DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.

Nr. 89.

KRYSTALLOMETRIE,

oder

Krystallonomie und Krystallographie

auf eigenthümliche Weise und

mit Zugrundelegung
neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde
etc.

bearbeitet von

JOHANN FRIEDRICH CHRISTIAN HESSEL.
(1830.)

Zweites [illegible]

WIL[illegible]

I… …enschaften
in uns… …annt wird,
nicht … …erbreitung
der U… …, Labora-
torien … …rhandenen
Einric… …haltes der
Wisse… …ben hoch-
stehen … …n Mangel
hinwei… …chaftlichen
Ausbil… …dies das
Fehl… …ngel an
Kenn… …hen das
Gebä…
… …lassiker
der e… …handlicher
Form … …bhandlun-
gen d… …er Lehren-
den u… …l dadurch
ein U… …Eindringen
in di… …asselbe ist
aber … …ng. Denn
in jen… …me, welche
inzwis… …, sondern
es ru… … der Ent-
wickl… …enden und
Forsc… …Fundgrube
von …
… …ten sollen
ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Chemie und Krystallographie:

Nr. 3. **J. Dalton** u. **W. H. Wollaston,** Abhandlungen zur Atomtheorie (1803—1808.) Herausg. v. W. Ostwald. Mit 1 Taf. (30 S.) ℳ —.50.

» 4. **Gay-Lussac,** Über das Jod. (1814.) Herausgegeben v. W. Ostwald. (52 S.) ℳ —.80.

» 8. **A. Avogadro** u. **Ampère,** Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Taf. Herausg. von W. Ostwald. (50 S.) ℳ 1.20.

» 9. **H. Hess,** Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald. (102 S.) ℳ 1.60.

» 22. **Woehler** u. **Liebig,** Untersuchungen üb. d. Radikal d. Benzoesäure. (1832.) H… …1 Taf. (43 S.) ℳ 1.—.

» 26. **Justus L…** …der organischen Säuren. (1838.) H… …. (86 S.) ℳ 1.40.

…dritten Seite des Umschlages.

KRYSTALLOMETRIE,

oder

Krystallonomie und Krystallographie,

auf eigenthümliche Weise und

mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde,

sowie mit vollständiger Berücksichtigung

der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen,

bearbeitet von

JOH^ann FRIEDR^ich CHRISTIAN HESSEL,
Dr. d. Med. und Phil. und Prof. der Mineralogie zu Marburg.

(1830.)

Besonders abgedruckt aus Gehler's phys. Wörterbuche.

Zweites Bändchen.

Mit 3 Tafeln.

Herausgegeben
von
E. Hess.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1897.

Krystallometrie, oder Krystallonomie und Krystallographie.

Von

Joh. Friedr. Christian Hessel.

[174]

X. Berechnungen der hier vorzüglich wichtigen Verhältnisse hauptaxiger Gestalten.

1) Bezeichnungen, durch welche diese Berechnungen vorbereitet werden.

Bezeichnung, welche eine und dieselbe Fläche in ihrer Erstreckung durch die verschiedenen Zellen eines 1- und $m$maassigen Axenkreuzes erhält.

Wenn eine Begrenzungsebene irgend einer hauptaxigen Gestalt über die Zelle hinaus, in welcher sie bestimmt wurde, verlängert gedacht und in ihrer unendlichen Ausdehnung, die ihr als einer unbegrenzten Ebene zusteht, betrachtet wird, so ist einleuchtend, dass, wenn sie nicht durch den Mittelpunkt des Strahlensystems geht, einer der folgenden Fälle stattfinden müsse:

1) sie schneidet alle Bestimmungsaxen, wenn diese hinreichend verlängert werden, d. h. sie schneidet die halbe Anzahl der Strahlen a sowohl als die halbe Anzahl der Strahlen R und jene der Strahlen r;

2) eine Bestimmungsaxe liegt ihr parallel,

α) aber keine 2te; sie schneidet dann die halbe Anzahl aller Bestimmungsstrahlen weniger einen, der in jener ihr parallelen Axe liegt;

β) auch eine 2te Bestimmungsaxe liegt ihr parallel; dann schneidet sie bloss alle jene Bestimmungsstrahlen, die nicht in die Ebene fallen, in welcher jene beiden ihr parallelen Axen liegen.

Der erste Fall ist der allgemeinere, welcher den 2ten α) und β) einschliesst, weil man sagen kann: die der Ebene parallelen Axen würden von ihr in unendlicher Entfernung geschnitten.

Fig. 317 A. B. C. Es seien A, B, C Mittelquerschnitte von solchen $2 \times t$-flächigen Ebenrandnern, für welche $p = \frac{1}{2} t = 2m$ eine gerade Zahl 2, 4, 6 ... ist, so ergeben sich folgende Gesetze:

1) Bei dem Mittelquerschnitte A der 1- und 1maassigen Gestalt schneidet die gehörig verlängerte Randkante ef nur bei *einer* oberen Zelle die beiden dieser angehörigen Strahlen R und r; bei dem der 1- und 2maassigen B findet dieses in 3 oberen Zellen statt und bei dem der 1- und 3maassigen C in 5 solchen oberen Zellen; bei dem der 1- und $m$maassigen Gestalt wird dieses in $2m - 1$ oberen Zellen der Fall sein.

2) Eine Fläche (a^I, R^I, r^I) wird sich daher durch $2m - 1$ obere Zellen hin so erstrecken, dass sie die 3 Bestimmungsstrahlen jeder dieser $2m - 1$ Zellen schneidet, ohne dass diese rückwärts [175] über den Mittelpunkt hinaus verlängert zu werden brauchen. Die Längenwerthe, welche den Strahlen a, R und r in jeder dieser $2m - 1$ Zellen vom Mittelpunkte c an bis zu dem Punkte zukommen, in welchem sie sich mit der Verlängerung der Fläche (a^I, R^I, r^I) schneiden, werden
Fig. 317 B. daher alle drei positive sein. Wenn z. B. bei B für die durch den oberen Scheitel und durch die Linien dg gelegte Ebene der Ausdruck in der Zelle $a^I R^I r^I = (a^I, cf, ce)$ ist, so wird er in der Zelle $a^I R^I r^{IV}$ für dieselbe Fläche $= (a^I, cf, cg)$, in der Zelle $a^I R^{II} r^I$ aber $= (a^I, cd, ce)$.

3) Dieselbe Fläche (a^I, R^I, r^I) wird noch durch 2 obere Zellen (von denen die eine vor der ersten, die andere nach der letzten von den $2m - 1$ erwähnten Zellen liegt) sich so erstrecken, dass sie in jeder von beiden den Strahl a und einen der beiden übrigen Bestimmungsstrahlen derselben (R oder r), nicht aber auch den andern (r oder R), schneidet; von diesem aber, den sie nicht schneidet, wird sie die Verlängerung nach rückwärts über den Mittelpunkt c hinaus

schneiden, so dass also dessen Werth ein negativer ist. Es wird also das Zeichen für die durch den oberen Scheitel (welcher hier mit s bezeichnet gedacht werden möge, während man den unteren Scheitel als mit v bezeichnet sich vorstellen kann) und durch dg gelegte Ebene sdg in der Zelle $a^I R^{IV} r^{IV}$, da $a = cs$ ist, $= (cs, (-cd), cg)$, in der Zelle $a^I R^{II} r^{II}$ aber $= (cs, cd, -cg)$ werden müssen.

4) Sie durchschneidet ferner die $2m - 1$ noch übrigen oberen Zellen so, dass sie nur den Hauptstrahl a derselben schneidet, nicht aber deren Strahlen R und r, vielmehr schneidet sie die rückwärts über den Mittelpunkt c hinausgehenden Verlängerungen dieser Strahlen, und es steht daher dem Strahle R sowohl als auch dem Strahle r in jeder von diesen Zellen für die Fläche sdg ein negativer Längenwerth zu. In der Zelle $a^I R^{IV} r^{III}$ wird daher für die Fläche sdg das Zeichen $= (cs, (-cd), (-ce))$, in der Zelle $a^I R^{III} r^{III}$ aber $= (cs, (-cf), (-ce))$ und in der Zelle $a^I R^{III} r^{II}$ gebührt der Fläche sdg das Zeichen $(cs, (-cf), (-cg))$.

5) In $2m - 1$ unteren Zellen, die jenen unter 2) aufgeführten anliegen, schneidet die fragliche Fläche (sdg) die beiden Querstrahlen R und r, aber nicht den Hauptstrahl a^{II} derselben, sondern dessen Verlängerung nach rückwärts über den Mittelpunkt c hinaus. Für diese Zellen wird also der Längenwerth [176] von a^{II} ein negativer. In der Zelle $a^{II} R^I r^I$ ist die Fläche $sdg = ((-cs), cf, ce)$, in der Zelle $a^{II} R^I r^{IV}$ wird $sdg = ((-cs), cf, cg)$, in der Zelle $a^{II} R^{II} r^I$ aber $= ((-cs), cd, ce)$.

6) In den beiden unteren Zellen, die den unter 3) aufgeführten oberen anliegen, wird ausser a^{II} auch noch der eine der beiden einer solchen Zelle angehörigen Strahlen R oder r einen negativen Längenwerth erhalten. Es ist also in $a^{II} R^{IV} r^{IV}$ die Fläche $sdg = ((-cs), (-cd), cg)$, in $a^{II} R^{II} r^{II}$ aber ist $sdg = ((-cs), cd, (-cg))$.

7) In den $2m - 1$ übrigen unteren Zellen wird keiner von den 3 einer solchen Zelle angehörigen Strahlen a, R und r durch die fragliche Fläche sdg geschnitten, wohl aber schneidet diese die Verlängerung dieser Strahlen über den Mittelpunkt hinaus. Die Fläche sdg wird also, wenn sie auf eine dieser $2m - 1$ Zellen, welche sie nicht durchschneidet, bezogen und mittelst einer solchen bezeichnet werd— —" fu-

jeden der Strahlen a, R und r in dieser Zelle einem negativen Längenwerthe entsprechen. Demnach ist in $a^{II}R^{IV}r^{III}$ die Fläche sdg

$$= ((-cs), (-cd), (-ce)),$$

in $a^{II}R^{III}r^{III}$ ist sdg

$$= ((-cs), (-cf), (-ce)),$$

in $a^{II}R^{III}r^{II}$ aber ist sdg

$$= ((-cs), (-cf), (-cg)).$$

Es versteht sich, dass $(-cf)$ z. B. bedeutet: es soll in dem Strahle R^{III} ein Stück $= cf$ abgeschnitten werden, welches aber in der der Richtung cR^{III} entgegengesetzten Richtung vom Punkte c anfangend zu nehmen ist.

Nennt man unter den oberen Zellen die Zelle $a^I R^I r^I$ die *Anfangszelle* für die Fläche sdg und die Zelle $a^I R^{II} r^I$ die erste folgende oder + 1ste, folglich $a^I R^{II} r^{II}$ die 2te folgende oder + 2te, so wird die Zelle $a^I R^I r^w$ (wo r^w wieder den mit der höchsten Zeigezahl w versehenen Strahl seiner Art bedeutet) die erste vorhergehende oder — 1ste sein. Eben so ist dann $a^{II}R^I r^I$ die untere 0te oder Anfangszelle, $a^{II}R^{II}r^I$ die + 1ste oder die erste folgende u. s. w. Es hat dann das Zeichen einer Fläche sdg:

Fig. 317 *A.* [177] Bei der 1- und 1maassigen Gestalt *A*

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles a, das Vorzeichen	der Werth des Strahles R, das Vorzeichen	der Werth des Strahles r, das Vorzeichen	in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles a, das Vorzeichen	der Werth des Strahles R, das Vorzeichen	der Werth des Strahles r, das Vorzeichen
0te oder — 4te	+	+	+	0te oder — 4te	—	+	+
+ 1- - — 3-	+	—	+	+ 1- - — 3-	—	—	+
+ 2- - — 2-	+	—	—	+ 2- - — 2-	—	—	—
+ 3- - — 1-	+	+	—	+ 3- - — 1-	—	+	—

Bei der 1- und 2maassigen Gestalt *B* Fig. 317 *B.*

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	*R*	*r*		*a*	*R*	*r*
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te oder —8te	+	+	+	0te oder —8te	—	+	+
+1 - - —7 -	+	+	+	+1 - - —7 -	—	+	+
+2 - - —6 -	+	+	—	+2 - - —6 -	—	+	—
+3 - - —5 -	+	—	—	+3 - - —5 -	—	—	—
+4 - - —4 -	+	—	—	+4 - - —4 -	—	—	—
+5 - - —3 -	+	—	—	+5 - - —3 -	—	—	—
+6 - - —2 -	+	—	+	+6 - - —2 -	—	—	+
+7 - - —1 -	+	+	+	+7 - - —1 -	—	+	+

Bei der 1- und 3maassigen Gestalt *C* Fig. 317 *C.*

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	*R*	*r*		*a*	*R*	*r*
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te od. —12te	+	+	+	0te od. —12te	—	+	+
+ 1 - - —11 -	+	+	+	+ 1 - - —11 -	—	+	+
+ 2 - - —10 -	+	+	+	+ 2 - - —10 -	—	+	+
+ 3 - - — 9 -	+	—	+	+ 3 - - — 9 -	—	—	+
+ 4 - - — 8 -	+	—	—	+ 4 - - — 8 -	—	—	—
+ 5 - - — 7 -	+	—	—	+ 5 - - — 7 -	—	—	—
+ 6 - - — 6 -	+	—	—	+ 6 - - — 6 -	—	—	—
+ 7 - - — 5 -	+	—	—	+ 7 - - — 5 -	—	—	—
+ 8 - - — 4 -	+	—	—	+ 8 - - — 4 -	—	—	—
+ 9 - - — 3 -	+	+	—	+ 9 - - — 3 -	—	+	—
+10 - - — 2 -	+	+	+	+10 - - — 2 -	—	+	+
+11 - - — 1 -	+	+	+	+11 - - — 1 -	—	+	+

[178] Bei der 1- und $m$maassigen Gestalt, wenn ($t = 2p = 4m$ und) m eine gerade Zahl ist:

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	R	r		a	R	r
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te od. —$4m$te	+	+	+	0te od. —$4m$te	—	+	+
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.
+ m - - —$3m$ -	+	+	—	+ m - - —$3m$ -	—	+	—
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.
+$2m$ - - —$2m$ -	+	—	—	+$2m$ - - —$2m$ -	—	—	—
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.
+$3m$ - - — m -	+	—	+	+$3m$ - - — m -	—	—	+
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.

Bei der 1- und $m$maassigen Gestalt, wenn ($t = 2p = 4m$ und) m eine ungerade Zahl ist:

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	R	r		a	R	r
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te od.— $4m$te	+	+	+	0te od.—$4m$te	—	+	+
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.
+ m - - —$3m$ -	+	—	+	+ m - - —$3m$ -	—	—	+
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.
+$2m$ - - —$2m$ -	+	—	—	+$2m$ - - —$2m$ -	—	—	—
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.
+$3m$ - - — m -	+	+	—	+$3m$ - - — m -	—	+	—
. . . . . .	.	.	.	. . . . . .	.	.	.

Nennt man dagegen die Anfangszelle die 1ste und bezeichnet sie mit α und versieht man die sämmtlichen Zellen mit den Buchstaben α, β, γ, δ, α', β', γ', δ', in der Ordnung, wie es in Folge der Berücksichtigung der positiven und negativen Strahlenpermutationen geschah (wobei, wenn m eine gerade Zahl war, wie bei B, die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Fig. 309. der entgegengesetzten Ordnung mit $R^I R^{II} R^{III} \ldots$ liefen, wäh- 317. rend, wenn m eine ungerade Zahl war, beide Zeichenreihen in einerlei Ordnung fortschritten), [179] und fährt man mit der Numerirung der Zellen fort in der Ordnung von der Anfangszelle α nach der nächsten oberen Zelle β, welche dadurch die zweite wird, so wird die 3te mit γ, die 4te mit δ, die 5te mit α, die 6te mit β ... bezeichnet sein. Eben so ist die 1ste untere Zelle eine mit α', die 2te untere eine mit β' bezeichnete u. s. w. Es ist dann für *jede* 1- *und m-maassige Gestalt, m mag gerade oder ungerade sein,*

	das Vorzeichen bei		
	a	R	r
für die 1ste obere Zelle	$+$	$+$	$+$
. . . .	.	.	.
für die $(m+1)$te obere Zelle	$+$	$-$	$+$
. . . .	.	.	.
für die $(2m+1)$te obere Zelle	$+$	$-$	$-$
. . . .	.	.	.
für die $(3m+1)$te obere Zelle	$+$	$+$	$-$
. . . .	.	.	.
für die 1ste untere Zelle	$-$	$+$	$+$
. . . .	.	.	.
für die $(m+1)$te untere Zelle	$-$	$-$	$+$
. . . .	.	.	.
für die $(2m+1)$te untere Zelle	$-$	$-$	$-$
. . . .	.	.	.
für die $(3m+1)$te untere Zelle	$-$	$+$	$-$
. . . .	.	.	.

Um die Abhängigkeit der Werthe der verschiedenen Strahlen r oder R von einander, vom Mittelpunkte c an bis an die Linie ef oder an deren Verlängerung gemessen, darzustellen, sei der Winkel

$$\left.\begin{array}{l} fce = k \text{ und Cos. } k = q \\ cf \;\; = \xi \text{ und } ce = \psi \end{array}\right\} \text{gegeben.}$$ Fig. 318.

Zieht man cv senkrecht auf ef, bezeichnet die Winkel ecv mit σ und fcv mit τ und zieht fn senkrecht auf ce, so ist

$$1)\quad ef = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi \,\mathrm{Cos.}\, k} = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi q},$$

$$2)\quad cv = \frac{ce \cdot nf}{ef} = \frac{\xi \cdot \psi \cdot \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi q}},$$

[180] $$3)\quad \mathrm{Cos.}\, \sigma = \frac{cv}{ce} = \frac{\xi\sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi q}},$$

$$4)\quad \mathrm{Cos.}\, \tau = \frac{cv}{cf} = \frac{\psi\sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi q}}.$$

Bezeichnet man nun die den Strahlen R^I, R^{II}, R^{III} ... zukommenden Werthe cf, cd ... mit R_1, R_2, R_3 und die den Strahlen r^I, r^{II}, r^{III} ... zukommenden ce, cb ... mit r_1, r_2, r_3 ..., so ist

$$\frac{cv}{r_1} = \mathrm{Cos.}\, \sigma = \mathrm{Cos.}\, (k - \tau)$$

$$\frac{cv}{r_2} = \mathrm{Cos.}\, (2k + \sigma) = \mathrm{Cos.}\, (3k - \tau)$$

$$\frac{cv}{r_3} = \mathrm{Cos.}\, (4k + \sigma) = \mathrm{Cos.}\, (5k - \tau)$$

. . . .

$$\frac{cv}{r_x} = \mathrm{Cos.}\, (2(x - 1)k + \sigma) = \mathrm{Cos.}\, ((2x - 1)k - \tau)$$

$$\frac{cv}{R_1} = \mathrm{Cos.}\, (k - \sigma) = \mathrm{Cos.}\, \tau$$

$$\frac{cv}{R_2} = \mathrm{Cos.}\, (k + \sigma) = \mathrm{Cos.}\, (2k - \tau)$$

$$\frac{cv}{R_3} = \mathrm{Cos.}\, (3k + \sigma) = \mathrm{Cos.}\, (4k - \tau)$$

. . . .

$$\frac{cv}{R_x} = \mathrm{Cos.}\, ((2x - 3)k + \sigma) = \mathrm{Cos.}\, (2(x - 1)k - \tau).$$

Wenn durch ${}_1r$, ${}_2r$, ${}_3r$ ... und ${}_1R$, ${}_2R$, ${}_3R$ ... die Werthe der Grössen r und R bezeichnet werden, welche von cv links liegen, so wie sie in der Ordnung nach links hin auf einander folgen, so dass z. B. ${}_1r = r_1 = ce$, aber ${}_2r = cg$ u. s. w., so hat man

$$\frac{cv}{{}_1r} = \text{Cos. } \sigma = \text{Cos. } (k - \tau)$$

[181] $$\frac{cv}{{}_2r} = \text{Cos. } (2k - \sigma) = \text{Cos. } (k + \tau)$$

$$\frac{cv}{{}_3r} = \text{Cos. } (4k - \sigma) = \text{Cos. } (3k + \tau)$$

. . . .

$$\frac{cv}{{}_xr} = \text{Cos. } (2(x-1)k - \sigma) = \text{Cos. } ((2x-1)k + \tau)$$

$$\frac{cv}{{}_1R} = \text{Cos. } (k - \sigma) = \text{Cos. } \tau$$

$$\frac{cv}{{}_2R} = \text{Cos. } (3k - \sigma) = \text{Cos. } (2k + \tau)$$

$$\frac{cv}{{}_3R} = \text{Cos. } (5k - \sigma) = \text{Cos. } (4k + \tau)$$

. . . .

$$\frac{cv}{{}_xR} = \text{Cos. } ((2x-1)k - \sigma) = \text{Cos. } (2(x-1)k + \tau).$$

Es ist dann

5) ${}_xR : {}_1R = \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (2(x-1)k + \tau)$

6) $R_x : R_1 = \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (2(x-1)k - \tau)$

7) ${}_xr : {}_1r = \text{Cos. } \sigma : \text{Cos. } (2(x-1)k - \sigma)$

8) $r_x : r_1 = \text{Cos. } \sigma : \text{Cos. } (2(x-1)k + \sigma)$.

Für die 1- und 1maassige Gestalt ist $q = 0$ und $ce = \mathfrak{h}$ gesetzt,

$$ef = \sqrt{\xi^2 + \mathfrak{y}^2}$$
$$ce \cdot cf = ef \cdot cv$$
$$cv = \frac{\xi \cdot \mathfrak{y}}{\sqrt{\xi^2 + \mathfrak{y}^2}}$$
$$\text{Cos. } \tau = \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{\xi^2 + \mathfrak{y}^2}}$$
$$\text{Cos. } \sigma = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \mathfrak{y}^2}}$$
$$_2R_2 : {}_1R_1 = \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (180^\circ \pm \tau)$$
$$= \text{Cos. } \tau : - \text{Cos. } \tau.$$

Es ist also

$$_2R_2 = - {}_1R_1$$

und ebenso

$$_2r_2 = - {}_1r_1,$$

wie dieses schon an und für sich einleuchtet.

[182] Für die 1- und 2maassige Gestalt ist $q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, folglich

$$ef = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$
$$cv = \frac{\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$
$$\text{Cos. } \sigma = \frac{\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$
$$\text{Cos. } \tau = \frac{\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$
$$R_2 : R_1 = \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (90^\circ - \tau) = \text{Cos. } \tau : \text{Sin. } \tau$$
$$= \psi\sqrt{\tfrac{1}{2}} : (\xi - \psi\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$
$$_2r : {}_1r = \text{Cos. } \sigma : \text{Cos. } (90^\circ - \sigma) = \text{Cos. } \sigma : \text{Sin. } \sigma$$
$$_2r : {}_1r = \xi\sqrt{\tfrac{1}{2}} : \psi - \xi\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Setzt man

$$\psi = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

so wird

$$\mathfrak{y} = \psi\sqrt{2}$$

und

und
$$R_2 : R_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{y} : (\xi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{y})$$
$${}_2r : {}_1r = \xi : (\mathfrak{y} - \xi),$$
folglich
$$R_2 = R_1 \left(\frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}}\right) = cd$$ Fig. 317 *B.*
$${}_2r = {}_1r \left(\frac{\xi}{\mathfrak{y} - \xi}\right) = cg.$$

Für die 1- und 3maassige Gestalt ist $q = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$, folglich
$$\text{Cos. } \sigma = \frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$
$$\text{Cos. } \tau = \frac{\psi}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$
$$\text{Sin. } \sigma = \frac{2\psi - \xi\sqrt{3}}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$
$$\text{Sin. } \tau = \frac{2\xi - \psi\sqrt{3}}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$
$$\begin{aligned} R_2 : R_1 &= \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (60^\circ - \tau) \\ &= \text{Cos. } \tau : \tfrac{1}{2}\text{Cos. } \tau + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\ \text{Sin. } \tau \\ &= \psi : \tfrac{1}{2}\psi + (2\xi - \psi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\ &= \psi : (\xi\sqrt{3} - \psi) \end{aligned}$$
[183]
$$\begin{aligned} {}_2R : {}_1R &= \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (60^\circ + \tau) \\ &= \text{Cos. } \tau : \tfrac{1}{2}\text{Cos. } \tau - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\ \text{Sin. } \tau \\ &= \psi : \tfrac{1}{2}\psi - (2\xi - \psi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\ &= \psi : (2\psi - \xi\sqrt{3}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} r_2 : r_1 &= \text{Cos. } \sigma : \text{Cos. } (60^\circ + \sigma) \\ &= \text{Cos. } \sigma : \tfrac{1}{2}\text{Cos. } \sigma - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\ \text{Sin. } \sigma \\ &= \xi : \tfrac{1}{2}\xi - (2\psi - \xi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\ &= \xi : (2\xi - \psi\sqrt{3}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} {}_2r : {}_1r &= \xi : \tfrac{1}{2}\xi + (2\psi - \xi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\ &= \xi : (\psi\sqrt{3} - \xi). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\psi = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}\sqrt{3}$$

also

$$\mathfrak{y} = \psi\sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2\psi\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

so wird

$$R_2 : R_1 = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{3}{4}} : \xi\sqrt{3} - \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$= \mathfrak{y} : 2\xi - \mathfrak{y}$$

Fig. 317 *C.*

$$R_2 = R_1\left(\frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}}\right) = cd$$

$$_2R = {_1R}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2(\mathfrak{y} - \xi)}\right) = ch$$

$$r_2 = r_1\left(\frac{\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\mathfrak{y}}\right) = cb$$

$$_2r = {_1r}\left(\frac{\xi}{\frac{3}{2}\mathfrak{y} - \xi}\right) = cg.$$

Es ist demnach das Zeichen einer bestimmten Fläche:

Fig. 317 *A.* Bei der 1- und 1maassigen Gestalt A, wenn sie bezogen wird

auf	die	1ste	obere	Zelle	α	$= (a, R, r)$
-	-	2te	-	-	β	$= (a, (-R), r)$
-	-	3te	-	-	γ	$= (a, (-R), (-r))$
-	-	4te	-	-	δ	$= (a, R, (-r))$
-	-	1ste	untere	-	α'	$= ((-a), R, r)$
-	-	2te	-	-	β'	$= ((-a), (-R), r)$
-	-	3te	-	-	γ'	$= ((-a), (-R), (-r))$
-	-	4te	-	-	δ'	$= ((-a), R, (-r))$.

Fig. 317 *B.* Bei der 1- und 2maassigen Gestalt B für $R = \xi$ und $r = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, wenn sie bezogen wird [184]

auf	die	1ste	obere	Zelle	α	$= (a, R, r)$
-	-	2te	-	-	β	$= \left(a, R, \frac{\xi}{\mathfrak{y} - \xi} r\right)$
-	-	3te	-	-	γ	$= \left(a, \left(-\frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R\right), \frac{\xi}{\mathfrak{y} - \xi} r\right)$

auf die 4te obere Zelle $\delta = \left(a, \left(-\frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R\right), -r\right)$

- - 5te - - $\alpha = (a, (-R), (-r))$

- - 6te - - $\beta = \left(a, (-R), \left(-\frac{\xi}{\mathfrak{y} - \xi} r\right)\right)$

- - 7te - - $\gamma = \left(a, \frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R, \left(-\frac{\xi}{\mathfrak{y} - \xi} r\right)\right)$

- - 8te - - $\delta = \left(a, \frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R, r\right)$.

Setzt man statt a ein $(-a)$ in diese 8 Zeichen, so erhält man die Zeichen für die 1ste, 2te . . . 8te untere Zelle α', β' . . .

Bei der 1- und 3maassigen Gestalt für $\xi = R$ und $\mathfrak{y}\sqrt{\frac{3}{4}} = r$, wenn sie bezogen wird Fig. 317 c.

auf die 1ste obere Zelle $\alpha = (a, R, r)$

- - 2te - - $\beta = \left(a, \frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R, r\right)$

- - 3te - - $\gamma = \left(a, \frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R, \frac{\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\mathfrak{y}} r\right)$

- - 4te - - $\delta = \left(a, \left(\frac{-\mathfrak{y}}{2(\mathfrak{y} - \xi)} R\right), \frac{\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\mathfrak{y}} r\right)$

- - 5te - - $\alpha = \left(a, \left(\frac{-\mathfrak{y}}{2(\mathfrak{y} - \xi)} R\right), \left(\frac{-\xi}{\frac{3}{2}\mathfrak{y} - \xi} r\right)\right)$

- - 6te - - $\beta = \left(a, (-R), \left(\frac{-\xi}{\frac{3}{2}\mathfrak{y} - \xi} r\right)\right)$

- - 7te - - $\gamma = (a, (-R), (-r))$

- - 8te - - $\delta = \left(a, \left(\frac{-\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}} R\right), (-r)\right)$

- - 9te - - $\alpha = \left(a, \left(\frac{-\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}}\right) R, \left(\frac{-\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\mathfrak{y}} r\right)\right)$

- - 10te - - $\beta = \left(a, \frac{\mathfrak{y}}{2(\mathfrak{y} - \xi)} R, \left(\frac{-}{2\xi}\right.\right.$

[185]

auf die 11te obere Zelle $\gamma = \left(a, \frac{\mathfrak{y}}{2(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})} R, \frac{\mathfrak{x}}{\frac{3}{2}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}} r\right)$

- - 12te - - $\delta = \left(a, R, \frac{\mathfrak{x}}{\frac{3}{2}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}} r\right)$.

Setzt man statt a ein $(-a)$, so hat man die Zeichen für die 1ste, 2te, 3te . . . untere Zelle.

Bezeichnung von Flächen verschiedener Zellen durch die Bestimmungsstrahlen einer einzigen Zelle eines 1- und $m$maassigen Axenkreuzes.

Sollen umgekehrt gleichwerthige Flächen, welche verschiedenen Zellen angehören, bezeichnet werden hinsichtlich auf ihr Verhalten gegen eine einzige Zelle, z. B. gegen die Zelle $a^I R^I r^I$, so ist ersichtlich, dass (wenn man diese Zelle α wieder die 0te obere, die nächste β die + 1ste obere u. s. w. nennt)

1) die Fläche, welche in der $\pm$ 1sten oder $\pm$ 3ten oder $\pm$ 5ten . . . Zelle durch (a, R, r) bezeichnet ist, für die 0te Zelle so wird bezeichnet werden müssen, wie die Fläche (a, R, r) der 0ten Zelle für die $\pm$ 1ste oder $\pm$ 3te oder $\pm$ 5te Zelle bezeichnet wurde, dass aber

2) die Fläche, welche für die $\pm$ 2te oder $\pm$ 4te oder $\pm$ 6te . . . Zelle mit (a, R, r) bezeichnet ist, in der 0ten Zelle so wird zu bezeichnen sein, wie die in der 0ten Zelle mit (a, R, r) bezeichnete Fläche in der $\mp$ 2ten oder $\mp$ 4ten oder $\mp$ 6ten Zelle bezeichnet werden musste, so dass hierbei die oberen Vorzeichen einander entsprechen und wieder die unteren. Eine Fläche, welche in Beziehung zu den drei Bestimmungsstrahlen der ersten Zelle $a^I R^I r^I$ sich so verhält, dass (gleichviel ob sie diese Zelle wirklich durchschneidet oder nicht) für sie dem Strahle a^I ein Werth $= \gamma$, dem Strahle R^I ein Werth $= \varrho$, dem Strahle r^I ein Werth $= \delta$ zusteht, werde bezeichnet mit $(\gamma, \varrho, \delta)^{\mathrm{I}}$.

Bezeichnung von Flächen hauptaxiger Gestalten mittelst der Bestimmungsstrahlen einer 3fach rechtwinkligen Zelle.

Fig. 319. Es sei *sef* eine Fläche, welche in der ersten Zelle $a^I R^I r^I$ liegt (oder doch für diese erste Zelle bezeichnet ist), so wird,

[186] wenn cs senkrecht vor dem Beobachter steht und cf nach rechtshin gerichtet ist, ein Strahl cu möglich sein senkrecht auf die Ebene (fcs) der beiden Strahlen a^I und R^I, so dass cu von hinten nach vorwärts gerichtet ist.

Dieser Strahl wird von der Verlängerung der Ebene sfe geschnitten, so dass ihm ein Werth $cu = x$ für diese Fläche sfe eigen ist (welcher entweder positiv und endlich, wie in der Figur, oder unendlich oder negativ und endlich oder Null sein kann). Kennt man die Grösse dieses Werthes, so kann man die Lage der Fläche usf auch dadurch bestimmen, dass man die 3 auf einander senkrechten Strahlen [cs, cf, cu]*) für sie angiebt, welche der bestimmten ersten 3fach rechtwinkligen Zelle c, sfu angehören, gleichviel ob der Werth, den jeder dieser Strahlen erhält, positiv und endlich oder negativ und endlich oder unendlich gross oder Null wird. Ist nun wieder cv senkrecht auf ef und der Winkel $fcv = \tau'$, so ist

$$cu : cf = cv : vf = \text{Cotg.}\, \tau' : 1$$

$$cu = cf \cdot \text{Cotg.}\, \tau' = cf \cdot \frac{\text{Cos.}\, \tau'}{\text{Sin.}\, \tau'}.$$

Ist nun die fragliche Fläche für die erste Zelle $a^I R^I r^I$ (gleichviel ob sie in ihr liegt oder nicht) bezeichnet durch $(\gamma, \varrho, \delta)^{\mathrm{I}}$, so ist, wenn $\text{Cos.}\, fce = q$,

$$\text{Cos.}\, \tau' = \frac{\delta \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta q}}$$

$$\text{Cotg.}\, \tau' = \frac{\delta \sqrt{1 - q^2}}{\varrho - \delta q},$$

mithin

$$cu = \frac{\varrho\delta \sqrt{1 - q^2}}{\varrho - \delta q} = \varphi.$$

Es ist also für die Fläche $(\gamma, \varrho, \delta)^{\mathrm{I}}$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = \left[\gamma, \varrho, \frac{\varrho\delta \sqrt{1 - q^2}}{\varrho - \delta q}\right];$$

*) So dass die rechtwinklige Klammer [...] gebraucht wird bei der Bezeichnung durch die drei auf einander senkrechten Strahlen.

für eine andere Fläche, welche in der ersten Zelle $a^I R^I r^I$ bezeichnet war durch $(\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{d})^I$, hätte man

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{1-q^2}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{d}q}\right].$$

[187] Für das 1- und 1maassige Axenkreuz ist $q = 0$, also

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{d}]$$
$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \delta];$$

für das 1- und 2maassige ist $q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{d}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\right]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = \left[\gamma, \varrho, \frac{\varrho\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\varrho-\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\right],$$

oder, wenn hier

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ also } \mathfrak{l} = \mathfrak{d}\sqrt{2}$$

und

$$\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ also } \lambda = \delta\sqrt{2}$$

gesetzt wird,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{l}}{2\mathfrak{r}-\mathfrak{l}}\right]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = \left[\gamma, \varrho, \frac{\varrho\lambda}{2\varrho-\lambda}\right].$$

Für das 1- und 3maassige Axenkreuz ist $q = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$, mithin

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}}{2\mathfrak{r}-\mathfrak{d}\sqrt{3}}\right]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = \left[\gamma, \varrho, \frac{\varrho\delta}{2\varrho-\delta\sqrt{3}}\right],$$

oder, wenn $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ und $\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ gesetzt wird,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{l}\sqrt{3}}{4\mathfrak{r}-3\mathfrak{l}}\right]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = \left[\gamma, \varrho, \frac{\varrho\lambda\sqrt{3}}{4\varrho-3\lambda}\right].$$

2) Gleichungen zwischen den Messungs- oder Bestimmungsstrahlen und den trigonometrischen Functionen von hier vorzüglich wichtigen Winkelgrössen.

Allgemeine.

Da für die Neigung x zweier in Beziehung zu einer und derselben 3fach rechtwinkligen Zelle durch $[\gamma, \varrho, \varphi]$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}]$ bezeichneten Flächen, wie dieses durch einfache trigonometrische Rechnung sich ergiebt, allgemein

♁) $$\mathrm{Cos.}\,x = \mp\left(\frac{\gamma\mathfrak{g}\varrho\mathfrak{r} + \varrho\mathfrak{r}\varphi\mathfrak{f} + \varphi\mathfrak{f}\gamma\mathfrak{g}}{\sqrt{(\gamma^2\varrho^2 + \varrho^2\varphi^2 + \varphi^2\gamma^2)}\sqrt{(\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{f}^2\mathfrak{g}^2)}}\right)$$

ist, so wird, wenn man statt φ und $\mathfrak{f}$ deren Werthe

[188] $$\left(\varphi = \frac{\varrho\delta\sqrt{1-q^2}}{\varrho - \delta q} \quad \text{und} \quad \mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{1-q^2}}{\mathfrak{r} - \mathfrak{d}q}\right)$$

setzt:

⊙) $$\mathrm{Cos.}\,x =$$

$$\mp\frac{\gamma\varrho\mathfrak{g}\mathfrak{r} + \varrho\delta\mathfrak{r}\mathfrak{d} + \delta\gamma\mathfrak{d}\mathfrak{g} - q(\gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{d} + \mathfrak{r}\delta) + \varrho\delta\mathfrak{r}\mathfrak{d}q)}{\sqrt{\gamma^2\varrho^2 + \varrho^2\delta^2 + \delta^2\gamma^2 - \varrho\delta q(2\gamma^2 + \varrho\delta q)}\sqrt{\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{d}^2\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{r}\mathfrak{d}q(2\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{r}\mathfrak{d}q)}}$$

die Gleichung sein für die Neigung irgend zweier, in Beziehung auf die 1*ste Zelle eines* 1- *und* m*maassigen Axenkreuzes durch* $(\gamma, \varrho, \delta)^{\mathrm{I}}$ *und* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{d})^{\mathrm{I}}$ *bestimmten, Flächen gegeneinander.* Setzt man in die mit ⊙) bezeichnete Gleichung $\mathfrak{g} = -\gamma$ und $\mathfrak{r} = \varrho$ und $\mathfrak{d} = \delta$, so erhält man

$$\text{I. } \mathrm{Cos.}\,x' = \frac{\varrho^2\delta^2(1-q^2) - \gamma^2\varrho^2 + 2\gamma^2\varrho\delta q - \gamma^2\delta^2}{\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}.$$

Setzt man in die Gleichung ⊙) die Werthe $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{r} = \varrho$, aber $\mathfrak{d} = \dfrac{\varrho\delta}{2\delta q - \varrho}$, so hat man

$$\text{II. } \mathrm{Cos.}\,x'' =$$

$$\frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q - \gamma^2\delta^2 + 2\gamma^2\delta^2 q^2}{\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}.$$

Setzt man ferner in die Gleichung ⊙) die Werthe $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{b} = \delta$, aber $\mathfrak{r} = \frac{\varrho\delta}{2\varrho q - \delta}$, so hat man

$$\text{III.} \quad \text{Cos.}\, x''' = \frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2) - \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2 + 2\gamma^2\varrho^2 q^2}{\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}.$$

Es ist dann x' die Randkante, x'' die Scheitelkante aus ϱ und x''' die Scheitelkante aus δ für den $2 \times t$flächigen Ebenrandner $(\gamma, \varrho, \delta)$.

Setzt man $\text{Cos.}\, x' = x_,$ und $\text{Cos.}\, x'' = x_{,,}$ und $\text{Cos.}\, x''' = x_{,,,}$, so ist

$$\text{IV.} \quad \frac{x_, + x_{,,,}}{x_, + x_{,,}} = \frac{\varrho^2}{\delta^2}$$

$$\text{V.} \quad \frac{1 + x_,}{x_, + x_{,,}} = -\frac{\varrho^2}{\gamma^2}$$

$$\text{VI.} \quad \frac{x_, + x_{,,,}}{1 + x_,} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2};$$

also

$$\text{VII.} \quad \gamma^2 : \varrho^2 : \delta^2 = -(x_, + x_{,,})(x_, + x_{,,,}) : (x_, + x_{,,,})(1 + x_,) : (x_, + x_{,,})(1 + x_,).$$

[189] Ferner folgt aus IV:

$$\text{VIII.} \quad x_, = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - \delta^2}(x_{,,,} - x_{,,}) - x_{,,,}$$

$$\text{IX.} \quad x_{,,} = \frac{\delta^2}{\varrho^2}(x_, + x_{,,,}) - x_,$$

$$\text{X.} \quad x_{,,,} = \frac{\varrho^2}{\delta^2}(x_, + x_{,,}) - x_,.$$

Ebenso folgt aus V:

$$\text{XI.} \quad x_{,,} = -\frac{\gamma^2}{\varrho^2}(1 + x_,) - x_,$$

$$\text{XII.} \quad x_, = \frac{\varrho^2}{\gamma^2 + \varrho^2}(1 - x_{,,}) - 1.$$

Aus VI hat man:

$$\text{XIII.} \quad x_{\prime\prime\prime} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2}(1 + x_\prime) - x_\prime$$

$$\text{XIV.} \quad x_\prime = \frac{\delta^2}{\gamma^2 + \delta^2}(1 - x_{\prime\prime\prime}) - 1\,.$$

Ausserdem ist aber

$$\text{XV.} \quad \frac{\sqrt{1 + x_{\prime\prime}} + q\sqrt{1 + x_{\prime\prime\prime}}}{\sqrt{1 - q^2}} = \sqrt{-(x_\prime + x_{\prime\prime\prime})}$$

und

$$\text{XVI.} \quad \frac{\sqrt{1 + x_{\prime\prime\prime}} + q\sqrt{1 + x_{\prime\prime}}}{\sqrt{1 - q^2}} = \sqrt{-(x_\prime + x_{\prime\prime})}\,,$$

so dass:

$$\text{XVII.} \quad x_\prime = -x_{\prime\prime\prime} - \left(\frac{\sqrt{1 + x_{\prime\prime}} + q\sqrt{1 + x_{\prime\prime\prime}}}{\sqrt{1 - q^2}}\right)^2$$

oder

$$x_\prime = -x_{\prime\prime} - \left(\frac{\sqrt{1 + x_{\prime\prime\prime}} + q\sqrt{1 + x_{\prime\prime}}}{\sqrt{1 - q^2}}\right)^2$$

$$\text{XVIII.} \quad x_{\prime\prime} = -1 + \left(\sqrt{1 - q^2}\sqrt{-(x_\prime + x_{\prime\prime\prime})} - q\sqrt{1 + x_{\prime\prime\prime}}\right)^2$$

$$\text{XIX.} \quad x_{\prime\prime\prime} = -1 + \left(\sqrt{1 - q^2}\sqrt{-(x_\prime + x_{\prime\prime})} - q\sqrt{1 + x_{\prime\prime}}\right)^2.$$

Für den $2 \times p$flächigen Ebenrandner $(a, +R, r)$ oder $(a, -R, r)$, wenn p das Doppelte einer ungeraden Zahl m ist, so wie für den $2 \times p$flächigen Ebenrandner $(a, R, +r)$ oder $(a, R, -r)$, wenn p das Doppelte einer geraden Zahl m ist, hat man, wenn $a : R : r = \gamma : \varrho : \delta$ ist, die Gleichung I zur Bestimmung der Randkante und die Gleichung II zu jener der Scheitelkante [190] von γ nach ϱ *), zur Bestimmung der Scheitelkante $'''x$ von γ nach $\frac{\delta}{2\varrho q - \delta} \cdot \varrho$ aber die Gleichung

$$\text{XX.} \quad \text{Cos.}\, '''x = \frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2(\varrho^2(8q^4 - 8q^2 + 1) - 2\varrho\delta(4q^3 - 3q) + \delta^2(2q^2 - 1))}{\varrho^2\delta^2(1 - q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}$$

*) d. h. der Kante, von welcher die Kantenlinie die äusseren Enden der ihrer Länge und Lage nach bekannten Strahlen γ und ϱ mit einander verbindet.

oder $$\text{Cos.}'''x =$$
$$\frac{-\varrho^2\delta^2 \text{ Sin. } k^2 + \gamma^2(\varrho^2 \text{ Cos. } 4k - 2\varrho\delta \text{ Cos. } 3k + \delta^2 \text{ Cos. } 2k)}{\varrho^2\delta^2 \text{ Sin. } k^2 + \gamma^2(\varrho^2 - 2\varrho\delta \text{ Cos. } k + \delta^2)}.$$

Wenn p das Doppelte einer ungeraden Zahl m ist und dem $2 \times p$ flächigen Ebenrandner das Zeichen $(a, R, +r)$ oder $(a, R, -r)$ angehört, so wie wenn $\frac{1}{2}p = m$ eine gerade Zahl und der $2 \times p$ flächige Ebenrandner durch das Zeichen $(a, +R, r)$ oder $(a, -R, r)$ bestimmt ist, wonach also $a : R : r = \gamma : \varrho : \delta$, so wird die Randkante eines solchen Körpers bestimmt durch die Gleichung I, die Scheitelkante von γ nach δ durch die Gleichung III, aber die Scheitelkante $''x$ von γ nach $\frac{\varrho}{2\delta q - \varrho} \cdot \delta$ durch die Gleichung

$$\text{XXI.} \quad \text{Cos.}''x =$$
$$\frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2(2q^2-1)-2\varrho\delta(4q^3-3q)+\delta^2(8q^4-8q^2+1))}{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2\varrho^2-2\gamma^2\varrho\delta q+\gamma^2\delta^2}.$$

Für den $2 \times p$ flächigen Kronrandner, welchem als flächenhalbzähliger 1- und m maassiger Gestalt, wenn m ungerade ist, das Zeichen $(\pm a, \pm R, r)$ oder $(\pm a, \mp R, r)$ entspricht, so wie für einen solchen, der, wenn m gerade ist, dem Zeichen $(\pm a, R, \pm r)$ oder $(\pm a, R, \mp r)$ entspricht, gilt für die Scheitelkante von γ nach ϱ die Gleichung II, für die von γ nach $\frac{\delta}{2\varrho q - \delta} \cdot \varrho$ die Gleichung XX und für die Randkante $'x$ die Gleichung

$$\text{XXII.} \quad \text{Cos.}'x = \frac{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2((2q^2-1)\varrho^2-2\varrho\delta q+\delta^2)}{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2-2\varrho\delta q+\delta^2)}.$$

Eben so gilt bei dem $2 \times p$ flächigen Kronrandner $(\pm a, R, \pm r)$ oder $(\pm a, R, \mp r)$, wenn m ungerade ist, so wie bei dem, welcher [191] das Zeichen $(\pm a, \pm R, r)$ oder $(\pm a, \mp R, r)$ hat, wenn m gerade ist, die Gleichung III für die Scheitelkante von γ nach δ und die Gleichung XXI für die Scheitelkante von γ nach $\frac{\varrho}{2\delta q - \varrho} \cdot \delta$, aber für die Randkante $\bar{x}$ die Gleichung

$$\text{XXIII.} \quad \text{Cos.}\bar{x} = \frac{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2-2\varrho\delta q+\delta^2(2q^2-1))}{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2-2\varrho\delta q+\delta^2)}.$$

Setzt man Cos.$'x = {}_{,}x$ und Cos.$x'' = x_{,,}$ und Cos. $'''x = {}_{,,,}x$, so hat man für den $2 \times p$flächigen Kronrandner ($\pm a$, $\pm R$, r) oder ($\pm a$, $\mp R$, r), wenn m ungerade, oder für den $2 \times p$-flächigen Kronrandner ($\pm a$, R, $\pm r$) oder ($\pm a$, R, $\mp r$), wenn m gerade ist, folgende Gleichungen zur Bestimmung des Verhältnisses der Maasstrahlen $\gamma : \varrho : \delta = a : R : r$

$$\text{XXIV.} \quad \frac{1 - x_{,,}}{1 - {}_{,}x} = \frac{\delta^2}{\gamma^2} + \frac{\delta^2}{\varrho^2}$$

$$\text{XXV.} \quad \frac{{}_{,,,}x - x_{,,}}{1 - {}_{,}x} = 4q\left(\frac{\delta}{\varrho}\right) - 4q^2,$$

woraus sich ergiebt

$$\text{XXVI.} \quad \frac{\delta}{\varrho} = \frac{1}{4q}\left(\frac{{}_{,,,}x - x_{,,}}{1 - {}_{,}x}\right) + q = \frac{{}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x)}{4q(1 - {}_{,}x)}$$

$$\text{XXVII.} \quad \frac{\delta^2}{\gamma^2} = \frac{16q^2(1 - {}_{,}x)(1 - x_{,,}) - ({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}{16q^2(1 - {}_{,}x)^2}$$

$$\text{XXVIII.} \quad \frac{\varrho^2}{\gamma^2} = \frac{16q^2(1 - {}_{,}x)(1 - x_{,,})}{({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2} - 1$$

$$= \frac{16q^2(1 - {}_{,}x)(1 - x_{,,}) - ({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}{({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}.$$

Die Abhängigkeit der dreierlei Kanten ${}_{,}x$, $x_{,,}$, ${}_{,,,}x$ eines solchen Körpers von einander ist gegeben durch die Gleichung

$$\text{XXIX.} \quad \frac{1 - q^2}{\left(\sqrt{1 + {}_{,,,}x} + (2q^2 - 1)\sqrt{1 + x_{,,}}\right)^2}$$

$$= \frac{4(1 - {}_{,}x)}{({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}.$$

Die den Gleichungen XXIV bis XXIX entsprechenden für den $2 \times p$flächigen Kronrandner ($\pm a$, R, $\pm r$) oder ($\pm a$, R, $\mp r$), wenn m ungerade ist, und für ($\pm a$, $\pm R$, r) oder ($\pm a$, $\mp R$, r), wenn m gerade ist, erhält man aus diesen, wenn man in ihnen δ statt ϱ und ϱ statt δ setzt und den Cosinus der Randkante $\bar{x}$ mit $\underline{x}$ bezeichnet statt ${}_{,}x$ und jenen der Scheitelkante aus δ [192] mit $x_{,,,}$ bezeichnet statt $x_{,,}$ und den der Scheitelkante von γ nach $\dfrac{\varrho\delta}{2\delta q - \varrho}$ mit ${}_{,,}x$ bezeichnet statt ${}_{,,,}x$.

Besondere.

Für das 1- und 1 maassige Axenkreuz wird $q = \text{Cos.}\, 90^\circ = 0$, also die Gleichung $\odot$) hier zu

$$\text{Cos.}\, x = \mp \frac{\gamma \mathfrak{g} \varrho \mathfrak{r} + \varrho \mathfrak{r} \delta \mathfrak{d} + \delta \mathfrak{d} \gamma \mathfrak{g}}{\sqrt{\gamma^2 \varrho^2 + \varrho^2 \delta^2 + \delta^2 \gamma^2}\, \sqrt{\mathfrak{g}^2 \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 \mathfrak{d}^2 + \mathfrak{d}^2 \mathfrak{g}^2}}\,.$$

Statt der Gleichungen I, II, III hat man dann:

$$1)\ \text{Cos.}\, x' = \frac{\varrho^2 \delta^2 - \gamma^2 \varrho^2 - \gamma^2 \delta^2}{\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2}$$

für die Randkante,

$$2)\ \text{Cos.}\, x'' = \frac{-\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 - \gamma^2 \delta^2}{\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2}$$

für die Scheitelkante aus ϱ,

$$3)\ \text{Cos.}\, x''' = \frac{-\varrho^2 \delta^2 - \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2}{\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2}$$

für die Scheitelkante aus δ.

Die für den $2 \times p$ flächigen Ebenrandner $(\gamma,\ \varrho,\ \delta)$ oben gegebenen Gleichungen IV—XIV sind, als von q unabhängig, auch hier gültig, XV und XVI aber werden hier

$$15)\ 1 + x_{,,} = -(x_{,} + x_{,,,})\ \text{oder}$$

$$16)\ 1 + x_{,,,} = -(x_{,} + x_{,,})\ \text{d. h.}\ 1 + x_{,} + x_{,,} + x_{,,,} = 0.$$

Daher wird hier die Gleichung VII einerlei mit:

$$7)\ \gamma^2 : \varrho^2 : \delta^2 = (1 + x_{,,})(1 + x_{,,,}) : (1 + x_{,})(1 + x_{,,}) : (1 + x_{,})(1 + x_{,,,});$$

statt XVII, XVIII und XIX hat man daher

$$17)\ x_{,} = -(1 + x_{,,} + x_{,,,})$$

$$18)\ x_{,,} = -(1 + x_{,} + x_{,,,})$$

$$19)\ x_{,,,} = -(1 + x_{,} + x_{,,}).$$

Die Gleichung XXIII wird hier

$$23)\ \text{Cos.}\, \bar{x} = \frac{\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 - \gamma^2 \delta^2}{\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2} = -\left(\frac{-\varrho^2 \delta^2 - \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2}{\varrho^2 \delta^2 + \gamma^2 \varrho^2 + \gamma^2 \delta^2}\right) = -\text{Cos.}\, x''';$$

$\bar{x}$ ist hier die Mittelkante und x''' die Gipfelkante des strebesäuligen 2×2 flächigen Schiefwandners, der die Stelle eines 2×2 flächigen Kronrandners vertritt.

