibus segmentis IS, omnia residua RQ omnibus LP æquari debent. Sed pro y ponendo y + ydp:p & differentian- do 1:√y = LQ, habebitur LQ — CP, seu SQ = — dp:2p√y; quare RS × SQ = RQ = — dpds:2p√y, & (BC — IL) × CP = LP = yydpds:ptt√y; adeoque f(dpds:2p√y) = f(yydpds: ptt√y) seu f(ds:√y) = 2f(yyds:tt√y) seu, [quia t:y = ds:dy] f(ds:√y) = 2f(dy²:ds√y). Si celeritates quibus particulæ IL, BC describuntur sint ut \sqrt{y}^m , erit f(ds:√y) = mf(dy²:ds√y) (°). Quare constat propositio. (d)

E X E M-

(°) Nam si sit LQ = $1:\sqrt{y}^m$, erit ejus differentiale LQ — CP = SQ = dy:my√y; seu, scribendo ydp:p pro dy, — dp:mp√y. Igitur RS × SQ = — dpds:mp√y. Sed (BC — IL) × CP = LP = yydpds: ptt√y; quarum summæ cum æquales sint, erit f(dpds:mp√y) = f(yydpds:ptt√y) aut, dividendo per constantem dp:mp, f(ds:√y) = mf(yyds:tt√y), vel denique, scri- bendo

E X E M P L U M.

No. CIII.

Si curvæ AIN, ABD sint Ellipses, sitque natura vel æquatio unius ex infinitis super eodem axe transverso descriptis, $abx - bxx = ayy$, reperitur $\int dy \sqrt{((4ayy - 4byy + abb) : (abby - 4by^3))} = 2 \int dy \sqrt{((abb - 4byy) : (4ay^3 - 4by^3 + abby))} (^{\circ})$.

Aliter in speciali quavis Curva per unam tantum transcendentem.

Sint AIN, ABD Ellipses, quarum semi-axis transversus AE = a, EN = p, EH = x, HL = y, & ducantur LT, IO parallelæ axi AE; erit natura Ellipsis $ayy = app - ppxx$, quæ si differentietur, posita x constante, habebitur pro dy [LC] = ydp : p; & si differentietur, posita y constante, habebitur pro dx [LT] = ayydp : p²x; & si differentietur, posita p constante, habebimus pro dx [GH] = -aaydy : pp²x; adeoque IL = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(a^2yy + p^2xx) : opx} = dy \sqrt{(aayy + p^2 - ppyy) : \sqrt{(p^2 - ppyy)}}$, & differentiando, posita y & dy constante, IL - OT = $a^2y^2 \cdot (2pp - yy) \cdot dy dp : p^2x^2 \sqrt{(a^2yy + p^2xx)}$, nec

bendo $dy^2 : ds^2$ pro $yy : tt$, $f(ds : \sqrt{y}) = mf(dy^2 : ds \sqrt{y})$.

(*) Nam $f(ds : \sqrt{y})$ tempus defensus est multipulum, juxta exponentem m, summæ elementorum $[dy^2 : ds \sqrt{y}]$ quæ ad tempuscula $[ds : \sqrt{y}]$ rationem habent duplicatam elementorum applicatæ [dy] ad elementa curvæ [ds].

Fac. Bernoulli Opera.

(^c Cum sit $abx - bxx = ayy$, erit $xx - ax = -\frac{a}{b}yy$, atque $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}aa - ayy : b)}$ & $dx = \pm \frac{a}{b}ydy : \sqrt{(\frac{1}{2}aa - ayy : b)}$, nec non $ds = dy \sqrt{\frac{abb + 4(a-b)yy}{abb - 4byy}}$. Igitur $f(ds : \sqrt{y}) = \int dy \sqrt{((abb + 4(a-b)yy) : (abby - 4by^3))}$ & $2 \int dy^2 : ds \sqrt{y} = 2 \int dy \sqrt{((abb - 4byy) : (abby + 4(a-b)y^3))}$.

Oooooo

No. CIII. nec non $CT = \sqrt{(LC^2 + LT^2)} = \sqrt{(yy dp^2 : pp + a^4 y^4 dp^2 : p^6 x^2)} = -ydp \sqrt{(a^4 yy + p^4 xx) : p^3 x}$. Jam, quoniam celeritas in I & O eadem, tanto plus requiritur temporis IL quam OT ad describendum, quanto IL major quam OT: idcirco $(IL - OT) \times 1 : \sqrt{y}$, seu $a^6 yy. (2pp - yy)$. — $dydp : p^3 x^3 \sqrt{(a^4 y^3 + p^4 xxy)}$ significat excessum temporis, qui requiritur ad describendum IL, ultra id quod requiritur ad describendum OT, & propterea $f(a^6 yy (2pp - yy))$. — $dydp : p^3 x^3 \sqrt{(a^4 y^3 + p^4 xxy)} =$ toti differentiae per AL [id est, per hypothesin, per AC] = tempori per CT = $CT \times (1 : \sqrt{y}) = -dp \sqrt{(a^4 y^3 + p^4 xxy) : p^3 x}$, factaque divisione per constantem $-dp$, habetur $f(a^6 yy (2pp - yy))$. $dy : p^3 x^3 \sqrt{(a^4 y^3 + p^4 xxy)} = \sqrt{(a^4 y^3 + p^4 xxy) : p^3 x}$.

Eodem modo, si AIN, ABD sint Parabolæ diverforum graduum, & sit $AH = x$, sic ut $y = xp^2$, fiet $f((1 + lx) xx dy : py \sqrt{(xxy + ppy^3)}) = lx \sqrt{(xx + ppy)} : \sqrt{y} \text{ (f)}$. Juxta priorem modum fit $f(dx \sqrt{(xx + ppy)} x \sqrt{y}) = 2p^2 (yy dx : x \sqrt{(xxy + ppy^3)}) \text{ (g)}$.

(f) Cum sit $y = xp^2$, erit $ly = plx$, quod differentiatum, posita x constante, dabit $dy : y = dplx$, vel [LC] $dy = ydplx$; posita y constante, erit $dplx + pdx : x = 0$, adeoque [LT] $dx = -xdplx : p$; & denique posita p constante, habebitur [GH] $dx = xdy : py$, unde fit $IL = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(xx + ppy)} : py$, ac differentiendo, positus y & dy constantibus, $IL - OT = (1 + lx) xx. - dpdy : ppy \sqrt{(x^2 + p^2 y^2)}$. Igitur $f(IL - OT) : \sqrt{y} = -dpf((1 + lx) xxdy : ppy \sqrt{(x^2 y + p^2 y^3)})$ cum

æquale esse debeat $CT : \sqrt{y}$, fitque $CT = \sqrt{(LC^2 + LT^2)} = \sqrt{(yy dp^2 lx^2 + xxdp^2 lx^2 : p^2)} = -\frac{dplx}{p} \sqrt{(x^2 + p^2 y^2)}$, erit, dividendo utrinque per $-dp : p$, $f((1 + lx) xxdy : py \sqrt{(x^2 y + p^2 y^3)}) = lx \sqrt{(x^2 + p^2 y^2)} : \sqrt{y}$.

(g) Cum sit $ds = dx \sqrt{(x^2 + p^2 y^2)} : x$, mutabitur æquatio $f(ds : \sqrt{y}) = 2f(dy^2 : ds \sqrt{y})$, pag. 1018. demonstrata in $f(dx \sqrt{(xx + p^2 y^2)} : x \sqrt{y}) = 2p^2 f(yy dx : x \sqrt{(xxy + ppy^3)})$.

ARTICUL. V.

Demonstratio posterioris Anagrammatis

Ephemer. Parif. 11 Aug. 1698 (¹)
inforti.

a⁴⁵ b³ c¹⁶ d¹⁰ e⁰ f³ g⁷ h² i⁴⁰ l⁷ m¹⁵ n³³ o⁷ p¹³ q⁴ r¹⁸ s³³ t⁴⁰ v³⁰ x⁴
cujus hic est sensus.

Tangens linea ex infinitis genere iisdem curvis aequales arcus abscindens ita reperitur. Ductis per datum in abscindente punctum una ex infinitis, ejusque tangente & applicata; fiat, ut excessus hujus tangens supra summam tertiorum proportionalium ad elementa abscissae curva & elementa applicata ad ipsam tangentem ita subtangens ad quartam. Denotabit hac portionem axis tangentibus utriusque curvae, abscindens & abscissa, interceptam.

D E M O N S T R A T I O.

Curva GM [Fig. 2.] abscindit ex curvis genere iisdem AB, AC aequales arcus AG, AM: quæritur ejus tangens ME in dato puncto M.

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Sunto FC} = p & \text{NM} = y & \text{NE} = q \\ \text{BC} = dp & \text{ML} = dy & \text{ND} = r \\ \text{AN} = x & \text{HG} = ds & \text{DM} = t \\ \text{LG} = dx & \text{LH} = dz & \end{array}$$

erit, ex natura curvarum AB, AC; FC [p]: BC [dp] = NM
 O o o o o 2 [y]:

(¹) N°. LXXXVII. pag. 839.

No. CIII. $[y] : MH [y dp : p] = ML + LH [dy + dz]$; adeoque $dy = (ydp - pdz) : p$; item $ML [dy] : LG [dx] = MN [y] : NE [q]$. Hinc fit $y dx : q = dy = (ydp - pdz) : p$, atque inde $dz = (qyd - pydx) : pq$. Sed $LH [dz] : LG [dx] = HN [y] : NP [r]$, unde $ydx : r = dz = (qyd - pydx) : pq$; indeque $dx = qrdp : (pr + pq)$; nec non $LG [dx] : GH [ds] = ND [r] : DH [t]$ unde $rds : t = dx = qrdp : (pr + pq)$; indeque $ds = qtdp : (pr + pq)$. Jam vero, supposita HI parallela & æquali ipsi PM; crit $DH [t] : HM [ydp : p] = GH [ds] : GI [ydpds : pt]$, & posita GR perpendiculari super HI, $DH [t] : HN [y] = GI [ydpds : pt] : IR [yydpds : ptt] = [propter y : t = dx : ds] = dpdx^2 : pds = IH - GH = PM - GH$. Unde $f(dpdx^2 : pds) = AP - AG = AP - AM = PM = ds = qtdp : (pr + pq)$; & , facta divisione per constantem $dp : p$, fit $f(dx^2 : ds) = qt : (r + q)$ seu $q = rf(dx^2 : ds) : (t - f(dx^2 : ds))$, & $q + r = tr : (t - f(dx^2 : ds))$. Q. E. D.

Solutio generalis pro quibusvis aliis curvis, quæ per communem æquationem parametro variabili gaudentem exprimentur. (¹)

Differentietur æquatio harum curvarum, tam juxta coordinatas x & y , quam juxta parametrum p , & emergat $f dx + g dy + h dp = 0$. Posita itaque x constante, fiet $dy [HM] = -h dp : g = ML + LH = ML + dz$; unde $ML = -dz - h dp : g = y dx : q$; indeque $dz = -h dp : g - y dx : q = y dx : r$, indeque $dx = -h q r dp : (g r y + g q y) = r ds : t$, & $ds = -h q t dp : (g r y + g q y)$. Sed posito p constante, habebitur $dy [LH] = -f dx : g$, & $LH^2 = f f dx^2 : g g$, & $GH^2 = (LH^2 + GL^2) = dx^2 + f f dx^2 : g g$, & $GH = ds = dx \sqrt{(ff + gg)} : g$. Posita x & dx constante, differentientur $\sqrt{(ff + gg)} : g$, fitque $d(\sqrt{(ff + gg)} : g) = m dy + ndp$

(¹) Vide Nt. LXXVIII. Notam f, pag. 792.

+ $ndp = [$ quia dy est $HM]$ — $hmdp : g + ndp :$ quare dds seu No. CIII.
 $PM - GH = - (hmdpdx + gndpdx) : g ;$ adeoque $f((-hmdpdx + gndpdx) : g) = AP - AG = AP - AM = ds = - hqt dp :$
 $(gry + ggy) ;$ factaque divisione per $dp . f((gn - hm) dx : g) =$
 $- hqt : (gry + ggy) .$ Unde fit $(q + r)$ seu $DE = tr : (t + \frac{gy}{h}$
 $f((gn - hm) dx : g)) = [$ propter $t : r = \sqrt{(ff + gg) : g}] =$
 $hrr \sqrt{(ff + gg) : (hr \sqrt{(ff + gg)} + ggy f((gn - hm) dx : g))} =$
 $[$ ob $y : r = dy : dx = f : -g] = hgggy \sqrt{(ff + gg) : (-hgyf \sqrt{(ff + gg)}$
 $+ ffggy f((gn - hm) dx : g))} = -gy : f + ggy f((gn -$
 $hm) dx : g) : (-h \sqrt{(ff + gg)} + fg f((gn - hm) dx : g)) = r +$
 $ggy \&c. Unde dempto $r,$ erit $q = -ggy f((gn - hm) dx : g)$
 $: (h \sqrt{(ff + gg)} - fg f((gn - hm) dx : g)) .$$

ARTICUL, VI.

*In Superficie Conoidis ducere lineam omnium
inter eisdem terminos brevissimam. (*)*

E Sto curva quæcunque ABC [*Fig. 3.*] rotata circa AD , quæ
gignat Conoides $ABCFDA$, in cujus superficie ducenda sit
linea BKH inter eisdem terminos brevissima. QF est arcus pe-
ripheriæ æquatoris; ABC, AKI, AHF tres meridiani; $BN,$
 KL arculi descripti a punctis $B \& K$. Sunt autem $B, H, C,$
 I, F puncta data, K punctum indeterminatum in meridiano
 AKI , adeoque BG data, KP indeterminata. Sint

$$\begin{array}{l|l|l|l} CD = ID = FD = a & KP = LP = g & BK = s & NK = p \\ BG = NG = f & CI = FI = m & KH = v & LH = q \end{array}$$

O o o o o o ;

Hisce

(*) Vid. No. LXXX. Probl. I. pag. 796 seq.

No. CIII. Hisce positis, propter arcus similes CI, BN, fiet

$$CD : CI = BG : BN, \text{ pariter } ID : IF = KP : KL$$

$$c : m = f : (mf : a) \qquad a : m = g : (mg : a)$$

unde

$$\sqrt{(BN^2 + NK^2)} = BK$$

$$\sqrt{(mmff : aa + pp)} = s$$

&

$$\sqrt{(KL^2 + LH^2)} = KH$$

$$\sqrt{(mmgg : aa + qq)} = v$$

Unde $\sqrt{(mmff : aa + pp)} + \sqrt{(mmgg : aa + qq)} = \text{Minimo}$. Ergo differentiando habetur $pdp : s + mmgdg : aav + qdq : v = 0$. Sed, propter summam $p + q$ constantem, fit $dq = -dp$; itemque $dg : dp = g : t$ ^(b), adeoque $dg = gdp : t$; unde substituendo habebitur $pdp : s + mmgdp : aav - qdp : v$; eliso dp , $p : s + mmg : aav - q : v = 0$, vel $q : v - p : s = mmg : aav$, adeoque $d(g : v) = mmg : aav$, hoc est $d(atdx : \sqrt{(aattdx^2 + x^4dy^2)}) = x^3dy^2 : at\sqrt{(aattdx^2 + x^4dy^2)}$ [ponendo $KP = g = x$, $QC = y$, $CI = m = dy$, $KM = dx$, unde fit $q[LH] = tdx : x$], hoc est $aattxddx + aatxdt dx = 3aattdx^2 + x^4dy^2$. Pone $tdx = zdz$, erit $tdx + dt dx = dzdy$, adeoque $aattxdzdy = 3aaz^2dy^2 + x^4dy^2$, seu $aattxdz = 3aazxdy + x^4dy =$ [loco dy ponendo $tdx : z$] $3aatzdx + x^4tdx : z$, &, multiplicando per z : $aatz, zdz = 3zxzdx : x + x^4dx : aa$. Pone $zx = fx^m + gx^n$, fietque $zx = x^6 : aacc - x^4 : aa$, unde $z = \frac{xx}{aa} \sqrt{(xx - cc)}$, tandemque $dy = [tdx : z] = actdx : xx \sqrt{(xx - cc)}$.

Facilius idem obtinetur, si NK & LH supponantur æquales, quarum utraque dicatur p ; adeoque BG & KP determinatæ, CI & IF vero indeterminatæ, quarum illa sit m , hæc n : hinc enim

CD :

(b) Mirum Auctorem pervenisse ad conclusionem legitimam, per hypothesin fallacem. Non enim esse potest $dg : dp = g : t$, cum sint dg & p infinitesimales ejusdem ordinis, dp vero ordinis inferioris.

Sed est $dg : p = g : t$; At posita $dg = pg : t$ non elideretur dp . Veram tamen esse conclusionem [$dy = actdx : xx \sqrt{(xx - cc)}$] ad quam devenit Auctor, per alterum, qui sequitur, modum evincitur.

$$CD:CI=BG:BN \quad \& \quad ID:IF=KP:KL$$

No. CIII.

$$a : m = f : \frac{mf}{a} \qquad a : n = g : \frac{ng}{a}$$

adeoque

$$\begin{aligned} \sqrt{(BN^2 + NK^2)} &= BK \quad \& \quad \sqrt{(KL^2 + LH^2)} = KH \\ \sqrt{(mmff : aa + pp)} &= s \qquad \sqrt{(nngg : aa + pp)} = v \end{aligned}$$

Quare $\sqrt{(mmff : aa + pp)} + \sqrt{(nngg : aa + pp)} = \text{Minimo}$, & differentiata dabit $ffm dm : aas + ggn dn : aav = 0$; unde quia $dn = -dm$ [propter $m + n = \text{const.}$] habebitur $ffm : aas = ggn : aav$; hoc est, unum $ffm : aas$ æquale alteri $ffm : aas$; adeoque $ffm : aas = \text{const.}$ Sed quia jam antea facta fuerant $BG = f = x$, $QC = x$ &c. erit $BK = \sqrt{(mmff : aa + pp)} = s = \sqrt{(xxdy^2 : aa + ttdx^2 : xx)}$; unde $ffm : s = xx dy : \sqrt{(xxdy^2 : aa + ttdx^2 : xx)} = ax^3 dy : \sqrt{(x^4 dy^2 + aattdx^2)} = \text{constanti} = ac$; hoc est $aa x^6 dy^2 = aaccx^4 dy^2 + a^4ccitdx^2$, seu $(aa x^6 - aaccx^4) dy^2 = a^4ccitdx^2$, seu $dy^2 = aaccet dx^2 : (x^6 - ccx^4)$, & $dy = acitdx : xx \sqrt{(xx - cc)}$, ut supra.

ARTICUL. VII.

In Superficie Conoidum, quæ nascuntur ex circumductu lineæ rectæ altero extremo in puncto sublimi quiescentis, super data curva, ducere lineam brevissimam inter data duo puncta.

Circumducatur linea recta AC [Fig. 4.], uno sui termino quiescens in A, circa datam curvam CDE, gignens hoc suo motu superficiem conoidicam ACDE, in qua data sint duo puncta

No. CIII. puncta L & N: Queritur linea LMN brevissima inter puncta L & N.

Esto AB recta plano curvæ CDE, & ducantur rectæ ALC, ANE; sitque AB = a, BE = x, CE = s, eritque AE = $\sqrt{(AB^2 + BE^2)} = \sqrt{(aa + xx)}$, ejusque different. EH = $xdx : \sqrt{(aa + xx)}$, & DH = $\sqrt{(DE^2 - EH^2)} = \sqrt{(ds^2 - xxdx^2 : (aa + xx))} = \sqrt{(aads^2 + xxsds^2 - xxdx^2) : \sqrt{(aa + xx)}$ [propter DE : EG = FE : BE, vel ds : dx = s : x] = $dx \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + ss - xx) : \sqrt{(aa + xx)}$.

Ponatur scorsim, centro a descriptus, radio ac = b, arcus circuli cdh; sitque angulus dah = DAH, erit AD [$\sqrt{(aa + xx)}$]: DH [$dx \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + ss - xx) : \sqrt{(aa + xx)}$] = ad [b] : dh [$b dx \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + ss - xx) : (aa + xx)}$].

Factis ergo Bχ, Bδ, Bε, æqualibus ipsis BC, BD, BE, applicetur indefinite δω = $\frac{1}{2} bb \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + ss - xx) : (aa + xx)}$, erit δωρε = Sectori circulari adh; ideoque totum spatium χψρε = Sect. circul. ach. Fiat ergo Sector ach = spatio curvilineo χψρε, & abscondantur in radiis ac, ah partes al, an, æquales AL, AN, junganturque recta ln, tum rursus fiat indefinite Sector acd = χψωδ, ducto radio ad, secante rectam ln in m, ac abscondatur, in latere conoidis AD, pars AM = am, erit M punctum in curva quæsita LMN; cum enim singuli anguli dah æquentur singulis DAH, æquatur summa priorum, id est, angulus cah, summæ angulorum omnium parvorum comprehensorum in superficie conoidica CAE. Sector igitur circumplicatus superficiæ huic congruet, sic ut punctum l cadat super L, n super N, m super M, totaque recta lmn super LMN: Est autem illa brevissima &c. Ergo & hæc. Q. E. D. & I. (*)

(*) Hujus Solutionis, quam non satis aperte exponit Auctor, ratio hæc

hæc est. Complanata intelligatur superficies conoidica ACDE, hoc est explicata & in planum extensa fingatur, atque portio vertici A vicina sit sector ach; posito nempe angulo plano cah æquali angulo solido conico CAE. Ergo, si sumantur ah, an, æquales ipsis AL, AN, & ducatur In recta; cum hæc sit in superficie plana sectoris cah linea brevissima, erit eadem brevissima LMN in superficie conoidica CAE. Ducitis itaque AD & ad, sic ut angulus conicus CAD angulo plano cad sit æqualis, sumptaque AM = am, erit punctum M in linea quæsitâ LMN. Omne igitur negotium huc redit, ut angulis conicis CAH, CAD assignentur æquales cah, cad plani. Id vero sic conficitur ab Auctore nostro. Capiantur Bχ, Bδ, Bε æquales ipsis BC, BD, BE, & demissa AK normali in tangentem EF, sit semper ερ ad ½ Bε, in ratione composita ex duplicata ipsius ad [constantis ad libitum assumptæ] ad AD, & ex simplici ipsius AK ad EK, fiatque sector cah æqualis spatio χψρs. Dico factum. Nam sumtis elementis adh, ερωδ sectoris & spatii æqualibus, seu ½ ad × dh = ερ × εδ, erit ½ ad × dh : ½ Bε × εδ = ερ × εδ : ½ Bε × εδ = ερ : ½ Bε = ad² : AD² + AK : EK, [per hyp.]. Sed ½ ad × dh : ½ Bε × εδ = dh : εδ + ad : Bε = dh : εδ + ad : AE + AE : DE + DE : BE. Igitur ad² : AD² + AK : EK = dh : εδ + ad : AE + AE : DE + DE : BE. Atqui, ob sim. tr. EDH, EAK, est AE : DE = AK : DH, & ob sim. tr. EDG, EBK, est DE : BE = GE vel εδ : EK;

Jac. Bernoulli Opera.

quibus substitutis, habemus ad² : No. CIII.
 $AD^2 + AK : EK = dh : \epsilon\delta + ad :$
 $AE + AK : DH + \epsilon\delta : EK = dh :$
 $\epsilon\delta + \epsilon\delta : EK + ad : AE + AK :$
 $DH = dh : EK + ad : AE + AK :$
 $DH = dh : DH + AK : EK + ad :$
 AE vel AD; unde, demptis communibus, remanet ad : AD = dh : DH. Sunt igitur similes, vel æquales anguli elementares dah, DAH. Istorum igitur summa, quæ est angulus conicus CAE, illorum summæ, hoc est, angulo plano cah, æquatur. Quare &c.

Hæc autem methodus in casu simplicissimo coni recti locum non habet. Nam cum sint BC, BD, BE, sive Bχ, Bδ, Bε inter se æquales, curva ψεε non describitur, & cadente AK super AE, EK evanescit, sitque ερ infinita. En igitur aliam solutionem superiori sæpe simpliciorum. Cape χδ, χε, æquales arcibus CD, CE, sitque semper εε ad ½ AK in duplicata ratione ad a d AD, fiatque spatio χψρs æqualis sector cah. Dico factum. Nam, si sint æqualia elementa dah & ερωδ, seu ad × ½ dh = εε × εδ, erit ερ : ½ dh = ad : εδ = ad² : ad × εδ. Sed ½ AK : ερ = AD² : ad². Quare, ex æquo est AK : dh = AD² : ad × εδ. Verum, ob sim. tr. EDH, EAK, est DH : AK = ED vel εδ : AE vel AD. Quare, iterum ex æquo, DH : dh = AD : ad; unde rursus constat æquales esse angulos elementares DAH, dah, atque ideo summas eorum CAE, cah.

Existente ACDE cono recto; AK, AD coincidunt, suntque constantis magnitudinis, latus nempe coni.

P P P P P

Est

No. CIII. Est igitur ψ constans, dimidium scilicet cum esse debeat $\text{cad} = \chi\psi\text{ad}$, erit ad tertiae proportionalis ad AD, a d. $\text{ad} = \chi\text{d} = \text{CD}$. Vide N^o LXXX. Pone, simplicitatis gratia, a d. $\text{ad} = \text{Notam b, pag. 799. sq.}$ AD, eritque $\psi = \frac{1}{2}$ a d. Igitur,

ARTICUL. VIII.

Analysis ejusdem Problematis alia instituta methodo, non supponendo superficiem gibbam continue complanari posse.

E Sto centro A [Fig. 5] descriptus arcus PQR. Sunt autem puncta data infinite propinqua L & N, & GM = HN. Hinc positis

$$\begin{aligned} AB = AP = a, \quad BD = g, \quad AH = m, \quad PQ = f \\ BC = f, \quad AG = l, \quad GM = HN = n, \quad QR = q, \\ \text{fiet } AP : PQ = AL : LG; \text{ item } AQ : QR = AM : MH \\ a : p = l : \frac{lp}{a} \qquad a : q = m : \frac{mq}{a} \end{aligned}$$

$$LM = \sqrt{(LG^2 + GM^2)} = \sqrt{(llpp : aa + nn)}, \text{ \& } MN = \sqrt{(mmqq : aa + nn)}. \text{ Quare } \frac{\sqrt{(llpp + aann)} + \sqrt{(mmqq + aann)}}{a} = \text{Minimo, cu-}$$

$$\text{jus differentialis [existentibus } l, m, n, a \text{ constantibus] } \frac{llpdp}{\sqrt{(llpp + aann)}}$$

$$+ \frac{mmqdq}{\sqrt{(mmqq + aann)}} = 0; \text{ hoc est, quia } dp = -dq, \text{ [propter } p + q = \text{const.] } llp : \sqrt{(llpp + aann)} = mmq : \sqrt{(mmqq + aann)}, \text{ hoc est unum } llp : \sqrt{(llpp + aann)} \text{ æquale alteri } mmq : \sqrt{(mmqq + aann)}, \text{ adeoque } llp : \sqrt{(llpp + aann)} = \text{constanti. Sit jam porro}$$

porro $BC = f = x$, $SD = dx$, $AL = l = y$, $GM = n = dy$, No. CIII.
 & $CF = t$; erit $BC [x] : CF [t] = SD [dx] : DC [t dx : x]$;
 $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{(aa + xx)}$, $DI [diff. AC] = x dx :$
 $\sqrt{(aa + xx)}$. $CT = \sqrt{(DC^2 - DI^2)} = \sqrt{(t dx^2 : xx - x dx^2 :$
 $(aa + xx))} = dx \sqrt{(t t : xx - xx : (aa + xx))} = dx \sqrt{(aatt +$
 $ttxx - x^4) : x \sqrt{(aa + xx)}$, ac tandem $AC [\sqrt{(aa + xx)}] : CT$
 $[dx \sqrt{(aatt + tt xx - x^4)} : x \sqrt{(aa + xx)}] = AP [a] : PQ [p]$;
 unde $p = adx \sqrt{(aatt + tt xx - x^4)} : (aax + x^3) = z dx : a$, & $llp :$
 $\sqrt{(llpp + aamn)} = yyz dx : \sqrt{(yyz dx^2 + a^4 dy^2)} = constanti c$;
 hoc est $y^4 z z dx^2 = c c y y z z dx^2 + a^4 c c dy^2$, seu $a^4 c c dy^2 = (y^4 z z -$
 $c c y y z z) dx^2$, & $a a c dy = y z dx \sqrt{(yy - cc)}$, & $a c dy : y \sqrt{(yy - cc)}$
 $= z dx : a = adx \sqrt{(aatt + tt xx - x^4)} : (aax + x^3)$. Longitudo
 lineæ curvæ invenitur esse $\sqrt{(yy - cc)}$ (^a).

C O N S T R U C T I O.

Cæteris positis ut in priore modo, nempe $ac = b$, & sectore
 circuli $a c d = sp.$ $\chi \downarrow \omega \delta$; sit rqf [Fig. 6] arcus circuli descri-
 ptus centro a , radio $ar = c = rs$: per punctum s & asymptotis
 ar , at , descripta sit Hyperbola fvw , demittatur in ar perpendicu-
 laris qzv , erit $zv = y = am = AM.$ *Q. E. F.* (^b).

(^a) Est $LM = \sqrt{(LG^2 + GM^2)}$
 Atqui $LG = AL$. $PQ : AP = py :$
 $a = c dy : \sqrt{(yy - cc)}$, quoniam $p =$
 $z dx : a = a c dy : y \sqrt{(yy - cc)}$; &
 $GM = dy$. Igitur $LM = \sqrt{(\frac{cc dy^2}{yy - cc}$
 $+ dy^2)} = y dy : \sqrt{(yy - cc)}$, cu-
 jus integralis, seu curvæ longitudo
 est $\sqrt{(yy - cc)}$.

(^b) Cum sit $a c d = \chi \downarrow \rho \epsilon =$
 $f((\frac{1}{2} bb \sqrt{(aatt + tt xx - x^4)} : (aax +$
 $x^3)))$, sitque $arq : a q d = ar^2 : ac^2 =$

$cc : bb$, erit sector $arq = f((\frac{1}{2} cc$
 $\sqrt{(aatt + tt xx - x^4)} : (aax + x^3))$ &
 dividendo per $\frac{1}{2} ar = \frac{1}{2} c$, arcus $rq =$
 $f((cdx \sqrt{(aatt + tt xx - x^4)} : (aax +$
 $x^3)) = c c dy : y \sqrt{(yy - cc)} = [po-$
 sito $y = cc : u] = cdu : \sqrt{(cc - uu)}$
 $=$ arcui, cujus cosinus est u . Ergo
 a z cosinus arcus rq , erit $= u$. Sed
 ex Hyperbolæ fvw natura, est $zv =$
 $ar \times rz : az = cc : u = y$. Igitur zv
 $= AM$.

ARTICUL. IX.

Q U Æ S T I O

Num Elastrum tensum, sublata subito vi tendente, eodem tempore in omnibus suis partibus in rectitudinem se restituat: an vero in aliis partibus citius, in aliis tardius?

RESOLUTA.

Esto AEC [Fig. 7] curva tensionum (*); AB, AF vires tendentes, BC, FG tensiones; hoc est, fibra datæ longitudinis a vi AB tendatur per BC, & a vi AF per FG. Queritur quanto tempore BC & FG resorbeantur. Sit MN tempus quo tota resorbetur, & P \mathcal{Q} celeritas quam obtinet fibra cum ad DE contracta est, & T \mathcal{Q} incrementum celeritatis, quod ei accedit tempusculo constanti RP a vi residua AD, quam obtinet fibra cum ad DE contracta est. Exponetur ergo fibra BC per spatium MNO, & fibra DE per spatium PNO \mathcal{Q} (^b). Sit itaque DE vel PNO \mathcal{Q} = ap & AD = t, MP = x, P \mathcal{Q} = y. Hinc quia T \mathcal{Q} ipsi AD proportionatur, erit ady = tdx, nec non differentiale spatii PNO \mathcal{Q} , hoc est, — adp = R \mathcal{Q} seu ydx. Hinc primo fit aydy = — atdp, & yy = 2f(—tdp), & y = $\sqrt{f(-2tdp)}$, id est P \mathcal{Q} proportionalis radici spatii CHKE.

Sint itaque duæ fibræ BC & FG; dividatur utraque [hoc est AH, AI] in æquales numero partes, quarum Kk, Vv sint ordine eadem; ductaque AGy, fiat $\gamma\lambda$ curva similis ipsi GL. Sic tem-

(*) Vide Nos. LVIII, LXVI, & CII.

(^b) Est enim fibræ DE longitudo spatium percurrendum, quod cum singulis momentis RP fit in ratione

composita ex tempore RP & velocitate RS, hoc est, cum sit ut rectang. RPTS, erit in tempore PN ut area PNO \mathcal{Q} .

tempus per Kk : tempus per Vv $\equiv Kk : Vv$ [$\equiv HK : IV$ \equiv No. CIII. propter similitudinem figurarum γHKL & $GIVL$, $\sqrt{\gamma HKL} : \sqrt{GIVL}$] + $\sqrt{GIVL} : \sqrt{CHKE} \equiv \sqrt{\gamma HKL} : \sqrt{CHKE}$ (^e) \equiv minus ad majus, cum curva AEC est concava; aut majus ad minus, cum curva est convexa versus axem: & similiter cæteræ particulæ fibræ BC vel citius, vel tardius resorbentur particulis fibræ FG ; unde sequitur, si ea sit tensionum natura, ut tensiones crescant in ratione minore quam vires tendentes, fibram magis tensam citius restitui minus tensa (^d); si crescant tensiones in ratione majore quam vires, minus tensam citius restitui (^e); si denique crescant in eadem, eodem quoque tempore omnes fibras restitui (^f). Unde sequitur, arcum citius restitui in partibus quæ majori curvedine gaudent, siquidem certum sit experientia, tensiones crescere in minore ratione quam vires (^g). Hinc ille forte tremulus motus in extremitate elastri sese restituentis.

Aliter & concinnius ita demonstratur.

Sit celeritas fibræ BC , cum ad BM seu DE contracta est, $MX \equiv y$; absumpta fibræ pars $CM \equiv x$, & $MN \equiv dx$; manente, ut supra, $AD \equiv t$, erit tempusculum quo elementum MN absumitur, [quippe in ratione directâ elementi & reciproca celeritatis] $dx : y$. Sit porro tempusculum constans $dx : a$, & hoc tempusculo absumtum elementum RT ; unde cum longitudines

P p p p p 3 iisdem

(^e) Hoc est, tempus per Kk ad tempus per Vv , in ratione composita ex directâ spatiorum & inversa velocitatum. Sunt autem spatia $Kk : Vv$, ut $HK : IV$, propter divisionem proportionalem, & $HK : IV$, propter simil. curv. GL , $\gamma\lambda$, sunt ut $\sqrt{\gamma HKL} : \sqrt{GIVL}$. Hæc igitur est ratio spatiorum. Velocitates vero ostensæ sunt ut \sqrt{CHKE} :

\sqrt{GIVL} ; quæ ratio si invertatur & cum priori componatur, nascitur ratio $\sqrt{\gamma HKL} : \sqrt{CHKE}$.

(^d) Tunc enim AGC curva versus AB concava est.

(^e) Tunc AGC versus AB convexa.

(^f) Tunc AGC recta est, & coincidunt $CHKE$, γHKL .

(^g) Vide Num CII, pag. 981.

No. CIII.

iiisdem celeritatibus emensæ sint ut tempora, erit $\frac{dx}{y} : \frac{dx}{a} = NM$
 vel $QX : RT = QS : RS = dy : RS [ydy : a]$ incrementum ce-
 leritati additum in dato tempusculo, quod incrementum cum
 proportionari debeat vi retrahenti, hoc est, tendenti $AD [t]$,
 habebitur $ydy : a = tdx : a$, adeoque $\frac{1}{2}yy = tdx$, & $y = \sqrt{2fdx}$
 & $dx : y = dx : \sqrt{2fdx}$, tempusculum quo elementum NM ab-
 sorbetur; quod proin est in ratione composita ex directa parti-
 culæ NM , & reciproca radicis spatii $CHKE$, ut supra repertum;
 unde cætera sequuntur, ut ibi.

NB. Si tensiones viribus tendentibus sint proportionales, id
 est, si AEC sit linea recta, fiat centro B , radio BC , quadrans
 circuli (B) XP : erit MX celeritas fibræ ad BM contractæ, & ar-
 cus CX tempus contractioni insumtum. Nam positis $AB = BC$
 $= a$, erit $t = AD = DE = BM = BC - CM = a - x$,
 unde $2tdx = 2adx - 2xdx$, & $\int 2tdx = 2ax - xx$, & $y =$
 $\sqrt{2fdx} = \sqrt{(2ax - xx)} = MX$, ex natura circuli: unde
 tempusculum quo MN absumentur $dx : \sqrt{2fdx} = dx : \sqrt{(2ax -$
 $xx)} =$ elemento arcus SX , & tempus quo tota CM absorbe-
 tur $= CX$. Sequitur, tempus quo prior medietas fibræ BC re-
 sorbetur esse duplum ejus, quo posterior absumentur.



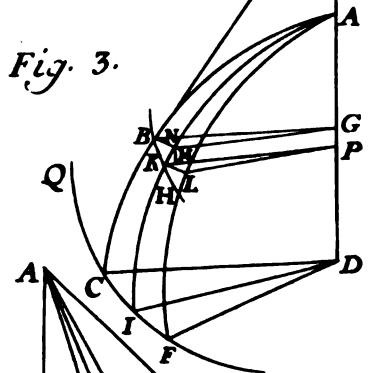
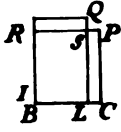
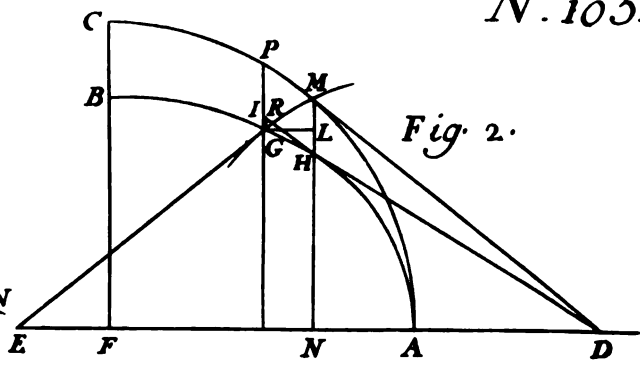
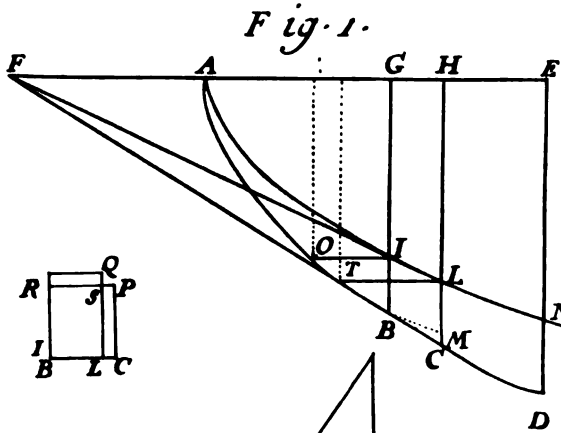
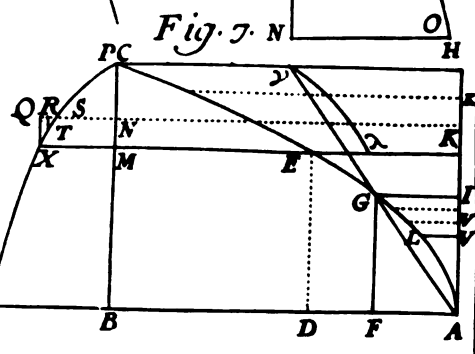
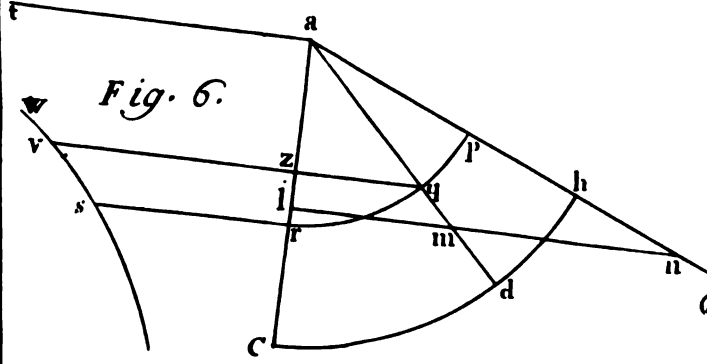
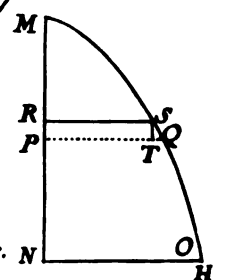
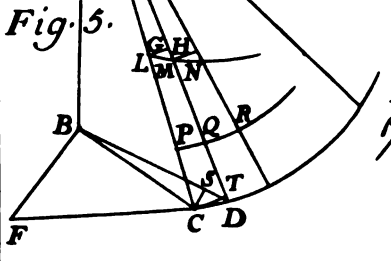
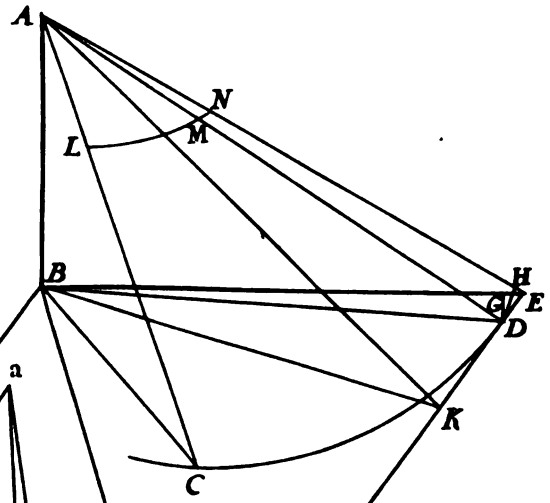


Fig. 4.





ARTICUL. X.

*Demonstratio Theorematis de radiorum osculi
usu in reducendis secundis differentiis
ad primas.*

THEOREMA.

R *Adiis osculorum reciproca recta super curva in rectam extensa applicata spatium circulabile efficiunt (*).*

DEMONSTRATIO.

Esto curva quævis ABCD [Fig. 8], cujus axis AI vel DF, abscissa AH, vel IH, vel DE, vel FE = x ; applicata HC, vel EC = y ; curva AC vel DC = z ; radius osculi BG, vel CG = r , BK = dx , CK = dy , BC = dz . Esto etiam quadrans circuli PLQ, cujus radii LM, LN ipsis GB, GC; PL ipsi AI, vel DF; NR ipsi EH, & MO ipsi BK parallelæ; ipse vero radius LM sit = a , abscissa LR = m , applicata RN = n ; quibus positis, habentur primo, ex similitudine Triangulorum BKC, MON, & NRL, sequentes tres analogiæ

$$\text{I. BK [} dx \text{] : KC [} dy \text{] = NR [} n \text{] : RL [} m \text{]}$$

$$\text{II. BK [} dx \text{] : BC [} dz \text{] = NR [} n \text{] : NL [} a \text{]}$$

$$\text{III. CK [} dy \text{] : BC [} dz \text{] = LR [} m \text{] : LN [} a \text{]}$$

Deinde, ob similitudinem triangulorum BGC & MLN, habetur

(*) Vid. Num. LXVI, pag. 64r.

No. CIII. betur BG [s] : BC [dz] = LM [a] : MN [adx : s], unde $\frac{1}{2}$ MN \times ML = sectori MLN = $\frac{1}{2}$ aadz : s; totusque adeo sector PNL, vel MLQ = f(aadz : 2s) = omn. (aa : 2s) \times dz. Quod est Theorema.

Hoc ut utamur in reducendis æquationibus differentialibus secundi generis, fiat tertio

$$\begin{array}{l} LR : LN = NO : MN \\ m : a = dn : \frac{adn}{m} = \frac{adz}{s} \\ NR : LN = MO : MN \\ n : a = dm : \frac{adm}{n} = \frac{adz}{s} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} LR : LN = NO : MN \\ m : a = dn : \frac{adn}{m} = \frac{adz}{s} \\ NR : LN = MO : MN \\ n : a = dm : \frac{adm}{n} = \frac{adz}{s} \end{array}} \right\} \text{unde fiet } \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{mdz}{dn} \\ s = \frac{ndz}{dm} \end{array} \right.$$

Sed per Theoremata, quæ habentur in *Art. Lipf.* 1694, pag. 264 (b), est quoque,

posita constante $dx \dots dy \dots dz$

$$s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^3}{dxddy} \dots \frac{dz^3}{dyddx} \dots \frac{dx dz}{ddy} \\ \frac{dy dz^2}{dxddz} \dots \frac{dx dz^2}{dyddz} \dots \frac{dy dz}{ddx} \end{array} \right\} = \text{alterutri } \frac{mdz}{dn} \text{ vel } \frac{ndz}{dm}$$

e quorum collatione oritur

$$\begin{array}{l} ddy = dn dz^2 : mdx \quad ddx = dn dz^2 : mdy \quad ddy = dndx : m \\ ddy = dm dz^2 : ndx \quad ddx = dm dz^2 : ndy \quad ddy = dmdx : n \\ ddz = dndydz : mdx \quad ddz = dndxdz : mdy \quad ddx = dndy : m \\ ddz = dmdydz : ndx \quad ddz = dmdxdz : ndy \quad ddx = dmdy : n \end{array}$$

Jam vero, juxta æquationem propositam, quæratu quoque valor

(c) Num. LVIII, pag. 578.

valor ipsius ddx , ddy vel ddz , & habebitur nova æquatio con- No. CIII.
 stans ex puris differentialibus primi generis, e qua porro per tres
 superiores analogias semper bina rursus elementa, vel dx & dy ,
 vel ax & dz , vel dy & dz tolli possunt: sed cavendum ut talia
 tollantur, quorum integralia in æquatione non reperiuntur: si
 vero nullius elementi integrale reperiatur, perinde est quænam
 tollantur, adeoque res variis modis confici potest; atque ita tan-
 dem obtinebitur æquatio, in qua nonnisi una harum x , y , & z ,
 cum sua differentiali reperitur, quæque semper separari possunt,
 si æquatio nonnisi duo membra habuerit; & sæpe si plura, prop-
 ter $m = \sqrt{(aa - nn)}$, vel $n = \sqrt{(aa - mm)}$.

E X E M P L A.

I. In *Velaria* [Vid. *Act. Lips.* 1692, pag. 202, & 1695, pag.
 546 (°)] posita dz constante, æquatio est $adxddx = dy^3$; eli-
 minato ddx , habetur $adxmdy: n = dy^3$, hoc est, per I & II ana-
 logiam, $aadm: mm = dx$, & facta integratione $aa: m = x$ (°),
 seu $m = aa: x$, & tandem, per I analogiam, $dx: dy = n: m =$
 $\sqrt{(aa - mm)}: m = \sqrt{(aa - \frac{a^4}{xx})}: \frac{aa}{x} = \sqrt{(xx - aa)}: a$;
 unde $dy = adx: \sqrt{(xx - aa)}$.

II. In *Elastica* [Vid. *Act. Lips.* 1694, pag. 272, & 1695, pag.
 538 (°)] æquatio est $xs = \frac{1}{2}aa$, hoc est, deleto s , $xndz: dm$
 $= \frac{1}{2}aa$, hoc est, per II analogiam, $xdx = \frac{1}{2}adm$, & $xx = am$,
 unde $m = xx: a$; atque, per I analogiam, $dx: dy = n: m = \sqrt{(aa$
 $- mm)}: mm = \sqrt{(a^4 - x^4)}: xx$; quare $dy = xxdx: \sqrt{(a^4 -$
 $x^4)}$

Jac. Bernoulli Opera.

Q q q q q q

III. In

(°) N. XLVIII, pag. 485. Not.
 e, & LXVI, pag. 654.

(°) Aut generalius, $c = aa: m$
 $= x$; unde, deducitur $dy = adx:$
 $\sqrt{(c - x^2) - aa}$, quæ eandem

curvam designat ac $dy = adx: \sqrt{(xx$
 $- aa)}$ abscissis solum ab alia ori-
 gine computatis.

(°) N° LVI II, pag. 589, &
 LXVI, pag. 641.

No. CIII. III. In *curva linteæ*, ostendi potest perveniri ad $dy : dx = \frac{1}{2}xx : xs$, unde fit $x dx = 2s dy = [deleto s] 2n dy dx : dm$, seu $x dm = 2ndy = [per I analogiam] 2m dx$, adeoque $dm : m = 2dx : x$; unde fit $m = xx : a$; adeoque, per I analogiam, $dx : dy = \sqrt{aa - \frac{x^4}{aa}} : \frac{xx}{a} = \sqrt{a^4 - x^4} : xx$; quare $dy = x dx : \sqrt{a^4 - x^4}$, eadem cum *Elastica*.

A R T I C U L. XI.

Fillum ACDEFGB [Fig. 9] extremitatibus suis A & B suspensum ab infinitis potentiis C, D, E, F, G, juxta directiones quasvis HC, HD, IE, KF, LG agentibus extenditur. *Quæritur fili curvatura, ejus directio media LP, & vis, qua secundum LP impellitur?*

Producatur infima fili particula AC in tangentem AP, ut & reliquæ DE, EF, FG, GB in tangentes EM, FN, GO, BP, quæ secant AP in M, N, O, P. Juxta MH erit directio media portionis ACDE (*), producta MH & EI concurrant in I & jungatur NI, erit hæc directio media ACDEF. Concurrant NI & FK in K, erit juncta OK directio media portionis ACDEFG. Concurrant OK & GL in L, erit juncta FL directio media portionis ACDEFGB.

Et HIKL est linea mediarum directionum, quam videl. formant

(*) Potentiis HD, HC opponuntur tensiones filorum CA, DE, & cum illis sunt in æquilibrio. Ergo potentia æquipollens ipsis HD, HC, æqualis est & opposita potentia æquipollenti ipsis CA, DE. Illius autem directio transit per punctum H; hujus vero directio per punctum M. Itaque directio media, tam tensionum CA, DE, quam potentiarum HC, HD, est MH.

CURVATURA FILI AB INN. POTENT. EXTENSI. 1037

mant intersectionibus suis directiones particulares MH, NI, OK, No. CHL. PL, & patet principium ejus H coincidere cum principio curvæ, quam formarent directiones potentiarum CH, DH, EI, FK, GL, hoc est, [in linteo a fluido inflato, ubi directiones hæ linteo perpendiculares sunt,] cum initio evolutæ. Sintque OV, PT arcus centris L & G descripti, &

$$AQ = x, \quad GQ = y, \quad AEG = s, \quad AW = b$$

$$FR = dx, \quad GR = dy, \quad FG = ds, \quad QW = b - x = v$$

Radius osculi in G = z

Potentia tendens filum in puncto G = p

adeoque potentia tendens universam particulam GF = pds

$$\begin{array}{l} \text{Sinus totus} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} = a \\ \text{Sinus fili BG \& directionis} \\ \text{GL} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} = r \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Sin. ang. GPL} = m \\ \text{Sin. ang. APL} = n \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{Sin. ang. GLP} = u \\ \text{Sin. ang. PLO} = t \end{array} \right.$$

Firmitas fili in A temper constans = aa

Vis qua filum impellitur per directionem mediam LP = aq

Sin. ang. BGF [PGO] : Sin. ang. LGF = pds : firmit. fili in B

$$\frac{ads}{z} : r = pds : \frac{prz}{a}$$

Firm. fili in A : firm. fili in B = Sin. ang. BPL : Sin. ang. APL

$$aa : \frac{prz}{a} = m : n$$

unde fit $a'n = mprz$, ÆQUATIO I^a.

Firm. fili in A : Potent. in P = Sin. ang. BPL : Sin. ang. BPA [PGRvelOGR]

$$aa : aq = m : \frac{adx}{ds}$$

unde fit $aadx = mqds$, ÆQUATIO II^a.

Pot. in P : Pot. in G = Sin. ang. GLO : Sin. ang. PLO

$$aq : pds = u : t$$

unde fit $aq t = pu ds$, ÆQUATIO III^a.

Qqqqqq 2

FR

No. CIII. $FR [dx]:FG [ds]=AQ [x]:PG \left[\frac{xds}{dx}\right] \& x:ds=\frac{xds}{dx}[PG]:\frac{xds^2}{x dx}=PT,$

& , ob similia triangula FGR ; POT , est

$$FR:FG=PT:PO, \text{ Sin.tot.: Sin. ang. OPV} = PO:OV$$

$$dx:ds = \frac{xds^2}{zdx} : \frac{x ds^3}{zdx^2}, \quad a : n = \frac{x ds^3}{zdx^2} : \frac{nxds^3}{azdx^2}$$

In triangulo LGP

$$\text{Sin.ang.GLP:Sin.ang.LGP}=PG:PL, \text{ Sin.tot.Sin.ang.PLO}=PL:OV$$

$$n : r = \frac{xds}{dx} : \frac{rxds}{ndx} \quad a : t = \frac{rxds}{ndx} : \frac{nxds^3}{axdx^2}$$

unde fit $trzdx = nnds^2$, ÆQUATIO IV^a.

Ex Sinibus angulorum APL, BPL, nempe m & n , reperitur (^b) Sinus anguli compositi ex ipsis, ABP seu FGR, id est, $adx:ds$, unde fit $m\sqrt{(aa-nn)}+n\sqrt{(aa-mm)}=aadx:ds$, ÆQUATIO V^a.

Similiter ex r & m Sin. ang. BGL & GPL invenitur Sinus differentiae ipsorum GLP seu n , unde fit $r\sqrt{(aa-mm)}-m\sqrt{(aa-rr)}=an$, ÆQUATIO VI^a.

Jam habentur sex æquationes, & quinque tantum litteræ m, n, n, q, t sunt eliminandæ. Possent haberi natura curvæ ex solis p & r , quæ ex hypothesi semper dantur: Sed, quia per I^{am} & III^{am} æquationem prima æquatio jam determinatur, hinc illarum quinque litterarum non nisi quatuor eliminari possunt, quinta vero semper ex cognita natura curvæ invenitur,

(^b) Vid. Notæ tumult. in CARTES. N^o. LXVII, pag. 668.

nempe

nempe (c)

$$m = \frac{a^4 dx}{\sqrt{(a^6 ds^2 - 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}} = [\text{pos. prz} = aaf] = \frac{aadx}{\sqrt{(aads^2 - 2afd y ds + ffd^2)}}$$

$$n = \frac{a prz dx}{\sqrt{(a^6 ds^2 - 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}} = \dots = \frac{afd x}{\sqrt{(aads^2 - 2afd y ds + ffd^2)}}$$

$$aq = \frac{\sqrt{(a^6 ds^2 - 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}}{a ds} = \dots = \frac{a\sqrt{(aads^2 - 2afd y ds + ffd^2)}}{ds}$$

$$u = \frac{\pm a^3 r dy \mp pprz z ds - a^3 dx \sqrt{(aa - rr)}}{\sqrt{(a^6 ds^2 - 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}} = \dots = \frac{-ard y + frds - adx \sqrt{(aa - rr)}}{\sqrt{(a^2 ds^2 - 2afd y ds + ffd^2)}}$$

$$u:m = PG \left[\frac{xdx}{dx} \right] : GL = \frac{a^4 x ds}{\pm a^3 r dy \mp pprz z ds - a^3 dx \sqrt{(aa - rr)}} = \frac{aax ds}{-ard y + frds - adx \sqrt{(aa - rr)}}$$

Qqqqqq 3

Ad

(c) Æquat. 5, $m \sqrt{(aa - mn)} + n \sqrt{(aa - mm)} = aadx : ds$, quadrando & transponendo, dabit $2mn \sqrt{(a^4 ds^2 - a^2 m^2 - a^2 n^2 + m^2 n^2)} = a^4 dx^2 : ds^2 - a^2 m^2 - a^2 n^2 + 2m^2 n^2$, & quadrando iterum $4a^4 m^2 n^2 - 4a^4 m^4 n^2 - 4a^4 m^2 n^4 + 4m^4 n^4 = (a^4 dx^2 : ds^2 - a^2 m^2 - a^2 n^2)^2 + 4a^4 m^2 n^2 dx^2 : ds^2 - 4a^4 m^4 n^2 - 4a^4 m^2 n^4 + 4m^4 n^4$, adeoque, demptis communibus, $(a^4 dx^2 : ds^2 - a^2 m^2 - a^2 n^2)^2 = 4a^4 m^2 n^2 - 4a^4 m^4 n^2 - 4a^4 m^2 n^4 + 4m^4 n^4$, $(1 - dx^2 : ds^2) = 4a^4 m^2 n^2 (ds^2 - dx^2) : ds^2 = 4a^4 m^2 n^2 dy^2 : ds^2$, & radice extracta, $a^4 dx^2 : ds^2 - a^2 m^2 - a^2 n^2 = 2a^2 mndy : ds$, vel, quia ex Æquat. I. $n = prz m : a^3$, $a^4 dx^2 : ds^2 - a^2 m^2 - p^2 r^2 z^2 m^2 : a^4 = \pm 2prz m^2 dy : ads$, unde $m^2 = a^3 dx^2 : (a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + p^2 r^2 z^2 ds^2)$, vel $m = a^4 dx : \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + p^2 r^2 z^2 ds^2)}$.
 Et quoniam ex Æquat. 1, $n = prz m : a^3$, est $n = aprz dx : \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + p^2 r^2 z^2 ds^2)}$.

Et, quia Æquat. 2 dat $aq = a^3 dx : mds$, habebitur $aq = \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + p^2 r^2 z^2 ds^2)} : ads$.
 Et, substituto pro m valore ejus $a^4 dx : \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + p^2 r^2 z^2 ds^2)}$, in Æquat. 6, $r \sqrt{(aa - mm)} - m \sqrt{(aa - rr)} = au$, prior terminus $r \sqrt{(aa - mm)}$ fit $r \sqrt{(aa - a^3 dx^2)}$ $= \frac{r \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}}{a^3 dx^2} = r \sqrt{(a^2 ds^2 - a^3 dx^2 \pm 2a^3 prz dy ds + aapprrz z ds^2)} : \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)} = r \sqrt{(a^3 dy^2 \pm 2a^3 prz dy ds + aapprrz z ds^2)} : \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)} = r(a^3 dy \pm aprz ds) : \sqrt{(a^6 ds^2 \pm 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}$; posterior vero terminus est $a^4 dx \sqrt{(aa - rr)} : \sqrt{(a^6 dy^2 \pm 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}$. Igitur illorum summa divisa per a , quæ est $u = (a^3 r dy \pm pprz z ds + a^3 dx \sqrt{(aa - rr)}) : \sqrt{(a^6 dy^2 \pm 2a^3 prz dy ds + pprz z ds^2)}$.

No. CIII. Ad inveniendam porro naturam curvæ, considerandum est, esse
 [NB. \int HCD, \int HCA, &c. designant sinus angulorum HCD,
 HCA, &c.]

$$\left. \begin{array}{l} \text{Firm.fili AC : firm.fili CD} = \int\text{HCD} : \int\text{HCA} \\ \text{Firm.fili CD : firm.fili DE} = \int\text{HDE} : \int\text{HDC} \\ \text{Firm.fili DE : firm.fili EF} = \int\text{IEF} : \int\text{IED} \\ \text{Firm.fili EF : firm.fili FG} = \int\text{KFG} : \int\text{KFE} \\ \text{Firm.fili FG : firm.fili GB} = \int\text{LGB} : \int\text{LGF} \end{array} \right\} \text{Ergo componendo}$$

$$\text{Firm.fili AC : firm.fili GB} = \int\text{HCD, HDE, IEF, \&c.} : \int\text{HCA, HDC, IED, \&c.}$$

$$aa : \frac{prz}{a} = \text{Prod. omn. sin. ang. sinistr: Prod. omn. sin. ang. dextror.}$$

$$= r, r, r, \&c. : r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}. \&c.$$

Nam [Fig. 10] BG [a] : GV [$\sqrt{(aa-rr)}$] = BS [$\frac{ads}{z}$] : ST [$\frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}$], unde ST + TV, seu SV, sinus anguli SGL, seu anguli dextri LGF = $r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}$: z. Igitur Log. $aa - \text{Log.} \frac{prz}{a} = \int lr - \int l(r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z})$, atque Log. $\frac{prz}{a^3} = \int(l(r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}) - lr)$.

Ad reducendam æquationem, fiant duæ curvæ $\beta\pi, \delta\rho$, tales ut, existente $A\gamma = AG$, $\gamma\beta$ sit = TV = r, & $\gamma\delta = SV = r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}$: z, adeoque $\beta\delta = ST = \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}$: z. Ducantur rectæ $\beta\epsilon, \delta\eta$ parallelæ $A\gamma$, & secantes Logarithmicam $n\epsilon$, in n & ϵ ; erit $Ax = \text{Log. } z\epsilon$ vel $\gamma\beta$, & $A\theta = \text{Log. } \theta n$ vel $\gamma\delta$, hoc est, $Ax = lr$, & $A\theta = l(r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z})$, & θx ,

seu

seu $rs = l(r + \frac{ds\sqrt{aa-rr}}{z}) - lr$. Sed, [ex natura Logarith. No. CIII.

micæ], $x\epsilon[r] : x\lambda[a] = m[\frac{ds\sqrt{aa-rr}}{z}] : v\epsilon$, seu $l(r + \frac{ds\sqrt{aa-rr}}{z}) - lr = \frac{ads\sqrt{aa-rr}}{rz}$. Quare Log. $\frac{prz}{a^3} [=f(l(r$

$+ \frac{ds\sqrt{aa-rr}}{z}) - lr]$ $= \int \frac{ads\sqrt{aa-rr}}{rz}$, & differentian-
do $prdz + pzd r + rzdp = pds\sqrt{aa-rr}$ (d), seu $prz =$
 $\int pds\sqrt{aa-rr} + a^3$, vel $\frac{prz}{a} - aa = \int \frac{pds\sqrt{aa-rr}}{a}$, hoc

est, differentia firmitudinum fili in B & A, æqualis summæ ter-
tiarum proportionalium ad GB, GV, & pds .

Notandum, si analysis instituatursolvendo pds in motum
horizontalem & verticalem (e), aliæ prodeunt æquationes; om-
nia enim M inveniuntur æquari $\frac{1}{a} \int (prdy + pdx\sqrt{aa-rr})$ &
omnia N, $\frac{1}{a} \int (prdx - pdy\sqrt{aa-rr})$ (f). Unde fit

Vis

(d) Nam differ. Log. $\frac{prz}{a} =$
 $\frac{a.d(prz:a^3)}{prz:a^3} = \frac{a.d(prz)}{prz} =$ differ.
 $\int \frac{ads\sqrt{aa-rr}}{rz} = \frac{ads\sqrt{aa-rr}}{rz}$.
Quare $\frac{a.d(prz)}{prz} = \frac{ads\sqrt{aa-rr}}{rz}$,
vel $d(prz) = pds\sqrt{aa-rr}$.

(e) Quemadmodum factum est
No. XXXIX, Not. pag. 425.

(f) Est enim, per princ. Mech.,
potentia absoluta pds ad potent. ho-
rizontalem, & verticalem, in quo-

vis curvæ puncto, ut sinus totus a
ad sinum & cosinum anguli quem
comprehendit directio GL potentie
absolutæ cum linea verticali. Is au-
tem angulusest differentia angulorum
quos capit curvæ portiuncula GB
cum directione GL & cum verticali.
Horum angulorum sinus sunt r , &
 $ady : ds$, & differentie eorum sinus
est $(r\sqrt{a^2-a^2dy^2} : ds^2) = \frac{ady}{ds}\sqrt{aa$
 $- rr) : a = (ar\sqrt{ds^2-dy^2} -$
 $ady\sqrt{aa-rr}) : ads = (rdx -$
 $dy\sqrt{aa-rr}) : ds$, cosinus vero
(ady

No. CIII. Vis in G: Vim in A — N == Sin.APR: Sin.RPG

$$\frac{prz}{a} : aa - \frac{1}{a} \int (prdx - pdy \sqrt{aa - rr}) = ds : dy$$

nec non, Vis in G: Potentiam M == Sin.APR: Sin.APG

$$\frac{prz}{a} : \frac{1}{a} \int (prdy + pdx \sqrt{aa - rr}) = ds : dx$$

Habemus igitur tres æquationes, per quarum semper singulas quæsitum invenire licet, quanquam plerumque facilius per unam quam per aliam

$$\text{I. } prz = \frac{a^3 ds}{dy} - \frac{ds}{dy} \int (prdx - pdy \sqrt{aa - rr})$$

$$\text{II. } prz = \frac{ds}{dx} \int (prdy + pdx \sqrt{aa - rr})$$

$$\text{III. } prz = a^3 + \int (pds \sqrt{aa - rr})$$

Demonstratur id ita, $prz = a^3 + \int (pds \sqrt{aa - rr})$ hoc est, $\frac{prdyds}{ddx} = a^3 + \int (pds \sqrt{aa - rr})$, vel $prdyds = a^3 ddx + ddx \int (pds \sqrt{aa - rr})$, & $prdyds + pdxds \sqrt{aa - rr} = a^3 ddx + ddx \int (pds \sqrt{aa - rr}) + pdxds \sqrt{aa - rr}$, & integrando $ds \int (prdy + pdx \sqrt{aa - rr}) = a^3 dx + dx \int (pds \sqrt{aa - rr})$, vel $\frac{ds}{dx} \int (prdy + pdx \sqrt{aa - rr}) = a^3 + \int (pds \sqrt{aa - rr}) = prz$. Q. E. D.

Appli-

$$\left(\frac{ady}{ds} r + \sqrt{aa - aady^2 : ds^2} \right) \sqrt{aa - rr} : a = (rdy + \sqrt{dy^2 - ds^2}) \sqrt{aa - rr} : ds = (rdy + dx \sqrt{aa - rr}) : ds$$

Igitur Sin. tot. $a : \frac{rdx - dy \sqrt{aa - rr}}{ds} = pds : \frac{prdx - pdy \sqrt{aa - rr}}{a} =$ potentiaæ horizontali, & Sin. tot. $a : \frac{rdy + dx \sqrt{aa - rr}}{ds} = pds : \frac{prdy + pdx \sqrt{aa - rr}}{a} =$ potentiaæ verticali.

Applicatio.

I. Si $r = a$, quem casum motus fluidorum observat (⁶), habetur, per tertiam æquationem,

$\frac{pz = aa}{p dx ds} = aa$	$\frac{pz = aa}{p dy ds} = aa$
$\frac{p dx ds}{ddy} = aa$	$\frac{p dy ds}{ddx} = aa$
$p dx ds = aaddy$	$p dy ds = aaddx$
$ds p dx = aads - aady$	$ds p dy = aadx$
$aady = aads - ds p dx$	$a^2 dx^2 = (dx^2 + dy^2) (spdy)^2$
$a^2 dy^2 = (aa - spdx)^2 \times (dx^2 + dy^2)$	$(a^2 - (spdy)^2) dx^2 = dy^2 (spdy)^2$
$(a^2 - (aa - spdx)^2) dy^2 = (aa - spdx)^2 dx^2$	$dx^2 = \frac{dy spdy}{\sqrt{a^2 - (spdy)^2}}$

$$dy = \frac{(aa - spdx) dx}{\sqrt{a^2 - (aa - spdx)^2}}$$

$$dy = \frac{(aa - spdx) dx}{\sqrt{2aas p dx - (spdx)^2}}$$

Intelligimus ubique per $spdx$, vel $spdy$, omnia pdx , aut $pd y$ pertinentia ad partem curvæ inferioris AG.

Sit ex gr. Curva lintei, ubi $p = QW = b - x = v$, erit $spdx = -svdv = \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}vv$, unde, posito $aa = \frac{1}{2}bb$, erit $dy = (aa - spdx) dx : \sqrt{2aas p dx - (spdx)^2} = -vv dv : \sqrt{b^2 - v^2}$, nempe Elastica.

Sit deinde $p = a$, erit $spdy = ay$, unde $dx = dy spdy : \sqrt{a^2 - (spdy)^2} = ay dy : \sqrt{a^2 - aayy} = y dy : \sqrt{aa - yy}$, & facta summatione, $x = a - \sqrt{aa - yy}$, seu $yy = 2ax - xx$, unde constat curvam quæsitam esse circulum.

Quod si p detur per plures simul indeterminatas, ut si sit $p =$
fac. Bernonlli Opera. Rrrrrr ady^2

(⁶) Quia, nempe, pressio fluidi exercetur secundum perpendicularem.

No. CIII. $ady^2 : ds^2$, quemadmodum fit in Velaria (^h), æquationes repertæ $dy = (aa - spdx) dx : \sqrt{(2aaspx - (spdx)^2)}$ & $dx = dy spdy : \sqrt{(a^4 - (spdy)^2)}$ nihil prodesse possunt: quare anteriorum aliqua sumenda, puta $pdys = aaddx$, hoc est, $(ady^2 : ds^2) \times dy ds = aaddx$, seu $dy^3 = adsddx$, eaque resolvatur, ponendo $tdy = adx$, &c. (ⁱ); unde fit $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, nempe Funicularia.

II. Si ponatur $r = ady : ds$, quem casum observant omnis generis Funiculariæ, in quibus directiones ponderum, tum inter se, tum axi AW parallelæ sunt; habetur, per primam Æquationem, $pzdy : ds = aads : dy$ (^k), & per tertiam $pzdy : ds = aa + spdx$; unde fit $aads : dy = aa + spdx$; $aads = aady + dy spdx$; $aads = (aa + spdx) dy$; $a^4 ds^2 = (aa + spdx)^2 dy^2$; $a^4 dx^2 + a^4 dy^2 = (aa + spdx)^2 dy^2$; $((aa + spdx)^2 - a^4) dy^2 = a^4 dx^2$; & $dy = aadx : \sqrt{(2aaspx + (spdx)^2)}$.

Si p detur per y , ponatur $adx = tdy$, $aadx^2 = ttdy^2$, $aads^2 = (aa + tt) dy^2$; $ads = dy \sqrt{(aa + tt)}$; $pdx = ptdy : a$; unde loco $aads = aady + dy spdx$, habemus $ady \sqrt{(aa + tt)} = aady + dy f(pdy : a)$; $a \sqrt{(aa + tt)} = aa + f(pdy : a)$; $asds : \sqrt{(aa + tt)} = ptdy : a$; $aads : \sqrt{(aa + tt)} = pdy$; $spdy = f(aads : \sqrt{(aa + tt)}) =$ sectori hyperbolico, cujus applicata t .

Si p detur per s , differentietur $aads : dy = aa + spdx$, habebitur

(^h) Vide N^o. XLVIII, Notam e, pag. 445.

(ⁱ) $adx = tdy$ dat $ads = [a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = dy \sqrt{(aa + tt)}$, cujus differentiale $ddy \sqrt{(aa + tt)} + ttdy : \sqrt{(aa + tt)}$ debet esse constantis, propter ds constantem. Ergo $ddy = -tdy : (aa + tt)$ & $addx [= tddy + dtdy] = -ttdy : (aa + tt) + didy = aadsdy : (aa + tt)$, atque $dy^3 [= adsddx] = aadsdy^2 : \sqrt{(aa + tt)}$, vel $dy [= adx : t] = ads : \sqrt{(aa + tt)}$, unde fit $dx = tdt :$

$\sqrt{(aa + tt)}$, & integrando $x = \sqrt{(aa + tt)}$ vel $xx - aa = tt = aadx^2 : dy^2$, ac tandem $dy^2 = aadx^2 : (xx - aa)$, vel $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$.

(^k) Evanescit enim terminus $f(prdx - pdy \sqrt{(aa - rr)})$. Nam $\sqrt{(aa - rr)} = \sqrt{(aa - aady^2 : ds^2)} = \frac{a}{ds} \sqrt{(ds^2 - dy^2)} = adx : ds$. Igitur $prdx - pdy \sqrt{(aa - rr)} = padyx : ds - padxdy : ds = 0$.

tur — $aadsddy: dy^2 = p dx$; ponatur $ady = tds$, & invenietur **N^o. CIII.**
 — $a^4 dt: tt \sqrt{(aa - tt)} = pds$ (1), & $spds = aa \sqrt{(aa - tt): t}$;
 ideoque $t = a^3: \sqrt{(a^4 + (spds)^2)}$ & $dy = aads. \sqrt{(a^4 + (spds)^2)}$,
 quæ eadem est cum figura lintei ABCD [Fig. 10] Vid. NB.
 paginæ 1047. Unde sequitur, sive velum latitudinis inæqualis
 BC a vento inflectur, sive funis gravetur ponderibus ipsis BC pro-
 portionalibus curvaturam utrinque eandem fore.

III. Si p & r dantur per s , habetur, per tertiam Equationem, universaliter $prdyds: ddx = a^3 + f(pds \sqrt{(aa - rr)})$. Pone
 $adx = tds$, $addx = dt ds$, $aadx^2 = ttds^2 = ttdx^2 + ttdy^2$; ($aa - tt$)
 $dx^2 = ttdy^2$; $dy = dx \sqrt{(aa - tt): t} = ds \sqrt{(aa - tt): a}$,
 & $dyds: ddx = ds \sqrt{(aa - tt): dt}$; unde $prdyds: ddx = prds \sqrt{(aa - tt): dt} = a^3 + f(pds \sqrt{(aa - rr)})$, tandemque $prds: (a^3 + spds \sqrt{(aa - rr)}) = dt \sqrt{(aa - tt)}$; quare t invenietur per s ,
 indeque & $x = fids: a$, & $y = fids \sqrt{(aa - tt): a}$ per s .

Habita natura curvæ, habentur & m , n , aq , u & GL, per æquationes pag. 1039., nempe

I. Si $r = a$, erit (m)

R r r r r r z

m vel

(1) Ex $ady = tds$, fluunt $addy = dt ds$, & $dx = \sqrt{(ds^2 - dy^2)} = ds \sqrt{(aa - tt): a}$; quibus substitutis, æquatio — $aadsddy: dy^2 = p dx$, mutatur in — $a^3 dt: tt = pds \sqrt{(aa - tt): a}$, vel in — $a^4 dt: tt \sqrt{(aa - tt)} = pds$.

(m) Ubi $r = a$, est $prz = aa$ [pag. 1043.] & $aaf = prz = a^3$, atque $f = a$. Igitur m vel n , quod est æquale $a adx$ vel $a f dx$ divis. per $\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffd^2)}$ [pag. 1039.] = $a adx: \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} = [$ quia $aady = aads - ds spdx$, ac consequenter $aadx = ds \sqrt{(2aafpdx - (spdx)^2)}$] =

$ds \sqrt{(2aafpdx - (spdx)^2): \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds + ffd^2)} = \sqrt{(2aafpdx - (spdx)^2): \sqrt{2spdx} = \sqrt{(aa - \frac{1}{2} spdx)}$.

Vel quoniam $aadx = ds spdy$, & consequenter $aady = ds \sqrt{(a^4 - (spdy)^2)}$, erit m vel $n = [aadx: \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} =] ds spdy: \sqrt{(2aads^2 - 2ds^2 \sqrt{(a^4 - (spdy)^2)})} = spdy: \sqrt{(2aa - 2\sqrt{(a^4 - (spdy)^2)})} = spdy: (\sqrt{(aa + spdy)} - \sqrt{(aa - spdy)})$.

Iisdem positis $aq = a \sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffd^2): ds = a \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds): ds} = [$ scribendo $aads = ds spdx$ pro $aady$] $a \sqrt{(2aads^2 - 2aads^2}$

No. CIII. m vel $n = \sqrt{(aa - \frac{1}{2}spdx) = spdy: (\sqrt{(aa+spdy)} - \sqrt{(aa-spdy)})}$
 $aq = a\sqrt{2spdx} = a\sqrt{(aa+spdy)} - a\sqrt{(aa-spdy)}$
 $u = \sqrt{\frac{1}{2}spdx} = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+spdy)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa-spdy)}$
 GL $= aax: spdx = aax: (aa - \sqrt{(a^4 - (spdy)^2})$.
 Firmitas filii in B $= aa$

II. Si $r = a dy: ds$, erit (*) posito nempe $spdy = f(aads: \sqrt{(aa+tt)})]$

$m =$

$-2aads^2 + 2ds^2spdx): ds =$
 $a\sqrt{(2spdx)}$, vel, scribendo $ds\sqrt{(a^4 - (spdy)^2)}$ pro $aady$, $aq =$
 $a\sqrt{(2aa - 2\sqrt{(a^4 - (spdy)^2})} =$
 $a\sqrt{(aa+spdy)} - a\sqrt{(aa-spdy)}$.

Sed u , propter $f = a$, & $r = a$, ideoque $\sqrt{(aa-rr)} = 0$, reducitur ad $(-aady + aads): \sqrt{(2a^2ds^2 - 2aadyds)} = \sqrt{(aads - aady): 2ds}$, vel pro $aady$ scribendo $aads - ds spdx$, ad $\sqrt{\frac{1}{2}spdx}$; aut pro $aady$ scribendo $ds\sqrt{(a^4 - (spdy)^2)}$, ad $\sqrt{(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - (spdy)^2})} = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+spdy)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa-spdy)}$.

Et GL, quod est $= aaxds: (-aady + aads)$; fiet, [si scribas $aads - ds spdx$ pro $aady$] $= aax: spdx$, vel [si scribas $ds\sqrt{(a^4 - (spdy)^2)}$ pro $aady$] $= aax: (aa - \sqrt{(a^4 - (spdy)^2})$.

(*) Ubi $r = a dy: ds$, evanescit terminus ultimus $\text{Æq. I. prz} = a^3 ds: dy - \frac{ds}{dy} f(prdx - pdq\sqrt{(aa-rr)})$.

Vid. Not. k, pag. 1044. atque ideo fit $aaf = prz = a^3 ds: dy$. Ergo $f = ads: dy$. Igitur $\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffd^2)} = \sqrt{(aads^2 - 2aads^2}$

$+ aads^4: dy^2) = \frac{ads}{dy} \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$

$= adsdx: dy$.

Quo posito, $m = [aadx: \sqrt{(aads^2 \&c.)} \&c.] = aadx: (adsdx: dy) = a dy: ds$. Sed [pag. 1044 lin. 12.] habebatur $aads: dy = aa + spdx$. Ergo $m = a^3: (aa + spdx) = aa: \sqrt{(aa+tt)}$ quoniam $a\sqrt{(aa+tt)} = aa + spdx$.

Verum $n = [afdx: \sqrt{(aads^2 \&c.)}]$

$= \frac{aadsdx: dy}{adsdx: dy} = a$.

Sed $aq = [a\sqrt{(aads^2 \&c.): ds}]$

$= \frac{aadsdx: dy}{ds} = \frac{aadx}{dy} = \sqrt{(2afdx + (spdx)^2)} = [quia dx: dy = t: a]$
 ar .

Est autem $u = -ardy + frds - adx\sqrt{(aa-rr)}$ divisum per $\sqrt{(aads^2 \&c.)}$. Sed $-ardy = -aady^2: ds$, & $frds = aads \& - adx\sqrt{(aa-rr)} = -aadx^2: ds$. Horum summa est $aa(ds - (dy^2 + dx^2): ds) = aa(ds - ds) = 0$. Igitur $u = 0$.

Atqui GL $= aaxds: (-ardy + frds - adx\sqrt{(aa-rr)}) = aaxds: 0 = \infty$.

Firmitas autem filii in B, quæ est $prz:$

$$m = a^3 : (aa + fpdx) = aa : \sqrt{(aa + tt)}$$

$$n = a = a$$

$$aq = \sqrt{(2aafpdx + (fpdx)^2)} = at$$

$$u = 0 = 0$$

$$GL = \infty = \infty$$

$$\text{Firmitas fili in B} = aa + fpdx = a \sqrt{(aa + tt)}$$

III. Si p & r dantur per s ($^{\circ}$), erit [posito videlicet $f = a + fpds \sqrt{(aa - rr)} : aa$ & $dt : \sqrt{(aa - tt)} = prds : aaf = ds : z$]

$$m = at : \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$

$$n = ft : \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$

$$aq = \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$

$$u = (fr - r\sqrt{(aa - tt)} - t\sqrt{(aa - rr)}) : \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$

$$GL = aax : (fr - r\sqrt{(aa - tt)} - t\sqrt{(aa - rr)})$$

NB. Si linteum sit inæqualis latitudinis BC [Fig. 10], ita quidem ut BC ad longitudinem AB relationem datam habeat quamcunque; ejus a vento inflati curvatura AG sic invenitur. Quia potentia P tendens filum in puncto G componitur ex ratione simplici latitudinis fili BC, seu g , & duplicata elementi dy , erit $p = gdy^2 : ds^2$ (p), unde $pz = gzd^2 : ds^2 = aa$ (q); $gds^3 dy^2 : dyddxds^2 = aa$ (r); $gdsdy = aadd$; $dyfgds = aadx$, $dy^2 (fgds)^2 = a^2 dx^2$. Ergo $(a^2 + (fgds)^2) dy^2 = a^2 ds^2$, unde $dy = aads : \sqrt{(a^2 + (fgds)^2)}$, & $dx = dsfgds : \sqrt{(a^2 + (fgds)^2)}$. Ponatur $hb = \sqrt{(a^2 + (fgds)^2)}$, & invenietur (s) m vel $n = a^3 fgds : hb \sqrt{(2hb - 2aa)}$,
Rrrrrr 3

$$prz : a = af = aads : dy = aa + fpdx = a \sqrt{(aa + tt)}$$

(p) Per Notam e, N^l. XLVIII, pag. 445.

(q) Quia $r = a$. Vid. pag. 1043. lin. 2.

(r) Positis nempe dy constantibus, est $z = ds^3 : dyddx$.

(s) Propter $r = a$ est etiam $f = a$ [Not. m]. Igitur m vel $n = aax : \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} =$
 [scri-

($^{\circ}$) In æquationibus pag. 1039., pro dy scribe $ds \sqrt{(aa - tt)} : a$, & pro dx , scribe $tds : a$ [Vide pag. 1045. lin. 10 & 11.] & habebis æquationes quas hic avert Noster.

No. CIII. — $2aa$), $aq = aa \sqrt{(2bb - 2aa)} : b$, $u = \sqrt{(\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}aa)} : b$;
& $GL = bhx : (bb - aa)$.

Notandum hic occurrit $f(dy : fgd s) = Max.$, & $f(dx fgd s) = Max.$ (') Et quia firmitas lintei in G secundum totam latitudinem ~~AD~~ BC accepti est æqualis firmitati ejus in A secundum latitudinem AD; sequitur unius fili firmitatem in G, ad unius fili firmitatem in A esse reciproce ut AD ad BC.

[scribendo $ds fgd s : bb$ pro dx , & $aads : bb$ pro dy] $= a^4 ds fgd s : bb \sqrt{(2aads^2 - 2a^4 ds^2 : bb)} = a^3 fgd s : b \sqrt{(2bb - 2aa)}$. Et $aq = a \sqrt{(2aads^2 - 2a^4 ds^2 : bb)} : ds = aa \sqrt{(2bb - 2aa)} : b$. Sed $u = (- ardy + frds - adx \sqrt{(aa - rr)} : \sqrt{(2aads^2 - 2a^4 ds^2 : bb)}) = (- a^4 ds : bb + aads - 0) : \sqrt{(2aads^2 - 2a^4 ds^2 : bb)} = a \sqrt{(\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}aa)} : b$. Atque $GL = aaxds : (- ardy + frds - adx \sqrt{(aa - rr)}) = aaxds : (- a^4 ds : bb + aads) = bhx : (bb - aa)$.

(') Per N^o. XCIII Tabellam, lin. 17. curva cujus æquatio est $dy = q ds : \sqrt{(aa + qq)}$, Maximum

habet $sqdy$, quod N^o. XCVI, Probl. II. demonstratur. Interpretetur ds per ds , & q per $sa^3 : fgd s$, & curvæ, quæ maximum præbet $f(a^3 dy : fgd s)$ vel $f(dy : fgd s)$, æquatio est $dy = \frac{a^3 ds : fgd s}{a^3 ds : fgd s} = \frac{a^3 ds}{a^3 ds}$
 $\frac{\sqrt{(aa + a^3 : (fgds)^2)}}{\sqrt{(a^3 + (fgds)^2)}}$ qualis est curva lintei hic exhibita. Interpretetur rursus dy per dx , ds per ds , & q per $fgds : a$; & curvæ, quæ Maximum habet $f(dx fgd s : a)$ vel $f(dx fgd s)$, æquatio est $dx = \frac{ds fgd s : a}{ds fgd s : a} = \frac{ds fgd s}{ds fgd s}$
 $\frac{\sqrt{(aa + (fgds)^2 : aa)}}{\sqrt{(a^3 + (fgds)^2)}}$ qualis etiam hic occurrit.



ARTICUL. XII.

No. CIII.

Æ *Quationem* $dy = ayx^m dx + by^r x^v dx$ *construere, faltem per quadraturas; hoc est, separare in illa litteras indeterminatas cum suis differentialibus a se invicem.* (*)

L E M M A.

Posito ls significare logarithmum quantitatis s ; & Ncx^p quantitatis $c x^p$, spectatæ instar logarithmi, numerum, erit diff. $Ncx^p = cpx^{p-1} Ncx^p . dx$.

Nam sit $s = Ncx^p$, erit $ls = cx^p$, & $dls = [ds : s =] cpx^{p-1} dx$, & $ds = [dNcx^p =] cpx^{p-1} dx = cpx^{p-1} . Ncx^p . dx$.

A N A L Y S I S.

Sit jam $y = t . Ncx^p$, unde $dy = Ncx^p . dt + t dNcx^p = Ncx^p dt + cpx^{p-1} . Ncx^p . dx = by^r x^v dx + ayx^m dx = bt^r x^v (Ncx^p)^r dx + atx^m . Ncx^p . dx$. Ponantur membra postrema $cpx^{p-1} . Ncx^p . dx$, & $atx^m . Ncx^p . dx$ se destruere, ut fiat $p = m + 1$, & $c = a$; $p = a : (m + 1)$, & reliqua adæquentur sibi invicem, erit $Ncx^p . dt = bt^r x^v . (Ncx^p)^r dx$; hoc est, $dt : t^r = bx^v . (Ncx^p)^{r-1} . dx = bx^v . N(c . (r - 1) x^p) dx = bx^v . N(\frac{a(r-1)}{m+1} x^{m+1}) dx$; & integrando $\pm g - 1 : (r - 1) t^{r-1} = f(bx^v . N(\frac{a(r-1)}{m+1} x^{m+1}) dx)$, seu $\pm (r - 1) g t^{r-1} - 1 = (r - 1) t^{r-1} f(bx^v \&c.)$, seu $(r - 1) t^{r-1} \times (g - f(bx^v \&c.)) = 1$, seu $t^{r-1} = 1 : (r - 1) \times (g - f(bx^v \&c.))$,
seu

(*) Conf. N^o. LXXII, pag. 731, & LXXVII, pag. 782.

No. CIII.

feu denique $t = 1 : \sqrt{(r-1) \times (g - f(bx^r \cdot N(\frac{a(r-1)}{m+1} x^{m+1}) dx))}$;
 adeoque $y = t \times N(\frac{a}{m+1} x^{m+1}) = N(\frac{a}{m+1} x^{m+1}) :$
 $\sqrt{(r-1) \times (g - f(bx^r \cdot N(\frac{a(r-1)}{m+1} x^{m+1}) dx))}$.

A L I T E R.

*Si m & r = 0, hoc est, si ady = ydx + bxⁿ dx, & u
 numerus integer.*

Fiat $y + bx^n = t$, seu $y = t - bx^n$, erit $ady = adt - abnx^{n-1} dx = sdx$
 hoc est, $adt = sdx + abnx^{n-1} dx$

Fiat $t + abnx^{n-1} = s$ --- erit $adt = ads - aabn(n-1)x^{n-2} dx = sdx$
 hoc est, $ads = sdx + aabn(n-1)x^{n-2} dx$

Fiat $s + a^2bn(n-1)x^{n-2} = z$ --- erit
 $ads = adz - a^2bn(n-1)(n-2)x^{n-3} dx = zdx$
 hoc est, $adz = zdx + a^2bn(n-1)(n-2)x^{n-3} dx$

Fiat $z + a^3bn(n-1)(n-2)x^{n-3} = p$ --- erit
 $adz = adp - a^3bn(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} dx = pdx$
 hoc est, $adp = pdx + a^3bn(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} dx$

hoc est, si ponamus $n = 4$, $adp = pdx + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^3 b dx$, seu
 $dx = adp : (p + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^3 b)$.

Sed $p = z + a^3bn(n-1)(n-2)x^{n-3} = s + a^2bn(n-1)x^{n-2} + a^3bn(n-1)(n-2)x^{n-3} = t + abnx^{n-1} + a^2bn(n-1)x^{n-2} + a^3bn(n-1)(n-2)x^{n-3} = y + bx^n + abnx^{n-1} + a^2bn(n-1)x^{n-2} + a^3bn(n-1)(n-2)x^{n-3}$,
 adeoque $y = p - bx^n - abnx^{n-1} - a^2bn(n-1)x^{n-2} - a^3bn(n-1)(n-2)x^{n-3}$, &c. . . . $- a^{n-1}bn(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot x$;
 & ita

& ita si $u=4$, erit $y = p - bx^4 - 4abx^3 - 3.4a^2bx^2$ No. CIII.
 $- 2.3.4a^3bx$. (b).

Aliter.