Da bei diesem Stellvertreter des 2×2 flächigen Kronrandners die 3te Kantenart fehlt (indem hier $\frac{\varrho\delta}{2\delta q - \varrho} = -\delta$, mithin, da $-\delta$ für r^{II} einerlei ist mit $+\delta$ für r^{I}, folglich die [193] Scheitelkante $''x$ von γ nach $\frac{\varrho\delta}{2\delta q - \varrho}$ in r^{II} eine und dieselbe ist mit x''' von γ nach δ in r^{I}, was noch aus XXI erhellt, wenn man darin $q = 0$ einführt und den Werth für Cos. $''x$ vergleicht mit Cos. x''' aus der Gleichung 3), so ist ersichtlich, dass die Gleichungen XXIV bis XXVIII hier nicht dienen können, um die Verhältnisse der Maasstrahlen aus den gegebenen Kanten dieser Gestalt zu finden. Ist aber eines der Verhältnisse $\varrho : \gamma$ oder $\varrho : \delta$ oder $\delta : \gamma$ mittelbar oder unmittelbar bekannt, so hat man aus der der Gleichung XXIV entsprechenden Gleichung

$$24) \quad \frac{1 - x_{'''}}{1 - \underline{x}} = \frac{\varrho^2}{\gamma^2} + \frac{\varrho^2}{\delta^2}$$

oder

$$\frac{1 + \underline{x}}{1 - \underline{x}} = \frac{\varrho^2}{\gamma^2} + \frac{\varrho^2}{\delta^2},$$

wenn $\varrho : \delta$ bekannt ist,

$$\frac{\varrho^2}{\gamma^2} = \frac{1 + \underline{x}}{1 - \underline{x}} - \frac{\varrho^2}{\delta^2}$$

oder, wenn $\varrho : \gamma$ bekannt ist,

$$\frac{\varrho^2}{\delta^2} = \frac{1 + \underline{x}}{1 - \underline{x}} - \frac{\varrho^2}{\gamma^2}$$

und, wenn $\delta : \gamma$ bekannt ist,

$$\frac{\varrho^2}{\delta^2} = \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma^2} \left(\frac{1 + \underline{x}}{1 - \underline{x}}\right).$$

Für die 1- und 2 maassigen Gestalten wird, weil hier $q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, die Gleichung ⊙) zu folgender:

$$\text{Cos. } x =$$

$$\mp \frac{\tfrac{1}{2}\varrho\mathfrak{r}\delta\mathfrak{d} + \gamma\mathfrak{g}\left(\varrho\mathfrak{r} + \delta\mathfrak{d} - (\varrho\mathfrak{d} + \mathfrak{r}\delta)\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\varrho^2\delta^2 + \gamma^2(\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{g}^2(\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{d}^2 - 2\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}}$$

oder, wenn $\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist,

$$\text{Cos. } x =$$
$$\mp \frac{\gamma \mathfrak{g}(\varrho - \frac{1}{2}\lambda)(\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\mathfrak{l}) + \frac{1}{4}\lambda\mathfrak{l}(\gamma\mathfrak{g} + \varrho\mathfrak{r})}{\sqrt{\gamma^2(\varrho - \frac{1}{2}\lambda)^2 + \frac{1}{4}\lambda^2(\gamma^2 + \varrho^2)}\sqrt{\mathfrak{g}^2(\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\mathfrak{l})^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{l}^2(\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{r}^2)}}.$$

Die Gleichung I wird dann

$$1) \quad \text{Cos. } x' = \frac{\frac{1}{4}\lambda^2(\varrho^2 - \gamma^2) - \gamma^2(\varrho - \frac{1}{2}\lambda)^2}{\frac{1}{4}\lambda^2(\varrho^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\varrho - \frac{1}{2}\lambda)^2}.$$

Aus dieser Formel für den Cosinus der Randkante des 2×8 flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \delta)$ entsteht jene für den [194] Cosinus der Randkante des 8 flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \varrho\sqrt{\frac{1}{2}})$, wenn man in ihr $\lambda = \varrho$ setzt; es ist dann

$$\text{Cos. } x' = \frac{\varrho^2 - 2\gamma^2}{\varrho^2 + 2\gamma^2} \text{ oder Tang. } \tfrac{1}{2}x' = \frac{\gamma\sqrt{2}}{\varrho}.$$

Die Randkante des 8 flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, 2\varrho\sqrt{\frac{1}{2}})$ bestimmt sich aus der Gleichung 1), wenn man in ihr $\lambda = 2\varrho$ setzt, und man hat

$$\text{Cos. } x' = \frac{\varrho^2 - \gamma^2}{\varrho^2 + \gamma^2} \text{ und Tang. } \tfrac{1}{2}x' = \frac{\gamma}{\varrho}.$$

Die Gleichung II wird hier

$$2) \quad \text{Cos. } x'' = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}$$

oder

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x'' = \frac{\frac{1}{2}\lambda\sqrt{\gamma^2 + \varrho^2}}{\gamma(\varrho - \frac{1}{2}\lambda)}.$$

Für $\lambda = \varrho$ bestimmt man die Scheitelkante des 8 flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \varrho\sqrt{\frac{1}{2}})$ durch die Gleichung

$$\text{Cos. } x'' = \frac{-\varrho^2}{2\gamma^2 + \varrho^2} \text{ oder Tang. } \tfrac{1}{2}x'' = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \varrho^2}}{\gamma}.$$

Die Gleichung III ist hier

$$3) \quad \text{Cos. } x''' = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}$$

oder

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x''' = \frac{\varrho\sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}\lambda^2}}{\gamma(\lambda - \varrho)}.$$

Setzt man $\lambda = 2\varrho$, so bestimmt sich die Scheitelkante des 8flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, 2\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}})$ durch die Formel

$$\text{Cos. } x''' = \frac{-\varrho^2}{\gamma^2 + \varrho^2} \text{ oder Tang. } \tfrac{1}{2}x''' = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2\varrho^2}}{\gamma}.$$

Die Gleichungen XV und XVI werden hier

$$15)\quad \sqrt{2(1 + x_{,,})} + \sqrt{1 + x_{,,,}} = \sqrt{-(x_{,} + x_{,,,})}$$

$$16)\quad \sqrt{1 + x_{,,}} + \sqrt{2(1 + x_{,,,})} = \sqrt{-(x_{,} + x_{,,})},$$

woraus

$$17)\quad x_{,} = -3 - 2(x_{,,} + x_{,,,}) + 2\sqrt{2(1 + x_{,,})(1 + x_{,,,})}$$

$$18)\quad x_{,,} = -1 + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-(x_{,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}}\right)^2$$

$$19)\quad x_{,,,} = -1 + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-(x_{,} + x_{,,})} - \sqrt{1 + x_{,,}}\right)^2.$$

[**195**] Für den 8flächigen Ebenrandner, wenn der Cosinus seiner Scheitelkante $= y$ und der seiner Randkante $= z$ ist, hat man das Gesetz

$$2y + z = -1.$$

Für die Kanten des 2×4flächigen Kronrandners $(\pm a, \pm R, r)$ hat man die Gleichungen

$$3)\quad \text{Cos. } x''' = \frac{-\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}\left\{\begin{array}{c}\text{Scheitelkante}\\ \text{aus } \delta\end{array}\right.$$

$$21)\quad \text{Cos. } {}''x = \frac{-\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho\lambda - \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}\left\{\begin{array}{l}\text{Scheitelkante}\\ \text{aus} \dfrac{\varrho}{2\delta q - \varrho}\delta\end{array}\right.$$

$$23)\quad \text{Cos. } \underline{x} = \frac{\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda}{\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}\left\{\text{Randkante.}\right.$$

Daher hat man hier

$$\frac{{}_{,,}x + x_{,,,}}{1 - \underline{x}} = -\frac{\varrho^2}{\gamma^2}$$

$$\frac{\underline{x} + x_{,,,}}{1 - \underline{x}} = \frac{\varrho^2}{\tfrac{1}{2}\lambda^2} + 1 \text{ oder } \frac{\varrho^2}{\tfrac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2\underline{x} + x_{,,,} - 1}{1 - \underline{x}}$$

als Stellvertreter für die Gleichungen XXIV und XXV; und

$$8)\quad (1 - \underline{x})(1 + {}_{,,}x) = ({}_{,,}x - x_{,,,} + 2(1 - \underline{x})),$$

statt der Gleichung XXIX. Für $\lambda = \varrho$ hat man

$$\text{Cos. } x''' = -1 \text{ und Cos. } ''x = -\left(\frac{\varrho^2 - 2\gamma^2}{\varrho^2 + 2\gamma^2}\right)$$

und

$$\text{Cos. } \bar{x} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + 2\gamma^2},$$

folglich auch 2 Cos. $\bar{x} = 1 -$ Cos. $''x$, so dass $''x$ die Gipfelkante und $\bar{x}$ die Randkante des 4flächigen Kronrandners $(\pm\gamma, \pm\varrho, \varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}})$ ist.

Für das 1- und 3maassige Axenkreuz ist $q = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$. Die Gleichung ⊙) wird daher

$$\text{Cos. } x = \mp \frac{\gamma\varrho\mathfrak{g}\mathfrak{r} + \frac{1}{4}\varrho\delta\mathfrak{r}\mathfrak{d} + \delta\gamma\mathfrak{d}\mathfrak{g} - \gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{d} + \mathfrak{r}\delta)\sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\gamma^2\varrho^2 + \frac{1}{4}\varrho^2\delta^2 + \delta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\varrho\delta\sqrt{\frac{3}{4}}}\ \sqrt{\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{d}^2\mathfrak{g}^2 - 2\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{\frac{3}{4}}}}$$

oder, wenn $\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ gesetzt wird,

$$\text{Cos. } x = \mp \frac{3\gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{r} + \lambda\mathfrak{l} - (\varrho\mathfrak{l} + \mathfrak{r}\lambda)) + \varrho\mathfrak{r}(\gamma\mathfrak{g} + \frac{3}{4}\lambda\mathfrak{l})}{\sqrt{3\gamma^2(\lambda - \varrho)^2 + \varrho^2(\gamma^2 + \frac{3}{4}\lambda^2)}\ \sqrt{3\mathfrak{g}^2(\mathfrak{l} - \mathfrak{r})^2 + \mathfrak{r}^2(\mathfrak{g}^2 + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2)}}.$$

[196] Man erhält dann statt der Gleichungen I, II, III die Gleichungen:

$$1)\ \text{Cos. } x' = \frac{\frac{3}{4}\varrho^2\lambda^2 - \gamma^2(3(\lambda - \varrho)^2 + \varrho^2)}{\frac{3}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2(3(\lambda - \varrho)^2 + \varrho^2)}$$

oder

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x' = \sqrt{\frac{\gamma^2(3(\lambda - \varrho)^2 + \varrho^2)}{\frac{3}{4}\varrho^2\lambda^2}}$$

$$2)\ \text{Cos. } x'' = -\left(\frac{\frac{3}{4}\lambda^2(\gamma^2 + \varrho^2) - 4\gamma^2(\varrho - \frac{3}{4}\lambda)^2}{\frac{3}{4}\lambda^2(\gamma^2 + \varrho^2) + 4\gamma^2(\varrho - \frac{3}{4}\lambda)^2}\right)$$

oder

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x'' = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\lambda^2(\gamma^2 + \varrho^2)}{4\gamma^2(\varrho - \frac{3}{4}\lambda)^2}}$$

$$\text{Cos. } x''' = -\left(\frac{\varrho^2(\gamma^2 + \frac{3}{4}\lambda^2) - 3\gamma^2(\lambda - \varrho)^2}{\varrho^2(\gamma^2 + \frac{3}{4}\lambda^2) + 3\gamma^2(\lambda - \varrho)^2}\right)$$

oder

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x''' = \sqrt{\frac{\varrho^2(\gamma^2 + \frac{3}{4}\lambda^2)}{3\gamma^2(\lambda - \varrho)^2}}$$

für die dreierlei Kanten des 2×12flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \delta)$ oder $(\gamma, \varrho, \lambda\sqrt{\tfrac{3}{4}})$.

Die Gleichungen XVII, XVIII und XIX werden hierfür:

$$17)\ x_{,} = -x_{,,,} - \left(2\sqrt{1+x_{,,}} + \sqrt{3(1+x_{,,,})}\right)^2$$
$$= -x_{,,} - \left(2\sqrt{1+x_{,,,}} + \sqrt{3(1+x_{,,})}\right)^2$$
$$18)\ x_{,,} = -1 + \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{-(x_{,}+x_{,,,})} - \sqrt{3(1+x_{,,,})}\right)^2$$
$$19)\ x_{,,,} = -1 + \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{-(x_{,}+x_{,,})} - \sqrt{3(1+x_{,,})}\right)^2.$$

Wenn $\lambda = \varrho$ wird, so verwandeln sich die Gleichungen 1), 2), 3) in jene für die Kanten des 12flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \varrho\sqrt{\tfrac{3}{4}})$ und man hat

$$\text{Cos. } x' = \frac{3\varrho^2 - 4\gamma^2}{3\varrho^2 + 4\gamma^2}$$
$$\text{Cos. } x'' = \frac{-3\varrho^2 - 2\gamma^2}{3\varrho^2 + 4\gamma^2}.$$

Dann ist

$$x_{,} = -4x_{,,} - 3 \text{ und } x_{,,} = \frac{-x_{,} - 3}{4},$$

auch ist

$$\frac{\gamma^2}{\varrho^2} = \tfrac{3}{4}\frac{(1-x_{,})}{(1+x_{,})} = -\tfrac{3}{2}\frac{(1+x_{,,})}{(1+2x_{,,})}.$$

Setzt man $\delta = \tfrac{1}{3}\varrho\sqrt{\tfrac{3}{4}}$, also $\lambda = \tfrac{1}{3}\varrho$, so wird

$$\text{Cos. } x' = \frac{\varrho^2 - \gamma^2}{\varrho^2 + \gamma^2}$$
$$\text{Cos. } x''' = -\frac{2\varrho^2 + \gamma^2}{2(\varrho^2 + \gamma^2)},$$

[197] auch ist

$$x_{,} = -4x_{,,,} - 3 \text{ und } x_{,,,} = \frac{-x_{,} - 3}{4}$$

$$\frac{\gamma^2}{\varrho^2} = \frac{1-x_{,}}{1+x_{,}} = -2\left(\frac{1+x_{,,,}}{1+2x_{,,,}}\right).$$

Dieses sind die Gleichungen für den 12flächigen Ebenrandner $(\gamma, \varrho, \tfrac{1}{3}\varrho\sqrt{\tfrac{3}{4}})$.

Die Gleichungen für die Kanten des 2×6flächigen Kronrandners $(\pm a, \pm R, r)$ sind

$$22)\ \mathrm{Cos.}\ {}'x = \frac{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{2}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}$$

$$2)\ \mathrm{Cos.}\ x'' = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}$$

$$20)\ \mathrm{Cos.}\ {}'''x = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 - \frac{2}{3}\gamma^2\varrho^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}.$$

Die Gleichung XXIX wird hier

$$29)\ (1 + {}_{\prime\prime\prime}x) = \left(\sqrt{1 + x_{\prime\prime}} - \sqrt{1 - {}_{\prime}x}\right)^2,$$

sie drückt die Art der Abhängigkeit der dreierlei Kanten eines jeden 2×6flächigen Kronrandners von einander aus, wenn ${}_{\prime}x = \mathrm{Cos.}\ {}'x$ und $x_{\prime\prime} = \mathrm{Cos.}\ x''$ und ${}_{\prime\prime\prime}x = \mathrm{Cos.}\ {}'''x$ und ${}'x$ die Randkante, x'' die stumpfe und ${}'''x$ die scharfe Scheitelkante bedeuten.

Die Gleichungen 22) und 20) verwandeln sich in jene für den 6flächigen Kronrandner $\left(\pm\gamma,\ \pm\varrho,\ \frac{4}{3}\varrho\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$, wenn $\lambda = \frac{4}{3}\varrho$ gesetzt wird:

$$\mathrm{Cos.}\ {}'x = \frac{2\varrho^2 - \gamma^2}{2(\varrho^2 + \gamma^2)},\quad \mathrm{Cos.}\ {}'''x = -\frac{2\varrho^2 - \gamma^2}{2(\varrho^2 + \gamma^2)},$$

also

$${}_{\prime\prime\prime}x = -\,{}_{\prime}x;$$

auch ist

$$\frac{\varrho^2}{\gamma^2} = \frac{1 + 2\,{}_{\prime}x}{2(1 - {}_{\prime}x)} = \frac{1 - 2\,{}_{\prime\prime\prime}x}{2(1 + {}_{\prime\prime\prime}x)}.$$

XI. Berechnungen der wichtigeren Verhältnisse hauptaxenloser Gestalten, und zwar zunächst der 3gliedrig 4axigen.

1) Bezeichnungen, durch welche diese Berechnungen vorbereitet werden.

Bezeichnungen, welche eine und dieselbe Fläche in ihrer Erstreckung durch die verschiedenen Zellen eines 3gliedrig 4axigen Strahlensystems erhält.

Fig. 320. Es seien *mno*, *kno*, *kfo*, *bfo*, *beo*, *meo* sechs Flächen eines 48wandigen Dreieckflächners, welche den Zellen

[**198**] $a_1 R_1 r_1$, $a_4 R_1 r_1$, $a_4 R_3 r_1$, $a_6 R_3 r_1$, $a_6 R_2 r_1$, $a_1 R_2 r_1$ angehören, so dass cm in der Richtung von a_1 und ck in jener von a_4 und cb in jener von a_6 liegt und wieder cn in R_1 und ce in R_2 und cf in R_3, während co in r_1 sich befindet. (Vergl. Fig. 313.)

Die Fläche mno sei in der Zelle $a_1 R_1 r_1$, welche die erste heissen möge, mit $(x\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z)^{\mathrm{I}}$ bezeichnet, so dass $cm = x\sqrt{3}$, $cn = y\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ und $co = z$ ist. Verlängert man die Ebene mno, bis sie die Ebenen $a_1 c a_4$ und $a_4 c a_6$ und $a_6 c a_1$ schneidet, so wird sie zu mhs, und Theile von mhs sind mno, hno, hio, sio, suo, muo. Es ist daher zunächst anzugeben, wie jeder dieser Theile in der Zelle, in welcher er liegt, die Bestimmungsstrahlen a, R, r derselben schneidet. Da cm, cn und co gegeben sind, so müssen noch die Ausdrücke für ch, ci, cs und cu bestimmt werden.

Es ist nun, weil $mck = 90^\circ$ und $mcn = kcn = 45^\circ$,

$$ch : cm = cn\sqrt{\tfrac{1}{2}} : \left(cm - cn\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

$$ch : x\sqrt{3} = y : (2x - y)$$

$$ch = \frac{xy}{2x - y}\sqrt{3},$$

und weil Sin. $mco = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ und Cos. $mco = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und der Winkel $mci = 90^\circ$,

$$ci : cm = co\sqrt{\tfrac{2}{3}} : \left(cm - co\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$

$$ci : x\sqrt{3} = z\sqrt{2} : (3x - z)$$

$$ci = \frac{2xz}{3x - z}\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Weil ferner $hcs = 90^\circ$ und $hci = sci = 45^\circ$, so ist

$$cs : ch = ci\sqrt{\tfrac{1}{2}} : \left(ch - ci\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

$$cs : y\sqrt{3} = z : (3y - 2z)$$

$$cs = \frac{yz}{3y - 2z}\sqrt{3},$$

und weil $hcu = 90^{\circ}$ und Sin. $hco = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ und Cos. $hco = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, so ist

[199]
$$cu : ch = co\sqrt{\tfrac{2}{3}} : \left(ch - co\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$
$$cu : xy\sqrt{3} = z\sqrt{2} : (3xy - 2xz + yz)$$
$$cu = \frac{2xyz}{3xy - 2xz + yz} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Es ist daher die Fläche mno in ihrer Erstreckung durch

die Zelle	zu bezeichnen durch
$\underset{1}{a}\,\underset{1}{R}\,\underset{1}{r}$	$(cm, cn, co) = \left(x\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z\right)$
$\underset{4}{a}\,\underset{1}{R}\,\underset{1}{r}$	$(ch, cn, co) = \left(\frac{xy}{2x-y}\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z\right)$
$\underset{4}{a}\,\underset{3}{R}\,\underset{1}{r}$	$(ch, ci, co) = \left(\frac{xy}{2x-y}\sqrt{3},\ \frac{2xz}{3x-z}\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z\right)$
$\underset{6}{a}\,\underset{3}{R}\,\underset{1}{r}$	$(cs, ci, co) = \left(\frac{yz}{3y-2z}\sqrt{3},\ \frac{2xz}{3x-z}\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z\right)$
$\underset{6}{a}\,\underset{2}{R}\,\underset{1}{r}$	$(cs, cu, co) = \left(\frac{yz}{3y-2z}\sqrt{3},\ \frac{2xyz}{3xy-2xz+yz}\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z\right)$
$\underset{1}{a}\,\underset{2}{R}\,\underset{1}{r}$	$(cm, cu, co) = \left(x\sqrt{3},\ \frac{2xyz}{3xy-2xz+yz}\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z\right).$

In der 3fach rechtwinkligen Zelle $\underset{1}{a}\,\underset{6}{a}\,\underset{4}{a}$ ist die Fläche mno $= mhs$ zu bezeichnen durch

$$[cm, cs, ch] = \left[x\sqrt{3},\ \frac{yz}{3y-2z}\sqrt{3},\ \frac{xy}{2x-y}\sqrt{3}\right].$$

Setzt man $[cm, cs, ch]^{\mathrm{I}} = [\xi\sqrt{3},\ \psi\sqrt{3},\ \varrho\sqrt{3}]$, so ist:

1) $\xi = x$	4) $x = \xi$
2) $\psi = \frac{yz}{3y - 2z}$	5) $y = \frac{2\xi\varrho}{\xi + \varrho}$
3) $\varrho = \frac{xy}{2x - y}$	6) $z = \frac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi + \psi\varrho + \varrho\xi}$

und

$$
\begin{array}{l|l|l}
7)\; cm = \xi\sqrt{3} & 10)\; cn = \dfrac{2\xi\varrho}{\xi+\varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}} & \\
8)\; cs = \psi\sqrt{3} & 11)\; cu = \dfrac{2\xi\psi}{\xi+\psi}\sqrt{\tfrac{3}{2}} & 13)\; co = \dfrac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi+\psi\varrho+\varrho\xi}\,. \\
9)\; ch = \varrho\sqrt{3} & 12)\; ci = \dfrac{2\psi\varrho}{\psi+\varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}} &
\end{array}
$$

[**200**] Ist nun die Frage zu beantworten, welcher Längenwerth jedem der übrigen 4-, 2- und 3gliedrigen Strahlen des 3gliedrig 4axigen Strahlensystems zukommt vom Mittelpunkte c an bis zu dem Punkte, in welchem er von der Fläche mno oder ihrer Verlängerung geschnitten wird, so ergiebt sich, wenn man die Strahlen so mit Zeigezahlen versieht, wie dieses in dem Würfelbilde früher geschehen ist, Fig. 313. dass dem Strahle $\underset{5}{a}$ der Werth $(-cs) = (-\psi\sqrt{3})$ $= \left(\dfrac{-yz}{3y-2z}\sqrt{3}\right)$, dem Strahle $\underset{3}{a}$ der Werth $(-ch)$ $= \left(\dfrac{-xy}{2x-y}\sqrt{3}\right)$ und dem Strahle $\underset{2}{a}$ der Werth $(-cm)$ $= -x\sqrt{3}$ zukommt. Den Werth von $\underset{4}{r}$ findet man, wenn man in dem Ausdrucke $z = \dfrac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi+\psi\varrho+\varrho\xi}$ statt z setzt $\binom{r}{1}$ als Zeichen für den Werth von $\underset{4}{r}$ und statt ψ ein $-\psi$, das heisst $\binom{r}{4} = \dfrac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi+\psi\varrho-\varrho\xi}$ setzt und hier die Werthe $\xi = x$ und $\psi = \dfrac{yz}{3y-2z}$ und $\varrho = \dfrac{xy}{2x-y}$ einführt. Es wird dann $\binom{r}{1} = \dfrac{3yz}{4z-3y}$.

Auf ähnliche Weise erhält man für $-\varrho$

$$\binom{r}{2} = \left(\frac{3\xi\psi\varrho}{-\xi\psi+\psi\varrho+\varrho\xi}\right) = \frac{3xyz}{3xy+2yz-1zx}$$

und für $-\xi$

$$\binom{r}{5} = \frac{3\xi\psi\varrho}{+\xi\psi - \psi\varrho + \varrho\xi} = \frac{3xz}{3x - 2z};$$

übrigens ist

$$\binom{r}{3} = \left(-\frac{r}{5}\right) = \frac{-3xz}{3x - 2z}$$

$$\binom{r}{7} = \left(-\frac{r}{1}\right) = (-z)$$

$$\binom{r}{6} = \left(-\frac{r}{4}\right) = \left(\frac{-3yz}{4z - 3y}\right)$$

$$\binom{r}{8} = \left(-\frac{r}{2}\right) = \left(\frac{-3xyz}{3xy + 2yz - 4zx}\right).$$

[201] Der Werth $\left(\frac{R}{5}\right)$ wird aus $\left(\frac{R}{2}\right) = cu = \frac{2\xi\psi}{\xi + \psi}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ entwickelt, wenn man in dieser Gleichung statt $\left(\frac{R}{2}\right)$ die Grösse $\left(\frac{R}{5}\right)$ und statt ψ die Grösse $-\psi$ setzt und statt ξ und ψ die Werthe aus den Gleichungen 1) und 2) einführt.

Es ist dann

$$\binom{R}{5} = \frac{2\xi\psi}{\psi - \xi}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{2xyz}{-3xy + yz + 2zx}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\binom{R}{8} = \left(-\frac{R}{2}\right) = \frac{-2xyz}{3xy + yz - 2zx}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\binom{R}{11} = \left(-\frac{R}{5}\right) = \frac{-2xyz}{-3xy + yz + 2zx}\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

$\binom{R}{6}$ wird aus $\binom{R}{1} = cn = \frac{2\xi\varrho}{\xi + \varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ erhalten, wenn statt ϱ gesetzt wird $-\varrho$ und dann die Werthe ξ und ϱ aus 1) und 3) substituirt werden. Man hat dann

$$\binom{R}{6} = \frac{2\xi\varrho}{\varrho - \xi}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{xy}{y - x}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\binom{R}{12} = \left(-\frac{R}{1}\right) = -y\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\binom{R}{7} = \left(-\frac{R}{6}\right) = \frac{-xy}{y - x}\sqrt{\tfrac{3}{2}};$$

$\binom{R}{4}$ wird aus $\binom{R}{3} = ci = \frac{2\psi\varrho}{\psi + \varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ gefunden, wenn statt ψ gesetzt wird $-\psi$ und dann statt ψ und ϱ die Werthe 2) und 3) eingeführt werden. Man erhält so:

$$\binom{R}{4} = \frac{2\psi\varrho}{\psi - \varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{2xyz}{-3xy - yz + 4zx}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\binom{R}{9} = \left(-\frac{R}{3}\right) = \frac{-2xz}{3x - z}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\binom{R}{10} = \left(-\frac{R}{4}\right) = \frac{-2xyz}{-3xy - yz + 4zx}\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Auf solche Weise wird gefunden, welcher Längenwerth jedem der 6 Strahlen a und jedem der 12 Strahlen R und jedem der 8 Strahlen r zustehe für eine in Beziehung zum 3gliedrig 4axigen Strahlensysteme in bestimmter Lage befindliche gegebene [202] Ebene, folglich kann nun unmittelbar angegeben werden, welches Zeichen dieser Ebene in jeder der 48 Zellen entspreche. Es sei z. B. die Ebene gegeben in der Zelle $\underset{1}{a}\,\underset{1}{R}\,\underset{1}{r}$ durch $(\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \frac{12}{7})$ oder in der 3fach rechtwinkligen Zelle $\underset{1}{a}\,\underset{6}{a}\,\underset{4}{a}$ durch $[\sqrt{3},\ 4\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}]$, so ist sie

Nummer der Zelle	in der Zelle $a\,R\,r$ mit der Zeigezahl			bestimmt durch $\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	Nummer der Zelle	in der Zelle $a\,R\,r$ mit der Zeigezahl			bestimmt durch $\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1
				mit dem Factor							mit dem Factor		
1)	1	1	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{7}$	7)	1	1	4	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$
2)	4	1	1	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{7}$	8)	1	1	4	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$
3)	4	3	1	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	9)	4	3	5	2	$\frac{8}{3}$	-12
4)	6	3	1	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	10)	6	3	5	4	$\frac{8}{3}$	-12
5)	6	2	1	4	$\frac{8}{5}$	$\frac{12}{7}$	11)	6	2	2	4	$\frac{8}{5}$	4
6)	1	2	1	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{12}{7}$	12)	1	2	2	1	$\frac{8}{3}$	4

Nummer der Zelle	in der Zelle $a\,R\,r$ mit der Zeigezahl	bestimmt durch $\sqrt{3}$ mit dem Factor	bestimmt durch $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mit dem Factor	bestimmt durch 1 mit dem Factor	Nummer der Zelle	in der Zelle $a\,R\,r$ mit der Zeigezahl	bestimmt durch $\sqrt{3}$ mit dem Factor	bestimmt durch $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mit dem Factor	bestimmt durch 1 mit dem Factor
13)	1 5 4	1	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$	31)	5 5 3	-4	$\frac{8}{3}$	12
14)	4 4 4	2	8	$\frac{12}{5}$	32)	5 4 8	-4	8	-4
15)	4 7 5	2	-4	-12	33)	2 7 8	-1	-4	-4
16)	6 11 5	4	$-\frac{8}{3}$	-12	34)	2 11 6	-1	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{5}$
17)	6 10 2	4	-8	4	35)	3 10 6	-2	-8	$-\frac{12}{5}$
18)	1 6 2	1	4	4	36)	3 6 3	-2	4	12
19)	1 5 3	1	$\frac{8}{3}$	12	37)	5 9 3	-4	$-\frac{8}{3}$	12
20)	4 4 8	2	8	-4	38)	5 8 8	-4	$-\frac{8}{5}$	-4
21)	4 7 8	2	-4	-4	39)	2 8 8	-1	$-\frac{8}{5}$	-4
22)	6 11 6	4	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{5}$	40)	2 12 6	-1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{5}$
23)	6 10 6	4	-8	$-\frac{12}{5}$	41)	3 12 6	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{5}$
24)	1 6 3	1	4	12	42)	3 9 3	-2	$-\frac{8}{3}$	12
25)	5 5 4	-4	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$	43)	5 9 7	-4	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{7}$
26)	5 4 4	-4	8	$\frac{12}{5}$	44)	5 8 7	-4	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{12}{7}$
27)	2 7 5	-1	-4	-12	45)	2 8 7	-1	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{12}{7}$
28)	2 11 5	-1	$-\frac{8}{3}$	-12	46)	2 12 7	-1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{7}$
29)	3 10 2	-2	-8	4	47)	3 12 7	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{7}$
30)	3 6 2	-2	4	4	48)	3 9 7	-2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{7}$.

Unter den 48 Zellen befinden sich demnach 15, in deren jeder die 3 Bestimmungsstrahlen a, R, r derselben von der fraglichen Fläche geschnitten werden, ohne über den Mittelpunkt hinaus verlängert werden zu müssen*), in 9 andern Zellen werden [203] bloss 2 der Bestimmungsstrahlen a, R, r auf solche Weise geschnitten, der 3te aber muss über den Mittelpunkt hinaus verlängert werden**), in noch andern 9 Zellen wird bloss einer der Bestimmungsstrahlen unmittelbar geschnitten, von den beiden anderen Strahlen aber werden

*) Es sind dieses in dem gewählten Beispiele die den fortlaufenden Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 11, 12, 13, 14, 18, 19, 24 entsprechenden.

**) Dieses ist der Fall in den Zellen 9, 10, 17, 20, 25, 26, 30, 31, 36.

bloss die Verlängerungen über den Mittelpunkt hinaus geschnitten*).

Die dann noch übrigen 15 Zellen werden von der in Rede stehenden Fläche nicht durchschnitten; jeder der 3 Strahlen einer solchen Zelle muss über den Mittelpunkt hinaus, also nach rückwärts verlängert werden, ehe er von dieser Fläche geschnitten wird.

Daraus geht zugleich hervor, dass 48 in Beziehung auf ihre Lage zu einem 3gliedrig 4axigen Strahlensysteme einander gleichwerthige Ebenen 33 verschiedenen 2fach 3gliedrig 8strahligen Gestalten als Grenzen oder Wände dienen, nämlich 15 verschiedenen ringsum endlich begrenzten Räumen, deren jeder ein 48wandiger Dreieckflächner ist, und 18 zwar begrenzten d. h. von Aussen gänzlich abgeschiedenen, aber nach mehreren Richtungen hin unendlichen Räumen**).

Bezeichnung von Flächen, die in verschiedenen Zellen liegend gegeben sind, in einer und derselben und derselben Zelle.

Es ist leicht einzusehen, dass eine Fläche, welche in der Zelle $a_1 R_2 r_1$ bezeichnet ist durch $(\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{7})$, in der Zelle [204] $a_1 R_1 r_1$ wird eben so bezeichnet werden müssen, wie die Fläche, welche in der Zelle $a_1 R_1 r_1$ bezeichnet ist durch $(\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{7})$, in der Zelle $a_1 R_2 r_1$ zu bezeichnen war, während die in der Zelle $a_4 R_3 r_1$ durch $(\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{7})$ bezeich-

---

*) So in den Zellen 15, 16, 21, 22, 23, 29, 32, 37, 42.

**) Dazu kommt noch, dass gleichfalls der äussere unendliche Raum, welcher eine dieser 33 Gestalten umgiebt (gleichsam die hohle Form für einen solchen ist), wieder als besondere Hohlgestalt betrachtet werden kann, wodurch jene 33 Gestalten sich verdoppeln und zu 66 werden. Die zu der Gestalt $(2\sqrt{3},\ 8\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{5})$ gehörige Hohlgestalt $((-2\sqrt{3}),\ (-8\sqrt{\frac{3}{2}}),\ (-\frac{12}{5}))$ kann dargestellt werden durch $)2\sqrt{3},\ 8\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{5}($, so wie die zu $(2\sqrt{3},\ (-4\sqrt{\frac{3}{2}}),\ (-12))$ gehörige durch $)2\sqrt{3},\ (-4\sqrt{\frac{3}{2}}),\ (-12)($ und die zu $((-2\sqrt{3}),\ 4\sqrt{\frac{3}{2}}.\ 12)$ gehörige durch $)(-2\sqrt{3}),\ 4\sqrt{\frac{3}{2}},\ 12($.

nete Fläche in der Zelle $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ so wird bezeichnet werden müssen, wie die in $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ mit $\left(\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{7}\right)$ bezeichnete Fläche in der Zelle $\underset{6\,2\,1}{aRr}$ bezeichnet wurde. Behält man die Numerirung der 48 Zellen bei, welche bei der Tabelle über das Verhalten der Fläche $\left(\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{12}{7}\right)$ der Zelle $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ in den sämmtlichen 48 Zellen gewählt wurde, so kann man sagen, die 6te Zelle verhalte sich in dieser Beziehung zur 1sten, wie die 1ste zur 6ten, und die 3te zur 1sten, wie die 1ste zur 5ten, während die 5te zur 1sten sich verhält wie die 1ste zur 3ten. Sagt man daher: eine Fläche F der $n$ten Zelle sei in der 1sten Zelle so zu bezeichnen, wie die Fläche F der 1sten Zelle in der $m$ten Zelle zu bezeichnen war, so sind die einander entsprechenden Werthe von n und m in folgender Tabelle neben einander gestellt:

n	m	n	m	n	m	n	m
1	1	13	12	25	9	37	23
2	2	14	11	26	10	38	35
3	5	15	30	27	27	39	34
4	4	16	29	28	28	40	40
5	3	17	17	29	16	41	41
6	6	18	18	30	15	42	22
7	7	19	19	31	20	43	43
8	8	20	31	32	32	44	48
9	25	21	36	33	33	45	45
10	26	22	42	34	39	46	46
11	14	23	37	35	38	47	47
12	13	24	24	36	21	48	44.

[205] 2) Gleichungen zwischen den trigonometrischen Functionen der Kanten einer 3gliedrig 4axigen Gestalt und den Werthen der Bestimmungsstrahlen.

Es seien die Werthe der Bestimmungsstrahlen zweier Flächen in der 1sten Zelle $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ (gleichviel ob sie als Begrenzungstheile einer gegebenen Gestalt darin liegen oder nicht) für die

eine $= (\gamma\sqrt{3},\ \varrho\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \delta)^{\mathrm{I}}$ und für die andere $(\mathfrak{g}\sqrt{3},\ \mathfrak{r}\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \mathfrak{b})^{\mathrm{I}}$, so ist, wenn jene in der 3fach rechtwinkligen Zelle aaa durch
164
$[\xi_{,}\sqrt{3},\ \psi_{,}\sqrt{3},\ \varrho_{,}\sqrt{3}]^{\mathrm{I}}$ und diese durch $[\xi_{,,}\sqrt{3},\ \psi_{,,}\sqrt{3},\ \varrho_{,,}\sqrt{3}]^{\mathrm{I}}$ ausgedrückt wird,

$$\xi_{,} = \gamma \text{ und } \psi_{,} = \frac{\varrho\delta}{3\varrho - 2\delta} \text{ und } \varrho_{,} = \frac{\gamma\varrho}{2\gamma - \varrho}$$

$$\xi_{,,} = \mathfrak{g} \text{ und } \psi_{,,} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{b}}{3\mathfrak{r} - 2\mathfrak{b}} \text{ und } \varrho_{,,} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{r}}{2\mathfrak{g} - \mathfrak{r}}.$$

Ist dann die Neigung der beiden fraglichen Flächen $= x$, so ist*):

$$\odot)\quad \text{Cos. } x =$$

$$\mp \frac{\xi_{,}\xi_{,,}\psi_{,}\psi_{,,} + \psi_{,}\psi_{,,}\varrho_{,}\varrho_{,,} + \varrho_{,}\varrho_{,,}\xi_{,}\xi_{,,}}{\sqrt{\xi_{,}^2\psi_{,}^2 + \psi_{,}^2\varrho_{,}^2 + \varrho_{,}^2\xi_{,}^2}\ \sqrt{\xi_{,,}^2\psi_{,,}^2 + \psi_{,,}^2\varrho_{,,}^2 + \varrho_{,,}^2\xi_{,,}^2}};$$

setzt man für $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$, $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$ die ihnen zustehenden Werthe, so wird

$$☽)\quad \text{Cos. } x =$$

$$\mp \frac{\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right) + \left(3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)\left(3\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\right) - 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right) + \left(2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)\left(2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)^2 + \left(2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)^2}\ \sqrt{\left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)^2 + \left(3\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\right) - 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right)^2 + \left(2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)\right)^2}},$$

oder wenn man

$$\frac{1}{\gamma} = l_{,} \text{ und } 3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = m_{,} \text{ und } 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right) = n_{,}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = l_{,,} \text{ und } 3\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\right) - 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = m_{,,} \text{ und } 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right) = n_{,,}$$

[**206**] setzt,

$$♂)\quad \text{Cos. } x = \mp \frac{l_{,}l_{,,} + m_{,}m_{,,} + n_{,}n_{,,}}{\sqrt{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\sqrt{l_{,,}^2 + m_{,,}^2 + n_{,,}^2}}.$$

* Vergleiche die Formeln ♄, für die hauptaxigen Gestalten, insbesondere die Formel ♃ für die 1- und 1maassigen.

Es ist dann

$$1)\ \frac{1}{\gamma} = l_{,} \qquad \text{und} \quad \frac{1}{\mathfrak{g}} = l_{,,}$$

$$2)\ \frac{1}{\varrho} = \frac{n_{,} + l_{,}}{2} \qquad \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{n_{,,} + l_{,,}}{2}$$

$$3)\ \frac{1}{\delta} = \frac{m_{,} + n_{,} + l_{,}}{3} \qquad \frac{1}{\mathfrak{d}} = \frac{m_{,,} + n_{,,} + l_{,,}}{3}.$$

Nimmt man $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{d} = \delta$, aber $\mathfrak{r} = \dfrac{2\gamma\varrho\delta}{3\gamma\varrho - 2\gamma\delta + \varrho\delta}$, so wird $l_{,,} = l_{,} = \dfrac{1}{\gamma}$, $m_{,,} = n_{,} = 2\left(\dfrac{1}{\varrho}\right) - \left(\dfrac{1}{\gamma}\right)$,

$$n_{,,} = m_{,} = 3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

und man hat dann

$$4)\quad \text{Cos.}\, x' = -\left(\frac{l_{,}^2 + 2m_{,}n_{,}}{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\right),$$

wenn x' die 4- und 3ständige Kante des 48wandigen Dreieckflächners $(\gamma\sqrt{3},\ \varrho\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \delta)$ bedeutet. Für $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{r} = \varrho$ und

$$\mathfrak{d} = \frac{3\varrho\delta}{4\delta - 3\varrho} \text{ wird } l_{,,} = l_{,} = \frac{1}{\gamma},$$

$$m_{,,} = -m_{,} = -\left(3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right),$$

$$n_{,,} = n_{,} = 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

folglich

$$5)\quad \text{Cos.}\, x'' = -\left(\frac{l_{,}^2 - m_{,}^2 + n_{,}^2}{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\right),$$

welches die Gleichung ist für die 4- und 2ständige Kante dieses Körpers.

Wenn $\mathfrak{g} = \dfrac{\gamma\varrho}{2\gamma - \varrho}$ und $\mathfrak{r} = \varrho$ und $\mathfrak{d} = \delta$ ist, so wird

$$l_{,,} = 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{1}{\gamma} = n_{,},\ m_{,,} = 3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = m_{,},$$

$$n_{,,} = \frac{1}{\gamma} = l_{,},$$

[207] mithin

$$6)\quad \text{Cos. } x''' = -\left(\frac{m_,^2 + 2\,l_,n_,}{l_,^2 + m_,^2 + n_,^2}\right),$$

wodurch die 3- und 2ständige Kante bestimmt wird. Ist Cos. $x' = x_,$ und Cos. $x'' = x_{,,}$ und Cos. $x''' = x_{,,,}$, so hat man

$$7)\quad \frac{1 + x_,}{1 + x_{,,}} = \frac{(n - m)^2}{2m^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{m} - 1\right)^2,$$

folglich

$$8)\quad \frac{n}{m} = 1 + \sqrt{\frac{2(1 + x_,)}{1 + x_{,,}}},$$

$$9)\quad \frac{x_{,,} + x_{,,,}}{1 + x_{,,}} = \frac{-(n + l)^2}{2m^2} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{m} + \frac{l}{m}\right)^2,$$

$$10)\quad \frac{l}{m} = \sqrt{\frac{-2(x_{,,} + x_{,,,})}{1 + x_{,,}}} - \frac{n}{m}$$

$$= \sqrt{\frac{-2(x_{,,} + x_{,,,})}{1 + x_{,,}}} - \sqrt{\frac{2(1 + x_,)}{1 + x_{,,}}} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{-2(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{2(1 + x_,)} - \sqrt{1 + x_{,,}}}{\sqrt{1 + x_{,,}}},$$

$$11)\quad \frac{n}{l} = \frac{\sqrt{2(1 + x_,)} + \sqrt{1 + x_{,,}}}{\sqrt{-2(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{2(1 + x_,)} - \sqrt{1 + x_{,,}}};$$

ferner ist

$$12)\quad \frac{1 + x_{,,,}}{-(x_{,,} + x_{,,,})} = \frac{(l - n)^2}{(l + n)^2} = \frac{\left(\frac{l}{n} - 1\right)^2}{\left(\frac{l}{n} + 1\right)^2},$$

folglich

$$13)\quad \frac{l}{n} = \frac{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} + \sqrt{1 + x_{,,,}}}{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}}}$$

und daher, wenn man beide Werthe von $\frac{l}{n}$ einander gleich setzt:

$$\frac{\sqrt{-2(x_{,,}+x_{,,,})}}{\sqrt{2(1+x_{,})}+\sqrt{1+x_{,,}}}-1=\frac{\sqrt{-(x_{,,}+x_{,,,})}+\sqrt{1+x_{,,,}}}{\sqrt{-(x_{,,}+x_{,,,})}-\sqrt{1+x_{,,,}}}$$

$$\frac{\sqrt{-2(x_{,,}+x_{,,,})}}{\sqrt{2(1+x_{,})}+\sqrt{1+x_{,,}}}=\frac{2\sqrt{-(x_{,,}+x_{,,,})}}{\sqrt{-(x_{,,}+x_{,,,})}-\sqrt{1+x_{,,,}}},$$

folglich

$$14)\quad 2\sqrt{1+x_{,}}+\sqrt{2(1+x_{,,})}=\sqrt{-(x_{,,}+x_{,,,})}-\sqrt{1+x_{,,,}}.$$

[208] Wenn man $\frac{1+x_{,}}{2}=(\text{Cos. } \tfrac{1}{2}x')^2=c_{,}^2$ und $\frac{1+x_{,,}}{2}=c_{,,}^2$ und $\frac{1-x_{,,,}}{2}=(\text{Sin. } \tfrac{1}{2}x''')^2=s_{,,,}^2$ und $\frac{1+x_{,,,}}{2}=c_{,,,}^2$ setzt, so wird

$$15)\quad \frac{n}{m}=\frac{2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2}}{c_{,,}\sqrt{2}},$$

$$16)\quad \frac{l}{m}=\frac{2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}-(2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2})}{c_{,,}\sqrt{2}},$$

$$17)\quad \frac{l}{n}=\frac{2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}-(2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2})}{2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2}},$$

$$18)\quad \frac{l}{n}=\frac{\sqrt{2(s_{,,,}^2-c_{,,}^2)}+c_{,,,}\sqrt{2}}{\sqrt{2(s_{,,,}^2-c_{,,}^2)}-c_{,,,}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}+c_{,,,}}{\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}-c_{,,,}}.$$

Daher ist

$$\frac{n+l}{n}=\frac{2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}}{2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}}{\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}-c_{,,,}},$$

$$\frac{m+n+l}{n}=\frac{c_{,,}\sqrt{2}+2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}}{2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2}},$$

folglich

$$19)\quad \frac{1}{\gamma}:\frac{1}{\varrho}:\frac{1}{\delta}=\left(2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}-(2c_{,}+c_{,,}\sqrt{2})\right):$$
$$\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}:\tfrac{1}{3}\left(c_{,,}\sqrt{2}+2\sqrt{s_{,,,}^2-c_{,,}^2}\right)$$

Die Gleichungen 8) bis 13) und 15) bis 18) dienen dazu, um die Werthe der Verhältnisse der Hülfsgrössen m, n, l zu finden, wenn die Kanten eines 48wandigen Dreieckflächners als der allgemeinsten Gestalt in dem 3gliedrig 4axigen Gestaltensysteme gegeben sind.

Die Gleichung 19) drückt das Verhältniss der Werthe γ, ϱ, δ in der Gestalt $\left(\gamma\sqrt{3},\ \varrho\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \delta\right)$ unmittelbar aus. Die Gleichung 14) giebt das Gesetz der Abhängigkeit der dreierlei Kanten eines derartigen Körpers von einander.

Da aus der Gleichung ♂) alle übrigen noch nicht entwickelten Formeln sich leicht ableiten lassen, so dürfte eine weitere Auseinandersetzung derselben hier wegbleiben können*).

[209] XII. Bezeichnung von Strahlen.

Wenn in einer Ebene zwei von einem Punkte c ausgehende Strahlen B und D ihrer Grösse und Richtung nach gegeben sind, so lässt sich, wenn man durch das freie Ende von jedem eine Linie parallel dem anderen Strahle zieht, ein Parallelogramm bilden. Ein 3ter Strahl S in dieser Ebene, welcher vom Anfangspunkte der Ausstrahlung anfängt und die Lage und Grösse derjenigen Diagonale dieses Parallelogramms hat, für welche dieser Anfangspunkt eins der beiden Enden ist, ist daher ein nach Lage und Grösse vollkommen bestimmter Strahl. Man nenne den Strahl S den Gerenstrahl von B und D (Diagonalstrahl von B und D) und bezeichne ihn durch $[B, D]$.

Geht von dem Punkte c ein Strahl A aus, welcher nicht in die Ebene BD fällt, und ist seine Lage und Länge gegeben, so ist zwischen S und A ein Strahl möglich, welcher der Gerenstrahl von A und S ist und durch $[A, S]$ oder, wenn man statt S seinen Werth setzt, durch $[A, B, D]$ bezeichnet werden kann.

Wenn die Richtungen von 3 Strahlen a, b, d gegeben sind, welche, nicht in einerlei Ebene liegend, vom Anfangspunkte

*) Die Gleichungen für die 3gliedrig 10axigen Gestalten müssen hier wegbleiben, weil diese Gestalten selbst, wie aus dem Folgenden erhellen wird, dem Gebiete der Krystallkunde fremd sind. Vergleiche übrigens *Rothe*: Ueber die regulären geometrischen Körper u. s. w. in Kastner's Archiv etc. 1825 ff. J.

ausgehen, und es ist von irgend einem vierten Strahle x, welcher von demselben Anfangspunkte ausgeht, die Richtung und Grösse bekannt, so lassen sich stets die Längenwerthe A, B und D auffinden, welche den Strahlen a, b, d eigen sein müssen, damit jener Strahl x in Beziehung auf die Strahlen a, b, d ausgedrückt sei durch $[A, B, D]$.

Fig. 329. Es sei $c\alpha'$ der Strahl a, $c\beta'$ der Strahl b, $c\delta'$ der Strahl d und $c\gamma'''$ der Strahl $[A, B, D]$. Die Richtungsverhältnisse dieser 4 Strahlen mögen durch irgend beliebige Winkelangaben gegeben sein, so wird stets, wenn man

den Winkel $\alpha' c\beta'$ durch $\mathfrak{D}$ und $\alpha' c\delta' \parallel \beta' c\delta'$ durch $\mathfrak{d}$,
\- - $\alpha' c\delta'$ - $\mathfrak{B}$ - $\alpha' c\beta' \parallel \delta' c\beta'$ - $\mathfrak{b}$,
\- - $\beta' c\delta'$ - $\mathfrak{A}$ - $\alpha' c\beta' \parallel \alpha' c\delta'$ - $\mathfrak{a}$

bezeichnet, aus der Angabe selbst die Beschaffenheit dreier der sechs Stücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ der Ecke c, $\alpha'\beta'\delta'$ so folgen müssen, [**210**] dass aus ihnen nach den gewöhnlichen Gesetzen der Eckenlehre (von welcher die sogenannte sphärische Trigonometrie einen Theil ausmacht) die übrigen drei sich bestimmen lassen. Eben so muss aus den Winkelangaben über den Strahl $c\gamma'''$ sich ableiten lassen die Grösse des Winkels $\gamma''' c\beta' = \mathfrak{T}$ und des Winkels $\gamma''' c\delta' = \mathfrak{P}$ und aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ und dem Winkel $\mathfrak{A}$ jene der Neigungen $\gamma''' c\beta' \parallel \delta' c\beta' = p$ und $\gamma''' c\delta' \parallel \beta' c\delta' = t$, und dann lässt sich aus p und $\mathfrak{b}$ die Grösse der Neigung $\gamma''' c\beta' \parallel \gamma'' c\alpha' = P$ und aus t und $\mathfrak{d}$ die der Neigung $\gamma''' c\delta' \parallel \gamma' c\delta' = T$ finden, denn $p + P = \mathfrak{b}$ und $t + T = \mathfrak{d}$. Eine Linie, welche von α' aus senkrecht auf $c\beta'$, und eine andere, welche von δ' aus senkrecht auf $c\beta'$ gefällt würden, müssten sich verhalten wie $\text{Sin.}\, p : \text{Sin.}\, P$; da nun jene sich ausdrücken lässt durch $c\alpha' \cdot \text{Sin.}\, \mathfrak{D}$ und diese durch $c\delta' \cdot \text{Sin.}\, \mathfrak{A}$, so ist:

$$c\alpha' \cdot \text{Sin.}\, \mathfrak{D} : c\delta' \cdot \text{Sin.}\, \mathfrak{A} = \text{Sin.}\, p : \text{Sin.}\, P$$

oder

$$c\alpha' : c\delta' = \text{Sin.}\, \mathfrak{A} \cdot \text{Sin.}\, p : \text{Sin.}\, \mathfrak{D} \cdot \text{Sin.}\, P.$$

Eben so hat man:

$$c\alpha' : c\beta' = \text{Sin.}\, \mathfrak{A} \cdot \text{Sin.}\, t : \text{Sin.}\, \mathfrak{B} \cdot \text{Sin.}\, T,$$

mithin

$$A : B : D = c\alpha' : c\beta' : c\delta' =$$
$$\text{Sin.}\, \mathfrak{A} \cdot \text{Sin.}\, p \cdot \text{Sin.}\, t : \text{Sin.}\, \mathfrak{B} \cdot \text{Sin.}\, p \cdot \text{Sin.}\, T : \text{Sin.}\, \mathfrak{D} \cdot \text{Sin.}\, t \cdot \text{Sin.}\, P.$$

Dass der Werth A oder B oder D, welcher einem solchen Strahle a, b oder d für irgend eine gegebene Einheit zusteht, positiv oder negativ, unendlich gross oder Null sein, dass er rational oder irrational sein könne u. s. w., ist an sich klar.