Sit $y = p - ex - fx^2 - gx^3 - hx^4$, &c. erit $[ady =] adp - aedx - 2afx dx - 3agx^2 dx - 4ahx^3 dx$ &c. $= pdx - ex dx - fx^2 dx - gx^3 dx - hx^4 dx$, &c. $+ bx^u dx = [y dx + bx^u dx]$. Ponantur ita
 $ady = adp - aedx - 2afx dx - 3agx^2 dx - 4ahx^3 dx$ &c.
 $- y dx = \dots - pdx + ex dx + fx^2 dx + gx^3 dx + hx^4 dx$ &c.
 $- bx^u dx = \dots \dots \dots - bx^u dx$

Positoeque $u=4$, collatisque terminis similibus, $h=b$; $g=4ab$
 $= 4ab$; $f=3ag=3.4a^2b$; $e=2af=2.3.4a^3b$; unde erit adp
 $= pdx + aedx$, seu $dx = adp : (p + ae)$; atque $y = p - 2.3.4a^3bx$
 $- 3.4a^2bx^2 - 4abx^3 - bx^4$.

Nota 1°. Etiam si nec m , nec r sit $= 0$, potest nihilominus æquatio ad hanc formulam $ady = y dx + b x^m dx$ reduci (c), adcoque per posteriorem modum resolvi, hoc modo. Pone

$$x^{m+1} = t, \text{ fiet } x^m dx = dt : (1+m), \text{ \& } x^u dx = \frac{1}{1+m} t^{(u-m):(m+1)} dt.$$

Ponc iterum $y = z^{1:(1-r)}$, & invenies $dz = \frac{a(1-r)}{1+m} z dt + \frac{b(1-r)}{1+m} t^{(u-m):(m+1)} dt$, quæ ejusdem est formulæ cum $ady = y dx + b x^m dx$; quare si $(u - m) : (m + 1)$ numerus est integer, &c.

2°. Omnis æquatio similis huic $ady = y^r dx + y^r x^u dx$ potest reduci ad hanc formulam $ady = yy dx + y^r x^u dx$. Sit enim $y = z^h$, erit $dy = h z^{h-1} dz$, & $y^r = z^{hr}$, & $y^r = z^{hr}$; adcoque
 $ah z^{h-1} dz = z^{hr} dx + z^{hr} x^u dx$, seu $adz = \frac{1}{h} z^{hr-h+1} dx$

Fac. Bernoulli Opera. S s s s s + 1

(b) Atque hinc fluit constructio N^o. LXXII, pag. 734.
 (c) Vide N^o. LXXII Notam a, pag. 732.

No. CIII.

$+ \frac{1}{h} z^{hr-b+1} x^a dx$; positoque $hq - b + 1 = 2$, ut sit $h = 1$:

$(q - 1)$, fiet $adz : (q - 1) = xz dx + x^{(r+q-2):(q-1)} x^a dx$.
Quare si in hac ultima separari possunt indeterminatæ, poterunt etiam separari in proposita (^d).

3°. Problema ita potest proponi aliter [Fig. 11]. Data quavis curva AB [Ab], seu geometrica, seu mechanica, seu libera tantum manu formata [non tamen linea recta, ut BEAUNIUS supponit in Problemate quod CARTESIO proposuit] invenire lineam CD, cujus applicata DE ad subtangentem eam habeat rationem quam habet constans quædam ad DB vel Db. (e)

4°. Si sit $dy = adx + ydx : x + byydx : xx + cy^3 dx : x^3 + cy^4 dx : x^4$ &c. Posito $y = xz$, erit $x dz + z dx = adx + x dz + bz z dx + cz^3 dx + cz^4 dx$ &c. hoc est $dz = adx : x + bz z dx : x + cz^3 dx : x + cz^4 dx : x$ &c., hoc est $dz : (a + bz z + cz^3 + cz^4 \text{ &c.}) = dx : x$ (^f).

Pro-

(^d) Vide pag. seq. tentamen solutionis æquationis $dy = yy dx + x^a dx$, quæ istius $dy = yy dx + y^r x^a dx$ casus est. Non potuit autem æquatio $ady = yq dx + y^r x^a dx$ reduci ad præcedentem $ady = y dx + by^r x^a dx$. Poni enim debuisset $bq - b + 1 = 1$, id quod dedisset $b = 0$, & $y = z^b = 1$.

(e) Vide Num. LXXII, pag. 731, 732.

(^f) Sit $a + bz z + cz^3 + cz^4 + \text{&c.} = (a + z) \cdot (C + z) \cdot (y + z) \cdot (s + z)$ &c., & $dx : x = dz : (a + bz z + cz^3 + cz^4 + \text{&c.})$ reduci poterit ad $dx : x = Adz : (a + z) + Bdz : (C + z) + Cdz : (y + z) + Edz : (s + z) + \text{&c.}$ atque

integrando, $la^a + lx = Al(a + z) + Bl(C + z) + Cl(y + z) + El(s + z)$ &c. aut $a^n x = (a + z)^A \cdot (C + z)^B \cdot (y + z)^C \cdot (s + z)^E$ &c. Exponentium A, B, C, E, determinatio non est difficilis. Sit enim

$$\frac{1}{(a+z) \cdot (C+z) \cdot (y+z) \cdot (s+z) \text{ &c.}} =$$

$$\frac{A}{a+z} + \frac{B}{C+z} + \frac{C}{y+z} + \frac{E}{s+z} + \text{&c.},$$

& multiplicando per $a + z$, erit . . .

$$\frac{1}{(C+z) \cdot (y+z) \cdot (s+z) \text{ &c.}} = A +$$

$$\frac{B \cdot a + z}{C + z} + \frac{C \cdot a + z}{y + z} + \frac{E \cdot a + z}{s + z} + \text{&c.}$$

Finge nunc $z = -a$, ut sit $a + z = 0$ erit,

Propositio principalis aliter.

$dy = ydx + bx^u dx$. Pone $y = pq$, erit $dy = pdq + qdp = pqdx + bx^u dx$. Pone $pdq = pqdx$, unde $dq : q = dx$, & $lq = x$, & $q = Nx$, unde $Nxdp = qdp = bx^u dx$; adeoque $dp = bx^u dx : Nx$, & $p = f(bx^u dx : Nx)$, & $y = pq = Nxf(bx^u dx : Nx)$ (*).

Tentamen resolutionis Æquationis

$$dy = yydx + x^u dx$$

Fiat $y = pq$, erit $dy = pdq + qdp = p^2 q^2 dx + x^u dx$. Pone $pdq = p^2 q^2 dx$, erit $dq : q^2 = p dx$, & $— 1 : q = sp dx$; $q = — 1 : sp dx$; ac $— dp : sp dx = x^u dx$. Pone $z = sp dx$; $dz : dx = p$; $ddz : dx = dp$; $— d dz : z dx = — dp : sp dx = x^u dx$; $— d dz : z = x^u dx^2$. Si generaliter $z^r d dz = x^u dx^2$, fiat hoc modo, $z = ax^m$; $dz = amx^{m-1} dx$; $ddz = (amm — am)x^{m-2} dx^2$; $a^r (amm — am)x^{m+m-1} dx^2 = z^r d dz = x^u dx^2$. Ergo $u = rm + m — 2$, $m = (u + 2) : (r + 1)$; $a^{r+1} (mm — m) = 1$, &c. (h). Si fit generaliter $z^r dz d dz = x^u dx^3$, erit $a^{r+1+1} (m^2+2 — m^2+1)x^{m+m+m-1-2} dx^3 = x^u dx^3$.

Posito $z = Nx$, erit $ddz : z = dx^2$.

S s s s s 2

Aliter

eritque $\left[\frac{1}{(\epsilon+z)(\gamma+z)(\delta+z) \&c.} \right]$
 $\frac{1}{(\epsilon-a)(\gamma-a)(\delta-a) \&c.} = A$. Et
 pariter, multiplicando primam æquationem per $\epsilon+z$, & fingendo $z = -\epsilon$, invenies $\frac{1}{(a-\epsilon)(\gamma-\epsilon)(\delta-\epsilon) \&c.} = B$, &c. Vide quæ de hoc argumento scripsere Viri Cl. LEIBNIUS, Job. BERNOULLIUS, in *Art.*

Erud. 1702, p. 210, & 1703, pag. 19. seq. atque MOIVREUS in *Miscell. Analyt.* Lib. II.

(*) Vid. N°. LXXII, pag. 733. Nota b.

(h) Sed in casu proposito, ubi $z^r dz = dx : z = z^{-1} dz$, est $r = — 1$; adeoque $r + 1 = 0$ & $m = (u + 2) : (r + 1) = \infty$ Methodus itaque non succedit.

No. CIII.

Aliter.

Pone $y = \frac{1}{z}$, erit $[dy =]dz : z (lz)^2 = dx : (lz)^2 + x^u dx = [yydx + x^u dx]$; hoc est, $dz = zdx + z(lz)^2 x^u dx$ (1).

Aliter.

Pone iterum $dz : z = dt$ (k), erit $dt = dx + tx^u dx$.

In æquatione $dy = yydx + xdx$, vel $ddz : z = xdx^2$; si ponatur $z = 1 - ax^3 + bx^3 - cx^{12} + ex^{16} - fx^{20}$ &c. invenitur

$$y = -dz : z dx = \left(+ \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{x^{11}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11} - \frac{x^{15}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15} + \frac{x^{19}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 19} \right. \\ \left. + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{x^{16}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16} \right. \\ \left. + \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2 \cdot 7} + \frac{2x^{11}}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{13x^{15}}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11} \right. \text{ \&c. } (1)$$

(1) Sed quo ducat hæc transmutatio, non video.

(k) Vel $y = \frac{1}{z}$, & $yy = 1 : z$, ac $dy = dt : z$. His enim substitutis, abit æquatio $dy = yydx + xdx$, in hanc $dt = dx + tx^u dx$.

(1) Semper facile est valorem ipsius y invenire per Seriem infinitam; & hunc in finem plures dederunt methodos Analytæ. V.gr. quoniam æquationis $dy = xdx$ integrale esset $y = \frac{1}{2}x^2$, pone $y = \frac{1}{2}x^2 + p$, & $dy = xdx + dp$, atque $yy = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}px^2 + pp$; quibus substitutis, æquatio $dy = yydx + xdx$ mutatur in $dp = \frac{1}{2}x^4 dx + \frac{1}{2}px^2 dx + p dx$. Pone $p = \frac{1}{3^2 \cdot 7}x^7 + q$, & substitutione

facta habebis $dq = \frac{2}{3^3 \cdot 7}x^{10} dx +$

$\frac{1}{3^4 \cdot 7^2}x^{14} dx + \frac{2}{3}qx^3 dx + \frac{2}{3^2 \cdot 7}qx^7 dx$

$+ q dx$. Pone itaque $q = \frac{2}{3^3 \cdot 7 \cdot 11}x^{11}$

$+ r$ &c. Igitur $y = \frac{1}{3}xx +$

$\frac{1}{3^2 \cdot 7}x^7 + \frac{2}{3^3 \cdot 7 \cdot 11}x^{11}$ &c.

Ast quæritur æquationis Solutio in terminis finitis. Eandem, multo post fata Auctoris, proposuit Cel. Com. RICCATUS, in *Art. Lipf. Supp.* Tom. VIII, pag. 72, quærens a Geometris quomodo in æq. $x^m dx = du + nudx : q$, dato ad libitum exponente

nente m , & facto $q = x^n$, determinandus sit valor exponentis n , ut succedat indeterminatarum separatio & æquationis constructio per quadraturas. Cui responsum protinus dedit Cel. Dan. BERNOULLI, *Act. E-rud.* 1725, pag. 473. Idem quoque, monente fratre Nicolao, animadvertit non separabiles solum, sed & integrabiles aut saltem ad circuli vel hyperbolæ quadraturam esse reducibiles æquationes, in casibus omnibus in quibus separabiles sunt indeterminatæ; id quod feliciter quoque effectum est a Cel. GOLDBATCH. Vid. *Act. Acad. Petrop.* Tom. I. pag. 185, 198. Horum inventa huc redeunt.

1. Sit æquatio proposita $ax^m dz - byy^{n-1} dz = dy$, quæ, faciendo $y = x : b$, & $ab = cc$, mutabitur in $ccz^m dz - xxz^{n-1} dz = dx$. Pone $x = cc : u$, & ea convertetur in hanc $ccz^{n-1} dz - uuz^m dz = du$, quæ cum priori similis omnino sit, nisi quod m & $n - 1$ transponuntur, concluditur quod, si aliqua relatio inter m & $n - 1$ locum det separationi indeterminatarum, relatio quæ nascitur scribendo m pro $n - 1$ & $n - 1$ pro m , eidem separationi locum dabit.

2. Pone rursus $x = Pz^p + ccz^q : t$, seu $xx = PPz^{2p} + 2Pccz^{p+q} : t + c^2z^{2q} : tt$, & $dx = Ppz^{p-1} dz + ccqz^{q-1} dz : t - ccz^q dt : tt$, factaque substitutione habebis $ccz^m dz - PPz^{2p+n-1} dz - 2Pccz^{p+q+n-1} dz$

$: t - c^2z^{2q+n-1} dz : tt = Ppz^{p-1} dz$ No. CIII.
 $+ ccqz^{q-1} dz : t - ccz^q dt : tt$. Sit
 $- PPz^{2p+n-1} dz = Ppz^{p-1} dz$,
 & $- 2Pccz^{p+q+n-1} dz : t = ccqz^{q-1} dz : t$, & invenies $p = -n$,
 $P = n$, & $q = -2n$. Unde, si ponas $x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : t$, æquatio proposita mutabitur in $ccz^m dz - c^2z^{-3n-1} dz : tt = -ccz^{-2n} dt : tt$, aut, dividendo per $-ccz^{-2n} : tt$, in $ccz^{-n-1} dz - tt^{m+2n} dz = dt$: vel, faciendo $\mu = -n - 1$, & $v = m + 2n + 1$, in $ccz^\mu dz - tt^{v-1} dz = dt$, quæ propositæ est similis.

3. Quoniam igitur proposita reducibilis est, quando $m = n - 1$, erit quoque reducibilis si $\mu = v - 1$, hoc est si $-n - 1 = m + 2n$, aut si $m = -3n - 1$.

Ergo etiam si $\mu = -3v - 1$, hoc est si $-n - 1 = -3(m + 2n + 1) - 1$, aut si $m = -\frac{5}{3}n - 1$.

Et pariter, si $\mu = -\frac{5}{3}v - 1$, hoc est, si $-n - 1 = -\frac{5}{3}(m + 2n + 1) - 1$, aut si $m = -\frac{7}{3}n - 1$. &c.

Generatim si $m = -(p+2)n : p - 1$, posito p numero impari quocunque.

4. Et per §. 1, transponendo m & $n - 1$, reducibilis etiam est æquatio, quando $n - 1 = -(p+2)(m+1) : p - 1$, hoc est, quando $m = -pn : (p+2) - 1$.

No. CIII. 5. Reductio autem ita peragitur.

$$\text{Sit } ccz^{-(p+2)n:p-1} dz - xxz^{n-1} dz \\ = dx. \text{ Pone } x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : t, \\ \& \text{ æquatio reducetur ad } ccz^{-pn:p-1} dz \\ - t t z^{(p-2)n:p-1} dz = dt.$$

$$\text{Pone igitur } t = \frac{p-2}{p} nz^{-(p-2)n:p} \\ + ccz^{-2(p-2)n:p} : s, \& \text{ habebis} \\ ccz^{-(p-2)n:p-1} dz - ssz^{(p-4)n:p-1} dz \\ = ds.$$

$$\text{Pone rursus } s = \frac{p-4}{p} nz^{-(p-4)n:p} \\ + ccz^{-2(p-4)n:p} : r, \text{ habebis} \\ \text{que } ccz^{-(p-4)n:p-1} dz - \\ rrz^{(p-6)n:p-1} dz = dx, \& \text{ perge eo} \\ \text{dem modo, donec uterque exponens} \\ \text{primi ac secundi termini fiat } -n:p-1, \\ \text{[huc tandem deveniturum est mani} \\ \text{festum, quia } p \text{ impar;]} \text{ eritque æqua} \\ \text{tio ultima } ccz^{-n:p-1} dz -$$

$$iiz^{-n:p-1} dz = di. \text{ In qua, si} \\ cc \text{ positiva sit quantitas, poni potest} \\ \text{primo } i \text{ constans, atque } di = 0, \\ \text{quo fit } cc - ii = 0, \text{ vel } i = c.$$

$$\text{Deinde erit } z^{-n:p-1} dz = \frac{di}{cc - ii} (cc \\ - ii), \text{ seu } \frac{p}{n} z^{-n:p} = \int \frac{di}{cc - ii}$$

$$= \frac{2}{c^2} \times \text{sectorem hyperbolæ, cujus} \\ \text{uterque semi-axis est } c, \text{ tangens } i. \\ \text{Igitur } i \text{ vel est constans } = c, \text{ vel est} \\ \text{tangens sectoris æqual } \frac{pc^3}{2n} z^{-n:p} \\ \text{sumti in hyperbola æquilatera cujus} \\ \text{semi-axis } c.$$

At si cc negativa sit quantitas, i non potest poni constans, esset enim $= \sqrt{-c}$, hoc est, imaginaria: sed æquatio reducitur ad $z^{-n:p-1} dz = -di : (cc + ii)$, seu $-\frac{p}{n} z^{-n:p} = -\int \frac{di}{cc + ii} = -\frac{2}{c^2} \times \text{sectorem circuli cujus radius } c, \text{ tangens } i. \text{ Est igitur } i \text{ tangens sectoris } \frac{pc^3}{2n} z^{-n:p} \text{ sumpti in circulo cujus radius est } c.$

Ergo qualiscunque sit c , erit i vel constans $\& = c$, vel data in z per quadraturam circuli vel hyperbolæ.

$$\text{Sed } x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : t \\ \& t = \frac{p-2}{p} z^{-(p-2)n:p} + \\ ccz^{-2(p-2)n:p} : s \\ \& s = \frac{p-4}{p} nz^{-(p-4)n:p} + \\ ccz^{-2(p-4)n:p} : r \\ \& c.$$

$$\& k = \frac{1}{p} nz^{-1n:p} + ccz^{-2n:p} : i$$

$$\text{Igitur } x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : \\ \left(\frac{p-2}{p} nz^{-(p-2)n:p} + ccz^{-2(p-2)n:p} : \right. \\ \left(\frac{p-4}{p} nz^{-(p-4)n:p} + ccz^{-2(p-4)n:p} : \right. \\ \left. \left(\frac{p-6}{p} nz^{-(p-6)n:p} + cc \& c. \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \frac{1}{p} z^{-n:p} + ccz^{-2n:p} : i \right) \right)$$

Quæ fractio composita ad simplicem facile reducitur.

EXEM-

EXEMPLUM. Sit $ccz^{-\frac{1}{2}n-1} dz$
 $— xxz^{n-1} dz = dx$, ubi $p = 5$;
 erit $x =$

$$nz^{-n} + \frac{ccz^{-2n}}{\frac{1}{2}nz^{-\frac{1}{2}n} + \frac{ccz^{-\frac{5}{2}n}}{\frac{1}{2}nz^{-\frac{1}{2}n} + \frac{ccz^{-\frac{3}{2}n}}{i}}}$$

$$= nz^{-n} + (\frac{1}{2}nrz^{-\frac{11}{2}n} + ccz^{-\frac{13}{2}n})cc:$$

$$(\frac{1}{2}nnrz^{-\frac{3}{2}n} + \frac{1}{2}nccz^{-n} + ccz^{-\frac{6}{2}n}).$$

6. Quod si autem æquatio propo-
 sita sit $ccz^{-pn:(p+2)-1} dz —$
 $xxz^{n-1} dz = dx$, ponatur statim
 $x = cc : y$, ut fiat $ccz^{n-1} dz —$

$yyz^{-pn:(p+2)-1} dz = dy$, seu, No. CIII.
 [faciendo $— pn:(p+2) = m$]
 $ccz^{-(p+2)m:p-1} dz —$
 $yyz^{m-1} dz = dy$, quo ipso ad prio-
 rem formam reducta est; & erit $x =$
 $cc : y = cc : (mz^{-m} + ccz^{-2m} :$
 $(\frac{p-2}{p}mz^{-(p-2)m:p} &c.))$

7 Denique non omittendum Cel.
 EULERUM in *Actis Acad. Petrop.*
 Tom. VI, pag. 231, dedisse æqua-
 tionis hujus constructionem univer-
 salem, singulari quadam & sibi pro-
 pria methodo, sed nimium longa
 quam ut hic inseri possit.

ARTICUL. XIII.

De Celeritate & Declinatione [Dérive] Navis.

SI [Fig. 13] AC, Navis cujus prora directa in D; AB, Na-
 vis cujus prora directa in M; AD, directio venti, quem
 Velum in utraque Nave excipiat ad angulos rectos; AF, cursus
 navis AB.

Esto Sinus totus, & simul celeritas venti = AD = a
 Celeritas navis AC = AE = y, AL = p Longit. navis = g
 — — navis AB = AF = z, AM = q = √(aa - pp) Latitudo = b
 Demissa ex F in AD perpendiculari FG, erit AG quantitas
 qua

No. CIII. qua navis AB se subducit vento; adeoque GD celeritas reliqua in navem efficax, uti $ED = a - y$, celeritas venti agens in navem AC.

LEMMA FUNDAMENTALE.

In maximis Navium celeritatibus, resistentiæ aquæ sunt ut vires quibus Naves impelluntur in eam partem e qua ipsis resistitur (*).

Resistentiæ autem componuntur ex lateribus Navium aquæ occurrentibus, & quadratis celeritatum Navium in illas partes ad quas resistuntur (b).

Vires vero, ex quadratis celeritatum venti in Naves agentium, & reciprocis sinibus angulorum venti & plagarum ad quas resistitur.

Jam cum celeritas Navis AB sit AF, erit celeritas illa qua tendit versus L = AH, atque illa qua tendit versus M = AI. Unde, per Lemma præcedens, erit [vocando quantitates ut supra dictum] $g : b + AH^2 : AI^2 = GD^2 : GD^2 + p : q$, id est, $gAH^2 : bAI^2 = p : q$, seu $AH \sqrt{g} : AI \sqrt{b} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$, id est, $AH : AI = \sqrt{(p : g)} : \sqrt{(q : b)} = \sqrt{pb} : \sqrt{qg}$; adeoque si $p : q = b : g$, erit $AH : AI = p : q$. Unde constat, si DA in directum ipsi BA diagonali Navis, hoc est, si $AM : MD = \text{long. Navis} : \text{latitud. Navis}$, lineam AF coincidere cum ipsa AD.

Porro, cum inventum sit $AH : AI = \sqrt{pb} : \sqrt{qg}$, erit $AH^2 : AI^2 = pb : qg$ & $AF^2 [AH^2 + AI^2] : AH^2 = pb + qg : pb$, & $AF [z] : AH = \sqrt{(pb + qg)} : \sqrt{pb}$, unde $AH = z \sqrt{pb} : \sqrt{(pb + qg)}$. Pariter $AF^2 : AI^2 = pb + qg : qg$ & $AF [z] : AI = \sqrt{(pb + qg)} : \sqrt{qg}$; unde $AI = z \sqrt{qg} : \sqrt{(pb + qg)}$.

Sed

(*) Sunt enim, in casu velocitatum maximarum, resistentiæ æquales viribus impellentibus. Nam si vis superaret resistentiam, auferetur navis celeritas, atque ideo non esset

maxima, contra hypothesim.

(b) Sequitur ex principiis Mechanicis. Vid. Num. LXVI, pag. 659, & N^o. LVI, Nota u, pag. 562.

Sed AF [z]: AH [z√ph: √(ph+qg)] = Sinus totus [a]: Si. No. CIII. num ang. FAI [a√ph: √(ph+qg)]. Hinc, quia Sinus anguli DAM = p quoque datur, dabitur quoque Sinus complementi anguli residui FAD, quippe qui æquatur summæ rectanguli sub finibus rectis angulor. DAM, FAI, & rectanguli sub finibus complementorum eorundem divisæ per radium (c). Invenietur ergo Sinus complementi ang. FAD = (p√ph + q√qg): √(ph+qg). Unde Sinus totus [a]: Sinum compl. anguli FAD [(p√ph + q√qg): √(ph+qg)] = AF [z]: AG [(pz√ph + qz√qg): a√(ph+qg)], & GD [AD — AG] = (aa√(ph+qg) — pz√ph — qz√qg): a√(ph+qg). Quare, per Lemma præmissum, Latit. Navis AC [h]: Latit. Navis AB [h] + Quad. celerit. Navis AC [yy]: Quad. celerit. Navis per AM [qgzz:(ph+qg)] = ED² [(a — y)²]: GD² [(aa√(ph+qg) — pz√ph — qz√qg)²]: (aaph + aaqg) + AD [a]: AM [q], hoc est yy: $\frac{qgzz}{ph+qg} = a(a-y)^2: \frac{q(aa\sqrt{ph+qg} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg})^2}{aaph + aaqg}$. Unde yy: gzz = a³(a — y)² (aa√(ph+qg) — pz√ph — qz√qg)²; seu y: z√g = (aa — ay)√a: aa√(ph+qg) — pz√ph — qz√qg, vel y: z = (a: — ay)√ag: aa√(ph+qg) — pz√ph — qz√qg; unde z = aay√(ph+qg): ((aa — ay)√ag + py√ph + qy√qg). Hinc y: z = (aa — ay)√ag + py√ph + qy√qg: aa√(ph+qg). Atqui, per antea demonstrata (d) y = a√m: (√r + √m); unde z erit aa√(phm + qgm): (a√agr + p√phm + g√qgm). Jam in casu superiori p: q = h: g, reperitur z = a√m: (√ggr: √(gg + hh) + √m) > a√m: (√r + √m) = y. Unde Paradoxum fluit, quod tum Navis AB celeritas major sit per AF, quam ipse AC per AD (c).

Imo etiam si p: q = 2h: g, vel p: q < 2h: g, erit z > y.

NB. Si a = 1 = m, √r = 29, g = 10, h = 1, erit proxime z: y = 401: 400 (c).

Jac. Bernoulli Opera.

Ttttt

Additio

(c) Vid. N°. LXVII, pag. 668.

(c) Vid. N°. LXXII, pag. 738.

(d) N°. LXVI, pag. 659, & infra Art. XVIII.

Sed inito calculo reperio potius z:

y =

A D D I T I O
A D A R T. XIII.

Aliter & evidentius res ita concipitur: Si Navis AB moveatur per AF, tantumdem est, ac si quiescentem Navem aqua oblique secundum rectam FA allueret; quo pacto ejus latera premit vi ex lateribus & quadratis Sinuum obliquitatis composita, ut antea.

THEOREMA GENERALE.

Sit Figura quæcunque ABC [Fig. 14], ad quam allidat oblique fluidum EB; quærat BD directio media, per quam Figuræ post impulsum feratur: eritque hæc illa secundum quam conatu contrario impelli debet Figura, si motus sit sistendus. Igitur, reciproce, si Navis ABC impellatur a vento secundum rectam DB, resistetur ei secundum BE, hoc est, secundum hanc feretur Navis.

E quo principio supputari potest via cujuscunque Figuræ in fluido oblique impulsæ. Ex. gr. si Navis habeat figuram trianguli isoscelis ABC [Fig. 15], cujus prora sit A, & axis [la quille] AF, venti directio AH (*), navis via AG; sunt AD, AE perpendiculares ipsis AB, AC, & GD, GE perpendiculares ipsis AD, AE, sed HI, HL parallelæ ipsis AE, AD. Erit, per Lemma, $AD^2 : AE^2 = AI : AL = \text{Sin. ang. HAL} : \text{Sin. ang. HAI}$; hoc est, erit Quadr. Sin. ang. AGD [compl. GAD]: Quadr. Sin.

$$y = 201 : 200, \text{ quam proxime. Nam } \frac{1}{29+1} = \frac{1}{30} \text{ \& } z = \frac{1}{29 \times (200:201) + 1} = \frac{1}{603:600} \text{ quam prox. } = 201 : 200. \text{ Discrimen non est magni momenti.}$$

$$\frac{1}{29\sqrt{(100:101)+1}} = \frac{1}{29 \times (200:201) + 1}$$

$$\text{quam prox. } = \frac{201}{6001}. \text{ Igitur } z : y = 30 \times 201 : 600 = 6031 : 6001$$

(*) Per directionem venti hic non intelligitur linea venti, sed directio media vis motricis velum impellentis.

Sin. ang. AGE [compl. GAE] = Sin. ang. HAL: Sin. ang. No. CIII.
 HAL. Hinc si AH directio venti in directum est ipsi AI, erit
 via Navis AG in directum ipsi CA.

REGULA GENERALIS,

Pro declinatione Navium quarumvis figurarum.

Sit BAC [Fig. 16] Figura quæcunque, axis [la quille] AFI, aquæ directio CE [ex] angulum cum axe constituens GFP [γφω]; curvæ in C [x] perpendiculares CM [xμ]. Sunt autem AH = x, HC = γ, AC = s, FP = a, GP = p, FG = q = √(aa - pp). Erit GP [p]: FG [q] = CL [dy]: FL [qdy: p]; ED = qdy: p + dx, & εδ = qdy: p - dx. CD vel xδ [ds]: ED vel εδ [qdy: p ± dx] = Sin. ang. CED vel xεδ [p]: Sin. ang. ECD vel εxδ [$\frac{qdy \pm pdx}{ds}$]. Rursum, Quadr. Sin. tot.

[aa]: Quadr. Sin. ang. ECD vel εxδ [$\frac{(qdy \pm pdx)^2}{ds}$] = CD vel xδ [ds]: vim qua CD vel xδ premitur ab aqua ad perpendicularium CM vel xμ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdydx + ppx^2}{aads}$]. Repræsentetur

hæc vis per CM aut xμ, & resolvatur in duas, axi perpendicularem CN seu xv, & parallelam NM seu vμ; quo facto, crit CD vel xδ [ds]: LD vel λδ [dx] = CM vel xμ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdydx + ppx^2}{aads}$]: CN seu xv [$\frac{qqdx^2 \pm 2pndydx^2 + ppx^2}{aads^2}$].

Item CD vel xδ [ds]: CL vel xλ [dy] = CM vel xμ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdx^2 + ppx^2}{aads}$]: NM vel vμ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdx^2 + ppx^2 dy}{aads^2}$];

unde CN — xv = 4pqdx²dy: aads², & NM + vμ = (1qqdy² + 2ppdx²dy): aads² (6). Repræsententur omnia CN — xv, seu
 T t t t t t 2 4 p q

(6) Hoc ratiocinium non sine limitatione verum est. Supponit enim inte-

No. CIII. $\frac{4pq}{aa} \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$ per AS, & omnia NM + $\nu\mu$, seu $\frac{2qq}{aa} \int \frac{dy^3}{ds^2} + \frac{2pp}{aa} \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$ per ST; erit AT, per *Theor.* præced. directio venti, quæ cum data sit, vocatur AS : ST = a : g; unde fiet a : g = $\frac{4pq}{aa} \int \frac{dx^2 dy}{ds^2} : \frac{2qq}{aa} \int \frac{dy^3}{ds^2} + \frac{2pp}{aa} \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$. Ponatur $\int (dx^2 dy : ds^2) = m$, & $\int (dy^3 : ds^2) = n$, erit a : g = $\frac{4pqm}{aa} : \frac{2qqn + 2ppm}{aa} = 2pqm : qqn + ppm$; ideoque $2gmpq = anqq + ampp$, & substituto valore ipsius q, $2gmp \sqrt{(aa - pp)} = a^3 n - anpp + ampp = [\text{posito } m - n = r] a^3 n + arpp$, & quadrando $4aagmmpp - 4ggmmp^2 = a^6 nn + 2a^4 nrpp + aarrp^2$. Hinc $(aarr + 4ggmm)p^2 = (4aagmm - 2a^4 nr)pp - a^6 nn$, & $p^2 = \frac{4aagmm - 2a^4 nr}{aarr + 4ggmm} pp - \frac{a^6 nn}{aarr + 4ggmm}$; $pp = (2aagmm - a^4 nr \pm 2aagm \sqrt{(ggmm - aann)}) : (aarr + 4ggmm)$ & $p \pm a \sqrt{(2ggmm - aarr \pm 2gm \sqrt{(ggmm - aann)})} : \sqrt{(aarr + 4ggmm)}$.

integram Figuram BAC impulsui aquæ expositam esse ex utraque parte axis AFI; quod sæpius non contingit. Finge enim rectam ϕx , quæ parallela est directioni aquæ, tangere curvam in x; solus arcus Ax ab aqua premetur, reliqua parte Cx nullum impetum sustinente; dum ab altera parte axis, integer arcus AB impulsui aquæ exponitur: quo fit, ut abscissæ x & applicatæ y non habeant utrinque eundem valorem;

quippe pro ultima x in figura IAB sumi debet AI; sed in figura IAC duntaxat AH; quibus respondent ultimæ y, IB & Hx. Tali igitur in casu pro CN — x, non potest scribi $4pqdx^2 dy : aa ds^2$, nec $(2qqdy^3 + 2ppdx^2 dy) : aads^2$ pro NM + $\nu\mu$.

Sed pleniorum & faciliorem materiæ hujus tractationem vide in *Job. BERNOULLI Theoria Manuarie nauticæ*, Gallice scripta, Cap. IX. & seqq.

N^o. 103.

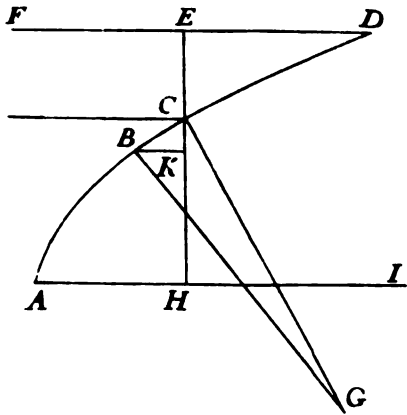


Fig. 8.

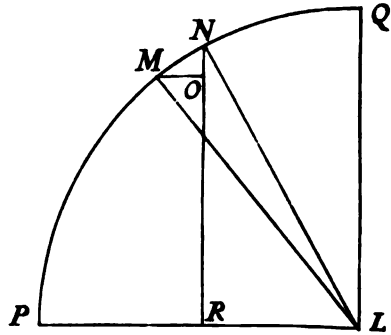


Fig. 9.

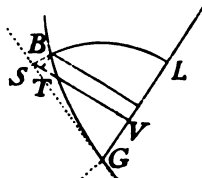
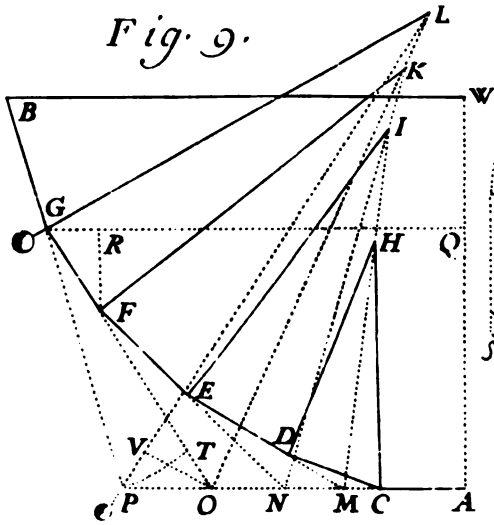


Fig. 10.

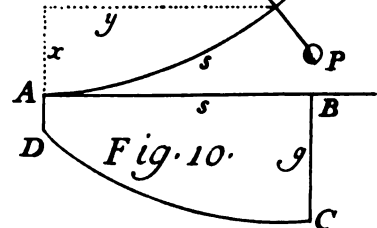
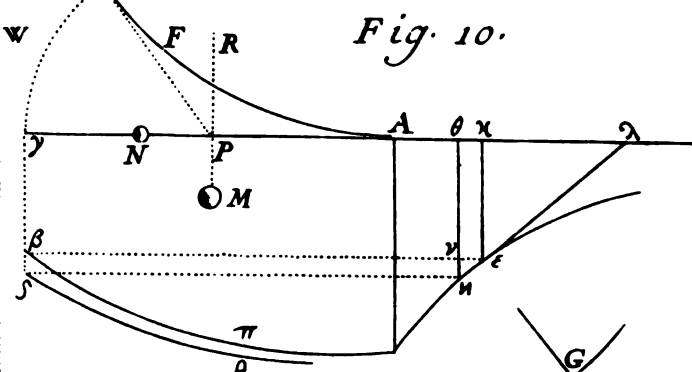


Fig. 10. 9.

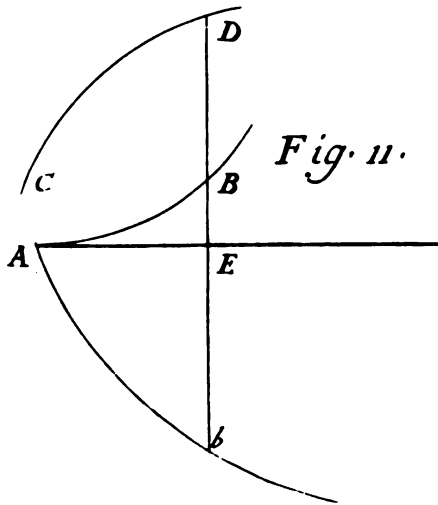


Fig. 11.

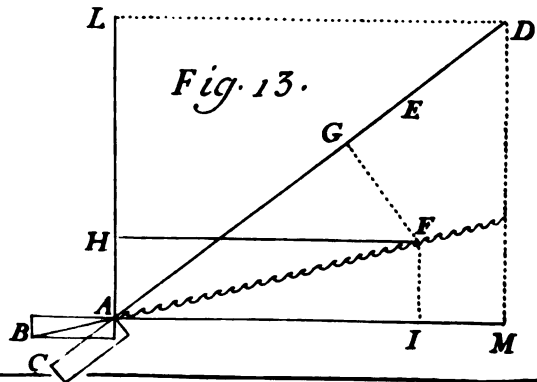


Fig. 13.

ARTICUL. XIV.

*Invenire Curvam quam format radius lucis
per aerem, qui inæqualis densitatis est,
ad oculum nostrum delatus.*

Confer. N^{us}. LXXV, pag. 774.

Primo investigandum qua proportione decreſcat verſus ſupe-
riora aeris denſitas. Hæc autem proportionalis eſt ipſi pon-
deri, hoc eſt, quantitati aeris incumbenti: quare ſi ACF [*Fig.*
17] ſit aeris altitudo, AB ejus denſitas in loco A , CD in loco
 C , &c. erit, utique ſpatium $ABEFA$ aeris pondus, ſeu quan-
titas incumbens loco A , & $CDEFC$ ejus pondus incumbens lo-
co C (*); unde $AB:CD = ABEFA:CDEFC$; quæ eſt
proprietas Logarithmicæ *, cujus applicatæ AB , CD , NO , &c.
reſpective proportionales ſunt arcis $ABEFA$, $CDEFC$, $NOEFN$,
&c.

Jam ſi IHG curva ſit radius refractus, ejusque æquales par-
ticulæ infinite parvæ IH , HG : refringi debet radius IH in H ,

T t t t t 3

ex

(*) Si enim CN ſit altitudo co-
lumnæ aeræ infinite parvæ, erit
quantitas aeris illa columna con-
tenti in ratione compoſita volumi-
nis, ſive altitudinis CN , & denſita-
tis CD ; hoc eſt, ut ſpatium infi-
nite parvum $CDONC$: per confe-
quens tota quantitas aeris loco C in-
cumbentis, ut omnia ſpatia $CDONC$,
 $NOQPN$, &c. id eſt, ut area
 $CDEFC$.

(*) Sit $AC = x$, $CD = z$, &
ſi CD [z] proportionalis ponatur
areæ $CDEFC$; hoc eſt ſi ponatur
 $bx = CDEFC$, erit $bdz = CDONC$
 $= zdx$. Igitur $z = bdz:dx$, quæ
eſt æquatio Logarithmicæ, cujus
ſubtangens = b . Nam $bdz:dx = z$,
dat $bdz.z = dx$, & integrando $k =$
 x . Igitur x [AC] eſt logarithmus
ipſius z [CD].

No. CIII.

ex lege refractionis, ita, ut sinus angulorum incidentiæ & refractionis HM , GL , reciproce sint ut aeris densitates CD , NO . Quare $MH \times NO = LG \times CD$; unde si $CG = y$, $CD = z$, $CN = dx$, HG vel $IH = ds$; erit $zdy = ads$ constanti rectangulo; vel posito $z = adz : dx$ [ex natura Logarithmicæ (^b)] erit $dz : dx = ds : dy$; unde cum ds semper major sit quam dy , curva non potest attolli altius, quam e regione loci ubi dx incipit superare dz (^c).

Si QP , ON , DC , non densitates, sed raritates aeris significarent; illæ istis reciproce proportionales forent; sed eadem foret Logarithmica, situ inverso, angustior infra &c. Sit igitur AF [Fig. 18] Logarithmica, cujus applicatæ AC , FG , &c. repræsentant aeris raritates in locis C , G , &c. CG ejus asymptotos, AC applicata æqualis subtangenti $= a$, CG abscissa $= x$, $GH = y$, $FG = z$. Jam quia sinus angulorum incidentiæ & refractionis sunt ut aeris raritates, & hæ ut applicatæ Logarithmicæ, erit ratio z ad dy constans $= a : ds$ (^d); hoc est, $z = ady : ds$, $dz = addy : ds$, proinde $z : dz = [\text{ob Logarithm.} = a : -dx] = dy : ddy$; quare $addy = -dxdy$. Ad quam æquationem construendam, resumatur æquatio $z = ady : ds$, sive $zds = ady$; unde $addy^2 = zds^2 = zdx^2 + zdy^2 = [\text{ob } zdx = -adz] aadz^2 + zxdy^2$, sive $addy^2 - zxdy^2 = aadz^2$, hinc $dy = -adz : \sqrt{aa}$

(^b) Potuisset poni generalius $z = b dz : dx$ pro æquatione Logarithmicæ; nam non necesse est, ut ejus subtangens sit æqualis quantitati a , quæ in æquatione præcedente $zdy = ads$ pro constante adhibita fuit. Hinc fluit Nota sequens c.

(^c) Quamvis ds semper major sit quam dy , curva tamen potest attolli altius quam e regione loci ubi dx incipit superare dz . Nam ex comparatione æquationum $zdy = ads$, &c

$z = b dz : dx$, orietur $dz : dx = ads : bdy$; ubi bdy potest superare ads , licet ds major sit quam dy .

(^d) Potuisset poni generalius $z : dy = b : ds$, ob rationem similem ei, quæ in Nota b allegatur; sed nihilominus eadem fuisset oritura curva refractionis; etiamsi altius attollatur quam e regione loci, ubi applicata Logarithmicæ AC æquatur subtangenti a , ut mox videbitur.

$\sqrt{(aa - zz)}$ & $ds = ady : z = -adz : z\sqrt{(aa - zz)}$ (^e), No. CIII. quod construitur describendo centro C, radio CA, quadrantem circuli AED, & faciendo GH = arcui circuli AE; prorsus ut construitur Pseudo-Logarithmica Leibnitiana in *Actis Lips. A.* 1693. pag 254, [N°. LVI, pag. 570] adeo ut hæ duæ curvæ $addx = dy^2$, & $addy = dx dy$ sint eadem curva (^f).

C O R O L L A R I U M I.

Si ducatur HL parallela CE, tanget curvam (^g).

C O R O L L A R I U M II.

Si fiat EM = EB, CN = CB, MR parallela AN, erit RS = curvæ CH (^h).

PRO-

(^e) Ex comparatione æquationum $bdy = zds$, & $zdx = -adz$, oritur $bbdy^2 = zzds^2 = zzdx^2 + zxdy^2 = addx^2 + zxdy^2$, sive $(bb - zz)dy^2 = addx^2$. Hinc $dy = -adz : \sqrt{(bb - zz)}$, & $ds = bdy : z = -abdz : z\sqrt{(bb - zz)}$; & constructio curvæ talis: fit ch [Fig. 19] radius refractus ad altius Atmosphæræ punctum c; vocentur $cg = x$, $gh = y$, $fg = z$, $ac = b$; AC = a. Ad quadrantem circuli aed radio ac descripti, ducatur fbe axi DC parallela, fiatque ac: AC = arcus ae: applic. gh.

Dico autem, quod si cg sit = CG, applicata gh futura sit = GH. Nam si $cg = CG$, erit, ex natura Logarithmicæ, $ac[ec] : fg[bc] = AC[EC] : FG[BC]$; ergo triangu-
gula ecb, ECB sunt similia, & arcus ae, AE similes, id est, ac: AC

= ae: AE = ae: GH. Sed, ex constructione, ac: AC = ae: gh; ergo gh = GH, & curva ch eadem ac curva CH.

(^f) Quia in omni curva $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & [posita ds constante] $dxddx = -dyddy$, sive $ddx = -dyddy : dx$; hoc valore ipsius ddx in æquatione $addx = dy^2$ substituto, erit $-adyddy : dx = dy^2$, & per $-dy : dx$ dividendo $addy = -dx dy$.

(^g) Quia $ds = ady : z$, erit $ds : dy = a : z = AC[EC] : FG[BC]$; ergo angulus GHL = angulo BCE; per consequens HL parallela ipsi CE.

Hinc, quia maxima applicata curvæ CH est æqualis quadranti AED = rectæ CP, ducta per P axi CG parallela PQ erit asymptotos curvæ CH.

(^h) Recta ER bifecat angulum BEC.

No. CIII.

P R O B L E M A.

Data altitudine astri vera & apparente Ac & AE; ejusdem sub alia data altitudine Al refractionem lo invenire.

S O L U T I O.

Ductis ef, EF, lh, om, parallelis ipsi CD; sic ut nm sit = gF, erit lo quantitas quæsitæ refractionis; neque ad hanc inveniendam opus est curva CH; imo nec curva AF; dummodo enim fiat $Cb : CB = Cp : Cq$, hoc est, Sinus complementorum arcuum Ac, AE, Al, Ao, proportionales; plane ut fieri solet, ubi aer ubivis ejusdem densitatis esse supponitur (1).

BEC. Quia enim $AC = EC$, &, per constructionem, $CN = CB$, triangula ACN, ECB sunt similia & æqualia; per consequens angulus ad N rectus; &, ob AN, RM parallelas, etiam angulus RME est rectus, & quia porro facta est $EM = EB$, erunt triangula rectangula EBR, EMR, communem hypotenusam ER habentia, etiam similia & æqualia; quamobrem angulus BER = angulo MER. Jam vero $CN [z] : CA [a] = CM$ seu $CE - EM [a - \sqrt{aa - zz}] : CR [\frac{aa - a\sqrt{aa - zz}}{z}]$. Hinc

$$RS = l(CR : a) = l\left(\frac{a - a\sqrt{aa - zz}}{z}\right),$$

cujus logarithmi differentiale invenietur æquale $-aadz : z\sqrt{aa - zz} =$ elemento curvæ $ds = ady : z$.

A priori invenitur integrale elementi curvæ, ponendo $\sqrt{aa - zz}$

$$\begin{aligned} &= t; \text{ unde } -zdz = tdt; -dz \\ &= tdt : z; -dz : z = tdt : z \\ &= tdt : (aa - tt); -dz : z\sqrt{aa - zz} \\ &= dt : (aa - tt), \text{ vel } -aadz : \\ &z\sqrt{aa - zz} = aadt : (aa - tt) \\ &= \frac{1}{2}adt : (a + t) + \frac{1}{2}adt : (a - t), \\ &\text{ \& integrando } \int (-aadz : z\sqrt{aa - zz}) \\ &= [\text{quia crescentibus logarithmis hic decrescunt applicatæ logarithmicæ}] \frac{1}{2}l\frac{a-t}{a+t} = \frac{1}{2}l\frac{(a-t)^2}{aa - tt} \\ &= l\frac{a-t}{z} = l\frac{a - \sqrt{aa - zz}}{z}. \end{aligned}$$

(1) Quæ hic datur hujus Problematis solutio non est vera. Supponit enim Sinus complementorum altitudinis veræ & apparentis esse in constanti ratione, quod est falsum.

Sit [Fig. 19] punctum H astrum radians, O oculus, HOV angulus mensurans veram altitudinem astri supra horizontem, ang. TOV = SCR mensurans altitudinem apparentem;

rentem; quorum cosinus [posito sinu toto = AC] sunt OV × AC: HO & RC: posita autem HV invariabili, & VO variabili reperietur ratio inter prædictas quantitates RC & OV × AC: HO variabilis. Si enim vocentur AC = a = 1, RC = c, HV = GP = n, quæ cum, ex hypothefi, ponatur constans, erit [ex nat. Logarithm.] QP [RC] ad FG [BC] in ratione constanti, puta ut 1 ad m, unde BC = mz, arcus SD = f(dx: √(1 - zz)) = z + 1/5 z³ + 3/10 z⁵ + &c. arcus ED = f(mdz: √(1 - mmzz)) = mz + 1/5 m³ z³ + 3/10 m⁵ z⁵ + &c. Hinc VO = ES = ED - SD = AS - AE = (m - 1)z + 1/5 (m³ - 1)z³ + 3/10 (m⁵ - 1)z⁵, & HO² =

HV² + VO² = mn + (m - 1)² zz No. C: + 1/5 (m - 1)(m³ - 1)z⁴ + &c. Unde $\frac{OV \times AC^2}{HO^2} : RC^2 = (m - 1)^2 zz + \frac{1}{5} (m - 1)(m^3 - 1)z^4 + \&c. : mnzz + (m - 1)^2 z^4 + \frac{1}{5} (m - 1)(m^3 - 1)z^6 + \&c. = (m - 1)^2 + \frac{1}{5} (m - 1)(m^3 - 1)zz + \&c. : nn + (m - 1)^2 zz + \frac{1}{5} (m - 1)(m^3 - 1)z^4 + \&c.$ quæ utique non est ratio constans. Sed etsi non HV, sed HO distantia oculi ab astro, ponatur invariabilis, reperietur ratio inter OV × AC: HO & RC, sive [ob AC & HO constantes] inter OV [ES] & RC inconstans; quod non puto opus habere demonstratione.

ARTICUL. XV.

Invenire veram legem, secundum quam aeris densitas decrescit in altioribus Atmosphære locis, & simul determinare verum aeris atmosphærici pondus.

Curva radii, prout in præcedenti Articulo inventa fuit, fundatur in hypothefi, quod densitates aeris sint ut pondera illi incumbentia: hæc vero hypothefis cum, ob rationem quam jam in Tractatu de Grav. Æth. pag. 97, * attuli, præcise vera non
Jac. Bernoulli Opera. Vuuuuu non

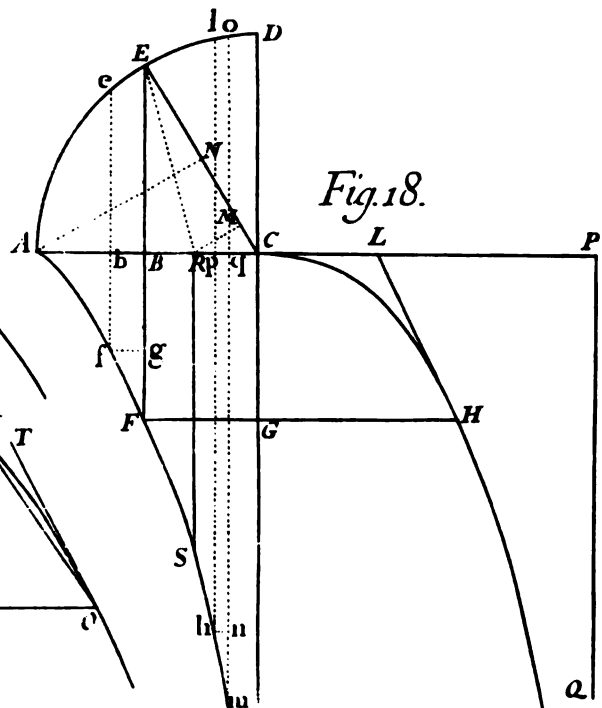
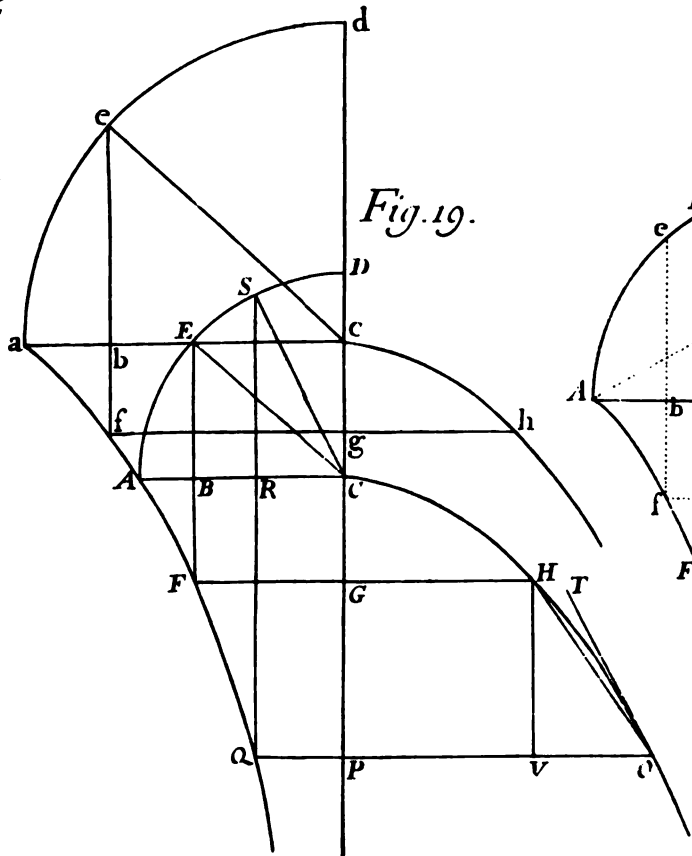
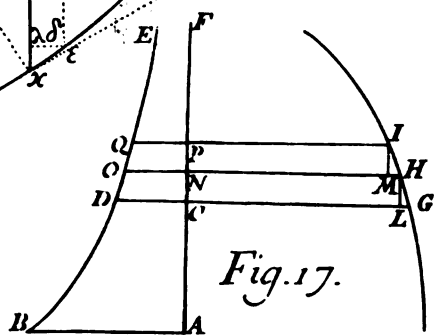
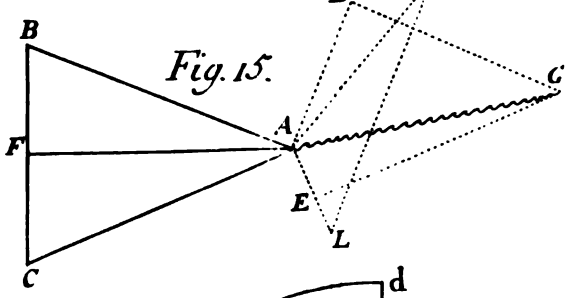
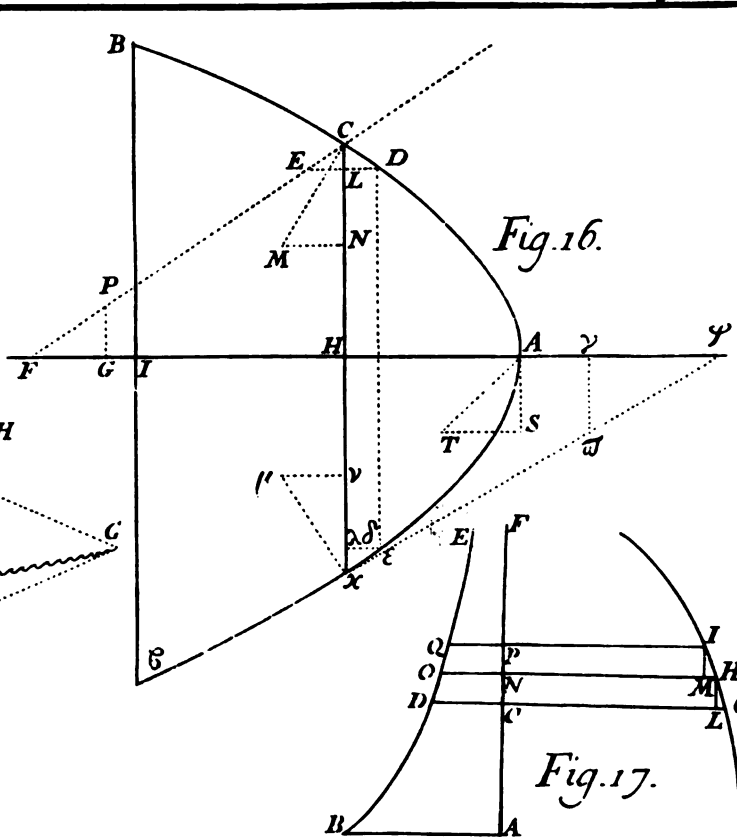
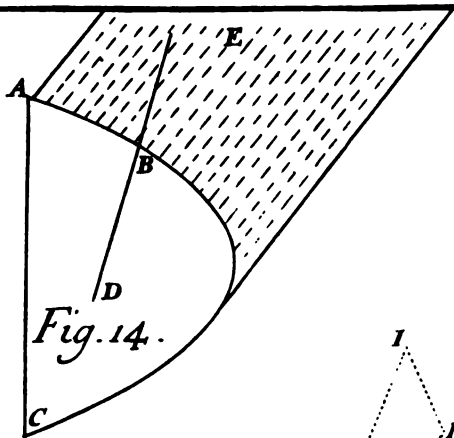
* Pag. 93, 94.

No. CIII. non sit, sed densitas major ad minorem sit in ratione tantilla minore, quam pondera ab illis sustentabilia; sequitur etiam prædictam curvam non omnino genuinam esse. Vera hypothesis est, quod si duo sint aeris volumina æqualia, eorum vires elasticæ, adeoque & pondera ab iis sustentabilia, sint in ratione composita ex directâ densitatum seu quantitatum materiæ terrestri, & reciproca quantitatum materiæ subtilis in illis voluminibus contentarum: puta si volumina sint a & a ; densitates, seu volumina a materia terrestri occupata, b & y ; volumina a materia subtili occupata, $a - b = c$, & $a - y$; elateria erunt ut $ab - by$ & cy : quare si b & y , quæ densitates aeris significant, repræsententur per applicatas curvæ alicujus [Fig. 20], quibus respondent abscissæ o & x ; & per consequens pondus totius aeris repræsentetur per spatium hac curva contentum, erit [quia pondera incumbentia sunt ut elateria] $ab - by : cy =$ spatium supra b , quod vocetur fb : spatium supra y , quod vocetur s ; hinc $\frac{fbcy}{ab - by} = \frac{fcy}{a - y} = s$, & differentiando $\frac{afc dy}{aa - 2ay + yy} = ds = -y dx$:positoque $\frac{ay}{a - y} = t$, seu $\frac{at}{a + t} = y$, adeoque $dy = \frac{aad t}{aa + 2at + tt}$, reperitur $\frac{afc dy}{aa - 2ay + yy} = \frac{fcd t}{a} = -y dx$, hoc est, $-dx = \frac{fcd t}{ay} = \frac{fcd t}{aa} + \frac{fcd t}{at}$.

C O N S T R U C T I O .

Fiat Logarithmica BGC¹ [Fig. 21], cujus asymptotos AF, basis AB = $ab : c$, applicata PG = t (*); tunc abscissa AL = $bf : a$, ductaque BL, demittatur GH parallela asymptotæ secans BL in I, & fiat PM = HI, eritque AM [= HG + HI = $fcd t$]

(*) Subtangens hujus Logarithmicæ debet esse = $fc : a$.



$= \int \frac{fcdt}{at} + \int \frac{fcdt}{aa}] = x$. Deinde fiat ut $a+t$ ad a , ita t ad MN, quæ erit y .

Quia vero $\int \frac{fcdt}{at} dx$, id est, spatium NDFM, sive s , est $= \frac{fcy}{a-y} = \frac{fct}{a}$, patet decrefcentibus æquabiliter spatiis, seu ponderibus incumbentibus sursum versus, seu denique altitudinibus mercurii in Barometro, decrefcere quoque æquabiliter ipsa t , cum f , c , & a sint constantes: unde elevationes locorum ad datas mercurii altitudines sic habentur: Posita $\frac{ab}{c} - t = HB =$

$$z, \text{ seu } \frac{ab}{c} - z = t, \text{ erit } \frac{fcdt}{at} = \frac{fccdz}{aab - acz} = \frac{fc}{a} \left(\frac{cdz}{ab} + \frac{cczdz}{aabb} + \frac{c^2zdz}{a^2b^2} + \frac{c^3z^2dz}{a^3b^3} + \&c. \right).$$

Hinc $\int \frac{fcdt}{at} = [HG] = \frac{fc}{a} \left(\frac{cz}{ab} + \frac{cczz}{2aabb} + \frac{c^2z^2}{3a^2b^2} + \frac{c^3z^3}{4a^3b^3} + \&c. \right)$, & quia $\int \frac{fcdt}{aa} = \int \frac{fcdz}{aa} = \frac{fcz}{aa} = HI$, erit $x = AM = HG + HI = \frac{fc}{a} \left(\frac{cz}{ab} + \frac{cczz}{2a^2b^2} + \frac{c^2z^2}{3a^2b^2} + \&c. \right) + \frac{fc}{a} \times \frac{z}{a} = \frac{fc}{a} \times \left(\frac{z}{a} + \frac{cz}{ab} + \frac{cczz}{2a^2b^2} + \frac{c^2z^2}{3a^2b^2} + \&c. \right)$

Si densitates aeris ponderibus incumbentibus essent præcise proportionales, hoc est, si curva END esset Logarithmica, fieret $x = f \times \left(\frac{z}{a} + \frac{z}{b} + \frac{zz}{2bb} + \frac{z^3}{3b^3} + \&c. \right) = f \times \left(\frac{z}{b} + \frac{zz}{2bb} + \frac{z^3}{3b^3} + \&c. \right)$ quia tum b est infinities minor a , c vero ipsi a æqualis ^(b).
 Vuuuuu z Quare

(b) In hac hypothesi, spatia a materia subtili occupata, id est, $a - b$ vel c , & $a - y$, debent esse in ratione æqualitatis, ut elateria sive pondera incumbentia sint proportionalia

densitatibus, id est, $ab - by : cy = b : y$; quod non potest esse, nisi b & y sint infinities minora quam a , & per consequens $a = c$.

No. CIII. Quare posita gravitate mercurii ad gravitatem aeris ut 10800 ad 1, sive ut 900 ped. ad 1 poll. si altitudo mercurii in tubo prope Terram sit pollicum 30, erit altitudo æquipollens aeris [qui sit ubique densitatis b] hoc est $f = 30 \times 900 = 27000$ pedum. Et quia t sunt proportionalia ponderibus, seu altitudinibus mercurii, decrescat maxima t , seu $ab:c$, per intervalla æqualia, pro ratione 30 pollicum mercurii; eruntque ordine ipsa t ; $\frac{30ab}{30c}$, $\frac{29ab}{30c}$, $\frac{28ab}{30c}$, $\frac{27ab}{30c}$, &c. & ipsa x ; 0, $\frac{ab}{30c}$, $\frac{2ab}{30c}$, $\frac{3ab}{30c}$, &c. adeoque ipsa $\frac{cx}{ab}$; 0, $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$, $\frac{4}{30}$, &c. quibus valoribus in duabus æquationibus successive substitutis, habetur primo $x = \frac{fc}{a} \left(\frac{b}{30c} + \frac{1}{30} + \frac{1}{2 \cdot 30 \cdot 30} + \frac{1}{3 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30} + \&c. \right)$; deinde $x = \frac{fc}{a} \left(\frac{2b}{30c} + \frac{2}{30} + \frac{4}{2 \cdot 30 \cdot 30} + \frac{8}{3 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30} + \&c. \right)$, hoc est, [quia $a = b + c$] $x = \frac{f}{30} + \frac{fc}{2a \cdot 30 \cdot 30} + \frac{fc}{3a \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30} + \&c. \right)$; item $x = \frac{2f}{30} + \frac{4fc}{2a \cdot 30 \cdot 30} + \frac{8fc}{3a \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30} + \&c. \right)$; quæ Series conflantur ex terminis progressionis harmonicæ $\frac{fc}{2a}$, $\frac{fc}{3a}$, $\frac{fc}{4a}$, &c. & terminis progressionis geometricæ, cujus primus terminus est ratio differentię altitudinis mercurii maximæ & datæ ad maximam. Unde sequentes fluunt Tabulæ (*), quibus ex data altitudine mercurii

(*) Hæ Tabulæ sine seriebus per Tabulas Logarithmorum construi possunt. Etenim si fiat ut 0.4342945 [subtangens Logarithmicæ Tabularis] ad $fc : a$; ita $l(ab : ct)$ ad numerum quartum; erit hic numerus quartus $= f(-fcdt : at)$ HG, & quia $HI = f(-fcdt : aa)$

$= (fab - fct) : aa$, erit $x = AM = HG + HI = \frac{fc}{a} l \frac{ab}{tc}$:
 $0.4242945 + \frac{fab - fct}{aa} =$ [quia
 posito numero pollicum ad quem altitudo mercurii ascendit $= m$, est
 $t =$

mercurii cognoscitur altitudo loci; prior est *Edmundi HALLEYI*, No. CIII. quæ densitates aeris ponderibus statuit proportionales; altera nostra, in hypothefi quod $c = 100b$, prout in *Tractatu de Gravitate Æther.* circiter reperi *: hæc vero Tabula ex altera nullo * pag. 94. negotio conficitur; nam dummodo ex altitudine loci *Halleyana* subtrahatur $\frac{1}{30}f$ [$\frac{2}{30}f$, $\frac{3}{30}f$, &c.] fiatque ut a ad c ita residuum ad numerum addendum ipsi $\frac{1}{30}f$, [$\frac{2}{30}f$, $\frac{3}{30}f$, &c.] erit summa nostra loci altitudo in eadem mercurii altitudine (^d).

$$t = mab: 30c] \frac{f^c}{a} \times l \frac{30}{m}: 0.4342945$$

+ (30 — m) fb: 30 a. In hypothefi vero densitatum ponderibus proportionalium; ubi $a = c$, & b infinities minor quam a , erit $x =$

$$f l \frac{30}{m}: 0.4342945; \text{ \& posita altitu-}$$

dine $f = 27000$ pedibus, ut supra, erit $f: 0.4342945 = 1:0.000016085$; unde talis exurgit regula pro Tabula *Halleyana*: Differentia Logarithmorum maximæ & datæ altitudinis mercurii, dividatur per numerum 0.000016085, quotiens monstrabit numerum pedum quæsitæ altitudini loci respondentem.

(^d) Si enim ex altitudine *Halleyana* $f l \frac{30}{m}: 0.4342945$ subtrahatur

(30 — m) f: 30, & residuum multiplicetur per $c: a$, proveniet $\frac{f^c}{a}$

$$l \frac{30}{m}: 0.4342945 - (30 - m) fc:$$

30 a; cui si addatur (30 — m) f:

$$30, \text{ habebitur } \frac{f^c}{a} l \frac{30}{m}: 0.4342945$$

$$+ (30a - 30c - ma + mc) f:$$

$$30a = [ob a - c = b] \frac{f^c}{a} l \frac{30}{m}:$$

$$0.4342945 + (30 - m) fb: 30a = \text{ altitudini quæsitæ.}$$

No. CIII.

<i>Altitudo mercurii.</i>	<i>Pollices.</i>	<i>Alt. loci.</i>	<i>Pedes.</i>	<i>Pedes.</i>
30	-	-	0	- - - 0
29	-	-	915	- - - 915
28	-	-	1863	- - - 1862
27	-	-	2845	- - - 2843
26	-	-	3864	- - - 3861
25	-	-	4923	- - - 4918
20	-	-	10947	- - - 10928
15	-	-	18715	- - - 18663
10	-	-	29662	- - - 29547
5	-	-	48378	- - - 48122
1	-	-	91831	- - - 91180
0,5	-	-	110547	- - - 109715
0,25	-	-	129262	- - - 128247
0,1	-	-	154000	- - - 152742
0,01	-	-	216169	- - - 214296
0,001	-	-	278338	- - - 275849

Ex data altitudine loci x , invenitur altitudo mercurii, seu y in Logarithmica, per hanc seriem $y = b - \frac{bx}{f} + \frac{bxx}{2ff} - \frac{bx^3}{2.3f^3} + \frac{bx^4}{2.3.4f^4}$ &c. (°) At in hypothefi noſtra altitudo mercurii difficilius ad Seriem

(°) Sensus non eſt altitudinem mercurii, quam vocavimus m , eſſe æqualem applicatæ y in Logarithmica, ſive Seriei $b - bx : f + bxx : 2ff - bx^3 : 6f^3 + \&c.$ ſed ope hujus Seriei inveniri poſſe altitudinem m . Quippe $ma b : 30c = t = ay : (a - y)$, unde $m = 30cy : (ab - by)$; in hypothefi vero *Halleyana*, ubi $a = c$, at b & y infinities minor quam a aut c , eſt $\frac{1}{30} mb = t = y$, ſive $m = 30y : b$; id eſt $m = 30(1 - x : f + x^2 : 2f^2 - x^3 : 6f^3 + x^4 : 24f^4 - \&c.)$. Ipa vero Series ſic facile invenitur: Refumatæ æquatio generalis $-ydx = fcdt : a$, quæ in hypothefi *Halleyana* degenerat in hanc $\frac{1}{30} mbdx = \frac{1}{30} fbdm$ ſive $mdx + fdm = 0$. Ut valor ipſius m in Seriem convertatur per poteſtates ipſius x aſcendentem, conſiderandum eſt in caſu ubi $x = 0$, eſſe $m = 30$, adeoque primum terminum Seriei debere eſſe $= 30$,

Seriem reducitur (f).

No. CIII.

= 30, reliquis terminis in hoc casu evanescentibus; sint igitur reliqui termini = $Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + Dx^\delta + \&c.$ eritque $mdx + fdm = dx \times (30 + Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + \&c. + a f A x^{a-1} + c f B x^{c-1} + \gamma f C x^{\gamma-1} + \delta f D x^{\delta-1} + \&c.)$ ubi statim apparet, ut termini singuli utriusque Seriei fiant homogenei & ipsorum coefficientes simul = 0, debere esse $a - 1 = 0, c - 1 = a, \gamma - 1 = c, \delta - 1 = \gamma, \&c.$ item $a f A + 30 = 0, c f B + A = 0, \gamma f C + B = 0, \delta f D + C = 0$, quæ est ipsa lex, secundum quam progreditur Series $30(1 - x : f + xx : 2ff - x^3 : 6f^3 + x^4 : 24f^4 - \&c.)$. Sed & absque ope Seriei per Tabulas Logarithmorum invenitur valor ipsius m ; ostendit enim æquatio supra inventa $x = fl \frac{30}{m} : 0.4342945$, quod

fit f [27000 ped.] ad subtangentem Logarithm. Tabularis [0.4342945] sive 1, ad 0.000016085, ut altitudo loci data x ad differentiam logarithmorum maximæ & quæsitæ altitudinis mercurii.

(f) In hac hypothefi altitudo mercurii m sic ad Seriem reducitur. Sumatur æquatio generalis $— ydx = fcdt : a$, sive $— dx = fcdt : aa + fcdt : at$, aut $aatdx + fca dt + fctdt = 0$; hic, in casu $x = 0$, debet esse $t = AB = ab : c$; adeoque si valor ipsius t generaliter per Seriem est exprimendus, cujus termini progrediantur per potestates ipsius x ascendentes, ejus primus terminus debet esse $ab : c$. Ponantur reliqui $Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + Dx^\delta + \&c.$ & æquatio transformabitur in sequentem :

$$\left. \begin{aligned} aatdx &= aadx. ab : c & + Ax^a & + Bx^c & + Cx^\gamma & + \&c. \\ fcdt &= fcdx. aAx^{a-1} & + cBx^{c-1} & + \gamma Cx^{\gamma-1} & + \delta Dx^{\delta-1} & + \&c. \\ fctdt &= \left\{ \begin{aligned} fabdx. aAx^{a-1} & + cBx^{c-1} & + \gamma Cx^{\gamma-1} & + \delta Dx^{\delta-1} & + \&c. \\ fcAdx. aAx^{2a-1} & + cBx^{a+c-1} & + \gamma Cx^{a+\gamma-1} & + \delta Dx^{a+\delta-1} & + \&c. \\ fcBdx. aAx^{a+c-1} & + cBx^{2c-1} & + \gamma Cx^{c+\gamma-1} & + \delta Dx^{c+\delta-1} & + \&c. \\ fcCdx. aAx^{a+\gamma-1} & + cBx^{c+\gamma-1} & + \gamma Cx^{2\gamma-1} & + \delta Dx^{\gamma+\delta-1} & + \&c. \end{aligned} \right\} = c \end{aligned}$$

Harum Serierum duæ, $fca dx$ ob $b + c = a$, conflantur in unam $(aAx^{a-1} + cBx^{c-1} + \&c.)$ & $faadx (aAx^{a-1} + cBx^{c-1} + \&c.)$ & $fctdt (\gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} + \&c.)$, quæ

No. CIII. quæ si pro illis substituatur, reperien-
tur termini minimarum dignitatum

$aadx. (ab : c), \& faadx. aAx^{a-1}$,
in quibus indices potestatum ipsius x
sunt 0 & $a-1$, qui debent esse
æquales, quia neuter horum termi-
norum solus potest esse $= 0$: Hinc
 $a=1$, & positis coefficientibus ho-
rum terminorum simul sumtis $= 0$,
invenietur $A = -ab : acf = -ab :$
 cf . His duobus terminis in æquatio-
ne deletis, sequuntur termini $aadx.$

$Ax^a + faadx. cBx^{c-1} + fcAdx.$

aAx^{2a-1} , quorum neuter solus
potest esse $= 0$: hinc $a=2$,
 $1=2a-1$, sive $c=2$, &
positis coefficientibus $= 0$, invenie-
tur $B = (-aaA - fcAA) :$
 $2faa$. Simili modo deletis his tri-
bus terminis, sequentur termini $aadx.$

$Bx^c + faadx. \gamma Cx^{\gamma-1} + fcAdx.$

$cBx^{a+c-1} + fcBdx. aAx^{a+c-1}$;
in quibus si indices potestatum po-
nantur æquales, reperietur $\gamma=3$,
& quia hi omnes termini simul sumti
debent esse $= 0$, erit $C = (-aaB -$
 $cfcAB - afcAB) : 3faa = (-aaB -$
 $3fcAB) : 3faa$. Porro sequentur

hi quinque termini, $aadx. Cx^\gamma +$
 $faadx. \delta Dx^{\delta-1} + fcAdx. \gamma Cx^{a+\gamma-1}$

$+ fcBdx. cBx^{2c-1} + fcCdx.$

$aAx^{a+\gamma-1}$, qui dabunt $\delta=4$,
 $D = (-aaC - \gamma fcAC - cfcBB -$
 $a fcAC) : 4faa$. Unde jam lex
continuandi Seriem manifesta est :
scil. indices dignitatum $a, c, \gamma, \delta,$
&c. progrediuntur secundum nume-
ros naturales 1, 2, 3, 4, &c. & co-
efficientes $A, B, C, D,$ &c. sequen-
ti modo ex præcedentibus forman-
tur. Ex. gr. Sit inveniendus coeffi-
ciens termini, ubi index dignitatis
est 7: Scribantur ordine coefficien-
tes terminorum præcedentium $A, B,$
 $C, D, E, F,$ iidemque utrogrado or-
dine, $F, E, D, C, B, A,$ & singu-
li in singulos multiplicentur, quo-
rum producta erunt $AF, BE, CD,$
 DC, EB, FA ; eritque $G = (-aaF -$
 $6fcAF - 5fcBE - 4fcCD -$
 $3fcDC - 2fcEB - fcFA) :$
 $7faa = -F : 7f = (AF + BE +$
 $CD) c : aa$. Sic quoque erit H
[coefficientis termini ubi index digni-
tatis est 8] $= (-aaG - 7fcAG -$
 $6fcBF - 5fcCE - 4fcDD -$
 $3fcEC - 2fcFB - fcGA) :$
 $8faa = -G : 8f = (AG + BF +$
 $CE + \frac{1}{2}DD) c : aa$. Invento va-
lore ipsius t per Seriem, si hic sub-
stituatur in æquatione $m = 3ct : ab,$
habebitur quoque m altitudo mercurii
quæ sita.

ARTICUL. XVI.

*Solutio Problematis de minimo Crepusculo.*Vid. N^{us}. LIII, pag. 515.

SIt BLZ [Fig. 22] Horizon; MER ejus parallelus 18 gradibus infra illum depressus; PDM Æquator; ZE, QR, ejus paralleli versus Polum Australem A; AQ, AZ & AR, AE circuli declinationum; ZP vel EV arcus declinationis paralleli ZE. Jam si Sol describens parallelum ZE efficiat Crepusculum minimum, erit mora Solis in ZE brevissima, adeoque differentia moræ Solis in parallelis contiguis ZE, QR nulla; cumque & moræ in ZS & TR differentia nulla sit, eodem quoque tempusculo SE & QT pertransibuntur; ac propterea ipsi arculi SE, QT, erunt ut celeritates quibus percurreuntur, hoc est, ut radii parallelorum ZE, QR, hoc est, propter infinite parvam distantiam parallelorum, dicti arculi erunt æquales, & quia SR, ZT quoque sunt æquales, & anguli ESR, ZTQ recti, erunt anguli SER, TQZ æquales, & proinde [posito EGB esse quadrantem (*) circuli maximi tangentem parallelum Horizontis MER in E] ob angulum VES rectum, anguli GEV & TZQ, sive DZP, quoque æquales, utpote complementa angulorum SER & TQZ; quare cum & anguli GVE, DPZ, sint recti, & arcus VE, PZ æquales, erunt arcus EG, DZ & anguli EGV,

Jac. Bernoulli Opera.

XXXXXX

ZDP

(*) Si ducatur per E arcus circuli azimuthalis EL, hic secabit ad angulos rectos Horizontem BL, parallelum ME, & circulum ma-

ximum BGE, qui parallelum in puncto E tangit; adeoque uterque arcus BL & BGE erit quadrans.

No. CIII. ZDP seu BDG æquales; unde cum in triangulo BDG sinus anguli BDG sit ad sinum anguli BGD \equiv sin. ang. VGE \equiv sin. ang. BDG, ut sinus arcus BG ad sinum arcus BD, erunt hi duo sinus æquales, & ipsorum arcus simul æquales semicirculo; & ducto arcu EL ad utrumque normali, unius defectus infra quadrantem, id est GE, æqualis alterius excessui supra quadrantem, id est, arcui LD; quo circa, cum & anguli trianguli LFD singuli sint æquales singulis trianguli FEG, erit & LF \equiv FE \equiv LE \equiv 9 gr. & quia, ut ostensum, LD \equiv GE \equiv DZ (^b), hinc in triangulis DLF, DPZ sic operaberis. Positis Sinu toto \equiv r, tang. LF, 9° \equiv a, sin. ang. LDF \equiv b, sin. compl. ejusdem \equiv c, & tang. compl. \equiv d, erit Sin. tot. [r]: tang. compl. ang. LDF [d] \equiv tang. LF [a]: sin. LD vel DZ [$\frac{ad}{r}$]; porro Sin. tot. [r]: sin. DZ [$\frac{ad}{r}$] \equiv sin. CDZ vel LDF [b]: sin. PZ [$\frac{abd}{rr}$] \equiv [quia d:r = c:b] $\frac{ac}{r}$; quare ut Sin. tot. ad tang. 9 gr. sic sin. compl. anguli Horizontis & Æquatoris, hoc est, sinus elevationis Poli ad sinum declinationis Solis australis quæsitæ tempore minimi crepusculi (^c). Per logarithmos ita:

A lo-

(^b) Istæ æqualitates arcuum LF, FE, & arcuum LD, DZ, paulo brevius demonstrari possunt. Sit CZ arcus circuli maximi ad Horizontem LDZ perpendicularis. Per naturam Problematis, ang. SER \equiv ang. TQZ, sive ang. EZD: substituantur his anguli qui ipsis æquales sunt, ob angulos rectos VES, FER, EZP & DZC, eritque ang. VEF \equiv ang. PZC: propterea, quia anguli ad V & P recti sunt, & arcus VE \equiv arcui PZ, erit etiam ang. VFE [LFD] \equiv ang.

PCZ, & arc. FE \equiv arc. CZ; hinc quia in triangulis rectangulis FLD, CZD, singuli anguli singulis sunt æquales; erunt etiam singula latera singulis æqualia, id est, LD \equiv DZ & LF \equiv CZ \equiv FE.

(^c) Eadem proportio aliter sic invenitur: Esto N punctum Nadir, NA arcus Meridiani, ductis quadrantibus azimuthalibus NEL, NZ, erit ang. NEA [\equiv SER] \equiv ang. NZA [\equiv TQZ], hinc si in

A logarithmo sinus elevationis Poli subtrahatur 0. 8002875, residuum erit Logarithmus sinus declinationis quæsitæ (4). No. CIII.

si in quadrante NZ abscindatur ZH = EN, & ducatur arcus circuli maximi AH, erit hic = NA, adeoque in triangulo isosceli HAN perpendicularis AI dividet basin NH [= NZ — ZH = NL — EN = EL] in duas partes æquales, quarum quælibet erit 9 gr. eritque in triangulo rectangulo NIA, ut sinus compl. NI ad sinum compl. NA, ita sinus totus ad sinum compl. arcus IA; sed, in triangulo rectangulo AIZ, est sinus totus ad sinum compl. arcus IA, ut sinus compl. arcus IZ [sinus arc. NI] ad sinum compl. hypotenusæ AZ [sinum arc. PZ]. Quamobrem ut sinus

compl. 9 gr. ad sinum compl. distantiae puncti verticalis a Polo, si-ve ad sinum elevationis Poli, ita sinus 9 gr. ad sinum declinationis quæsitæ, vel *alternando*, ut sinus compl. 9 gr. ad sinum 9 gr. vel ut sinus totus ad tangentem 9 gr. ita sinus elevationis Poli ad sinum declinationis quæsitæ.

(4) Sole versante in Hemisphærio Boreali non potest fieri minimum Crepusculum: nam arcus AE vel AZ non potest esse quadrante major; quia in triangulo rectangulo AIZ utrumque crus AI & ZI necessario est quadrante minus.

ARTICUL. XVII.

*Invenire relationem inter Evolutas
& Diacausticas.*

Confer. N^{us}. LVI. pag. 549.

Sit A [Fig. 23] punctum radians; BCG curva quæcunque, BC ejus portio infinite parva; BF, CF, curvæ perpendiculares; F punctum Evolutæ; AB, AC, radii incidentes protracti in R & S; BH, CH, ipsorum refracti cocuntes in puncto Diacausticæ H. Sit Sinus totus = r , sinus ang. incidentiæ ABM

XXXXXXXX 2

vcl

No. CIII. vel $FBR = y$, sinus ang. refractionis $FBH = z$; qui sinus cum ex natura refractionis sint in constanti ratione, puta a ad b , erit $z = by : a$. Sed, ex natura circuli, elementum arcus, cujus sinus est $= y$, radio existente $= r$, est $rdy : \sqrt{rr - yy}$, & elementum anguli ad centrum ab hoc arcu subtensi $= dy : \sqrt{rr - yy}$; cum igitur sinus anguli incidentiæ FBR sit $= y$, & angulus incidentiæ FCS infinite parva quantitate ab illo differat, erit $FBR - FCS = dy : \sqrt{rr - yy}$. Simili modo differentia angulorum refractionis $FBH - FCH = dz : \sqrt{rr - zz} = bdy : \sqrt{aarr - bbyy}$. Hinc $FBR - FCS : FBH - FCH = \sqrt{aarr - bbyy} : b\sqrt{rr - yy}$. Jam vero ang. $FBR = FBH + HBR = FBH + BSA + BAC = BFC + FCS + BAC$; ergo $FBR - FCS = BFC + BAC$; porro $FBH + BHC = BFC + FCH$, sive $FBH - FCH = BFC - BHC$; hinc $\sqrt{aarr - bbyy} : b\sqrt{rr - yy} = BFC + BAC : BFC - BHC = (BFC + BAC) \times b\sqrt{rr - yy} : \sqrt{aarr - bbyy}$; unde $BHC = BFC - \frac{b\sqrt{rr - yy}}{\sqrt{aarr - bbyy}} \times (BFC + BAC)$. Fingantur circuli CAM & $CBHQ$ tranſcuntes per puncta B, C, A , & B, C, H ; erit ang. $BAC = BMC$, & $BHC = BQC = BFC - b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times (BFC + BMC)$; atqui in infinite parvis BMC ; $BFC = BF : BM$, & $BQC : BFC = BF : BQ$; quare $BMC = BF \times BFC : BM$, & $BQC = BF \times BFC : BQ = BFC - b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times (BFC + BF \times BFC : BM)$; hoc est, $\frac{BF}{BQ} = 1 - b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times (1 + \frac{BF}{BM})$ vel $\frac{BM}{BQ} = \frac{BM}{BF} - b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times (\frac{BM}{BF} + 1)$, aut [dando lineis nomina, $BM = m$, $BQ = q$, $BF = f$, faciendoque $b : a = r : t$, ut sit $ar = bt$, & $\sqrt{aarr - bbyy} = b\sqrt{tt - yy}$, appellandoque $\sqrt{rr - yy} = s$, & $\sqrt{tt - yy} = n$,] erit $\frac{m}{q} = \frac{m}{f} - \frac{ms}{fn} - s$

— $\frac{s}{u}$, hoc est, $mfu = muq - msq - fsq$; adeoque $q = mf u$:
 $(mu - ms - fs) = [\text{si fiat } m : f = s : p, \text{ ut sit } mp = fs],$
 $mfu : (mu - ms - mp) = fu : (u - s - p) = BQ$; & quia si-
 nus anguli HBQ est $= z = by : a$, crit $r : \frac{by}{a} = q [BQ] : \frac{bqy}{ar}$
 $[QH]$; unde $BH = \sqrt{(BQ^2 - QH^2)} = \sqrt{(qq - \frac{bbqqyy}{aarr})}$
 $= q\sqrt{(aarr - bbyy)} : ar = bq\sqrt{(tt - yy)} : ar = qbu : ar = qu : t$.

C O N S T R U C T I O.

Ducta FR perpendiculari ad AB productam, applicetur ad eandem AR recta MT $= ma : b = ms : r$, [quod fit ducendo FL perpendicularem ad BH, & faciendo angulum AMT $= LFB$], fiatque ut TR ad TA, sic BF ad quartam BQ; demissa ex Q perpendiculari QH super rectam BH, erit H punctum in Diacaustica (*).

Xxxxxx 3

Alia

(*) Hæc Constructio ita demonstratur. Ob arcum BC infinite parvum, centra circulorum BAM & BHQ sunt in recta ad BC perpendiculari, id est in recta MBF, & anguli BAM, BHQ sunt recti; & quia sinus ang. ABM vel FBR est $= y$, existente sinu toto $= r$, crit $r : y = BM [m] : AM [my : r] = BF [f] : FR [fy : r]$. Hinc $AB = m\sqrt{(rr - yy)} : r = ms : r$, & $BR = f\sqrt{(rr - yy)} : r = fs : r$. Porro quia sinus anguli FBL $= \frac{by}{a}$, crit $r : \frac{by}{a} = BF [f] : FL [\frac{fby}{ar}] = \frac{fy}{t}$; unde $BL = f\sqrt{(tt - yy)} : t$

$= cu : t$. Sed, ob triang. LFB, AMT similia, est $LF [\frac{fy}{t}] : BF [f] = AM [\frac{my}{r}] : MT [\frac{mt}{r}]$; item $LF [\frac{fy}{t}] : BL [\frac{fu}{t}] = AM [\frac{my}{r}] : AT [\frac{mu}{r}]$. Hinc TR seu $AT - AB - BR [\frac{mu - ms - fs}{r}] : TA [\frac{mu}{r}] = BF [f] : \frac{mfu}{mu - ms - fs} = q = BQ$.

No. CIII.

A L I A C O N S T R U C T I O.

Fiat ang. $Rf_t = LFB$, seu tantum $Bf_t = LFR = RBH$; tum capiatur Br tertia proportionalis ad AB & BR ; fiatque ut tr ad tR , sic BF ad BQ , aut BL ad BH (b).

(b) Hæc Constructio, quæ exstat No. LVI, pag. 550, ita demonstratur. Ob triang. LFB , Rf_t similia, est $FL [\frac{fy}{t}] : BL [\frac{fu}{t}] = FR [\frac{fy}{r}] : tR [\frac{fu}{r}]$. Sed $AB [\frac{ms}{r}] : BR [\frac{fs}{r}] = BR [\frac{fs}{r}] : Br [\frac{ffs}{mr}]$.

Hinc tr , seu $tR - BR - Br [\frac{fu}{r} - \frac{fs}{r} - \frac{ffs}{mr}]$ seu $\frac{mfu - mfs - ffs}{mr} : tR [\frac{fu}{r}] = BF [f] : \frac{mfu}{mu - ms - fs} = q = BQ$.

A R T I C U L. XVIII.

Celeritates navis a quiete inchoatas usque ad maximam invenire.

Conf. Nⁱ. LVI, pag. 562; LXVI, pag. 658, & Art. XIII hujus.