XIII. Ueber das Gerengesetz und über gerengesetzliche Strahlenvereine und gerengesetzliche Flächenvereine.

1) Allgemeine Lehren.

Es lässt sich in der Ebene zweier nach Länge und Lage gegebener Strahlen B und D, die nicht in einer und derselben geraden Linie liegen, stets ein neuer 3ter Strahl S' denken, welcher der Gerenstrahl von B und D und daher nach Länge und Lage bestimmt ist. Zwischen S' und B ist daher abermals ein neuer Strahl S'' möglich, welcher Gerenstrahl von S' und B ist; ebenso entsteht auch ein Gerenstrahl S''' von S' und D. Durch Verbindung von S'' mit B oder D oder S' entstehen abermals neue Strahlen und es lässt sich auf solche Weise eine unendliche Menge von Strahlen nach und nach aus zwei solchen gegebenen Strahlen B und D ableiten, von denen jeder neue immer wieder Gerenstrahl ist von zwei älteren, welche [211] schon als Gerenstrahlen von wieder andern bereits bestimmten Strahlen erkannt sind u. s. w. Ein Gesetz, welches diese Art der Abhängigkeit irgend einer Strahlenmenge von einander und von zwei ursprünglich gegebenen fordert, nennt man Gerenstrahlengesetz oder *Gerengesetz* oder auch das Gesetz vom *Parallelogramme der Strahlen* *).

Wird in der Ebene BD der Strahl S verbunden mit dem Strahle B und der Gerenstrahl von B und S betrachtet, so ist einleuchtend, dass $[B, S] = [2B, D]$ sei. Ist z. B. $cb' = B$ und $cd' = D$, so ist $cs' = S$, und cs'' liegt als Gerenstrahl zwischen cs' und cb' und wieder als Gerenstrahl zwischen cd' und cb'', d. h. zwischen D und $2B$. Ebenso ist ferner der Gerenstrahl von cs'' und $cb' = [3B, D]$ u. s. w. Auf ähnliche Weise ist der Gerenstrahl zwischen cs' und Fig. 321.

*) Es gründet sich auf dieses Gesetz die Lehre vom Parallelogramme der Kräfte.

$D = [B, 2D]$ und der von $[B, 2D]$ und D wird $[B, 3D]$. Allgemein ist der Gerenstrahl von $[mB, D]$ und B nichts anderes als der Strahl $[(m+1)B, D]$ und jener von $[B, nD]$ und D ist $[B, (n+1)D]$. Der Gerenstrahl von $[3B, D]$ und D ist ebenso $= [3B, 2D]$, wie es z. B. bei dem Strahle
Fig. 322. $c\,''s'''$ wohl ohne ausführlichen Beweis einleuchtet, dass er sowohl Gerenstrahl von cd' und cs''' als auch von $cd'' = 2D$ und $cb''' = 3B$ sein müsse.

Dass man die beiden gegebenen Strahlen B und D auch darstellen könne durch $[B, 0D]$ den ersten und $[0B, D]$ den zweiten, ist gleichfalls einleuchtend. Es ist daher jeder bisher aus den beiden gegebenen Strahlen B und D gerengesetzlich abgeleitete Strahl in der Ebene BD unter dem allgemeinen Zeichen $[mB, nD]$ begriffen, so dass jeder der Buchstaben B und D die ursprünglich gegebene Länge des seiner Richtung nach bekannten Strahles B oder D bedeutet, welche gleichsam als *Maass* dient für die in der Richtung von B oder D liegende Linie, während jeder der Buchstaben m oder n eine *rationale* Zahl ist, welche angiebt, wie vielmal dieses Maass zu nehmen sei, und die man daher den *Maasszähler* für B oder D nennen kann.

Sind nun irgend zwei Strahlen bezeichnet durch $[m'B, n'D]$ und $[m''B, n''D]$ in Beziehung zu den beiden gegebenen Strahlen B und D, so ist der Gerenstrahl von diesen beiden $= [xB, yD]$, sodass x und y rationale ganze Zahlen sind, wenn **[212]** m', n', m'', n'' rationale ganze Zahlen waren. Es sei
Fig. 323. nämlich $cb^{(m,)} = m'B$ und $cd^{(n,)} = n'D$ und $cb^{(m,,)} = m''B$ und $cd^{(n,,)} = n''D$, so ist $c\sigma = [m'B, n'D]$ und $cs = [m''B, n''D]$. Der Gerenstrahl $c\Sigma$ von $c\sigma$ und cs ist nun zugleich Gerenstrahl von $cb^{(x)}$ und $cd^{(y)}$. Aber $cb^{(x)} = cb^{(m,)} + b^{(m,)}b^{(x)} = cb^{(m,)} + cb^{(m,,)}$, denn $b^{(m,)}b^{(x)} = \sigma\Theta = cb^{(m,,)}$, weil das Dreieck $\sigma\Theta\Sigma \cong$ dem Dreieck $cb^{(m,,)}s$, wie leicht einzusehen ist; daher ist $cb^{(x)} = m'B + m''B = (m'+m'')B$ und ebenso $cd^{(y)} = n'D + n''D = (n'+n'')D$, folglich $c\Sigma = [(m'+m'')B, (n'+n'')D]$.

Es lässt sich daher jeder zu den beiden Strahlen B und D in gerengesetzlicher Abhängigkeit stehende Strahl ausdrücken durch $[mB, nD]$, so dass B und D die gegebenen Werthe von B und D, die Grössen m und n aber rationale Maasszähler für B und D sind.

Dass nun auch umgekehrt jeder Strahl, welcher auf solche Weise durch $[mB, nD]$ ausgedrückt werden kann, in gerengesetzlicher Abhängigkeit von B und D stehen müsse, ist leicht einzusehen.

Wenn eine Gesammtheit von Strahlen gegeben ist, welche in gerengesetzlicher Abhängigkeit von zwei ursprünglich gegebenen Strahlen B und D stehen (d. h. eine Gesammtheit von Strahlen, deren jeder durch das allgemeine Zeichen $[yB, zD]$ dargestellt ist, so dass y und z rationale Maasszähler, B und D aber die Maasse der zwei ursprünglich gegebenen Strahlen sind), so ist jeder einzelne Strahl darunter in gerengesetzlicher Abhängigkeit von je zwei beliebigen andern zu derselben Gesammtheit gehörigen Strahlen β und δ (d. h. lässt sich ausdrücken durch $[\psi\beta, \varrho\delta]$, so dass ψ und ϱ rationale Maasszähler sind und β und δ die Werthe bedeuten, welche den Strahlen β und δ vermöge ihrer gegebenen Abhängigkeit von B und D zustehen). Denn es sei $cb^{(x)} = xB$ Fig. 323. und $cd^{(y)} = yD$; ferner sei die Länge von $c\sigma = p \cdot \pi$ und jene von $cs = t \cdot \tau$, so dass π ein Strahl in $c\sigma$ und τ ein solcher in cs liegender ist und $\pi = [m'B, n'D]$ und $\tau = [m''B, n''D]$, so ist $c\sigma = [p \cdot m'B, p \cdot n'D]$ und $cs = [t \cdot m''B, t \cdot n''D]$; ferner sei $c\sigma$ und cs so bestimmt, dass $c\Sigma$ Gerenstrahl von cs und $c\sigma$ ist. Es muss daher

$$(p \cdot m' + t \cdot m'')B = xB$$

und

$$(p \cdot n' + t \cdot n'')D = yD$$

oder

$$1)\quad m' \cdot p + m'' \cdot t = x$$

$$2)\quad n' \cdot p + n'' \cdot t = y$$

sein. [213] Daraus folgt

$$3)\quad p = \frac{n''x - m''y}{m'n'' - m''n'}$$

$$4)\quad t = \frac{m'y - n'x}{m'n'' - m''n'},$$

so dass also p und t rationale Zahlen sind, wenn m', n', m'', n'', x und y rationale Zahlen sind. Strahlen, welche in gerengesetzlicher Abhängigkeit von zweien unter ihnen stehen, sind daher auch in gerengesetzlicher Abhängigkeit von je zweien unter ihnen.

Wenn 3 von einem Punkte c ausgehende Strahlen A, B, D gegeben sind, die so liegen, dass nur je zwei in eine Ebene und nicht zwei in eine und dieselbe gerade Linie fallen, so ist

$$A = [A,\ 0B,\ 0D]$$
$$B = [0A,\ B,\ 0D]$$
$$D = [0A,\ 0B,\ D],$$

und ausser

$$[A,\ B] = [A,\ B,\ 0D]$$
$$[B,\ D] = [0A,\ B,\ D]$$
$$[A,\ D] = [A,\ 0B,\ D]$$

hat man hier noch den Strahl $[A, B, D]$, so dass jeder von diesen 7 Strahlen dem Zeichen $[lA, mB, nD]$ entspricht, in dem l, m und n rationale Zahlen bedeuten, weil Null und Eins rational sind, während A, B, D die einfachen Maasse der ihrer Lage nach gegebenen ersten drei Strahlen sind.

Fährt man fort durch Verbindung von je zwei bereits bestimmten Strahlen im Raume immer einen neuen Strahl zu bestimmen, welcher der Gerenstrahl jener beiden ist, so erhält man eine unendliche Menge von Strahlen, die in gerengesetzlicher Abhängigkeit von den drei zuerst gegebenen Strahlen A, B, D stehen, von denen jeder daher sich ausdrücken lässt durch das allgemeine Zeichen $[lA, mB, nD]$, so dass l, m, n irgend drei rationale Maasszähler sind, wenn A, B, D die ursprünglich gegebenen Maasse der drei gegebenen Strahlen sind. Es ist nämlich auch hier, wie leicht einzusehen, der Gerenstrahl von $[l'A, m'B, n'D]$ und $[l''A, m''B, n''D]$ wieder

$$= [(l' + l'')A,\ (m' + m'')B,\ (n' + n'')D].$$

Fig. 321. Ist z. B. $cv = [l'A, m'B, n'D]$, mithin $ca = l'A$ und $cb = m'B$ und $cd = n'D$, ferner $cw = [l''A, m''B, n''D] = [c\alpha, c\beta, c\delta]$ und $ct = [c\mathfrak{a}, c\mathfrak{b}, c\mathfrak{d}] = [xA, yB, zD]$, so ist $c\mathfrak{a} = c\alpha + \alpha\mathfrak{a}$, weil aber die Ebene $\mathfrak{a}t \# \alpha w \# av \# bd$ und die Linie $cv \# wt$ und $cv = wt$ ist und $\alpha\mathfrak{a}$ dieselbe [**214**] Richtung hat wie ca, so ist $\alpha\mathfrak{a} = ca$, folglich $c\mathfrak{a} = c\alpha + ca = (l' + l'')A$. Ebenso ist $c\mathfrak{b} = cb + c\beta = (m' + m'')B$ und $c\mathfrak{d} = cd + c\delta = (n' + n'')D$. Wenn also Strahlen im Raume in gerengesetzlicher Abhängigkeit von drei gegebenen nicht in einerlei Ebene liegenden Strahlen A, B, D sind, so lassen sie sich ausdrücken durch $[lA, mB, nD]$, so dass l, m, n, A, B, D die bereits erwähnte Bedeutung haben.

Umgekehrt, lässt ein Strahl sich auf solche Weise ausdrücken durch $[lA, mB, nD]$, so ist er in gerengesetzlicher Abhängigkeit von A, B, D.

Ist eine Gesammtheit von Strahlen gegeben, deren jeder in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht von drei derselben A, B, D, die nicht in einerlei Ebene liegen, so ist jeder einzelne zu dieser Gesammtheit gehörige Strahl in gerengesetzlicher Abhängigkeit von je drei unter diesen gegebenen, die beliebig, jedoch so zu wählen sind, dass nicht zwei in eine gerade Linie und nicht alle 3 in einerlei Ebene fallen. Es sei nämlich gegeben

$$\begin{array}{rl} \text{ein Strahl } \alpha & = [l'A,\ m'B,\ n'D] \\ \text{- - } \beta & = [l''A,\ m''B,\ n''D] \\ \text{- - } \gamma & = [l'''A,\ m'''B,\ n'''D] \\ \text{- - } \delta & = [l^{IV}A,\ m^{IV}B,\ n^{IV}D], \end{array}$$

so ist, wenn man $\delta = [x\alpha, y\beta, z\gamma]$ setzt, ein Strahl ϱ möglich, so dass

$$\varrho = [x\alpha, y\beta] = [(xl' + yl'')A, (xm' + ym'')B, (xn' + yn'')D].$$

Da nun $\delta = [x\alpha, y\beta, z\gamma]$, so ist auch $\delta = [\varrho, z\gamma]$

$$= [(xl' + yl'' + zl''')A, (xm' + ym'' + zm''')B, (xn' + yn'' + zn''')D].$$

Man hat daher

$$\begin{array}{ll} 1) & l'x + l''y + l'''z = l^{IV} \\ 2) & m'x + m''y + m'''z = m^{IV} \\ 3) & n'x + n''y + n'''z = n^{IV} \end{array}$$ und hieraus

$$x = \frac{(l''m'''n^{IV} + m''n'''l^{IV} + n''l'''m^{IV}) - (n''m'''l^{IV} + m''l'''n^{IV} + l''n'''m^{IV})}{(l'm''n''' + m'n''l''' + n'l''m''') - (n'm''l''' + m'l''n''' + l'n''m''')}$$

$$y = \frac{(l'''m'n^{IV} + m'''n'l^{IV} + n'''l'm^{IV}) - (n'''m'l^{IV} + m'''l'n^{IV} + l'''n'm^{IV})}{(l''m'''n' + m''n'''l' + n''l'''m') - (n''m'''l' + m''l'''n' + l''n'''m')}$$

$$z = \frac{l'm''n^{IV} + m'n''l^{IV} + n'l''m^{IV}) - (n'm''l^{IV} + m'l''n^{IV} + l'n''m^{IV})}{(l'''m'n'' + m'''n'l'' + n'''l'm'') - (n'''m'l'' + m'''l'n'' + l'''n'm'')},$$

[215] so dass also in dem Ausdrucke $\delta = [x\alpha, y\beta, z\gamma]$ die Werthe von x, y und z rational sind, mithin auch δ in gerengesetzlicher Abhängigkeit von α, β und γ steht, wenn α, β, γ und δ in gerengesetzlicher Abhängigkeit von A, B, D sind.

Wird $l^{IV} = 1$, $m^{IV} = n^{IV} = 0$ und der gemeinschaftliche Nenner in den drei Ausdrücken für x, y und $z = N$ gesetzt, so wird

$$x = \frac{m'' n''' - n'' m'''}{N}$$

$$y = \frac{m''' n' - n''' m'}{N}$$

$$z = \frac{m' n'' - n' m''}{N},$$

und man hat

$$A = \left[\frac{m'' n''' - n'' m'''}{N}\alpha, \ \frac{m''' n' - n''' m'}{N}\beta, \ \frac{m' n'' - n' m''}{N}\gamma\right].$$

Auf ähnliche Weise erhält man für $m^{IV} = 1$ und $n^{IV} = l^{IV} = 0$ das Zeichen

$$B = \left[\frac{n'' l''' - l'' n'''}{N}\alpha, \ \frac{n''' l' - l''' n'}{N}\beta, \ \frac{n' l'' - l' n''}{N}\gamma\right],$$

und für $n^{IV} = 1$ und $l^{IV} = m^{IV} = 0$ das Zeichen

$$D = \left[\frac{l'' m''' - m'' l'''}{N}\alpha, \ \frac{l''' m' - m''' l'}{N}\beta, \ \frac{l' m'' - m' l''}{N}\gamma\right],$$

so dass, wenn die Zeichen vieler Strahlen zu übersetzen sind aus einer Form wie $[l^{IV}A, m^{IV}B, n^{IV}D]$ in eine andere wie $[x\alpha, y\beta, z\gamma]$, man nur nöthig hat, den Ausdruck für A mit dem jedesmaligen Werthe von l^{IV} in allen Gliedern zu multipliciren, um $l^{IV}A$ zu erhalten, und ebenso $m^{IV}B$ und wieder $n^{IV}D$ zu bilden und die drei so gefundenen Ausdrücke gliedweise zu addiren, wonach dann

$$l^{IV}A =$$
$$\left[l^{IV}\left(\frac{m''n'''-n''m'''}{N}\right)\alpha, \ l^{IV}\left(\frac{m'''n'-n'''m'}{N}\right)\beta, \ l^{IV}\left(\frac{m'n''-n'm''}{N}\right)\gamma\right]$$

$$m^{IV}B =$$
$$\left[m^{IV}\left(\frac{n''l'''-l''n'''}{N}\right)\alpha, \ m^{IV}\left(\frac{n'''l'-l'''n'}{N}\right)\beta, \ m^{IV}\left(\frac{n'l''-l'n''}{N}\right)\gamma\right]$$

$$n^{IV}D =$$
$$\left[n^{IV}\left(\frac{l''m'''-m''l'''}{N}\right)\alpha, \ n^{IV}\left(\frac{l'''m'-m'''l'}{N}\right)\beta, \ n^{IV}\left(\frac{l'm''-m'l''}{N}\right)\gamma\right]$$

[216] $[l^{IV}A,\ m^{IV}B,\ n^{IV}D] =$

$$\left[\frac{l^{IV}(m''n'''-n''m''')+m^{IV}(n''l'''-l''n''')+n^{IV}(l''m'''-m''l''')}{N}\alpha,\right.$$

$$\frac{l^{IV}(m'''n'-n'''m')+m^{IV}(n'''l'-l'''n')+n^{IV}(l'''m'-m'''l')}{N}\beta,$$

$$\left.\frac{l^{IV}(m'n''-n'm'')+m^{IV}(n'l''-l'n'')+n^{IV}(l'm''-m'l'')}{N}\gamma\right].$$

Wenn bloss von der gerengesetzlichen Richtung der Strahlen die Rede ist, so kann N vernachlässigt werden, und es ist dann die Aufgabe, für sämmtliche Strahlen eines gerengesetzlichen Strahlenvereins, welche in Beziehung zu drei ursprünglich gegebenen Strahlen A, B, D bezeichnet sind, die neue Bezeichnung zu finden, bei welcher drei andere von diesen Strahlen α, β, γ als die der Bezeichnung zum Grunde liegenden angenommen werden sollen, ungemein leicht aufzulösen.

Wenn eine Verbindung von mehreren Strahlen in einer Ebene, deren jeder von je zweien*) derselben in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, mit einer zweiten solchen Verbindung von in derselben Ebene liegenden Strahlen, deren jeder von je zweien unter *diesen* in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, von einem und demselben Mittelpunkte ausgeht, und es sind unter der Verbindung dieser beiden Strahlengruppen zwei nicht in einerlei gerader Linie liegende Strahlen vorhanden, deren jeder sowohl von zwei Strahlen der einen Gruppe, als auch von zwei Strahlen der andern Gruppe in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, so verhält sich jeder Strahl des ganzen nunmehrigen Strahlenvereins gerengesetzlich zu je zwei Strahlen, die demselben angehören, d. h. beide Vereine bilden dann einen *einzigen gerengesetzlichen Strahlenverein in der Ebene.*

Von einer Gesammtheit von Strahlen im Raume (d. h. die nicht alle in einerlei Ebene liegen), deren jeder von je dreien

*) Da es sich von selbst versteht, dass zwei Strahlen, durch welche neue Strahlenrichtungen bestimmt werden sollen, nicht in eine gerade Linie fallen dürfen, so mag diese Bestimmung wegfallen. Ebenso versteht es sich von selbst, dass, wenn durch 3 gegebene Strahlen neue Strahlen bestimmt werden sollen, die nicht alle in eine Ebene fallen, auch nicht mehr als zwei derselben in einerlei Ebene liegend gegeben sein dürfen. Es kann daher auch dieser Beisatz vernachlässigt werden.

derselben in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, kann man [**217**] sagen, sie gehören zu *einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine im Raume.*

Wenn zwei gerengesetzliche Strahlenvereine im Raume mit einander verbunden werden, so dass sie einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, und es sind dann unter der so verbundenen Strahlenmenge drei Strahlen vorhanden, deren jeder sich gerengesetzlich verhält zu drei Strahlen des einen der beiden Vereine sowohl, als zu drei Strahlen des andern Strahlenvereins, so bilden beide Vereine zusammen einen einzigen grösseren gerengesetzlichen Strahlenverein.

Wenn zwei Strahlen b und d einen Winkel c bilden, dessen Cosinus $= q$ ist, und die Länge von b durch B, die von d durch D ausgedrückt wird, so ist der Strahl $[B, D]$ an Länge $= \sqrt{B^2 + D^2 + 2BD \cdot q}$, und wenn sein Winkel mit b durch x und jener mit d durch y bezeichnet wird, so ist

$$\begin{aligned} &\text{Sin.}\, x : \sqrt{1 - q^2} = D : \sqrt{B^2 + D^2 + 2BD \cdot q} \\ &\text{Sin.}\, y : \sqrt{1 - q^2} = B : \sqrt{B^2 + D^2 + 2BD \cdot q} \\ &\text{Cos.}\, (x + y) = q. \end{aligned}$$

Wenn $D = B$ ist, so wird die Länge des Strahles $[B, D]$ oder

$$S = B\sqrt{2(1 + q)}.$$

Der Werth von S wird daher nur dann rational, wenn $1 + q$ eine ungerade Potenz von 2, d. h. $= 2^{2n+1}$ ist; es wird dann $q = 2^{2n+1} - 1$ sein. Von den Winkeln, welche bei $p$gliedrigen ebenen Strahlensystemen am Mittelpunkte die bezeichnenden Winkel für zwei ebenbildliche Strahlen sind, deren jeder $= \frac{360^\circ}{p}$ ist, so dass p eine ganze Zahl bedeutet, haben bloss folgende die fragliche Eigenschaft: 1) $\frac{360^\circ}{1}$; dann ist $q = +1$ und $1 + q = 2^1$; ferner 2) $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$; denn Cos. $180^\circ = -1$, also $-1 + 1 = 0$, so dass $S = 0$ wird, und 3) $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$; denn Cos. $120^\circ = -\frac{1}{2}$, also $1 + q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, also $S = B$. Jeder andere Winkel, welcher

$=\frac{360^{\circ}}{p}$ Graden ist, hat einen irrationalen Cosinus. Es folgt hieraus, dass bei 1- und $m$maassigen Strahlensystemen, deren m grösser als 3 ist, die Gesammtheit der ebenbildlichen Strahlen [218] einer Art nicht *zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören könne.*

Bei den 2fach 3gliedrig 8strahligen Axensystemen bilden die 4gliedrigen Strahlen einen gerengesetzlichen Strahlenverein im Raume, einen 2ten bilden die 2gliedrigen und einen 3ten die 3gliedrigen. Ob alle drei Arten von Strahlen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören, hängt von dem Längenverhältnisse derselben ab. Ist $a:R:r = x\sqrt{3}:y\sqrt{\tfrac{3}{2}}:z$ und sind x, y und z rationale Maasszähler, so gehören sämmtliche Strahlen a, R, r zu einerlei gerengesetzlichem Strahlenvereine. Wie dieser Satz auf alle 3gliedrig 4strahligen Axensysteme anzuwenden sei, bedarf keiner besonderen Erläuterung.

In den 3gliedrig 20strahligen Systemen gehören weder alle 5gliedrigen Strahlen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine, noch alle 2gliedrigen, noch auch alle 3gliedrigen, daher ist es auch unmöglich, dass die Gesammtheit der Strahlen aller dieser 3 Arten zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehöre.

Wenn durch je zwei Strahlen eines gerengesetzlichen Strahlenvereins eine Ebene gelegt wird, so liegt diese so, dass jede ihr parallele Ebene je drei nicht in einerlei Ebene liegende Strahlen des Vereins so schneidet, dass das Verhältniss derselben $= l\alpha : m\beta : n\delta$ ist, wenn α, β und δ die den drei fraglichen Strahlen zugehörigen einfachen gegebenen gerengesetzlichen Werthe und l, m, n *rationale* Maasszähler derselben sind.

Es sei co die Richtung des Strahles α und $c\pi$ die des Strahles β und $c\tau$ die des Strahles δ. Die beiden Strahlen S' und S'', von denen man weiss, dass sie der fraglichen Ebene parallel liegen, seien in Beziehung auf α, β und δ gegeben durch die gerengesetzlichen Formeln $[L'\alpha, M'\beta, N'\delta]$ der erste und $[L''\alpha, M''\beta, N''\delta]$ der andere. Da es hier bloss auf die Richtung dieser beiden Strahlen ankommt, so kann Fig. 325.

$$S' = \left[\alpha, \frac{M'}{L'}\beta, \frac{N'}{L'}\delta\right] \text{ und } S'' = \left[\alpha, \frac{M''}{L''}\beta, \frac{N''}{L''}\delta\right]$$

gesetzt werden. Ist nun $co = \alpha$ und $os = \frac{M'}{L'}\beta$ und $o\sigma = \frac{M''}{L''}\beta$ und $or = \frac{N'}{L'}\delta$ und $o\varrho = \frac{N''}{L''}\delta$, so ist $S' = c\xi$ und $S'' = c\psi$. Die durch $c\xi$ und $c\psi$ gelegte Ebene gehörig erweitert ist cpt. Ihr parallel sei die Ebene $\gamma\pi\tau$, so ist $c\gamma : c\pi : c\tau$ [219] $= oc : op : ot$. Es ist nun $ot = or + rt = \frac{N'}{L'}\delta + rt$, aber $rt : r\xi = \xi z : z\psi$ oder

$$rt : os = (or - o\varrho) : (o\sigma - os)$$

$$rt : \frac{M'}{L'}\beta = \left(\frac{N'}{L'} - \frac{N''}{L''}\right)\delta : \left(\frac{M''}{L''} - \frac{M'}{L'}\right)\beta$$

$$rt = \frac{M'}{L'}\left(\frac{N'L'' - N''L'}{M''L' - M'L''}\right)\delta$$

$$ot = \left(\frac{N'}{L'} + \frac{M'}{L'}\left(\frac{N'L'' - N''L'}{M''L' - M'L''}\right)\right)\delta = \left(\frac{M''N' - M'N''}{M''L' - M'L''}\right)\delta$$

$$ot : op = (N'L'' - N''L')\delta : (M''L' - M'L'')\beta$$

$$op = \frac{(M''L' - M'L'')\beta}{(N'L'' - N''L')\delta}\left(\frac{M''N' - M'N''}{M''L' - M'L''}\right)\delta = \left(\frac{M''N' - M'N''}{N'L'' - N''L'}\right)\beta.$$

Daher ist

$$oc : op : ot = \alpha : \frac{M''N' - M'N''}{N'L'' - N''L'}\beta : \frac{M''N' - M'N''}{M''L' - M'L''}\delta$$

$$= \left(\frac{1}{M''N' - M'N''}\right)\alpha : \frac{1}{N'L'' - N''L'}\beta : \frac{1}{M''L' - M'L''}\delta.$$

Da nun $c\gamma$ in die über den Mittelpunkt c hinaus gehende Verlängerung von α fällt, so ist $c\gamma$ negativ, wenn co positiv war; daher schneidet die Fläche $\gamma\pi\tau$ die drei Strahlen α, β und δ in dem Verhältnisse $l\alpha : m\beta : n\delta =$

$$\left(\frac{1}{M'N'' - M''N'}\right)\alpha : \left(\frac{1}{N'L'' - N''L'}\right)\beta : \left(\frac{1}{L'M'' - L''M'}\right)\delta.$$

Dass diese Gleichung diene, um das Zeichen $(l\alpha, m\beta, n\delta)$ einer Fläche zu finden, wenn man die Lage von zwei in ihr liegenden Kanten kennt, so dass die diesen Kanten parallelen Strahlen als durch $[L'\alpha, M'\beta, N'\delta]$ und $[L''\alpha, M''\beta, N''\delta]$

ausgedrückt betrachtet werden können, braucht kaum erinnert zu werden.

Eine Gesammtheit von Flächen, deren jede zweien nicht in einerlei gerade Linie fallenden Strahlen eines gerengesetzlichen Strahlenvereins im Raume parallel liegt, oder, was dasselbe ist, deren jede sich in Beziehung zu drei nicht in einerlei Ebene liegenden Strahlen des Vereins ausdrücken oder bestimmen lässt [220] durch ein gerengesetzliches Zeichen $(l\alpha,\ m\beta,\ n\delta)$*), heisse ein *gerengesetzlicher Flächenverein.* Gleichwie zwei oder mehrere gerengesetzliche Strahlenvereine von einem gemeinsamen Mittelpunkte ausgehen können, ohne deshalb nothwendig zu einem und demselben grösseren gerengesetzlichen Strahlenvereine zu gehören, so ist dieses auch bei den diesen Strahlenvereinen entsprechenden gerengesetzlichen Flächenvereinen der Fall.

Wenn 2 Ebenen in Beziehung zu drei gegebenen Strahlen sich durch gerengesetzliche Zeichen ausdrücken lassen, so ist ihre Durchschnittslinie einem Strahle parallel, welcher sich seiner Richtung nach in Beziehung zu denselben drei Strahlen durch ein gerengesetzliches Zeichen ausdrücken lässt.

Die Zeichen beider Flächen in Beziehung zu den darin nach Lage und Länge gegebenen Strahlen α, β, δ seien

$$\left(\frac{1}{l'}\,\alpha,\ \frac{1}{m'}\,\beta,\ \frac{1}{n'}\,\delta\right) \text{ und } \left(\frac{1}{l''}\,\alpha,\ \frac{1}{m''}\,\beta,\ \frac{1}{n''}\,\delta\right).$$

Da es hier bloss auf die Richtung der beiden Flächen ankommt, so kann die erste durch $\left(\alpha,\ \frac{l'}{m'}\,\beta,\ \frac{l'}{n'}\,\delta\right)$ und die zweite durch $\left(\alpha,\ \frac{l''}{m''}\,\beta,\ \frac{l''}{n''}\,\delta\right)$ ausgedrückt werden. Sind dann cA, cB, cD die Richtungen der 3 gegebenen Strahlen Fig. 326. und $ca = \alpha$, $cb = \frac{l'}{m'}\,\beta$, $cb' = \frac{l''}{m''}\,\beta$, $cd = \frac{l'}{n'}\,\delta$ und $cd' = \frac{l''}{n''}\,\delta$, so ist abd die eine und $ab'd'$ die andere Fläche und ax die Durchschnittskante beider. Wird xy

*) Ein Zeichen $(l\alpha,\ m\beta,\ n\delta)$ ist *nicht gerengesetzlich*, wenn die Maasszähler l, m, n nicht rational sind.

parallel Dc und xz parallel Bc gezogen, so ist die Kante ax parallel einer Axe, in welcher die beiden Strahlen

$$[ca,\ (-cy),\ (-cz)] \text{ und } [(-ca),\ cy,\ cz]$$

liegen. Es ist aber $ca = \alpha$ und

einerseits	andererseits
$xy : yb' = cd' : cb'$	$xz : dz = cb : cd$
$cz : (cb' - cy) = cd' : cb'$	$cy : (cd - cz) = cb : cd$
$cz : \left(\frac{l''}{m''}\beta - cy\right) = \frac{l'}{n''}\delta : \frac{l'}{m''}\beta$	$cy : \left(\frac{l'}{n'}\delta - cz\right) = \frac{l'}{m'}\beta : \frac{l'}{n'}\delta$
$n''\cdot\beta\cdot cz + m''\cdot\delta\cdot cy = l''\beta\delta$	$n'\cdot\beta\cdot cz + m'\cdot\delta\cdot cy = l'\beta\delta.$

[221] Daraus folgt

$$cz = \frac{-m''\delta\cdot l'\beta\delta + m'\delta\cdot l''\beta\delta}{n''\beta\cdot m'\delta - n'\beta\cdot m''\delta} = \left(\frac{l''m' - l'm''}{m'n'' - m''n'}\right)\delta$$

$$cy = \frac{-n'\beta\cdot l''\beta\delta + n''\beta\cdot l'\beta\delta}{m'\delta\cdot n''\beta - m''\delta\cdot n'\beta} = \left(\frac{l'n'' - l''n'}{m'n'' - m''n'}\right)\beta\,.$$

Daher ist

$$(-ca):cy:cz = (-\alpha):\left(\frac{l'n'' - l''n'}{m'n'' - m''n'}\right)\beta : \left(\frac{l''m' - l'm''}{m'n'' - m''n'}\right)\delta\,.$$

Es sind daher die beiden der Kante parallelen Strahlen bestimmt durch:

$$(-ca):cy:cz = (m'n'' - m''n')\alpha : (n'l'' - n''l')\beta : (l'm'' - l''m')\delta$$

$$ca:(-cy):(-cz) = (m''n' - m'n'')\alpha : (n''l' - n'l'')\beta : (l''m' - l'm'')\delta.$$

Die Kanten von Gestalten, deren Flächen zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine gehören, liegen demnach parallel mit Strahlen, die zu dem bestimmten gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören, von welchem die Lage der Flächen des Flächenvereins abhängt.

Wenn ein gerengesetzlicher Strahlenverein in der Ebene gegeben ist, so lässt sich zu jedem der Strahlen desselben ein senkrechter Strahl in derselben Ebene bilden. Die Gesammtheit dieser Strahlen bildet unter sich gleichfalls einen gerengesetzlichen Strahlenverein.

Ist nämlich cb ein Strahl des gegebenen Strahlenvereins $= x \cdot b$ und cd ein zweiter $= y \cdot d$, so liegt bd einem Strahle $[(-x \cdot b), y \cdot d]$ parallel. Wird $c\gamma$ senkrecht auf bd und $c\delta$ senkrecht auf cb und $c\beta$ senkrecht auf cd gezogen, dann z. B. durch δ die $\delta\gamma \# c\beta$ und durch γ die $\gamma\beta \# c\delta$ gelegt, so ist das Dreieck $c\delta d \sim c\beta' b$, daher der Winkel $\delta cd = \beta' cb = k$; auch ist das Dreieck $\delta id \sim cib \sim ric$, daher der Winkel $id\delta = ibc = icr = q$, und weil das Dreieck $crn \sim crd$, so ist auch der Winkel $ncr = cdr = u$. Nun ist Fig. 327.

$$cd : cb = \text{Sin.}\, q : \text{Sin.}\, u$$
$$c\beta : c\delta = \text{Sin.}\, q : \text{Sin.}\, u$$
$$c\beta : c\delta = cd : cb = \frac{1}{cb} : \frac{1}{cd} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{b} : \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{d}.$$

Wenn also im gegebenen gerengesetzlichen Strahlenvereine jeder Strahl von den beiden Bestimmungsstrahlen b und d so abhängt, dass er durch ein gerengesetzliches Verhältniss $(-xb) : yd$ seiner Lage nach bestimmt werden kann, so wird der auf ihm [222] senkrechte von den auf b und d senkrechten Strahlen, wenn deren Maasse $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{d}$ sind, abhängig durch das gerengesetzliche Verhältniss $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{b} : \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{d}$.

Es seien ca, cb, cd irgend 3 von c ausgehende, nicht in einerlei Ebene liegende Strahlen, deren Richtung bekannt und deren Längenverhältniss durch $xa : yb : zd$ gegeben ist. Man lege durch je 2 derselben eine Ebene und mit jeder von diesen Ebenen parallel eine 2te durch das Ende des Strahles, der nicht in jener Ebene liegt, so entsteht ein Parallelepiped ag*). Eine Ebene, welche senkrecht ist zu einem jener 3 Strahlen, ist auch senkrecht zu den drei übrigen Kanten des Fig. 328.

*) Zu ihm gehören die Flächen $ah = (xa, \infty b, \infty d)$ und $bh = (\infty a, yb, \infty d)$ und $dh = (\infty a, \infty b, zd)$, die, weil jede derselben zweien der Strahlen a, b, d (welche als zu einem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehörig betrachtet werden können) parallel liegt, einerlei gerengesetzlichem Flächenvereine angehören. Zu demselben Flächenvereine gehören auch Flächen, die als Schnittebenen durch je vier Ecken betrachtet werden können, wie $febd = (\infty a, yb, zd)$, $daeg = (xa, \infty b, zd)$ und $fabg = (xa, yb, \infty d)$ und ferner die Schnittfläche durch die drei Ecken $a, b, d = (xa, yb, zd)$.

Körpers, welche diesem Strahle parallel liegen, und auch senkrecht zu den vier Ebenen, deren Durchschnitte jene Kanten sind. So ist z. B. die durch c gelegte Ebene $ciou$, wenn sie senkrecht auf ca ist, auch senkrecht auf df, gh und be und auf die Ebenen cf, ce, dh und bh und auf jede Ebene, welche sich mit einer von diesen in einer Kante schneidet, die parallel mit ca ist; daher ist sie auch senkrecht auf die Ebene $dfeb$. Linien, welche von c aus senkrecht gefällt werden auf eine der Ebenen, denen der Strahl ca parallel*) liegt, müssen daher in der Ebene $ciou$ liegen und senkrecht sein auf die Durchschnittslinien dieser Ebene mit ihnen. Die Durchschnittslinie von dh mit co ist aber uo, die von bh mit co ist oi und die von $fdbe$ mit co ist ui. Es sei $c\delta$ senkrecht auf uo, so ist sie auch die einzige von c aus mögliche [223] auf die Ebene dh senkrechte Linie; ihre Richtung bestimmt daher die Richtung der Ebene dh und umgekehrt. Man kann sie den *Träger* oder *die Normale der Ebene* dh nennen. Eben so ist dann $c\beta$ der Träger von bh und $c\gamma$ der Träger von bf. Vergleicht man die Träger einer Gesammtheit von Flächen, die zu einem gerengesetzlichen Flächenvereine gehören, mit einander und mit dem gerengesetzlichen Strahlenvereine, welchen die den Kanten des Flächenvereins parallelen Strahlen (*die kantenthümlichen Strahlen*) bilden, so findet man folgende Sätze:

1) Die Träger derjenigen unter diesen Flächen, welche Säulenflächen eines und desselben kantenthümlichen Strahles sind (einer und derselben Säule oder Zone angehören), bilden einen ebenen gerengesetzlichen Strahlenverein. Es seien z. B. gegeben die Flächen $bh = (\infty\, a,\ yb,\ \infty\, d)$ und $fg = (\infty\, a,\ \infty\, b,\ zd)$ und $fb = (\infty\, a,\ yb,\ zd)$ als Säulenflächen des Strahles a und die auf ihnen senkrechte Ebene durch c sei $ciou$ und $c\beta$, $c\delta$, $c\gamma$ seien die Träger. Es lässt sich nun $c\gamma$ in Beziehung auf $c\beta$ und $c\delta$ ausdrücken durch $[\psi\beta,\ \varrho\delta]$, so dass $\psi\beta : \varrho\delta = \frac{1}{ci} : \frac{1}{cu}$ ist. Man hat aber $ci = cb \cdot \mathrm{Sin.}\, cbi = y \cdot b \cdot \mathrm{Sin.}\, acb$, oder wenn man den

---

*) Ebenen, denen ein Strahl x parallel liegt, nennt man Säulenflächen der Axe x, weil sie die Bedeutung von Säulenflächen erhalten, wenn x die Bedeutung der Axe (d. h. der Hauptaxe) erhält. Die Gesammtheit der Säulenflächen von x bildet die *Säule* von x oder *Zone* von x (*zona*).

Winkel $acb = D$ (und ebenso den Winkel $acd = B$ und den Winkel $bcd = A$) setzt, $ci = y \cdot b \cdot \text{Sin.}\, D$. Eben so ist $cu = z \cdot d \cdot \text{Sin.}\, B$, daher

$$\psi\beta : \varrho\delta = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{b\ \text{Sin.}\, D}\right) : \frac{1}{z}\left(\frac{1}{d\ \text{Sin.}\, B}\right),$$

so dass, wenn die Winkel B, D und die Maasse b, d in den Strahlen cb und cd unveränderlich sind und nur die Maasszähler y und z als veränderlich gelten, wenn $cb : cd = y' \cdot b : z' \cdot d$ wird, auch $\psi'\beta : \varrho'\delta = \frac{1}{y'}\left(\frac{1}{b\ \text{Sin.}\, D}\right) : \frac{1}{z'}\left(\frac{1}{d\ \text{Sin.}\, B}\right)$ oder $\psi' : \varrho' = \frac{1}{y'} : \frac{1}{z'}$ wird, folglich für die Richtungen $c\beta$ und $c\delta$ unveränderliche Maasse β und δ, nämlich $\frac{1}{b\ \text{Sin.}\, D}$ und $\frac{1}{d\ \text{Sin.}\, B}$ vorhanden sind, während das Verhältniss der Maasszähler von β und δ das umgekehrte ist von dem der Maasszähler von b und d.

2) Die Träger sämmtlicher Flächen eines gerengesetzlichen Flächenvereins bilden einen gerengesetzlichen Strahlenverein im *Raume*.

[**224**] Ist z. B. adb eine Fläche $= (xa, yb, zd)$, so Fig. 328.
weiss man, dass sie eine Säulenfläche des parallel mit db oder fe liegenden kantenthümlichen Strahles sei, dass also ihr Träger in einerlei Ebene fallen müsse mit den Trägern aller übrigen Säulenflächen dieses kantenthümlichen Strahles, folglich in einerlei Ebene mit $c\alpha$, dem Träger von $afhe$, und $c\gamma$, dem Träger von $febd$. Aus denselben Gründen muss ihr Träger aber auch in einerlei Ebene fallen mit dem von $aegd$ und $behg$ und wieder mit dem von $abgf$ und $fhgd$. Diese drei Ebenen, in denen er demnach liegt, müssen daher eine Linie gemeinschaftlich haben und er muss in dieser Linie liegen.

Es sei dargestellt die Richtung des Trägers 1) von abd Fig. 329.
durch $c\gamma'''$; 2) von ah durch $c\alpha'$; 3) von bh durch $c\beta'$; 4) von dh durch $c\delta'$. Legt man durch $c\alpha'$, $c\beta'$ und durch $c\beta'$, $c\delta'$ und durch $c\delta'$, $c\alpha'$ Ebenen und durch einen in $c\gamma'''$ beliebig angenommenen Punkt γ''' die Ebenen $\gamma'\gamma'' \# \delta'\beta'$ und $\gamma\gamma' \# \alpha'\beta'$ und $\gamma\gamma'' \# \alpha'\delta'$ und zieht die Strahlen

$c\gamma'$, $c\gamma''$, so müssen sie die Richtungen der Träger von $febd$, $aegd$ und $afgb$ sein. Man hat nun

$$c\gamma''' = [c\alpha', c\gamma] = [c\beta', c\gamma'] = [c\delta', c\gamma''];$$

ferner ist:

für $c\gamma = [c\beta', c\delta']$ auch $c\beta' : c\delta' = \frac{1}{yb \text{ Sin. } D} : \frac{1}{zd \text{ Sin. } B}$,

und ebenso

für $c\gamma' = [c\alpha', c\delta']$ auch $c\alpha' : c\delta' = \frac{1}{xa \text{ Sin. } D} : \frac{1}{zd \text{ Sin. } A}$,

für $c\gamma'' = [c\alpha', c\beta']$ auch $c\alpha' : c\beta' = \frac{1}{xa \text{ Sin. } B} : \frac{1}{yb \text{ Sin. } A}$,

folglich

für $c\gamma''' = [c\alpha', c\beta', c\delta']$ auch $c\alpha' : c\beta' : c\delta'$

$$= \frac{1}{xa \text{ Sin.} B \cdot yb \text{ Sin.} D} : \frac{1}{yb \text{ Sin.} A \cdot yb \text{ Sin.} D} : \frac{1}{yb \text{ Sin.} A \cdot zd \text{ Sin.} B}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{a \text{ Sin.} B \cdot \text{Sin.} D}\right) : \frac{1}{y}\left(\frac{1}{b \text{ Sin.} D \cdot \text{Sin.} A}\right) : \frac{1}{z}\left(\frac{1}{d \text{ Sin.} A \cdot \text{Sin.} B}\right).$$

Es verhalten sich daher die Maasse $\alpha : \beta : \delta$ in den Trägern der drei Flächen $afhe$, $behg$ und $fhgd$ wie

$$\frac{1}{a \text{ Sin.} B \cdot \text{Sin.} D} : \frac{1}{b \text{ Sin.} D \cdot \text{Sin.} A} : \frac{1}{d \text{ Sin.} A \cdot \text{Sin.} B},$$

und die Maasszahlen $\xi : \psi : \varrho$ in diesen Trägern wie $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$, [**225**] wenn a, b, d die Maasse in drei kantenthümlichen Strahlen und A, B, D die diesen Strahlen gegenüberliegenden Winkel bedeuten (so dass A der Winkel von b und d u. s. w. ist) und x, y und z die Maasszähler in diesen kantenthümlichen Strahlen sind.

Jede Fläche (xa, yb, zd) fordert daher ihren Träger $\left[\frac{1}{x}\alpha, \frac{1}{y}\beta, \frac{1}{z}\delta\right]$ und umgekehrt. Dass nun ebenso wieder jeder kantenthümliche Strahl $[xa, yb, zd]$ eine Fläche $\left(\frac{1}{x}\alpha, \frac{1}{y}\beta, \frac{1}{z}\delta\right)$ eines von α, β, δ abhängigen neuen gerengesetzlichen Flächenvereins fordere, für die er Träger ist, ergiebt sich unmittelbar. Man hat daher diese Flächen, deren jeder zwei oder mehrere Träger parallel liegen, als *Trägerflächen* von den *Begrenzungsflächen* zu unterscheiden, deren jeder zwei oder mehrere kantenthümliche Strahlen parallel liegen. Dass der Winkel, welchen je zwei Träger mit einander bilden, den Neigungswinkel der beiden von ihnen getragenen Flächen zu 180° ergänzt, ist unmittelbar einleuchtend.

2) Lehre von der Zeigerfläche.

Aus dem eben Entwickelten leuchtet ein, dass man aus dem Zeichen $\left[\frac{1}{x}\alpha, \frac{1}{y}\beta, \frac{1}{z}\delta\right]$ des Trägers einer Fläche sehr leicht das Zeichen (xa, yb, zd) der Fläche selbst entwickeln könne, ja dass man auf gewisse Weise das erstere als Stellvertreter des letzteren anzusehen im Stande sei, sofern man den Träger, welcher die Fläche bedingt, nur zu bestimmen nöthig hat, damit auch die von ihm getragene Fläche bestimmt sei. Es ist daher zu zeigen, wie durch ein höchst einfaches geometrisches Bild die Zeichen vieler Träger sich aus einander ableiten und versinnlichen lassen.

Die Richtung jedes Trägers wird, wie die jeder geraden Linie, durch zwei darin liegende Punkte bestimmt. Ein Punkt des Trägers ist sein Anfangspunkt, der Mittelpunkt des Strahlensystems, dessen Ort bekannt ist. Es kommt also noch auf einen 2ten Punkt an. Auf den ersten Blick möchte es angemessen scheinen, um den Mittelpunkt herum eine Kugelfläche zu beschreiben und den Punkt auf derselben, welcher von jedem Trägerstrahl getroffen wird, als den zweiten bezeichnenden Punkt desselben zu betrachten. Man sieht aber sogleich ein, dass hierdurch zwar die Richtungsverschiedenheiten, nicht aber auch die gerengesetzlichen Längenmaassverschiedenheiten versinnlicht [226] würden. Sind nun cA, cB, cD die Richtungen dreier ursprünglichen (d. h. ursprünglich gegebenen), unter beliebigen gegebenen Winkeln ausstrahlenden Träger α, β, δ und $cA = 1\alpha$ und $cp = 1\beta$ und $cq = 1\delta$ die einfachen Längenmaasse in diesen Trägern, so ist einleuchtend, dass das natürliche Ende des abgeleiteten Trägers $[\alpha, \beta, 0\delta]$ in g, das von $[\alpha, 0\beta, \delta]$ in h, das von $[\alpha, \beta, \delta]$ in m, das von $[\alpha, 2\beta, \delta]$ in n u. s. w., überhaupt also das von $[\alpha, y\beta, z\delta]$ in einem Punkte der Trägerfläche $Agmh$ (und deren Verlängerung), welche parallel der Ebene der beiden Strahlen Fig. 330.

B und D ist, liegt, und zwar in dieser bestimmt wird durch die Grösse der beiden Maasse $y\beta$ in der Richtung von A aus parallel cB zu nehmen und $z\delta$ in der Richtung parallel dem Strahle cD. So z. B. ist das Ende des Strahles $[\alpha, 2\beta, 2\delta]$ in l so, dass Af $(= il) = 2\beta$ und fl $(= Ai) = 2\delta$ und $Af \# cB$ und $fl \# cD$ ist. Für $[\alpha, \beta, 2\delta]$ liegt der Endpunkt in k, so dass $Ag = \beta$ und $gk = 2\delta$ ist u. s. w. Man hat daher nur nöthig, diese Querträgerfläche darzustellen mit den in ihr liegenden Endpunkten der Träger, so kann man rückwärts aus dem Stande jedes Endpunktes in ihr wieder ganz einfach das Zeichen des Trägers, dem er angehört, ablesen.

Ist für irgend einen Träger der Maasszähler von α in dem allgemeinen Zeichen $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ desselben nicht gleich der Einheit, so ist doch der in der Richtung dieses Trägers liegende Strahl $\left[\alpha, \frac{y}{x}\beta, \frac{z}{x}\delta\right]$ ein solcher, von welchem $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ ein rationales Vielfaches (ein $x$faches) ist, der also als ein kleineres gerengesetzliches Maass in der fraglichen Richtung betrachtet werden kann, von dem alle übrigen gerengesetzlichen Maasse in dieser Richtung rationale Vielfache nach ganzen oder gebrochenen Zahlen sein müssen. Man kann daher auch das in der durch das Ende von 1α gelegten Querträgerfläche liegende Ende als Ende eines gerengesetzlichen Maasses für die Richtung $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ ansehen und dieses durch $\frac{y}{x}\beta$ und $\frac{z}{x}\delta$ in der berührten Querträgerfläche bestimmen. So also ist z. B. der Endpunkt des Maasses in der Richtung des Strahles $[2\alpha, 3\beta, 2\delta]$ in der Ebene $Afli$ gefunden, wenn man in Af von A aus um $\frac{3}{2}\beta$ nach f zu und dann parallel Ai oder cD noch um 1δ fortgeht. Man kann nun die Trägerfläche, in welcher die Enden der Träger [**227**] betrachtet werden, die *Zeigerfläche* (*planum indicis*) nennen, sofern sie den Stand der einzelnen Träger anzeigt.

Fig. 330. Wenn man die einfachen Maasse in den beiden Strahlen Af und Ai der Zeigerfläche gleichfalls mit β und δ bezeichnet und von A aus ein in dieser Ebene liegendes gerengesetzliches Strahlensystem sich vorstellt, von welchem jeder Strahl nach Richtung und Länge durch $[y\beta, z\delta]$ bestimmt ist, so kann man demnach sagen, das Ende des Trägers $[\alpha, y\beta, z\delta]$ liege in dem Strahle $[y\beta, z\delta]$ der Zeigerfläche und zwar in dessen

gerengesetzlichem Ende. Für einen Träger $[\alpha, ny\beta, nz\delta]$ fällt daher ebenso das Ende zusammen mit dem des Strahles der Zeigerfläche, welcher durch $[ny\beta, nz\delta]$ bestimmt ist. Dieser ist an Richtung gleich dem Strahle $[y\beta, z\delta]$, aber an Länge $n$mal so gross; daher ist sein Zeichen $= n[y\beta, z\delta]$.