POnatur [Fig. 24] celeritas venti $AB = a = MN = NT$. Primus celeritatis gradus navi quiescenti inductus sit NS , celeritas navis jam aliquo usque motæ $IE = y$; adeoque residua venti celeritas, qua in navem motam agit, $CE = a - y$; moles aquæ quovis instanti navis proræ resistentis $= dx = T$; superficies proræ ad subtensam veli ut 1 ad m ; moles aquæ æqualis superficiem veli $= m dx$; pondus aquæ ad pondus aeris ut p ad 1; moles aeris quovis instanti ad velum adiabentis $= mdx$:

$\equiv mdx : p \equiv M$; moles navis $N \equiv n$. Jam $M \times MN \equiv M + N$ No. CIII. in NS, adeoque $NS \equiv M \times MN : (M + N) \equiv$ [ob infinite ad sensum exiguam rationem $M : N$] $\frac{M}{N} \times MN \equiv \frac{amd x}{pn}$. Porro

quia incrementa celeritatum navis debent esse in ratione duplicata celeritatum venti, erit $AB^2 : CE^2 \equiv aa : (a - y)^2 \equiv NS$ [$\frac{amd x}{pn}$] : FH [$\frac{(a - y)^2 \cdot mdx}{apn}$], incrementum scil. futurum ce-

leritatis navis, nisi aqua resisteret. Fingatur navem incurrere celeritate NT $\equiv a$ in molem aquæ T, & post adlapsum ad aquam moveri una cum aqua celeritate TS; erit N in NT $\equiv N + T$ in TS, unde $TS \equiv N \times NT : (N + T)$; ideoque $a - N \times NT : (N + T) \equiv a - an : (n + dx) \equiv adx : (n + dx) \equiv$ [ob infinite ad sensum magnam rationem $n : dx$] $\equiv adx : n \equiv$ resistentiæ aquæ; quare cum resistentiæ sint ut quadrata celeritatum navis, erit $CI^2 : EI^2 \equiv aa : yy = \frac{adx}{n} : \frac{yydx}{an} \equiv$ resistentiæ quam

patitur navis celeritate IE lata $\equiv GH$; qua igitur demta ab FH $\equiv (a - y)^2 mdx : apn$, relinquitur FG $\equiv dy \equiv ((a - y)^2 m - pyy) dx : apn$. Quare, ad habendam maximam celeritatem navis, faciendum $dy \equiv 0$, hoc est $((a - y)^2 m - pyy) \equiv 0$, sive $(a - y)^2 m \equiv pyy$, & extrahendo radicem quadratam $(a - y) \sqrt{m} \equiv y \sqrt{p}$; seu $a \sqrt{m} \equiv y \sqrt{p} + y \sqrt{m}$, seu denique $y \equiv a \sqrt{m} : (\sqrt{p} + \sqrt{m}) \equiv$ [m existente haud multo majore minoreve 1, adeoque evanescente respectu p] $a \sqrt{m} : \sqrt{p}$. Ergo celeritates navium eodem vento motarum, cæteris paribus, sunt ut \sqrt{m} , seu ut radices subtensarum veli; non ut ipsæ subtensæ.

Posito $p : 1 \equiv 841 : 1$, & $m \equiv 1$, erit $y \equiv [a \sqrt{m} : (\sqrt{p} + \sqrt{m})] \equiv \frac{1}{35} a$; id est, ventus tricies celerior est celeritate navis maxima, ubi subtensa veli proræ latitudini æqualis.

Si directio venti AB [Fig. 25.] ad longitudinem navis CE sit obliqua, nec possit navis progredi per BD, sed tantum per BC; sitque $BD : BC \equiv 1 : b$, celeritas navis $\equiv z$, reperitur $dx : dx \equiv apn :$

No. CIII. = $apn : aabm - 2abmz + b^2mzx - pzx$ (*), adeoque pro celeritate maxima $z = a\sqrt{bm} : (\sqrt{p} + b\sqrt{bm})$; unde fit $y : z = \sqrt{p} + b\sqrt{bm} : \sqrt{bp} + \sqrt{bm}$; quæ ratio minor est ratione *Hugeniana* 1 ad \sqrt{b} . Vid. *Act. Lips. A.* 1695, p. 549 & 550. * *Histoire des Ouvrages des Savans Avr.* 1694.

(*) Est enim moles aeris ad velum quovis instanti sub angulo CDB adlabentis, sive $M = bmdx : p$, & celeritas qua navis se vento subducit = bz , hinc $aa : (a - bz)^2 = NS [abmdx : pn] : FH [(a - bz)^2 bmdx : apn]$, a qua si dematur $GH = 2zdx : an$, relinquetur $FG = dz = ((a - bz)^2 bm - pzx) dx : apn$.

* N^o. LXVI, pag. 658, 659.

ARTICUL. XIX.

Inventio curvæ, cujus tangens abscindit ex axe segmentum, quod ad tangentem habeat constantem rationem, puta ut n ad 1.

Conf. N^{us}. LVII, pag. 573 & seq.

Sit [Fig. 26 & 27] $DC = x$, $AD = nx$, $DB = y$, $CB = +y - nx$
 $\sqrt{(xx - yy)}$; $AB = \frac{-y + nx}{+y + nx}$ (*). Ex natura tangentis, diff.

CB

(*) Secundus casus, ubi $AB = nx - y$, duplici modo potest contingere, nempe non solum ubi curva rectæ positione datæ AB concavitatem opponit, crescentibus abscissis AB & decrescendentibus applicatis CB, ut in Fig. 27. Caf. 2. Sed & quando convexitatem ipsi opponit, & abscissæ AB crescant decrescendentibus applicatis CB, ut in Fig. 26. Caf. 2.

CB $\left[\frac{xdx - ydy}{\sqrt{(xx - yy)}} \right]$: diff. AB $\left[\frac{\pm dy}{\pm} \mp ndx \right] =$ CB $\left[\sqrt{(xx - yy)} \right]$: No. CIII.

BD $[y]^{(b)}$; seu $xdx - ydy: \frac{\pm dy}{\pm} \mp ndx = xx - yy: y$. Hinc

$xydx - yydy = \frac{\pm}{\pm} xxdy \mp nx dx \mp yydy \pm nyydx$; vel, in primo & tertio casu, $ydx = xdy \mp nx dx \pm nyydx: x$; hoc est, [posito $y = zx$, adeoque $dy = zdx + xdz$] $zx dx = zxdx + xxdz \mp nx dx \pm nzz dx$; hinc $0 = ndz \mp ndx \pm nzz dx$, & $dz: (1 - zx) = \pm ndx: x$. Est vero $dz: (1 - zx) = \frac{1}{2} dz: (1 + z) + \frac{1}{2} dz: (1 - z)$; unde elicitur $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = x^{\pm n}$, seu $(1+z):$

$(1-z) = x^{\pm 2n}$ (c), adeoque $1+z = x^{\pm 2n} - zx^{\pm 2n}$, id est, $z = (x^{\pm 2n} - 1): (x^{\pm 2n} + 1)$. Hinc $x^{\pm 2n} + 1: x^{\pm 2n} - 1 = x: zx = y$, hoc est, fiat ut aggregatum ipsius x ad potestatem $2n$ elevatæ & unitatis, ad eorundem differentiam, sic x ad y . Unde patet, si n sit numerus, curvam fore geometricam; si irrationalis, transcendentalem.

NB.

(b) In casu secundo differentiale ipsius AB debet sumi negative $= dy - ndx$, quia, crescentibus AB, decrescunt CB; & vice versa. Hinc æquatio media $xydx - yydy = -xxy + nx dx + yydy - nyydx$ est erronea; quippe, mutatis signis terminorum posterioris membri, provenit eadem æquatio ac in primo casu.

(c) Vel generalius $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{x^{\pm n}}{a^{\pm n}}$, assumpta a constante ad sup-

plenda homogenea. Est enim $f(\frac{1}{2} dz: (1+z)) + f(\frac{1}{2} dz: (1-z))$, id est, $\frac{1}{2} l(1+z) - \frac{1}{2} l(1-z) = f(\pm ndx: x) = \pm nlx \mp nla$, &c, sumtis logarithmorum numeris, $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} =$

$$\frac{x^{\pm n}}{a^{\pm n}}, \text{ sive } \frac{1+z}{1-z} = \frac{x^{\pm 2n}}{a^{\pm 2n}}, \text{ \&}$$

$$z = (x^{\pm 2n} - a^{\pm 2n}): (x^{\pm 2n} + a^{\pm 2n}) = (\pm x^{2n} \mp a^{2n}): (x^{2n} + a^{2n}).$$

No. CIII. NB. Primæ formulæ prorsus convenit media, si BD fiat major quam AD (^a).

(^a) Etiam si BD non sit major quam AD, id est, etiam si punctum A, unde sumitur segmentum a tangente resectum, non jaceat inter puncta B & D; tamen casus secundus eodem modo resolvitur ac primus, ut apparet ex Nota b.

ARTIC. XX.

Invenire Curvam, cujus curvado in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est, quæ ab appenso pondere flectitur in retam (^a).

Confer. N^{us}. LVIII, pag. 599 & 600.

Quia nominatis abscissa = x , applicata = y , arcu curvæ s , & posita ds constante, radius circuli osculatoris, curvedini reciproce proportionalis, est $dxds : -ddy$; habebitur, ex hypothesi, hæc æquatio $-aaddy = sdsdx$. Ponatur $sdx = adt$, erit $-addy = dsds$, & integrando $ads - ady = tds$ (^b), unde $ds = ady : (a - t)$, & $ds^2 = dx^2 + dy^2 = aady^2 : (aa - 2at +$
tt).

(^a) Hanc identitatem non inveni demonstratam.

(^b) Quantitas constans, in integratione æquationis $-aaddy = dsds$ addenda, generalius potest poni = bds , ut sit $bds - ady = tds$; unde emerget $ds = ady : (b - t)$, & $dy = (b - t) dx : \sqrt{(aa - bb$

$+ 2bt - tt)$, & iterum $ds [= ady : (b - t)] = adx : \sqrt{(aa - bb + 2bt - tt)}$, & tandem, positis reliquis ut antea, $a^2:2qq = f(ads : \sqrt{(aa - bb + 2bt - tt)})$. Sed propterea constructio non mutabitur, nisi quod EC non facienda sit = t , sed $a - b + t$.

$tt)$, id est, $(aa - 2at + tt) dx^2 = (2at - tt) dy^2$. Hinc dy No. CIII.
 $= (a - t) dx : \sqrt{(2at - tt)}$, & $ady : (a - t) = adx : \sqrt{(2at - tt)}$
 $= ds$. Jam quia $s dx = a dt$, erit differentiando [positis dx
 $\text{\aequalibus}^{(c)}$] $ds dx = addt$, seu $ds = addt : dx$; ergo $adx :$
 $\sqrt{(2at - tt)} = addt : dx$, sive $dx^2 = ddt \sqrt{(2at - tt)}$. Sit
 $qdt = adx$; erit, ob dx constantem, $qddt + dtdq = 0$, seu ddt
 $= - dtdq : q$, & $dx^2 = [ddt \sqrt{(2at - tt)}] = - dtdq \sqrt{(2at -$
 $tt) : q = qqdt^2 : aa$, hinc $- aadq : q^2 = dt : \sqrt{(2at - tt)}$ & $a^3 :$
 $2qq = f(adt : \sqrt{(2at - tt)})$.

C O N S T R U C T I O.

Fiat quadrans circuli AEDB [Fig. 28], radio AB = a . Sit
 EC = t , erit CD = $\sqrt{(2at - tt)}$, arcus ED = $f(adt : \sqrt{(2at$
 $- tt))$. In DC producta abscindatur CH = mediae proportio-
 nali inter AB & $aa : 2ED = q$; sumta EI = a , fiat rectangu-
 lum EM = [spatio ECHK = $sqdt = ax$, erit EP = x . Porro,
 ducta AN normali ad AD, ut sit CD [$\sqrt{(2at - tt)}$] : AD
 $[a] = AC [a - t] : AN = [\frac{aa - at}{\sqrt{(2at - tt)}}]$, & abscindatur
PQ =
Y y y y y 2

(c) Neminem debet morari, quod, differentiando æquationem $s dx = a dt$, dx sumatur constans, cum antea ds posita fuit constans in æquatione $- aaddy = sds dx$. Nam æquatio differentialis $s dx = a dt$, cum sit primi gradus, per se nullam quantitatem differentialem constantem supponit, adeoque in illa quælibet quantitas differentialis pro constante assumi potest. Sed etiam sine nova differentiatione potest res confici, & comparatio institui inter duas æquationes $s dx = a dt$, & $ds = adx : \sqrt{(2at - tt)}$, hoc modo. Per prio-

rem est $dx = a dt : s$, qui valor ipsius dx in altera substitutus præbet $ds = aadt : s \sqrt{(2at - tt)}$, sive $s ds = aadt : \sqrt{(2at - tt)}$, & integrando $\frac{1}{2} ss = f(aadt : \sqrt{(2at - tt)}) = ap$ [posito $f(adt : \sqrt{(2at - tt)}) = p$]. Hinc $s = \sqrt{2ap} =$ [per priorem æquationem] $adt : dx$; unde $dx = a dt : \sqrt{2ap}$; quæ æquatio eodem recidit ac ista $a^3 : 2qq = f(adt : \sqrt{(2at - tt)}) = p$, sive $q = \sqrt{a^3 : \sqrt{2p}} = aa : \sqrt{2ap}$; in qua, ob factam æquationem $qdt = adx$, supponitur $dx = qdt : a = adt : \sqrt{2ap}$.

No. CIII. $PQ = AN$, erit area $QPEL = f((aadx - astdx) : \sqrt{(2at - tt)}) = ay$; idcirco facta $ER = a$, & rectangulo $ES = QPEL = ay$; erit RS , seu $PT = y$; dum $EP = x$; adeoque punctum T in curva quaesita ET ; in quo puncto radius circuli osculatoris, sive $dxds$: — ddy erit q , & $sq = aa$ (^d).

(^d) Est enim $sdx = a dt$, & qdt vel $sq = aa$.
 $= adx$. Hinc $sqdtdx = aadtdx$,

A R T I C. XXI.

*Demonstratio analytica Constructionis mechanicarum curvarum omnium, ope Logarithmicæ & alterius curvæ algebraicæ per tractionem describendæ; quæ tradita est in Actis Lips. 1696, pag. 263. **

Sint [Fig. 29] $CG = AE = x$, $GD = u$, longitudo fili $FGH = AC = GE$, $GH = FE = p$, $DH = \sqrt{(pp - nu)}$; æquatio construenda $ady = tdx$; ubi t detur per x . Ex natura tangentis GH est diff. $HD \left[\frac{pdp - udu}{\sqrt{(pp - nu)}} \right]$: diff. $CD [dx + du] = HD [\sqrt{(pp - nu)}]$: $GD [u]$; hinc $updp - undu = ppdx - nudx + pdu - undu$, seu $updp = ppdx - nudx + pdu$. Sit $bu = pq$, & $du = (pdq + qdp)$: b erit $ppqdp : b = ppdx - ppqdx : b + p^2dq : b + p^2qdp : b$, sive $ppdx - ppqdx : b = -p^2dq : b$, aut $bbdx - qqdx = -bpdq$; seu $dx : p = -bdq : (bb)$

* N°. LXX, pag. 727.

(*bb* — *qq*) (^a). Pone *bb* — *qq* = *b*⁴: *rr*, erit, *dx*: *p* = — *dr*: No. CIII.

√(*rr* — *bb*). Pone *r* = (*zx* + *bb*): *zx*, erit *dx*: *p* = ± *dx*: *z*, seu *abdx*: *p* = ± *abd**z*: *z*. Fiat jam comparatio inter *idx* & *abdx*: *p*; item inter *ady* & ± *abd**z*: *z*, eritque *t* = *ab*: *p*, seu *p* = *ab*: *t*, & *dy* = ± *bd**z*: *z*, adeoque *y* = Log. *z*, vel = Log. *bb*: *z*, cum subtangens est *b*. Habetur autem *z* ex *p*,

u, *q*, & *r*; nempe *z* = $b\sqrt{\frac{p-u}{p+u}}$ (^b); quod suppeditat Constru-

ctionem paulo differentem ab ea, quæ præscribitur in dicto loco *Actorum Lipsf.* Fiet autem profus eadem Constructio, si statuatur æqualitas inter *idx* & *zabdx*: *p*, sicut inter *ady* & *zabdx*: *z*; tunc enim erit *p* = *zab*: *t*, & *y* = [ponendo subtangentem

Logarithmicæ *b* = 1] Log. *zx* = Log. $\frac{p-u}{p+u}$ = *l*(*p* — *u*) —

l(*p* + *u*); quod est id quod præcipit dicta Constructio.

(^a) Sine novis substitutionibus hæc quantitas — *bdq*: (*bb* — *qq*) resolvi potest in duo differentialia logarithmica — $\frac{1}{2}dq$: (*b* — *q*) & — $\frac{1}{2}dq$: (*b* + *q*); unde erit [ponendo *idx* = *zabdx*: *p*] — *abdq*: (*b* — *q*) = *bdq*: (*b* + *q*) = *ady*, & *y* = *l*(*b* — *q*) — *l*(*b* + *q*) = *l* $\frac{b-q}{b+q}$ [quia

q = *bu*: *p*] $l\frac{p-u}{p+u}$

(^b) Quia *q* = *bu*: *p*, est *bb* — *qq* = (*bbpp* — *bbuu*): *pp* = *b*⁴: *rr*. Hinc *r* = *bp*: √(*pp* — *uu*) = (*zx* + *bb*): *zx*, id est, *zx* = *zbpz*: √(*pp* — *uu*) — *bb*, & *z* = *bp*: √(*pp* — *uu*) ± √(*bbpp*: (*pp* — *uu*) — *bb*) = (*bp* ± *bu*): √(*pp* — *uu*) = $b\sqrt{\frac{p-u}{p+u}}$ vel $b\sqrt{\frac{p+u}{p-u}}$.

ARTICUL. XXII.

*Observatiuncula singularis ad praxin Calculi
differentialis, ejusque usus in radiis
osculi inveniendis.*

Confer. N^o. XCIV, pag. 888, & CI,
pag. 975.

SI latus quadrati minoris sit x , & majoris $x + dx$; erit quadratum minus xx , & majus $xx + 2xdx + dx^2$; adeoque differentiale ipsius xx est $2xdx + dx^2$; hoc est, [quia ordinarie dx infinities minus est ipso x] $2xdx$, omisso dx^2 . Sed ubi x infinities minor est ipsa dx , [quod ubique fit in scaturigine quantitatis fluentis x , quando minor x est absolute nihil, seu 0, & major x est $0 + dx$], patet $2xdx$ potius evanescere debere respectu dx^2 , adeoque differentiale ipsius xx non esse $2xdx$, sed potius dx^2 . Ex. gr. in quadrante circuli, posito radio r , & tangente minore y , majore $y + dy$; erit secans minor $\sqrt{(rr + yy)}$, & differentia secantium $ydy : \sqrt{(rr + yy)}$, quamdiu videlicet y est quantitas. Sed si applicatio fieri debeat ad initium quadrantis, ubi y est 0, & minor secans radius; erit secantium differentia, id est, differentia radii & proximæ secantis, sive lineola illa quæ designat conatum centrifugum corporis in circulo gyrantis, seu denique subtensa evanescens anguli contactus, non $ydy : \sqrt{(rr + yy)}$ sed $dy^2 : 2\sqrt{(rr + yy)} = dy^2 : 2r$. Fingatur quadrans hic applicari curvæ alicui BE [Fig. 30], ita ut punctum B sit in curvæ peripheria, BA curvæ perpendicularis, & BC coincidat cum tangente: patet si BD quoque cadat super ipsam curvam, seu si anguli contactus utrinque æquentur; fore hunc circumulum illum
ipsum,

ipsum, qui curvam hanc osculari dicitur: unde ad radium osculi inveniendum, nil aliud requiritur, quam ut subtensa anguli contactus quoque in ipsa curva [observata hac differentiandi regula] quærat, & deinde cum $dy^2 : 2r$ adæquetur, ad habendum r . Prius autem relatio punctorum curvæ respectu rectæ perpendicularis per datum punctum transcuntis quærenda hoc modo: Sint BE, CG [Fig. 31] duæ applicatæ, BF curvæ perpendicularis occurrens productæ CG in H, & CD normalis ipsi BF: vocentur AE = p , EB = q , EF = m , AF = $p + m = l$, BF = $n = \sqrt{(qq + mm)}$, AG = t , GC = z , BD = x , DC = y . Ob similitudinem triangulorum BEF, FGH, CDH; est EF [m]:

$$EB [q] = GF [t - l]: GH \left[\frac{qt - ql}{m} \right] = CD [y]: DH$$

$$\left[\frac{qy}{m} \right]; \text{ item } EF [m]: BF [n] = GF [t - l]: FH \left[\frac{nt - nl}{m} \right] =$$

$$CD [y]: CH \left[\frac{ny}{m} \right] = GC + GH = z + (qt - ql): m; \text{ unde}$$

$ny = mx + qt - ql$. Sed $BD + DH [x + qy: m] = BF + FH [n + (nt - nl): m]$; quare $nx + qy = mn + nt - nl = [ob l - m = p] nt - np$; hinc $t = p + (mx + qy): n$; quo valore in æquatione $ny = mx + qt - ql$ substituto, habetur $ny = mx + pq + (qqy + qmx): n - ql = mx - mq + (qqy + qmx): n$. Hinc $z = q + (nny - qqy): mn - qx: n = [ob nn - qq = mm] q + my: n - qx: n$. (*) Ergo in æquatione, quæ relationem t ad z exprimit, loco t & z ponantur eorum

(*) Ductis DO ipsi BE, & DP ipsi AG parallelis; ipsæ AG [t] & GC [z] facillime sic determinantur: Ob parallelas BE, DO, est BF [n]: EF [m] = BD [x]: EO $\left[\frac{mx}{n} \right]$. Item BF [n]: BE [q] = DF [n - x]: DO seu PG [q - qx: n], & ob triangula BEF, DPC

similia, BF [n]: BE [q] = DC [y]: DP seu OG $\left[\frac{qy}{n} \right]$; item BF [n]: EF [m] = DC [y]: CP $\left[\frac{mq}{n} \right]$ quare $AG = AE + EO + OG = p + mx: n + qy: n = t$, & $GC = PG + CP = q - qx: n + my: n = z$.

No. CIII. rum valores, ubi præter indeterminatas x & y non nisi constantes reperiuntur p, q, m, n . Hac ergo differentiata juxta specialem nostram regulam, invenitur ratio dx ad dy in ipso puncto B. Non vero opus est progredi in hoc negotio, nisi ad illa membra in quibus reperitur dy^2 , neglectis omnibus reliquis ubi est $dx dy$, dx^2 , dy^3 , &c.; cum hæc illo sint infinites minora.

Exemplum in Parabola.

Æquatio est $at = zx$; facta substitutione habetur $ap + (aqy + amx) : n = qq + (2qmy - 2qyx) : n + (mmy - 2qmx + qyx) : nn$, & differentiando $(aqdy + amdx) : n = (2qmdy - 2qydx) : n + mm dy^2 : nn$; & quia ex natura Parabolæ, ob $a = 2m$, destruant se mutuo $aqdy : n$ & $2mqdy : n$; fiet, his elisis, $amdx = -2qydx + mm dy^2 : n$, sive $mm dy^2 : n = amdx + 2qydx = 2mmdx + 2qydx = 2nndx$, hoc est, $dx = mn dy^2 : 2n^2$. Supra vero in circulo reperta fuit CD, seu $dx = dy^2 : 2r$. Quare $mm dy^2 : 2n^2 = dy^2 : 2r$, hoc est, $r = n^2 : mm$. Confer. *Acta Lips.* m. Jan. 1691, pag. 22*.

Generaliter pro omnibus Paraboloidibus cujusvis gradus: Esto $a^{s-1}t = z^s$; facta substitutione loco t & z , habetur $a^{s-1}p + (a^{s-1}qy + a^{s-1}mx) : n = q^s + (sq^{s-1}my - sq^s x) : n + \frac{s \cdot s - 1}{2} q^{s-2} mmy : nn$, &c. [nec enim opus est procedere ulterius]; ubi deletis utrinque $a^{s-1}qy : n$ & $sq^{s-1}my : n$, [propter $a^{s-1} = sq^{s-2}m$, ex natura Parabolæ], & differentiatis reliquis, fit $a^{s-1}mdx : n = -sq^s dx : n + \frac{s \cdot s - 1}{2} q^{s-2} mmdy^2 : nn$, seu $dx = \frac{s \cdot s - 1}{2} q^{s-2} mmdy^2 : (a^{s-1}mn + sq^s n) =$ [propter $q^s = a^{s-1}p$]

$$\frac{s \cdot s - 1}{2} q^{s-2} mmdy^2 : (a^{s-1}mn + sa^{s-1}pn) =$$
 [ob $a^{s-1} =$

59

$sq^{s-2}m$] $\frac{1}{2}(s-1)mdy^2 : (mn + spn) = [ex hyp.] dy^2 : 2r$; un- No. CIII. de habetur $r = (mn + spn) : (sm - m) = [ob sp = subtangentem Parabolæ, quæ vocetur u] (mn + un) : (sm - m) (b); quod hanc facillimam constructionem suppeditat. Ex puncto I, [Fig. 32] ubi tangens BI secat axem, excitetur axi perpendicularis IK, cui occurrat BF in K, erit $FK = sr - r = (mn + un) : m$. Conf. Constructio particularis in Parabola *Act. Lips.* 1692, p. 210 *, & generalis D. *March. HOSPITALII, Anal. Infin. parv.* p. 85.$

Hoc pacto radius osculi cujuscvis curvæ in ejus vertice cum x & $y=0$, & curva ad axem perpendicularis dicto citius invenitur. Ex gr. In Parabola, $ax = yy$; etenim differentiando habetur $adx = dy^2$, & $dx = dy^2 : a = dy^2 : 2r$; unde $r = \frac{1}{2}a$.

In Ellipsi aut Hyperbola, $abx \mp bxx = ayy$; differentiando fit $abdx = a dy^2$, seu $dx = dy^2 : b = dy^2 : 2r$; unde $r = \frac{1}{2}b$.

In Curva $y^3 - x^3 = axy$; differentiando habetur $dy^3 = adxdy$, seu $dy^2 = adx$; id est, $dx = dy^2 : a = dy^2 : 2r$; unde $r = \frac{1}{2}a$. Vid. HOSPITAL. *Anal. inf. parv.* pag. 15.

NB. Quia differentiando scribendum est dy pro y , dy^2 pro y^2 , dy^3 pro y^3 , $dx dy$ pro xy , $dx^2 dy$ pro $x^2 y$, &c. potest ipsa æquatio brevitatis ergo sine mutatione retineri, & tantum per x & y quantitates infinite parvæ intelligi; per y tamen etiam quantitas infinite

(b) Si pro a^{s-1} substituatur $sq^{s-2}m$, quæ ipsi æqualis est, ex natura Parabolæ; æquatio transit in hanc $spq^{s-2}m + (sq^{s-1}my + sq^{s-2}mmx) : n = q^s + (sq^{s-1}my - sq^s x) : n + \frac{s \cdot s - 1}{2} q^{s-2} mmyy : nn$ seu $spm + smmx : n = qq - sqqx : n + \frac{s \cdot s - 1}{2} mmyy : mm$, vel [ob mm

$+ qq = nn$] $spm + snx = qq + \frac{s \cdot s - 1}{2} mmyy : nn$, quæ differentiata dat $sndx = \frac{s \cdot s - 1}{2} mmdy^2 : nn$, id est, $dx = \frac{1}{2}(s-1) mmdy^2 : n^2 = dy^2 : 2r$. Hinc $r = n^2 : (s-1) mm$.

* N°. XLIX, pag. 496.

No. CIII. infinite major quam per x : tum quantitates homogeneæ invicem comparandæ, reliquis omnibus infinite minoribus neglectis, ad habendum x , quod denique æquandum ipsi $yy: 2r$. Ratio operationis ex eo perspicitur, quod in initio ipsarum x & y , coincidunt x & dx , nec non y & dy (°).

Exemplum in Conchoide.

Æquatio est $x^4 - 2(a+c)x^3 + (4ac + cc + yy)xx - 2a(cc + yy)x + aayy = 0$, ubi, positis x & y infinite parvis, sed tamen x infinities adhuc minore quam y , patet omnia membra evanescere, præter duo ultima — $2accx + aayy$; sic ut tota æquatio sit — $2accx + aayy = 0$; e qua habetur $x = ayy: 2cc = yy: 2r$; unde tandem fit $r = cc: a$ in vertice. Et generaliter in quovis puncto $r = n \times (2p^3m - 3appm - 3cppm + 4acpm + ccpm + pqqm - ppqq - accm + 2apqq - aqqm - aaqq): (6apqq + 6cpqq - 6ppqq - 4acqq - ccqq - q^4 - 4pqqm - ppmm + 2apmm + 4aqqm - aamm)$.

Ad tegendum artificium & compendificandam solutionem, in æquatione curvæ, quæ relationem coordinatarum t & z , vel p & q exprimit, neglecto termino cognito si adsit, substitue tantum loco t^s vel p^s , $+ sp^{s-1}mx: n + \frac{s.s-1}{2} p^{s-2}$

(°) Hoc ipsum, sine ope calculi differentialis, ex Elementis EUCLIDIS colligi potest. Ex his enim constat, quod si ex dato puncto C [Fig. 33] ad circuli peripheriam ducatur tangens BC, & alia quæ eandem secet in punctis D, F; rectangulum sub CD & CF futurum sit æquale quadrato tangenti BC; unde sequitur, si puncta B & D sint infinite propinqua, ut ratio inter BC & ED, nec non inter CF & DF, & inter CD & BE fiat ratio æqualitatis; fore rectangulum sub BE &

DF æquale quadrato ipsius ED; adeoque si ponamus rectam secantem CF transire per centrum Circuli A, & arcum circularem BD coincidere cum arcu elementari curvæ cujusdam, cujus coordinatæ initiales sint $BE = x$, $ED = y$, posito axe BA in puncto B ad curvam BD perpendiculari, & radius circuli BA fit $= r$, erit $2rx = yy$, sive $x = yy: 2r$, aut $r = yy: 2x$, & $x: y = y: 2r$. Patet etiam, ob angulum BDE infinite parvum, abscissam BE [x] infinities esse minorem applicata ED [y].

$p^{s-2}qqyy : nn$; loco z^n vel q^n , $-uq^n x : n + \frac{n \cdot n - 1}{2} q^{n-2}mmyy$:
 nn , & loco $t^s z^n$ vel $p^s q^n$, $(s p^{s-1} q^n m x - u p^s q^n x) : n +$
 $(\frac{s \cdot s - 1}{2} p^{s-2} q^{n+2} yy + s u p^{s-1} q^n m yy + \frac{n \cdot n - 1}{2} p^s q^{n-2} m m yy)$:
 nn ; omiffis videlicet omnibus reliquis terminis, in quibus aut
 neutra indeterminatarum x & y , aut y unius, aut trium plurium-
 ve, aut x duarum, trium, pluriumve dimensionum reperitur; quo
 facto erit valor ipsius $yy : 2x$ in p, q, m, n radius quæfitus of-
 culi.

Vel compendiosius, ponatur loco $p^s = +s p^{s-1} m n x + s \cdot (s - 1) p^{s-2} q q y y$, loco $q^n = -u q^n n x + n \cdot (n - 1) q^{n-2} m m y y$; loco $p^s q^n = +s p^{s-1} q^n m n x - u p^s q^n n x + s \cdot (s - 1) p^{s-2} q^{n+2} y y + 2 s u p^{s-1} q^n m y y + n \cdot (n - 1) p^s q^{n-2} m m y y$, & tum valor $yy : x$ erit radius osculi. (^d).

Zzzzzz 2

Vel

(^d) Ut ratio hujus operationis manifesta fiat, fingatur æquatio generalis exprimens relationem coordinatarum AE, EB, esse $0 = Ap^a q^b + Bp^c q^e + \&c.$ ubi $A, B, \&c.$ significant coefficientes terminorum; $a, b, c, e, \&c.$ indices potestatum indeterminatarum p & q ; quorum aliqui possunt esse = 0. Designetur quilibet horum terminorum [neglecto coefficiente] per $p^s q^u$. Quibus positis, æquatio exprimens relationem coordinatarum AG, GC erit $Ai^a z^b + Bi^c z^e + \&c. = 0$, quorum terminorum singuli neglectis coefficientibus exprimantur etiam per $t^s z^n$. Sed quia $t = p + (qy + mx) : n$, & $z = q + (my -$

$qx) : n$; erit $t^s = p^s + s p^{s-1} \times (qy + mx) : n + \frac{s \cdot (s - 1)}{2} p^{s-2} \times (qqyy + 2mqyx + mmxx) : nn + \&c.$ Similiter erit $z^n = q^n + n q^{n-1} \times (my - qx) : n + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} q^{n-2} \times (mmyy - 2mqyx + qqxx) : nn + \&c.$ adeoque $t^s z^n = p^s q^n + s p^{s-1} q^n \times (qy + mx) : n + \frac{s \cdot (s - 1)}{2} p^{s-2} q^n \times (qqyy + \&c.) : nn + u p^s q^{n-1} \times (my - qx) : n + s u p^{s-1} q^{n-1} \times (qmyy + \&c.) : nn + \frac{u \cdot (u - 1)}{2} p^s q^{n-2} \times (mmyy - \&c.) : nn + \&c.$ Ubi notandum primo, quia per

No. CIII. Vel adhuc brevius: æquatione tota ad unam partem constituta, & neglecto termino quem neutra indeterminatarum ingreditur; fiat fractio, in cujus numeratore pro singulis $f p^s$ membris reponatur $+ f s p^{s-1} m$, & in denominatore $+(1-s) s f p^{s-2} q q$; pro singulis $g q^u$ in numeratore $- g u q^{u-1}$; in denominatore $+(1-u)$

per x & y intelliguntur quantitates infinite parvæ, quarum tamen y infinities major est quam x ; posse omnes terminos per &c. designatos negligi; deinde posse etiam negligi terminum $p^s q^u$, in quem neutra indeterminatarum x & y ingreditur, quia omnes termini $p^s q^u$ simul sumti, id est, $A p^a q^b + B p^c q^e + \&c. = 0$; tertio posse quoque negligi terminos $s p^{s-1} q^u \times q y : n$, seu $s p^{s-1} q^{u+1} y : n$, quod ex natura rectæ BF ad curvam perpendicularis consequitur; nam $dp : dq = q$ [BE]: m [EF]. Sed æquatio generalis differentiatæ præbet $A a p^{a-1} q^b dp + B c p^{c-1} q^e dp + \&c. + A b p^a q^{b-1} dq + B e p^c q^{e-1} dq + \&c. = 0$; id est, $dp : dq = \frac{A b p^a q^{b-1} + B e p^c q^{e-1} + \&c.}{-A a p^{a-1} q^b - B c p^{c-1} q^e - \&c.} = q : m$; multiplicatis extremis & mediis, omnibusque terminis ad unam partem transpositis, erit $A m b p^a q^{b-1} + B m e p^c q^{e-1} + \&c. + A a p^{a-1} q^b + 1 + B c p^{c-1} q^e + 1 + \&c. = 0$, id est,

substitutis s & u pro a & b , item pro c & e &c. erunt omnia $m u p^s q^{u-1} + s p^{s-1} q^{u+1}$ per suos respective coefficientes multiplicata $= 0$. Restabunt igitur, in æquatione generali, soli termini qui per x & $y y$ multiplicantur, nempe $s p^{s-1} q^u m x : n + s(s-1) p^{s-2} q^{u+2} y y : 2 m n - u p^s q^u x : n + u p^{s-1} q^u m y y : n n + u(u-1) p^s q^{u-2} m m y y : 2 m n = s^2 z^u$. Quia vero omnia $s^2 z^u = 0$, erunt illa adhuc $= 0$, si per $2 m n$ multiplicentur, aut pro singulis $s^2 z^u$ ponatur $2 s p^{s-1} q^u m x + s(s-1) p^{s-2} q^{u+2} y y - 2 u p^s q^u n x + 2 u p^{s-1} q^u m y y + u(u-1) p^s q^{u-2} m m y y$; ex quibus omnibus, si eruatur valor ipsius x , erit $r = y y : 2 x$, vel si pro $2 x$ ponatur x , ita ut sit $s^2 z^u = s p^{s-1} q^u m x + s(s-1) p^{s-2} q^{u+2} y y - u p^s q^u n x + 2 s u p^{s-1} q^u m y y + u(u-1) p^s q^{u-2} m m y y$, erit $r = y y : x$.

— $u) u g q^{n-2} m m$; pro singulis $h p^s q^n$, in numeratore $h s p^{s-1} q^n m$ No. CIII.
 — $h u p^s q^n$, in denominatore $+(1-s) h p^{s-2} q^{n+2} - 2 s u h p^{s-1} q^n m$
 $+(1-u) u p^s q^{n-2} m m$; critque, ut denominator fractionis ad
 ejus numeratorem, sic u ad r , seu BF ad radium osculi.

Seu si variatis litteris, more consueto, æquatio exprimat in
 x & y ; denotante x abscissam, y applicatam, & insuper z sub-
 perpendicularem EF, nec non exponens potestatis x in quolibet
 membro dicatur m , ipsius y in quolibet membro n ; reponendum
 crit pro singulis $f x^m$, $+ f m x^{m-1} z$ in numeratore, & $+(1-m)$
 $m f x^{m-2} y y$ in denominatore; pro singulis $g y^n$, — $g n y^{n-1} z$ in nu-
 meratore, & $+(1-n) n g y^{n-2} z z$ in denominatore; pro singulis
 $h x^m y^n$, in numeratore $h m x^{m-1} y^n z - h n x^m y^{n-1} z$ & in denominatore
 $+(1-m) m h x^{m-2} y^{n+2} - 2 m n h x^{m-1} y^n z + (1-n) n h x^m y^{n-2} z z$.
 Tum vero ut denominator ad numeratorem, sic BF ad radium
 osculi. Quæ est Regula exhibitæ in *Act. Lips.* 1700, pag. 508
 & seqq. *.

Si Curva in initio ipsarum x axi perpendicularis, radius oscu-
 li in vertice sic invenitur. In æquatione naturam curvæ expri-
 mende ponatur pro x ubique $y y : z r$, & sublatis fractionibus di-
 vidatur æquatio per y quoad fieri potest; quo factò

1°. Si y evanescat, vel ex tota æquatione, vel ex duobus
 tantum pluribusve ejus membris, rejectis reliquis, quæratùr va-
 lor ipsius r secundum illa quæ remanent.

2°. Si y evanescat ex uno solo, deleantur omnia reliqua, præ-
 ter illud, vel illa, in quo, vel quibus, y minimum dimensionum
 numerum habet; ac quæratùr tum valor ipsius y exprimendus
 per fractionem aliquam, cujus numerator unum tantum, deno-
 minator aut unum aut plura membra habere potest:

a. Si r in numeratore tot vel plures dimensiones habet, quot
 habet ad summum in denominatore, tum $r = 0$.

b. Si r non reperiatùr in numeratore, $r = \infty$.

Zzzzzz z

γ. Si

* No. XCIV, pag. 888.

N^o. CIII. γ . Si r in numeratore & plures habet dimensiones & pauciores, quam alicubi habet in denominatore, $r = 0$ & ∞ (^e).

Hæc

(^e) Hæc regula paulo aliter enuntiata sic facile demonstratur. Sit æquatio generalis naturam curvæ exprimens $Ax^a y^b + Bx^c y^e + Cx^f y^g + Dx^b y^k + \&c. = 0$. Substituatur ubique $yy:r$ pro x , [ubi per r intelligatur non radius, sed diameter circuli osculatoris] & habebitur $Ay^{2a+b} r^{-a} + By^{2c+e} r^{-c} + Cy^{2f+g} r^{-f} + Dy^{2b+k} r^{-b} + \&c. = 0$. In hac æquatione seligantur termini, in quibus y est minimarum dimensionum; hi erunt vel unus, vel plures.

1^o. Si plures, ex. gr. tres, designentur illi per $Ay^{2a+b} r^{-a} + By^{2c+e} r^{-c} + Cy^{2f+g} r^{-f}$; positis nempe $2a + b = 2c + e = 2f + g = 2b + k - l$, &c. existentibus l &c. numeris affirmativis; dividatur æquatio per y^{2a+b} ; eritque $Ar^{-a} + Br^{-c} + Cr^{-f} = 0$; nam quia y supponitur $= 0$, reliqui termini $Dy^l + \&c.$, in quibus y reperitur, evanescent; radix igitur æquationis $Ar^{-a} + Br^{-c} + Cr^{-f} = 0$, dabit valorem finitum diametri circuli osculatoris.

2^o. Si in unico tantum termino reperitur y minimarum dimensionum, sit ille $Ay^{2a+b} r^{-a}$, divi-

datur æquatio per y^{2a+b} ; eritque $Ar^{-a} + By^{2c+e-2a-b} r^{-c} + Cy^{2f+g-2a-b} r^{-f} + Dy^{2b+k-2a-b} r^{-b} + \&c. = 0$. Ubi statim liquet r non posse habere valorem finitum: evanescent enim, ob y infinite exiguam, omnes termini præter Ar^{-a} , qui solus foret $= 0$, contra hypothesin. Sunt igitur adhuc alii termini, [unus vel plures,] in quibus y reperitur minimarum dimensionum cum termino

Ar^{-a} comparabiles: ponatur $2c + e - 2a - b = l$; $2f + g - 2a - b = m$; $2b + k - 2a - b = n$, erit $Ar^{-a} + By^l r^{-c} + Cy^m r^{-f} + Dy^n r^{-b} + \&c.$ Hic si inter numeros l, m, n , &c. solus l sit omnium minimus, erit $Ar^{-a} + By^l r^{-c} = 0$, reliquis terminis $Cy^m r^{-f} + Dy^n r^{-b}$, &c. evanescentibus; hinc $Ar^{-a} = B = y^l = 0$; quod ostendit, si $c - a$ sit numerus affirmativus, esse $r = 0$; sed si sit negativus, esse $r = \infty$.

3^o. Si duo indices sint minimi & æquales, puta $l = m$; erit $Ar^{-a} + By^l r^{-c} + Cy^l r^{-f} = 0$, reli-

Hæc ex occasione observationis quod pro differentiali ipsius No. CIII. xx aliquando non ponendum sit $2xdx$, sed dx^2 . Altera observatio est, quod loco differentialis xx , nonnunquam ponendum sit nec $2xdx$ nec dx^2 , solum, sed potius utrumque $2xdx + dx^2$; nempe tum cum x determinatur ad aliquem valorem, in quo ipsum $2xdx$ ab alia æquationis parte destruitur. Sic differentiale $\sqrt{(2ax - xx)}$, in casu $x = a$, non est $(adx - xdx) : \sqrt{(2ax - xx)} = c dx : a$; sed potius $(2adx - 2xdx - dx^2)$, $2\sqrt{(2ax - xx)} = -dx^2 : 2a$; quia quamvis dx^2 evanescit respectu $2xdx$, non tamen evanescit respectu $2adx - 2xdx$; quin potius hoc, ceu purum nihil, evanescit respectu illius. Hinc radius osculi, ex. gr. in Ellipsi, reperitur ad summum punctum, cum $x = \frac{1}{2}a$, semissi nempe axis transversi. Æquatio est $abx - bxx = ayy$; differentiando habetur $abdx - 2bxdx = bdx^2 = 2aydy$; id est, [quia $abdx$ & $-2bxdx$ se destruant] $-bdx^2 = 2aydy$, & $dy = -bdx^2 : 2ay = -bdx^2 : 2a\sqrt{(bx - bxx : a)} = -bdx^2 : a\sqrt{ab}$, sive $-dy = bdx^2 : a\sqrt{ab} = dx^2 : 2r$; unde $r = \sqrt{ab} : 2b$ (†).

reliquis terminis præ his evanescentibus, hinc $-Ar^{-a} : (Br^{-c} + Cr^{-f}) = y' = 0$, vel $-A : (Br^{a-c} + Cr^{a-f}) = 0$; unde sequitur 1°. si $a = c$, & $a = f$ sint numeri negativi fore $r = 0$, 2°. Si sint affirmativi fore $r = \infty$. 3°. Si alteruter numerorum $a = c$ & $a = f$

sit affirmativus, & alter negativus, hoc est, si a sit inter c & f medius; fore $r = 0$, & $= \infty$.

(†) Ponitur $-dy = dx^2 : 2r$, loco $dx = dy^2 : 2r$; quia æquatione ab axe transverso Ellipsis ad axem conjugatum translata, dx transit in $-dy$, & dy in dx .

ARTICUL. XXIII.

*Inventio Subtangens & Subnormalis per præcedentem Methodum.*Conf. N^o. XCIV, pag. 891.

Q Uærenda sit tangens in puncto B [Fig. 34]! Ducatur per B recta BH parallela axi, & positis constantibus $AE = x$, $BE = y$, considerentur BH & HI ut indeterminatæ, quarum illa sit $= t$, hæc $= z$; erit ergo $AL = x + t$, & $LI = y + z$: cum igitur eadem sit relatio inter AL & LI quæ inter AE & EB, seu x & y ; poterit, in æquatione data, loco x substitui $x + t$, & $y + z$ loco y ; nec non loco x^m , $x^m + mx^{m-1}t + \&c.$ & $y^n + ny^{n-1}z + \&c.$ loco y^n , & loco $x^m y^n$, $x^m y^n + mx^{m-1}y^n z + mx^{m-1}y^n t$; neglectis scilicet reliquis terminis in quibus t & z , aut junctim reperiuntur, aut plures una dimensiones habent; cum omnes illi termini evanescent, ubi t & z infinite parvæ concipiuntur. Et quia termini illi, in quibus nec t nec z reperiuntur, sunt illi ipsi qui dati sunt in æquatione, adeoque se mutuo destruant; sunt & illi delendi, sic ut pro x^m tantum ponendum sit $mx^{m-1}t$, pro y^n tantum $ny^{n-1}z$, & pro $x^m y^n$ tantum $mx^{m-1}y^n z + mx^{m-1}y^n t$; unde loco formulæ æquationis $f x^m + g y^n + h x^p y^q + a = 0$ substituendum $m f x^{m-1} t + n g y^{n-1} z + q h x^p y^{q-1} z + p h x^p y^{q-1} t = 0$; unde fiet $t : z = - n g y^{n-1} - q h x^p y^{q-1} : m f x^{m-1} + p h x^p y^{q-1}$; quare, cum t & z existentibus infinite parvis, $t : z = GE : EB = EB : EF$; erit $- n g y^{n-1} - q h x^p y^{q-1} : m f x^{m-1} + p h x^p y^{q-1} = GE : EB [y] = EB [y] : EF$; quare subnormalis $EF = (m f x^{m-1} + p h x^p y^{q-1}) : (- n g y^{n-1} - q h x^p y^{q-1})$; subtangens $EG = (- n g y^n - q h x^p y^q) :$

— $qhx^p y^q$) : ($mf x^{m-1} + phx^{p-1} y^q$), & $AG = EG - EA =$ No. CIII
 (— $ng y^n - qhx^p y^q$) : ($mf x^{m-1} + phx^{p-1} y^q$) — $x = (— ng y^n$
 — $qhx^p y^q - mf x^m - phx^p y^q$) : ($mf x^{m-1} + phx^{p-1} y^q$). Idem va-
 lores harum linearum possunt quoque vulgari calculo differenti-
 tiali inveniri.

ARTICUL. XXIV.

*Extensio Methodi præcedentis pro radiis osculi
 inveniendis ad illas quoque æquationes alge-
 braicas, in quibus occurrunt quantitates sur-
 dæ pluri-membres, ut non opus sit surdita-
 tem ex æquatione tollere; sive Demonstratio
 Regulæ in Act. Lips. 1700, pag. 511, § 3,
 * exhibitæ.*

Quia positis [Fig. 31] $AE = x$, $EB = y$, $EF = z$, BD
 $= t$, & $CD = u$, reperta fuit $AG = x + (yu + zt) : n$
 & $GC = y + (zu - yt) : n$; erit EG seu $dx = (yu + zt) : n$.
 & $dy = (zu - yt) : n$; adeoque $dx^2 = yyu + znt$, & $dy^2 =$
 $z zu - nnt$; evanescentibus reliquis, propter $n = \infty$. Quibus
 præmissis, esto quantitas surda in æquatione $\sqrt[p]{(x^t + a)}$; ad
 quam rite differentiandam, pono $f = \sqrt[p]{(x^t + a)}$. erit $f^p =$
 $x^t + a$, & differentiando $pf^{p-1} df + \frac{p \cdot 0 - 1}{2} f^{p-2} df^2 = t x^{t-1} dx$

Fac. Bernoulli Opera.

Aaaaaa

+ll—1

* N°. XCIV, pag. 891, Obs. III.

No. CIII. $+\frac{l.l-1}{2}x^{l-2}dx^2 + \&c.$ seu $pf^{p-1}df = lx^{l-1}dx + \frac{l.l-1}{2}x^{l-2}dx^2 - \frac{p.p-1}{2}f^{p-2}df^2$ & dividendo, $df = lx^{l-1}dx : pf^{p-1} + \frac{l.l-1}{2}x^{l-2}dx^2 : pf^{p-1} - (p-1)df^2 : 2f$ & [ponendo $llx^{2l-2}dx^2 : ppf^{2p-2}$ loco df^2 (°)] $df = lx^{l-1}dx : pf^{p-1} + \frac{l.l-1}{2}x^{l-2}dx^2 :$

$pf^{p-1} - (p-1)llx^{2l-2}dx^2 : 2ppf^{2p-2} = \text{diff. ipsius } \sqrt[p]{(x^l + a)}$. Jam ponatur $zt : n$ loco dx [neglecto yu , ut pote quod est incomparabile ipsi uu] & $yyuu : nn$ loco dx^2 , fiet $\text{diff. } \sqrt[p]{(x^l + a)} = lx^{l-1}zt : pf^{p-1}n + \frac{l.l-1}{2}yyuu : pf^{p-1}nn - (p-1)llx^{2l-2}yyuu : 2ppf^{2p-2}nn$, e quibus statuendum est ab una parte $lx^{l-1}zt : pf^{p-1}n$, & ab altera $\frac{1}{2}(1-l)lx^{l-2}yyuu : pf^{p-1}nn + (p-1)llx^{2l-2}yyuu : 2ppf^{2p-2}nn$; unde cum $uu : zt = r$, sequitur loco $f = \sqrt[p]{(x^l + a)}$ surrogandum esse (b) in numeratore fractionis $lx^{l-1}z : pf^{p-1}$, & in denominatore $(1-l)lx^{l-2}yy : pf^{p-1} + (p-1)llx^{2l-2}yy : ppf^{2p-2}$.

(°) Ponitur $llx^{2l-2}dx^2 : ppf^{2p-2}$ pro df^2 ; quia quadrando æquationem $df = lx^{l-1}dx : pf^{p-1} + \frac{l(l-1)}{2}x^{l-2}dx^2 : pf^{p-1} - (p-1)df^2 : 2f$, provenit $df^2 = llx^{2l-2}dx^2 : ppf^{2p-2} + \&c.$ ubi reliqui termini per &c. designati re-

spectu primi evanescunt.

(b) Quemadmodum t & u , ubi sunt = 0, conveniunt cum dt & du ; sic etiam in hoc casu f convenit cum df , & hæc surrogatio fit non tam pro $\sqrt[p]{(x^l + a)}$, quam pro $\sqrt[p]{(t + a)}$; quod ex supra dictis cum his collatis melius intelligetur.

ARTICUL. XXV.

*Invenire Radios osculi in Curvis per Focos
descriptis.*I *Modus.*

Sint [Fig. 35] AB, BC æquales curvæ particulæ; G, H, I, &c. foci per quas descripta est; BN radius osculi, in eoque assumptum punctum S. Productæ intelligantur AB & GC ad communem occursum in M, & angulo BGC æqualis concipiatur angulus MBD; nec non centro B per C descriptus arcus LCD secans BM & BD, in L & D, & sit DE parallela GM. Poro esto GO perpendicularis GB, eique parallela SV. Appellentur autem GB = x, HB = y, IB = z; BN = r, BS = a; AB vel BC = ds, BK = dx: quibus positis, erit ang. BDE = MBD + BMC = BGC + BMC = ABG; quare triangula ABK & BDE sunt similia & æqualia, & DE = BK = dx; adeoque CF — DE = ddx; hinc BV: BS [a] = BF: BC = CF — DE [ddx]: CD [$\frac{a d dx}{BV}$]; nec non BN [r]: BC [ds] = BC [ds]: CL [$\frac{ds^2}{r}$]; adeoque totus arcus LD = CL + CD = ds²: r + addx: BV. Igitur BL [ds]: LD [$\frac{ds^2}{r} + \frac{addx}{BV}$] = BG [x]: BF [$\frac{x \cdot BV \cdot ds^2 + arx ddx}{r \cdot BV \cdot ds}$]; & quia BV: BS [a] = BF [$\frac{x \cdot BV \cdot ds^2 + arx ddx}{r \cdot BV \cdot ds}$]: BC [ds], erit ddx = (r.BV².ds².

Aaaaaaa 2

— ax.

No. CIII. — ax . $BV.ds^2$: $aarx$. Eodem modo si ducantur ST & SW perpendiculares ipsis BH & BI , reperitur $ddy = (r.BT^2.ds^2 - ay.BI.ds^2):aary$; & $ddz = (r.BW^2.ds^2 - az.BW.ds^2):aarz$. Rursum $FC [dx]:BC [ds] = SV:BS[a]$, unde $dx = SV.ds:a$, & similiter $dy = ST.ds:a$, & $dz = SW.ds:a$.

Esto jam æquatio ad curvam $bx^l + cy^m + ez^n = \text{const.}$ cujus differentiale $blx^{l-1}dx + cmy^{m-1}dy + enz^{n-1}dz = 0$; iterumque differentiando $blx^{l-1}ddx + bl(l-1)x^{l-2}dx^2 + cmy^{m-1}ddy + cm(m-1)y^{m-2}dy^2 + enz^{n-1}ddz + en(n-1)z^{n-2}dz^2 = 0$, ubi substitutis valoribus ddx, ddy, ddz , ut & dx^2, dy^2, dz^2 , & facta divisione per $ds^2:aar$, habetur $blx^{l-2}.BV^2.r - ablx^{l-1}.BV + bl(l-1)x^{l-2}.SV^2.r + cmy^{m-2}.BT^2.r - acmy^{m-1}.BT + cm(m-1)y^{m-2}.ST^2.r + enz^{n-2}.BW^2.r - acenz^{n-1}.BW + en(n-1)z^{n-2}.SW^2.r = 0$, vel [quia $BV^2 = BS^2 - SV^2 = aa - SV^2$, &c.] $ablx^{l-2}r + bl(l-2)x^{l-2}.SV^2.r - ablx^{l-1}.BV + aacmy^{m-2}r + cm(m-2)y^{m-2}.ST^2.r - acmy^{m-1}.BT + aaenz^{n-2}r + en(n-2)z^{n-2}.SW^2.r - acenz^{n-1}.BW = 0$, adeoque $r = (blx^{l-1}.BV + cmy^{m-1}.BT + enz^{n-1}.BW)a:(ablx^{l-2} + bl(l-2)x^{l-2}.SV^2 + aacmy^{m-2} + cm(m-2)y^{m-2}.ST^2 + aaenz^{n-2} + en(n-2)z^{n-2}.SW^2)$.

II Modus.

Idem per novum differentiandi modum obtinetur ita. Sunto rursum [Fig. 36] GO, SV , perpendiculares ipsi GB , & huic parallela CE secans BS in L ; sitque CD perpendicularis ipsi BS ; & centro C , radio CE , descriptus arcus EF secane ductam GC in F . Quibus positis, sunt $GB = v, GO = p, BO = q, BD = t, CD = u$. Erunt $GO [p]:BO [q] = EO [p - GE]:EL [\frac{px - x.GE}{p}] = CD [u]:DL [\frac{xu}{p}]$. Item $GO [p]:BO [q] = EO [p - GE]:LO [\frac{pq - q.GE}{p}] = CD [u]:CL$

CL $\left[\frac{q^u}{p}\right] = EC - EL = EC - x + \frac{x}{p} GE$. Hinc $GE = (qu + px - p \cdot EC) : x$. Sed $BD + DL \left[\frac{t + xu : p}{1}\right] = BO - OL$
 $\left[\frac{q - \frac{pq - q \cdot GE}{p}}{p} = \frac{q}{p} GE\right]$; unde denuo $GE = (pt + xu) : q$

$= (qu + px - p \cdot EC) : x$; quod dat $EC [FC] = x - xt : q + (qqu - xxu) : pq = x - xt : q + ppn : pq = x + (pu - xt) : q$.
 Fingatur C infinite prope accedere ad B; sicut CD, BD, GE, GF infinite parvæ; sed BD & GF infinites minores ipsis CD & GE: Est vero tunc GF tertia proportionalis ad 2 EC, vel 2GB &

GE; nempe 2GB $[2x] : GE \left[\frac{x^u}{q}\right]$, quia pt respectu xu evan-

fcit] $= GE \left[\frac{x^u}{q}\right] : GF \left[\frac{x^u u}{2qq}\right]$; Quare $GC = FC + GF = x$

+ $(pu - xt) : q + xu : 2qq$. Jam quia GB est minor x , & GC major x , potest in æquatione data pro x poni $x + (pu - xt) : q + xu : 2qq$, & pro x^l , $(x + (pu - xt) : q + xu : 2qq)^l = x^l + (lx^{l-1} pu - lx^l t) : q + lx^l xu : 2qq + \frac{1}{2} l \cdot (l-1) x^{l-2} ppn : qq + \&c. = [propter p = x, SV : BV \& q = ax : BV] x^l + (lx^{l-2} \cdot SV \cdot u - lx^{l-1} \cdot BV \cdot t) : a + lx^{l-2} \cdot BV^2 \cdot uu : 2aa + \frac{1}{2} l(l-1) x^{l-2} \cdot SV^2 \cdot uu : aa + \&c.$ Similiter pro y^m & z^n ponantur respondententes valores; unde pro $f = bx^l + cy^m + cz^n$, pono $bx^l + (blx^{l-1} \cdot SV \cdot u - blx^{l-1} \cdot BV \cdot t) : a + (blx^{l-2} \cdot BV^2 \cdot uu + bl(l-1) x^{l-2} \cdot SV^2 \cdot uu) : 2aa + \&c. + cy^m + (cm)^{m-1} \cdot ST \cdot u - cm y^{m-1} \cdot BT \cdot t) : a + (cm)^{m-2} \cdot BT^2 \cdot uu + cm(m-1) y^{m-2} \cdot ST^2 \cdot uu) : 2aa + \&c. + cz^n + (cnz^{n-1} \cdot SW \cdot u - cnz^{n-2} \cdot BW \cdot t) : a + (cnz^{n-2} \cdot BW^2 \cdot uu + cn(n-1) z^{n-2} \cdot SW^2 \cdot uu) : 2aa + \&c. = f$, & subtracta æquatione priore a posteriore remanebit prioris differentia $(blx^{l-1} \cdot SV \cdot u - blx^{l-1} \cdot BV \cdot t) : a + \&c. = 0$: in qua termini qui denominantur ab u [cæteris omnibus neglectis, quippe qui infinites sunt minores] inter se adæquati, & divisi per $u : a$, exhibent æquationem $blx^{l-1} \cdot SV + cm y^{m-1} \cdot ST + cnz^{n-1} \cdot SW = 0$; quæ determinat perpendicularem curvæ BS. Si vero, hac insuper habita, termini a t & uu denominati [qui secum invicem

No. CIII. sunt comparabiles, sequentibus vero omnibus infinitis majores] inter se adæquentur (*), determinabit æquatio radium osculi. In quem finem termini qui habent t statuendi sunt ab una, & qui uu ab altera parte, ita: $(blx^{l-1}.BV.t + cmy^{m-1}.BT.t + enx^{n-1}.BW.t): a = (blx^{l-2}.BV^2 + bl(l-1)x^{l-2}.SV^2 + cmy^{m-2}.BT^2 + cm(m-1)y^{m-2}.ST^2 + enx^{n-2}.BW^2 + en(n-1)x^{n-2}.SW^2) \times uu : 2aa$; factaque convenienti multiplicatione & divisione, $r = [\text{cum sit } BD : DC = DC : 2r] \frac{uu}{2t} = (ablx^{l-1}.BV + acmy^{m-1}.BT + aenx^{n-1}.BW) : (blx^{l-2}.BV^2 + bl(l-1)x^{l-2}.SV^2 + cmy^{m-2}.BT^2 + cm(m-1)y^{m-2}.ST^2 + enx^{n-2}.BW^2 + en(n-1)x^{n-2}.SW^2)$.

Inventus igitur est radius osculi, & quidem ut supra.

III Modus.

Sit rursus in simili Schemate [nisi quod nunc GP perpendicularis ipsi BS] $GB = x, GP = q, BP = p, BD = t, CD = u$. Erunt, producta CD donec occurrat ipsi GB in N, $BP [q] : GP [p] = BD [t] : DN [\frac{pt}{q}]$; $GR = CN = CD + DN = u + pt : q$; $RP = GP - GR = p - u - \frac{pt}{q} : q$; $RP + DC = [\text{ducta } CQ \text{ parallela ad } BS] RQ = p - \frac{pt}{q} : q$; $GP [p] : GB [x] = RQ [p - \frac{pt}{q}] : RC [x - xt : q]$; $GB [x] : GP [p] = GR [u + \frac{pt}{q}] : RE [pu : x + ppt : qx]$; $GB [x] : BP [q] = GR [u + \frac{pt}{q}] : GE [(qu + pt) : x]$; $FC = EC = RC + RE = x - xt : q + pu : x + ppt : qx = x + pu : x + (ppt - xxt) : qx = x + (pu - qt) : x$; $GF = GE^2 : 2EC = qqun : 2u^2$ [e-

1 (*) Id est, si in æquatione $(blx^{l-1}.SV.u + cmy^{m-1}.ST.u + enx^{n-1}.SW.u) : a = 0$ subtracta ab æquatione $(blx^{l-1}.SV.u -$

$blx^{l-1}.BW.t + \&c.) : a = 0$, termini a t & uu denominati inter se adæquentur.

vanefcentibus reliquis terminis in numeratore & denominatore], No. CIII.
 GC [major x] = FC + GF = $x + (pn - qt) : x + qqnn : 2x^2$.
 Quare major $x^l = x^l + lx^{l-2} - lx^{l-2}qt + \frac{1}{2}lx^{l-4}qqnn + \frac{1}{2}l(l-1)x^{l-4}ppnn + \&c.$ = [ob $p = x.SV : a$ & $q = x.BV : a$]
 = $x^l + lx^{l-2}.SV.n : a - lx^{l-2}.BV.t : a + lx^{l-2}.BV^2.nn : 2aa$
 + $l(l-1)x^{l-2}.SV^2.nn : 2aa$, &c. ut supra; unde & cætera,
 ut ibi.

IV Modus.

Major $x = GC = \sqrt{(GQ^2 + QC^2)} = \sqrt{((GP + PQ)^2 + (BP - BD)^2)} = \sqrt{(pp + 2pn + nn + qq - 2qt + tt)}$; unde major
 $x^l = (pp + 2pn + nn + qq - 2qt + tt)^{\frac{1}{2}l} = (xx + 2pn + nn - 2qt + tt)^{\frac{1}{2}l} = x^l + lx^{l-2}pn + \frac{1}{2}lx^{l-2}nn - lx^{l-2}qt + l(\frac{1}{2}l - 1)x^{l-4}ppnn$ = [ob $p = x.SV : a$ & $q = x.BV : a$] $x^l + lx^{l-2}.SV.n : a + lx^{l-2}.BV.t : a + \frac{1}{2}lx^{l-2}nn + l(\frac{1}{2}l - 1)x^{l-4}.SV^2.nn : aa$ = [ob $\frac{1}{2}lx^{l-2} = lx^{l-2}aa : 2aa = (lx^{l-2}.BV^2 + lx^{l-2}.SV^2) : 2aa$] $x^l + lx^{l-2}.SV.n : a - lx^{l-2}.BV.t : a + (lx^{l-2}.BV^2.nn + l(l-1)x^{l-2}.SV^2.nn) : 2aa$, ut supra.

ARTICUL. XXVI.

Inventio Centri Tensionis.

Conf. N^o. XCVIII, pag. 932, & CI,
 pag. 976.

Sit LG [Fig. 37] compages funium rectorum parallelorum æquidistantium, ejusdem crassitiei & longitudinis, alligatorum lineæ rigidæ inflexili BG, rotabili circa axem G: Hæc aperia-

No. CIII. aperiatur angulo quocunque BGH; sic funis LB extendetur in BH, funis MD in DI, funis NF in FK &c. Sublata autem subito vi tendente, magna pernicitate sese contrahent; quæ quidem continuo augetur, ob continuam actionem vis retrahentis. Sint jam tensiones BH, DI, FK, contractæ ad BC, DE, FT; erunt celeritates acquisitæ punctorum C, E, T, ut tensiones BC, DE, FT; adeoque virga inflexilis GC, cui alligati sunt funes, nil impedit quominus cum his celeritatibus pergere possint. Accedant autem novi impulsus a vi retrahente CS, EQ, TR, unde puncta C, E, T, appellerent simul ad S, Q, R, si soluti funes essent; sed quia illigati virgæ GC, non possunt simul reperiri in S, Q, R, propter vires retrahentes [hoc est tendentes] CS, EQ, TR, tensionibus BC, DE, FT, non proportionales: unde vires hæ sic moderabuntur actiones mutuas in se invicem, ut puncta C, E, T simul appellant ad P, Q, V; parte residua virium, velut PS, translata velut in RV; existente tamen intermedio quodam fune, velut DE, cui nihil nec aufertur, nec additur; hoc est, qui, sive scorsim, sive junctim cum cæteris resorbeatur; eodem momento ad Q accedit. Et hujus funis DE punctum alligationis E appello *Centrum Tensionis*; quod sic invenitur. Sit [Fig. 38] AEC Curva Tensionis, hoc est, BC, DE [eadem quæ in Fig. 37,] funium tensiones, & AB, AD vires tendentes, quibus vires retrahentes æquantur; sitque $BC = x$, $DE = p$, $GC = nx$, $GF = np$, $AB = y$, $AD = q$; unde cum vires retrahentes quoque exponantur per CS & EQ, erit etiam $CS = y$, & $EQ = q$; & $DE [p]: BC [x] = EQ [q]: CP [\frac{qx}{p}]$; unde $PS = CS - CP = y - qx:p$; & quia [similiter atque in demonstratione generalissima Centri Oscillationis ex natura vectis, Vid. *Mem. de l'Acad. des Sciences*, 1703 *,] omnia producta ex latitudine funis seu elemento ipsius GC, ex distantia ipsa GC, & ipsa PS, debent æquari

* No. XCVIII, pag. 934 & seq.

Fig. 28.

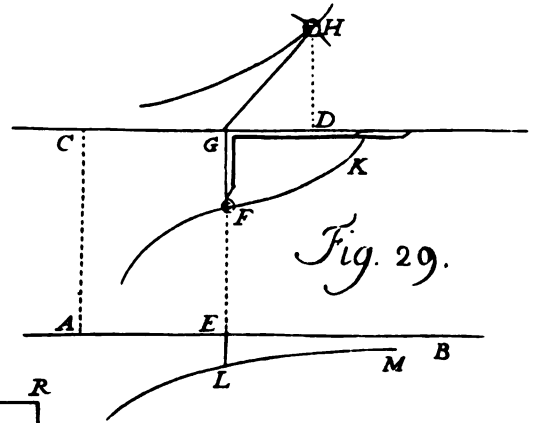
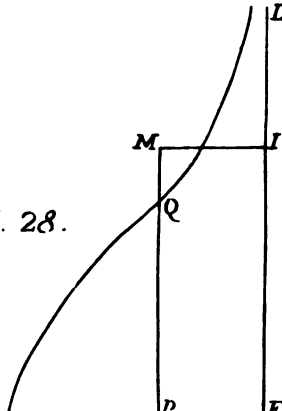


Fig. 29.

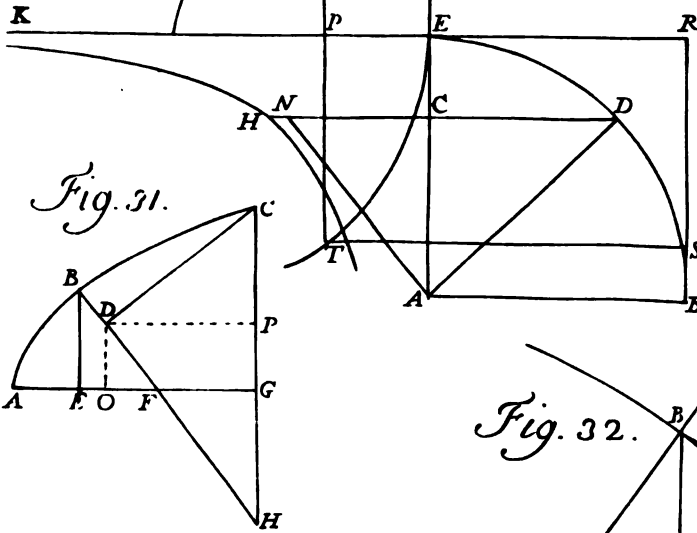


Fig. 31.

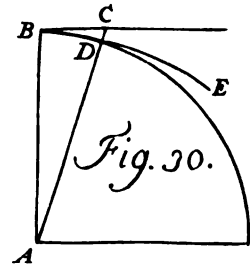


Fig. 30.

Fig. 32.

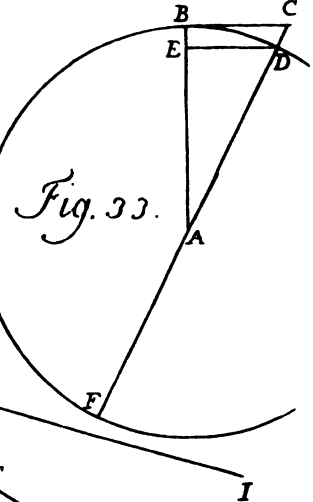
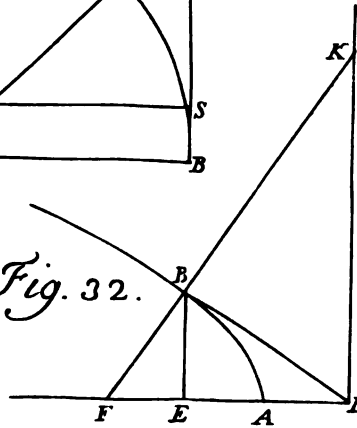


Fig. 33.

Fig. 34.

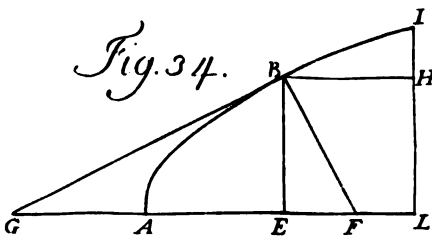


Fig. 35.

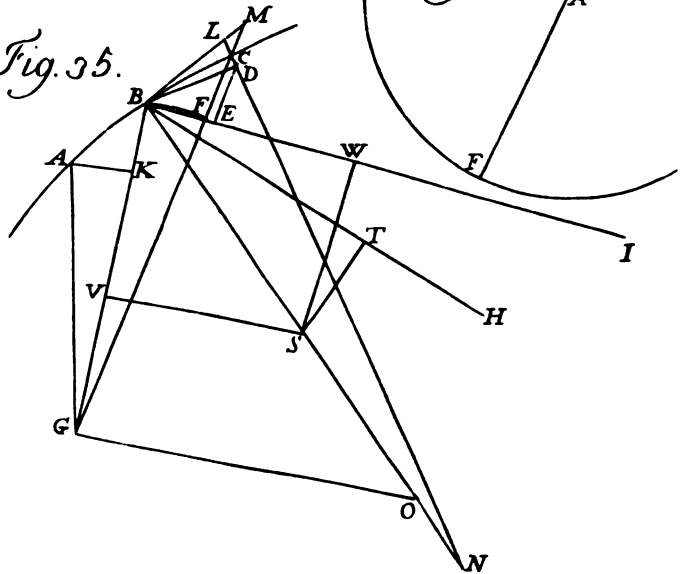
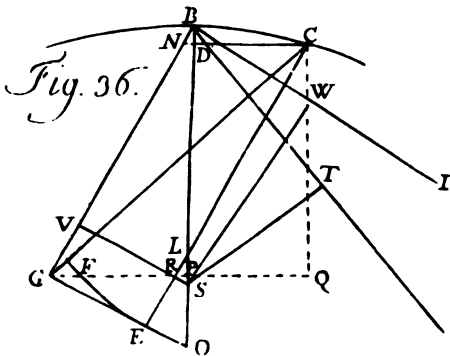


Fig. 36.



æquari nihilo, hinc erit $\int (ndx.nx.(y - qx:p)) = 0$, hoc est, No. CIII.

$\int (mxydx - mnqxxdx:p) = 0$, sive $\int xydx = \int qxxdx:p = \frac{1}{2}qx^2:p$;
 p , indeque $q:p = 3\int xydx:x^3$; quare cum, ob datam curvam
 AEC, detur q per p , & y per x , cognoscetur quoque p per x .
 Nominatim si AEC sit Paraboloides, hoc est, $y = x^m$, & $q =$
 p^m , fiet $p^{m-1} = q:p = 3\int xydx:x^3 = 3\int x^{m+1}dx:x^3 = 3x^{m-1}:$

$(m+2)$; adeoque $p = x \sqrt[m-1]{3:(m+2)}$, & $x:p = BC:$

$DE = GC:GE = 1:\sqrt[m-1]{3:(m+2)}$; quæ ratio cum sit con-
 stans, cujuscunque sit longitudinis x , vel BC , vel BH ; erit
 quoque $GH:GI = GC:GE$; proinde fibra DI eodem tempo-
 re resorbetur, sive sibi relicta, sive juncta cum aliis se contra-
 hat; atque adeo I erit centrum tensionis: & quidem si $m = 2$,
 fiet $GI = [\text{posita } GH = 1] \frac{1}{2}$; si $m = 3$, $GI = \sqrt{3:5}$; si
 $m = 4$, $GI = \sqrt[3]{1:2}$; si $m = 5$, $GI = \sqrt[4]{3:7}$, &c.

Idem procedit quoque, sive solæ fibræ in spatio $BFKH$, sive in
 toto triangulo BGH comprehensæ laxentur. At si AEC alia sit
 curva quam Paraboloides, variabit ratio x ad p , prout variat
 x ; unde GE & GI non æquabuntur, nec erit una aliqua fibra,
 cujus omnes & singulæ partes [sive separatim, sive in complexu
 reliquarum laxetur] eodem tempore resorbeantur: unde nec
 in tali hypothesi dari poterit *Centrum tensionis*. Interim tamen
 potest inveniri tempus, quo fibra BC vel BH , ipseque adeo
 angulus BGH resorbetur, ita: Sit CW celeritas acquisita fibræ
 BC in $C = z$; erit tempusculum, quo elementum fibræ dx ab-
 sumitur, $= dx:z$; unde, posito tempusculo constanti $dx:a$,
 erit, per ostensa in Articulo IX †, incrementum celeritatis in da-
 to tempusculo $= xdx:a$, quod incrementum proportionari de-
 bet ipsi $CP = qx:p$; quare $xdx:a = qxdx:p = [\text{per modo}$
 inventa] $3dxsxydx:xx$; adeoque $xz:za = 3\int(dxfsxydx:xx)$
 & $xz = 6a\int(dxfsxydx:xx)$, & $z = \sqrt{6a\int(dxfsxydx:xx)}$, &
 $dx:z = dx:\sqrt{6a\int(dxfsxydx:xx)}$, tempusculum quo ele-

Fac. Bernoulli Opera. B b b b b b men-

† Pag. 1031, 1032.

No. CIII. mentum dx absorbetur; quod adeo est in ratione composita ex directa ipsius dx , & reciproca radice quadratæ spatii curvilinei, cujus applicata est $\int xy dx : xx$; unde si cum tempusculo quo particula proportionalis alterius longioris vel brevioris fibræ, hoc est, majoris minorisve anguli BGH absumitur, comparetur, eo modo quo factum in Artic. IX *, observabitur discrimen temporum, quibus inæquales anguli absorbentur, dependere a concavitate aut convexitate curvæ, cujus applicata $= \int xy dx : xx$.

Eodem modo invenitur *Centrum tensionis*, si loco virgæ GH substituatur asser curvilineus GIHFLG [Fig. 39], cujus applicata HF vocatur t ; reperitur enim $q : p = \int txy dx : \int txx dx$ (*); quod relationem exhibet constantem ipsius GI ad GH, si GLF quoque sit Parabola. Etenim posito $t = x^n$, sicut $y = x^m$, & $q = p^m$; fiet $p^{m-1} = (n+3)x^{m-1} : (m+n+2)$, & $p = x \cdot \sqrt{\frac{n+3}{m+n+2}}$,

$$\& x : p = 1 : \sqrt{\frac{n+3}{m+n+2}}.$$

(*) Quia numerus funium applicatæ HF alligatorum, quorum extremitates rotantur per arcus circulares habentes radios æquales ipsi HG, proportionalis est ip-

si applicatæ HF; ideo erit $\int (nntxy dx - mmtxx dx : p) = 0$, seu $\int txy dx = \frac{q}{p} \int txx dx$.

* Supra pag. 1030, & seq.



ARTIC. XXVII.

*Artificium impellendi Navem a principio motus
intra ipsam Navem concluso.*

Nauta stans in littore firmo potest conto propellere navem : at stans in ipsa navi non potest , quia quantum illam prorsum impellit , tantumdem illam pedibus carinæ innixus retrorsum pellit : unde vulgo existimant , non posse motum induci corpori a principio intra ipsum concluso. At sequens machina hujus rei possibilitatem ostendit. In navicula A [Fig. 40] sit BC tabulatum firmum , perfecte elasticum , puta chalybeum aut reticulatum , cui appensum sit in B pendulum BP , cum annexo pondere P , itidem elastico ; quod dum descendit per quadrantem PC , impellit tabulatum , & cum illo totum navigium prorsam versus ; ac postmodum reflectitur , & redescendendo repetit suos ictus. Ne vero motus sensim languescat ; sed id , quod tum absumptum fuit a resistentia aeris , tum communicatum navigio , reparetur , atque pendulum semper ad initium quadrantis reascendat , mediante automato , ut in horologiis pendulis fieri solet , obtineri potest. Quoniam autem pendulum navem non tantum in C antrorsum impellit , sed & in locis intermediis quadrantis extensione fili BP , tum a gravitate annexi ponderis P , tum ab ejus conatu centrifugo facta , navem oblique retrahit ; hinc utriusque hujus impulsus contrarii quantitas calculo prius æstimanda est , ut constet utra alteri prævaleat.

Sit altitudo descensus perpendicularis penduli , seu ejus longitudo [Fig. 41] $BC = a$, exposita per triangulum KLM , tempus descensus perpendicularis per BC exponatur per $KL = t$; erit celeritas ejus in fine casus $LM = 2a : t$ (*) ; unde si tempus descensus &

B b b b b b 2 ascen-

(*) Notum est ex Theoria Galileana , quod in hypothesi gravitatis constantis,

No. CIII. ascensus penduli per quadrantem sive integræ oscillationis dicatur T , fiet impulsio navis proram versus $= 2aT : t$ (b). Videamus nunc impulsium contrarium puppim versus, & quidem profectum

1°. *A vi gravitatis.* Sit tempusculum constans $KS = ZL = dt$; erit $tt : dt^2 = a : \frac{adt^2}{tt} = KSV$ vi gravitatis, quæ exponatur

per PE : hinc si motus per PE resolvatur in duos alios PD & PF , & motus per PD rursum in duos PG & PH , atque vocentur $BI = x$, $IP = y$, $QP = ds$; fiet $BP [a] : PI [y] = PE [\frac{adt^2}{tt}] : PD [\frac{ydt^2}{tt}]$; item $BP [a] : BI [x] = PD [\frac{ydt^2}{tt}] :$

$PH [\frac{xydt^2}{att}]$; & quia celeritates in P & C sunt ut radices altitudinum IP , BC , celeritas autem in $C = LM = 2a : t$, adeoque spatium ista celeritate tempusculo dt peractum æquale rectangulo $ZM = 2adt : t$, & spatium eodem tempusculo altera celeritate transactum $QP = ds$; erit $\sqrt{BC} [\sqrt{a}] : \sqrt{IP} [\sqrt{y}] = \text{rectang. } ZM [\frac{2adt}{t}] : QP [ds]$; unde $2dt\sqrt{ay} : t = ds$, & $dt = ds : 2\sqrt{ay}$; adeoque PH [impulsio navis puppim versus a vi gravitatis tempusculo dt impressa] $= xydt^2 : tt = xydsdt : 2at\sqrt{ay} = xdsdt\sqrt{ay} : 2aat$. Quare si omnes præcedentes impulsiones repræsententur per spatium curvilineum N , & celeritas per illas ultimo acquisita per rectam x , significabit triangulum characteristicum $\alpha\beta\gamma$ (c) ipsum ultimum impulsium $BH = xdsdt\sqrt{ay} : 2aat$,

stantis, si tempora descensuum perpendicularium exponantur per rectas KL , KZ , KS ; celeritates acquisitæ exponi possint per applicatas alicujus trianguli LM , ZY , SV , & spatia percursa per ipsa triangula KLM , KZY , KSV .

(b) Per impulsionem navis proram versus, quæ ponitur $2aT : t$, intelligitur spatium quod navis celeritate $2a : t$ lata, tempore T , in aqua non resistente percurreret: quem-

admodum paulo post per vim gravitatis intelligitur spatiolum, quod grave recta descendendo, primo tempusculo dt , percurrit, quodque per triangulum KSV repræsentatur.

(c) Quia per omnes præcedentes impulsiones a spatio curvilineo N repræsentatas intelligitur ipsarum effectus, seu spatium a navi toto harum impulsionum tempore puppim versus descriptum; manifestum est, quod

No. CIII. & totalis impulsus conatus centrifugi tempore T impressus duplus est totius impulsus a vi gravitatis manantis, adeoque $\frac{2}{3}a$ & uterque simul $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = 2a$. Ergo si hos impulsus, qui navem tempore T puppim versus impellunt, junctim subtrahas ab illo qui eandem eo tempore proram versus propellit, quique inventus est $2aT:t$, remanet, pro parte efficaci hujus impulsus versus proram, $2aT:t - 2a = 2a(T-t):t$.

Unde constat fieri hac ratione posse impulsionem navis versus proram, quia T major quam t ; & definiri illam posse, modo habeatur utriusque ratio; quæ sic innotescet.

Quia tempusculum dt , quo describitur arcus quadrantis QP vel ds , repertum est $tds:2\sqrt{ay}$, & $ds = [\text{ex natura circuli}] ady: \sqrt{(aa-yy)}$, erit $dt = atdy:2\sqrt{(a^2y-ay^2)} = [\text{posito } ay = uu] atdu: \sqrt{(a^4-u^4)} = \text{elemento curvæ Elasticæ, cujus integrale [per Prop. LVII de Serieb. Infin. *] est } tu: a + 1. tu^3: 2. 5 a^3 + 1. 3. tu^5: 2. 4. 9 a^5 + 1. 3. 5 tu^7: 2. 4. 6. 13 a^7 + \&c. \text{ sive [sumto pro toto quadrante } y, \text{ adeoque } \& u = a] = } t \times (1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \&c.) = \text{circiter [per Prop. LVIII de Serieb. Infin. †] } \frac{131}{100} t$; unde duplum hujus, scilicet omnia tempuscu-

plum esse ejus qui a vi gravitatis oritur. Sit $f =$ vi centrifugæ, sollicitationi nempe quæ continue agit in pendulum P secundum directionem PD ; hæc licet sit variabilis & quadrato celeritatis penduli proportionalis, tamen ut constans potest supponi durante motu qui fit, tempore dt , per arcum infinite parvum QP . Consideretur recta PD ut spatium aliquod finitum a mobili aliquo a vi f uniformiter accelerato tempore dt descriptum; sit p pars aliqua rectæ PD , quam mobile tempore θ percurrit, & v velocitas acquisita in fine hujus temporis; erit ex natura

accelerationis $fd\theta = dv$, & integrando $f\theta = v$, hinc $dp [= v d\theta] = f\theta d\theta$; & iterum integrando $p = \frac{1}{2}f\theta^2$; substituatur jam pro p integra recta $PD = ds^2:2a$, & dt pro θ , eritque $ds^2:2a = \frac{1}{2}fdt^2$; hinc $f = ds^2:adt^2 = [\text{quia } dt = ds:\sqrt{2gy} \text{ ut in præcedenti Nota ostensum}] 2gy:a$. Si igitur f exponatur per rectam PD , erit hæc $2gy:a$, & per consequens $PH = 2gxy:aa$; quæ quantitates duplæ sunt earum quæ in præcedenti Nota inventæ sunt.

* Pag. 964.

† Pag. 966.

pufcula $d t$, quibus quadrans totus bis percurritur ascendendo & No. CIII descendendo, nempe $T = \frac{262}{100} t$; adeoque tandem quantitas impulsus penduli versus proram, qui singulis temporibus T imprimitur, nempe $2A(T-t):t = \frac{324}{100} A = [\text{si vis}] c$.

Ut jam constet, quanta portio hujus impetus communicetur navi (f), statuatur pondus penduli $= p$, & pondus navis cum toto suo apparatu reliquo $= n$; erit momentum penduli divisum per summam ponderum ipsius & navis $= pc:(p+n)$; cujus proinde duplum $2pc:(p+n)$ [ob suppositam corporum elasticitatem] denotat quantitatem impetus singulis temporibus T navi communicati.

Ut vero tandem determinetur maxima celeritas navis, quam hoc pacto impulsa acquirere potest, quæque vocetur x ; sit pondus molis aquæ, cui navis celeritate $2pc:(p+n)$ lata tempore T impingit $= q$; erit celeritas navis residua post impulsum aquæ $(n-q) \times \frac{2pc}{p+n} : (n+q)$; adeoque pars ejus absumta, hoc

est resistentia aquæ $2q \times \frac{2pc}{p+n} : (n+q) = 4pqc : (p+n)(q+n)$.

Et quia resistentiæ sunt ut quadrata celeritatum navis, erit

$\frac{4ppcc}{(p+n)^2} : xx = \frac{4pqc}{(p+n)(q+n)} ; \frac{q(p+n)xx}{pc(q+n)} =$ resistentiæ aquæ,

cum navis movetur celeritate maxima x . Unde cum resistentia ista tum navis impulsui $2pc(p+n)$ debet æquari, fiet $q(p+n)xx :$

(f) Videtur mihi hic calculus emendatione opus habere; nam elasticitas penduli aut tabulati nihil contribuit ad impulsus navi puppim versus impressos & a vi gravitatis & a conatu centrifugo Penduli derivatos: deinde resistentia aquæ non recte computatur, dum ponitur navem æquabili celeritate $2pc:(p+n)$ ferri toto integræ oscillationis tempore T ; & demum in fine hujus

temporis resistentiam pati æqualem $4pqc:(p+n)(q+n)$; etenim resistentia aquæ agit in navem singulis descensus aut ascensus penduli momenti, & non tum demum cum pendulum in tabulatum impingit; adeo ut navis durante tempore T inæquabili celeritate moveatur. Sed hæc omnia accuratius examinare, ob calculi prolixitatem, nunc non vacat.

No. CIII. $n) \alpha \alpha : p c (q + n) = 2 p c : (p + n)$; quod dat $\alpha = p c \sqrt{(2n + 2q) : (p + n) \sqrt{q}} = 324 a p \sqrt{(2n + 2q) : 100 (p + n) \sqrt{q}}$. Sit igitur pendulum, quod oscillationibus suis maximis mensuret T minutum secundum; erit ejus longitudo a trium pedum horariorum, qualium 20 circiter a gravi perpendiculariter descendente eodem secundo temporis, experientia teste, transiguntur. Sit item $p + n$ [pondus navis cum toto apparatu] = 100, cujus pars centesima sit pondus solius penduli $p = 1$: nec non pondus molis aquæ, cui navis celeritate prima $2 p c : (p + n)$ lata tempore T impingit, $q = 1$: erit celeritas prima navis, sive spatium primo tempore T ab illa percussum, $2 p c : (p + n) = \frac{2}{100} c = \frac{648}{10000} a$

$= \frac{1944}{10000}$ ped. hor. $= \frac{1}{5}$ pedis horarii circiter; & celeritas maxima, sive spatium tum a nave tempore T transactum $324 a p \sqrt{(2n + 2q) : 100 (p + n) \sqrt{q}} = \frac{9720}{10000} \sqrt{2}$ ped. hor. $= \frac{972 \times 1414}{1000000} = \frac{1375}{1000} = \frac{275}{200} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$ pedis horarii circiter; unde hac celeritate, tempore unius minuti primi, navis percurreret $82 \frac{1}{2}$ ped. hor. & tempore integræ horæ, 4950 ped. hor. Reperio etiam, quod, 30 minutis secundis exactis, celeritas Navis jam tanta sit, ut deficiat a maxima vix $\frac{1}{10000}$ pedis; & quod tempore horum minutorum secundorum jam percurrerit $35 \frac{1}{2}$ pedes. Si sit rostrata navis, sic ut ratio q ad $n + q$, quæ ante fuit subcentupla, tantum censetur submillecupla, manebit quidem, ut antea, $2 p c : (p + n) = \frac{1}{5}$ ped. hor. circiter, sed celeritas maxima α fiet $\frac{\sqrt{2000}}{100} c = \frac{972 \sqrt{2000}}{10000} = 4 \frac{347}{1000}$ ped. hor. unde spatium uno minuto primo transactum fit $260 \frac{1}{2}$ & integra hora $15649 \frac{1}{2}$ ped. hor.