Träger, welche parallel der Zeigerfläche liegen, für welche also der Maasszähler in α zu Null geworden ist, deren Zeichen also $= [0\alpha, y\beta, z\delta]$ ist, schneiden sich mit dem Strahle $[y\beta, z\delta]$ der Zeigerfläche in unendlicher Entfernung (d. h. sie liegen ihm parallel), daher fällt das Ende von $[0\alpha, y\beta, z\delta]$ in $\infty [y\beta, z\delta]$.

Träger, welche die Zeigerfläche erst schneiden, wenn sie nach rückwärts über den Mittelpunkt hinaus verlängert werden, haben ihr eigentliches Ende in einer zweiten Zeigerfläche, die der ersten parallel ist und durch das Ende des Trägers -1α gelegt gedacht werden kann. Ihr uneigentliches Ende lässt sich auf der ersten (oberen) Zeigerfläche darstellen. Man hat daher nur eine Zeigerfläche nöthig.

Da die Träger der Flächen einer und derselben Säule oder Zone in einer und derselben Ebene liegen, so müssen ihre Enden alle in einer und derselben geraden Linie, in der Zeigerfläche, liegen und zwar in der Durchschnittslinie jener Ebene (Zonenebene) mit der Zeigerfläche.

Wenn die Durchschnittslinie der Zonenebene der Säule einer kantenthümlichen Axe x mit der Zeigerfläche die Benennung *Zeigerlinie* oder *Zeiger* der Säule x (*index zonae x*) erhält, so kann man sagen, das Ende eines Trägers, der in zwei bekannten Zonenebenen liegt, sei der Durchschnittspunkt der Zeigerlinien beider Zonen. Es giebt hierdurch die Zeigerfläche ein brauchbares Hülfsmittel ab, um das Zeichen eines Trägers $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ zu finden, wenn zwei Zonenebenen [**228**] gegeben sind, in denen er liegt, d. h. wenn zwei Träger, die in der einen Zonenebene liegen, und zwei solche, die in der 2ten liegen, gegeben sind.

Es sei z. B. gegeben eine Gestalt, begrenzt durch eine Gesammtheit von Flächen, von denen je zwei einander parallel liegende (ein Paar ausmachende) durch gleichnamige Buchstaben bezeichnet sind, jedoch die hintere dem Beobachter nicht zugekehrte durch den Accent (′) unterschieden wird, wie z. B. a und a'.

Von den an dieser Gestalt vorhandenen Zonen seien gegeben: 1) die Zone (gebildet von den Flächen) $BqmAns$, Vgl. Fig. 33 f.

2) *DrlAoh*, 3) *fkAb*, 4) *aiAg*, 5) *fquivh*, 6) *ftmow*, 7) *fplnx*, 8) *frzgys*, 9) *aqtkpr*, 10) *aumlz*, 11) *avony*, 12) *ahwbxs*. Auch sei der Träger A der Fläche A und der Träger B der Fläche B und der Träger D der Fläche D nach seiner Richtung im Raume gegeben (z. B. durch das Gegebensein der 3 Winkel AcB, BcD, DcA und durch das Gegebensein der Stellung der Zelle A, B, D in Beziehung zu dem Beobachter); man soll diese als die 3 ursprünglichen Träger betrachten und in Beziehung auf deren Zelle A, B, D die übrigen Träger bezeichnen, wenn die Richtung von einem Träger k gegeben ist, der so liegt, dass er in die Zelle A, B, D selbst, nicht aber in eine der Ebenen AB, BD oder DA fällt und dessen Zeichen $= [1\alpha,\ 1\beta,\ 1\delta]$ gesetzt werden soll. Seine Länge ist gegeben. Man legt durch das Ende von k eine Ebene parallel BD, eine zweite parallel der Ebene AB, eine dritte parallel der Ebene AD, so werden in den Trägern A, B, D Stücke abgeschnitten, deren Längen gleich den Maassen α, β, δ sind.

Um nun die Zeigerfläche darzustellen, bilde man einen Fig. 331. Winkel BAD gleich dem Winkel, welchen die beiden Träger B und D mit einander bilden sollen, mache $Am = \beta$ und $Al = \delta$ und beschreibe das Parallelogramm $Amkl$. Es sei nun die Ebene $Amkl$ die Ebene der Zeigerfläche; das Ende des Trägers A sei in A, das des Trägers B in der Richtung Am und zwar in $\infty\beta$, das des Trägers D in AD in $\infty\delta$, so ist auch das des Trägers k in dem Punkte k. Der Träger f liegt in einerlei Zonenebene mit B und D, schneidet daher die Zeigerfläche in unendlicher Entfernung von ihrem Anfangspunkte A. Er liegt aber auch in der Zonenebene Ak (d. h. die bestimmt wird dadurch, dass die 2 bereits bestimmten Träger A und k in ihr liegen), [229] daher muss sein Ende in der Zeigerlinie Ak und zwar in $\infty\ Ak = \infty\ [\beta,\ \delta]$ liegen. Die Fläche l liegt in der Zone AD und in der Zone kB. Für die erste ist die Zeigerlinie die Linie AD in der Zeigerfläche, für die zweite muss durch das Ende k des Trägers k nach dem in der Entfernung $\infty\beta$ in AB liegenden Ende des Trägers B eine Zeigerlinie $k\pi$ gezogen werden, welche, wie von selbst einleuchtet, mit AB parallel sein muss, weil sie die Linie AB in unendlicher Entfernung von A schneiden soll.

Man erhält so nach und nach folgende Entwickelung:

die Fläche	ist bestimmt dadurch, dass sie liegt in den bekannten zwei Zonen		daher das Ende ihres Trägers in der Zeigerfläche bestimmt durch	folglich die Maasszähler in Zeichen des Trägers $[x\alpha,\ y\beta,\ z\delta]$
A	. .	. .	. . . .	1 0 0
B	. .	. .	. . . .	0 1 0
D	. .	. .	. . . .	0 0 1
k	. .	. .	. . . .	1 1 1
l	AD	kB	$[0Am,\ 1Al] = [0\beta,\ 1\delta]$	1 0 1
m	AB	kD	$[1Am,\ 0Al] = [1\beta,\ 0\delta]$	1 1 0
f	BD	Ak	$\infty Ak = \infty [1\beta,\ 1\delta]$	0 1 1
a	ml	BD	$\infty [1\beta,\ 1\delta']$	0 1 1' *)
g	Aa	kl	$1\beta',\ 1\delta$	1 1' 1
b	gD	Ak	$1\beta',\ 1\delta'$	1 1' 1'
i	bB	kD	$1\beta,\ 1\delta'$	1 1 1'
o	bi	AD	$0\beta,\ 1\delta'$	1 0 1'
n	bg	AB	$1\beta',\ 0\delta$	1 1' 0
q	ka	AB	$2\beta,\ 0\delta$	1 2 0
r	ka	AD	$0\beta,\ 2\delta$	1 0 2
s	ba	AB	$2\beta',\ 0\delta$	1 2' 0
h	ba	AD	$0\beta,\ 2\delta'$	1 0 2'
t	mf	ka	$\frac{3}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta$	2 3 1
y	na	gf	$\frac{3}{2}\beta',\ \frac{1}{2}\delta$	2 3' 1
x	nf	ba	$\frac{3}{2}\beta',\ \frac{1}{2}\delta'$	2 3' 1'
u	if	ma	$\frac{3}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta'$	2 3 1'
p	ka	lf	$\frac{1}{2}\beta,\ \frac{3}{2}\delta$	2 1 3
z	gf	la	$\frac{1}{2}\beta',\ \frac{3}{2}\delta$	2 1' 3
w	ba	of	$\frac{1}{2}\beta',\ \frac{3}{2}\delta'$	2 1' 3'
v	if	oa	$\frac{1}{2}\beta,\ \frac{3}{2}\delta'$	2 1 3'.

[230] Man wird aus diesem Beispiele sehen, wie leicht es ist, die Zeichen der Trägerenden in der Zeigerfläche abzulesen.

*) Liest man hier das Zeichen des Accentes für ein Minuszeichen und drückt also den Träger a aus durch $[0\alpha,\ 1\beta,\ (-1\delta)]$, so [230] ist hierdurch sein Zeichen ausgedrückt durch die 1ste Zelle A, B, D, obgleich er nicht in ihr liegt, sondern in der Zelle A, B, D'. Aehnlich ist die Bedeutung des Accents in den übrigen Fällen.

Sollte ein Trägerende ζ so liegen, dass man sein Zeichen nicht sogleich abzulesen vermöchte, so hat man nur nöthig, durch die Zeigerfläche einige Parallellinien zu legen mit einer der beiden Zeigerlinien, deren Durchschnittspunkt das fragliche Trägerende ist, und zwar so, dass diese parallelen Linien gleich weit von einander abstehen und durch Punkte gezogen sind, die mit dem fraglichen Punkte ζ hinsichtlich auf die Lage in einem der auf der Zeigerfläche bereits vorhandenen kleinen Parallelogramme so übereinstimmen, dass, wenn ein solches Parallelogramm, parallel mit seiner ersten Stellung bleibend, fortbewegt würde, bis es mit dem Parallelogramme zusammenfiele, in welchem ζ liegt, auch der erwähnte Punkt mit ζ zusammenträfe, damit hierdurch ein bekanntes gerengesetzliches Längenmaass in der andern Zeigerlinie in mehrere gleiche Theile getheilt und die Entfernung des Punktes ζ von einem solchen Theilpunkte oder sein Zusammenfallen damit leichter erkannt werden könne.

Fig. 332. Wenn z. B. der Punkt ζ der Durchschnittspunkt wäre von der Zeigerlinie, welche durch n und k gelegt werden kann, mit der, welche durch z und t bestimmt ist, so reichen die vier mit tz parallelen punktirten Linien hin, um anschaulich zu machen, dass $k\zeta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} kn = \frac{1}{8} kn$ sei, dass also auch $k\psi = \frac{1}{8} mk$, folglich $m\psi = \frac{7}{8} mk = \frac{7}{8}\delta$ sei, und wieder dass $k\xi = \frac{1}{8} kg$, folglich $\xi g = \frac{7}{8} kg = \frac{7}{8} \times 2\beta = \frac{7}{4}\beta$, folglich $l\xi = (\frac{7}{4} - \frac{4}{4})\beta = \frac{3}{4}\beta$, dass also das Zeichen für ζ sein müsse $[\frac{3}{4}\beta, \frac{7}{8}\delta]$, dass diese punktirten Linien durch Punkte gehen müssen, die in einem der kleinen Parallelogramme $Amkl$ u. s. w. so liegen, wie t in $mq\varphi k$, wenn in ihnen Punkte liegen sollen, die ihrer Lage in einem solchen Parallelogramme nach mit ζ in dem seinigen übereinstimmen.

Allgemein ist folgende Auflösung einer solchen Aufgabe. Man zieht in der Zeigerfläche parallel mit jeder der beiden Zeigerlinien, deren Durchschnittspunkt das fragliche Trägerende ist, eine Trägerlinie durch den Mittelpunkt A der Zeigerfläche und liest in dieser neuen Linie das Zeichen des Trägerendes ab, [231] welches in unendlicher Entfernung von A liegt, mithin hat man das Zeichen des Trägers, welcher in der Ebene $\beta\delta$ liegt und in der Zonenebene, mit deren Zeigerebene er parallel liegt. Der so gefundene Träger, parallel der einen Zeigerlinie, heisse $[0\alpha, n''\beta, p''\delta]$, der parallel der andern heisse $[0\alpha, N''\beta, P''\delta]$. Der eine gegebene Träger, welcher mit dem gesuchten und $[0\alpha, n''\beta, p''\delta]$ in einerlei

Zonenebene liegt, heisse $[\alpha,\ n'\beta,\ p'\delta]$ und der ebenso zu $[0\,\alpha,\ N''\beta,\ P''\delta]$ und dem gesuchten gehörige heisse $[\alpha,\ N'\beta,\ P'\delta]$, so ist, wenn x und y unbekannte Grössen bedeuten, der gesuchte Träger einmal gleich der Verbindung von $[\alpha,\ n'\beta,\ p'\delta]$ mit $x\ [0\,\alpha,\ n''\beta,\ p''\delta]$, also

$$= [\alpha,\ (n' + n''x)\beta,\ (p' + p''x)\delta],$$

das andere Mal gleich der Verbindung von $[\alpha,\ N'\beta,\ P'\delta]$ mit $y[0\,\alpha,\ N''\beta,\ P''\delta]$, also

$$= [\alpha,\ (N' + N''y)\beta,\ (P' + P''y)\delta],$$

so dass also

$$1)\ n' + n''x = N' + N''y$$
$$2)\ p' + p''x = P' + P''y$$

$$3)\ n''x - N''y - (N' - n') = 0$$
$$4)\ p''x - P''y - (P' - p') = 0$$

$$x = \frac{N''(P' - p') - P''(N' - n')}{p''N'' - n''P''}$$

$$y = \frac{n''(P' - p') - p''(N' - n')}{p''N'' - n''P''}.$$

Wird dann der gefundene Werth von x in das erste für den gesuchten Träger aufgestellte Zeichen

$$[\alpha,\ (n' + n''x)\beta,\ (p' + p''x)\delta]$$

oder der von y in das andere Zeichen eingeführt, so ist das Zeichen des gesuchten Trägers und also auch das seines Endes durch bekannte Grössen ausgedrückt.

So kann man die Zone, deren Zeigerlinie nk ist, bestimmen durch den Träger $n = [1\,\alpha,\ (-1\beta),\ 0\,\delta]$ und durch den Träger $[0\,\alpha,\ 2\beta,\ 1\delta]$ und die Zone tz durch den Träger $t = [1\,\alpha,\ \frac{3}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta]$ und durch den Träger $[0\,\alpha,\ (-2\beta),\ 1\delta]$, so dass $n' = -1$ und $p' = 0$ und $n'' = 2$ und $p'' = 1$, während $N' = \frac{3}{2}$ und $P' = \frac{1}{2}$ und $N'' = -2$ und $P'' = 1$ ist. Es wird daher $x = \frac{7}{8}$, folglich Fig. 332.

[232] $$\zeta = \begin{bmatrix} [1\,\alpha,\ (-1\beta),\ 0\,\delta] \\ [0\,\alpha,\ \frac{7}{8}\times 2\beta,\ \frac{7}{8}\times 1\delta] \end{bmatrix}$$

$$\zeta = [1\,\alpha,\ (\tfrac{14}{8} - \tfrac{8}{8})\beta,\ \tfrac{7}{8}\delta]$$
$$= [1\,\alpha,\ \tfrac{6}{8}\beta,\ \tfrac{7}{8}\delta].$$

Was die beiden einander gerade entgegengesetzten Träger jeder Art anbetrifft, die in der Ebene $\beta\delta$ und zugleich in der Zonenebene von $[\alpha, x'\beta, y'\delta]$ und $[\alpha, x''\beta, y''\delta]$ liegen, deren unmittelbare Ablesung hier als möglich vorausgesetzt wird, so ist das Ende des einen in $\infty\,[(y''-y')\beta,\ (x''-x')\delta]$, das des andern in

$$\infty\,[(y'-y'')\beta,\ (x'-x'')\delta] = -\infty\,[(y''-y')\beta,\ (x''-x')\delta],$$

vom Mittelpunkte A der Zeigerfläche an, genommen.

3) Bezeichnung der Zeigerlinien.

Jede Zeigerlinie ist entweder ein Strahl $[y\beta,\ z\delta]$ in der Zeigerfläche von deren Mittelpunkte A aus, oder sie liegt irgend einem solchen Strahle parallel, und dann geht sie entweder durch die Enden der in der Zeigerfläche liegenden Strahlen $+ny\beta$ und $-nz\delta$ oder durch jene der beiden Strahlen $-ny\beta$ und $+nz\delta$. Bezeichnet man die durch $+ny\beta$ und $-nz\delta$ gehende durch $\rceil\!\lfloor +ny\beta,\ -nz\delta \rceil\!\lfloor$, so wird die durch $-ny\beta$ und $+nz\delta$ gehende durch $\rceil\!\lfloor -ny\beta,\ +nz\delta \rceil\!\lfloor$ zu bezeichnen sein. Den gemeinschaftlichen Factor n kann man absondern und hat dann im ersten Falle $\rceil\!\lfloor +y\beta,\ -z\delta \rceil\!\lfloor\, n$ und im zweiten $\rceil\!\lfloor -y\beta,\ +z\delta \rceil\!\lfloor\, n$. Für die mit dem Strahle $[y\beta,\ z\delta]$ zusammenfallende Zeigerlinie wird n gleich Null und ihr Zeichen $= \rceil\!\lfloor +y\beta,\ -z\delta \rceil\!\lfloor\, 0 = \rceil\!\lfloor -y\beta,\ +z\delta \rceil\!\lfloor\, 0$. Dass die mit dem Strahle $[-y\beta,\ +z\delta]$ oder $[+y\beta,\ -z\delta]$ der Zeigerfläche parallele Zeigerlinie, wenn sie durch $+ny\beta$ und $+nz\delta$ geht, mit $\rceil\!\lfloor +ny\beta,\ +nz\delta \rceil\!\lfloor$ oder $\rceil\!\lfloor +y\beta,\ +z\delta \rceil\!\lfloor\, n$ und die durch $-ny\beta$ und $-nz\delta$ gehende mit $\rceil\!\lfloor -ny\beta,\ -nz\delta \rceil\!\lfloor$ oder $\rceil\!\lfloor -y\beta,\ -z\delta \rceil\!\lfloor\, n$ zu bezeichnen sei, ergiebt sich von selbst.

Die Zeigerlinie, welche durch die Enden der Träger $[\alpha, x'\beta, y'\delta]$ und $[\alpha, x''\beta, y''\delta]$ geht, ist

$$= \rceil\!\lfloor (x'-x'')\beta,\ (y''-y')\delta \rceil\!\lfloor\, \frac{x'y''-x''y'}{(x'-x'')(y''-y')}$$

und sie liegt parallel dem Träger $[0\alpha,\ (x'-x'')\beta,\ (y'-y'')\delta]$, was leicht einzusehen ist.

[233] 4) Maasse in den Zeigerlinien.

Für die Zeigerlinie $\bar{\underline{|}}\, y\beta,\ z\delta\, \bar{\underline{|}}\; n$ ist die Länge des Strahles $[y\beta,\ -z\delta]$ das einfache gerengesetzliche Maass, und jede Entfernung zweier Trägerenden in ihr von einander muss ein rationales Vielfaches von diesem Maasse sein, wie dieses aus dem bisher Entwickelten ohne weiteren Beweis einleuchten wird. Parallele Zeigerlinien haben daher ein gemeinschaftliches solches Maass.

5) Gesetz für die Neigung der in einerlei Zonenebene liegenden Träger der Flächen eines gerengesetzlichen Flächenvereines.

Auf jede Zeigerlinie kann vom Mittelpunkte des *räumlichen* Strahlensystems aus eine Linie senkrecht gefällt werden, welche *Träger der Zeigerlinie* oder *Stütze* derselben heissen möge. Es seien cm, cn, co, cp, cq, cr, ct einige in Fig. 333.
einerlei Zonenebene liegende Träger, mt sei die Zeigerlinie $\bar{\underline{|}}\, y\beta,\ z\delta\, \bar{\underline{|}}\; \pi$ dieser Zone und cs die Stütze dieser Zeigerlinie. Jedes Stück der Zeigerlinie, welches zwischen zweien der Trägerenden m, n, o, p, q, r, t liegt, muss ein rationales Vielfaches des Strahles $[y\beta,\ -z\delta]$ sein, dessen Grösse

$$= \sqrt{y^2\beta^2 + z^2\delta^2 - 2y\beta \cdot z\delta \cdot \mathrm{Cos.}\ \delta \parallel \beta}$$

durch γ ausgedrückt werden möge. Es ist daher, wenn $mn = no = op = pq = qr = rt = \gamma$ ist,

$$\begin{array}{l}
\mathrm{Tang.}\ p \parallel s = \qquad sp : sc \\
\mathrm{Tang.}\ q \parallel s = (\gamma + sp) : sc \\
\mathrm{Tang.}\ r \parallel s = (2\gamma + sp) : sc \\
\mathrm{Tang.}\ t \parallel s = (3\gamma + sp) : sc \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\hline
\mathrm{Tang.}\ o \parallel s = -(\gamma - sp) : sc \\
\mathrm{Tang.}\ n \parallel s = -(2\gamma - sp) : sc \\
\mathrm{Tang.}\ m \parallel s = -(3\gamma - sp) : sc \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

d. h. in einer und derselben Zonenebene schreiten die Tangenten der Neigungen der Träger gegen die Stütze der Zeigerlinie fort nach einer arithmetischen Reihe, deren Differenz γ ist.

Einschaltungen in diese Reihe können nur nach rationalen Bruchtheilen von γ stattfinden.

Es sei $sc = \varrho$ und $sp = \sigma$, so wird für zwei verschiedene Träger in der Zone die Grösse der Tangente der Neigung [234] derselben gegen die Stütze ausgedrückt werden können durch $(x\gamma + \sigma) : \varrho$ für den einen und durch $(y\gamma + \sigma) : \varrho$ für den anderen. Für die Differenz z beider Neigungen, d. h. für die Neigung z der beiden fraglichen Träger gegen einander hat man daher

$$\text{Tang. } z = \frac{\frac{x\gamma + \sigma}{\varrho} - \frac{y\gamma + \sigma}{\varrho}}{1 + \frac{x\gamma + \sigma}{\varrho} \cdot \frac{y\gamma + \sigma}{\varrho}}$$

oder

$$\text{Tang. } z = \frac{\varrho(x - y)\gamma}{\varrho^2 + (x\gamma + \sigma)(y\gamma + \sigma)}. \qquad (\female$$

Gehört auch die Stütze mit den übrigen Trägern zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine, so muss $\sigma : \gamma$ ein rationales Verhältniss sein und es kann dann $\sigma = f\gamma$ gesetzt werden, so dass

$$\text{Tang. } z = \frac{\varrho(x - y)\gamma}{\varrho^2 + (x + f)(y + f)\gamma^2}$$

oder, wenn $x + f = \xi$ und $y + f = \psi$ gesetzt wird, auch

$$\text{Tang. } z = \frac{\varrho(\xi - \psi)\gamma}{\varrho^2 + \xi \cdot \psi \cdot \gamma^2}$$

gesetzt werden kann.

Umgekehrt kann aus der allgemeinen Gleichung ($\female$ jede der Grössen ϱ, γ, σ, so wie auch jede der Grössen x und y leicht gefunden werden, indem diese Gleichung für ϱ oder γ oder σ eine solche des 2ten Grades, für x oder y aber eine des 1sten Grades ist. Es leuchtet aber ein, dass die Bestimmung der rationalen Grössen x und y auf solche Weise im Allgemeinen nur als mehr oder weniger genügend zu betrachten sei, wenn Tang. z als eine vermittelst der gewöhnlichen Tafeln gefundene, von dem Werthe des Winkels z abhängige Grösse in die Rechnung eingeführt werden muss, weil Winkel, deren Tangenten einer gegebenen Grösse gleich sein sollen, nur in wenigen Fällen sich mit vollkommener Genauigkeit durch Grade, Minuten und Secunden angeben lassen.

Dasselbe gilt, wenn aus der allgemeinen Gleichung (für die Neigung ζ eines fraglichen Trägers gegen die Stütze ϱ der Zeigerlinie) Tang. $\zeta = \frac{x\gamma + \sigma}{\varrho}$ oder für den Fall, dass $\sigma = 0$ ist, aus der Gleichung Tang. $\zeta = \frac{x\gamma}{\varrho}$ der rationale Werth von x gefunden werden soll.

[**235**] Wären z. B. die Maasse α, β, δ in den drei ursprünglichen Trägern einander gleich und ihre Richtungen auf einander senkrecht, so würde für die Zeigerlinie AD der Fig. 331.
Träger α zugleich die Stütze ϱ sein und man könnte hier $Al = \gamma = \varrho = \alpha = 1$ setzen. Wüsste man nun, dass in AD das Ende eines Trägers liege, welcher einer angestellten Messung zu Folge mit der Richtung α einen Winkel von $71\frac{1}{2}$ Graden bildet, so hätte man

$$\text{Tang. } 71^\circ\, 30' = \frac{x \cdot 1}{1} = x\,,$$

aber

$$\text{Tang. } 71^\circ\, 34' = 3{,}0002820\,,$$

so dass, wenn man hier $x = 3$ setzen will, der gemessene Winkel um ungefähr 4 Minuten corrigirt werden muss. Ob dieses angehe, hängt natürlich von dem Grade der Genauigkeit der Messung des Winkels ζ ab, und das Zeichen des fraglichen Trägers $[1\alpha,\ 0\beta,\ 3\delta]$, welches auf diese Weise gefunden wird, ist nicht als ein in aller geometrischen Schärfe richtiges zu betrachten.

Noch weniger Anspruch auf vollkommene Richtigkeit hat das Zeichen eines Trägers, wenn dasselbe bestimmt worden ist durch das Gegebensein der Neigung des gesuchten Trägers gegen zwei bekannte Träger, mit denen er nicht in eine und dieselbe Zonenebene fällt, und man weiss, zu welcher der beiden Flächenseiten der Zonenebene, in welcher jene beiden liegen, er als aufstehende Linie sich verhält. Man setzt hier nämlich diesen Strahl als einen mittleren zwischen den beiden und einem dritten, gleichfalls bereits bestimmten, entwickelt die Werthe, welche diesen drei Strahlen zustehen, sofern der gesuchte zwischen ihnen der mittlere ist, wie dieses am Schlusse der Lehre von der Bezeichnung der Strahlen gezeigt worden ist, und erhält, wenn man die dort gebrauchte Bezeichnungsweise beibehält, die Gleichung $c\alpha' : c\beta' : c\delta' =$ Fig. 329.

$$\text{Sin.}\,\mathfrak{A}\ \text{Sin.}\,p\ \text{Sin.}\,t : \text{Sin.}\,\mathfrak{B}\ \text{Sin.}\,p\ \text{Sin.}\,T : \text{Sin.}\,\mathfrak{D}\ \text{Sin.}\,t\ \text{Sin.}\,P,$$

so dass hier $c\alpha' : c\beta' : c\delta' = x\alpha : y\beta : z\delta$ gesetzt werden kann und $x : y : z =$

$$\frac{1}{\alpha}\,\text{Sin.}\,\mathfrak{A}\,\text{Sin.}\,p\,\text{Sin.}\,t : \frac{1}{\beta}\,\text{Sin.}\,\mathfrak{B}\,\text{Sin.}\,p\,\text{Sin.}\,T : \frac{1}{\delta}\,\text{Sin.}\,\mathfrak{D}\,\text{Sin.}\,t\,\text{Sin.}\,P$$

gefunden wird. Sind hierbei α, β, δ die drei der Bezeichnung zum Grunde liegenden Strahlen, so ist die fragliche Aufgabe gelöst; sind sie nicht mehr diese ursprünglichen Strahlen, so [236] muss das Zeichen des so bestimmten Strahles erst auf die bereits angegebene Weise übersetzt werden in dasjenige, bei welchem diese ursprünglich gegebenen Strahlen der Bezeichnung zum Grunde liegen.

6) Bedingungen, unter welchen Träger und kantenthümliche Strahlen eines gerengesetzlichen Flächenvereines zu einerlei gerengesetzlichem Strahlenvereine gehören.

Es fragt sich nun: unter welchen Bedingungen gehören die beiden auf solche Weise von einander abhängigen gerengesetzlichen Strahlenvereine, nämlich der der Träger und der der kantenthümlichen Strahlen, zu einem und demselben grösseren gerengesetzlichen Strahlenvereine?

Die nächste Antwort ist: wenn 3 nicht in einerlei Ebene liegende Träger in Beziehung auf Länge und Richtung in gerengesetzlicher Abhängigkeit stehen von drei nicht in einerlei Ebene liegenden kantenthümlichen Strahlen. Ist dieses der Fall, so müssen sie, was zuerst ihre Richtung angeht, in gerengesetzlicher Abhängigkeit stehen von je dreien beliebig zu wählenden, nicht in einerlei Ebene liegenden kantenthümlichen Strahlen, folglich auch von jenen dreien, deren jeder auf zweien von ihnen senkrecht steht. Bezeichnet man die drei nicht in einerlei Ebene liegenden Träger, deren Richtung gegeben ist, durch α, β, δ und den auf β und δ senkrechten kantenthümlichen Strahl durch a, den auf α und δ senkrechten durch b und den auf α und β senkrechten durch d, so ist einleuchtend, dass, da alle diese 6 Strahlen ihrer Richtung nach sowohl zu dem gerengesetzlichen Vereine der kantenthümlichen Strahlen, als auch zu dem der Träger gehören müssen, auch jeder Strahl, welcher senkrecht ist auf eine der Ebenen von α und a, α und b, α und d, β und a, β und b, β und d, δ und a, δ und b, δ und d, gleichfalls seiner

Richtung nach zu dem gemeinschaftlichen gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören müsse. Da nun z. B. a senkrecht ist auf β und δ, so werden, wenn man den auf a und β senkrechten Strahl mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet, die Strahlen a, β, $\mathfrak{d}$ drei nicht in einerlei Ebene liegende auf einander senkrechte, dem gesammten [237] gerengesetzlichen Strahlenvereine angehörige, Strahlenrichtungen sein müssen, oder allgemeiner ausgedrückt, jeder beliebige kantenthümliche Strahl x wird mit dem auf ihm und einem beliebigen andern kantenthümlichen Strahle y senkrechten Träger ψ und dem auf ihm und ψ senkrechten Strahle $\mathfrak{z}$ in Beziehung auf Richtung zu dem gemeinsamen gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören.

Was zweitens die Länge betrifft, so folgt auf demselben Wege, dass dann das Maass, welches jedem der zur Vergleichung gezogenen Strahlen zusteht, sofern er Träger ist, mit dem Maasse, welches ihm zusteht, in sofern er kantenthümlicher Strahl ist, in rationalem Verhältnisse stehen müsse. Dieses muss also auch der Fall sein bei den drei gegen einander senkrechten Strahlen a, β und $\mathfrak{d}$.

Da nun im Allgemeinen die Maasse in den Trägern a, β, $\mathfrak{d}$, wenn diese nicht gegen einander senkrecht wären, von den Maassen in den 3 kantenthümlichen Strahlen, deren erster auf β und $\mathfrak{d}$ senkrecht ist, während der zweite auf $\mathfrak{d}$ und a und der dritte auf a und β senkrecht ist, so abhängen würden, dass, wenn diese durch $a_{,}$ und $b_{,}$ und $d_{,}$ bezeichnet werden und jene durch $a_{,,}$ und $b_{,,}$ und $d_{,,}$ und die Winkel von $a_{,}$ auf $b_{,}$ durch D, von $b_{,}$ auf $d_{,}$ durch A und von $d_{,}$ auf $a_{,}$ durch B,

$$a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \frac{1}{a_{,} \text{Sin. } B \text{ Sin. } D} : \frac{1}{b_{,} \text{Sin. } D \text{ Sin. } A} : \frac{1}{d_{,} \text{Sin. } A \text{ Sin. } B},$$

so muss hier, weil der Winkel $A = B = D = 90^\circ$ und $\text{Sin. } 90^\circ = 1$ ist,

$$a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \frac{1}{a_{,}} : \frac{1}{b_{,}} : \frac{1}{d_{,}}$$

sein. Sollen nun die Maasse $a_{,,}$, $b_{,,}$, $d_{,,}$ rationale Vielfache von $a_{,}$, $b_{,}$, $d_{,}$ sein, so kann man setzen:

$$x a_{,,} = a_{,} \text{ und } y b_{,,} = b_{,} \text{ und } z d_{,,} = d_{,}$$

oder

$$x \frac{1}{a_{,}} = m a_{,} \text{ und } y \frac{1}{b_{,}} = m b_{,} \text{ und } z \frac{1}{d_{,}} = m d_{,},$$

also

$$a_{,}^{2} : b_{,}^{2} : d_{,}^{2} = x : y : z,$$

d. h. die Quadrate der Maasse in den drei auf einander senkrechten Strahlen, sofern sie kantenthümliche sind, folglich auch
[238] $\left(\text{da } \frac{1}{a_{,}^{2}} : \frac{1}{b_{,}^{2}} : \frac{1}{d_{,}^{2}} = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$ sofern sie Träger sind, müssen durch rationale Zahlen sich ausdrücken lassen.

Wäre daher z. B. $a_{,} : b_{,} : d_{,} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5}$, so würde $a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\tfrac{1}{5}}$ sein. Man hätte dann

$$\begin{aligned} 2a_{,,} : 3b_{,,} : 5d_{,,} &= \sqrt{4 \times \tfrac{1}{2}} : \sqrt{9 \times \tfrac{1}{3}} : \sqrt{25 \times \tfrac{1}{5}} \\ &= \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5} = a_{,} : b_{,} : d_{,}. \end{aligned}$$

Wäre aber $a_{,} : b_{,} : d_{,} = \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{7} : \sqrt[3]{6}$, so würde

$$a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{7}} : \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} : \sqrt[3]{\tfrac{1}{7}} : \sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}$$

und

$$x : y : z = \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{49} : \sqrt[3]{36}$$

sein. Für $a_{,} = 1 + \sqrt{5}$ würde $x = a_{,}^{2} = (1 + \sqrt{5})^{2} = (6 + 2\sqrt{5})$, also irrational sein u. s. w.

7) Anwendung der Lehre von der Zeigerfläche auf gerengesetzliche Flächenvereine, welche gegebenen Gestaltensystemen angehören*).

Was die 1- *und* 1*maassigen Gestalten* betrifft, so ist hier die Anwendung mit keinen Schwierigkeiten verbunden.

---

*) Dass die Möglichkeit, eine gegebene Strahlenmenge unter einen einzigen gerengesetzlichen Strahlenverein zusammenzufassen, nicht auch die Nothwendigkeit bedinge, es stets zu thun, ist unmittelbar einleuchtend. Bei Gestalten, welche in mehrere gleichwerthige Zellen oder Zellengruppen getheilt werden können, ist es vielmehr zweckmässig, den ganzen gerengesetzlichen Strahlenverein aus eben so vielen einzelnen kleineren dergleichen Vereinen bestehend zu denken, als gleichwerthige Zellen oder Zellengruppen vorhanden sind, weil man dann nur nöthig hat, den einen dieser kleineren Vereine besonders zu untersuchen, um dadurch zugleich die anderen, ihm gleichwerthigen, mittelbar kennen zu lernen.

Für die 1fach 1gliedrigen, als dem allgemeinsten Falle entsprechend, ist bereits durch ein Beispiel diese Lehre erläutert worden. Sind bei ihnen zwei der Bezeichnungsaxen auf einander senkrecht, so vereinfacht sich die Arbeit bei der Zeichnung der Zeigerfläche. Noch mehr ist dieses der Fall, wenn alle drei auf einander senkrecht sind. Eine gleiche Vereinfachung findet natürlich [239] statt bei den 1gliedrigen oder den 1fach 2gliedrigen Gestalten, bei denen eine Axe (die 2gliedrige) auf einer nothwendig als gerengesetzlich zu betrachtenden Ebene senkrecht ist. Ist z. B. eine solche Fig. 244
1gliedrige oder 1fach 2gliedrige Gestalt, wie die durch ein *A.*, *B.*
1fach 2gliedriges Bild *A* und durch ein 2fach 1gliedriges Bild *B* versinnlichte, gegeben, so dass Messung und Beobachtung des Zonenzusammenhanges möglich ist, und man soll diejenige Zeigerfläche bilden, welcher die Träger der Flächen r und M und l u. s. w. parallel liegen, so lehrt hier die Beschaffenheit der Gestalt, dass die Träger von r und l auf einander senkrecht sind; man wird daher zwei auf einander senkrechte Zeigerlinien $l_1 l_2$ und $r_1 r_2$ ziehen. Die Messung giebt die Grösse Fig. 334.
der Neigung der Träger M gegen die Träger r oder l; man zieht daher die Linien $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ so, dass der Winkel $M_1 P_1 r_1 =$ der gemessenen Neigung des Trägers M_1 gegen den Träger r_1 u. s. w. Nimmt man nun als die drei Bezeichnungsträger die Träger P, r und l an, so ist das Ende des Trägers P im Durchschnittspunkte P_1, das des Trägers t kann nunmehr in einem willkürlichen Punkte t_1 der Linie $r_1 r_2$, welcher zwischen P_1 und r_2 liegt, angenommen werden. Die Enden der Träger r, M und l liegen in den für sie dargestellten Zeigerlinien ($r_1 r_2$, $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ und $l_1 l_2$) in unendlicher Entfernung von P_1. Die Beobachtung der parallelen Kanten der Gestalt ergiebt dann, dass

als…

…	und zwischen den Trägern
… Trägern	
… t	t und M
1	1 1
und t	s und M
1	1 2
und r	s und M
1	1 1.

… das Maass in $\underset{1}{P} = \alpha$, das in $\underset{1}{r} = \beta$ und das … und nimmt die Linie $\underset{1\,1}{Pt} = \beta' = -1\beta$, … bezeichnet man die Maasse in den kanten-…

… welche die diesen dreien entsprechenden … b, d, so dass a ⧺ der Kante r auf l und … Kante P auf l und d ⧺ der Kante P auf r,

… Träger	das Ende in $\frac{y}{x}\beta$, $\frac{z}{x}\delta$	daher in seinem Zeichen $[x\alpha,\ y\beta,\ z\delta]$ die Maasszähler =			folglich in dem Zeichen $(\xi a,\ \psi b,\ \varrho d)$ der Fläche selbst die Maasszähler		
[illegible]	$[0\beta,\ 0\delta]$	1	0	0	1	∞	∞
r 1	$\infty\ [1\beta,\ 0\delta]$	0	1	0	∞	1	∞
l 1	$\infty\ [0\beta,\ 1\delta]$	0	0	1	∞	∞	1
M 1	$\infty\ [1\beta,\ 1\delta]$	0	1	1	∞	1	1
t 1	$[1\beta',\ 0\delta]$	1	$1'$	0	1	$1'$	∞
s 1	$[0\beta,\ 1\delta]$	1	0	1	1	∞	1
z 1	$[1\beta',\ 2\delta]$	1	$1'$	2	1	$1'$	$\frac{1}{2}$
o 1	$[1\beta,\ 2\delta]$	1	1	2	1	1	$\frac{1}{2}$.

Dass auch bei drei Bestimmungsaxen, die nicht alle drei auf einander senkrecht sind, für die in ihnen liegenden Bestimmungsstrahlen dieselben Permutationsgesetze gelten, hinsichtlich auf das positive und negative Verhalten jedes Strahles zu den Bestimmungszellen, denen er angehört, ergiebt sich von selbst. Es ist daher die Gesammtheit

	bezeichnet durch	oder durch
der 2 Flächen P	$(\pm 1a,\ \pm \infty b,\ \infty d)$	$\pm \frac{1}{\infty} \mid \pm 1$
- 2 - r	$(\pm \infty a,\ \pm 1b,\ \infty d)$	$\pm 1 \mid \pm \frac{1}{\infty}$
- 2 - l	$(\pm \infty a,\ \pm \infty b,\ 1d)$	$\pm \infty \mid \pm \infty$
- 4 - M	$(\pm \infty a,\ \pm 1b,\ 1d)$	$\pm \infty \mid \pm 1$
- 2 - t	$(\pm 1a,\ \mp 1b,\ \infty d)$	$\pm \frac{1}{\infty} \mid \mp \frac{1}{\infty}$
- 4 - s	$(\pm 1a,\ \pm \infty b,\ 1d)$	$\pm 1 \mid \pm \infty$
- 4 - z	$(\pm 1a,\ \mp 1b,\ \frac{1}{2}d)$	$\pm 2 \mid \mp 2$
- 4 - o	$(\pm 1a,\ \pm 1b,\ \frac{1}{2}d)$	$\pm 2 \mid \pm 2$.

[241] Will man die so gefundenen Zeichen für die Träger in dem eben abgehandelten Beispiele übersetzen in jene, welche man erhält, wenn man statt des Trägers von P jenen von t in der Bezeichnung mit zum Grunde legt und $= \alpha$ setzt, während $\underset{1}{M} = [1\beta,\ 1\delta]$ und $\underset{1}{P} = [1\alpha,\ 1\beta]$ ist, so dient dieselbe Zeigerfläche zur unmittelbaren Ablesung der Maasszähler von α, β und δ für jeden Träger. Diese sind dann

$$
\begin{array}{llll}
\text{für } \underset{1}{t} & = 1\ 0\ 0 & \qquad \text{für } \underset{1}{P} & = 1\ 1\ 0 \\
\text{für } \underset{1}{r} & = 0\ 1\ 0 & \qquad \text{für } \underset{1}{s} & = 1\ 1\ 1 \\
\text{für } \underset{1}{l} & = 0\ 0\ 1 & \qquad \text{für } \underset{1}{z} & = 1\ 0\ 2 \\
\text{für } \underset{1}{M} & = 0\ 1\ 1 & \qquad \text{für } \underset{1}{o} & = 1\ 2\ 2\,.
\end{array}
$$

Beachtet man, dass P und t fast gleiche Neigung haben gegen eine kantenthümliche Axe, die den Flächen m und l parallel liegt, so erscheint es nicht unpassend, die beiden genannten

Flächen so zu betrachten, dass der Träger der einen P für irgend einen (statt P_1 oder t_1) $= \alpha$ gesetzten zwischen P_1 und t_1 liegenden Träger und für $r_1 = \beta$ das Zeichen $[1\alpha,\ 1\beta]$ erhält, während $t_1 = [1\alpha,\ 1\beta']$ gesetzt wird. Ist dabei $l_1 = \delta$ und $M_1 = [1\beta,\ 1\delta]$, so ist, wenn man die Linie $P_1 t_1$ halbirt und durch den Halbirungspunkt Linien parallel $l_1 l_2$ und $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ zieht, auch hier die Ablesung der Maasszähler für alle Träger leicht zu bewerkstelligen. Sie sind nämlich

für r_1 = 0 1 0	für t_1 = 1 1′ 0
für l_1 = 0 0 1	für s_1 = 1 1 2
für M_1 = 0 1 1	für z_1 = 1 1′ 4
für P_1 = 1 1 0	für o_1 = 1 3 4.

Um für dieselbe Gestalt die 1fach 2gliedrige Zeigerfläche bilden zu können, müssen (durch Messung) bekannt sein die
Fig. 335. [242] Winkel der Träger $P_1 \| r_1$ und $t_1 \| r_1$. Diese Winkel werden als $P_1 l_1 r_1$ und $t_1 l_1 r_1$ aufgetragen, die Grösse der Linie
Fig. 334. $l_1 M_1$ wird willkürlich oder $= P_1 t_1$ der 2fach 1gliedrigen Zeiger-
Fig. 335. fläche angenommen und als Maasseinheit in der Richtung r gebraucht, sofern $M_1 = [1 r_1,\ 1 l_1] = [1\beta,\ 1\delta]$ von vorhin bleiben soll. Die Enden der Träger l_1, M_1, P_1, t_1, r_1, von denen die drei letzten ∞ entfernt von l_1 liegen, ergeben sich dann von selbst. s_1 als zwischen M_1 und t_1 und zwischen l_1 und P_1 liegend ist wieder zuerst zu ermitteln; durch $s_1 M_2$ und $l_1 t_1$ bestimmt sich z_1 und durch $z_1 r_1$ und $M_1 s_1$ wird o_1 gefunden.

Für $M_1 = [1\,l_1,\ 1\,r_1]$ wird $s_1 = [1\,l,\ 1\,P]$

und $t_1 = [1\,P_1,\ 1\,r'_1]$ - $z_1 = [1\,l,\ \frac{1}{2}r',\ \frac{1}{2}P]$

$= [1\,P_1,\ 1\,r_2]$ - $o_1 = [1\,l,\ \frac{1}{2}r,\ \frac{1}{2}P]$.

Es möge hier zugleich bemerklich gemacht werden, dass die Zeigerflächen ein nicht unwichtiges Hülfsmittel bei der Zeichnung von Bildern gegebener ebenflächiger Gestalten namentlich dann abgeben, wenn die Ebene des Bildes eine der Zeigerfläche parallel zu denkende ist, wie dieses bei den Bildern der so eben beispielsweise erwähnten Gestalt und bei Fig. 244 den zwei für dieselbe dargestellten Zeigerflächen stattfindet. A., B. 334. Es ist nämlich dann das Bild einer Kante parallel mit einer 335. senkrecht auf die Zeigerlinie, durch welche die Enden der Träger jener zwei Kantenflächen mit einander verbunden werden, gezogenen Linie, so dass sich also die Richtungen der Bilder aller Kanten auf diese Weise aus der Zeigerfläche bestimmen lassen, und nur der Ort, welchen das Bild der Kante einzunehmen hat, auf andere Weisse bestimmt werden muss.

Um für die als Beispiel dienende 2fach 2gliedrige Gestalt Fig. 237. die Zeigerfläche, welche senkrecht auf die Kante $b|d$ ist, darzustellen, kann man zwei auf einander senkrechte Linien $b'b$ 336. [**243**] und ss', welche den Trägern der Flächen b und s parallel gedacht werden, unter dem Winkel da_1b (gleich der durch Messung oder Rechnung bekannten Neigung des Trägers von b und d) zeichnen, dann die Linie d_1d_3 und ihr analog die Linie d_4d_2 ziehen, ferner in ab die ar_1 willkürlich annehmen und ihr gemäss die ar_2 bestimmen. Werden dann die Punkte b, s, d in unendlicher Entfernung von a gedacht, so können die Punkte b, b', d_1, d_2, d_3, d_4, s, s', r_1, r_2 als bereits bestimmte Trägerenden der mit denselben Buchstaben bezeichneten Flächen, welche ebenso an der Gestalt vertheilt sind, wie die fraglichen Punkte in der Zeigerfläche, betrachtet werden. Es bestimmt sich dann n_1 als zwischen a und d_1 und zwischen r_1 und s

liegend, weil 1) die Fläche d_1 an der Gestalt mit parallelen Kanten auftritt zwischen n_1 oben und n_3 unten, während 2) r_1 mit parallelen Kanten zwischen n_1 und n_4 liegt. Um das Trägerende von o_1 bestimmen zu können, ist Messung der Neigungen der Träger r_1 und o_1 gegen α (oder gegen b, woraus jene gegen α folgt) und Untersuchung des Verhältnisses Tg. $o_1 \parallel \alpha$: Tg. $r_1 \parallel \alpha$ nöthig.

Ist die Neigung der beiden oberen Flächen o gegen einander $= 128^\circ 31'$ und die der beiden oberen Flächen r gegen einander $= 92^\circ 4'$, so wird

$$\text{Tg.}\left(\frac{180^\circ - 128^\circ 31'}{2}\right) : \text{Tg.}\left(\frac{180^\circ - 92^\circ 4'}{2}\right)$$
$$= \text{Tg. } 25^\circ 44' : \text{Tg. } 43^\circ 58'$$
$$= 4819842 : 9651268 = 1 : 2{,}002\ldots,$$

wofür 1 : 2 zu nehmen und deshalb in der Zeigerfläche $\alpha o_1 = \frac{1}{2} \alpha r_1$ zu machen ist. Dann ergiebt sich P_1 als zwischen o_1 und s_1 und zwischen n_1 und n_2 liegend (n_2, durch n_1 zugleich mit bestimmt, ist als bereits bekannt zu betrachten).

[**244**] Setzt man nun $P_1 = [1\alpha,\ 1\beta,\ 1\delta]$, so wird

	α β δ		a b d
der Träger b_1 =	0 1 0	also die Fläche desselben =	∞ 1 ∞
- - s_1 =	0 0 1		∞ ∞ 1
- - P_1 =	1 1 1		1 1 1
- - o_1 =	1 1 0		1 1 ∞
- - r_1 =	1 2 0		1 $\frac{1}{2}$ ∞
- - d_1 =	0 2 1		∞ $\frac{1}{2}$ 1

durch Ablesung aus der Zeigerfläche erkannt.

Wären die Flächen o nicht vorhanden gewesen, so hätte Messung oder Berechnung der Neigung der Flächen $\underset{1}{n} \parallel \underset{2}{n}$ und wieder der Flächen $\underset{1}{P} \parallel \underset{2}{P}$ ergeben, dass für die Träger

$$\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}\left(\underset{1}{P}\Big\|\underset{2}{P}\right) = \tfrac{1}{2}\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}\left(\underset{1}{n}\Big\|\underset{2}{n}\right) \quad .$$

sein müsse, und daraus hätte sich dann das Trägerende von $\underset{1}{P}$ in $\underset{1}{\delta n}$ und zwar $= \tfrac{1}{2}\underset{1}{\delta n}$ gefunden.

Für die 1- *und* 2*maassigen Gestalten* kann man als horizontale Zeigerfläche ein Quadrat beschreiben, dieses durch Linien parallel den Seiten in kleinere einander gleich grosse Quadrate eintheilen, so dass der Mittelpunkt ein Theilungspunkt ist, und durch die ganze Figur wieder Linien ziehen parallel den Diagonalen, welche jedes kleine Quadrat in 4 gleiche gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke zertheilen. Die übrigen Zeigerlinien hängen von der besonderen Beschaffenheit der Gestalt ab, desgleichen die Menge der erforderlichen kleinen Quadrate, die in dem grossen vereinigt sind.

In der beigefügten Abbildung ist die horizontale Zeigerfläche der 4gliedrigen Gestalt (Fig. 239), welche früher schon als Beispiel diente, dargestellt. Nimmt man die Punkte $\underset{1}{s}, \underset{2}{s}, \underset{3}{s}, \underset{4}{s}$ als die Trägerenden der vier oberen Flächen s, so ergiebt sich [245] $\underset{1}{P}$ als zwischen $\underset{1}{s}$ und $\underset{4}{s}$ in der Mitte liegend (weil P sich gegen beide anliegende Flächen s auf gleiche Weise verhält); dass $\underset{1}{g}$ in $\infty\alpha s$ liege, ist an sich einleuchtend. Durch Messung und Berechnung sei gefunden Cotg. $\underset{1}{r} \parallel \underset{1}{g} = \tfrac{4}{3}$ und deshalb sei in $\alpha\underset{1}{\gamma}$ die $\alpha u = 3\alpha\underset{1}{P}$ und in uh die $un = 2\alpha\underset{2}{P}$ genommen und dadurch $\alpha\underset{1}{r}$ als der Richtung nach mit αn zusammenfallend bestimmt. Das Ende von $\underset{1}{r}$ liegt unendlich entfernt von α. Da der Träger $\underset{1}{z}$ in einerlei Zonenebene liegt mit $\underset{1}{P}\underset{4}{P}$ und da die Fig. 337.

Fläche r_1 mit der Fläche z_1 in horizontaler Kante sich schneidet, also der Träger z_1 auch zwischen dem Träger α der Zeigerfläche und dem Träger r_1 liegt, so fällt z_1 mit dem Punkte n zusammen.

Ist nun in dem von den Flächen s gebildeten 8flächigen Ebenrandner das Verhältniss der Hauptaxe zur Queraxe erster Art und zur Queraxe zweiter Art $= a : 1 : \sqrt{2} = 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$, also das Zeichen einer Fläche desselben in Beziehung zu einer Zelle, die von drei einander nachbarlichen ungleichwerthigen Strahlen dieser Bestimmungsaxen gebildet wird, $= \left(1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\sqrt{2}\right)$, so muss das entsprechende Zeichen des Trägers dieser Fläche (weil Sin. $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist) $= \left[1, \frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\right] = [1, a\sqrt{2}, a]$ sein. Nimmt man $\alpha w = a\sqrt{2}$, so ist $\alpha s_4 = a$ und $\alpha s_1 = [\alpha w, \alpha s_4]$. Es sind daher die innerhalb des Winkels $\gamma\alpha h_1$ liegenden Trägerenden auf der Zeigerfläche auszudrücken durch die in den Richtungen $\alpha\gamma_2$ und αg_4 liegenden Maasseinheiten αw und αs_4, wie dieses auch daraus einleuchtet, dass man, der [246] allgemeinen Regel gemäss, die einer gegebenen, durch kantenthümliche Strahlen A, B, D bestimmten Zelle entsprechende Trägerzelle erhält, wenn man die auf A und B, auf A und D und auf B und D senkrechten Träger aufsucht u. s. w. Hier nämlich ist $\alpha\gamma_2$ senkrecht auf $\alpha\gamma_1$ und auf die Hauptaxe und αv senkrecht auf αh und auf die Hauptaxe und die Hauptaxe (als Träger) senkrecht auf $\alpha\gamma_1$ und αh.

Aus der Zeigerfläche sind nunmehr leicht ablesbar die Maasszähler in dem Zeichen

	der Träger						der Flächen			der Träger			der Flächen,		
	welches ausgedrückt ist durch die Zelle, deren Bestimmungsstrahlen parallel liegen mit den Linien														
	$a, \alpha g_1, \alpha\gamma_1$			$a, \alpha\gamma_2, \alpha g_4$			$a, \alpha g_1, \alpha\gamma_1$			$a, \alpha\gamma_1, \alpha\gamma_2$					
	so, dass die Maasse in diesen Bestimmungsstrahlen sich verhalten wie die Linien														
	$1 : \alpha s_1 : \alpha P_1 = 1 : a : a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$			$1 : \alpha w : \alpha s_4$*) $= 1 : a\sqrt{2} : a$			$1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$			$1 : \alpha P_1 : \alpha P'_2 = 1 : a\sqrt{\tfrac{1}{2}} : a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$			$1 : \frac{1}{a}\sqrt{2} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$		
bei s_1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
P_1	1	0	1	1	$\overline{\tfrac{1}{2}}$	1	1	2	1	1	1	0	1	1	∞
z_1	1	2	1	1	$\tfrac{5}{2}$	3	1	$\tfrac{2}{5}$	$\tfrac{1}{3}$	1	3	2	1	$\tfrac{1}{3}$	$\tfrac{1}{2}$
g_1	0	1	0	0	1	1	∞	1	1	0	1	1	∞	1	1
r_1	0	2	1	0	$\tfrac{5}{2}$	3	∞	$\tfrac{2}{5}$	$\tfrac{1}{3}$	0	3	2	∞	$\tfrac{1}{3}$	$\tfrac{1}{2}$

[**247**] Was die 1- *und* 3*maassigen Gestalten* betrifft, so ist hier die Entwerfung der Zeigerflächen so sehr derjenigen ähnlich, welche bei 1- und 2maassigen stattfindet, dass es nicht nöthig ist, darüber noch besonders zu reden. Es möge Fig. 338.

---

*) Als Hülfsmittel, die Maasse in $\alpha\gamma_2$ und αv zu zählen, kann man benutzen, dass αP_1 in αu so oft enthalten ist, als αs_4 in αv und wieder αs_1 zu αt gleichfalls sich verhält wie $\alpha w : v z_1$ u. s. w.

daher hier zuerst die tabellarische Zusammenstellung der aus der horizontalen Zeigerfläche einer 1fach 6gliedrigen Gestalt (Fig. 243), welche früher bereits beispielsweise erwähnt worden ist, abzulesenden wichtigsten Bezeichnungsarten mitgetheilt werden.

	Es sind im Zeichen						
	des Trägers		der Fläche	des Trägers	der Fläche	des Trägers	der Fläche,
	welches ausgedrückt ist durch die Zelle, deren Bestimmungsstrahlen sind: die Strahlen						
	P, M, e 1 1 1	P, M, e 1 6 2	P, M, e 1 1 1	P, M, M 1 6 2	P, e, e 1 6 1	P, M, e 1 6 1	P, M, e 1 6 1
	deren gerengesetzliches Maassverhältniss gesetzt wird						
	$= 1 : \underset{11}{P}x : \underset{11}{P}a$ $= 1 : a : a\sqrt{\frac{3}{4}}$	$= 1 : \underset{16}{P}z : \underset{12}{P}s$ $= 1 : 2a : a\sqrt{3}$	$1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4}{3}}$	$= 1 : \underset{16}{P}x : \underset{12}{P}x$ $= 1 : a : a$	$1 : \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4}{3}} : \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{3}}$	$= 1 : \underset{16}{P}x : \underset{11}{P}a$ $= 1 : a : a\sqrt{}$ [illegible]	$= 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{}$ [illegible]
	die Maasszähler						
bei							
$\underset{1}{P}$	1 0 0	1 0 0	1 ∞ ∞	1 0 0	1 ∞ ∞	1 0 0	1 ∞ ∞
$\underset{1}{a}$	1 0 1	1 $\frac{3}{4}$ 1	1 $\frac{4}{3}$ 1	1 $\frac{1}{2}$ 1	1 2 1	1 0 1	1 ∞ 1
$\underset{1}{x}$	1 1 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 $\frac{1}{2}$ 1	1 2 1
$\underset{1}{s}$	1 0 2	1 $\frac{3}{2}$ 2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	1 1 2	1 1 $\frac{1}{2}$	1 0 2	1 ∞ $\frac{1}{2}$
$\underset{1}{z}$	1 2 0	1 2 2	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 2 2	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 1 2	1 1 $\frac{1}{2}$
$\underset{1}{u}$	1 1 2	1 $\frac{5}{2}$ 3	1 $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$	1 2 3	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$	1 $\frac{1}{2}$ 3	1 2 $\frac{1}{3}$
$\underset{1}{e}$	0 0 1	0 $\frac{3}{2}$ 2	∞ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	0 1 2	∞ 2 1	0 0 1	∞ ∞ 1
$\underset{1}{M}$	0 1 0	0 1 1	∞ 1 1	0 1 1	∞ 1 1	0 1 2	∞ 1 $\frac{1}{2}$
$\underset{1}{c}$	0 1 2	0 $\frac{5}{2}$ 3	∞ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$	0 2 3	∞ 3 2	0 $\frac{1}{2}$ 3	∞ 2 $\frac{1}{3}$

[248] Da hier rücksichtlich der Flächen u eine Halbzähligkeit vorhanden ist, so ist zu bemerken, dass die oben entwickelten Permutationsgesetze sich auf jedes der entwickelten Zeichen von u anwenden lassen, welchem die dreierlei Maassstrahlen P, M und e zum Grunde liegen (dass also z. B. die Gesammtheit der 12 Träger u begriffen ist in dem Zeichen $[1, \pm 1, \pm 2]$*), während bei einer Bezeichnung, wie die durch P, M, M oder durch P, e, e ist, andere zusammengesetzte Hülfsmittel in Anwendung kommen müssen, z. B. $\frac{l}{r}\frac{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})}{2}$, wobei der Divisor 2 andeuten soll, dass bloss die halbe Anzahl der 24 Flächen vorhanden ist, welche das Zeichen $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ fordern würde, während der oben stehende Buchstabe l andeutet, dass die vorhandenen Flächen u am oberen Ende die links von x liegenden sind, während die am unteren Ende vorhandenen als die rechts liegenden durch das unten befindliche r angedeutet werden. Das Zeichen, welches die 6 Träger c zusammenfasst, ist nach der ersteren Weise $= [0, \pm 1, \pm 2]$, während das Zeichen der 6 Flächen c nach der andern Methode $= \frac{l}{r}\frac{(\infty, 3, 2)}{2}$ sein würde.

Dass auch bei den 3*gliedrig* 4*axigen Gestalten* die Zeigerfläche das beste Hülfsmittel sei, den Zonenzusammenhang zu versinnlichen und eine unerschöpfliche Menge wichtiger Verhältnisse, welche sonst nur mühsam gefunden und deshalb nicht beachtet werden würden, so darzulegen, dass sie gleichsam mit einem Blicke aufgefasst werden können, möge durch den Theil der der Würfelfläche parallelen Zeigerfläche dargethan Fig. 339.
werden, in welchem die Enden der Träger sich befinden, die diese Würfelfläche treffen, ohne dass dieselbe verlängert zu werden braucht.

Der Punkt $\underset{1}{W}$ ist das Ende des Trägers der als Zeigerfläche dienenden Würfelfläche; $\underset{1}{R}$, $\underset{2}{R}$, $\underset{3}{R}$, $\underset{4}{R}$ sind die Enden der Träger von eben so vielen Flächen des 12-Rautenflächners, $\underset{1}{A}$, $\underset{2}{A}$, $\underset{3}{A}$, $\underset{4}{A}$ [249] jene von Trägern der Wände des 8flächners. Es sind ferner angedeutet die Trägerenden $\underset{1}{P}$, $\underset{1}{p}$, $\underset{1}{\pi}$ von drei

*) Richtung und Grösse der Maasse braucht als bekannt nicht besonders im Zeichen angedeutet zu werden.

verschiedenen 6 × 4wandigen und H_1, h_1 von zwei verschiedenen 8 × 3wandigen Keilflächnern, so wie L_1 und l_1, welche zwei 24-Lanzenflächnern angehören, und endlich G_1, γ_1, g_1 als Trägerenden für eben so viele 48wandige Dreieckflächner. Namentlich sind es die Träger der sämmtlichen bestimmten Gestalten, von denen früher bereits angeführt wurde, dass sie die wichtigsten an Krystallen vorkommenden hierher gehörigen einfachen Gestalten seien. Bei Betrachtung dieser Zeigerfläche ist sogleich ersichtlich:

1) dass die Linie $W_1 A_1$ durch $R_1 R_2$ in L_1 halbirt ist, dass folglich auch $W_1 p_1 = p_1 L_1 \doteq \frac{1}{2} W_1 R_1$ ist;

2) dass die Linie $W_1 A_1$ durch $R_1 A_2$ und $H_1 R_2$ so getheilt wird, dass $W_1 l_1 = \frac{1}{3} W_1 A_1$, dass also auch $W_1 P_1 = P_1 l_1 = \frac{1}{3} W_1 R_1$ und dass $W_1 \pi_1 = \frac{2}{3} W_1 R_1$ ist;

3) dass $p_1 L_1$ durch jede der beiden Linien $W_1 H_1$ und $R_1 A_2$ in G_1 halbirt wird, so dass $p_1 G_1 = \frac{1}{4} W_1 R_1$, dass also auch die Entfernung des Punktes G_1 von der Linie $W_1 A_1 = \frac{1}{4} R_1 L_1$, von der Linie $W_1 R_1 = \frac{1}{4} R_1 A_1$ sei u. s. w.;

4) dass $R_4 A_1$ durch die Linien $A_4 R_3$ und die dieser parallelen Linien in 5 gleiche Theile getheilt wird und dass $p_1 \gamma_1 = \frac{1}{5} p_1 A_1$, mithin die Entfernung des Punktes γ_1 von der Linie $W_1 R_1 = \frac{1}{5} R_1 A_1$, von der Linie $R_1 A_1 = \frac{4}{5} p_1 R_1 = \frac{2}{5} W_1 R_1$ und von der Linie $W_1 A_1 = \frac{4}{5} p_1 l_1 = \frac{2}{5} R_1 L_1$ sei;

5) dass ferner $g_1 L_1 = \frac{2}{3} p_1 l_1$ (weil $g_1 A_1 = \frac{2}{3} p_1 A_1$), folglich $= \frac{1}{3} R_1 L_1$ sei.

[250] Will man nun die Zeichen sämmtlicher der Zelle $W_1R_1A_1$ angehöriger Träger mittelst der Zeigerfläche entwickeln, so kann dieses geschehen:

1) dadurch, dass man dieselben ausdrückt durch die Bestimmungsträger oder Maassstrahlen W_1, R_1, A_1 dieser Zelle selbst, wobei, wenn das Maass in $W_1 = 1$ gesetzt wird, das in $R_1 = \sqrt{2}$ und das im Träger $A_1 = \sqrt{3}$ gesetzt werden kann, so dass dieselben sich verhalten wie die 4gliedrige, 2gliedrige und 3gliedrige Axe des Würfels. Da nun die Strahlen W_1, R_1, A_1 nicht selbst in der Zeigerfläche vorhanden sind, so zählt man die Maasse in ihnen dadurch, dass man die Entfernung des Endes eines Trägers, z. B. G_1, dessen Zeichen gesucht wird, von den Zeigerlinien R_1A_1, W_1A_1 und W_1R_1 vergleicht mit den ihnen parallel liegenden, die Entfernungen der Trägerenden W, R, A von eben diesen Zeigerlinien messenden Linien W_1R_1, R_1L_1 und R_1A_1, wodurch drei Verhältnisse oder Zahlen hervorgehen, welche sich zu einander verhalten, wie die Maasszähler in W_1, R_1 und A_1 für den Träger, dessen Zeichen gesucht wird*). So ist z. B. für den Punkt G_1 die Entfernung von $R_1A_1 = \frac{1}{2} W_1R_1$, daher der Maasszähler in $W_1 = \frac{1}{2}$, jene von W_1A_1 ist $= \frac{1}{4} R_1L_1$, also der Maasszähler in $R_1 = \frac{1}{4}$, und jene von W_1R_1 oder die Linie G_1p_1 ist $= \frac{1}{4} R_1A_1$, daher ist auch der Maasszähler in $A_1 = \frac{1}{4}$; es ist sonach in dem Zeichen des Trägers G_1 ausgedrückt durch die

*) Eine Verfahrungsweise, die auch bei den übrigen Gestaltensystemen und bei jeder Zeigerfläche derselben von praktischem Werthe ist für die Uebersetzung einer Bezeichnungsart in eine andere.

Zelle, deren Maassstrahlen die Träger W_1, R_1, A_1 mit dem Maassverhältnisse [251] $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ sind (welche Bezeichnungsart die I. heissen möge), das Verhältniss der Maasszähler $= \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 2 : 1 : 1$;

2) dadurch, dass man diejenige Zelle aufsucht, deren Messungsstrahlen senkrecht sind auf die drei Wände der Zelle $W_1 R_1 A_1$, deren Messungsstrahlen also die Strahlen $R_3 R_5 W_3$ sind, und durch diese das Zeichen des Trägers ausdrückt, indem man das Maassverhältniss $= \sqrt{2} : 2\sqrt{2} : 3$ setzt, damit die Umkehrung des Verhältnisses der Maasszähler für jeden Träger das Verhältniss der Maasszähler gebe für das Zeichen der von ihm getragenen Fläche, ausgedrückt durch die Maassstrahlen $W_1 R_1 A_1$, mit dem Maassverhältnisse $1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{\frac{3}{2}} : 1$. Es wird dann in der Zeigerfläche der Punkt R_3 zum Anfangspunkte, und die Richtungen $R_3\beta$ (als parallel dem Strahle R_5) und $R_3\delta$ (als parallel dem Strahle W_3) dienen dann, um durch sie die Trägerenden auszudrücken. Es liegt z. B. das Trägerende A_1 in $[1 \cdot R_3\delta,\ 1 \cdot R_3\beta]$ u. s. w. Dabei dient als Erleichterung, dass die Linie $R_3\psi$ oder $L_3 A_1$ in demselben Verhältnisse durch die parallel $R_3\beta$ liegenden Linien getheilt wird, wie die Linie $R_3\delta$, und dass ebenso die Eintheilungen der Linien $R_3 R_1$ und $R_3\beta$ durch die parallel $R_3\delta$ liegenden Linien einander entsprechen (II. Bezeichnungsart);

3) dadurch, dass man jeden Träger ausdrückt durch sein Verhältniss zur 3fach rechtwinkligen Zelle W_1, W_2, W_3, das Maassverhältniss $= 1 : 1 : 1$ setzend. Dieser (III.) Bezeichnungsart entspricht die Bezeichnung der getragenen Fläche durch dieselben Maassstrahlen mit demselben Maassverhältnisse und mit umgekehrtem Verhältnisse der Maasszähler.

[252]

		Es ist demnach in der Bezeichnung				
		I. der Träger	II. der Träger	der Flächen	III. der Träger	der Flächen
die Richtung	der Maass-strahlen	$W_1\ R_1\ A_1$	$R_3\ R_5\ W_3$	$W_1\ R_1\ A_1$	$W_1\ W_2\ W_3$	$W_1\ W_2\ W_3$
das Maassverhältniss		$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$	$\sqrt{2}:2\sqrt{2}:3$	$\sqrt{3}:\sqrt{\frac{3}{2}}:1$	$1:1:1$	$1:1:1$
das Verhältniss der Maasszähler für	W_1	$1:0:0=1:0:0$	$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:\frac{3}{2}:1$	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}:1$	$1:0:0=1:0:0$	$1:\infty:\infty=1:\infty:\infty$
	R_1	$0:1:0=0:1:0$	$1:1:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:\frac{3}{2}:1$	$\frac{2}{3}:\frac{2}{3}:1$	$1:1:0=1:1:0$	$1:1:\infty=1:1:\infty$
	A_1	$0:0:1=0:0:1$	$1:1:1=1:1:1$	$1:1:1$	$1:1:1=1:1:1$	$1:1:1=1:1:1$
	p_1	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:0=1:1:0$	$1:\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=2:\frac{3}{2}:1$	$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:1$	$1:\frac{1}{2}:0=2:1:0$	$\frac{1}{2}:1:\infty=1:2:\infty$
	P_1	$\frac{2}{3}:\frac{1}{3}:0=2:1:0$	$1:\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{9}{4}:\frac{3}{2}:1$	$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}:1$	$1:\frac{1}{3}:0=3:1:0$	$\frac{1}{3}:1:\infty=1:3:\infty$
	π_1	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}:0=1:2:0$	$1:\frac{5}{6}:\frac{5}{9}=\frac{9}{5}:\frac{3}{2}:1$	$\frac{5}{9}:\frac{2}{3}:1$	$1:\frac{2}{3}:0=3:2:0$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:\infty=2:3:\infty$
	L_1	$\frac{1}{2}:0:\frac{1}{2}=1:0:1$	$1:\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:\frac{9}{8}:1$	$\frac{2}{3}:\frac{8}{9}:1$	$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=2:1:1$	$\frac{1}{2}:1:1=1:2:2$
	l_1	$\frac{2}{3}:0:\frac{1}{3}=2:0:1$	$1:\frac{2}{3}:\frac{5}{9}=\frac{9}{5}:\frac{6}{5}:1$	$\frac{5}{9}:\frac{5}{6}:1$	$1:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=3:1:1$	$\frac{1}{3}:1:1=1:3:3$
	H_1	$0:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=0:1:1$	$1:1:\frac{5}{6}=\frac{6}{5}:\frac{6}{5}:1$	$\frac{5}{6}:\frac{5}{6}:1$	$1:1:\frac{1}{2}=2:2:1$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:1=1:1:2$
	h_1	$0:\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=0:1:2$	$1:1:\frac{8}{9}=\frac{9}{8}:\frac{9}{8}:1$	$\frac{8}{9}:\frac{8}{9}:1$	$1:1:\frac{2}{3}=3:3:2$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=2:2:3$
	G_1	$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=2:1:1$	$1:\frac{3}{4}:\frac{7}{12}=\frac{12}{7}:\frac{9}{7}:1$	$\frac{7}{12}:\frac{7}{9}:1$	$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=4:2:1$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:1=1:2:4$
	γ_1	$\frac{2}{5}:\frac{2}{5}:\frac{1}{5}=2:2:1$	$1:\frac{4}{5}:\frac{3}{5}=\frac{5}{3}:\frac{4}{3}:1$	$\frac{3}{5}:\frac{3}{4}:1$	$1:\frac{3}{5}:\frac{1}{5}=5:3:1$	$\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:1=3:5:15$
	g_1	$\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=1:1:1$	$1:\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:\frac{5}{4}:1$	$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}:1$	$1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=3:2:1$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:1=2:3:6$

Setzt man in der Bezeichnung II der Träger das Verhältniss der Maasse in den Maassstrahlen $= \underset{3}{R}\underset{5}{R}\underset{3}{W} = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$, so sind in der Zeigerfläche die Linien $\underset{3}{R}\underset{4}{R}$ und $\underset{3}{R}\underset{2}{A}$ als Maasse [253] zu gebrauchen, und es wird dann das entsprechende Verhältniss der Maasse in den Strahlen $\underset{1}{W}\underset{1}{R}\underset{1}{A}$ für die entsprechende Flächenbezeichnung $= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Man erhält dann folgende Verhältnisse der Maasszähler:

	für die Träger	für die Flächen
$\underset{1}{W}$	$1 : 1 : 1$	$1 : 1 : 1$
$\underset{1}{R}$	$1 : 2 : 2$	$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$
$\underset{1}{A}$	$1 : 2 : 3$	$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$
$\underset{1}{p}$	$1 : \frac{3}{2} : \frac{3}{2} = 2 : 3 : 3$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$
$\underset{1}{P}$	$1 : \frac{4}{3} : \frac{4}{3} = 3 : 4 : 4$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}$
$\underset{1}{\pi}$	$1 : \frac{5}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 5 : 5$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5}$
$\underset{1}{L}$	$1 : \frac{3}{2} : 2 = 2 : 3 : 4$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$
$\underset{1}{l}$	$1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 4 : 5$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$
$\underset{1}{H}$	$1 : 2 : \frac{5}{2} = 2 : 4 : 5$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$
$\underset{1}{h}$	$1 : 2 : \frac{8}{3} = 3 : 6 : 8$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$
$\underset{1}{G}$	$1 : \frac{3}{2} : \frac{7}{4} = 4 : 6 : 7$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7}$
$\underset{1}{\gamma}$	$1 : \frac{8}{5} : \frac{9}{5} = 5 : 8 : 9$	$\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{9}$
$\underset{1}{g}$	$1 : \frac{5}{3} : 2 = 3 : 5 : 6$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$.

Die Lösung der Aufgabe, den Theil einer 4gliedrigen oder 2gliedrigen Zeigerfläche für die hier angegebenen Träger und Flächen zu zeichnen, welcher der Zelle $\underset{1}{W}\underset{1}{R}\underset{1}{A}$ entspricht, so dass aus ihm, auf gewöhnliche Weise, Ablesung der Maasszählerverhältnisse u. s. w. für die I. Bezeichnungsart stattfinden kann, so wie auch die Darstellung und Vergleichung der vollständigen 4gliedrigen, 2gliedrigen und 3gliedrigen, einiger 2fach 1gliedrigen [**254**] und 1fach 1gliedrigen Zeigerflächen für diese merkwürdige Gestaltengruppe, möge dem Leser selbst überlassen bleiben.

Bei den 1- und 2maassigen und bei den 1- und 3maassigen hauptaxigen, so wie bei den 3gliedrig 4axigen Gestalten sind demnach die Bezeichnungsarten der Träger sowohl, als auch die der Flächen durch die einfachen Zellen (deren jede nur einen Strahl jeder Art oder nur eine Fläche jeder Art umfasst) wohl zu unterscheiden von den Bezeichnungsarten, welche sich auf zusammengesetzte Zellen (deren jede aus zwei oder mehreren, ganzen oder zertheilten, einfachen Zellen bestehend gedacht werden kann) beziehen. Obwohl nun jede dieser Bezeichnungsarten von vielfachem Nutzen ist bei der Untersuchung der Eigenschaften eines gerengesetzlichen Flächenvereins oder des ihm entsprechenden Trägervereins u. s. w., so ist doch wohl von selbst einleuchtend, dass, wenn bloss von einer möglichst gedrängten Darstellung der einzeln oder zu mehreren an bestimmten Gestalten verbunden auftretenden Flächen- oder Trägerarten eines Vereins die Rede ist, die Bezeichnung durch einfache Zellen die zu wählende sei. Auch ergiebt sich von selbst, dass die Trägerbezeichnung durch die einfachen Zellen am einfachsten eine Uebersicht sämmtlicher auf gerengesetzlichen Zusammenhang hinweisender Verhältnisse gestattet und darum den Vorzug verdient vor den sämmtlichen übrigen Bezeichnungsweisen, wenn es bloss um eine möglichst kurze und einfache Darlegung dieses Zusammenhanges zu thun ist.

Gestalt und Bau der Krystalle und Krystallgebilde.

Man kann sich vorstellen, als sei das Wachsen und Entstehen der Krystalle abhängig von Kräften, deren Richtungen senkrecht sind auf die Krystallflächen, gleichviel, ob wirklich physische Kräfte in diesen Richtungen unmittelbar gewirkt haben oder in andern Richtungen, für welche eine solche als mittlere erscheint. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die so vereinten Kräfte in irgend einem gesetzlichen Zusammenhange stehen. Zerlegt man eine derartige Kraft in zwei oder mehrere andere, nach der Lehre vom Parallelogramme der Kräfte, so dass man sucht, sie durch 2 oder 3 solche auszudrücken, deren Richtungen gleichfalls auf vorhandene Krystallflächen senkrecht sind, so ist es wahrscheinlich, dass die Grösse der Kraft, welche [255] in einer jeden von diesen Richtungen an sich wirkt, mit der Grösse der Kraft, welche man ihr beilegen muss, sofern durch ihr Zusammenwirken mit der andern (oder den andern) jene mittlere entstehen soll, in einem gesetzmässigen Verhältnisse stehe. Eine Vergleichung der bis jetzt bekannten Krystallgestalten führt dann zur Annahme folgender Erfahrungssätze.

1) *Die sämmtlichen Flächen an einem und demselben Krystalle gehören zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine*, so dass also auch deren Träger zu einem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören und die Kanten des Krystalles parallel liegen mit Strahlen eines gerengesetzlichen Vereins kantenthümlicher Strahlen.

Daraus folgt dann unmittelbar,

2) dass unter den bekannten Krystallgestalten sich keine finden könne, die einem Gestaltensysteme angehört, in welchem nicht einmal die Bestimmungsstrahlen jeder einzelnen Art unter sich (obgleich sie in Axen liegen, welche eine von den 3 wichtigsten Arten von Axen ausmachen) zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören, *so dass also* 1- *und* m*maassige Gestalten, bei denen* m *grösser als* 3 *ist, und hauptaxenlose* 3*gliedrig* 10*axige Gestalten als Krystallgestalten nicht möglich sind.*

Man hat daher folgende Hauptabtheilungen von Krystallgestalten:

I. Klasse hauptaxenloser Krystallgestalten. Sie umfasst nur *eine* Ordnung, nämlich die Ordnung der (3gliedrig) 4axigen Gestalten.

II. Klasse hauptaxiger Krystallgestalten. Sie hat *zwei* Ordnungen:

1) Ordnung der 1fach 1axigen,
   a) Familie der 1- und 3maassigen,
   b) Familie der 1- und 2maassigen;

2) Ordnung der mehrfach 1axigen oder 1- und 1maassigen.

Mit dieser Eintheilungsart stimmt auf eine merkwürdige Weise das Verhalten der durchsichtigen Krystalle gegen das Licht überein. Krystalle der Klasse I besitzen keine doppelte Strahlenbrechung*), während diese Eigenschaft denen der Klasse II zusteht. Die der ersten Ordnung II. Klasse haben eine Axe doppelter Strahlenbrechung, welche mit der einzigen einheitlichen [256] Axe, der Hauptaxe, zusammenfällt; jene der zweiten Ordnung besitzen zwei Axen doppelter Brechung.

Bei flächenvollzähligen 1- und 1maassigen Gestalten liegen diese 2 Lichtbrechungsaxen so, dass sie mit irgend 2 gleichwerthigen 2fach 1gliedrigen Axen zusammenfallen, folglich so, dass jeder der vier Winkel, welche entstehen, indem sich diese beiden Lichtbrechungsaxen durchschneiden, halbirt wird von einem 2fach 2gliedrigen Strahle, d. h. zwei der drei einheitlichen 2fach 2gliedrigen Axen fallen in die Ebene der beiden gleichwerthigen Lichtbrechungsaxen, die 3te ist auf dieser Ebene senkrecht.

Aber nicht bloss diese Lichtbrechungsverhältnisse der Krystalle, sondern alle diejenigen ihrer physikalischen Eigenschaften, die in verschiedenen Richtungen verschieden sich äussern können, stehen mit dieser Abtheilung im Zusammenhange. Dahin gehört vorzüglich Glanz, Elektricität, Härte und endlich Zusammenhang der Theile, in sofern er sich durch Zerschlagen, Zerspalten u. s. w. zu erkennen giebt (wovon später noch ausführlicher die Rede sein wird). Krystalle aus der Klasse I haben nie bloss *eine* Flächenrichtung, welche durch vorzüglichen Glanz sich auszeichnet, sondern stets mehr als 2 solcher Richtungen, die einander in dieser Beziehung gleich sind; solche aus der ersten Ordnung II. Klasse zeigen auf der Horizontalfläche öfters andern Glanz, als auf Seitenflächen; besitzen sie Perlmutterglanz, so gehören sie den Tafelflächen an u. s. w. Wenn Krystalle der I. Klasse durch Erwärmen polarisch elektrisch werden, so erhalten sie nicht *eine* elektrische Axe, sondern mehrere, die beim Boracit z. B. mit den vier 3gliedrigen Axen zusammenfallen, während bei hauptaxigen Gestalten stets nur *eine* elektrische Axe sich zeigt, die bei solchen in der 1sten Ordnung II. Klasse mit der Hauptaxe zusammenfällt (wie beim Turmalin) und bei solchen der 2ten Ordnung mit der aus andern Gründen als Hauptaxe angenommenen Axe übereinstimmt.

Jeder Gypskrystall ist in einer Richtung leichter spaltbar

*) Mit Ausnahme des Boracits.

und weicher, als in jeder andern, in einer zweiten Richtung biegsam, in jeder andern zeigt er einen höheren Grad von Zerbrechlichkeit u. s. w., so dass man schon daraus zu schliessen im Stande ist, es werde ihm eine hauptaxige Krystallform und zwar eine solche eigen sein, in welcher mehr als eine einheitliche Axe möglich ist, d. h. eine 1- und 1maassige.

[257] 3) Vergleicht man die Flächenarten, die in einer und derselben Gestaltenfamilie möglich sind, hinsichtlich auf die Häufigkeit ihres Vorkommens als Krystallflächen mit einander, so findet man, dass 3gliedrig 4axige Gestalten, deren Flächen senkrecht sind auf 4gliedrige oder 3gliedrige oder 2gliedrige Träger, häufig als Krystallgestalten ausgebildet sind, während solche, deren Flächen 2fach 1gliedrige oder 1fach 1gliedrige Träger haben, weit seltener sind. Hauptaxige Krystallgestalten, welche 1- und 2maassig oder 1- und 3maassig sind, zeigen häufig Flächen senkrecht auf die Hauptaxe oder auf 2fach 2gliedrige Queraxen 1ster und 2ter Art; etwas seltener schon solche, welche senkrecht auf 2fach 1gliedrige Queraxen oder auf 2fach 1gliedrige Strebeaxen, am seltensten aber solche, deren Träger 1fach 1gliedrige Strahlen sind.

Aus diesem Grunde ergiebt sich von selbst, dass gewisse Arten von Gestalten, welche früher als flächenhalbzählige, viertels- und achtelszählige aufgeführt worden sind, als Krystalle selten beobachtet werden können, nicht zu gedenken des Umstandes, dass es meistens nur Bruchstücke oder Theile von Krystallen sind, welche dem Beobachter vorliegen, indem die ringsum mit Ebenen begrenzten Krystalle (die eingeschlossen oder eingewachsen gewesenen) bei weitem seltener sind, als die nur an ihrem freien Ende regelmässig ausgebildeten, an dem andern aufgewachsenen Ende nicht krystallartig begrenzten, wodurch mancher Krystall zu einem flächenvollzähligen mag ergänzt worden sein, der es nicht wirklich war. Dessen ungeachtet bleiben auch diese niedrigeren Grade von Regelmässigkeit, da wo sie deutlich beobachtbar sind, für das tiefere Naturstudium von Wichtigkeit. Es möge daher hier die Aufzählung der weiteren Unterabtheilungen für die Ordnungen und Familien von Gestalten, welche als Krystalle möglich sind, stattfinden mit beispielsweiser Angabe des Namens von wenigstens einer Substanz, deren Krystalle solche Gestalten besitzen, und mit Angabe der synonymen Benennungen, welche von den Krystallographen *Weiss* und *Mohs* gebraucht werden zur Bezeichnung des allgemeinen Charakters solcher Formen.

Krystallgestalten können sein: [258]

A. 3gliedrig 4axig

	Weiss'sche Benennung	*Mohs*'sche Benennung	Beispiel
1) 8strahlig	sphäroedrisch	tessularisch	Flussspath
2) 1fach 3gliedrig 8strahlig			
3) 4strahlig	hemisphäroedrisch tetraedrisch	semitessularisch von geneigten Flächen	Fahlerz
4) 1fach 3gliedrig 4strahlig			
5) 2 × 4strahlig	hemisphäroedrisch pyritoedrisch	semitessularisch von parallelen Flächen	Eisenkies

[259] B. 1- und 3maassig

1) 6gliedrig	6gliedrig	dirhomboedrisch	Smaragd. Fig. [illegible]
2) 1fach 6gliedrig		semidirhomboedrisch von parallelen Flächen	Apatit, Fig. 2[illegible]
3) ebenbildlich gleichendig 6gliedrig			
4) ungleichendig 6gliedrig			
5) ungleichendig 1fach 6gliedrig			
6) 3gliedrig	3- und 3gliedrig od. rhomboedrisch	rhomboedrisch	Kalkspath, Fig. 246 *A*, *B*, *C*
7) 1fach 3gliedrig		semirhomboedrisch von parallelen Flächen	Apotomes Eisen, Fig. 248
8) ebenbildlich gleichendig 3gliedrig		semirhomboedrisch und semidirhomboedrisch von zum Theil geneigten, zum Theil parallelen Flächen	Quarz, Fig. 249
9) gleichstellig 2endig 3gliedrig			*)
10) gleichstellig 2endig 1fach 3gliedrig			
11) ungleichendig 3gliedrig		semirhomboedrisch von verschiedener Bildung an beiden Enden	Turmalin, Fig. 251
12) ungleichendig 1fach 3gliedrig			Turmalin z. Theil.

*) Dass gleichstellig 2endig 3gliedrige Gestalten, so wie mehrere von den übrigen, für welche hier keine Beispiele aufgeführt wurden,

[260] C. 1- und 2massig

1) 4gliedrig	4gliedrig	pyramidal	Zinnstein, Fig. 313
2) 1fach 4gliedrig		semipyramidal von parallelen Flächen	Scheelerz, Fig. 242
3) ebenbildlich gleichendig 4gliedrig			
4) ungleichendig 4gliedrig			
5) ungleichendig 1fach 4gliedrig			
6) gerenstellig 2endig 2gliedrig	tetraedrisch 4gliedrig	semipyramidal von geneigten Flächen	Kupferkies, Fig. 245
7) gerenstellig 2endig 1fach 2gliedrig			vielleicht dürfte der Kupferkies eher hier als bei Nr. 6 beispielsweise erwähnt werden müssen.

dem Gebiete der Krystallkunde nicht ganz fremd sind, wird später bei der Lehre von den gesetzmässigen Zusammenwachsungen zweier oder mehrerer Krystalle (den Zwillingen, Drillingen u. s. w.) einleuchten.

[261] D. 1- und 1maassig

1) 2gliedrig	2- und 2gliedrig	prismatisch	Chrysolith, Serpentin, Fig. 237
2) 1fach 2gliedrig	1- und 2gliedrig	semiprismatisch	Epidot (kann auch als 1gliedrig betrachtet werden)
3) ebenbildlich 2endig 2gliedrig			Bittersalz, Fig. 249 *A*
4) ungleichendig 2gliedrig		prismatisch mit verschiedenen Flächen an entgegengesetzten Enden	Topas, Galmei, Fig. 250
5) ungleichendig 1fach 2gliedrig			
6) 1gliedrig *)	2- und 1gliedrig	semiprismatisch	Augit, Fig. 244 *A*, *B*
7) 1fach 1gliedrig *)	1- und 1gliedrig	tetartoprismatisch	Albit, Fig. 247
8) ebenbildlich gleichendig 1gliedrig			kann als ungleichendig 1fach 2gliedrig betrachtet werden
9) gleichstellig 2endig 1gliedrig			kann als ungleichendig 2-gliedrig betrachtet werden
10) gleichstellig 2endig 1fach 1gliedrig			kann auch als ungleichendig 1gliedrig erscheinen
11) **ungleichendig 1gliedrig**			? Hornblende zum Theil
12) **ungleichendig 1fach 1gliedrig**			Elektrischer Axinit? (*Hauy.*)

*) Dass unsere Abtheilungen der 1gliedrigen und der 1fach 1gliedrigen Gestalten unabhängig sind von jeder Beziehung auf

[262] 4) Wenn man die Gesammtheit verschiedener einzelner Krystallformen aus einer und derselben Unterabtheilung von Krystallgestalten, welche so beschaffen sind, dass, wenn sie in übereinstimmender Stellung sich befinden, die Flächen aller zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine gehören, zusammenfasst als zu einer und derselben *Krystallreihe* gehörig, so dass die Classen, Ordnungen, Familien und Unterabtheilungen von Krystallgestalten zugleich als den Classen, Ordnungen, Familien und Arten von Krystallreihen entsprechend erscheinen, so hat man folgende Erfahrungssätze:

a) Krystalle, welche zu verschiedenen Krystallreihen gehören, zeigen sich auch in mehreren von den wesentlichsten ihrer physikalischen und chemischen Eigenschaften verschieden. Dass zwei Krystalle, welche in verschiedene Classen, Ordnungen und Familien von Krystallreihen gehören, auch andere, nicht bloss die Gestalt angehende, Verschiedenheit besitzen, ist oben bereits erwähnt worden, dass aber auch die Artenverschiedenheit der Krystallreihen auf andere Verschiedenheit zu schliessen berechtige, ungeachtet etwaiger sonstiger Uebereinstimmungen, dafür mögen folgende Beispiele sprechen. Zwischen den beiden bekanntesten Kobalterzen ist die wichtigste äussere Verschiedenheit gerade darin begründet, dass die Krystalle des einen (1fach 3gliedrig) 2 $\times$ 4strahlige sind, während die des andern nur als (2fach 3gliedrig) 8strahlige erscheinen; die wichtigste innere Verschiedenheit, welche dieser äusseren entspricht, liegt [263] darin, dass jene aus

---

Gerengesetzlichkeit der ihnen zum Grunde liegenden Strahlensysteme, ist aus [262] der Art, wie der Begriff derselben gewonnen wurde, einleuchtend. Es kann daher, in gerengesetzlicher Hinsicht, bei manchen 1gliedrigen Gestalten zweckmässig sein, in der Bezeichnung auszugehen von Zellen mit 2 rechten und einem schiefen Winkel (2fach rechtwinkligen oder monoklinometrischen Zellen), während bei andern gleichfalls 1gliedrigen Gestalten ihrer Eingliedrigkeit unbeschadet zweckmässiger von 3fach rechtwinkligen (orthometrischen) Zellen ausgegangen wird. Ebenso ändert sich der allgemeine Charakter der 1fach 1gliedrigen Gestalten, als solcher, nicht, obgleich für die gerengesetzliche Bezeichnung möglicher Weise bei den einen von 3fach rechtwinkligen, bei den andern von 2fach rechtwinkligen, bei den 3ten von 1fach rechtwinkligen (diklinometrischen), bei den 4ten von 3fach schiefwinkligen (triklinometrischen), und zwar hier wieder entweder von 1fach rechtkantigen (diklinoedrischen) oder von 3fach schiefkantigen (triklinoedrischen) Zellen ausgegangen wird, wenn man die einfachste Darstellung des Zonenzusammenhanges erhalten will.

Schwefel, Arsenik und Kobalt, diese bloss aus Arsenik und Kobalt bestehen. Bei 1- und 3maassigen gerenstellig 2endigen 2fach 3gliedrigen Krystallen finden andere Verhältnisse des Zusammenhaltes und der Theilbarkeit statt, als bei gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen u. s. w. Noch auffallender sind die Verschiedenheiten bei 1- und 1maassigen Krystallen, je nachdem sie zu Krystallreihen gehören, welche 2gliedrig oder 1gliedrig oder 1fach 1gliedrig sind. So ist der wasserfreie schwefelsaure Kalk 2gliedrig, der wasserhaltige aber 1gliedrig u. s. w. Als ganz vorzüglich wichtig muss es aber gelten, dass bei Krystallreihen einer Art, die nur in Beziehung auf das ursprüngliche gerengesetzliche Maassverhältniss verschieden sind, stets wesentliche Verschiedenheit hinsichtlich auf chemische und physikalische Eigenschaften vorhanden ist.

b) Umgekehrt, wenn Krystalle zu einerlei Krystallreihe gehören, so besitzen sie auch (sofern sie nicht in der Classe der hauptaxenlosen Krystalle zu zählen sind, welche in physikalischer und chemischer Hinsicht sehr verschieden sein können, obgleich sie Glieder einer und derselben Krystallreihe sind*)), in der Regel eine unverkennbare Uebereinstimmung hinsichtlich auf ihre physikalischen und chemischen Eigenschaften, selbst dann, wenn ihre äussere Form verschieden ist. Es dürfte diese Regel zwar nicht ohne Ausnahme sein, wahre Ausnahmen aber möchten doch wohl zu den Seltenheiten gehören. Als solche scheinbare Ausnahme ist anzuführen, dass z. B. die Krystalle der Verbindungen von Kohlensäure mit Kalk, mit Bittererde, mit Manganoxydul, mit Eisenoxydul, so wie die der genannten Säure mit mehreren der genannten Basen zugleich, scheinbar zu einer und derselben Krystallreihe gehören, oder dass andererseits die Verbindung des Bleioxyds mit Phosphorsäure und die derselben Basis mit Arseniksäure eben so als scheinbar gleich gestaltet auftreten. Allein erstens hat die genauere Beobachtung nachgewiesen, dass hier bloss scheinbare Gleichheit der Form mit wirklicher Gleichheit verwechselt worden ist**), und zweitens [264] findet hier auch

*) Bleiglanz und Flussspath sind beide in ganz gleichen 8strahligen Gestalten krystallisirt; Fahlerz und Boracit erscheinen beide in 4strahligen, Eisenkies und Glanzkobalt in 2 $\times$ 4strahligen Gestalten.

**) Der 6flächige Kronrandner des kohlensauren Kalks hat Scheitelkanten von 105° 5′, der der kohlensauern Bittererde solche von [264] 107° 25′, der der Verbindung von 1 Atom (oder Mischungswirklich sowohl in physikalischer als in chemischer Hinsicht ein gewisser Grad von Gleichartigkeit der zusammengestellten, fast gleichgestalteten, Substanzen statt, welcher diese formelle Gleichartigkeit minder auffallend macht. Weit auffallender dagegen ist es, dass Substanzen von oft sehr verschiedenem Charakter *fast* gleichgestaltet (oder, wie man es auch sonst nennt, isomorph) sind, wie z. B. salpetersaures Natron und kohlensaurer Bittererdekalk u. s. w.

c) Wenn Krystalle in allen ihren wesentlichen physikalischen und chemischen Eigenschaften vollkommene Uebereinstimmung zeigen, so gehören sie auch zu einer und derselben Krystallreihe, ihre Form sei scheinbar noch so verschieden. Kohlensaurer Kalk erscheint z. B. als Kalkspath in vielen hundert verschiedenen Krystallformen, welche alle einer und derselben Krystallreihe angehören. Es können zwar Krystalle in chemischer Hinsicht keine wesentliche Verschiedenheit zeigen (wie dieses z. B. zwischen Arragon und Kalkspath*), zwischen Strahlkies und Eisenkies der Fall ist) und dennoch verschiedenen Krystallreihen angehören, aber dann ist stets mehr oder weniger beträchtliche Verschiedenheit hinsichtlich der physikalischen Eigenschaften vorhanden. Bestimmt man daher den Begriff für die Species der festen homogenen Körper dahin, dass man sagt, zu einer solchen Species gehöre alles, was in Beziehung auf sämmtliche wesentliche physikalische und chemische Eigenschaften Uebereinstimmung zeigt, so kann man sagen, die Krystalle einer und derselben solchen Species gehören zu einer und derselben Krystallreihe in einer und derselben Classe, Ordnung, Familie und Unterabtheilung von Krystallgestalten; es liege jedem einzelnen ein Axen- oder Strahlensystem zum Grunde, welches [265] mit dem aller übrigen Krystalle derselben Species nicht nur hinsichtlich auf die allgemeinen Eigenschaften jeder einzelnen Axenart (Beschaffenheit der Flügel und Enden einer Axe) übereinstimmt,

---

gewicht) kohlensauren Kalkes mit 1 Atom kohlensaurer Bittererde hat solche von $\frac{1}{2}$ ($105^\circ\,5' + 107^\circ\,25'$) $= 106^\circ\,15'$ u. s. w.; ein Gesetz, auf welches zuerst *Beudant* aufmerksam gemacht hat, das aber noch durch vielfach wiederholte Beobachtungen an andern Substanzen seine vollständige Begründung erhalten muss.

*) Wenigstens ist ein dem kohlensauren Kalke beigemischter Antheil kohlensauren Strontians, der dadurch, dass er von 3 bis 0 Procent variirt, zu erkennen giebt, dass er im Arragon nicht wesentlich sei, ungenügend, die Verschiedenheit beider Substanzen zu erklären.

sondern auch in jeder Richtung dasselbe Urmaass besitzt, das dieser Richtung in jenem Systeme eigen ist, wenn das Urmaass in einer bestimmten Richtung (z. B. in der Richtung der Hauptaxe) jedesmal = 1 gesetzt wird, dasselbe Urmaass nämlich, von welchem jede gesetzliche Länge in dieser Richtung ein blosses Vielfaches nach rationalen Maasszählern ist.

5) Wenn bei den Krystallen einer und derselben Species von Substanz hinsichtlich auf die Menge der Flächenarten eine so grosse Mannigfaltigkeit stattfände, dass, wenn man ausgeht von den Trägern der Flächen, die sich am wichtigsten machen, und durch sie die Träger der übrigen Flächen nach und nach entwickelt in einer solchen Ordnung, wie sie der gerengesetzlichen Entwickelung nach der Auffassung zunächst liegen, man bis zu sehr entfernt liegenden Gliedern fortschreiten müsste, d. h. zu solchen, für welche die Verhältnisse der Maasszähler durch immer grössere und grössere Zahlen ausgedrückt werden müssten, so würde die Nachweisung der Gerengesetzlichkeit in der Krystallenwelt an das Unmögliche grenzen; es ist daher eine nicht unwichtige Erfahrung, dass nur die ersten ursprünglichen und die ihnen zunächst liegenden, durch die einfachsten und leichtesten Entwickelungsoperationen bestimmbaren, Glieder eines gerengesetzlichen Trägervereins den Gegenstand der Untersuchung ausmachen, wenn von den Krystallen einer und derselben Species von Substanz die Rede ist, so dass bei nicht ganz unzweckmässiger Wahl*) der als ursprünglich gegeben zu betrachtenden Träger und deren Maasse das Verhältniss der Maasszähler für die zu ihnen gehörigen abgeleiteten Träger, sofern sie durch ein gerengesetzliches Zeichen in Beziehung zu jenen ausgedrückt werden, ein solches ist, dessen Glieder sich in sehr einfachen kleinen ganzen Zahlen ausdrücken lassen, welche selten die Grösse der Zahl 6 erreichen, noch seltener über diese Grenze hinaus sich erstrecken. So ist, um nur ein Beispiel anzuführen, aus dem Vorhergehenden erinnerlich, dass in dem Verhältnisse der Maasszähler für die I. Trägerbezeichnung bei den wichtigsten der in der Natur vorkommenden 4axigen einfachen Gestalten kein [266] Maasszähler grösser als 2 war, obgleich die Anzahl der aufgeführten Flächenarten als Trägerarten nicht kleiner als 13 ist.

*) Da nämlich, wo eine solche stattfindet.

Es soll jedoch hierdurch keineswegs behauptet werden, dass höhere Maasszähler gar nicht vorkämen; vielmehr scheint es, als ob die Natur sich hierin keine bestimmte Grenze gesteckt habe, aber Fälle, in welchen ein Maasszähler als eine der höheren zweizifferigen Zahlen oder wohl gar als eine dreizifferige Zahl nothwendig ausgedrückt werden muss, sind äusserst selten und zum Theil durch so unvollkommene Messungen bestimmt, dass hieraus keine Einwendung gegen das der Gesammtheit der bekannten Erfahrungen entsprechende Gesetz der Einfachheit der Maasszähler entnommen werden kann.

6) Was die Frage betrifft, ob bei den Krystallen stets der Verein der Träger mit dem der kantenthümlichen Strahlen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehöre oder nicht, so ist es zwar nicht gerade unwahrscheinlich, dass das fragliche Zusammengehören stets stattfinde; aber die Nachweisung, dass es wirklich so sei, ist in manchen Fällen mit Schwierigkeiten verknüpft, die davon abhängen, dass bei der gerengesetzlichen Bezeichnung der Träger durch kantenthümliche Strahlen, so wie umgekehrt bei der Bezeichnung dieser durch jene, die Maasszähler mitunter sehr beträchtlich von jener hohen Einfachheit abweichen, welche ihnen sonst gewöhnlich eigen zu sein pflegt.

Wichtig ist die in Rede befindliche Frage besonders deshalb, weil von ihrer Bejahung oder Verneinung es abhängt, ob bei den in der Krystallkunde besonders häufig vorkommenden 1gliedrigen und 1fach 1gliedrigen Gestalten die gerengesetzliche Bezeichnungsweise von 3fach rechtwinkligen Zellen ausgehen dürfe (wodurch alle mathematischen Untersuchungen solcher Gestalten, besonders aber die mehr trigonometrisch rechnenden, um ein Bedeutendes vereinfacht und erleichtert werden würden), oder nicht. Da nun aber die mehr geometrische Untersuchung gerade um so einfacher wird, je kleiner die Maasszähler sind, welche in Betracht kommen, und da ferner auf dem geometrischen Wege, besonders mit Hülfe der Vortheile, welche eine geschickte, durch vielfältige Uebung an Beispielen praktisch erlernte, Benutzung der Zeigerflächen gewährt, auch die Auflösung aller trigonometrischen, dann noch zu lösenden, Aufgaben in der Art vorbereitet wird, dass sie nur noch eine sehr geringe Mühe [267] verursacht und, wie gezeigt worden, äusserst einfach ist, so möchte es nicht zweckmässig sein, die Bezeichnung durch nicht 3fach rechtwinklige Zellen, welche jedoch einfache kleine Maasszähler giebt, zu [illegible], welche [illegible] Zahlen [illegible] Maasszähler [illegible] werden [illegible] Ausdruck für [illegible] Verhältniss [illegible] Falle die Maasszähler zwar nicht so gross [illegible] nicht [illegible] Zahlen.

[illegible] gerade die Abwesenheit des [illegible] darauf [illegible], dass es [illegible] auf [illegible] als [illegible] bei der naturwissenschaftlichen Betrachtung [illegible] anzugeben.

[illegible] ferner auf die erwähnte Frage und auf [illegible] eine andere Frage, nämlich die, ob nicht [illegible] dem Gesetze der einfachen Maasszähler ab[illegible] aller verschiedenen Krystallreihen [illegible] gerengesetzlichen Strahlenvereine ge[illegible] zuletzt zu betrachten seien als blosse *Ab*[illegible] dem gerengesetzlichen Strahlenvereine, welcher [illegible] Krystallgestalten zum Grunde liegt *hinsicht*[illegible] *eigenthümlichen Classencharakter der Haupt*[illegible] indem eine oder die andere der Axen der [illegible] Krystallreihe den Charakter der Hauptaxe an[illegible] noch das Urmaass, das ihr und den ihr [illegible] gewesenen eigen war, beibehält, jedoch verviel[illegible] einen rationalen Maasszähler. So leitet nament[illegible] *Breithaupt** in der neuesten Zeit aus dem 8flächner, [illegible] 8flächiger Ebenrandner mit dem Axenverhält[illegible] $: 1r = 1 : 1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ betrachtet wird, oder aus dem [illegible] 8flächigen Ebenrandner 2ter Stellung ($[illegible] = 1 : 1 : 2\sqrt{\frac{1}{2}}$) andere 8flächige Ebenrandner dadurch ab, dass er das Maass der 4gliedrigen, nun als
[208] Hauptaxe geltenden, Axe desselben mit einem Bruche multiplicirt, dessen Nenner die Zahl 720 (= dem Producte $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ der gewöhnlich vorkommenden Maasszähler) und dessen Zähler irgend eine ganze (nicht allzu

* *Schweigger*'s J. d. Ch. 1828 und 1829.

sehr von 720 verschiedene) Zahl ist, und nun das Verhältniss der so erhaltenen Hauptaxe zu den unveränderten Queraxen 1ster (und 2ter) Art als das Axenverhältniss des neuen 8flächigen Ebenrandners und somit auch als das primäre kantenthümliche Maassverhältniss einer bestimmten 1- und 2maassigen Krystallreihe betrachtet. Auf ähnliche Weise entstehen dann natürlich auch, wenn solche Veränderungen bei einer einzelnen der vier 3gliedrigen Axen statt haben, Axenverhältnisse für 1- und 3maassige Gestalten u. s. w. Es lässt sich über diese, wenigstens in Beziehung auf die etwas willkürlich erscheinende Zahl 720, neue Lehre ein gründliches Urtheil erst dann fällen, wenn sie durch alle Krystallreihen, namentlich auch durch die 1- und 1maassigen, hindurch geführt sein wird; denn es ist dabei gar sehr zu berücksichtigen, dass die dem Anfangsgliede $\frac{1}{1}$ oder $\frac{720}{720}$ zunächst liegenden Glieder der Reihe

$$\ldots\ldots \frac{718}{720},\ \frac{719}{720},\ \frac{720}{720},\ \frac{721}{720},\ \frac{722}{720}\ \ldots\ldots,$$

wenn sie als Tangenten von Winkeln angesehen werden, Winkel bestimmen, die nur sehr kleine Differenzen besitzen, und dass diese Differenzen noch bedeutend kleiner werden, wenn man zwischen die Glieder dieser Reihe einschaltet die Glieder der Reihe

$$\ldots\ldots \frac{513}{720}\sqrt{2},\ \frac{514}{720}\sqrt{2},\ \frac{515}{720}\sqrt{2},\ \frac{516}{720}\sqrt{2}\ \ldots\ldots,$$

welche den Vervielfältigungen der Hauptaxe bei dem 8flächigen Ebenrandner (a, R, $2r$) entsprechen, während jene denen der Hauptaxe des zum 8flächigen Ebenrandner (a, R, r) gewordenen 8flächners angehören, und dass solche kleine Differenzen nicht mehr mit der nöthigen Schärfe beobachtet werden können. Es ist nämlich z. B. $\frac{719}{720} = \text{Tg. } 44^\circ 58'$ und $\frac{514}{720}\sqrt{2} = \text{Tg. } 44^\circ 59'$ und $\frac{720}{720} = \text{Tg. } 45^\circ$ u. s. w.