Observandum cæterum, quod dum navis movetur, una secum rapit pendulum, eidemque eundem motum imprimit; adeo ut

No. CIII. $= bn \times FH$, adeoque $FH:FG = m:n$. Requiritur ergo duntaxat, ut, data potentia bn tendente elaterem, quærat locus puncti B, hoc est, ut reperiat curva ABC, quod ita fit. Quia momenta omnia virium tendentium fibras elateris [per ea quæ dicta sunt in *Mem. de l'Acad. des Sciences* 1705, pag. 183 †] sunt $\frac{bb}{tt} \int r t d t = \frac{bb}{\tau\tau} \int \rho\tau d\tau$ [scriptis r & ρ pro eo quod (*) loco citato exponitur per m & μ], & momentum appensæ potentia bm , est $bm x$, aut potentia bn , $bn x$ [appellando XN vel XL, x], erit tum $\frac{b}{tt} \int r t d t = m x$, tum $\frac{b}{tt} \int r t d t = n x$; quare cum ex hypothese detur r per t , dabitur & t per m & x , nec non t per n & x ; adeoque & τ dabitur per m & x , aut per n & x , cum utique ρ detur per τ , quod ipsum datur per t , propter $\frac{1}{tt} \int r t d t = \frac{1}{\tau\tau} \int \rho\tau d\tau$. Facto itaque [*Fig. 44*] rectangulo XY, latere XQ $= 1$, & XA $=$ longitudini elateris XC [*Fig. 43*]; constituentur curvæ QR, QP, &c. nec non XM, X μ W, &c. tales, ut sit ubique NR $= bf: \sqrt{(bbff - (f(t+\tau)dx)^2)}$ quatenus t datur per m & x ; & N ρ $= bf: \sqrt{(bbff - (f(t+\tau)dx)^2)}$ quatenus t datur per n & x , nec non NM & N μ $= f(t+\tau)dx: \sqrt{(bbff - (f(t+\tau)dx)^2)}$ quatenus t datur per m vel n , & x : Tum abscissis spatiis XNRQ, XLSQ, &c. singulis æqualibus rectangulo constanti XY, erunt XN, XL, &c. $= x$, & spatia XNM, XLW, &c. singula applicata ad unitatem XQ $= y$ (1).
Positio

† Supra, pag. 986.

(*) Significationes litterarum b , t , τ , r [m], ρ [μ] repetendæ sunt ex loco citato *Comment. Acad. Reg.* [pag. 986]. Inspiciatur ibi *Fig. 5*, nempe b significat crassitiem laminæ elasticæ IK vel AB; t tensionem RT fibræ datæ longitudinis f fa-

ctam a vi tendente NR $= r$ [m]; τ compressionem ρ ejusdem fibræ factam a vi comprimente N ρ $= \rho$ [μ].

(b) Demonstratum est ibidem, æquationem generalem curvæ Elasticæ KAN, existentibus AD $= x$, DN $= y$, NA $= s$, AH $= ds$, esse dy

Positio ipsarum x & y in 43 Fig. sic determinatur: Facto semi- No. CIII. circulo DEX super quavis diametro DX, applicetur in illo XE

ut sit $DX : XE [= ds : dx] = \frac{bf}{\sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)}} : 1 = (^{\circ})$

LS: XQ [Fig. 44] & producat XE [Fig. 43] in L, ut sit XL = XL [Fig. 44] ac denique erigatur super XL [Fig. 43] perpendicularis LB = y = spatio XLW [Fig. 44] applicato ad XQ, erit B punctum in curva optata ABC [Fig. 43]; & sic tot alia puncta inveniuntur quot libuerit. Sint itaque A & B puncta satis vicina; Dico, si super FG erigatur triangulum FHG, ut sit GH = AB, & FH = $m \times FG : n$, fore punctum H in Spira conoidis GHIK; quo pacto & alia ejusdem Spiræ puncta inveniuntur.

Applicatio ad vulgarem tensionis hypotesin.

Sit [Fig. 5. Mem. de l'Acad. 1705 *,] linea tensionis & compressionis TVN ν θ una linea recta, & sit $r = t$, ut & $\rho = \tau$,

erit $\frac{1}{2}t = \frac{1}{t} \int r t dt = \frac{1}{\tau} \int \rho \tau d\tau = \frac{1}{2}\tau$; adeoque $t = \tau$: nec non

$\frac{1}{2}bt = \frac{b}{tt} \int r t dt = nx$; unde t vel $\tau = 3nx : b$. Quare $dy =$

$$dx f(t+\tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)} = dx f \frac{6nx dx}{b} : \sqrt{(bbff)}$$

Ccccccc 2

$dy = dx f(t+\tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)}$, seu $bf dy = ds f(t+\tau) dx$; quare $ds = b f dy : f(t+\tau) dx = b f dx : \sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)}$, & integrando $s = f(b f dx : \sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)}) =$ [per constructionem] areæ XNRQ vel XLSQ [Fig. 44]; unde si pro s sumatur integra longitudo elateris $XC = XA \times 1 = XA \times XQ =$ rectangulo XY, debebunt singulæ areæ XNRQ, XLSQ, &c. æquales esse rectangu-

lo constanti XY; & quia per eandem constructionem NM vel LW = $f(t+\tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)}$, erunt areæ XNM, vel XLW = $f(dx f(t+\tau) dx : \sqrt{(bbff - (f(t+\tau) dx)^2)}) = f dy$; adeoque ista spatia ad unitatem XQ applicata sunt = y .

($^{\circ}$) Quia DX tangit curvam Elastiam XB, ideo erit [positis XL = x , XB = s] $ds : dx = DX : XE$.

* Fig. 5, N^o. CII.

No. CIII.

$$\sqrt{(bbff - (\int \frac{6nxdx}{b})^2)} = 3nxxdx : \sqrt{(b^4ff - 9nmx^4)} = xxxdx :$$

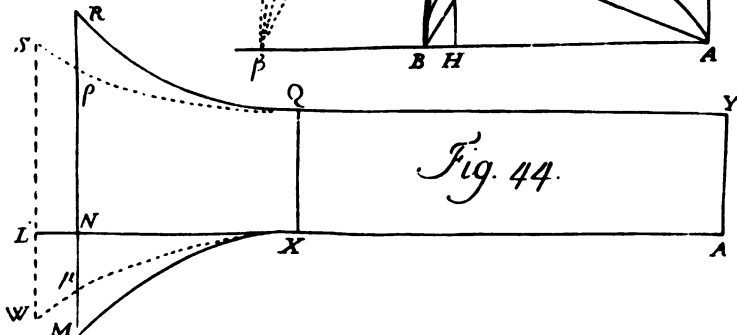
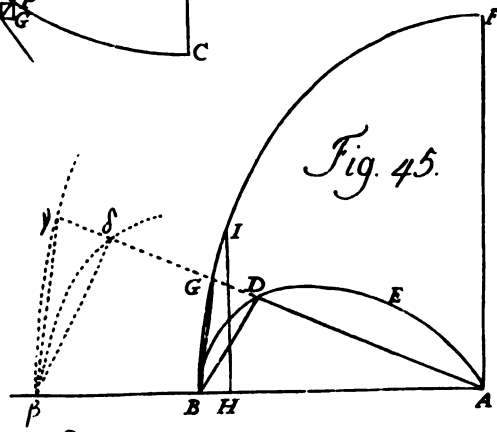
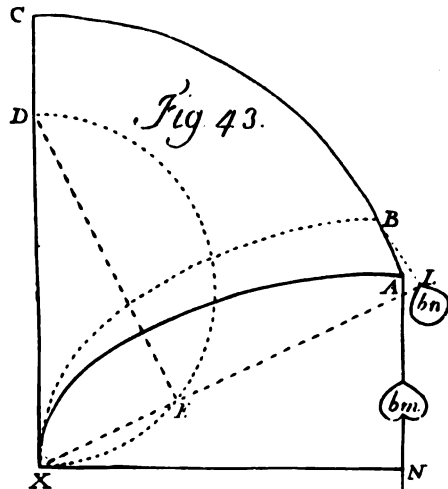
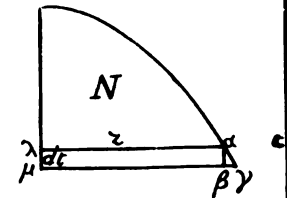
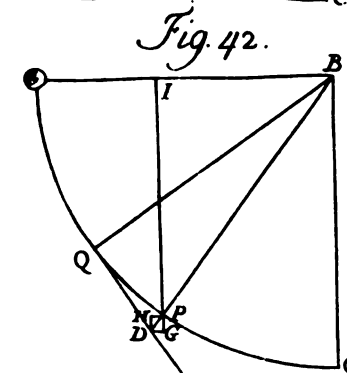
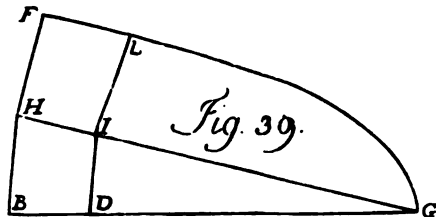
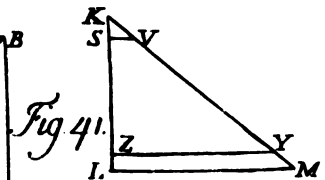
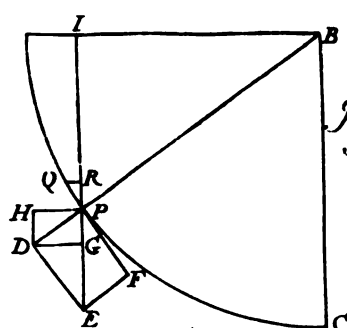
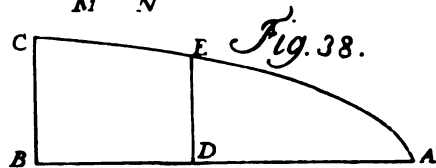
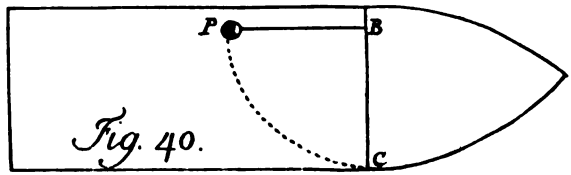
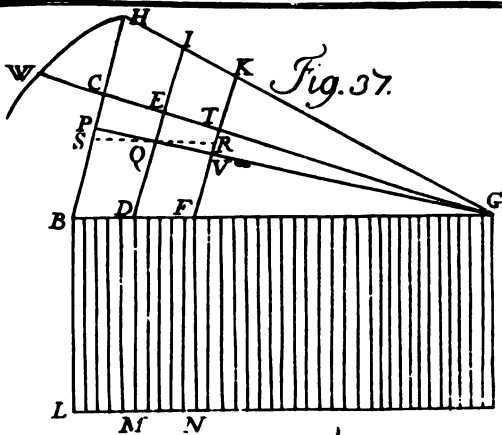
$$\sqrt{(\frac{b^4ff}{9nn} - x^4)}, \text{ adeoque } ds = \frac{bbf}{3n} dx : \sqrt{(\frac{b^4ff}{9nn} - x^4)}.$$

Quæ absque quadraturis ope curvæ Lemniscatæ sic construuntur [Vid. *Act. Lips.* 1694, m. Sept. p. 338. †]. Super semi-axe minore AB [*Fig. 45*] = $b\sqrt{(f:3n)}$, statuatur Lemniscata AEDB, nec non Ellipsis BIF, cujus semi-axis major AF sit = $b\sqrt{(2f:3n)}$. Abscindatur in Lemniscata ex nodo ejus A portio AED = longitudini elateris XC, [*Fig. 43*] & subtensæ rectæ AD fiat æqualis AH, & erigatur HI parallela AF, erit recta AD vel AH = $x = XL$ [*Fig. 43*], & FI — AED = $\gamma = LB$ [*Fig. 43*]. Deinde sumta n majore vel minore, fiat rursus $A\beta = b\sqrt{(f:3n)}$, & super $A\beta$ describatur alia Lemniscata $\beta\delta$, & alia Ellipsis $\beta\gamma$; quod fit dummodo trajiciatur ex nodo infinita recta AD γ secans indefinite curvas AEB & BGF in D & G, atque junctis BD, BG, fiant parallelæ $\beta\delta$, $\beta\gamma$, secantes infinitam in δ , γ ; hæc enim erunt puncta in nova Lemniscata & Ellipsi. (⁴).

† N°. LX, pag. 609.

(⁴) Ratio hujus constructionis manifesta fiet ex Exemplo 1 primæ Regulæ, & Exemplo 1 quartæ Re-

gulæ Articulo II°. horum Posthumorum traditarum, pag. 1000, & 1006.



ARTICUL. XXIX.

*Problema de Curvatura fornicis , cujus partes
se mutuo proprio pondere suffulciunt
sine opere cæmenti.*

S It Fornix ABC [Fig. 46.] constructus ex lapidibus cæsis DKLE figuræ fere parallelogrammæ rectangulæ oblongæ , nisi quod KL tantillo major sit quam DE , latitudinis DK valde exiguæ vel infinite parvæ ; & vocetur EN = dx , ND = dy , DE [pondus particulæ DL] = ds , adeoque pondus ipsius BE = s . Concipiatur pars fornicis EBF [deficientibus partibus inferioribus AE , CF] sustineri a filis perpendicularibus LG , FH , sustinebit utrumque dimidium ponderis EBF , hoc est EB , seu s . Si porro loco fili HF subternatur fulcrum in F , potentia sustinens in G manebit eadem quæ antea , eritque = s , cum sustineat vèctem EF , cujus medio M appensum intelligitur pondus EBF seu $2s$. Quod si oblique trahatur idem vèctis secundum rectam LI tangentem fornicis , demissa in LI perpendiculari FI , erit potentia trahens ducta in FI = ponderi appenso EBF in FM = EB \times FE = $s \times FE$; adeoque potentia sustinens filum LI : s = FE : FI = [propter similia triângula EFI , EDN] DE : EN = ds : dx ; adeoque dicta potentia [proinde & vis qua premitur lapis DL juxta directionem LK perpendiculararem plano EL vel DK] = $s ds : dx$. Porro considerandum , quod si auferretur pars fornicis EBF , lapis DL nullo cæmento cum parte inferiore AK cohærens , proprio pondere cadere necessum haberet ; idque vel labendo super plano KD , si hoc planum sit perfecte lubricum ; vel rotando circa punctum D , si in DK sit frictio : utrumvis autem fiat , erit conatus hic descendendi [hoc est potentia susti-

Ccccc c 3

nens

No. CIII. nens lapidem in centro gravitatis ejus, filo OP perpendiculari ad DE] ad pondus lapidis, ut DN ad DE, seu ut dy ad ds ; adeoque cum pondus lapidis sit $\equiv ds$, erit descendendi conatus $\equiv dy$. Habemus ergo duas potentias $sds : dx$ & dy ; quarum illa lapidem impellit secundum tangentem curvæ IL, ista secundum rectam PO curvæ perpendicularem: momenta autem harum potentiarum variant, prout variat hypothesis, & lapis vel labendo vel rotando descendere conatur (^a).

1. Si labi conetur lapis, hoc est, ejus partes KD & LE cum omnibus intermediis æquali nisu in rectis ipsi KD parallelis descendere affectent: oportet concipere lapidem instar cunei sese intrudere conantis intra triangulum DQE, qui dum ex KL pervenit in situm DE, hoc est, dum spatium KD absolvit, potentiam prementem secundum IL retropellit longitudine KL — DE; quare,

ex natura cunei, vis $dy \times KD \equiv vi \frac{s ds}{dx} \times (KL - DE)$, hoc est,

[quia $KD : KL - DE \equiv DQ : DE \equiv z$ [radius osculi] : ds] $z dy \equiv sds^2 : dx$, hoc est, [propter $z \equiv ds^3 : dy ddx$, posita dy constante] $ds^3 : ddx \equiv sds^2 : dx$, seu $ds : s \equiv ddx : dx$.

2. Si propter impedimentum frictionis in KD rotare conatur lapis circa D: concipiendus est vectis DE, quem potentia $sds : dx$, applicata in extremitate E, impellit secundum directionem IL vel huic parallelam ER, dum potentia dy applicata in vectis medio O eundem impellit juxta directionem PO; quare, ex natura vectis, $sds : dx$ in DR $\equiv dy$ in DO: est vero DR [subtensa anguli contactus (^b)] $\equiv DE^2 : DQ \equiv ds^2 : z$, unde $sds^3 : z dx \equiv dy \times$

(^a) Imo non variant, ut mox ostendetur.

(^b) Subtilis hic est paralogismus. Subtensa anguli contactus DR non est $DE^2 : DQ$, sed $DE^2 : 2DQ$. Nam RD & DQ non in directum jacent, nec angulus contactus RED æqualis est angulo DQE, sed ejus

dimidio OQE; quippe RD perpendicularis supponitur ad vectem DE, adeoque parallela rectæ PO vel OQ, posito DQ & EQ esse duos radios circuli osculatoris, & tangentem ER esse perpendicularem ad radium EQ; ita ut anguli RED & OQE sint singuli ejusdem anguli DEQ vel OEQ com-

$dy \times DO = dyds : 2$, adeoque $zdy = 2sds^2 : dx$; hoc est, [pro- No. CIII. pter $z = ds^3 : dydx$] $ds^3 : ddx = 2sds^2 : dx$, hoc est $ds : 2s = ddx : dx$.

Habemus ergo duas æquationes $ds : s = ddx : dx$, & $ds : 2s = ddx : dx$, seu $sddx - dsdx = 0$, & $2sddx - dsdx = 0$, hoc est, integrando $dx : s = dy : a$, & $dx^2 : s = dy^2 : a$, seu $s = adx : dy$, & $s = adx^2 : dy^2$.

Ad resolvendam priorem; quadretur, ut sit $ssdy^2 = aadx^2$, & addatur $ssdx^2$, erit $ssds^2 = aadx^2 + ssdx^2$, seu $ssds^2 : (aa + ss) = dx^2$, & integrando $\sqrt{(aa + ss)} = x$; indeque $s = \sqrt{(xx - aa)} = adx : dy$; unde $dy = a dx : \sqrt{(xx - aa)}$, quod indicat curvam Catenariam, ut habet GREGORIUS *.

Ad resolvendam posteriorem $sdy^2 = adx^2$, addatur ady^2 , erit $ady^2 + sdy^2 = ads^2$, hoc est $dy \sqrt{(a + s)} = ds \sqrt{a}$, seu $dy = ds \sqrt{a} : \sqrt{(a + s)}$, & integrando $y = 2 \sqrt{(aa + as)}$; indeque $s = (yy - 4aa) : 4a = adx^2 : dy^2$, unde $4aadx^2 = yydy^2 - 4aady^2$ & $2adx = dy \sqrt{(yy - 4aa)}$; cujus ecce Constructiones duæ.

I. *Ope Hyperbolæ*: Fiat hyperbola æquilatera BC, [Fig. 47] cujus axis BD, centrum A, semiparameter AB = 2a, & AD = y, erit DC = $\sqrt{(yy - 4aa)}$; in hac igitur producta capiatur DF = spatio BCD diviso per AB; eritque punctum F in curva optata fornicis BF: quia differentiando habetur Diff. DF = Diff. BCD : AB = $dy \sqrt{(yy - 4aa)} : 2a$, hoc est, $2a \times \text{diff. DF} = dy \sqrt{(yy - 4aa)} = 2adx$. Ergo DF = x.

II. *Ope Logarithmicæ vel Catenariæ*: Esto [Fig. 48] Logarithmica quævis HGBIK, cujus axis NM, & sit applicata BA = subtangenti = 2a = b; sumtis indefinite in axe ex utraque parte

complementum ad rectum; unde erit OQ : OE [$\frac{1}{2}$ DE] = DE : DR [$\frac{DE^2}{2OQ}$] = [ob differentiam inter DQ & CQ infinite parvam] $\frac{DE^2}{2DQ}$.
 Correcto igitur hoc errore, prohibet.

eandem æquatio quæ in priori hypothesi, adeo ut Catenaria utriusque hypothesi satisfaciat.

* *Transf. Phil.* N^o. 231, A. 1697, Aug. pag. 633, vel *Act. Erud.* 1698, Jul. pag. 309.

No. CIII. parte rectis æqualibus AE, EN, AL, LM, applicentur Logarithmicæ totidem rectæ EG, NH, LI, MK, & ex EG abscindatur EC [cui fiat æqualis AD] $= \frac{1}{2}EG + \frac{1}{2}LI$; erit punctum C ex constructione *Leibnitiana* in Catenaria BC: juncta CD producat in F, ut sit $DF = \frac{1}{2}NH - \frac{1}{2}MK - \frac{1}{2}AE$, habebiturque F punctum in curva optata fornicis BF.

D E M O N S T R A T I O.

Sit $EG = p$, fient $NH = pp : b$, $LI = bb : p$, $MK = b^3 : pp$ & $AE = \log. p$; eritque $y = AD = EC = \frac{1}{2}EG + \frac{1}{2}LI = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}bb : p$; adeoque $dy = \frac{1}{2}dp - \frac{1}{2}bbdp : pp$, & $yy = \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}b^4 : pp$, & $yy - bb = \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}b^4 : pp$, & $\sqrt{(yy - bb)} = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}bb : p$; proinde $dy\sqrt{(yy - 4aa)} = dy\sqrt{(yy - bb)} = \frac{1}{2}(dp - bbdp : pp) \times \frac{1}{2}(p - bb : p) = \frac{1}{4}pdp - \frac{1}{2}bbdp : p + \frac{1}{4}b^4dp : p^3$. Porro $x = DF = \frac{1}{2}NH - \frac{1}{2}MK - \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}pp : b - \frac{1}{4}b^3 : pp - \frac{1}{2}\log. p$, & differentiando $dx = \frac{1}{4}pdp : b + \frac{1}{4}b^3dp : p^3 - \frac{1}{2}bbdp : p$, adeoque $bdx = 2adx = \frac{1}{2}pdp + \frac{1}{2}b^4dp : p^3 - \frac{1}{2}bbdp : p = dy\sqrt{(yy - 4aa)}$. Q. E. D.

NOTA. Posset quis objicere, gratis sumi fulcrum in F puncto lineæ horizontalis EF [Fig. 46]; posset enim eodem jure alibi accipi, puta in S; & tum videtur planum LE a majori incumbente pondere EBS fortius urgeri quam antea; unde fornix in eadem parte simul & fortius & debilius premeretur, prout fulcrum in F vel S concipitur: quod absurdum. *Respondetur*: Ostendendum est hoc non fieri, sed ubivis sumatur fulcrum in utraque nostra curva, vim quam sustinet filum LI constanter esse $sds : dx$, aut eam, quam sustinet filum LG, esse s .

1. Sit EBS Catenaria, cujus tangentes in L & S concurrant in T, e quo demissum perpendicularum TY secet vectem SL in X, & ducantur SV, SY normales super LI & TX. Constat centrum gravitatis portionis catenariæ EBS reperiri in perpendicularo TY, adeoque tantundem esse, ac si pondus EBS appentum esset in puncto X vectis SL; quare ostendendum, potentiam LI seu $sds : dx$

$sds : dx$ in $SV =$ ponderi EBS in SY , quod ita liquet : Quia *s* No. CIII. $= \sqrt{(xx - aa)}$, erit $ds = xdx : s$, & $sds : dx = x$. Sed ipsa x in Catenaria exhibet ejus firmitatem in puncto L , quæ, ex lege gravium filis suspensorum, debet esse ad pondus catenæ EBS tanquam appensum in T , ut sinus anguli STY ad sinum anguli STL , hoc est, ut SY ad SV , quare x seu $sds : dx$ in $SV =$ ponderi EBS in SY . *Q. E. D.*

2. *NB.* In altera curva deprehendo istud non procedere : unde suspicor, in hac hypothesi [quod lapis DE rotando circa D descensum molitur] aliquid vitii latere, ut stare non possit. Ratio haud dubie hæc est, quod lapis ipso DL proxime inferior & ipse minime quiescit, sed circa inferiorem extremitatem pari nisu rotare conatur ; unde superior extremitas D non manet immota, sed æquali conatu cum E juxta directionem KD descensum affectat ; quod tantundem est, ac si lapis DL glisceret super KD , quæ fuit ipsa prima hypothesis. Unde solam Funiculariam Problemati satisfacere concludo. (°)

(°) Non igitur hypothesis, sed solutio fuit vitiosa ; nec ratio subiecta valet. Potest enim lapidis inferioris extremitas superior D ut fulcrum immotum considerari, quia non statim ac liberatur lapis superior DL a pondere incumbente EBF , etiam inferior lapis ab omni pressione lapidis superioris liberatur.

ARTICUL. XXX.

Lineæ datæ rigidæ, ab infinitis potentiis secundum quasvis directiones impulsæ tractæve, determinare directionem mediam, axem æquilibrii & vim impulsus.

DE linea flexili non data, supra ARTIC. XI. * Nunc de data inflexili.

I. Sit hæc primo recta AD [Fig. 49] tracta ab infinitis potentiis P, Q, R, &c. secundum quasvis directiones BP, CQ, DR, &c. Posito E esse fulcrum circa quod fiat æquilibrium, demittantur ex illo rectæ ES, ET, EV, &c. perpendiculares super BP, CQ, DR, &c. & vocentur sin. tot. = a , sin. ang. ABP = b , compl. = c ; sin. ang. ACQ = d , compl. = e ; sin. ang. ADR = f , compl. = g , propter angulum obrusum; nec non AB = s , AC = t , AD = u , AE = x , P = p , Q = q ; R = r . Erunt Sin. tot. [a]: sin. ang. ABP [b] = BE [$x - s$]: ES [$\frac{bx - bs}{a}$]; Sin. tot. [a]: sin. ang. ACQ [d] = CE [$t - x$]: ET [$\frac{dt - dx}{a}$]; parique modo Sin. tot. [a]: sin. ang. ADR [f] = DE [$u - x$]: EV [$\frac{fu - fx}{a}$]. Hinc momentum potentia P = P × ES = ($bps - bps$): a ; moment. potent. Q = Q × ET = ($dqt - dqx$): a ; moment. potent. R = R × EV = ($fr u - fr x$): a ; unde, cum summa momentorum ab una parte æquetur

* Pag. 1036, & seq.

quetur summæ momentorum ab altera, erit $bp_x - bps = dqt -$ No. CIII.
 $dqx + fru - frx$, hoc est, $(bp + dq + fr)x = bps + dqt + fru$
 ac proinde $x = (bps + dqt + fru) : (bp + dq + fr)$, seu $x = fbps :$
 fbp . Rursum esto vectis positio ILH parallela priori, quam in-
 tersecent lineæ directionum in F, G, H, &c. & jungant utrum-
 que vectem rectæ perpendiculares [quæ singulæ = a] AI, BK,
 CM, DN, EL, &c. sitque U punctum fulcrum posterioris ve-
 ctis: itaque Sin. ang. ABP [b]: sin. compl. [c] = BK [a]: FK
 [$\frac{ac}{b}$]; Sin. ang. ACQ [d]: sin. compl. [e] = CM [a]: GM
 [$\frac{ac}{d}$]; Sin. ang. ADR [f]: sin. compl. [$-g$] = DN [a]:
 HN [$\frac{-ag}{f}$]. Hinc IF = AB — FK = $s - ac : b$, IG = AC
 — GM = $t - ac : d$; IH = AD + HN = $u - ag : f$; & posita
 IU = y , erunt FU = IU — IF = $y - s + ac : b$, GU = IG —
 IU = $t - ac : d - y$, HU = IH — IU = $u - ag : f - y$; ergo
 demissæ ex U super BP, CQ, DR, &c. perpendiculares ordine
 reperiuntur $(by - bs + ac) : a$, $(dt - ac - dy) : a$, $(fu - ag$
 $- fy) : a$; unde momentum Potent. P = $(bpy - bps + apc) : a$;
 mom. potent. Q = $(dqt - aqe - dqy) : a$; momentum potent.
 tiæ R = $(fru - arg - fry) : a$; adeoque $bpy - bps + apc = dqt$
 $- aqe - dqy + fru - arg - fry$, hoc est, $(bp + dq + fr)y =$
 $bps + dqt + fru - apc - aqe - arg$, ac proinde $y = (bps +$
 $dqt + fru - apc - aqe - arg) : (bp + dq + fr)$. Quare UL =
 AE — IU = $x - y = (apc + aqe + arg) : (bp + dq + fr)$, hoc
 est, UL = $\frac{apc}{fbp} : fbp$, adeoque EL : UL = $a : \frac{apc}{fbp} = fbp : fcp$;
 unde repertum est fulcrum seu centrum æquilibrii vectis E, &
 linea directionis mediæ EU.

Aliter.

Resolvatur pressio obliqua BP, &c. in duos motus BK & KF, quorum ille vecti AD perpendicularis, hic parallelus: eritque BF ad BK, seu a ad b , ut p ad $bp:a$, vim qua trahitur vectis juxta perpendicularem BK; nec non BF ad FK, seu a ad c , ut p ad $cp:a$, vim qua idem trahitur juxta BA. Est igitur tota vis perpendicularis, quæ exponatur per $EL = f(bp:a)$, & tota vis parallela, exposita per $LU = f(cp:a)$; adeoque $EL:LU = fbp:fc p$, ut supra. Porro vis $(bp:a) \times AB = bps:a =$ momento vis trahentis per BK respectu puncti A, quare summa momentorum $f(bps:a)$ divisa per summam virium $f(bp:a)$, dabit $AE = fbps:fbp$, distantiam centri æquilibrii E a puncto A, ut supra. Hinc vis impulsus $EU = \sqrt{(EL^2 + LU^2)} = \sqrt{((fbp)^2 + (fc p)^2):a}$.

II. Sit deinde curva quæcunque rigida ADF, [Fig. 50] quæ in omnibus suis punctis D trahatur vel impellatur ab infinitis potentiis P, secundum quasvis datas directiones DP. Producatur PD donec axem curvæ AC secet in B; parique momento potentia P trahet vectem curvum AD per DP, atque traheret vectem rectum AC in B per eandem directionem BP, quoniam eadem est perpendicularis ex fulcro A in communem directionem BP demissa. Idcirco determinetur, per præced. §. 1, axis æquilibrii EU rectæ AB, hic quoque erit axis æquilibrii curvæ AD.

E X E M P L U M I.

Esto adhuc ADF curva quæcunque, in qua $AC = x$, $CD = y$, $AD = z$; sed $P = a dx$, & omnes directiones DP curvæ perpendiculares, quales sunt impulsus fluidorum: erit $DH [dx]:GH [dx] = BD:CD = \sin. \text{tot.} [a]:\sin. \text{ang. ABP} [b]$; unde $b =$

$b = adx : dz$, & pariter $c = a dy : dz$; porro $GH [dx] : GD$ No. CIII.

$[dy] = CD [y] : CB [\frac{y dy}{dx}]$; unde $s = AB = AC + CB = x$

$+ y dy : dx = (x dx + y dy) : dx$; quare $bps = (a dx : dz) \times adz \times (x dx + y dy) : dx = aaxdx + aaydy$. Ideo $fbps = \frac{1}{2} aaxx + \frac{1}{2} aayy$, & $AE = fbps : fbp = (xx + yy) : 2x$, ut & $EL : LU = fbp : fcp = x : y$, & $EU = \sqrt{(fbp)^2 + (fcp)^2} : a = a \sqrt{(xx + yy)}$.

Constructio talis: Per medium chordæ AD normalis agatur IE, erit hæc axis æquilibrii. Nam, propter triangula similia ACD, AIE, & ELU, est $AC [x] : AD [\sqrt{(xx + yy)}] = AI$

$[\frac{1}{2} \sqrt{(xx + yy)}] : AE [\frac{xx + yy}{2x}]$; nec non $EL : LU = AC : CD$

$= x : y$. Impulsus totalis $EU = a \times AD$. Si arcus AD, dicta ratione impulsus, in A & D fulcris aut filis ipsi IE parallelis sustineatur, sustinebit utrumvis $a \times AI$.

E X E M P L U M II.

Sit deinde ADF [Fig. 51] *Velaria seu Catenaria*, cujus centrum M, & $MC = x$; constat esse $dy = a dx : \sqrt{(xx - aa)}$; $dz = x dx : \sqrt{(xx - aa)}$; $z = \sqrt{(xx - aa)}$, $P = a dy^2 : dz (*) = a^2 dx : xz$; quare sin. ang. $ABP = b = adx : dz = dz : x$; sin. compl. $c = a dy : dz = aa : x$; $MB = MC + CB = s = x + y dy : dx = x + ay : z$; proinde $bp = a^2 dx : xz$, & $fbp = (a^2 x - a^4) :$

D d d d d d 3 x ;

(*) Si curva AD repræsentet velum a potentiis ad curvam perpendicularibus impulsus, est $P = a dy^2 : dz$; sed si repræsentet catenam a potentiis ad axem AC parallelis impulsam, erit $P = a dz$, & media directio RN itidem ad axem AC parallela. Pro veste enim recto hic sumenda est recta AS ad axem AC perpendicularis, eritque $b = a$ & $c = 0$, $s = AS = y$, unde $fbps$

$= faaydz = aafydz = aayz - aafz dy = aayz - aafadx = [quia, in casu $x = a$, $fbps$ debet esse = 0] $aayz - a^2x + a^4$; quare $fbps : fbp = (aayz - a^2x + a^4) : aaz = (yz - ax + aa) : z = AN = distantia centri æquilibrii a puncto A; ipseque axis æquilibrii NR ad axem AC parallelus, ob $fbp : fcp = b : c = a : 0$.$$

1128 DE DIRECTIONE MEDIA ET AXE ÆQUILIBRII,

No. CIII. x ; nec non $bps = a^4 dx : x + a^4 y dx : xxz$, & $fbps = a^4 yz : x$ (b);
 ut & $cp = a^4 dx : xxz$, & $scp = a^4 z : x$; unde tandem $ME =$
 $fbps : sbp = yz : (x - a)$, & $AE = yz : (x - a) - a$; nec
 non $AN : AE = EL : LU = sbp : scp = \frac{a^4 x - a^4}{x} : \frac{a^4 z}{x} = x -$

$a : z$. Quæ confirmantur ex eo, quod axis æquilibrii EN bi-
 secare debet angulum AND, per ea quæ ostensa sunt supra Art.
 XI, in *Applicatione* *, ubi in hypothefi $r = a$, id est, anguli
 PDN recti, sinus m , id est, sinus anguli DNE inventus est =
 sinui n , id est, sinui anguli ANE. Cum enim per Artic. cit.
 & *Act. Lips.* 1695, p. 548 †, sit $DK = x$; atque insuper $z : x =$

$$dx : dz = CA [x - a] : DN \left[\frac{xx - ax}{z} \right], \text{ \& } AN = \frac{yz - ax + aa}{z};$$

nec non, ob angulum AND bisectum, triangula NDK, NAE
 similia, erit $DN : DK$, hoc est, $\frac{xx - ax}{z} : x = [x - a : z =]$

$$AN \left[\frac{yz - ax + aa}{z} \right] : AE \left[\frac{yz - ax + aa}{x - a} = \frac{yz}{x - a} - a \right], \text{ ut}$$

antea.

(b) Quia $zdy = adx$, ideo $a^4 dx :$
 $x + a^4 y dx : xxz = a^4 z dy : x +$
 $a^4 y dx : xxz = [ob aa = xx - zz]$
 $a^4 z dy : x + (a^4 yxx dx - a^4 yz dx) :$
 $xxz = [ob xdx = zdz] a^4 z dy : x$
 $+ (a^4 yxz dz - a^4 yz dx) : xxz =$
 $a^4 z dy : x + a^4 y dz : x - a^4 yz dx : xx,$
 cujus integralis est $a^4 yz : x = fbps.$
 Sic quoque invenitur $scp = fa^4 dx :$
 $xxz = \int \frac{a^4 x x dx - a^4 z dx}{xxz} =$

$$\int \frac{a^4 x z dz - a^4 z z dx}{xxz} = \int \frac{a^4 x dz - a^4 z dx}{xx}$$

$$= \frac{a^4 z}{x}.$$

* Pag. 1045, Not. m.

† N°. LXVI, pag. 656, & 657,
 Not.

ARTICUL. XXXI.

De inventione Sectoris Cycloidici solidi, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile.

Conf. N^o. XCV, pag. 893, 894.

SInt [Fig. 52] radius AH = 1, semiperipheria ALF = c, AK = x, KL = √(2x - xx) = y, KJ = z, BL = AL = t; adeoque dy = (dx - xdx) : y, & dt = dx : y, crit conus IBD = (y+t)² × ½ cz; centri gravitatis ejus distantia ab A = x + ¼ z, adeoque momentum ejus respectu A = (½ xyyz + ½ xyzt + ½ xzt + ½ yyz + ½ yzt + ½ zzt) × c. Differentiale segmenti solidi Cycloidici BAD = (yy + 2yt + tt) c dx; momentum hujus differentialis ab A = (xyy + 2xyt + xtt) c dx, ipsum segmentum solidum BAD seu ∫(yy + 2yt + tt) × c dx = (- x + ½ xx - ½ x³ + yt + xyt - ½ tt + xtt) c; ∫xyy c dx = (⅔ x³ - ¼ x⁴) . c; ∫2xyt c dx = (x + ½ xx - ⅔ x³ - yt - ½ xyt + ⅔ xxyt + ⅓ tt) . c; ∫xtt c dx = (- ⅓ x - ¼ xx + ⅓ yt + ½ xyt - ¼ tt + ⅓ xxtt) . c (*); adeoque momentum totius segmen-

(*) Ecce rationem harum integrationum ∫yy dx = ∫(2x - xx) dx = xx - ⅓ x³; ∫2yt dx = 2xyt - ∫2xyt dy = [ob ydt = dx] 2xyt - xx - ∫2xtdy = [ob dy = (dx - xdx) . y = dt - xdt] 2xyt - xx - ∫2xt dt + ∫2xxt dt = [ob yy = 2x - 2xx] 2xyt - xx - ∫2yyt dt + ∫2xt dt = 2xyt - xx - ∫2yt dx + ∫2xt dt. Ergo ∫4y dx = 2xyt - xx + ∫2xt dt = 2xyt - xx

+ ∫(2tdt - 2tdy) = 2xyt - xx + tt - 2yt + ∫2y dt = 2xyt - xx + tt - 2yt + 2x. Hinc, dividendo per 2, est ∫2yt dx = xyt - ½ xx + ½ tt - yt + x; ∫tt dx = xtt - ∫2xt dt = xtt - ∫(2tdt - 2tdy) = xtt - tt + 2yt - ∫2y dt = xtt - tt + 2yt - 2x. Quare ∫(yy + 2yt + tt) dx = xx - ⅓ x³ + xyt - ½ xx + ½ tt - yt + x + xtt - tt + 2yt - 2x = -x + ½ xx - ⅓ x³ + yt + xyt - ½ tt + xtt.

No. CIII. menti solidi, seu $f(xy y + 2xyt + xtt) c dx = (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}yt + \frac{1}{8}xyt + \frac{1}{3}xxyt - \frac{1}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt). c$; addito momento conii IBKD, habetur momentum Sectoris IBAD, quod divisum per ipsum Sectorem, seu aggregatum segmenti & conii, dat distantiam centri gravitatis Sectoris ab A, quæ exprimitur per fractionem, cujus numerator crit $(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}xyyz + \frac{1}{12}yyz + \frac{1}{2}yt + \frac{1}{8}xyt + \frac{1}{3}xxyt + \frac{1}{3}xyzt + \frac{1}{8}yzzt - \frac{1}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt + \frac{1}{3}xzt + \frac{1}{12}zxtt). c$ & denominator $(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}yyz + yt + xyt + \frac{2}{3}yzt - \frac{1}{2}tt + xtt + \frac{1}{2}ztt). c$ (b).

Neglecto c , ponantur quantitates, quæ per tt multiplicatæ sunt in numeratore, ad quantitates, quæ per tt multiplicantur in denominatore, eam rationem habere quam habent quantitates, quæ utrobique sunt per t multiplicatæ, ut & eam, quam habent quantitates in quibus utrobique t non reperitur: sic æquivalere fræctio dictæ rationi.

Operatio talis: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}xz + \frac{1}{12}zx: -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}xxy + \frac{1}{3}xyz + \frac{1}{8}yzx: y + xy + \frac{2}{3}yz$; sublatis fræctionibus,

xxt . Porro $fxydx = f(2xxdx - x^3dx) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$; $f2xytdx = xxyt - fxxtdy = xxyt - \frac{1}{2}x^3 - fxxtdy = xxyt - \frac{1}{2}x^3 - fxxtdt + fxt^2dt = xxyt - \frac{1}{2}x^3 - fxytdt = fyytdt + f2xtdt = xxyt - \frac{1}{2}x^3 - fxytdx - fyt dx + f2xtdt = [quia in præced. inventum est $f2ytdx = xyt - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}tt - yt + x$, & $f2xtdt = f(2tdt - 2tdy) = tt - 2yt + f2ydt = tt - 2yt + 2x] xxyt - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}xyt + \frac{1}{4}xx - \frac{1}{4}tt + \frac{1}{2}yt - \frac{1}{2}x + tt - 2yt + 2x - fxytdx = xxyt - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}xyt + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}tt - \frac{1}{2}yt + \frac{1}{2}x - fxytdx$. Quare utrinque addendo $fxytdx$, & postea dividendo per 3, invenitur $fxytdx = \frac{1}{3}xxyt -$$

$\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}xyt + \frac{1}{12}xx + \frac{1}{4}tt - \frac{1}{2}yt + \frac{1}{2}x$. Eodem modo $fxttdx = \frac{1}{2}xxtt - fxttdt = \frac{1}{2}xxtt + f(ytdt - 2xtdt) = \frac{1}{2}xxtt + \frac{1}{2}xyt - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}tt - \frac{1}{2}yt + \frac{1}{2}x - tt + 2yt - 2x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}xx + \frac{2}{3}yt + \frac{1}{2}xyt - \frac{1}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt$.

(b) Hic in scribendo valorem segmenti BAD $= f(yy + 2yt + tt) c dx$, irrepsit error in primum terminum denominatoris. Debuisse enim poni $-x + &c.$ loco $-\frac{1}{2}x + &c.$ Hinc erronea est solutio ab Auctore inventa, quam tamen in *Actis Lips.* 1700, pag. 552, [No. XCV, pag. 894] non dedit nisi falso errore calculi.

Fig. 46.

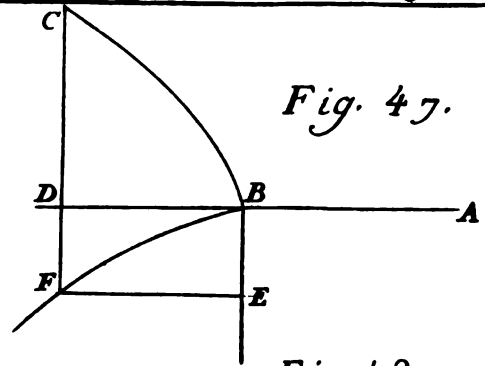
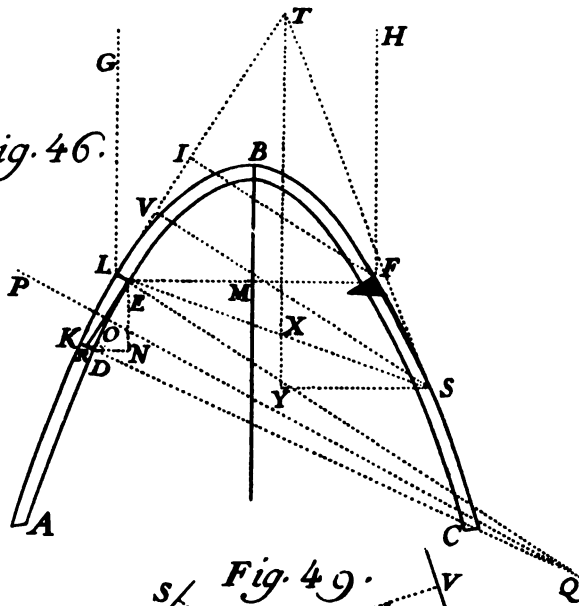


Fig. 47.

Fig. 48.

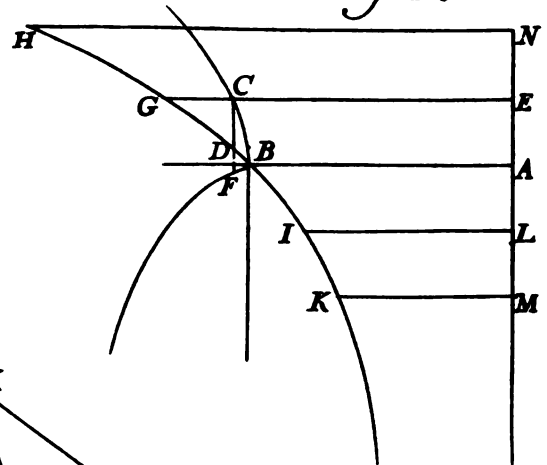


Fig. 49.

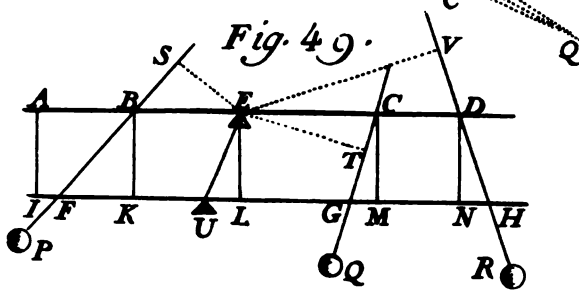


Fig. 51.

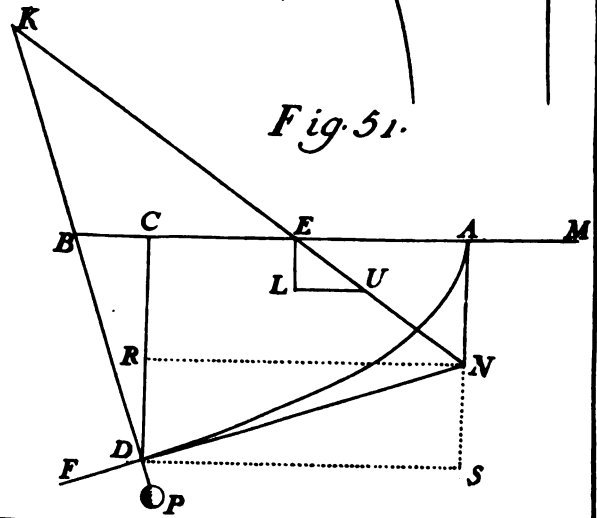


Fig. 50.

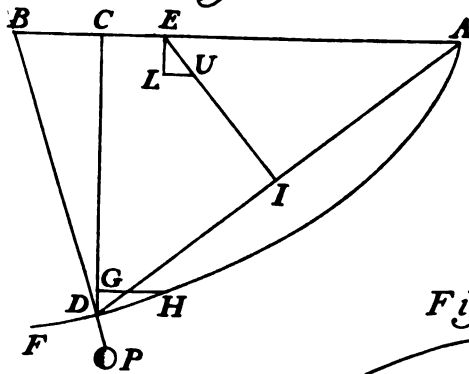
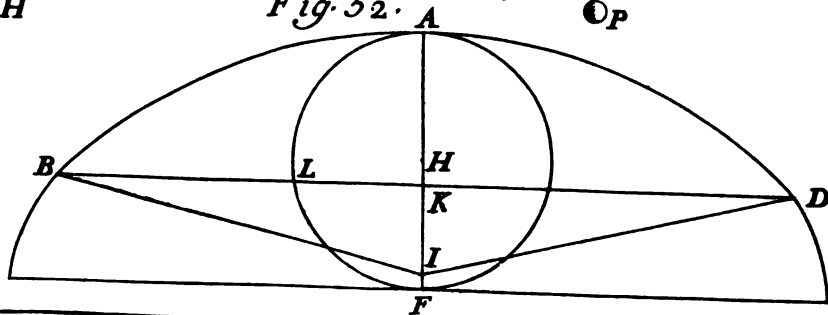


Fig. 52.



bus, — 3 + 6xx + 4xz + zz : — 6 + 12x + 4z = 6y + 2xy + No.CIII.
 8 xxy + 8 xyz + 2 yzz : 12y + 12xy + 8yz = [dividendo tertium
 & quartum terminum per 2y] 3 + x + 4xx + 4xz + zz : 6 + 6x
 + 4z = [differ. quinti & primi : different. sexti & secundi =]
 6 + x — 2xx : 12 — 6x = [dividendo per 2 — x] 3 + 2x : 6,
 feu [dividendo secundum & decimum per 2] — 3 + 6xx +
 4xz + zz : — 3 + 6x + 2z = 3 + 2x : 3. Multiplicando extre-
 ma & media, habetur 3xz + 12xz + 18xx — 9 = 6z + 4xz +
 12xx + 12x — 9, factaque reductione zz = 2z — $\frac{2}{3}$ xz — 2xx
 + 4x, & z = 1 — $\frac{2}{3}$ x + $\sqrt{(1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}xx)}$.

Porro — $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}xz + \frac{1}{12}zz$: — $\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}z$ = — $\frac{1}{2}x$
 — $\frac{1}{12}xx + \frac{1}{3}x^3$ — $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}xyyz + \frac{1}{12}yyzz$: — $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x^3$
 + $\frac{1}{2}yyz$ (c). Sublatis fractionibus, — 9 + 18xx + 12xz + 3zz :
 — 3

(c) Correcto errore qui est in
 quarto termino, & sublatis fractio-
 nibus, habetur hæc proportio, — 9
 + 18xx + 12xz + 3zz : — 3
 + 6x + 2z = — 18x — 3xx +
 16x³ — 9x⁴ + 12yyz + 3yyzz :
 — 6x + 3xx — 2x³ + 2yyz =
 [primus terminus per yy multiplica-
 tus minus tertio : secund. per yy mul-
 tipl. minus quarto =] — 9yy +
 18xxy + 18x + 3xx — 16x³ +
 9x⁴ : — 3yy + 6xy + 6x — 3xx
 + 2x³ = [substituendo 2x — xx
 pro yy] 12xx + 20x³ — 9x⁴ :
 12xx — 4x³ = 12 + 20x — 9xx :
 12 — 4x. Hinc (— 9 + 18xx +
 12xz + 3zz) : (— 3 + 6x + 2z) =
 (12 + 20x — 9xx) : (12 — 4x) :
 Sed supra, in reductione prioris pro-
 portionis, inventum fuit (— 3 + 6xx
 + 4xz + zz) : (— 3 + 6x + 2z) =
 (3 + 2x) : 3, feu (— 9 + 18xx +
 12xz + 3zz) : (— 3 + 6x + 2z)
 = 3 + 2x, unde (12 + 20x — 9xx) :

Jac. Bernoulli Opera.

(12 — 4x) = 3 + 2x, quæ æ-
 quatio reducta præbet xx — 8x +
 24 = 0, sicuti invenit Cel. Aucto-
 ris *Fraser* in *Act. Lips.* 1701, pag.
 175. Sed nihilominus, si in redu-
 cenda hac proportione — 9 +
 18xx + 12xz + 3zz : — 3 + 6x
 + 2z = — 18x — 3xx + 16x³
 — 9x⁴ + 12xyyz + 3yyzz : — 6x
 + 3xx — 2x³ + 2yyz, insistamus
 vestigiis Auctoris, prodibit [quod
 mirandum] eadem æquatio ab Au-
 ctore inventa xx = x + $\frac{1}{4}$. Nam
 multiplicando duos primos terminos
 per x, in reliquis substituendo valo-
 rem ipsius yy, & deinde per x di-
 videndo, fiet — 9x + 18x³ +
 12xxz + 3zzz : — 3x + 6xx + 2xz
 = — 18 — 3x + 16xx — 9x³ +
 24xz — 12xxz + 6zz — 3zzz :
 — 6 + 3x — 2xx + 4z — 2xz =
 [summa tertii & primi : summ. quar-
 ti & secundi =] — 18 — 12x +
 16xx + 9x³ + 24xz + 6zz : — 6
 + 4xx

Eccccc

No. CIII. — $3 + 6x + 2z = -18x - 3xx + 16x^3 - 9x^4 + 12xyyz + 3yyz$: — $3x + 3xx - 2x^3 + 2yyz$. Multiplicando duos primos terminos per x , (^d) in reliquis substituendo valorem ipsius

+ $4xx + 4z$, seu duos primos terminos iterum per x dividendo, — $9 + 18xx + 12xz + 3zz$: — $3 + 6x + 2z = -18 - 12x + 16xx + 9x^3 + 24xz + 6zz$: — $6 + 4xx + 4z$; multiplicando extrema ac media, & reducendo, fiet $zz = ((30xx - 104x + 24)z + 18x^3 - 69xx - 24x + 72) : (-12x + 36) = 2z - \frac{1}{3}xz - 2xx + 4x$, qua reducta, habetur $z = (6x^3 - 51xx + 168x - 72) : (-2xx + 16x - 48) = (-6x + 3) : 2 = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{(1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xx)}$, id est $(3 - 10x) : 6 = \sqrt{(1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xx)}$, unde iterum prodit $xx = x + \frac{1}{4}$. Verum, ut in citato loco *A. Flor. Lips.* monuit Cel. *Job. BERNOULLI*, radices hujus æquationis sunt inutiles, nec quæsito satisfaciunt. Cujus rei ratio est, quod in reductione æquationis quæ relationem exprimit inter z & x , positum fuit $z = (6x^3 - 51xx + 168x - 72) : (-2xx + 16x - 48) = (-6x + 3) : 2$; quod non necessario verum est, quia hæc æquatio proprie non est ea ad quam pervenitur in reductione, sed [sublata fractione & membris omnibus ad unam partem positis] $2xxz + 16xz + 48z + 6x^3 - 51xx + 168x - 72 = 0$, quæ quantitas cum composita sit ex duobus factoribus $xx - 8x + 24$, & $2z + 6x - 3$, satisfit æquationi, si modo alterutra harum quantitatum fuerit = 0.

Solam autem priorem $xx - 8x + 24$ esse = 0, ex priore nostra resolutione patet. Cum igitur hujus æquationis radices sint imaginariæ, nullus per hanc methodum inveniri potest Sector solidus, cujus centrum gravitatis sit algebraice determinabile.

(^d) Si Auctor duos primos terminos, non per x , sed per yy aut $2x - xx$ multiplicasset, potuisset evitare radices inutiles; nam nec huic proportioni — $9 + 18xx + 12xz + 3zz$: — $3 + 6x + 2z = -18x - 3xx + 16x^3 - 9x^4 + 12xyyz + 3yyz$: — $3x + 3xx - 2x^3 + 2yyz$, quam, per errorem, loco hujus — $9 + 18xx + 12xz + 3zz$: — $3 + 6x + 2z = -18x - 3xx + 16x^3 - 9x^4 + 12xyyz + 3yyz$: — $6x + 3xx - 2x^3 + 2yyz$ sibi resolvendam sumsit, satisfacit æquatio ab ipso inventa $xx = x + \frac{1}{4}$. Multiplicatis enim duobus primis terminis per yy , habetur — $9yy + 18xxyy + 12yyxz + 3yyz$: — $3yy + 6xyy + 2yyz = -18x - 3xx + 16x^3 - 9x^4 + 12xyyz + 3yyz$: — $3x + 3xx - 2x^3 + 2yyz = [\text{diff. primi \& tertii: diff. secundi \& quarti} =] 9yy - 18xxyy - 18x - 3xx + 16x^3 - 9x^4 : 3yy - 6xyy - 3x + 3xx - 2x^3$ seu [duos primos terminos iterum per yy dividendo] — $9 + 18xx + 12xz + 3zz$: — $3 + 6x + 2z = [\text{substituendo } 2x - xx \text{ pro } yy] -12xx - 20x^3 + 9x^4 : 3x -$

sius yy , & deinde dividendo per x , fit $-9x + 18x^2 + 12xxz + \text{No. CIII.}$
 $3xz: -3x + 6xx + 2xz = -18 - 3x + 16xx - 9x^2 + 24xz -$
 $12xxz + 6xz - 3xz: -3 + 3x - 2xx + 4x - 2xz = [\text{summ.}$
 $\text{tertii \& primi: summ. quarti \& secundi} =] -18 - 12x +$
 $16xx + 9x^2 + 24xz + 6xz: -3 + 4xx + 4x$, seu [duos primos
 terminos iterum per x dividendo] $-9 + 18xx + 12xz + 3xz:$
 $-3 + 6x + 2z = -18 - 12x + 16xx + 9x^2 + 24xz + 6xz:$
 $-3 + 4xx + 4x$. Multiplicando extrema & media, ac redu-
 cendo, fit $zz = ((30x^2 - 104xx + 60x)z + 18x^4 - 69x^3 +$
 $30xx + 72x - 27): (-12xx + 36x - 9)^{(c)} = [\text{per super.}$
 $\text{demonstr.}] 2z - \frac{9}{2}xz - 2xx + 4x$; qua reducta, habetur $z =$
 $(6x^4 - 51x^3 + 132xx - 108x + 27): (-2x^3 + 16xx - 36x$
 $+ 18) = [\text{per sup. dem.}] 1 - \frac{1}{3}x + \sqrt{(1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}xx)}$; unde
 $(6x^4 - 51x^3 + 132x^2 - 108x + 27): (-2x^3 + 16xx - 36x$
 $+ 18) + \frac{1}{3}x - 1 = \sqrt{(1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}xx)}$; id est, $(\frac{10}{9}x^4 - \frac{13}{3}x^3$
 $+ 68xx - 48x + 9): (-2x^3 + 16xx - 36x + 18) = \sqrt{(1$
 $+ \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}xx)}$; seu, [multiplicando per 3] $\sqrt{(9 + 12x -$
 $2xx) = (10x^4 - 83x^3 + 204xx - 144x + 27): (-2x^3 +$
 $16xx - 36x + 18) = [\text{divisis fractionis terminis per } x - 3]$
 $(10x^3 - 53xx + 45x - 9): (-2xx + 10x - 6) = [\text{divisis}$
 $\text{iisdem per } xx - 5x + 3] (10x - 3): -2$; unde tandem pro-
 dit $xx = x + \frac{1}{4}$, & $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$, & $z = [1 + \frac{1}{3}x + \sqrt{(1 + \frac{1}{3}x$
 $- \frac{2}{9}xx)]$
E e e e e e e z

$12xx + 4x^3 = -12x - 20xx + 9x^2:$
 $3 - 12x + 4xx$. Sed supra in resolu-
 tione primis proportionis invenit
 $-3 + 6xx + 4xz + 2z: -3 +$
 $6x + 2z = 3 + 2x: 3$, hoc est,
 | primum terminum per 3 multipli-
 cando, & quartum per 3 dividen-
 do] $-9 + 18xx + 12xz + 3z: -3$
 $+ 6x + 2z = 3 + 2x: 1$. Quare
 $-12x - 20xx + 9x^2: 3 - 12x + 4xx$
 $= 3 + 2x: 1$; multiplicando extre-
 ma & media, & omnia membra ad
 unam partem ponendo, proveniet
 $x^3 - 8xx + 18x - 9 = 0$; in qua

æquatione cum non contineatur ista
 $xx = x + \frac{1}{4}$; patet hanc posteriorem
 non satisfacere.
 (c) Quia uterque terminus fra-
 ctionis $(6x^4 - 51x^3 + 132xx - 108x$
 $+ 27): (-2x^3 + 16xx - 36x + 18)$
 per $x^3 - 5xx + 18x - 9$ divisibilis
 est, prodeunte in quoto $(6x - 3):$
 -2 ; debuisset concludi, esse vel
 $z = (6x - 3): -2$, vel $x^3 - 8xx$
 $+ 18x - 9 = 0$, vel utramque æ-
 quationem simul locum habere: sed
 solam posteriorem satisfacere modo
 ostensum est.

No.CIII. $-\frac{2}{3}xx] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}. (f)$

(f) Neque hic consequenter ratiocinatus est Auctor, quia fecit $z = 3$: -2 , & $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$; sequetur z esse $-3\sqrt{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x - \sqrt{1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}xx}$.
 $(6x^4 - 51x^3 + 132xx - 108x + 27) : \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}xx$.
 $(-2x^4 + 16xx - 36x + 18) = (6x -$

ARTICUL. XXXII.

Quædam formulæ æquationum differentio-differentialium reductæ ad æquationes differentiales primi generis.

Confer. N^o. XCIII, pag. 864 & seq.
& XCVI, pag. 897 & seq.

Sint x & y coordinatæ alicujus curvæ, z curvæ longitudo, p quantitas data per x , q quantitas data per z , $dp = hdx$, & $dq = idz$, a & b quantitates constantes.

I. Existente dy constante,

<p>1. $hdz^2 d^3x - hdx ddx^2 = dh dz^2 ddx$</p> <p>2. $hdz^2 d^3x - 3hdx ddx^2 = dh dz^2 ddx$</p> <p>3. $hpdz^2 d^3x - 3hpdxd dx^2 = pdh dz^2 ddx - 2hh dx dz^2 ddx$</p> <p>4. $qidz^2 d^3x = idx^2 ddx^2 + 2idz^2 ddx^2 + didx dz^2 ddx$</p> <p>5. $qidz^2 d^3x + 2iidxdz^2 ddx = qidz^2 ddx^2 + qidix^2 ddx^2 + qdidx dz^2 ddx$</p> <p>6. $hpdz^2 d^3x - hpdxd dx^2 = pdh dz^2 ddx - 2hh dx dz^2 ddx$</p>	<p>erit $dy = adx : \sqrt{(bb - 2bp + pp - aa)}$</p> <p>$dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$ & $(a - p)dx : \sqrt{(2ap - pp)}$</p> <p>$dy = adx : \sqrt{(pp - aa)}$ & $(p - a)dx : \sqrt{(2ap - aa)}$</p> <p>$dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$ & $(a - q)dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$</p> <p>$dy = adz : \sqrt{(aa + qq)}$ & $(aq - bb)dz : b\sqrt{(bb - 2aq + qq)}$</p> <p>$dy = apdx : \sqrt{((bb - aa)pp - 2aabp + a^4)}$</p>
--	---

II. Exi-

II. Existente dz constante,

7. $phdy^2 d^3x + 3pbxdx^2 + 2hbxdy^2 ddx - -$ erit $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$
 $= pbdy^2 ddx$

8. $hdy^2 d^3x + 3hdx^2 ddx = dbdy^2 ddx - - - dy = adx : \sqrt{(pp - aa)}$

9. $idy^2 d^3x + 3idx^2 ddx = didy^2 ddx . - - - dy = adx : \sqrt{(aa + qq)}$

10. $idxdy^2 d^3x + 3idx^2 ddx^2 = 2idz^2 ddx^2 - - - dy = qdx : \sqrt{(aa + qq)}$
 $+ didxdy^2 ddx$

Possunt autem hæ æquationes differentiales tertii generis prius ad alias secundi generis reduci ita (*). Pro prima & secunda,

E e e e e e e 3 pono

(*) Commodius hæ æquationes integrantur reducendo ipsarum terminos ad differentia logarithmica per simplicem divisionem. Sic, in prima æquatione, dividendo per $bdz^2 ddx$ habetur $d^3x : ddx - dx^2 dx : dz^2 = db : b$, seu [ponendo $dz^2 dx : dx^2 dx$, ob dy const.] $d^3x : ddx - ddx : dz = db : b = 0$, cujus integralis est $l. ddx - l. dz - l. b = l. const.$ Sumendo logarithmorum numeros, $ddx : bdz^2 = const.$

Similiter in secunda æquat. dividendo per eandem quantitatem $bdz^2 ddx$, provenit $d^3x : d^2x - 3dx^2 dx : dz^2 [-3ddx : dz] - db : b = 0$; cujus integralis est $l. ddx - 3l. dz - l. b = l. const.$, & sumendo numeros $ddx : bdz^2 = const.$

Sic dividendo terminos tertie æquationis per $hpdz^2 ddx$, habetur $d^3x : ddx - 3dx^2 dx : dz^2 [-3ddx : dz] - db : b + 2bdx : p [+2dp : p] = 0$, integrando $l. ddx - 3l. dz - l. b + 2l. p = l. const.$ sumendoque

numeros $p^2 ddx : bdz^2 = const.$
 In quarta, dividendo per $idxdz^2 ddx$, est $d^3x : d^2x - dx^2 dx : dz^2 [-ddx : dz] - 2ddx : dx - di : i = 0$, integrando $l. ddx - l. dz - 2l. dx - li = l. const.$ Unde $ddx : idx^2 dz = const.$

In quinta, dividendo per $qidz^2 ddx$ est $d^3x : d^2x + 2idx : q [+2dq : q] - dx^2 dx : dz^2 [-ddx : dz] - 2ddx : dx - di : i = 0$, hinc $qq ddx : idx^2 dz = const.$

In sexta, dividendo per $hpdz^2 ddx$, est $d^3x : ddx - dx^2 dx : dz^2 [-ddx : dz] - db : b + 2bdx : p [+2dp : p] = 0$; hinc $pp ddx : bdz^2 = const.$

In septima, dividendo per $pbdy^2 ddx$, habetur $d^3x : ddx + 3dx^2 dx : dy^2 [-3ddy : dy, ob dz constantem] + 2bdx : p [+2dp : p] - db : b = 0$; proinde $pp ddx : bdy^2 = const.$

In octava, dividendo per $hdy^2 ddx$, est $d^3x : ddx + 3dx^2 dx : dy^2 [-3ddy : dy] - db : b = 0$; proinde $d^3x : bdy^2 = const.$

Eodem

No. CIII. pono $ddx^m : h^m dx^2 = \text{constanti}$, unde differentiando habetur, $mb^m dx^2 ddx^{m-1} - d^3 x - 2h^m dx ddx ddx^m - mb^{m-1} dh dx^2 ddx^m = 0$.

dividendoque per $mb^{m-1} ddx^{m-1}$, fiet $h dx^2 d^3 x - \frac{2}{m} h dx ddx ddx^m - dh dx^2 ddx^m = 0$, locoque $dx ddx$ ponendo $dx ddx$, $h dx^2 d^3 x - \frac{2}{m} h dx ddx^2 = dh dx^2 ddx$. Hanc æquationem comparo cum

duabus primis, indeque reperio $\frac{2}{m} = 1$, & $\frac{2}{m} = 3$, hoc est $m = 2$, & $m = \frac{3}{2}$; adeoque loco $ddx^m : h^m dx^2 = \text{const.}$ invenio pro priore $ddx^2 : h dx^2 = \text{const.}$, seu $ddx : h dx = -dy : a$, & pro posteriore $\sqrt[3]{ddx^2} : dx^2 \sqrt[3]{h} = \text{const.}$ seu $ddx^2 : h h dx^6 = \text{const.}$ seu $ddx : h dx^3 = -1 : a dy$ (b).

Ut jam porro reducantur hæ æquationes ad differentiales primi gradus, pono $adx = t dy$, unde fit $adx = dy \sqrt{(aa + tt)}$ & $addx = dy dt$, qui valores substituti exhibent, loco prioris $ddx : h dx = -dy : a$, hanc $adt : \sqrt{(aa + tt)} = -h dy = -ah dx : t$, seu $t dt : \sqrt{(aa + tt)} = -h dx = -dp$, & $\sqrt{(aa + tt)} = b - p = adx : dy$. Hinc $(bb - 2bp + pp) dy^2 = a adx^2 = a adx^2 + a dy^2$, & $dy = adx : \sqrt{(bb + 2bp + pp - aa)}$; loco posterioris $ddx : h dx^3 = -1 : a dy$, hanc $a^3 dt : (aa + tt)^{3/2} = -h dy = -ah dx : t$, seu $a adt : (aa + tt)^{3/2} = -h dx = -dp$, & $aa : \sqrt{(aa + tt)} = p$, &c. (c)

Pro

Eodem modo, in nona, $ddx : idy^3 = \text{const.}$

In decima, dividendo per $idx dy^2 ddx$, est $d^3 x : ddx + 3 dx ddx : dy^2 [-3 ddy : dy] - 2 dx^2 ddx : dx dy^2 - di : i = 0$, sive, quia $dx^2 = dx^2 + dy^2$, $d^3 x : ddx - d dy : dy - 2 ddx : dx - di : i = 0$; proinde $ddx : idx^2 dy = \text{const.}$

(b) Quia assumpta constans a potest esse affirmativa vel negativa; ni-

hil interest, utrum ponatur $ddx : h dx = dy : a$, vel $-dy : a$; item $ddx : h dx^3 = 1 : a dy$ vel $-1 : a dy$.

(c) Generalius est $aa : \sqrt{(aa + tt)} = b + p$, intelligendo per b quantitatem affirmativam vel negativam. Substituto valore ipsius $t = adx : dy$, habetur $ady : \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = b + p$, quæ reducta præbet $dy = (b + p) dx \sqrt{(aa - bb - 2bp - pp)} = [\text{in casu } b = 0] p dx : \sqrt{(aa - pp)}$;

DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIUM REDUCTIO. 1137

Pro tertia, pono $p^r ddx^m : b^m dx^2 = \text{const.}$ & reperitur $r = \frac{1}{3}$, & No. CIII
 $m = \frac{1}{3}$; adeoque $\sqrt[3]{p^r ddx^2 : dx^2 \sqrt[3]{hb}}$ seu $ppdx : h dx^3 = \text{const.} =$
 $\mp a : dy$ (^d).

Pro quarta, pono $i^m dx^r ddx^n dz^s = \text{const.}$ & reperietur $m =$
 -1 , $r = -2$, $n = 1$, $s = -1$, proinde $ddx : idx^2 dz =$
 $\text{const.} = \pm 1 : ady$. (^e).

Pro quinta, pono $q^i dx^r ddx^n dz^s = \text{const.}$ & reperitur $l = 2$,
 $m = -1$, $r = -2$, $n = 1$, $s = -1$, proinde $qqddx : idx^2 dz$
 $= \text{const.} = \pm a : dy$ (^f).

Similiter pro sexta (^g), fiet $ppddx : h dx = \text{const.} = ady$.

Pro

pp); in casu autem $b = a$, erit
 $dy = (p - a) dx : \sqrt{(2ap - pp)}$, vel
 etiam, quia signum radice potest ne-
 gative accipi, $(a - p) dx : \sqrt{(2ap -$
 $pp)}$.

(^d) Substituendo $dy dt : a$ pro
 ddx , & $dy \sqrt{(aa + tt)} : a$ pro dz , loco
 æquationis $ppddx : h dx^3 = a : dy$,
 habetur $appdt : (aa + tt)^{3:2} = k dy$
 $= abdx : t$, seu $tdt : (aa + tt)^{3:2} =$
 $b dx : pp = dp : pp$, & integrando
 $-1 : \sqrt{(aa + tt)} = -1 : p + 1 : b$,
 seu $bbpp : (aa + tt) = bb - 2bp + pp$,
 vel, pro tt ejus valorem substituendo,
 $bbppdy^2 : (aady^2 + aadx^2) = bb -$
 $2bp + pp$, unde oritur $dy = a(b -$
 $p) dx : \sqrt{(bbpp - aabb + 2aabbp - aapp)}$
 $= [\text{in casu } b = \infty] adx : \sqrt{(pp -$
 $aa)}$, & $= [\text{in casu } b = a] (a -$
 $p) dx : \sqrt{(2ap - aa)}$ vel $(p - a) dx :$
 $\sqrt{(2ap - aa)}$.

(^e) Substituendo $dy dt : a$ pro ddx ,
 & $idy : a$ pro dx , loco æquationis
 $ddx : idx^2 dz = 1 : ady$ habetur $aads :$
 $tt = idz = dq$, & integrando $b -$
 $aa : t = q$; substituto valore ipsius t ,
 erit $b - q = ady : dx$, hoc est, dy

$= (b - q) dx : a$, seu [si malimus
 dy comparare cum dz , substituto pro
 d : ejus valore $\sqrt{(dz^2 - dy^2)}$ & post-
 modum reducta æquatione] inve-
 niemus $(b - q) dx : \sqrt{(aa + bb - 2bq$
 $+ qq)} = [\text{in casu } b = 0] - q dz :$
 $\sqrt{(aa + qq)}$; scribendo autem a pro
 b & bb pro $aa + bb$, prodit altera Au-
 ctoris formula $dy = (a - q) dz : \sqrt{(bb$
 $- 2aq + qq)}$.

(^f) Substituendo rursus $dy dt : a$
 pro ddx , & $idy : a$ pro dx , æquatio
 $qqddx : idx^2 dz = a : dy$ transit in
 hanc $dt : tt = idz : qq = dq : qq$,
 ejus integralis est $-1 : t =$
 $-1 : q + 1 : b$, hoc est, $-dy :$
 $adx = -1 : q + 1 : b$, seu $dy =$
 $a(b - q) dx : bq = adz : \sqrt{(aa + tt)}$
 $= [\text{ob } t = bq \cdot (b - q)] a(b - q) dx :$
 $\sqrt{(aabb - 2aabbq + aqq + bbqq)} =$
 $[\text{in casu } b = \infty] adz : \sqrt{(aa + qq)}$;
 scribendo autem $bb : a$ pro b , & $bb :$
 $\sqrt{(bb - aa)}$ pro a , prodit altera Au-
 ctoris formula $dy = \pm (aq - bb) dz :$
 $b \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$.

(^g) Æquatio sexta $ppddx =$
 $abdydz$, scriptis $dy dt : a$ pro ddx , &
 $dy \sqrt{(aa + tt)}$ pro adz , æquivalet
 isti

- No. CIII. Pro septima, fit ^(h) $hdy^3 : ppddx = \text{const.} = dz : a$.
 Pro octava, fit ⁽ⁱ⁾ $hdy^3 : ddx = \text{const.} = adz$.
 Pro nona, fit ^(k) $idy^3 : ddx = \text{const.} = adz$.
 Pro decima, fit ^(l) $ddx : idx^2 dy = \text{const.} = 1 : adz$. ^(m)

isti $ppdt = abdy \sqrt{(aa + tt)} =$
 $aabdx \sqrt{(aa + tt)} : t = aadp \sqrt{(aa +$
 $tt)} : t$, seu $tdt : \sqrt{(aa + tt)} = aadp :$
 pp , cujus integralis est $\sqrt{(aa + tt)}$
 $= b - aa : p = adz : dy$; hinc
 $dy = apdx : (bp - aa)$, & $dy^2 =$
 $aappdx^2 : (bbpp - 2aapp + a^4) =$
 $(aappdx^2 + aappdy^2) : (bbpp - 2aapp$
 $+ a^4)$; & reducendo $dy = apdx :$
 $\sqrt{(bbpp - aapp - 2aapp + a^4)}$.

^(h) Ad resolvendam æquationem septimam & sequentes, loco æquationis $adx = idy$, debet assumi æquatio $adx = t dz$, unde fiet $dy = dx \sqrt{(aa - tt)} : t$, & $addx = dtdz$ qui valores in æquatione septima $hdy^3 : ppddx = dz : a$ substituti dant

$hdx^3 (aa - tt)^{3/2} : ppi^3 dtdz = dz : aa$,
 hoc est, $hdx : pp = dp : pp = t^3 dz^2 dt : aadx^2$
 $(aa - tt)^{3/2} = tdt : (aa - tt)^{3/2}$, &
 integrando $1 : b - 1 : p = 1 : \sqrt{(aa -$
 $tt)} = dx : idy = dz : ady$. Qua-
 drando est $(pp - 2bp + bb) : bbpp$
 $= dz^2 : aady^2 = (dx^2 + dy^2) : aady^2$;
 unde oritur $dy = bpdx : \sqrt{(aapp -$
 $bbpp - 2aapp + aabb)} = [\text{in casu}$
 $b = \infty] pdx : \sqrt{(aa - pp)}$.

⁽ⁱ⁾ Æquatio octava $hdy^3 : ddx = adz$, factis similibus substitutionibus, transit in hanc $dp = aadt : (aa -$
 $tt)^{3/2}$, cujus integralis est $b + p =$
 $aa : \sqrt{(aa - tt)} = aadx : t dy =$
 $adz : dy$, & quadrando $bb + 2bp +$
 $pp = aadz^2 : dy^2 = (aadx^2 + aady^2) :$

dy^2 ; unde oritur $dy = adz : \sqrt{(pp +$
 $2bp + bb - aa)} = [\text{in casu } b = 0]$
 $adz : \sqrt{(pp - aa)}$.

^(k) Æquatio nona $idy^3 : ddx = adz$ transit in hanc $idx^3 : (aa -$
 $tt)^{3/2} : t^3 dt = dx^2$, seu $dq = a^3 dt :$
 $(aa - tt)^{3/2}$, cujus integralis est
 $b + q = at : \sqrt{(aa - tt)} = adz :$
 dy ; unde $dy = adz : (b + q)$, seu
 quadrando $dy^2 = aadz^2 : (bb + 2bq$
 $+ qq) = (aadz^2 - aady^2) : (bb +$
 $2bq + qq)$; unde iterum prodit dy
 $= adz : \sqrt{(aa + bb + 2bq + qq)}$
 $= [\text{in casu } b = 0] adz : \sqrt{(aa +$
 $qq)}$.

^(l) Æquatio ultima $ddx = idx dy :$
 adz mutatur in hanc $dtdz = ittdz dy :$
 $aa = ttdy dq : aa = ttdq dx \sqrt{(aa - tt)} :$
 $aat = ttdq dx \sqrt{(aa - tt)} : a^2$, seu $dq = a^2 dt :$
 $tt \sqrt{(aa - tt)}$, cujus integralis est q
 $= b - a \sqrt{(aa - tt)} : t = b -$
 $ady : dx$; unde $dy = (b - q) dx : a$,
 seu quadrando $dy^2 = (b - q)^2 dx^2 : aa$
 $= (b - q)^2 dx^2 : aa - (b - q)^2 dy^2 :$
 aa ; unde prodit $dy = (b - q) dz :$
 $\sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)} = [\text{in casu}$
 $b = 0] - q dz : \sqrt{(aa + qq)}$.

^(m) Liqueat ex præcedentibus annotationibus, has æquationes, excepta prima, quarta, quinta & sexta, ab Auctore non fuisse perfecte integratas. Monuit quidem in Solutione Problematis isoperimetrici, cui hæ æquationes inserviunt [No. XCIII, pag. 879] posse quantitates

p & q augeri minuive quantitate quacun- que constante; & hoc pacto solu- tiones reddi generalissimas: sed præ- cipitanter hoc dictum est, cum in qui- busdam harum æquationum, ut in tertia, quinta, sexta & septima, non p aut q , sed $1 : p$ aut $1 : q$ possint augeri vel minui quantitate aliqua con- stante, ut ex præcedentibus integra- tionibus apparet.

Cæterum, sine assumptione novæ æquationis $a dx = tdy$ aut $adx = tdx$, possunt hæ æquationes ad diffe- rentiales primi gradus reduci. Sit æ- quatio prima $ddx : bdx = dy : a$, multiplicando per dx numeratorem & denominatorem prioris membri, habetur $dy : a = dxddx : bdx dx = [ob dxddx = dxddx] ddx : bdx = ddx : dp$, hoc est $dydp : a = ddx$, & integrando $(b - p) dy : a = dz$.

Sit jam æquatio secunda $ddx : bdx^3 = 1 : ady = dx d dx : bdx dx^3 = ddx : bdx dx^2 = ddx : dp dx^2$, seu $dp : ady = ddx : dx^2$, & integrando $(b + p) : ady = 1 : dx$.

Æquatio tertia $a : dy = ppddx : bdx^3 = ppdxddx : bdx dx^3 = ppddx : bdx dx^2 = ppddx : dp dx^2$, seu $adp : ppdy = ddx : dx^2$, integrando $a : bdy = a : pdy = 1 : dx$.

Æquatio quarta $1 : ady = ddx :$

$idx^2 dx = ddx : dx^2 dq$, seu $dq : ady = \text{No. CIII. } ddx : dx^2$, & integrando $(q - b) : ady = 1 : dx$.

Æquatio quinta $a : dy = qqddx : idx^2 dx = qqddx : dx^2 dq$ seu $adq : qqdy = ddx : dx^2$, & integrando $a : bdy = a : qdy = 1 : dx$.

Æquatio sexta $ady = ppddx : bdx = ppdxddx : bdx dx = ppddx : bdx = ppddx : dp$, seu $adydp : pp = ddx$, in- tegrando $ady : b - ady : p = dz$.

Æquatio septima $dx : a = bdy^3 : ppddx = bdx dy^3 : ppdxddx = [ob dxddx = dyddy] - bdx dy^2 : ppddy$, seu $dzddy : ady^2 = dp : pp$, & inte- grando $- dz : ady = 1 : p - 1 : b$.

Æquatio octava $adx = bdy^3 : ddx = bdx dy^3 : dxddx = dpdy : ddy$, seu $- adzddy : dy^2 = dp$, & inte- grando $adx : dy = p + b$.

Æquatio nona $adx = idy^3 : ddx = dqdy^3 : dzddx$, seu $dq = adz^2 ddx : dy^3 = (ady^2 ddx + adx^2 ddx) : dy^3 = [ob dxddx = dyddy] (adyddx - adxddy) : dy^3$, & integrando $b + q = adx : dy$.

Æquatio decima $1 : adz = ddx : idx^2 dy = dzddx : dqdx^2 dy$, seu $dq = adz^2 d dx : dx^2 dy = (ady^2 ddx + adx^2 ddx) : dx^2 dy = (adyddx - adxddy) : dx^2$, & integrando $q = b - ady : dx$.

F I N I S.

EMENDANDA IN TEXTU.

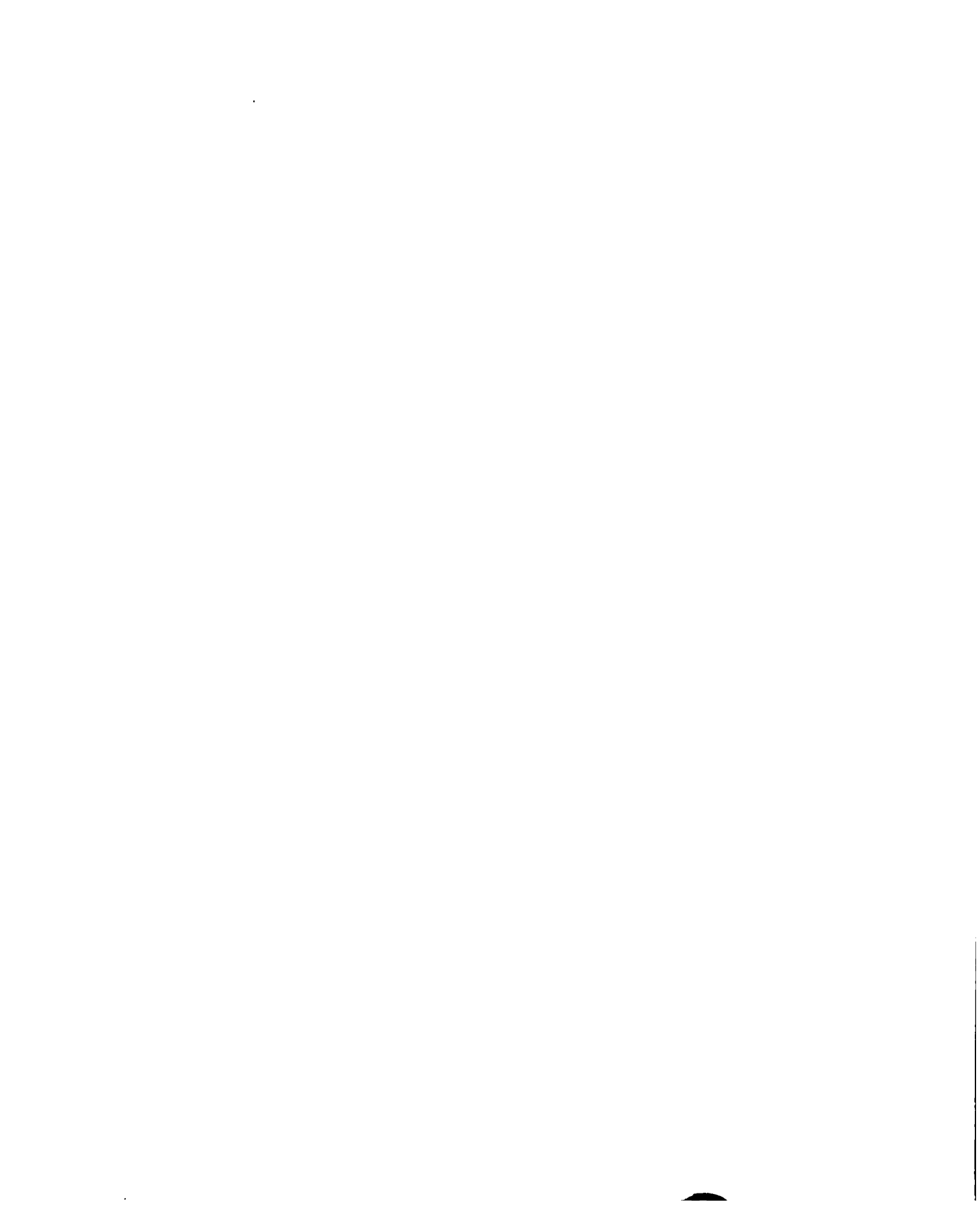
		<i>a c</i>	<i>lege</i>	<i>b c</i>
<i>Pag.</i>	<i>lin.</i>			
94	11. & 12	<i>nb : m</i>	<i>l.</i>	<i>mb : n</i>
110.	23.	speculationes	<i>l.</i>	speculatione
172.	3 & 4.	mou-ment	<i>l.</i>	mouvement
182.	<i>In Tabella</i>	52.0 e a —	<i>l.</i>	52.0 e a +
281.	4.	BM	<i>l.</i>	BN
305.	<i>penult.</i>	RT.	<i>l.</i>	AT
323.	7.	pressioni ,	<i>l.</i>	pressionum
329.	§. III. l. 7.	CDAF	<i>l.</i>	HDAF
407.	l. 5. <i>a fine.</i>	Solis ex azim.	<i>l.</i>	Solis ex azimutho
433.	<i>ult.</i>	2 ry = yy.	<i>l.</i>	2 ry + yy
435.	15.	ANIGK.	<i>l.</i>	ANIGB
441.	20.	PB + BH	<i>l.</i>	PB + PH
455.	l. 13 <i>a fine.</i>	est a BB [1]	<i>l.</i>	est a AD [1]
467.	28.	GC × GH.	<i>l.</i>	GC × CH
475.	5.	conctatu	<i>l.</i>	contactu
476.	3.	allius	<i>l.</i>	alius
503.	<i>ult.</i>	axis	<i>l.</i>	axi
505.	17.	radius infinite ,	<i>l.</i>	radius circuli infinite
514.	8.	Fig. 2.	<i>l.</i>	Fig. 1.
516.	<i>post lin. ult.</i>	<i>addatur</i> Vid. Nus. CIII. Art. XVI.		
579.	2.	umbiculo.	<i>l.</i>	umbilico.
601.	<i>ante pen.</i>	efficit	<i>l.</i>	effecit
630.	12.	GBC, HBC, KBC ,	<i>l.</i>	GBA , HBA , KBA
638.	30.	AEC.	<i>l.</i>	DEC
708.	7 <i>a fine.</i>	= 3 a ⁶ x	<i>l.</i>	3 a ⁵ x
945.	1.	[Fig. 1]	<i>l.</i>	[Fig. 2]
968.	4.	$\pm \frac{d}{t} —$ <i>dele</i> —		
1025	11.	QC = x.	<i>l.</i>	QC = y
1032.	2 & 3.	$\sqrt{y} H K L$,	<i>l.</i>	$\sqrt{y} H K \lambda$
	<i>& similiter in Notis</i>	Col. 1. l. 8,	Col. 2. l. 3	
1038.	10.	ABP	<i>l.</i>	APB
1065.	1.	$\sqrt{(aa = 22)}$	<i>l.</i>	$\sqrt{(aa — 22)}$
1102.	3 <i>a fine.</i>	BO [x]	<i>l.</i>	BG [x]
1105.	3.	+ lx ^{l-2}	<i>l.</i>	lx ^{l-2} _{pu}
	14.	+ lx ^{l-1} BV.t: a,	<i>l.</i>	— lx ^{l-1} BV.t: a
1110.	5 <i>a fine.</i>	xydt ² : tt,	<i>l.</i>	xydt ² : ast
	<i>l. ult.</i>	BH	<i>l.</i>	PH.

EMEN-

EMENDANDA IN NOTIS.

<i>Pag.</i>	<i>Col.</i>	<i>lin.</i>	<i>respondit, lege</i>	<i>respondet</i>
483.	2.	12.	$(dy^2 + dy^2)$	$(dx^2 + dy^2)$
493.	1.	7.	$dH a$	$dH m$
494.	2.	7 & 8.	NB,	HB
513.	1.	4 ^{à fine} .	BFH	BFE
534.	1.	7.	BG : BC,	BG : BL
—	—	4 <i>a fine</i> ,	reflexum	reflexus
556.	2.	4 <i>a fine</i> ,	AD	AB
579.	2.	7 <i>a fine</i> ,	$dx dy$,	$dx dy^2$
581.	2.	3 <i>a fine</i> ,	Nos lup	Nos
581.	2.	3.	QY	Qy
623.	2.	1.	RH	KH
651.	1.	8 & 10 <i>a fine</i> ,	Mm	Nm
758.	2.	6.	CBDM,	CBDH
771.	1.	21.	$\beta, \gamma,$	$\beta, \alpha,$
788.	1.	8.	positione FB,	positione datam FB
792.	2.	4 <i>a fine</i> ,	dx	ds .
793.	1.	4 <i>a fine</i> ,	cludent	cluderet
807.	2.	3.	AMQ	AMm
876.	1.	1.	ab	ad
		9.	bGd	bGD
893.	1.	4 <i>a fine</i> ,	CF	HQ
939.	2.	4	$3fyyz dy$	$— 3fyyz dy$
997.	1.	2.	\equiv seu	$\equiv 0$, seu
1005.	1.	3.	$\equiv en$	$\equiv cn$
1007.	1.	4	$(fx^m + g)$,	$(fx^m + g)^{l-1}$
1094.	1.	11.	qu	q^u .





**THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW**

**RENEWED BOOKS ARE SUBJECT TO IMMEDIATE
RECALL**

REFILED PSL
FEB 12 1992

LIBRARY, UNIVERSITY OF CALIFORNIA, DAVIS

Book Slip-50m-8,'69(N881s8)458-A-31/5