7) Bei Vergleichung zweier auf gleichwerthigen Trägern senkrechten Flächen eines und desselben Krystalls, so wie ihn die [269] Natur unmittelbar durch den Act der Krystallisirung liefert, findet man, dass häufig die eine derselben dem

Mittelpunkte des Körpers näher liegt, als die andere, folglich grösser ist als diese u. s. w., und der Krystallkundige muss daher z. B. einen von 8 Flächen begrenzten Körper für einen 8flächner (im engern Sinne) halten, wenn nur seine Flächen senkrecht sind auf die 4 Paare von Trägern, welche 4 Axen bilden, die so gegen einander geneigt sind, wie die 3gliedrigen Axen im 4axigen Strahlensysteme, gleichviel ob auch wirklich die 8 Flächen gleich weit vom Mittelpunkte des Strahlensystems entfernt sind oder nicht, vorausgesetzt, dass nicht andere Gründe vorhanden sind, durch welche die Ungleichwerthigkeit der 8 Flächen sich ausspricht. Es geht daraus hervor, dass bei einer Krystallgestalt das Gesetzliche für jede Fläche zunächst nur in dem Senkrechtsein auf einen Träger von (im Verhältnisse zu den Trägern der übrigen Flächen desselben) bestimmter Richtung zu suchen sei, nicht aber in dem bestimmten Orte, in welchem sie sich befindet. Am zweckmässigsten ist es daher, wenn man bei Untersuchung der allgemeinen Beschaffenheit eines gegebenen Krystalls

a) eine Gestalt sich vorstellt, welche entsteht, wenn man in gleicher Entfernung von einem als Mittelpunkt dienenden Punkte, parallel sämmtlichen Flächen des Krystalls, Ebenen sich denkt, um an der, von diesen Ebenen begrenzten, Gestalt das Gleichwerthige als gleichwerthig zu erkennen, und dass man

b) auf das etwa Gesetzmässige in der ungleichen Vertheilung solcher Flächen des wirklichen Krystalls achtet, welche mit in jenem Bilde als gleichwerthig erscheinenden parallel liegen, und zugleich die etwaigen anderweitigen Verschiedenheiten solcher scheinbar gleichwerthigen Flächen berücksichtigt, um Verschiedenwerthiges nicht für gleichwerthig anzusehen. Als solche Verschiedenheiten ungleichwerthiger Flächen treten auf: ungleiche Stärke und Art des Glanzes, ungleiche Vollkommenheit des Ebenseins (Glätte und Rauhheit und ganz besonders Streifen, die auf gleichwerthigen Flächen eine gleichwerthige Lage haben, nur bei einer oder der andern Flächenart als kleinere oder grössere Unvollkommenheit in der Bildung einer solchen Fläche auftreten und namentlich als Andeutungen der Bildung anderer Flächen anzusehen sind, die mit diesen sich in Kanten schneiden, deren Kantenlinien mit solchen Streifen parallel liegen würden), häufig auch ungleiche Theilbarkeit und [**270**] Härte des Krystalls in verschiedenen bestimmten Richtungen u. s. w.;

c) den gegebenen Krystall mit andern Krystallen derselben Substanz vergleicht, um den wahren allgemeinen Charakter der Krystallreihe (d. h. den des ihr zum Grunde liegenden Strahlensystems) derselben zu ergründen, wenn er nicht bereits bekannt ist und bei Bestimmung des gegebenen, in Untersuchung befindlichen, Krystalls benutzt werden kann.

8) Merkwürdig ist es, dass Krystallreihen, in deren Axensysteme ungleichendige Axen vorkommen, im Allgemeinen selten sind und dass daher fast stets jeder Krystallfläche eine zweite, ihr parallele, an demselben Krystalle gegenübersteht, welches um so merkwürdiger ist, da ungleichendige Axen meistens nur den Krystallen eigen sind, welche durch Erwärmung polarisch elektrisch werden (Turmalin, Boracit, Topas, Galmei u. s. w.), wie dieses bereits oben angedeutet worden ist. Daraus geht aber hervor, dass jene Unterabtheilungen der Krystallgestalten, welche sich auf parallelflächige Formen beziehen, bei weitem die wichtigsten sind für die Krystallkunde, ja auch unter diesen steht einigen ein bedeutend häufigeres Vorkommen zu, als den andern. So z. B. ist unter den 4axigen die Abtheilung der 8strahligen Gestalten die vorherrschende, und unter den hauptaxigen sind als vorzüglich häufig zu bezeichnen die 3gliedrigen, die 2gliedrigen, die 1gliedrigen und die 1fach 1gliedrigen, weit seltener sind die 4gliedrigen und die 6gliedrigen Krystallreihen.

9) Nicht bloss äusserlich auf der Oberfläche des Krystalls sind ebene, gesetzmässig liegende Flächenrichtungen zu suchen, sondern auch im Innern. Ein Krystall von Kalkspath z. B. zerfällt beim Zerschlagen mit dem Hammer in eine Menge von Theilungsstücken, deren jedes, wenn es von lauter Theilungsflächen begrenzt ist, ein Parallelepiped darstellt, das, wenn seine 6 Flächen in gleichem Abstande von einem Mittelpunkte sich befinden, ein 6flächiger Kronrandner mit Scheitelkanten von $105^{\circ}\,5'$ ist. Jedes solches Theilungsstück lässt dieselbe Theilung noch weiter zu und so kann man fortfahren in dieser Zertheilung, so weit als unsere Sinne und unsere Theilungswerkzeuge reichen; denn es ist von selbst einleuchtend, dass, wenn man sich einmal überzeugt hat, die ebene Beschaffenheit der Theilungsflächen rühre nicht von der Beschaffenheit des
[271] Theilungswerkzeugs her und von der Art, wie es angewandt wird, sondern sei im innern Baue des Krystalls gegründet, man mit grösserer Behutsamkeit, als die ist, welche die rohe Anwendung des Hammers gestattet, verfahren wird,

um die Richtung und Beschaffenheit der durch Spaltung zu erhaltenden Theilungsebenen zu erforschen, und dass man daher Messer und Meissel als Zwischenmittel anwendet, um die Wirkung des Hammerschlags vorzüglich nach derjenigen Richtung hin zu leiten, in welcher man vermuthet oder weiss, dass die Spaltung möglich sei. Bei Substanzen, welche leicht spaltbar und nicht sehr hart sind, kann man den Hammer entbehren, bei sehr harten wendet man zweckmässig eine Beiss- oder Kneipzange mit scharfem Maule an, deren Wirkung dann oft noch durch den Hammerschlag befördert wird. Verfolgt man bei der Spaltung bloss eine der Spaltungsrichtungen, so zertheilt man den Krystall in eine beliebige Menge Blätter von beliebig kleiner Dicke. Die Eigenschaft eines Krystalls, sich nach einer Richtung in solche Blätter theilen zu lassen, heisst ein Blätterdurchgang desselben. Ein und derselbe Krystall besitzt daher mehrere Blätterdurchgänge, wenn er nach mehreren Richtungen hin ein Zerspalten in Blätter zulässt. Zuweilen sind in Krystallen mehr oder minder deutlich sichtbare einzelne Spalten oder Risse vorhanden, welche (durch zufälligen Schlag, Stoss u. s. w. entstanden) mit Durchgängen parallel liegen und dadurch deren Richtungen verrathen. Die Spaltung in der Richtung eines und desselben Durchganges findet an allen Stellen und Theilen des Krystalls mit gleicher Leichtigkeit statt, und nur ein zufällig schon vorhandener Riss in einer solchen Richtung macht die Trennung in der Ebene dieses Risses leichter, als in einer andern ihr parallelen, also derselben Durchgangsrichtung entsprechenden, Ebene. Solche meist sichtbare Spalten sind daher gewissermaassen bereits halb entblösste Durchgänge.

Senkrecht auf gleichwerthige Axenrichtungen eines Krystalls sind gleich leicht entblössbare Durchgänge vorhanden, welche, unter übrigens gleichen Umständen, gleich vollkommen ebene Theilungsflächen liefern. Verschiedenwerthigen Axenrichtungen entsprechen ebenso, mehr oder minder auffallend, verschiedenwerthige Durchgänge. So besitzt z. B. der Gyps drei Arten von zunächst ins Auge fallenden Durchgängen; die einen sind höchst leicht spaltbar und liefern spiegelnde Spaltungsflächen, die andern [**272**] beiden Arten sind weit minder deutlich und werden durch das Zerbrechen dünner Gypsblättchen beobachtet; in der einen dieser beiden Richtungen erfolgt das Zerbrechen leicht und liefert glatte glasartig glänzende Flächen, die durch muscheligen Bruch unterbrochen sind, in der zweiten ist das Zerbrechen durch die Biegsamkeit des Blättchens etwas erschwert und die gewonnene Fläche hat ein gestreiftes, gleichsam faseriges Ansehen.

Spaltungsflächen, die zuweilen ziemlich gleich-vollkommenes Ansehen haben, unterscheiden sich oft auffallend, wenn man sie sehr nahe an das Auge bringt und entfernte Gegenstände darauf abgespiegelt beobachtet. So sind die Bilder, welche die eine der beiden deutlichsten Durchgangsrichtungen, z. B. beim Kalifeldspath, liefert, weit deutlicher als jene, welche die andere giebt.

Die Träger der Durchgangsebenen gehören mit den Trägern der Flächen des Krystalls, folglich auch mit denen aller Flächen derselben Krystallreihe, zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine; daher liegen die Durchgänge häufig mit Flächen parallel, welche als Begrenzungstheile des Krystalls wirklich vorhanden sind. So ist ein Würfelkrystall von Bleiglanz spaltbar, parallel den Würfelflächen, in kleine rechtwinklige Parallelepipede, welche bei gleicher Grösse ihrer Flächen wieder Würfel sind; ein 8flächner von Flussspath ist spaltbar parallel seinen Flächen u. s. w.

Alle Krystalle einer und derselben Substanz*) zeigen, wenn alle übrigen Umstände (namentlich der Grad von Reinheit der Masse und der Grad von Vollkommenheit der Ausbildung und Ebenheit der Krystallflächen) dieselben sind, selbst bei verschiedener äusserer Gestalt dennoch dieselben Durchgangsrichtungen in demselben Grade der Vollkommenheit. 8flächner von Bleiglanz sind spaltbar in auf ihre 4gliedrigen Axen senkrechten Richtungen, und die von Theilungsflächen ringsum in gleichem Abstande begrenzten Theilungsstücke sind Würfel, eben so wie jene, die aus einem Bleiglanzwürfel erhalten wurden.

[273] Störung beim Werden eines Krystalls hat öfters Unebenheit von sonst ebenen Spaltungsflächen zur Folge. So zeigt mancher Flussspath deutlichere Durchgänge, als mancher andere reinere, von ebeneren Krystallflächen begrenzte u. s. w.

---

*) Dass hier nicht Dinge für einerlei Substanz gelten, welche nur einander höchst nahe verwandt, nicht aber wirklich gleich sind, versteht sich von selbst; aber auch auf solche erstreckt sich diese Regel in vielen Fällen, z. B. bei Kalifeldspath und Natronfeldspath, bei kohlensaurem Kalk und kohlensaurer Bittererde u. s. w.

[illegible] Krystalle nur Durch- [illegible] Bleiglanz. Zink- [illegible] aber mit [illegible]. Antimon- [illegible] werden in be- [illegible] während sie in [illegible] und die [illegible] vollkommen. [illegible] Durchgänge [illegible] [illegible] deutlichen Durchgängen einen sehr hohen Grad von Zerbrechlichkeit bei sonst nicht unbedeutender Härte, wie z. B. beim Euklas.

Erschwerung des Spaltens oder Verminderung der Ebenheit und Reinheit der Spaltungsflächen oder Abweichung vom Parallelismus derselben findet statt

a) beim Vorhandensein von Einschlüssen fremder Substanz. Dahin gehören α) Einschlüsse fester Körper in Krystallen oder krystallinischen Massen, z. B. Quarz in Kalifeldspath oder Natronfeldspath eingeschlossen, wie im sogenannten Schriftgranit, Sand in Kalkspathkrystallen enthalten, wie im sogenannten krystallisirten Sandstein von Fontainebleau u. s. w. β) Einschlüsse tropfbar flüssiger Körper, die zum Theil Ueberreste von der Mutterlauge sind, aus welcher die Krystalle bei ihrer Bildung sich ausgeschieden haben, indem Beispiele bekannt sind, dass solche Flüssigkeiten gleich nach dem Zerschlagen ihrer Umgebung oder auch durch andere Einflüsse erhärteten, ja selbst krystallisirten, während andere dergleichen Einschlüsse sich als reines Wasser verhalten u. s. w.*). γ) Einschlüsse gas- oder luftförmiger Flüssigkeiten. Hierher gehört z. B. das bei manchen schwarzen Hornblendekrystallen vorkommende schwammartige Blasige, gleichsam Bimssteinartige, der Masse, welches ungeachtet der regelmässigen äusseren Gestalt und ungeachtet des vorhandenen Blättergefüges zuweilen in hohem Grade statt hat, dann die, auch in andern Krystallen nicht seltenen, einzelnen grösseren oder kleineren eingeschlossenen blasenartigen Räume;

b) beim regelmässigen oder unregelmässigen Verwachsensein eines Krystalls u. s. w. mit Krystallen oder krystallinischen Theilen derselben Masse, aber von einer abweichenden Stellung, [275] wenn hierbei die Spaltungsebene im einen Theile der Masse sich nicht auch in derselben Richtung im andern Theile fortsetzt, wie z. B. bei manchen sonst sehr leicht spaltbaren krystallinischen Stücken von Zinkblende u. s. w.;

---

*) Ueberhaupt ist die Beschaffenheit der in Krystallen u. s. w. eingeschlossen vorkommenden Flüssigkeiten, wie es scheint, eine sehr verschiedenartige. Sie sind besonders in neueren Zeiten ein Gegenstand sorgfältigerer Aufmerksamkeit geworden und daher in den Zeitschriften, welche vorzüglich für Physik, Chemie und Mineralogie bestimmt sind, ein im Verhältniss zur Seltenheit der Erscheinung häufig zur Sprache kommender Gegenstand.

[illegible]

Scheitel) von Braunspath u. s. w.*). Als merkwürdig sind in dieser Hinsicht ferner zu erwähnen gewisse in Finnland vorkommende Glimmerkrystalle, bei denen die den Glimmern eigenen, ungemein deutlichen und leicht entblössbaren Spaltungsflächen so gekrümmt sind, dass sie einer halben Kugeloberfläche gleichen.

Durch solches allmäliges Verschwinden der Ebenflächigkeit der Gestalt und der parallelen Stellung der einzelnen Theilchen, in welche ein einzelner Krystall zerlegt werden kann, findet natürlich ein eben so allmäliger Uebergang statt in solche Massen gleichartiger fester Substanzen, deren äussere Gestalt mehr von äusserlichen Zufälligkeiten (Beschaffenheit und Gestalt des gegebenen Raumes, den sie zu erfüllen gezwungen waren, u. s. w.) und von allgemeinen Cohäsions- und Adhäsionsgesetzen abhängt, als von dem ihnen inwohnenden Bestreben, sich regelmässig zu gestalten (kugelförmige, traubige, tropfsteinartige und andere gerundete Gestalten, plattenförmige Ausfüllungen von blasenartigen Räumen u. s. w.), während ihr Gefüge aus dem divergirend Blätterigen in das divergirend Strahlige und Faserige und wieder in das parallel Faserige übergeht. Findet ein solches Unregelmässiger-Werden in der Stellung der einzelnen Theile bei solchen Massen statt, welche schon in ihrem regelmässigen Zustande als Zusammensetzungen, Verwachsungen u. s. w. zweier oder mehrerer, oft unendlich vieler Krystalle angesehen werden müssen**), und betrifft dabei die allmälige Abweichung von der Regelmässigkeit auch die Art der Zusammensetzung [277] mittelbar oder unmittelbar und vorzugsweise***), so stellt eine solche Mineralmasse sich als eine stängelig oder körnig abgesonderte (oder

---

*) Auch solche Enkrinitenstielglieder, welche einen Cylinder mit einwärts gekrümmter Seitenfläche oder mit bedeutend concaven, gleichsam trichterförmigen, Enden darstellen, besonders die letzteren, zeigen ein Blättergefüge der sie versteinernden Kalkspathmasse, welches so beschaffen ist, dass die durch Spaltung erzeugten Kronrandner regelmässig krummflächige sind.

**) Die Gesetze, denen solche Verwachsungen unterworfen sind, werden in der Folge dieses Artikels noch ausführlicher erläutert werden.

***) Dann behält das einzelne, eine unregelmässige stängelige oder plattenförmige Gestalt oder auch ein grösseres oder kleineres, scheinbar gesetzlos gestaltetes, Korn darstellende Krystallindividuum in seinem Innern noch den regelmässigen Bau und ist in ebenen Richtungen auf gewöhnliche Weise spaltbar, wie z. B. stängeliger Kalkspath.

krystallinisch körnige) dar, an welcher die Absonderungsflächen theils eine besonders leichte Trennung gestatten, wie bei mancher derartigen Kalkspathmasse, bei manchem Amethyst, theils nicht, wie bei sogenanntem carrarischen Marmor, bei manchem krystallinisch stängeligen Quarze, der Gangklüfte im Gebirgsgestein erfüllt u. s. w. Auf dieser verhältnissmässig leichtern Trennbarkeit beruht vorzüglich der Unterschied zwischen der Art der Zusammensetzung, welche man gewöhnlich körnig abgesondert nennt, und jener, welche man als ein krystallinisch körniges Gefüge zu unterscheiden pflegt.

Dass auch durch stängelige Zusammensetzung mehrerer Individuen zu einer grösseren Masse fester Substanz ein sehr allmäliger Uebergang in solche Massen stattfindet, die aus geraden oder gekrümmten, divergirenden oder parallelen Fasern bestehen, zeigt sich unter andern sehr deutlich an den hierher gehörigen Arten des Vorkommens von Arragon.

Mit dem krystallinisch grosskörnigen Gefüge ist verwandt die Art des Gefüges, welches grössere geschmolzene Metallmassen nach der Abkühlung annehmen, wie dieses am leichtesten bei Zink, Wismuth u. s. w. beobachtet werden kann, indem auch hier gewöhnlich grössere Theile der Masse sich neben einander befinden, die, wenn sie einander in ihrer Ausbildung nach aussen hin nicht beschränkt hätten, zu einzelnen grösseren Krystallen geworden sein würden, wie sie dieses durch ihr Gefüge beurkunden. Aus dem krystallinisch kleinkörnigen Gefüge zeigt sich ein ununterbrochener Uebergang in das Dichte, wobei die einzelnen Körner oder Theilchen unmessbar klein werden. Findet hierbei eine leichte Trennbarkeit, ein deutlicheres Abgesondertsein der einzelnen pulverförmigen Theile statt, so ist das Gefüge erdig (wie bei Kreide, Bergmilch u. s. w.). Dem erdigen Gefüge zunächst steht endlich die Pulverform.

[278] Auf eine sehr augenfällige Weise giebt sich oft das Dasein von Durchgängen sowohl, als auch von Zusammensetzung aus ungleichartig gestellten Theilen zu erkennen beim schwächeren oder stärkeren Erhitzen, beim Einwirken von Säuren, von Wasser und andern Auflösungsmitteln. So zeigt z. B. der Apophyllit ein Entblättern oder Zerblättern, gemäss der sehr deutlich in ihm vorhandenen Durchgangsrichtung, sowohl beim schwachem Erhitzen vor dem Löthrohre, als auch beim Zusammenbringen mit solchen Säuren, die sein Pulver zu zersetzen im Stande sind. Der Bergkrystall und andere

harte Körper werden geglüht und zum Theil in Wasser gelöscht, um die Spaltung zu erleichtern oder zu befördern. Dasselbe geschieht bei dem Klüben oder Cliven (*cliver*) des Diamants durch die Diamantschleifer, wenn sie unreine Theile desselben abspalten wollen. Bleiglanz, Kochsalz und andere krystallisirte Substanzen zerknistern häufig, wenn man sie rasch erhitzt, und zerspringen in der Richtung ihrer Durchgänge u. s. w.

Bereits halbentblösste, aber noch nicht sichtbare, den Durchgängen parallele Spalten in durchsichtigen Krystallen (besonders in Edelsteinen) entdeckt man öfters dadurch, dass man sie erwärmt in eine Flüssigkeit legt, deren lichtbrechende Eigenschaft beträchtlich verschieden ist von der des Krystalls. Einsaugung der Flüssigkeit macht die Spalte sichtbar*). Oft giebt sich die Lage vorhandener Durchgangsrichtungen sowohl, als auch jene vorhandener Zusammensetzungsrichtungen zu erkennen durch oberflächliche erhabene und vertiefte Streifung auf den Krystallflächen oder Bruchflächen u. s. w. Oft auch werden solche Streifen, die von der Beschaffenheit des innern Baues Kunde geben, erzeugt durch oberflächliche Einwirkung von Auflösungsmitteln, indem auch gegen chemisch oder mechanisch wirkende Auflösungsmittel die geometrisch verschiedenwerthigen Theile der Krystalloberfläche einen verschieden grossen Widerstand ausüben. So z. B. zeigt Quarz, der schmale Gebirgsklüfte ausfüllt, durch blosses Zerbrechen oder Zerschlagen sein im hohen Grade krystallinisches, stängeliges Gefüge meistens nicht, wohl aber lässt er es wahrnehmen, wenn er während einer geraumen Zeit der [**279**] Einwirkung einer Dachtraufe ausgesetzt war oder wenn er, in einem Kieselschiefer oder Grauwackenschiefergeschiebe enthalten, mit diesem die Einwirkung des Flusswassers erlitten hat. Eben so zeigen geschmolzene Metalle aussen eine glatte Oberfläche; wenn sie aber in ganzen Stücken der Einwirkung einer Säure ausgesetzt werden, welche sie auflösen kann, und man die Einwirkung der Säure unterbricht, so erscheinen meistens Streifen von verschiedener Richtung, so dass verschiedene Winkel dadurch gebildet werden, während in vielen Fällen parallel jeder solchen Richtung mehrere, oft sehr viele Streifen

*) Auf solcher Einsaugung beruht, wenigstens zum Theil, auch die durch Kunst hervorgebrachte Färbung mancher Edelsteine, Zoolithe u. s. w. durch Juwelen- und Mineralienhändler.

liegen. Da nun diese Streifen in der Regel als mit Kanten von Krystallgestalten, vorzüglich aber von Theilungsgestalten, parallel liegend betrachtet werden können*), so wird durch sie und durch die von ihnen gebildeten Winkel in manchen Fällen eine Muthmaassung begründet über die Beschaffenheit der von Durchgangsebenen eingeschlossenen Theilungsgestalten des Metalls, selbst wenn die Theilung auf mechanischem Wege nicht möglich sein sollte. Als die interessantesten hierher gehörigen Beispiele sind aufzuführen die Ergebnisse der von *v. Widmanstädten***) angestellten Aetzversuche auf Meteoreisenmassen mittelst Salpetersäure. Die bei diesen Versuchen erzeugten Streifen deuteten auf den 8flächner als die entsprechende Theilungsgestalt. Das krystallinische Gefüge der Verzinnung des weissen Eisenbleches, welches ähnlich ist dem des Fenstereises***), wird gleichfalls durch solches Aetzen kenntlich gemacht und auf diese Weise der (wegen einiger Aehnlichkeit mit dem Seidenzeug, welches Mohr genannt wird) sogenannte Metallmohr (moirée metallique) erzeugt.

Ganz besonders gross scheint ferner der Einfluss der Lage der Durchgänge auf die Art, wie die Elasticität in krystallisirten Körpern sich äussert, indem von der Lage der Durchgänge [280] die Lage der verschiedenwerthigen Elasticitätsaxen abhängt. *Savart*†) nämlich hat dadurch, dass er kreisförmige Platten aus Holz, die in verschiedenen, zweckmässig gewählten, Richtungen in Beziehung zur Lage der Jahrringe zum Theil aus dünneren Aesten und zum Theil aus dicken Stämmen nahe an der Rinde (wo für kleine Stücke die Jahrringe fast eben und parallel sind) geschnitten waren, in tönende Schwingungen versetzte und Klangfiguren auf ihnen erzeugte, die

---

*) Man kann gewissermaassen sagen: die Kanten des Krystalls, welche beim Entstehen desselben im Allgemeinen sich früher auszubilden scheinen, als die von ihnen eingeschlossenen Flächen, werden durch Einwirkung von Auflösungsmitteln auch später zerstört, als die Flächen.

**) *v. Schreiber*'s Beiträge zur Geschichte und Kenntniss meteorischer Stein- und Metallmassen. S. 70.

***) Vergl. *Hessel* über Eiskrystalle und über die Natur des Fenstereises in *Kastner*'s Archiv.

†) Es möge hier genügen, durch die wenigen im Text gegebenen Andeutungen der *Savart*'schen Lehre auf die Wichtigkeit derselben für die Krystallkunde aufmerksam gemacht zu haben. Vollständig ist sie wiedergegeben in *Poggendorff*'s Annalen XVI. 206 und 248.

Veränderungen kennen zu lernen gesucht, welche gewisse zusammengehörige Klangfiguren erleiden, je nachdem die Kreisfläche der schwingenden Platte als eine, zu den verschiedenen in dem Holze unter den gewählten Bedingungen leicht erkennbaren, von der Lage der Fasern abhängigen Axen der grössten, mittlern und kleinsten Elasticität auf verschiedene Art geneigte, Schnittebene sich verhielt, wobei er zugleich die Höhe und Tiefe der entsprechenden Töne als vorzüglich wichtig berücksichtigte, und hat dann, nachdem er hierbei zu wichtigen Ergebnissen gelangt war, seine Methode angewandt auf kreisförmige, aus grösseren Krystallen auf gleichfalls zweckmässig bestimmte Weise geschnittene, ihrer Lage nach in Beziehung zum Axensysteme genau bekannte, Platten von Mineralien. Es ergab sich, dass auf diesem Wege die wichtigsten Elasticitätsaxen eines Krystalls (von Quarz, Spatheisenstein u. s. w.) sich als ihrer Zahl und Lage nach von dem Familien- und Artencharakter der Krystallreihe, die der Substanz eigen ist, *vorzüglich aber von der Lage der Durchgangsrichtungen* bedingt, leicht erkennen lassen, indem sie ihrer Richtung nach mit vorzüglich wichtigen geometrischen Axen des Krystalls zusammenfallen, dass also umgekehrt durch die in Rede stehenden Untersuchungen über die Lage der Elasticitätsaxen Aufschluss erhalten wird über den Familien- und Artencharakter der Krystallreihe und über die Lage der Durchgangsrichtungen.

10) Wenn man diejenigen Fälle ausnimmt, in denen bei dem Zusammengewachsensein zweier oder mehrerer vollständig oder unvollständig ausgebildeter Krystalle an einzelnen Stellen, da [281] wo die Oberfläche des einen Krystalls mit der des andern zusammentrifft, einspringende, rinnenartige Kanten entstehen, so gehören bei Krystallen die einspringenden Kanten und folglich auch die trichterartig vertieften Ecken zu den Seltenheiten, ja man kann, den bisherigen Erfahrungen zu Folge, dergleichen Krystalle stets für solche ansehen, die in ihrer Ausbildung gestört wurden und darum unvollkommene Krystallgebilde genannt werden können. Hierher gehören die Würfel mit trichterartig vertieften Flächen (6×4 wandige Keilflächner mit einem Axenverhältnisse, in welchem die 4gliedrige Axe kleiner als $R \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, wenn R die 2gliedrige Axe bedeutet) beim Kochsalz, beim Wismuth, das nach dem Schmelzen krystallisirt, u. s. w. Wenn daher eine einzelne Krystallgestalt Flächen verschiedener Arten, d. h. verschiedenen

Werthes hat, also eine zusammengesetzte Krystallgestalt (Combinationsgestalt) ist, an welcher die Flächen zweier oder mehrerer einfacher Gestalten (sie seien ringsum endlich begrenzt oder nicht) vorhanden sind, so können die Flächen jeder einzelnen nur so weit Theile der Begrenzung des Krystalls sein, bis sie mit den ihnen zunächst liegenden Flächen anderer Arten in Kanten oder Ecken zusammentreffen. Wenn man daher zwei Krystalle hat, welche mit einander in Beziehung auf ihre Form so weit übereinstimmen, dass alle Flächenarten des ersten auch am zweiten in denselben entsprechenden Abständen vom Mittelpunkte vorhanden sind, während der 2te noch eine Flächenart mehr besitzt als der erste, so wird, wenn man beide mit einander vergleicht, der letztere das Ansehen haben, als ob er aus dem ersten dadurch entstanden wäre, dass an diesem gewisse Theile hinweggeschnitten (abgestumpft) scheinen. Es ist daher, in manchen Fällen wenigstens, nicht unvortheilhaft, von der eben angedeuteten Vorstellungsweise Gebrauch zu machen, aus einer Gestalt durch solches Hinwegschneiden von Theilen andere Gestalten sich zu bilden und die so von einander abgeleiteten Gestalten zu vergleichen mit den ihnen entsprechenden Krystallgestalten. Die gebräuchlichen Ausdrücke Abstumpfung, Zuschärfung und Zuspitzung, wovon der 2te sich auf zwei, der dritte auf mehr als zwei Schnittflächen bezieht, deren jede allein den fraglichen Theil abstumpfen würde, sind deshalb nicht unpassend, um eine mehr oder weniger genügende Vorstellung von der Verwandtschaft zweier Krystallgestalten zu geben, besonders dann, wenn die Theile, an welchen, und die Art, wie [282] die Abstumpfung stattfinden muss, auf mathematisch bestimmte Weise angegeben wird. Die verschiedenen Mittelkrystalle zwischen dem Würfel und dem 12-Rautenflächner können z. B. auf diese Weise angesehen werden, als seien sie ihrer Form nach gleich mit Gestalten, welche man erhalten würde, wenn man an einem Würfel die Kanten oder an einem 12-Rautenflächner die 4gliedrigen Ecken regelmässig, d. h. so, dass man das Gleichwerthige als gleichwerthig berücksichtigt, mehr oder weniger tief, abstumpfte u. s. w.

11) Beim Zusammengewachsensein zweier oder mehrerer Krystalle einer und derselben Substanz von einer und derselben Form findet meistens eine eigenthümliche Gesetzmässigkeit statt, und solche Zwillings-, Drillings-, Vierlings- u. s. w. Bildungen sind in der Regel keineswegs bloss zufällige

Erscheinungen. Nur selten findet ein blosses Aneinandergewachsensein zweier Krystalle statt, ohne dass der eine Krystall, eben durch die Berührung, den andern in seiner Ausbildung gehindert hätte. Meistens hat bei dem Wachsthume der beiden Krystalle der eine nur diesseits der Berührungsfläche und der andere nur jenseits derselben sich vergrössern und ausbilden können; daher ist die Erscheinung oft so, als ob bloss 2 Krystallhälften oder überhaupt Theile von Krystallen zusammengewachsen wären. Man unterscheidet Zwillinge, bei denen die Zusammensetzungsfläche eine einzige Ebene ist (Nebenzwillinge), und solche, an welchen sich beide Krystalle in mehr als einer Ebene oder auch in einer unregelmässigen Fläche berühren (Durchwachsungen). Fällt bei Durchwachsungen der Mittelpunkt des einen Krystalls mit dem des andern zusammen, so nennt man sie am füglichsten Kreuzzwillinge.

Man erkennt Zwillinge u. s. w. theils daran, dass die Spaltungsrichtungen der einen Zwillingshälfte, wenn sie geneigt sind gegen die Zusammensetzungsfläche, oft sich nicht in der andern Zwillingshälfte fortsetzen, theils daran, dass sie meistens einspringende Kanten zeigen, theils an der deutlich sichtbaren Zusammensetzungsfläche u. s. w. Jede Zwillingsbildung lässt sich (wie *Mohs* zuerst folgerichtig durchgeführt hat) so darstellen, dass man zwei gleiche Krystalle zuerst in paralleler Stellung mit dem einen der im Zwillinge verbundenen Krystalle sich denkt und dann den einen um eine bestimmt anzugebende, von der Beschaffenheit des Zwillings abhängende Axe dreht, so weit, bis [**283**] jeder ausserhalb dieser Axe liegende Punkt desselben einen Bogen von 180 Graden beschrieben hat; jeder der beiden einzelnen Krystalle erhält dadurch die Stellung des ihm entsprechenden Zwillingstheiles. Man hat daher die Nebenzwillinge, bei denen dieses Gesetz der Halbumdrehung am augenfälligsten war, mit dem Namen *Hemitropieen* belegt. Da aber, besonders bei dem Nebeneinandergewachsensein, die Art der Zusammenfügung in Betracht kommt, so ist noch die Zusammensetzungsfläche anzugeben.

Da der Zwilling ein aus zwei einzelnen Theilen bestehendes neues Ganze, eine neue Gestalt ist, so kommt auch die Beschaffenheit des Strahlen- oder Axensystems in Betrachtung, welches dieser Gestalt eigen ist. Bei Nebenzwillingen hat jeder der beiden verbundenen Theile die Bedeutung einer Hälfte der ganzen Zwillingsgestalt, hat gleichsam aufgehört,

eine Einheit für sich zu sein; daher hat die auf die Zusammensetzungsfläche senkrechte Axe für jeden der beiden einzelnen Theile die Bedeutung einer ungleichendigen Axe. Für den ganzen Zwilling aber ist diese Axe, den bisherigen Erfahrungen zufolge, stets eine gleichendige. Sie heisse Nebenzwillingsaxe. Bei weitem am häufigsten ist die Nebenzwillingsaxe im ganzen Zwillinge eine gleichstellig 2endige
Fig. 340. Axe. So ist der beim Magneteisen z. B. vorkommende Nebenzwilling, welcher aus zwei (unvollständigen) 8flächnern besteht, eine gleichstellig 2endige 2fach·3gliedrige hauptaxige Gestalt. Eine der gerenstellig 2endigen 2fach 3gliedrigen Axen des 8flächners, wenn er einzeln ist, hat für ihn, als Zwillingshälfte, die Bedeutung einer ungleichendigen 2fach 3gliedrigen Hauptaxe erhalten; die Vereinigung beider Zwillingshälften bewirkt, dass diese auf die Zusammensetzungsebene *abcd* senkrechte Axe für den Zwilling selbst eine gleichstellig 2endige 2fach 3gliedrige wird. Ganz ähnlich verhält sich der erste
Fig. 341. dargestellte Kalkspathzwilling; die für den einzelnen 2×6-flächigen Kronrandner als gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Axe zu betrachtende Hauptaxe ist in jeder Zwillingshälfte ungleichendig geworden, der Zwilling selbst aber ist eine gleichstellig 2endige 2fach 3gliedrige Gestalt, weil seine Nebenzwillingsaxe, welche die Punkte *a* und *b* verbindet, diesen
Fig. 342. erlangten Charakter auf ihn überträgt. Für den zweiten abgebildeten Kalkspathzwilling fällt die Nebenzwillingsaxe in jeder der beiden Zwillingshälften zusammen mit einer Axe, welche im vollständigen [**284**] einzelnen Krystalle eine gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Queraxe sein würde, und ist eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axe. Parallel mit der Linie, welche für den einzelnen vollständigen Krystall die gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Hauptaxe ist, liegt die (in der Zusammensetzungsebene *abcde* durch *d* nach dem Halbirungspunkte von *ab* gehende) ungleichendige 2fach 2gliedrige Axe des Zwillings. Die andere gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axe liegt parallel der Linie, die von *c* nach *e* gehen würde. Jede Zwillingshälfte ist grösser, als die Hälfte des 6flächigen Kronrandners, von welchem sie ein Theil ist.

Fig. 343. Als 4tes Beispiel möge ein Malachit-Zwilling dienen. Denkt man sich die hinter der Zusammensetzungsfläche $\alpha\beta\gamma\delta$ liegende Zwillingshälfte ruhig bleibend, die vordere aber um die auf die Ebene *s* (oder $\alpha\beta\gamma\delta$) senkrechte Nebenzwillingsaxe

gedreht, und zwar so weit, bis jeder bewegliche Punkt einen Bogen von 180° durchlaufen hat, so bilden beide Zwillingshälften in ihrer nunmehrigen Verbindung eine Gestalt, ähnlich dem einzelnen entsprechenden Malachitkrystalle, dessen parallel mit $\alpha\delta$ liegende Hauptaxe eine gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige ist und bei welchem auch die auf s senkrechte Queraxe denselben allgemeinen Charakter besitzt; im Zwillinge aber ist die auf s senkrechte Nebenzwillingsaxe eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige und die parallel mit $\alpha\delta$ liegende Axe ist eine ungleichendige 2fach 2gliedrige u. s. w.

Die Abbildung eines der beim Albit vorkommenden Zwillinge stellt den Fall dar, in welchem die auf die Zusammensetzungsfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ senkrechte Nebenzwillingsaxe eine gleichstellig 2endige 1fach 1gliedrige ist, wobei also jede in $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ liegende Axe (folglich auch die mit $\beta\gamma$ parallele) eine ungleichendige 1fach 1gliedrige ist, während bei dem einzelnen vollständigen Krystalle jede denkbare Axe eine gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige ist. Fig. 344. Fig. 217.

Sehr selten dürfte bei Nebenzwillingen der Fall vorkommen, dass die Nebenzwillingsaxe eine ebenbildlich gleichendige 1fach $p$gliedrige ist, denn er setzt voraus, dass die Zusammensetzungsebene, als ebene Figur an sich betrachtet, eine 2fach $p$gliedrige sei*), [285] während die auf sie senkrechte Axe eine blosse 1fach $p$gliedrige Axe ist. *Mohs***) führt einen hierher gehörigen Periklinzwilling an. Als eine besondere Merkwürdigkeit ist es daher zu betrachten, dass bei den durch Kalkspathmasse versteinerten Enkriniten-Stielgliedern je zwei an einander sitzende Glieder in Beziehung auf die Durchgänge der Kalkspathmasse zu betrachten sind als Nebenzwillinge, bei denen fast jedesmal die Nebenzwillingsaxe eine ebenbildlich 2endige 1fach 3gliedrige ist***).

Oft zeigt sich wiederholt die Zusammensetzungsart nach dem Gesetze der Nebenzwillingsbildung so, dass an dem 2ten

---

*) Oder allgemeiner: eine 2fach $x \times p$gliedrige, wenn x eine ganze Zahl bedeutet. Es setzt dieses Gleichheit von Winkeln voraus, die ausserdem ungleich sein könnten, ohne dass der Charakter der einzelnen Gestalten ein anderer wäre.

**) Grundriss der Mineralogie II. S. 295. Fig. 90.

***) Vergleiche über diese, auch in anderer Beziehung höchst interessante Erscheinung die Schrift: Einfluss des organischen Körpers auf den unorganischen, nachgewiesen an Encriniten, Pentacriniten und anderen Thierversteinerungen von *Hessel*.

Krystalle ein 3ter u. s. w. anliegt. Dabei sind entweder die Zusammensetzungsflächen einander parallel oder nicht. Sind sie parallel, so besteht das Ganze aus plattenförmigen Theilen, welche, was die Stellung angeht, ausgedrückt werden können durch $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdots$, **wenn die Verbindung der beiden Buchstaben** $a \cdot b$ **oder** $b \cdot a$ **einen Nebenzwilling bedeutet. Zuweilen sind die Platten der einen Stellung dicker als die der andern, welche letztere zuweilen so dünn sind, dass das Ganze auf den ersten Blick das Ansehen eines einzelnen, vollständig ausgebildeten Krystalls hat; bei näherer Betrachtung aber ergiebt sich, dass er in Platten zerschnitten ist, welche von einander getrennt sind durch zuweilen fast unmessbar dünne Lamellen von derselben Substanz, aber von anderer Stellung u. s. w. Dadurch erhält der scheinbar einzelne Krystall auf einigen seiner Flächen ein gewissermaassen gestreiftes Ansehen, was oft seine wahre Beschaffenheit erst verräth. Man beobachtet Gebilde solcher Art, wie sie dieser Zusammensetzung entsprechen, besonders häufig bei Albit, Periklin, Oligoklas, Labrador, Arragon u. s. w. Sind die Zusammensetzungsflächen nicht alle parallel, so entstehen oft Krystallgruppen, welchen, wenn man sie als Ganze für sich betrachtet, gleichfalls Strahlensysteme entsprechen, die von denen des einzelnen Krystalls oft sehr beträchtlich verschieden sind, oft aber auch denselben allgemeinen Charakter besitzen.**

[286] Bei den Durchwachsungen zweier Krystalle, besonders aber bei den Kreuzzwillingen, findet eine weit grössere Mannigfaltigkeit statt hinsichtlich des Strahlen- oder Axensystems, das einer solchen Zwillingsgestalt zusteht. Durchwachsungen zweier 4strahligen Gestalten liefern 8strahlige Zwillingsgestalten, solche zweier 2 $\times$ 4strahligen Gestalten bilden gleichfalls 8strahlige Zwillingsformen, 3gliedrige Gestalten liefern häufig 6gliedrige Zwillinge u. s. w. So stellt
Fig. 256. die Abbildung einen Kreuzzwilling dar, in welchem zwei gleiche 6flächige Kronrandner so mit einander verbunden sind, dass, wenn der eine in erster Stellung sich befindet, der andere die zweite Stellung hat. Die gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Hauptaxe des einen Kronrandners fällt zusammen mit der des andern, und die ihrer Richtung entsprechende Axe *ap* des Zwillings ist gleichstellig 2endig 2fach 6gliedrig.

Fig. 257. Der Staurolith zeigt Kreuzzwillinge verschiedener Art; die der einen Art angehörigen sind, wenn beide Krystalle

gleiche Grösse und einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, gleichstellig 2endige 2fach 4gliedrige Gestalten, deren Hauptaxe der Linie von *d* nach *i* entspricht; jeder einzelne Staurolithkrystall aber ist eine gleichstellig 2endige 2fach 2gliedrige Gestalt.

[XII] Eine eigenthümliche Art des Verbundenseins zweier oder mehrerer Krystalle einer und derselben Substanz ist das *regelmässige Ineinandergewachsensein*, welches entsteht, wenn ein bereits gebildeter Krystall durch neuen Ansatz von Masse seiner Art sich vergrössert. Häufig ist dabei der umschliessende Krystall an Form dem umschlossenen gleich, während in anderen Fällen beide Krystalle zwar in paralleler Stellung des ihnen eigenen Strahlensystems sich befinden, aber verschiedene Gestalt besitzen. Bringt man einen 8flächner von Alaun in eine gesättigte Auflösung, bereitet aus Alaunkrystallen derselben Form, so wird er sich vergrössern ohne Aenderung der Form. Wird aber ein Alaunwürfelkrystall in die Auflösung von 8flächigem Alaun gebracht, so wird der Würfel umhüllt und die Hülle hat die Form des 8flächners. So kennt man Kalkspathkrystalle, Gypskrystalle u. s. w., die einander umschliessen, bei denen die Gestalt des äusseren Krystalls theils gleich ist der des innern, theils verschieden von ihr, selbst solche, bei denen kleinere oder grössere Theile des inneren Krystalls hervorragen aus der äusseren Hülle. Solche Umhüllungen wiederholen sich zuweilen, so dass die 1ste Hülle umgeben ist mit einer 2ten, diese mit einer 3ten und so fort. Die Zusammensetzungsflächen, die auf solche Weise entstehen, sind theils bloss *sichtbar* (wenn die einander umschliessenden Krystalle durch verschiedene Farbe, verschiedene Grade der Durchsichtigkeit u. s. w. sich unterscheiden oder wenn dünne Zwischenlagen fremder Stoffe auf den Verbindungsflächen sich befinden), theils *trennbar*, und dann zeigt die Trennungsfläche des äusseren Krystalls einen vertieften *Abdruck* oder *Eindruck* u. s. w., der einem Theile des eingeschlossen gewesenen Krystalls entspricht (hierher gehört als ausgezeichnetes Beispiel der sogenannte Quarz *capuchonné* von *Beeralstone* in Devonshire, der oft in mehrere solche Hüllen zerlegt werden kann, so wie manches Vorkommen von Epidot aus Arendal, von Wolfram u. s. w.); und wenn die derartige Zusammensetzung eine sehr vielfach wiederholte ist, so entsteht eine eigenthümliche Art von [XIII] Theilbarkeit, die leicht mit einer solchen, von wahren Durchgängen bedingten, verwechselt werden kann, oder doch Täuschung zu verursachen im Stande ist über den Grad der Deutlichkeit der, solchen *unächten Durchgängen* zufällig parallel liegenden, *wahren Durchgänge* (so zeigt der Apatit von Eschwege dergleichen unächte Durchgänge, die sogar so deutlich sind, dass sie dem ganzen Gebilde einen Perlmutterglanz verleihen, welcher sonst dem Apatit fremd ist; Aehnliches kommt bei manchem Kalkspath, beim Sahlait u. s. w. vor). Das einzelne derartige Ueberlagerungsblatt einer Krystallfläche lässt weitere Spaltung in dem Sinne des vermeintlichen Durchganges entweder nicht zu, oder es ist die Spaltungsebene doch nicht von demselben Grade der Vollkommenheit wie die Zusammensetzungsflächen u. s. w., auch erstreckt sich eine solche Zusammensetzungsfläche oft nicht durch den ganzen scheinbar einfachen Krystall hindurch, sondern hört da auf, wo eine Kante des eingeschlossenen Krystalls vorhanden ist. In manchen Fällen aber wird man bloss dadurch zur Vermuthung geleitet, man habe es mit solchen uneigentlichen Durchgängen zu thun, dass durch die Untersuchung anderer Handstücke derselben Masse bekannt ist, dieselbe besitze gewöhnlich nicht eine Spaltbarkeit der Art; doch ist dann die Entscheidung nur eine zweifelhafte.

Die Beobachtungen von *Breithaupt* über die Krystallreihen von Quarz, Idokras, Anatas, Turmalin u. s. w. werde ich demnächst einer besonderen öffentlichen Prüfung unterwerfen und dadurch beweisen, dass ich sie nicht unbeachtet gelassen habe. Eigenthümliche Abtheilungen von Krystallgestalten, die den von uns aufgestellten Arten von Krystallreihen nicht untergeordnet wären, können diese Beobachtungen so wenig begründen, als überhaupt Beobachtungen die Richtigkeit einer rein mathematischen Lehre beweisen oder umstossen können. Dergleichen Krystallreihen würden ebenso gut derjenigen Art, zu welcher sie gehören, untergeordnet werden müssen, als z. B. die Krystallreihe [XIV] des Augits zu der Art der 1gliedrigen Krystallreihen gezählt werden muss, gleichviel ob man bei der Untersuchung des gerengesetzlichen Zusammenhanges der einfachen Gestalten derselben von 3fach rechtwinkligen oder von 2fach rechtwinkligen Maasszellen auszugehen hat.

[286] Krystallbeschreibung.

Jede Beschreibung eines räumlichen Gegenstandes muss, wenn sie auf den Grad von Vollkommenheit Anspruch machen will, der ihr möglicher Weise zustehen kann, den mit den nöthigen Hülfsmitteln und Kenntnissen ausgerüsteten Leser in den Stand setzen, ein dem fraglichen Gegenstande entsprechendes räumliches oder ebenes Abbild (Modell, Zeichnung) beliebig darstellen zu können; denn erreicht sie dieses Ziel nicht, so erzeugt sie auch nur eine unvollkommene Vorstellung von dem Gegenstande. Sie hat aber auch ihr Ziel auf dem kürzesten Wege zu erreichen und muss nicht verwechselt werden mit der ausführlichen Lehre über den Gegenstand. Ist daher bei einem Krystalle die Richtung seiner Flächen in Beziehung zu einem in ihm vorhandenen bestimmten charakteristischen Axen- oder Strahlensysteme das Beständige, das seinen Charakter Ausmachende, und wird es als Grundsatz anerkannt, dass die sämmtlichen Flächen eines Krystalls und einer ganzen Krystallreihe [287] einen gerengesetzlichen Flächenverein bilden, so wird bei der Beschreibung eines Krystalls oder einer Krystallreihe diejenige Methode die zweckmässigste sein, welche diese Verhältnisse, auf die es vorzüglich ankommt, am schnellsten aufzufassen verstattet.

Es dürfte daher bei der Beschreibung eines Krystalls (oder einer Krystallreihe) eine Angabe, aus welcher die Classe, Ordnung, Familie und Art der Krystallreihe erkannt werden kann, in welche er gehört, das erste Erforderniss sein. Ist dann ausgemacht, dass der gerengesetzliche Zusammenhang der verschiedenen Flächenarten einer Krystallreihe, das Ineinandergreifen der verschiedenen Zonen u. s. w. sich am einfachsten aus dem Systeme der Träger dieser Flächenarten erkennen und entwickeln lasse, so muss es am zweckmässigsten sein, die Bestimmung des gerengesetzlichen Zusammenhangs der Träger bei der Krystallbeschreibung zum Grunde zu legen, damit aus dem unmittelbar zu Gebenden das vom Leser selbst zu Findende möglichst leicht gefunden werden könne. Auch ist es von selbst einleuchtend, dass man in dieser Bestimmung von den *einfachen* Zellen auszugehen habe, wenn von 1- und 2maassigen oder 1- und 3maassigen oder von 4axigen Gestalten die Rede ist.

Eine zweckmässige und kurzgefasste Beschreibung einer

Krystallreihe hat daher folgende Angaben (von denen einige, wenn sie sich von selbst aus den andern bestimmen, weggelassen werden können) zu enthalten:

1) den Namen der Art der Krystallreihe;

2) die Stellung der Maassstrahlen a, R, r in der als erste betrachteten Zelle, angedeutet durch Zusammenstellung der Buchstaben $\overset{a}{R\,r}$ oder $\overset{a}{r\,R}$, welche dem Bilde der äusseren Flächenseite einer 1fach 1gliedrigen Fläche in dieser Zelle entspricht;

3) die ebenen Winkel (und als nützliche Zugabe die Neigungswinkel) der Wände der 1sten Trägerzelle ($a \parallel R$, $a \parallel r$, $R \parallel r$, $aR \parallel ar$, $aR \parallel Rr$, $ar \parallel Rr$);

4) das Verhältniss der ursprünglichen Maasse für die 3 Messungsträger a, R, r in Zahlen ausgedrückt, welche rational oder irrational sein können, je nachdem sie aus der Beschaffenheit der Gestalt sich ergeben*);

[288] 5) die tabellarische Aufzählung der Maasszählerverhältnisse in den Zeichen der den beobachteten Flächenarten entsprechenden Trägerarten. Findet der Fall statt, dass nicht alle Zellen sich gleichwerthig verhalten, so ist bei dieser Aufzählung die Unterabtheilung nach den Zellenarten zu wahren, so dass die Maasszählerverhältnisse für die einer und derselben Zellenart angehörigen Träger zusammengestellt werden in einer Columne, welche als Ueberschrift das besondere Zeichen der Zelle erhält, in welcher jene Träger auftreten. Dabei ist es bequem, nebenher jede Trägerart mit einem besondern einzelnen Buchstaben zu bezeichnen (der sich leichter, als jedes noch so einfache aus mehreren einzelnen Theilen zusammengesetzte Zeichen, in etwaigen Abbildungen auf das Bild der getragenen Flächen einschreiben lässt) und diesen als Stellvertreter für eine nicht ausführbare wörtliche Benennung der einzelnen, ihrer Richtung nach durch das gegebene Zeichen bestimmten, Träger- oder Flächenart zu betrachten. Dieser dient zugleich, um auf etwa vorhandene

*) Für die 1- oder 3maassigen Gestalten ist $R : r = \sqrt{3} : 2$ oder $= 2 : \sqrt{3}$, für die 1- und 2maassigen Gestalten $R : r = 1 : \sqrt{2}$ oder $= \sqrt{2} : 1$, nur bei den 1- und 1maassigen findet mannigfache Verschiedenheit hinsichtlich auf das Verhältniss $R : r$ statt. Dass eine Angabe von Winkeln, aus welchen mittelbar der Werth des Verhältnisses $a : R : r$ erkannt werden kann, gleichfalls genügt, bedarf der Erinnerung nicht.

beigefügte oder in anzuführenden Werken befindliche Abbildungen zu verweisen, wenn auf diesen die Flächen durch solche Buchstaben bezeichnet sind.

Eine solche tabellarische Zusammenstellung würde daher bei einer 3gliedrigen Krystallreihe*) z. B. folgende Form haben:

	a,	R,	r		$\pm a$,	$\pm R$,	r		$\pm a$,	$\mp R$,	r
o	1	0	0	P	1	1	0	g	2	1	0
c	0	1	0	m	1	4	0	f	1	2	0
u	0	0	1	λ	1	1	1	x	2	4	3.
				r	1	1	2				
				y	1	1	4				

Daran kann sich füglich reihen die Angabe von einem oder mehreren der 6 Winkel, welche jeder fragliche solche Träger [289] bildet mit a, mit R, mit r, mit der Ebene aR, mit ar und mit Rr, der Zelle, in der er liegt**).

6) Angabe etwaiger besonderer Eigenthümlichkeiten und Kennzeichen einzelner Flächenarten. Dahin gehört Art und Grad der Spaltbarkeit, Verschiedenheit an Härte, Gestreiftsein, Rauhigkeit, Glätte, Stärke und Art des Glanzes u. s. w.

7) Aufzählung der beobachteten Verbindungen von Flächenarten (der Combinationsgestalten) durch Zusammenstellungen der vollständigen Zeichen ihrer Träger oder der die Stelle des Namens vertretenden Buchstaben in solcher Ordnung, dass der Träger der gewöhnlich den grössten Theil der Krystalloberfläche einnehmenden Flächenart vor dem der minder ausgedehnten aufgeführt wird, oder auch in solcher Ordnung, dass man von den bei senkrechter Hauptaxe steileren zu den flacheren, oder umgekehrt, fortschreitet.

8) Angabe etwa beobachteter Zwillingsbildungen u. s. w.

9) Angabe anderweitiger physikalischer und chemischer Eigenschaften und Verhältnisse der beobachteten Krystalle

---

*) Die Tabelle bezieht sich auf mehrere der wichtigsten Kalkspathkrystalle, deren einige auch durch die Abbildungen Fig. 246 A, B, C versinnlicht sind. Es ist nämlich $A = m \cdot o$ und $B = c \cdot P$ und $C = y \cdot r \cdot P \cdot c \cdot m$.

**) Statt dieser Winkelangaben kann, da wo die Flächenart eine ringsum endlich begrenzte Gestalt bildet, die Angabe der Grössen der Kanten dieser Gestalt stehen. Jene Angabe ersetzt diese stets, diese aber ist nicht überall anwendbar.

(besonders Härte, specifisches Gewicht, Verhalten gegen das Licht, gegen chemische Prüfungsmittel, Ergebniss der chemischen Zerlegung u. s. w.), sofern dieselben dienen, den Leser die Einerleiheit der beschriebenen Krystalle mit solchen, die er selbst zu beobachten Gelegenheit hat (in materieller Hinsicht), erkennen zu lassen, und ihn daher in den Stand setzen, die Richtigkeit der mitgetheilten Angaben zu prüfen. Es ist deshalb oft manche unbedeutend scheinende geschichtliche Angabe (über Bereitungsart, Vorkommen u. s. w.) von nicht geringer Wichtigkeit.

Das Wichtigste aus der Geschichte der Krystallkunde.

1. Die sorgfältigere Beachtung der Krystallformen begann erst mit *Werner* und *Romé de l'Isle*. Der erstere besonders suchte den Zusammenhang der Krystallformen einer und derselben krystallisirten Substanz dadurch auszudrücken, dass er die einen [**290**] ansah als ähnlich solchen Gestalten, welche durch Abstumpfungen, Zuschärfungen oder Zuspitzungen einzelner Theile anderer Gestalten entstehen, während die andern mit den dieser Bearbeitung unterworfenen Gestalten selbst übereinstimmten. Einige einfache oder nicht sehr zusammengesetzte Gestalten wurden nämlich bei dieser Ableitung zum Grunde gelegt und hiessen Grundgestalten. Als solche Grundgestalten wurden betrachtet: 1) das *Hexaeder*, 2) die *Pyramide*, 3) die *Säule*, 4) die *Tafel*, 5) die *Linse*. Die Pyramiden, die Säulen und Tafeln wurden wieder unterschieden in dreiseitige, vierseitige u. s. w. Aus einer bereits abgeleiteten Gestalt wurden durch neue Abstumpfungen abermals andere Gestalten hergeleitet u. s. f., während wieder mehrere verschiedene Grundgestalten bei einer und derselben Krystallreihe angenommen wurden*). *Romé de l'Isle* machte sich verdient durch viele, mit dem zu seiner Zeit erfundenen Handgoniometer angestellte Winkelmessungen an Krystallen.

*) So die Krystallbeschreibungen in den aus der *Werner*'schen Schule hervorgegangenen Lehrbüchern der Mineralogie, z. B. im Handbuche der Mineralogie von *C. A. S. Hoffmann*, fortgesetzt von *A. Breithaupt*.

2. Als Gründer der wissenschaftlichen Krystallkunde ist ohne Widerrede *Hauy* *) zu betrachten, ja man kann sagen, dass er nicht nur den Grund zu dem Gebäude dieser Wissenschaft gelegt, sondern vielmehr das ganze Gebäude in einer nicht unzweckmässigen Beschaffenheit dargestellt habe, und dass die Arbeiten der neueren Krystallographen, was das eigentlich krystallometrische und krystallonomische Fach betrifft, nur als neuer Anstrich oder als theils mehr, theils minder wichtige Verschönerungen und als Ausbau einiger nicht vollendeten Theile des von ihm gelieferten Gebäudes zu betrachten sind. Er war der Erste, welcher durch seine Lehre vom Ebenmaassgesetze bei der Krystallbildung den allgemeinen Charakter der Arten von Krystallreihen andeutete, indem er nachwies, dass zum Würfel [291] bloss solche Gestalten gehören, wie der 8flächner, der 12-Rautenflächner u. s. w., welche nach unserer Ordnung den 3gliedrig 4axigen Gestalten beizuzählen sind, dass dasselbe gelte vom 8flächner und wieder eben so vom 12-Rautenflächner, dass mit dem 4flächner bloss andere Gestalten von solcher Beschaffenheit vorkommen, wie die oben mit dem Namen der 3gliedrig 4strahligen belegten u. s. w., dass mit 2 $\times$ 4flächigen Ebenrandnern gerade Säulen mit rautenförmiger oder rectangulärer Basis und andere zusammengesetzte solche Gestalten in Verbindung stehen, welche oben als 2gliedrige Gestalten bezeichnet wurden, dass mit der schiefen Säule mit rautenförmiger oder rectangulärer Basis (prisme oblique à base rhombe ou rectangulaire) und andern solchen Gestalten, die wir zu den 1gliedrigen zählen, nur solche Gestalten bei einer und derselben Substanz zugleich vorkämen, welche in unserer Sprache als 1gliedrige Gestalten benannt werden mussten u. s. w. Da er seine Untersuchungen über alle, ihm während seines nicht kurzen Lebens bekannt gewordenen, Krystalle ausgedehnt hat, so ist zu erwarten, dass ihm auch die meisten der wichtigsten Arten von Krystallreihen bekannt geworden sein werden, und es ist also nicht nöthig, noch mehr Beispiele zum Beleg der ausgesprochenen Behauptung beizubringen.

---

*) Traité de Mineralogie. — Uebersetzung dieses Werkes von *Karsten* und *Weiss* unter dem Titel: Lehrbuch der Mineralogie von *Hauy*. — Tableau comparatif des resultats de la Cristallographie et de l'analyse chimique relativement à la classification des mineraux. — 2te Auflage des Traité de Mineralogie. — Traité de Cristallographie. — Mehrere einzelne Abhandlungen in französischen Journalen.

Er war aber auch zugleich der Erste, welcher den gerengesetzlichen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Flächenarten, die bei einer und derselben Krystallreihe vorkommen, nachwies. Indem er nämlich bei der Betrachtung sämmtlicher Krystalle einer Substanz von einer möglichst einfachen, dem Arten-Charakter der Krystallreihe entsprechenden Gestalt ausging, deren Flächen mit vorhandenen Durchgängen parallel liegen oder bei Abwesenheit von Durchgängen durch anderweitige besondere Wichtigkeit (Häufigkeit des Vorkommens) sich auszeichnen, von einer Urform (forme primitive, *Kernform*), so entwickelte er abgeleitete oder secundäre Gestalten, ähnlich den verschiedenen Krystallen der fraglichen Substanz, dadurch, dass er seine Urform sich wachsend dachte durch allmäligen Ansatz von neuen Lamellen (Ueberlagerungsblättchen) auf die Flächen der bereits vorhandenen Gestalt und diese allmälig angesetzten Lamellen von Seiten oder Winkeln ihrer Grundfläche aus abnehmen (*decresciren*) liess nach bestimmten Gesetzen (*Abnahmegesetze* oder *Decrescenzgesetze*, lois de [292] décroissement) um einfache oder zusammengesetzte Reihen von parallelepipedisch gestalteten subtractiven Massentheilchen (molécules soustractives). So also baute derselbe z. B., wenn die Urform ein Würfel war, aus unendlich kleinen Würfeln (subtractiven Massentheilchen) eine quadratische Lamelle, welche die Höhe eines subtractiven Massentheilchens und die Würfelfläche zur Grundfläche hatte, legte dieselbe auf eine Würfelfläche so, dass sie diese deckte, und nahm dann von jeder der vier Seiten dieser Lamelle eine Reihe von subtractiven Massentheilen weg (die Seite der Fläche eines würfeligen subtractiven Massentheilchens $= 1$ und die der Urform $= x$ gesetzt, würde die Lamelle vor der Abnahme aus x^2 subtractiven Massentheilchen bestehen und nach der Abnahme $= (x-2)^2$ solcher Massentheilchen werden); auf diese erste Lamelle wurde eine zweite ihr gleiche gelegt und abermals an jeder der vier Seiten um eine Reihe subtractiver Massentheilchen verkleinert (so dass sie zuerst $= (x-2)^2$, nach der Abnahme aber $= (x-4)^2$ einzelner subtractiver Massentheilchen war). Dieses wurde fortgesetzt, bis sich auf der Fläche der Urform eine vierseitige Pyramide befand, mit treppenförmigen Seitenflächen. Die Arbeit, auf jeder der 6 Würfelflächen gleichzeitig vorgenommen, verwandelte den Würfel nach und nach in eine Gestalt, welche, wenn man von dem Treppenförmigen ihrer Flächen (bei unendlich kleiner Dicke der Ueberlagerungsblättchen) absieht, ein 12-Rautenflächner ist. Es ist dieses ein Beispiel von einreihiger, von den Kanten ausgehender, Abnahme der Ueberlagerungsblättchen, wenn die sämmtlichen Seiten der Fläche der Urform, auf welcher die Ueberlagerung stattfindet, als Kanten der Urform gleichwerthig sind. Findet diese Gleichwerthigkeit nicht statt, so versteht sich von selbst, dass nur Gleichwerthiges auf gleiche Weise modificirt werden dürfe (eine Lehre, welche *Hauy* das Ebenmaassgesetz bei der Krystallbildung nannte und die er als allgemein gültiges Gesetz betrachtete*), das die Natur bei der Krystallbildung nur in selteneren unbedeutenden Fällen verletze). In anderen Fällen wurden von jedem einzelnen Ueberlagerungsblättchen zwei oder mehrere, den Kanten parallele, Reihen von subtractiven Massentheilchen weggenommen (zwei- [293] oder mehrreihige Breitenabnahme von den Kanten), oder es wurde von jedem, aus zwei oder mehreren einfachen bestehenden, zusammengesetzten Ueberlagerungsblättchen eine einzige, der Höhe nach zusammengesetzte Reihe subtractiver Massentheile abgenommen (zwei- oder mehrreihige Höhenabnahme an den Kanten), oder endlich es fand die Abnahme an jedem, aus zwei oder mehreren einzelnen Lamellen bestehenden, zusammengesetzten Ueberlagerungsblättchen um mehrere Reihen in die Breite statt, so dass also die an einer Seite eines solchen Ueberlagerungsblättchens abgenommene Reihe subtractiver Massentheile eine sowohl nach der Höhe als auch nach der Breite zusammengesetzte war (gemischte Abnahme an den Kanten), z. B. die 3fache Breite und die 2fache Höhe einer 1fachen Reihe von subtractiven Massentheilen besass, und so wurden Flächen secundärer Gestalten erzeugt, die mehr oder weniger stark gegen die Flächen der Urgestalt geneigt waren, je nachdem in der abgenommenen zusammengesetzten Subtractivreihe das Verhältniss der Anzahl von Höhen subtractiver Massentheilchen, aus welcher ihre Höhe bestand, zu der Anzahl von Breitenmaassen solcher Atome, aus der ihre Breite zusammengesetzt war (welches Verhältniss das Abnahmegesetz heisst), einen verschiedenen Zahlenwerth hatte.

Fand die Abnahme der Ueberlagerungsblättchen so statt, dass, wenn man das einfache Ueberlagerungsblättchen in seine

---

*) *Hauy's* Ebenmaassgesetz der Krystallbildung, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von *Hessel.*

parallelepipedischen subtractiven Massentheilchen zerlegt dachte, wodurch folglich die Auflagerungsfläche in (unendlich kleine) Parallelogramme getheilt gedacht wurde, die abgenommene Reihe*) subtractiver Massentheilchen ihrer Längenerstreckung nach parallel mit einer in der Auflagerungsfläche liegenden Diagonale des Subtractivtheilchens war, so hiess die Abnahme eine gewöhnliche einreihige Abnahme am Winkel (der Auflagerungsfläche, welcher Winkel angegeben wurde), indem nämlich hier, bei dem ersten Ueberlagerungsblättchen, der Anfang der Abnahme mit dem im Scheitel des erwähnten Winkels liegenden Subtractivtheilchen gemacht werden musste. Wenn von jedem einfachen [294] Ueberlagerungsblättchen allemal zwei oder mehrere solche Reihen abgenommen wurden, so war dieses zwei- oder mehrreihige gewöhnliche Breitenabnahme am Winkel. Was gewöhnliche Höhenabnahme und gewöhnliche gemischte Abnahme am Winkel sei, ergiebt sich aus dem, was über die derartigen Abnahmen an den Kanten gesagt worden ist.

War endlich die Längenrichtung der abgenommenen Reihe von Subtractivtheilchen parallel mit einer Diagonale der Auflagerungsfläche eines (nach den Richtungen der beiden Schenkel des fraglichen Winkels hin nicht aus gleich grosser Anzahl einfacher Subtractivtheilchen) zusammengesetzten parallelepipedischen Subtractivtheilchens und bestand demnach jede subtrahirte Reihe aus eben solchen zusammengesetzten Subtractivtheilchen, so war die Abnahme eine mittlere Abnahme am Winkel (décroissement intermédiaire), und auch diese war wieder entweder einreihig oder mehrreihig nach der Breite oder mehrreihig nach der Höhe und Breite zugleich (gemischte mittlere Abnahme). Mit der gewöhnlichen nicht einreihigen Abnahme am Winkel auf einer Fläche der Urgestalt war stets als Hülfsabnahme eine mittlere Abnahme der Ueberlagerungsblättchen auf andern Flächen der Urgestalt verbunden.

Die Axenverhältnisse der Urgestalt sowohl, als auch des für eine und dieselbe Substanz unveränderlichen, stets parallelepipedischen, subtractiven Massentheilchens, bei welchem das

*) Da wo diese sich als solche darstellt und ihrer Länge nach aus mehr als einem Subtractivtheilchen besteht, was bei dem ersten einfachen Ueberlagerungsblättchen in dem hier entwickelten Falle nicht stattfindet.

Verhältniss dreier in Betracht kommender Axenlängen stets übereinstimmt mit dem der ihnen parallelen Axen der Urgestalt, wurden von *Hauy* bei jeder Substanz ein für allemal angegeben, Eckpunkte und Kantenlinien jeder Art der in Abbildungen stets beigefügten Urgestalt mit einfachen Buchstaben bezeichnet, und es ward ein Zeichen gebildet, welches bestand aus dem die Stelle des Namens einer Kanten- oder Eckenart vertretenden Buchstaben und aus dem Decrescenzgesetze (Breite zu Höhe $= b : h$ in Form eines Bruches $\frac{b}{h}$ geschrieben), das dem Buchstaben in einer Weise angefügt wurde, welche die Lage der Fläche der Urgestalt, auf der die abnehmenden Ueberlagerungsblättchen sich auflegten, angeben sollte. So z. B. bedeutete G^2 eine zweireihige, von der Kante G ausgehende Breitenabnahme an den Ueberlagerungsblättchen, welche auf einer rechts von der Seitenkante G liegenden Seitenfläche angesetzt wurden; [295] $\overset{\frac{1}{2}}{A}$ war eine zweireihige, vom Winkel A ausgehende Höhenabnahme an den Ueberlagerungsblättchen derjenigen Fläche der Urgestalt, welche in der Abbildung oberhalb des Endpunktes A lag. Bei mittleren Abnahmen musste ausserdem noch die Art der Zusammensetzung des zusammengesetzten subtractiven Massentheilchens angegeben werden nach den beiden in Betracht kommenden Richtungen hin; so war $\overset{1}{A}(B^3 C^2)$ eine mittlere Abnahme an den auf der Ebene der beiden Kantenlinien B und C angesetzten Ueberlagerungsschichten, welche ausging von dem Winkel A und an jedem einfachen Ueberlagerungsblättchen eine Reihe von zusammengesetzten subtractiven Massentheilchen betraf, deren jedes in der Richtung von B dreimal und in der Richtung von C zweimal so lang war, als das einfache. $\overset{\frac{2}{3}}{A}(B^2 C^1)$ war ebenso eine mittlere gemischte Abnahme an einer jeden, über der Ebene BC liegenden, aus drei einfachen Blättchen bestehenden, der Höhe nach zusammengesetzten Ueberlagerungsschicht um zwei Reihen in die Breite, wobei die Subtractivtheilchen in der Richtung von B zweimal so lang, als die einfachen, waren.

Jedes solche Zeichen diente, die Flächenart, welche dadurch hervorgerufen wurde, anzugeben und zu bestimmen. Die Flächen der Urgestalt wurden, wenn sie von dreierlei Art waren, mit den Buchstaben *P*, *M*, *T* (*Pri-Mi-Tif*), oder mit *P* und *M*, wenn sie nur von zwei Arten, oder mit *P*, wenn sie nur von einer Art waren, bezeichnet und diese Buchstaben, wenn die Flächen der Urgestalt nicht verschwunden waren, mit den Zeichen der übrigen Flächenarten eines Krystalls zusammengestellt. Diese Zusammenstellung bildete das Repräsentativzeichen (signe représentatif) der ganzen Gestalt. Auch die Bezeichnung der secundären Flächenarten (auf den Abbildungen) durch einfache Buchstaben wurde in das Repräsentativzeichen mit aufgenommen.

Man sieht leicht ein, dass die durch solche Art von Maurerei entstandenen einfachen Gestalten hinsichtlich auf das Verhältniss ihrer drei wichtigsten Axenarten nach rationalen Maasszählern messbar sein müssen durch die ihnen parallel liegenden Axen des subtractiven Massentheilchens oder, was dasselbe ist, der Urgestalt und dass also hierdurch auf indirecte Weise [296] der gerengesetzliche Zusammenhang der verschiedenen Flächenarten einer Krystallreihe gegeben ist.

Dass die *Hauy*'sche Ableitungsweise der secundären Gestalten zugleich als Erklärung des wirklichen Wachsens und Entstehens der Krystalle gelten soll, ist ohne weitere Auseinandersetzung einleuchtend. Mit dieser Theorie stand dann noch die Idee des integrirenden Massentheilchens in Verbindung, welches, wenn mehr Durchgänge vorhanden waren, als zur Bildung eines Parallelepipeds erfordert werden, durch Zerlegung der Urgestalt gemäss jenen Durchgängen gebildet gedacht wurde und dann entweder die Form einer dreiseitigen Säule oder einer dreiseitigen Pyramide*) (eines sogenannten Tetraeders) hatte, während es ausserdem mit dem parallelepipedischen subtractiven Massentheilchen von gleicher Gestalt war. Dieses integrirende Massentheilchen sollte das nicht weiter theilbare Atom sein, welches bei dem Versuche weiterer Zertheilung nothwendig in die Atome der chemischen Bestandtheile zerfallen musste, aus denen die Substanz, wenn sie nicht selbst ein chemisches Element ist, bestehend gedacht wurde.

Jede Krystallform, sie sei eine einfache oder eine von

*) Der Knoten, welcher darin liegt, dass bei oktaedrischen Urgestalten die Theilung stets sowohl oktaedrische, als auch tetraedrische Formen liefert, wurde durch Vernachlässigung der oktaedrischen Theile beseitigt, und die tetraedrischen Theile wurden als integrirende Massentheilchen angenommen.

mehreren Flächenarten begrenzte, erhielt bei *Hauy* ihren besondern Namen, welcher auf mannigfache Weise gebildet und dem Namen der krystallisirten Substanz als Beiwort hinzugefügt wurde. Solche Namen sind z. B. équiaxe, metastatique, parallélique, binaire, unibinaire, prismé, pyramidé, perihexaèdre, alterne, bisalterne u. s. w.; die Menge solcher Namen ist nicht unbeträchtlich; sie dürften am Besten der Vergessenheit übergeben werden.

Gegen die Methode *Hauy*'s lässt sich, sofern man hier, wie überall, die Atomistik als zulässig erklären muss, wenn man ihr auch nicht gerade huldigt, nur Folgendes einwenden:

1) Sie legt bei der Wahl der Urgestalt einen zu hohen Werth auf die Durchgänge, ohne jedoch, wie es die Consequenz erfordern würde, jedesmal die deutlichsten vorhandenen [**297**] Durchgänge vorzugsweise zu berücksichtigen. Zugleich entsteht in dieser Wahl da eine Unbestimmtheit und Unsicherheit, wo Durchgänge vorhanden sind, welche die Begrenzung verschiedener Gestalten gestatten, die als Urgestalten angesehen werden können u. s. w.

2) Sie hebt aus eben diesem Grunde das Gleichartige verwandter, zu einer und derselben Art gehöriger Krystallreihen nicht scharf und bestimmt genug hervor, indem sie bei zwei Krystallreihen gleicher Art für die der einen Substanz von einer andern Urgestalt ausgeht, als für die der zweiten Substanz zustehende, ja sogar gezwungen ist, für die Ableitung der 3gliedrig 4axigen Krystallgestalten beim Bleiglanz vom Würfel, beim Flussspath vom 8flächner und bei der Blende vom 12-Rautenflächner auszugehen.

3) Die von der parallelepipedischen Form abweichenden Urgestalten erschweren unnöthiger Weise die ganze Arbeit; denn wenn man, den Werth der Durchgänge zwar nicht verkennend, aber ihre Berücksichtigung nicht für wichtiger haltend als nöthig ist, überall von parallelepipedischen Urgestalten ausgeht, so erhält man eine atomistische Darstellung, welche genügt und in mehrfacher Hinsicht der *Hauy*'schen vorzuziehen ist.

3. Im Geiste der *Hauy*'schen Schule haben ausgezeichnete einzelne Arbeiten geliefert: *Monteiro*, *Bournon*, *Cordier*, *Soret*, *Levy*, *Brooke* und Andere.

4. Unter den Deutschen hat *Weiss**) zuerst den von *Hauy*

*) Dynamische Ansicht der Krystallisation von *Ch. S. Weiss*, in

gebahnten Weg betreten und auf gründliche Weise das Studium der Krystallographie betrieben. Er hat zuerst das Bedürfniss gefühlt, die zu einerlei Art gehörigen Krystallreihen zusammenzustellen [298] und in höhere Classificationsstufen (ähnlich unseren Classen, Ordnungen, Familien und Arten von Krystallreihen) zu vereinigen. Die ihm eigenthümlichen Benennungen der wichtigsten Arten von Krystallreihen sind oben bereits erwähnt. Vorzügliche Verdienste hat sich derselbe um die erste vollständigere Berücksichtigung und Aufstellung der Gesetze der Zonenlehre erworben. Als Hauptbedingung des vollständigen Bekanntseins der gerengesetzlichen Beziehungen einer Flächenart (die in einer Krystallreihe als neubeobachtete auftritt) zu den übrigen bereits bekannten Flächenarten wurde von ihm zuerst mit Bestimmtheit die Forderung ausgesprochen, dass jede solche Fläche parallel liegen müsse mit zwei bereits bestimmten, kantenthümlichen Strahlen, d. h. dass sie in zwei bereits bekannte Zonen gehören müsse. Er war ferner der Erste, welcher die Wichtigkeit der Axen vorzüglich beachtete und eine auf die Axen gegründete Bezeichnung der Krystallflächen einführte. Seine Bezeichnungsweise stimmt, wenn man von dem Ausserwesentlichen (nämlich der Einschliessung in rechtwinklige Parallelogramme oder Dreiecke u. s. w.) absieht, bei den 1- und 3maassigen Gestalten mit der Bezeichnung der Flächen durch die kantenthümlichen Maasse der doppelten Zellen überein, bei sämmtlichen übrigen Familien von Krystallreihen aber stimmt sie mit der Flächenbezeichnung durch die Bestimmungsstrahlen der 3fach rechtwinkligen Zellen und durch deren Maassverhältniss, sofern sie kantenthümliche Strahlen sind, überein, so dass z. B., wenn bei dem Zinnerz-
Fig. 239. krystall $a : R$ (nach uns) $= c : a$ (nach *Weiss*) und die

---

der Uebersetzung des Lehrbuchs der Mineralogie von *Hauy* I. S. 365 ff. De indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali. Lipsiae 1809. Mehrere in den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften und in dem Magazin der Berliner naturforschenden Freunde zerstreute wichtige Abhandlungen über Feldspath, Gyps, Epidot, Zwillinge beim Quarz, Chabasit, Eisenkies u. s. w. Ueber eine ausführlichere, für die mathematische Theorie der Krystalle besonders vortheilhafte Bezeichnung der Krystallflächen des sphäroedrischen Systems. Betrachtung der Dimensionsverhältnisse in den Hauptkörpern des sphäroedrischen Systems und ihrer Gegenkörper, in Vergleich mit den harmonischen Verhältnissen der Töne. Bezeichnung der Flächen eines Krystallisationssystems u. s. w.

Flächen $s = [1a,\ 1R,\ 1R] = \boxed{c : a : a}$ nach *Weiss* sind, auch die Flächen $z = [1a,\ \frac{1}{3}R,\ \frac{1}{2}R]$ bei *Weiss* $= \boxed{c : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a}$ sein müssen u. s. w.

5. Nach der Methode von *Weiss* wirkend sind schriftstellerisch aufgetreten *G. Rose*, *Kupffer*, *Köhler* u. s. w.

6. Eine neue Bahn hat sich *Neumann* *) eröffnet. Ihm verdankt die ganze Trägerlehre und die Lehre von der Zeigerfläche einen grossen Theil ihrer Begründung. Er hat sich nämlich nur [299] auf jene Fälle beschränkt, in denen der gerengesetzliche Verein der kantenthümlichen Strahlen mit dem der Träger zu einerlei grösserem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehört. Da er die *Weiss*'sche Flächenbezeichnung zum Grunde legt, so ist die von ihm gegebene Bezeichnung der Trägerenden (*Flächenorte* von ihm genannt) auch bei den 1- und 3maassigen Gestalten diejenige, welche zu der Trägerbezeichnung durch 2fach rechtwinklige Zellen, deren 3ter Winkel $= 120^{\circ}$ ist, gehört, während sie bei den übrigen Krystallgestalten eine solche ist, welche auf 3fach rechtwinklige Trägerzellen sich bezieht.

7. Mit den Arbeiten *Neumann*'s auf das Innigste verwandt sind die eben so classischen Arbeiten *Grassmann*'s**). Ohne, wie er selbst gesteht, die Arbeiten von *Weiss* und, wie zugleich aus der Arbeit hervorgeht, ohne die von *Neumann* zu kennen, hat auch er die Trägerlehre auf eine sehr einfache fassliche Weise bearbeitet, und obgleich er die Lehre von der Zeigerfläche nicht benutzt, während bei *Neumann* alles auf sie bezogen wird, so ist doch nur *der* wesentliche Unterschied zwischen beiden vorhanden, dass *Grassmann* bei den 1- und 1maassigen Gestalten sich nicht bloss auf diejenigen Fälle beschränkt, in welchen von 3fach rechtwinkligen Zellen die Rede ist. Man kann sagen, *Grassmann* combinire, während *Neumann* zeichnet. Da oben bereits das von beiden Gelehrten Gegebene zu grösserer Vollständigkeit ergänzt und in Zusammenhang mit der gesammten Strahlenlehre gesetzt ist, so dürfte weitere Ausführlichkeit hier überflüssig sein.

---

*) Beiträge zur Krystallonomie von *Neumann* I. Heft. (Schade, dass diese ausgezeichnete und gründliche Arbeit, der nur mehr Einfachheit und Klarheit des Vortrags zu wünschen wäre, nicht rasch fortgesetzt wird.)

**) Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre I. Heft.

8. **Abweichend von diesen sämmtlichen Methoden ist jene von *Mohs**). Auch er hat, geleitet von demselben feinen mathematischen Tacte, wie *Weiss*, und gleich diesem nur die Hauptpunkte, worauf es anzukommen scheint, berücksichtigend,** die Krystallreihen in Classificationsstufen höherer und niederer Art vereinigt. Seine Eintheilung stimmt daher, gleich der *Weiss*'schen, mit der von uns gegebenen (auf vollständige Beachtung [300] der Beschaffenheit der den Gestalten eigenen Axen- oder Strahlensysteme gegründeten) rein mathematischen Eintheilung aller denkbaren Gestalten**), wenigstens hinsichtlich auf die wichtigsten der hier in Betracht kommenden Eintheilungsstufen, überein***). Statt auf mehr unmittelbare Art den gerengesetzlichen Zusammenhang der Flächenarten einer Krystallreihe nachzuweisen, bewirkt er dieses erst auf einem Umwege. Er geht nämlich für jede Krystallreihe von einer Grundgestalt aus und leitet auf mehrfach verschiedene Weise aus ihr unmittelbar oder aus bereits von ihr abgeleiteten einfachen oder zusammengesetzten Gestalten theils einfache, theils zusammengesetzte Gestalten her und zerlegt diese letzteren erst, um zu den in ihnen enthaltenen einfachen Gestalten zu gelangen, welche einzeln auftretend oder zu zweien oder mehreren verbunden (combinirt) die einfachen oder zusammengesetzten Krystallgestalten (Combinationsgestalten) ausmachen. Für die 1- und 3maassigen Krystallreihen ist jedesmal ein (6flächiger) Kronrandner (Rhomboeder) die Grundgestalt, für die 1- und 2maassigen aber ein 8flächiger Ebenrandner

---

*) Grundriss der Mineralogie von *F. Mohs*; ein für das Studium der Mineralogie und besonders der Krystallkunde unentbehrliches Werk, aus welchem auch mehrere der Abbildungen, die zu dem vorliegenden Artikel gehören, entnommen sind.

**) In welcher also auch jene der Krystallformen enthalten ist.

***) Wie dieses auch oben bereits dargelegt worden ist. Unsere Familien von Krystallreihen entsprechen der Hauptsache nach dem, was *Mohs* Krystallsysteme nennt; so also hat er ein tessularisches System (4axige Gestalten), ein rhomboedrisches (1- und 3maassige Gestalten), ein pyramidales (1- und 2maassige Gestalten) und ein prismatisches (1- und 1maassige Gestalten). Unsere Arten von Krystallreihen geben bei *Mohs* das, was er den Charakter der Combinationen nennt. So haben also z. B. die Krystallreihen des prismatischen Systems theils einen prismatischen Charakter der Combinationen (2gliedrige Gestalten), theils einen hemiprismatischen (1gliedrige Gestalten), theils einen tetartoprismatischen (1fach 1gliedrige Gestalten) (gleichschenklig vierseitige Pyramide*), bei den 1- und 1maassigen 2gliedrigen ist sie ein 2 × 4flächiger Ebenrandner (ungleichschenklig vierseitige Pyramide), bei den 1gliedrigen aber und bei den 1fach 1gliedrigen ist die Grundgestalt eine zusammengesetzte Gestalt, welche bei den 1gliedrigen in Beziehung auf ein System von 8 (wenigstens) 2fach rechtwinkligen Zellen mit kantenthümlichen Maassstrahlen a, R, r von dreierlei Werth, wenn r senkrecht ist auf a und R, auszudrücken ist als eine Verbindung aus den zwei einfachen Gestalten ($\pm\,1a$, $\pm\,1R$, $1r$) [301] und ($\pm\,1a$, $\mp\,1R$, $1r$) (ungleichschenklige vierseitige Pyramide mit Abweichung der Axe in der Ebene der kleinen [oder grossen] Diagonale $= +\,n$ Grad m Minuten, wo $n^{0}m'$ auch $= 0^{0}0'$ sein kann), während jene der 1fach 1gliedrigen Krystallreihen in Beziehung auf *irgend* ein bestimmtes System von 8 Zellen mit dreierleiwerthigen kantenthümlichen Maassstrahlen a, R, r ausgedrückt werden muss als eine Verbindung der vier einfachen Gestalten ($\pm\,1a$, $\pm\,1R$, $\pm\,1r$), ($\pm\,1a$, $\pm\,1R$, $\mp\,1r$), ($\pm\,1a$, $\mp\,1R$, $\mp\,1r$) und ($\pm\,1a$, $\mp\,1R$, $\pm\,1r$), deren jede ein 2flächiger Gegenwandner ist (ungleichschenklige vierseitige Pyramide mit Abweichung der Axe in den Ebenen beider Diagonalen [welche Abweichung angegeben wird; sie kann auch $= 0$ sein]). Für die 4axigen (tessularischen) Gestalten gilt der Würfel (das Hexaeder) als Grundgestalt. Bei den hauptaxigen Krystallreihen, welche gleichnamige Grundgestalten haben, findet Verschiedenheit statt hinsichtlich der diesen Grundgestalten eignen Abmessungen, welche im Allgemeinen den ursprünglichen Maassverhältnissen kantenthümlicher Maassstrahlen entsprechen oder doch deren Stelle vertreten.

Die Arten der Ableitung bei hauptaxigen Gestalten sind folgende:

1) Durch sämmtliche Scheitelkanten der gegebenen Gestalt werden berührende Ebenen gelegt, deren jede, wenn diese Scheitelkanten ungleichendige 2seitige Kanten sind, wie hier vorausgesetzt wird, gegen beide betreffende Kantenflächen gleich geneigt ist. Sind die Scheitelkanten der gegebenen Gestalt gleichwerthig, so umschliesst die Gesammtheit der Berührungsebenen eine neue einfache Gestalt, sie ist die gesuchte abgeleitete; sind aber die Scheitelkanten der gegebenen

*) *Mohs* wendet durchgängig den Ausdruck Pyramide für Doppelpyramide an.

Gestalt nicht von einerlei Werth, so ist die neue Gestalt eine zusammengesetzte (Hülfsgestalt), aus welcher durch Zerlegung in die einfachen Gestalten, aus denen sie eine Combination ist, diese einfachen Gestalten, welche die abgeleiteten gesuchten Gestalten sind, gefunden werden.

2) Die zweite Art der Ableitung findet an Rhomboedern ohne weitere Vorbereitung, an anderen Pyramiden aber erst dann statt, wenn jede ihrer Flächen über die Randkanten hinaus verlängert und zu einem Parallelogramme umgewandelt ist, für welches diese Randkante als eine der 2 Diagonalen auftritt. Die Ableitung selbst besteht nun darin, dass die Hauptaxe a der [302] gegebenen Gestalt über beide Enden hinaus um beliebige, jedoch gleiche Stücke verlängert wird, so dass die verlängerte Axe ein rationales Vielfaches von a nach einer ganzen oder gebrochenen positiven Zahl m ist, welche grösser als 1 und bei Ableitungen aus der gleichschenkligen vierseitigen Pyramide auch $> 1 + \sqrt{2}$ sein soll.

Von dem so bestimmten neuen Ende eines jeden der beiden Hauptstrahlen werden Linien gezogen nach den sämmtlichen nicht in die Hauptaxe fallenden Winkelpunkten derjenigen (parallelogrammatischen) Flächen, die dem fraglichen Hauptstrahle angehören, und durch je 2 solche Linien wird eine Ebene gelegt. Die von den neuen Ebenen umschlossene Gestalt ist entweder eine einfache abgeleitete oder eine zusammengesetzte (Hülfs-)Gestalt, welche in die zwei einfachen, aus denen sie besteht, zerlegt*) werden muss.

3) Bei dem dritten Verfahren werden durch die Scheitelkanten einer gegebenen Gestalt, die auch eine der unter 1) oder 2) erhaltenen Hülfsgestalten sein kann, Ebenen in solcher Anzahl und Neigung gelegt, dass die neuen oberen und unteren Flächen, indem sie sich schneiden, horizontale Mittel- oder Randkanten bilden, welche eine ebene Figur umschliessen, die der horizontalen Projection einer gegebenen Gestalt ähnlich und parallel ist.

Bei den tessularischen Gestalten dient ein mit den übrigen drei Ableitungsarten nicht im Zusammenhange stehendes viertes Verfahren, welches darauf hinausläuft, die 7 verschie-

---

*) Die Zerlegung einer zusammengesetzten Gestalt nach *Mohs* ist, übereinstimmend mit der von uns gebrauchten, nichts anderes, als die Verlängerung der Flächen einer Art und Abstraction von dem Dasein der übrigen Flächenarten.

denen Arten einfacher Gestalten mit 8strahligem Axensysteme im Allgemeinen zu entwickeln durch die Betrachtung der 7 verschiedenen möglichen Hauptarten der Stellung irgend einer Ebene in Beziehung zu einem Würfel, wenn sie durch einen Eckpunkt dieses Körpers als festen Punkt gelegt ist und dann auf alle mögliche Weise bewegt wird, ohne dass sie den Würfel je durchschneidet.

Man sieht leicht ein, dass die 2 ersten *Mohs*'schen Ableitungsarten, gleich den *Hauy*'schen Ableitungsmethoden, Gestalten [303] erzeugen, welche die gegebene Gestalt umschliessen, nur sind die durch Abnahme, welche von einem Winkel ausgeht (wohin auch die mittleren Abnahmen gehören), bewirkten *Hauy*'schen Ableitungen aus der Urgestalt ersetzt durch solche, welche als durch Abnahmen, die von Kanten secundärer Gestalten ausgehen, bewirkte angesehen werden können; ein Verfahren, welches *Hauy* selbst öfters angewandt hat. Die Ableitungszahl m ist nämlich zwar nicht geradezu gleichbedeutend mit der das *Hauy*'sche Abnahmegesetz bestimmenden Anzahl subtrahirter Reihen, aber doch auf gewisse Weise ein Analogon derselben; denn sie ist, gleich jener, bloss Stellvertreter der Angabe einer 2ten, der zu bestimmenden Fläche eigenen, bereits früher bestimmten kantenthümlichen Richtung. Bei der 3ten Ableitungsart findet ein Bestimmen der Lage jeder neuen Fläche durch zwei in ihr liegende, bereits bekannte, ältere Kanten der Krystallreihe unmittelbar statt. Da bei der ersten Ableitungsart aus einem Rhomboeder oder aus einer gleichschenkligen vierseitigen Pyramide die abgeleitete Gestalt wieder eine mit der gegebenen Gestalt gleichnamige Gestalt mit stumpferem Scheitel wird, so lässt sich aus dieser abgeleiteten auf dieselbe Weise eine neue Gestalt herleiten, die gleichfalls wieder ein Rhomboeder oder eine gleichschenklig vierseitige Pyramide ist u. s. w.; auch lässt sich leicht durch Umkehrung des Verfahrens aus der letzten, so abgeleiteten, die nächst vorhergehende ableiten, und dieses umgekehrte 1ste Ableitungsverfahren kann natürlich nicht bloss bis zur Grundgestalt, von der man ausging, sondern noch über diese hinaus, so weit man will, fortgesetzt werden, so dass aus der Grundgestalt hierdurch eine neue ihr gleichnamige Gestalt mit spitzigerem Scheitel hervorgeht. Die Gesammtheit der auf solche Weise aus der Grundgestalt unmittelbar oder mittelbar ableitbaren Gestalten nennt *Mohs* die Hauptreihe (von Gestalten der Krystallreihe) und er legt gerade auf dieses Zertheilen der ganzen Krystallreihe in solche und andere Gestaltenreihen einen besonders grossen Werth*). Es ist nämlich, wenn z. B. ein [304] Glied einer solchen Reihe von Rhomboedern $= (\pm a, \pm R, r)$, so dass $a : R : r$ das Axenverhältniss darstellt und $R : r = \sqrt{3} : 2$ ist, das nächste stumpfere Glied $= (\pm a, \mp 2R, 2r) = (\pm \frac{1}{2}a, \mp R, r)$. Wenn man daher von der verschiedenen Stellung absieht, so hat für dieselbe Grösse der Queraxen R und r das spitzigere eine Hauptaxe, die zweifach so gross ist, als die des stumpferen; bei gleichen Horizontalprojectionen schreiten also die Hauptaxen der Glieder der fraglichen Reihe von Rhomboedern fort, wie die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16 ..., und rückwärts hinaus wie die Zahlen ... $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, d. h. wie die Potenzen der Zahl 2:

$$2^{-\infty} \ldots 2^{-n} \ldots \overset{\frac{1}{4}}{2^{-2}}\ \overset{\frac{1}{2}}{2^{-1}}\ \overset{1}{2^{0}}\ \overset{2}{2^{1}}\ \overset{4}{2^{2}} \ldots 2^{n} \ldots 2^{\infty}.$$

Fängt man bei dem als Grundgestalt dienenden Rhomboeder zu zählen an, so dass es das Anfangsglied oder das 0te Glied ist, so entspricht dem ersten folgenden (dem + 1sten) Gliede die Axe $2^{+1} \cdot a$, dem 2ten folgenden (oder + 2ten) die Axe $2^{+2} \cdot a$, dem $+ n$ten Gliede die Axe $2^{+n} \cdot a$, und ebenso dem ersten vorhergehenden (oder — 1sten) Gliede die Axe $2^{-1} \cdot a$, dem 2ten vorhergehenden die Axe $2^{-2} \cdot a$, dem $-n$ten Gliede die Axe $2^{-n} \cdot a$. Die Zahl 2 ist hier die Grundzahl der Reihe.

*) Dieser grosse Werth würde für die Krystallkunde wirklich darin zu suchen sein, wenn nicht in der Regel die Natur nur sehr wenige solche Glieder einer derartigen Gestaltenreihe hervorbrächte, so dass man oft kaum 3 oder 4 (in vielen Fällen nur 1) der Glieder einer derartigen Reihe an den Krystallen einer Substanz kennt, und wenn die Natur nicht gerade durch die Hervorbringung von, durch [304] andere Ableitungsmethoden darstellbaren, Einschaltungsgliedern in den, durch so wenige Glieder gegebenen, derartigen Reihen zeigte, dass es ihr mit dieser Reihenbildung doch nicht so recht Ernst sei. Denn angenommen, bei irgend einer Naturerscheinung finde ein Fortschreiten nach den Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8 statt und der Kreis der Beobachtung sei hierdurch erschöpft, so wird es nicht leicht Jemanden in den Sinn kommen, als das Hauptgesetz dieses Fortschreitens die geometrische Reihe 1, 2, 4, 8 zu bezeichnen und die übrigen Glieder als Einschaltung (die vielleicht andern Reihen angehören) anzusehen, da man eben so gut auch sagen kann, es sei das Fortschreiten bezeichnet durch die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ..., in welcher bloss einige Glieder zufällig fehlen.

Auf solche und ähnliche Reihendarstellungen gründet sich dann auch die von *Mohs* gebrauchte Bezeichnung einfacher Gestalten. So also heisst R $(= R \pm 0)$ das Anfangsglied oder die Grundgestalt, $R + 1$ ist das erste folgende, d. h. das nächst spitzigere Glied, $R - 1$ heisst das erste vorhergehende oder das nach der Grundgestalt folgende stumpfere Glied in der Hauptreihe der aus dem bestimmten R ableitbaren Rhomboeder; $R + n$ ist also [305] der Ausdruck für irgend ein Glied dieser Hauptreihe. Für einen geraden Werth von n ist $R + n = (\pm 2^n \cdot a, \pm R, r)$, für einen ungeraden aber $= (\pm 2^n \cdot a, \mp R, r)$. Als Grenzen der Hauptreihe erscheinen $R + \infty$ als die Säule $(\pm \infty a, \pm R, r)$ und $R - \infty$ als die Tafel $(\pm a, \pm \infty R, \infty r)$.

Aus jedem 6flächigen Kronrandner $R + n$ der Hauptreihe lässt sich nach der 2ten Ableitungsart, gemäss der Ableitungszahl m, ein 2×6flächiger Kronrandner (eine ungleichschenklig 6seitige Pyramide nach *Mohs*) herleiten, dessen Randkanten mit denen von $R + n$ zusammenfallen, während seine Axe $m$mal so gross ist, als die Axe dieser Gestalt, d. h. $m$mal so gross als $2^{+n} \cdot a$. Er erhält statt des Buchstabens R den Buchstaben P (Pyramide), dem die Zahl n, wie vorher dem R, angefügt wird, während die Zahl m in Form eines Exponenten beigesetzt ist, so dass das Zeichen der neuen Gestalt $= (P + n)^m$ wird. Ist n gerade, so wird

$$(P + n)^m = \left(\pm 2^n \cdot ma, \ \pm \frac{4m}{3m + 1} R, \ r\right),$$

ist n ungerade, so hat man

$$(P + n)^m = \left(\pm 2^n \cdot ma, \ \mp \frac{4m}{3m + 1} R, \ r\right),$$

so dass für einerlei m die verschiedenen 2×6flächigen Kronrandner einerlei Mittelquerschnitt haben, der das Diagonalen-Verhältniss $\left(\frac{4m}{3m + 1} R : r\right)$ besitzt, während ihre Hauptaxen abhängen von 2^n und also fortschreiten nach Potenzen der Zahl 2. Die von einerlei m abhängigen 2×6-flächigen Kronrandner $(P + n)^m$ bilden daher wieder eine Reihe, deren Glieder durch die Ordnungszahl n vorzüglich charakterisirt werden.

Auf ähnliche Art verhält es sich mit den 8flächigen und den 2×8flächigen Ebenrandnern, nur dass hier die Grundzahl der Reihe nicht 2, sondern $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ ist. Das Fortschreiten der Hauptaxen hat also hier statt nach der Reihe

$$2^{-\frac{n}{2}} \ldots (2^{\frac{1}{2}})^{-2},\ (2^{\frac{1}{2}})^{-1},\ (2^{\frac{1}{2}})^{0},\ (2^{\frac{1}{2}})^{1},\ (2^{\frac{1}{2}})^{2},\ (2^{\frac{1}{2}})^{3} \ldots 2^{+\frac{n}{2}}.$$

Wenn demnach $P = (a, R, r)$ gesetzt wird, so dass $R : r = 1 : \sqrt{2}$ und n eine gerade Zahl bedeutet, so ist $P + n = (2^{+\frac{n}{2}} \cdot a, R, r)$; ist aber n eine ungerade Zahl, so wird [806] $P + n = (2^{\frac{n+1}{2}} \cdot a, 2R, r)$. Setzt man in beiden Fällen statt R und r ihre Werthe, so ist das Axenverhältniss für ein gerades n gleich $2^{\frac{n}{2}} \cdot a : 1 : \sqrt{2}$ und für ein ungerades n gleich $2^{\frac{n+1}{2}} \cdot a : 2 : \sqrt{2} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot a : \sqrt{2} : 1$. Ebenso ist dann auch für ein gerades n

$$(P + n)^m = \left(2^{\frac{n}{2}} \cdot ma,\ \frac{2m}{m+1} R,\ r\right),$$

und für ein ungerades n

$$(P + n)^m = \left(2^{\frac{n+1}{2}} \cdot ma,\ 2R,\ \frac{2m}{m+1} r\right),$$

also das Axenverhältniss im ersten Falle

$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot ma : \frac{2m}{m+1} : \sqrt{2},$$

und im zweiten Falle

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot ma : 2 : \frac{2m}{m+1} \sqrt{2} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot ma : \sqrt{2} : \frac{2m}{m+1}.$$

Diese Beispiele mögen hinreichen, um eine Vorstellung von der Art der Anwendung der höchst sinnreichen *Mohs*'schen Ableitungsmethoden zu geben. Sie haben das Gute, bei jeder bestimmten Fläche auf einige der wichtigsten Zonen, denen sie angehört, unmittelbar oder mittelbar aufmerksam zu machen, rein mathematisch zu sein und nicht, gleich den *Hauy*'schen, abzuhängen von einer die Entstehung der verschiedenen Krystallformen erklären wollenden Hypothese. Betrachtet man sie als blosse Angaben, in welchen Zonen eine Fläche liege, so ist ihnen die Angabe der Lage des Trägerendes der fraglichen Fläche in irgend einer Zeigerfläche der Krystallreihe vorzuziehen, weil die Zeigerfläche gestattet, jede beliebige Zone, zu der eine Fläche gehört, unmittelbar zu beachten, ohne sich bloss auf irgend ein Paar bestimmte Zonen zu beschränken.

Als Hülfsmittel aber zur Darstellung des Fortschreitens der Axen nach geometrischen Reihen möchten sie durch keine anderen Ableitungsmethoden zu ersetzen sein. Die Bezeichnung, welche gewissermaassen bloss ein symbolischer Ausdruck für die Ableitung selbst ist, hat eben deswegen, in Vergleichung mit andern Bezeichnungsarten, den Fehler, dass einer und derselben bestimmten einfachen Gestalt nicht ausschliesslich ein und dasselbe bestimmte Zeichen entspricht, indem verschiedene Ableitungen [307] verschiedene Zeichen fordern, ungeachtet die Grundgestalt eine und dieselbe ist; ein Fehler, dem durch die willkürliche Beschränkung des Werthes von m nur zum Theil abgeholfen wird. Das Durcheinanderwerfen der Gestalten 1ster und 2ter Stellung (was zunächst dadurch veranlasst worden sein mag, dass jede sogenannte einzelne Reihe ausserdem gar zu wenige Glieder erhalten haben würde) führt unter andern auch den Nachtheil herbei, dass, wenn z. B. bei den 1- und 2maassigen Pyramiden $P + n = P + \infty$ wird, erst wieder durch besondere Hülfszeichen [ ] der Unterschied zwischen der 4flächigen Säule $P + \infty$ erster Stellung von jener $[P + \infty]$ zweiter Stellung angedeutet werden muss.

Die verschiedenen Arten der Hemiedrie erfordern bei dieser Bezeichnungsart ohnehin nicht bloss + oder — Zeichen (deren Anwendung eine beschränkte und noch nicht auf die vollständige Erkennung des ihr zum Grunde liegenden, die Gegensätze in den Stellungsordnungen [Permutationen] der betreffenden Theile angehenden, Gesetzes gegründet ist), sondern ausserdem noch Anwendung der Buchstaben r und l, welche die Worte rechts und links bedeuten, und öfters noch eine besondere Andeutung der Worte oben und unten, was durch Ausdrücke wie $\frac{r}{r}, \frac{l}{l}, \frac{r}{l}, \frac{l}{r}$ bewerkstelligt wird, von denen eins der beiden ersteren dem mit einem Divisor 2 versehenen Zeichen vorgesetzt wird, wenn die hemiedrische Gestalt eine ebenbildlich gleichendige ist, während die beiden letzteren gebraucht werden für gegenbildlich gleichendige solche

Gestalten. Für tetartoedrische Gestalten dient der Divisor 4 u. s. w. Da das 4te Ableitungsverfahren kein wahres Ableitungsverfahren im Sinne der 3 übrigen ist, so sind also auch keine wahren, durch die Methode bedingten *Mohs*'schen Zeichen für die 4axigen Gestalten vorhanden, vielmehr dienen hier die Anfangsbuchstaben der Namen der einfachen Gestalten Hexaeder, Oktaeder u. s. w. oder da, wo diese nicht zureichen, die Buchstaben A, B, C nebst Zahlen, welche da, wo es nöthig ist, angeben, die wievielste der bekannten Varietäten einer solchen Gestalt die fragliche sei, wenn diese Varietäten in der Ordnung aufgeführt werden, in welcher sie in dem Werke von *Mohs* auf einander folgen.

Die Wichtigkeit der *Mohs*'schen Arbeiten und die Verbreitung, welche seiner Methode in Deutschland und England [308] bereits zu Theil geworden ist, macht es nothwendig, für die allgemeinsten Arten der *Mohs*'schen Bezeichnung eine Uebersetzung in die Bezeichnung durch die 3 wichtigsten kantenthümlichen Axenarten mitzutheilen.

Prismatische Gestalten: 1- *und* 1*maassige Gestalten:*

Wenn $P = (a, R, r)$ und $R > r$, so ist:

$$
\begin{aligned}
P + n &= (2^n \cdot a,\ R,\ r) \\
(\bar{P} + n)^m &= (2^n \cdot ma,\ mR,\ r) \\
(\breve{P} + n)^m &= (2^n \cdot ma,\ R,\ mr) \\
(\bar{P}r + n)^m &= \left(\frac{m+1}{2} \cdot 2^n \cdot a,\ \frac{m+1}{m-1} R,\ r\right) \\
(\breve{P}r + n)^m &= \left(\frac{m+1}{2} \cdot 2^n \cdot a,\ R,\ \frac{m+1}{m-1} r\right) \\
\frac{m+1}{2} \cdot P + n &= \left(\frac{m+1}{2} \cdot 2^n \cdot a,\ R,\ r\right) \\
\frac{m+1}{2} \cdot \bar{P}r + n &= \left(\frac{m+1}{2} \cdot 2^n \cdot a,\ \infty R,\ r\right) \\
\frac{m+1}{2} \cdot \breve{P}r + n &= \left(\frac{m+1}{2} \cdot 2^n \cdot a,\ R,\ \infty r\right),
\end{aligned}
$$

wo n eine ganze positive oder negative Zahl ist, die auch $= 0$ und auch $= +\infty$ und $= -\infty$ werden kann, m aber eine ganze oder gebrochene positive rationale Zahl, die auch $= 1$ werden kann.

Dass diese Art der Uebersetzung auch von den Zeichen hemiprismatischer Gestalten selbst dann gelte, wenn die *Mohs*sche Grundgestalt eine ungleichschenklige vierseitige Pyramide ist, an welcher nicht alle 3 Eckenaxen auf einander senkrecht sind, bedarf wohl nicht erst besonders hervorgehoben zu werden. Wenn z. B. der Theil der *Mohs*'schen Grundgestalt einer tetartoprismatischen Krystallreihe, welchen er mit $+r\frac{P}{4}$ oder $\frac{P}{r4}$ bezeichnet, $=(\pm a, \pm R, \pm r)$ und $+l\frac{P}{4}=(\pm a, \mp R, \pm r)$ ist, so ist auch $-r\frac{(\bar{P}r)^3}{4}=(\pm 2a, \pm R, r)$ und $r\frac{(\breve{P}r+\infty)^3}{2}$ $=(\pm\infty a, \pm R, \pm 2r)$ und $l\frac{(\breve{P}r+\infty)^3}{2}=(\pm\infty a, \mp R, \pm 2r)$ und so weiter.

[309] *Pyramidale Gestalten:* 1- *und* 2*maassige Gestalten:*

Wenn $P=(a, R, r)$ und $R : r = 1 : \sqrt{2}$ und n eine gerade, N aber eine ungerade Zahl bedeutet, so ist:

$$
\begin{aligned}
P+n &= (2^{\frac{n}{2}}\cdot a,\ R,\ r)\\
P+\infty &= (\infty a,\ R,\ r)\\
P+N &= \left(2^{\frac{N+1}{2}}\cdot a,\ 2R,\ r\right)\\
[P+\infty] &= (\infty a,\ 2R,\ r)\\
(P+n)^m &= \left(2^{\frac{n}{2}}\cdot ma,\ \frac{2m}{m+1}R,\ r\right)\\
(P+\infty)^m &= \left(\infty a,\ \frac{2m}{m+1}R,\ r\right)\\
(P+N)^m &= \left(2^{\frac{N+1}{2}}\cdot ma,\ 2R,\ \frac{2m}{m+1}r\right)\\
[P+\infty]^m &= \left(\infty a,\ R,\ \frac{m}{m+1}r\right)\\
\frac{m+1}{2}\cdot P+n &= \left(\frac{m+1}{2}2^{\frac{n}{2}}\cdot a,\ R,\ r\right)\\
\frac{m+1}{2}\cdot P+N &= \left(\frac{m+1}{2}2^{\frac{N+1}{2}}\cdot a,\ 2R,\ r\right)\cdot
\end{aligned}
$$

Fig. 239. So werden z. B. für den abgebildeten Zinnerzkrystall die einander entsprechenden Bezeichnungen (neben einander gestellt in einer Tabelle, in welcher die erste Columne den Buchstaben der Fläche auf der Abbildung, die 2te die Bezeichnung nach *Mohs* und die 3te die Bezeichnung durch die drei wichtigsten kantenthümlichen Axenarten a, R, r, deren Maasszählerverhältnisse sie enthält, angiebt) auf folgende Weise sich darstellen:

	Mohs	$a \quad R \quad r$
P	P	$1 \quad 1 \quad 1$
s	$P+1$	$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}$
z	$(P)^5$	$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5}$
r	$(P+\infty)^5$	$\infty \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5}$
g	$[P+\infty]$	$\infty \quad 2 \quad 1.$

Fig. 212. Für den Scheelerzkrystall, wenn die erste Zelle $=(+\overset{a}{R}+r)$ ist, hätte man ebenso folgende Uebersetzung: [310]

	Mohs	$a, \quad R, \quad r$	oder wenn man bei g und P die Vorzeichen vernachlässigt
g	P	$1 \pm 1 \pm 1$	$1 \quad 1 \quad 1$
a	$\frac{r}{l}\,\frac{(P-2)^3}{2}$	$1 \pm 1 \pm \frac{2}{3}$	$1 \pm 1 \pm \frac{2}{3}$
P	$P+1$	$1 \pm 1 \pm \frac{1}{2}$	$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}$
b	$\frac{l}{r}\,\frac{(P+1)^3}{2}$	$1 \pm \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}$	$1 \pm \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}.$

Rhomboedrische Gestalten: 1- *und* 3*maassige Gestalten:*

Wenn $R = (\pm a, \pm R, r)$ und $R : r = \sqrt{3} : 2$, n eine gerade und N eine ungerade Zahl ist:

$$
\begin{aligned}
R + n &= (\pm 2^n \cdot a, \pm R, r)\\
(R + N) &= (\pm 2^N \cdot a, \mp R, r)\\
R + \infty &= (\infty a, \pm R, r)
\end{aligned}
$$

$$(P+n)^m \quad = \left(\pm 2^n \cdot ma,\ \pm \frac{4m}{3m+1} R,\ r\right) \text{*)}$$

$$(P+N)^m \quad = \left(\pm 2^N \cdot ma,\ \mp \frac{4m}{3m+1} R,\ r\right)$$

$$(P+\infty)^m \quad = \left(\infty\, a,\ \frac{4m}{3m+1} R,\ r\right)$$

$$\frac{3m+1}{4} \cdot R+n \quad = \left(\pm \frac{3m+1}{4} \cdot 2^n \cdot a,\ \pm R,\ r\right)$$

$$\frac{3m+1}{4} \cdot R+N \quad = \left(\pm \frac{3m+1}{4} \cdot 2^N \cdot a,\ \mp R,\ r\right)$$

$$P+n \quad = (2^n \cdot a,\ 2R,\ \tfrac{3}{2} r)$$

$$P+N \quad = (2^N \cdot a,\ 2R,\ \tfrac{3}{2} r)$$

$$P+\infty \quad = (\infty\, a,\ 4R,\ 3r).$$

Wird $\frac{3m+1}{4} R+N = \frac{3 \times \frac{1}{3}+1}{4} R+N = \frac{1}{2} R+N$ $= (\pm \frac{1}{2} 2^N \cdot a, \mp R, r) = (\pm 2^{N-1} \cdot a, \mp R, r)$ und $N-1=n$, so ist $\frac{1}{2} R+N = R+n$ (aber nicht an Stellung), und es wird dann dieser zweite Ausdruck $R+n$ dafür gebraucht, so dass $(R+n) \times (R+n)$ oder $2(R+n) = (2^n \cdot a, R, r)$; und ebenso ist $(P+n)^m \times (P+n)^m = 2(P+n)^m = \left(2^n \cdot ma, \frac{4m}{3m+1} R, r\right)$,

[311] wobei n sowohl ungerade, als auch gerade sein kann. Dieses ist die Bezeichnungsart der dirhomboedrischen (6gliedrigen) Gestalten.

Als Beispiel, wie bei hemirhomboedrischen Gestalten die Uebersetzung stattfindet, möge der abgebildete Krystall von apotomem Eisenerz (Titaneisen aus Gastein) dienen, dessen Gestalt hemirhomboedrisch von parallelen Flächen (1fach 3gliedrig) ist. Fig. 248 A., B.

	Mohs	$a,\quad R,\quad r$	
a	$R-\infty$	$\pm 1 \pm \infty \pm \infty$	wenn die erste Zelle
R	R	$\pm 1 \pm 1 \pm 1$	$=\begin{pmatrix} +a & \\ +R & +r \end{pmatrix}$
b	$\frac{r}{l}\ \frac{P+1}{2}$	$\pm 4 \pm 4 \pm 3$	und $R : r = \sqrt{3} : 2$.

*) Der Allgemeinheit wegen wird hier der Werth $m=1$ nicht ausgeschlossen.

Für *die 4axigen Gestalten* steht in folgender Tabelle in der Columne M eine Bezeichnung nach *Mohs* und in der Columne N die Bestimmung der fraglichen Gestalt durch das Zeichen der Gesammtheit der Träger ihrer Flächen, bezogen auf die einfachen Zellen W, R, A, deren erste $= \begin{pmatrix} + W \\ + R + A \end{pmatrix}$ gesetzt ist, mit dem Maassverhältnisse $W : R : A = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

M	N	M	N	M	N	M	N
H	$1\,0\,0$	$A1$	$2\,1\,0$	$+\frac{O}{2}$	$-\,0\,0\,1$	$+\frac{An}{2}$	$\pm 1 \pm y\,0$
O	$0\,0\,1$	$A2$	$1\,1\,0$	$-\frac{O}{2}$	$+\,0\,0\,1$	$-\frac{An}{2}$	$\pm 1 \mp y\,0$
D	$0\,1\,0$	$A3$	$1\,2\,0$	$+\frac{Bn}{2}$	$-\,0\,1\,y$	$+\frac{Tn}{2II}$	$\pm 1 \pm y\,z$
An	$1\,y\,0$	$B1$	$0\,1\,1$	$-\frac{Bn}{2}$	$+\,0\,1\,y$	$-\frac{Tn}{2II}$	$\pm 1 \mp y\,z$
Bn	$0\,1\,y$	$C1$	$1\,0\,1$	$+\frac{Cn}{2}$	$-\,1\,0\,y$	$+r\frac{Tn}{4}$	$-\,1 - y\,z$
Cn	$1\,0\,y$	$C2$	$2\,0\,1$	$-\frac{Cn}{2}$	$+\,1\,0\,y$	$+l\frac{Tn}{4}$	$-\,1 + y\,z$
Tn	$1\,y\,z$	$T1$	$2\,2\,1$	$+\frac{Tn}{2I}$	$-\,1\,y\,z$	$-r\frac{Tn}{4}$	$+\,1 - y\,z$
		$T2$	$1\,1\,1$	$-\frac{Tn}{2I}$	$+\,1\,y\,z$	$-l\frac{Tn}{4}$ *)	$+\,1 + y\,z$
		$T3$	$2\,1\,1$				

*) Die Richtigkeit der Uebersetzung dieser vier Ausdrücke hängt ab von dem Begriffe, den man mit den Buchstaben r und l verbindet. Es verhält sich nämlich jede Zelle zu einer ihr anliegenden als eine linke (oder rechte), während sie zur anderen sich als eine rechte (oder linke) verhält, und die Ausdrücke, links und rechts, sind ohne anderweitige besondere Bestimmung nicht hinreichend, die verschiedenen, hier in Betrachtung kommenden, Verhältnisse gegenbildlicher Theile vollkommen zweckmässig zu bezeichnen.

[312]

	M	N
r	$\frac{Tn}{2III}$	$1+yz$
l	$\frac{Tn}{2III}$ *)	$1-yz$.

Als im Geiste und in der Methode von *Mohs* wirkend ist vorzüglich sein ausgezeichneter Schüler *Haidinger* zu nennen**).

9. In *Hausmann's* neueren krystallographischen Arbeiten***), welche Klarheit, Gründlichkeit und Eigenthümlichkeit mit einander verbinden, tritt besonders hervor:

1) Das Streben, die Familien der Krystallreihen vorzüglich herauszuheben. Er stellt sie (als Classen) in folgender Weise auf: a) das isometrische oder gleichaxige System. Grundform: das reguläre Oktaeder. b) Monodimetrisches System. Grundform: ein Quadratoktaeder. c) Trimetrische Systeme†). Grundform: ein Rhombenoktaeder. d) Monotrimetrische Systeme. Grundform: ein Bipyramidaldodekaeder. b), c) und d) werden auch zusammengefasst unter dem gemeinschaftlichen Namen der anisometrischen Systeme.

[313] 2) Die Anerkennung der Wichtigkeit der Zonen. Hauptzonen und Nebenzonen werden unterschieden. Die Zonenebene einer Hauptebene ist senkrecht entweder auf die verticale (Haupt-)Axe (horizontale Zone), oder auf eine Randecken-Queraxe, oder auf eine Randkante (verticale Zonen), oder auf eine Scheitelkante (transversale Zonen) der Grundgestalt. Die

---

*) Dieselbe Bemerkung gilt hinsichtlich auf die beiden 24-Fünfeckflächner.

**) Er hat sich Verdienste erworben durch die Besorgung der dem Originale in manchen Stücken vorzuziehenden Uebersetzung des Grundrisses der Mineralogie von *Mohs* ins Englische, durch genaue krystallographische Untersuchungen über einzelne Mineralien, Diallagon, Apatit, Kupferkies u. s. w. und durch eine kurze, fassliche Darstellung der wichtigsten Lehren der *Mohs*'schen Methode u. s. w. in seinem classischen Werke: Anfangsgründe der Mineralogie.

***) Untersuchungen über die Formen der leblosen Natur. Handbuch der Mineralogie 2. Ausgabe. Arbeiten über einzelne Gegenstände in verschiedenen Werken zerstreut.

†) 1- und 1maassige Gestalten.

Zonenebene einer der Nebenzonen ist senkrecht auf Randkanten oder Scheitelkanten abgeleiteter Gestalten verticale oder transversale Nebenzonen).

3) Anerkennung des Gesetzes für die Neigungen der Flächen in einer Zone, so wie des Satzes, dass jede neue Krystallfläche erst als vollkommen bestimmt zu betrachten sei, wenn ihre Lage in zwei bereits bekannten Zonen nachgewiesen ist.

4) Eine eigenthümliche Bezeichnung der Theile der Grundform durch Buchstaben (welche Bezeichnung auch bei den der Grundform zu substituirenden abgeleiteten Gestalten gebraucht wird), durch welche es möglich ist, jede der Hauptzonen durch 2 Buchstaben*) auszudrücken und zu bezeichnen.

5) Die Darstellung der Wichtigkeit der Stütze jeder Zone (ein Begriff, welcher seinem Wesen nach mit dem der Stütze der Zeigerlinie einer Zone gleichartig ist). Die Tangente der Neigung jeder Fläche der Zone gegen die Stütze wird ausgedrückt als ein rationales Vielfaches nach ganzen oder gebrochenen Zahlen von der Tangente *einer* solchen Neigung, welche den Namen: primäres Neigungsverhältniss (Sin. : Cos.) in der fraglichen Zone erhält, während das einer bestimmten Fläche entsprechende Vielfache dieses primären Neigungsverhältnisses das (diese Fläche charakterisirende) secundäre Neigungsverhältniss heisst.

6) Die eigenthümliche Art der Bezeichnung der verschiedenen Flächen einer Krystallreihe,

a) der Grenzflächen, d. h. der einfachen geraden Abstumpfungsflächen der Ecken und Kanten der Grundform; der Buchstabe, welcher jene Ecke oder Kante bezeichnet, bezeichnet auch die Abstumpfungsfläche derselben;

b) der secundären Flächen,

[314] α) in den Hauptzonen, durch das Zeichen der Hauptzone, welchem die Vervielfältigungszahl des primären Neigungsverhältnisses der Zone, die dem der Fläche angehörigen secundären Neigungsverhältnisse entspricht, angehängt wird. So ist z. B. $AE2$ eine Fläche, deren Träger in der Ebene der zwei auf einander senkrechten Strahlen CA und CE (wenn C der Mittelpunkt der Grundform ist) liegt, welche

*) Sie vertreten gleichsam die Stelle der Angabe von 2 der wichtigsten in der Zeigerlinie der Zone liegenden Trägerenden.

Strahlen sie in dem Verhältnisse $2\,CE : CA$ schneidet. Hier ist CA die Stütze und $CE : CA$ das primäre Neigungsverhältniss der Zone EA;

β) in den Nebenzonen, durch Angabe des Zeichens einer der Grundform substituirten abgeleiteten Gestalt, begleitet von der Angabe des Zeichens der Nebenzone*) und des Multiplicators des primären Neigungsverhältnisses in dieser Zone; so z. B. des Zeichens ($AE2$, $BD2$), worin $AE2$ die der Grundform substituirte abgeleitete Gestalt bedeutet, während $BD2$ anzeigt**), dass die zu bezeichnende Fläche in der für diese stellvertretende Form als transversale Hauptzone zu betrachtenden Zone liege und dem Doppelten des primären Neigungsverhältnisses entspreche. Im isometrischen Systeme wird jede einfache Gestalt mit dem ersten oder mit dem ersten und zweiten Anfangsbuchstaben des von *Hausmann* gebrauchten Namens bezeichnet und da, wo es nöthig ist, die Zahl beigefügt, welche andeutet, die wievielste der aufgeführten Varietäten derselben Art gemeint sei u. s. w.

7) Die zu geringe Beachtung derjenigen Zonen, deren Zonenebenen auf 1fach 1gliedrigen kantenthümlichen Axen der (flächenvollzähligen) Grundformen senkrecht sind, deren gehörige Beachtung nur bei ausgedehnter Benutzung der Lehre von der Zeigerfläche leicht ist.

8) Die Idee der Ableitbarkeit aller Krystallreihen aus der isometrischen, auf eine Weise ähnlich der von *Breithaupt* versuchten, oben bereits angedeuteten, doch ohne eine der Zahl 720 entsprechende bestimmte Ableitungszahl.

[315] 10. *Naumann****) sucht das in der *Mohs*'schen Methode liegende Dogma der nach Potenzen fortschreitenden Reihen†) zu vermeiden und kommt daher zu einer Bezeichnung jeder Fläche durch 3 Coordinatenaxen, welche, wenn

---

*) Die in Beziehung zu dieser abgeleiteten Gestalt ebenso ausgedrückt wird, wie eine Hauptzone in Beziehung zur Grundform.

**) D ist nämlich der Buchstabe der Scheitelkante, CB ein auf den Träger CD der Scheitelkante senkrechter Querstrahl, welcher als Stütze dient.

***) Grundriss der Krystallographie von *Naumann* (nicht zu verwechseln mit Neumann). Lehrbuch der Mineralogie (mit einem schönen Atlas von 26 Tafeln). Ueber die Dimensionen der Grundgestalten in *Oken*'s Isis X. S. 1086. Einzelne Arbeiten.

†) Die erste Heraushebung solcher Reihen rührt von *Malus* her. Vergleiche Théorie de la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisées par E. L. Malus. 1810. p. 122.

man von dem Ausserwesentlichen abstrahirt, mit der von *Weiss* gegebenen übereinstimmt oder vielmehr sich zu ihr verhält, wie unsere abgekürzte Bezeichnung $x \mid y$ zu der vollständigen (xa, yR, r), d. h. er lässt ausserwesentliche und auch solche Theile der vollständigen *Weiss*'schen Bezeichnung weg, welche, wenn man nur *eine* Methode der Bezeichnung durchgängig gebraucht, ihrer Beständigkeit wegen sich leicht ergänzen lassen; er fügt aber auch wieder Ausserwesentliches hinzu, nämlich den Anfangsbuchstaben O oder P des Namens seiner Grundgestalt, welche ohnehin bekannt sein muss, wenn von irgend einer Ableitung aus ihr die Rede sein soll.

Wenn 1) bei den 1- und 1maassigen Gestalten die erste einfache Zelle $= \overset{a}{R}r$*), 2) bei den 1- und 2maassigen und bei den 1- und 3maassigen Gestalten die erste doppelte Zelle $= r(\overset{a}{R})r = \overset{a}{r}r$ und 3) bei den 4axigen die erste 3fach rechtwinklige Zelle $= \overset{a}{a}a$ gesetzt wird, so dass die angegebenen Buchstaben zugleich das Maassverhältniss der bezüglichen kantenthümlichen Maasstrahlen bedeuten, und im 1sten Falle $P = (a, R, r)$, im 2ten Falle $P = (a, r, r)$ und im 3ten Falle O (Oktaeder) $= (a, a, a)$ bezeichnet, so ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } m\check{P}n = (ma,\ R,\ nr) \\ \text{II. } m\bar{P}n = (ma,\ nR,\ r) \end{array}\right\}, \text{ wenn } R > r \text{ gesetzt wird,}$$

$$\text{III. } mPn = (ma,\ nr,\ r)$$

$$\text{IV. } mOn = (ma,\ na,\ a)$$

die *Naumann*'sche Bezeichnung erläutert, so weit sie sich consequent bleibt, und es ist nur noch zu bemerken, dass m von [316] 0 bis ∞ und n von 1 bis ∞ jeden rationalen Werth haben kann und dass die Zeichen + und — und r und l auf ähnliche Weise angewendet werden, wie bei *Mohs* in Verbindung mit Divisoren 2 oder 4, um flächenhalbzählige oder flächenviertelszählige einfache Gestalten zu bezeichnen. Als Abweichung von der Consequenz, die durch die Wichtigkeit der 3gliedrigen Gestalten entschuldigt wird, ist es anzusehen,

---

·bei nicht bloss 3fach rechtwinklige Zellen gemeint sind.

dass bei III. statt $+mP$ oder $-mP$ gesetzt wird $+mR$ oder $-mR$, um die verschiedenen Rhomboeder zu bezeichnen, ohne dass dadurch die Bedeutung des Zeichens sich ändert. Als beträchtlichere Abweichung aber ist es zu betrachten, wenn *Naumann* in seinem Lehrbuche der Mineralogie die zweite *Mohs*'sche Ableitungsart auf sein mR anwendet und den 2×6flächigen Kronrandner, welcher mit mR gleichen Rand, aber eine $n$mal so grosse Hauptaxe hat, durch mR^n bezeichnet, wo n die Bedeutung der von *Mohs* gebrauchten Ableitungszahl m erhält, also

$$+mR^n = \left(\pm m \cdot n \cdot a, \pm \frac{4n}{3n+1} R, r\right)$$

und

$$-mR^n = \left(\pm m \cdot n \cdot a, \mp \frac{4n}{3n+1} R, r\right)$$

a

ist, wenn Rr die einfache Zelle bedeutet, in welcher $R \parallel r = 30^\circ$ und $a : R : r = a : \sqrt{3} : 2$ ist.

Die Eintheilung der 1- und 1maassigen Gestalten nach der Beschaffenheit der bei der Bezeichnung zum Grunde liegenden Zellen in orthometrisch-monoklinometrische, diklinometrisch-triklinoedrische, triklinometrisch-diklinoedrische und triklinometrisch-triklinoedrische, welche von *Naumann* besonders hervorgehoben wird, ist oben bereits beurtheilt worden. Auch sucht *Naumann* bei seinen Grundgestalten*), welche Rhombenoktaeder (2×4flächige Ebenrandner) sind, nachzuweisen, dass $R = a + r$ oder $\frac{1}{2}a + r$ oder $= a + \frac{1}{2}r$ sei, wenn $a : R : r$ das Verhältniss der drei 2gliedrigen Axen bedeutet.

11. *Bernhardi***) hat sich besonders in neuerer Zeit Verdienste [317] erworben durch Untersuchungen über die 4axigen Gestalten. Auch in seinen Arbeiten liegt das Bestreben, die gerengesetzliche Ableitbarkeit aller Krystall-

---

*) Die mit den von *Mohs* angenommenen in der Regel übereinstimmen.

**) Beiträge zur näheren Kenntniss der regelmässigen Krystallformen. Auch muss hier erwähnt werden dessen: Neue Methode, Krystalle zu beschreiben, in *Gehler*'s J. f. Ch. u. Ph. 1808, und: Ueber krystallographische Bezeichnungsmethoden, in *Schweigger*'s J. f. Ch. 1823.

gestalten aus den hauptaxenlosen 3gliedrig 4axigen wahrscheinlich zu machen. Er ist ferner bemüht, eine Art von Abhängigkeit nachzuweisen zwischen den Krystallformen chemischer Verbindungen und denen der verbundenen Urstoffe.

12. *Breithaupt's* eigenthümliche Ansichten sind oben bereits erwähnt. Er bedient sich theils der *Weiss*'schen, theils der *Naumann*'schen Zeichensprache. Genauere Bestimmungen der ursprünglichen Maasse bei den Krystallreihen sehr vieler Substanzen hat ihm die Wissenschaft zu danken.

13. *Raumer**) hat sich vorzüglich bemüht, die ersten Elemente der Krystallkunde auch solchen zugängig zu machen, die vorher noch nicht sich mit mathematischen Studien beschäftigt haben. Er behandelt eine nicht geringe Menge einzelner Lehren auf eine sehr fassliche zweckmässige Weise.

14. Es bleibt nunmehr noch zu bemerken, dass die wissenschaftliche Krystallkunde bereits sich in allen besseren neueren und neuesten Werken über Mineralogie und zum Theil auch über Chemie und Physik ihren Platz errungen hat und dass diese mitunter reich sind an einzelnen, in das Gebiet der Krystallkunde einschlagenden, eignen oder fleissig zusammengetragenen fremden Beobachtungen, mitunter auch durch eigenthümliche Art des Vortrags der in ihnen enthaltenen krystallographischen Lehre u. s. w. sich auszeichnen.

In dieser Beziehung mögen hier noch erwähnt werden die Namen *v. Leonhard***), *Hartmann****), *Phillips*†), *Beudant*††) und *L. Gmelin*†††).

[318] 15. Es würde zu sehr ins Einzelne führen, hier die in den bekannten naturwissenschaftlichen Zeitschriften,

---

*) Versuch eines Abc-Buchs der Krystallkunde.

**) Handbuch der Oryktognosie.

***) Die Mineralogie in sechs und zwanzig Vorlesungen.

†) Elementary introduction to mineralogy. 3te Ausgabe. (Vorzüglich reich an vielen neuen Beobachtungen und Winkelmessungen, die jedoch zum Theil nicht den erforderlichen Grad von Genauigkeit zu haben scheinen.)

††) Traité élémentaire de minéralogie.

†††) Handbuch der theoretischen Chemie. 3te Auflage.

Wörterbüchern*) u. s. w., in den Schriften gelehrter Gesellschaften u. s. w. zerstreuten einzelnen krystallographischen Arbeiten der bereits aufgeführten Naturforscher sowohl, als auch der nicht namentlich erwähnten aufzuzählen. Die allgemeine Verweisung auf solche Schriftensammlungen möge daher hier genügen**).

*) So z. B. im Dictionnaire des sciences naturelles der Artikel »cristallisation« von *Brochant de Villiers.*

**) Ausführlichere literarische und geschichtliche Nachweisungen enthält die im Jahre 1825 erschienene Geschichte der Krystallkunde von *Marx.*

Anmerkungen.

I. Nachtrag zu den Anmerkungen I des ersten Bändchens, Hessel's wissenschaftliche Bedeutung betreffend.

Zur Ergänzung sei noch die folgende Notiz hinzugefügt, welche der Herausgeber einer freundlichen Mittheilung seines Collegen Herrn *Max Bauer* verdankt.

Durch eine briefliche Mittheilung von *J. Lemberg* (Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. **43.** 1891. S. 254—255) ist man darauf aufmerksam gemacht worden, dass *J. F. C. Hessel* schon im Jahre 1826 (*Leonhard*, Taschenbuch f. d. ges. Mineralogie 1826, Bd. I, S. 486) den damals allein bekannten Kalknatronfeldspath, den Labradorit, ganz im Sinne der später nach *Tschermak* genannten Feldspaththeorie, als eine isomorphe Mischung von Albit und Anorthit dargestellt und dass er eine, diesen jetzt nach den Arbeiten von *Tschermak* zu ziemlich allseitiger Anerkennung gelangten Anschauungen entsprechende, allgemeine Formel für die chemische Zusammensetzung der Glieder der Feldspathgruppe aufgestellt hat.

Diese Arbeit *Hessel's* hat also das Schicksal seines Hauptwerkes über Krystallometrie getheilt, von den Zeitgenossen und noch 19 Jahre nach seinem Tode unbeachtet geblieben zu sein: nunmehr ist nach mehr als zwei Menschenaltern aber auch bezüglich des Mischungsgesetzes der Feldspathe die Priorität der Entdeckung *Hessel's* festgestellt und zur Anerkennung gelangt.

II. Specielle Noten zum Text des zweiten Bändchens.

Zu S. 16 flg. und zu S. 31 flg. Bei der Ableitung und Darstellung der Ausdrücke für die Axenparameter, die

Neigungen u. s. w. der Flächen der einfachen Gestalten hätten sich durch Anwendung bekannter Formeln der analytischen Geometrie bedeutende Vereinfachungen erzielen lassen. Vgl. *Naumann:* Krystallographie und *E. Hess:* Kugeltheilung, Cap. V.

Zu S. 45 flg. Das *Gerengesetz* oder das Gesetz vom *Parallelogramme der Strahlen* ist nichts anderes, als dasjenige von der *geometrischen Addition von Strecken*, welches sowohl für die Geometrie und Statik, als auch für die Functionentheorie von grosser Bedeutung ist.

Zu S. 49—51. Der gemeinschaftliche, durch N bezeichnete Nenner in den Werthen für x, y, z ist in der jetzt üblichen Bezeichnung die Determinante der Coefficienten:

$$\begin{vmatrix} l' & l'' & l''' \\ m' & m'' & m''' \\ n' & n'' & n''' \end{vmatrix}.$$

In den Formeln auf S. 49—51 waren im Original irrthümlicher Weise sämmtliche in den Zählern der Brüche auftretenden Differenzen (Unterdeterminanten von N) mit entgegengesetztem Zeichen angegeben.

Zu S. 53 Z. 1. Den strengen Beweis für den hier benutzten wichtigen Satz, dass $\cos \frac{360^\circ}{n}$ nur dann rational ist, wenn die ganze Zahl n bei geradem Werthe nicht grösser als 6, bei ungeradem Werthe nicht grösser als 3 ist, hat *Hessel* erst i. J. 1868 in einer in *Grunert's Archiv f. Mathem. u. Phys.* XLVIII S. 81—96 veröffentlichten Abhandlung geführt.

Die hier und Abs. 1 und 2 gemachten Bemerkungen sind für die später auf S. 95—98 gegebene Aufstellung der allein möglichen Krystallgestalten wichtig und entscheidend.

Zu S. 54. Durch die consequente Anwendung des *Möbius*'schen »Princips der Zeichen« würden diese Entwicklungen sich wesentlich einfacher und übersichtlicher gestaltet haben.

Zu S. 64 flg. Die von *Hessel* entwickelte und von ihm als besonders wichtig betonte *Lehre von der Zeigerfläche* enthält wesentlich die Bestimmung der Normalen (Träger) der Grenzflächen durch deren Durchstossungspunkte mit der festen Ebene der Zeigerfläche und ferner der Zonenebenen durch deren Schnittlinien (Zeigerlinien) mit derselben. Es werden hierbei analytisch die Punkte durch ihre (im Allgemeinen schiefwinkligen) Coordinaten und die Zeigerlinien durch ihre Gleichungen, welche sich aus den Coordinaten zweier ihrer Punkte ergeben, bestimmt. Das Verfahren selbst ist vom rein geometrischen Gesichtspunkte aus als ein specielles *descriptives* zu bezeichnen.

Zu S. 95—98. Die vier Tabellen *A.*, *B.*, *C.*, *D.* enthalten das für die Krystallographie wichtigste Hauptresultat der Arbeit *Hessel's*, nämlich eine Zusammenstellung der allein möglichen Abtheilungen der Krystalle. Die Zahl derselben beträgt $5+12+7+8=32$, da von den 12 Abtheilungen der Tabelle *D.*, zufolge der in der vierten Columne gemachten Bemerkungen, 4mal je zwei als im Wesentlichen identisch anzusehen sind.

Hessel hat in späteren Schriften*), besonders in der Programmabhandlung vom Jahre 1862 eine zweckmässigere Terminologie und symbolische Bezeichnung eingeführt, welche kurz angegeben werden soll, da auch *Sohncke***) und *Schoenflies****) dieselbe bereits berücksichtigt haben. *Sohncke* giebt die Tabelle in der *Hessel*'schen Anordnung nebst den Bezeichnungen von *Gadolin* und hat auch die sehr anschauliche Figurentafel, welche *Hessel* der erwähnten Programmschrift beigefügt hat, reproducirt und kurz erläutert. *Schoenflies* hat noch ausserdem in der Tabelle III (S. 104 seines Buches) die Bezeichnungen von *Bravais*, *Möbius*, *Curie*, *Fedorow* und *Minnigerode* angegeben.

Um eine Krystallclasse zu charakterisiren, wendet *Hessel* das Symbol

$$n^e A^E$$

an. Hierbei ist $n=4$, d. h. gleich der Anzahl der 3gliedrigen Axen für die hauptaxenlosen cubischen Gestalten, während für die hauptaxigen Gestalten $n=1$ ist. Die Zahl e ist 1 oder 2 (d. h. bedeutet einfach oder zweifach),

---

*) *J. F. C. Hessel:* »Die Anzahl der Parallelstellungen u. s. w.« Cassel 1853. — »Ueber gewisse merkwürdige, statische und mechanische Eigenschaften der Raumgebilde.« Universitätsprogramm. Marburg 1862.

) *L. Sohncke*, Die Entdeckung des Eintheilungsprincips der Krystalle durch *J. F. C. Hessel.* Zeitschr. f. Kryst. **18. 1891. S. 486—498 nebst Tafel V.

***) *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig 1891.

E ist das Maass für die Zähligkeit der Axe, d. h. $E = 3$ für die Gestalten in A., $E = 6 ; 3$ für diejenigen in B., $E = 4 ; 2$ für diejenigen in C. und endlich $E = 2 ; 1$ für diejenigen in D. Das Symbol A ist G oder g oder ε oder u, wobei

G *gleichstellig* 2*endig* (direct symmetrisch gleichendig),
g *gerenstellig* 2*endig* (indirect symmetrisch gleichendig),
ε *ebenbildlich gleichendig*,
u *ungleichendig*

bedeutet.

Hiernach lassen sich die 32 Krystallclassen, entsprechend den Anordnungen A., B., C., D. auf S. 95—98 kurz auf folgende Weise charakterisiren:

A. 3*gliedrig* 4*axig*.
(Reguläres Krystallsystem.)

1) $4^2 g^3$
2) $4^1 \varepsilon^3$
3) $4^2 u^3$
4) $4^1 g^3$
5) $4^1 u^3$.

B. 1- *und* 3*maassig*.
(Hexagonales Krystallsystem.)

1) $1^2 G^6$
2) $1^1 G^6$
3) $1^1 \varepsilon^6$
4) $1^2 u^6$
5) $1^1 u^6$
6) $1^2 g^3$
7) $1^1 g^3$
8) $1^1 \varepsilon^3$
9) $1^2 G^3$
10) $1^1 G^3$
11) $1^2 u^3$
12) $1^1 u^3$.

C. 1- *und* 2*maassig*.
(Tetragonales Krystallsystem.)

1) $1^2 G^4$
2) $1^1 G^4$
3) $1^1 \varepsilon^4$
4) $1^2 u^4$
5) $1^1 u^4$
6) $1^2 g^2$
7) $1^1 g^2$.

D. 1- *und* 1*maassig*.
(Rhombisches, monoklines und triklines Krystallsystem.)

1) $1^2 G^2$
2) $1^1 G^2$ = 6) $1^2 g^1$
3) $1^1 \varepsilon^2$
4) $1^2 u^2$ = 9) $1^2 G^1$
5) $1^1 u^2$ = 8) $1^1 \varepsilon^1$
7) $1^1 g^1$
10) $1^1 G^1$ = 11) $1^2 u^1$
12) $1^1 u^1$.

Inhalt des ersten Bändchens.

Anmerkungen.

Inhalt des zweiten Bändchens.

Verbesserung zu den Anmerkungen des ersten Bändchens: S. 191 Z. 21—22 v. o. lies: Systeme der hauptaxigen statt: hauptaxenlosen.

Verbesserung: S. 37 des zweiten Bändchens Z. 18 v. o. tilge: und derselben.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

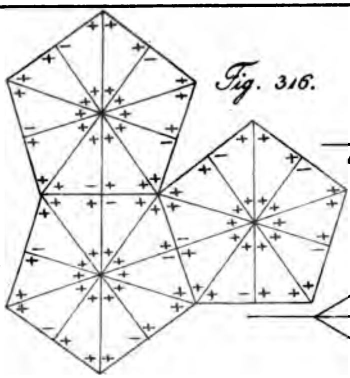


Fig. 316.

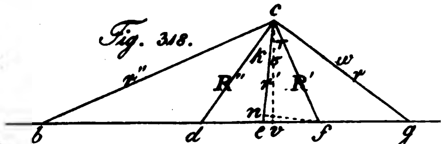


Fig. 318.

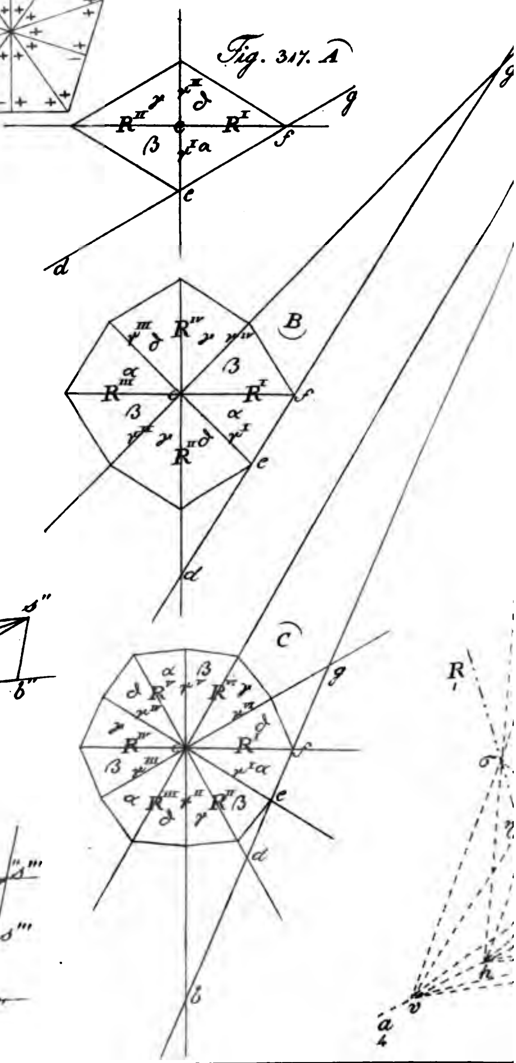


Fig. 317. A B C

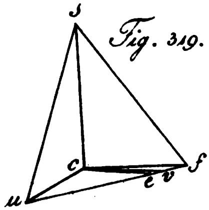


Fig. 319.

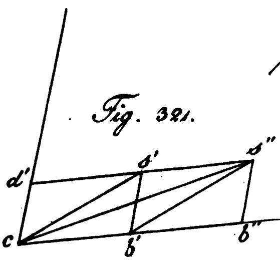


Fig. 321.

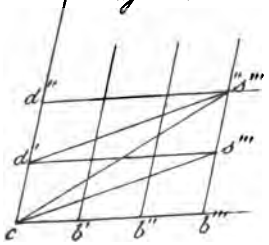
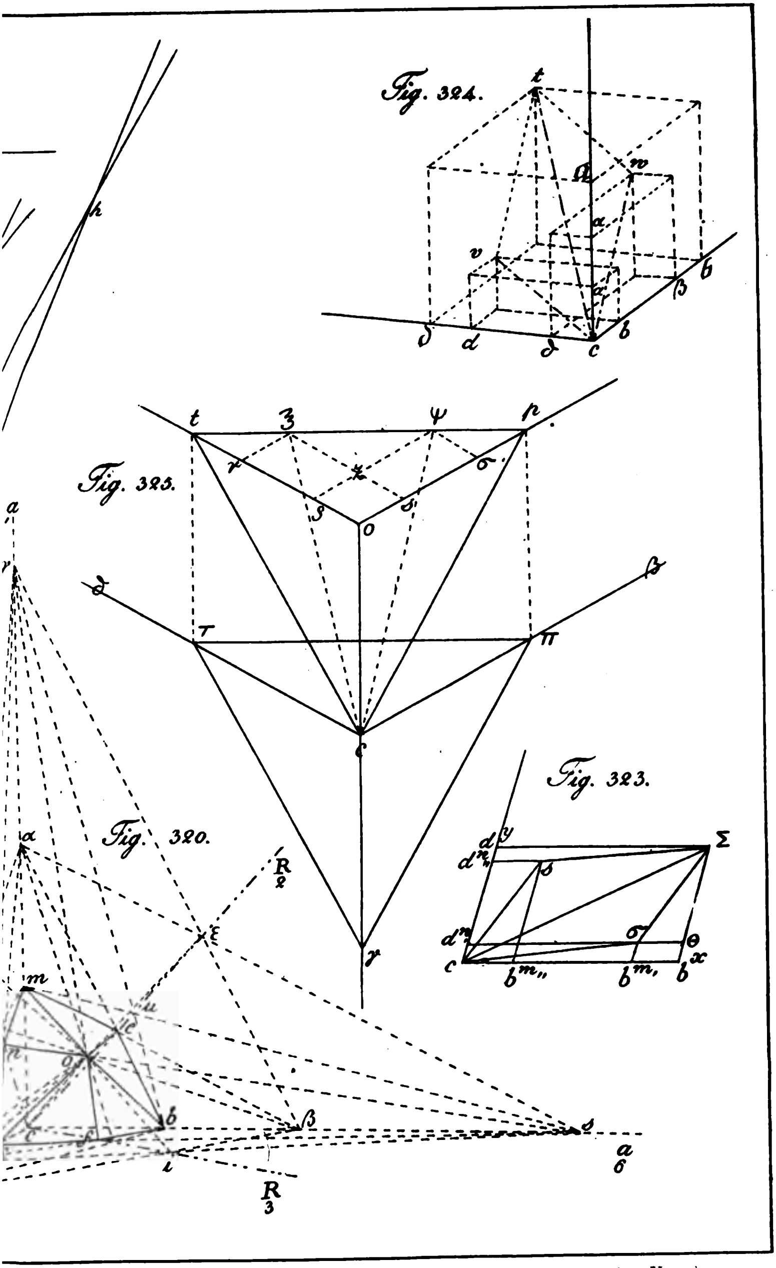


Fig. 322.



ngelmann in Leipzig

Ant. Karcher sc.

Fig. 326.

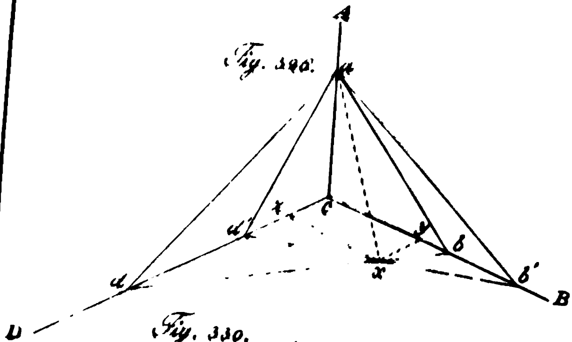


Fig. 327.

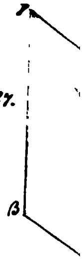


Fig. 330.

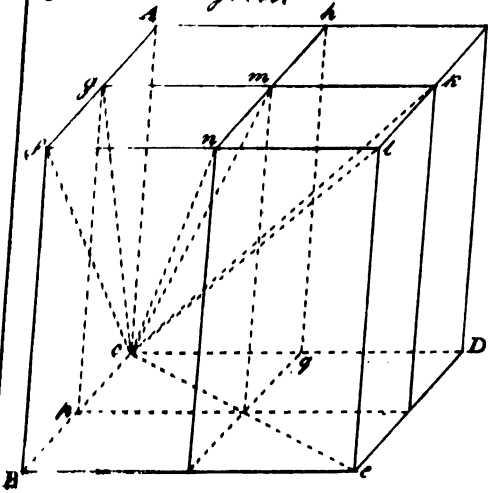


Fig.

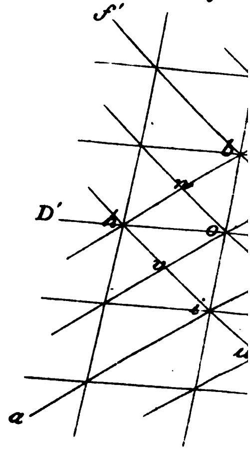
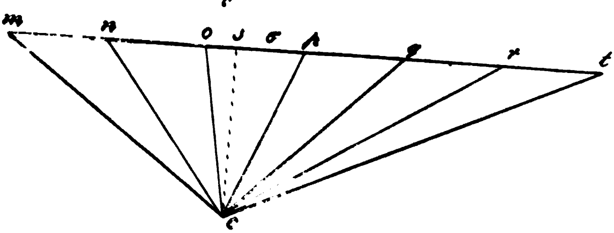


Fig. 333.



Verlag von **Wilhelm E**

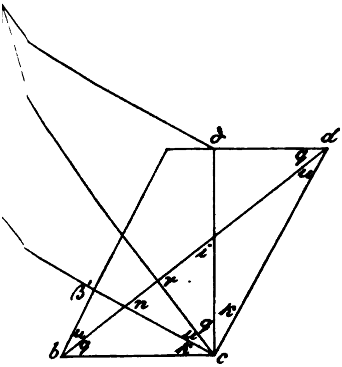


Fig. 328.

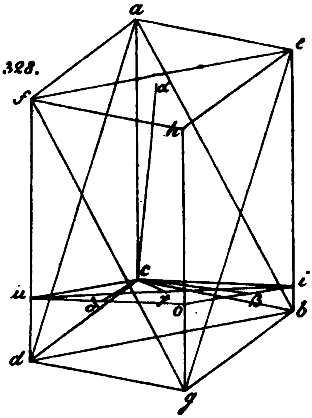


Fig. 331.

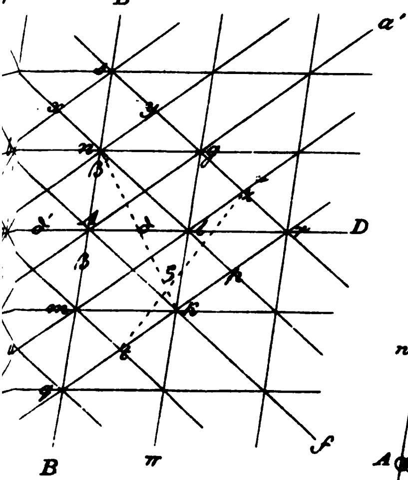


Fig. 329.

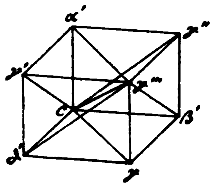
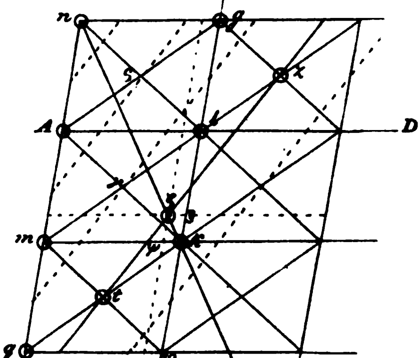


Fig. 332.



Nr. 27. **Robert Bunsen**, Untersuchungen übe 1843.) Herausgegeben von Adolf vo Text. (148 S.) *M* 1.80.

» 28. **L. Pasteur**, Über die Asymmetrie be ganischen Verbindungen. (1860.) Übe Ladenburg. (36 S.) *M* —.60.

» 29. **L. Wilhelmy**, Über das Gesetz, nach welchem die Einwirkung der Säuren auf den Rohrzucker stattfindet. (1850.) Herausgegeben von W. Ostwald. (47 S.) *M* —.80.

» 30. **S. Cannizzaro**, Abriss e. Lehrganges der theoret. Chemie, vorgetr. an d. k. Universität Genua. (1858.) Übersetzt von Dr. Arthur Miolati aus Mantua. Herausg. v. Lothar Meyer. (61 S.) *M* 1.—.

» 34. **R. Bunsen** u. **H. E. Roscoe**, Photochemische Untersuchungen. (1855—1859.) Erste Hälfte. Herausgegeben v. W. Ostwald. Mit 13 Figuren im Text. (96 S.) *M* 1.50.

» 35. **Jacob Berzelius**, Versuch, die bestimmten und einfachen Verhältnisse aufzufinden, nach welchen die Bestandtheile der unorgan. Natur mit einander verbunden sind. (1811—1812.) Herausgegeben von W. Ostwald. (218 S.) *M* 3.—.

» 38. **R. Bunsen** und **H. E. Roscoe**, Photochemische Untersuchungen (1855—1859.) Zweite Hälfte. Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 18 Figuren im Text. (107 S.) *M* 1.60.

» 42. **A. v. Humboldt** u. **J. F. Gay-Lussac**, Das Volumgesetz gasförm. Verbindungen. Abhandlungen. Herausg. v. W. Ostwald. (42 S.) *M* —.60.

» 45. **Humphry Davy**, Electrochemische Untersuchungen. Vorgelesen in der königl. Societät zu London als Bakerian Lecture am 20. November 1806 und am 19. November 1807. Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 1 Tafel. (92 S.) *M* 1.20.

» 58. **Carl Wilhelm Scheele**, Chemische Abhandlung von der Luft und dem Feuer. (1777.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 5 Textfiguren. (112 S.) *M* 1.80.

» 66. **J. W. Doebereiner** und **Max Pettenkofer**, Abhandlungen über die Anfänge des natürlichen Systemes der chemischen Elemente, nebst einer geschichtlichen Übersicht der Weiterentwickelung der Lehre von den Triaden der Elemente. Herausgegeben von Lothar Meyer. (34 S.) *M* —.60.

» 68. **Lothar Meyer** und **D. Mendelejeff**, Abhandlungen über das natürliche System der chemischen Elemente. (1864—1869 und 1869—1871.) Hrsgeg. v. Karl Seubert. Mit 1 Tafel. (134 S.) *M* 2.40.

» 72. **G. Kirchhoff** und **R. Bunsen**, Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen. (1860.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 2 Tafeln und 7 Figuren im Text. (74 S.) *M* 1.40.

» 74. **Claude Louis Berthollet**, Untersuchungen über die Gesetze der Verwandtschaft. (1801.) Herausg. von W. Ostwald. (113 S.) *M* 1.80.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlung über die Herleitung aller krystallographischer Systeme mit ihren Unterabtheilungen aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgegeben von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) *M* 1.50.

» 88. **Joh. Friedr. Christian Hessel**, Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie, auf eigenthümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie mit vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen. (1830.) Erstes Bändchen. Mit 8 Tafeln. Herausgegeben von E. Hess. (192 S.) *M* 3.—.

» 89. —— —— (1830.) Zweites Bändchen. Mit 3 Tafeln. Herausgegeben von E. Hess. (165 S.) *M* 2.80.

» 92. **H. Kolbe**, Über den natürlichen Zusammenhang der organischen mit den unorganische ... tliche Grundlage zu einer naturgemäs ... chemischen Körper. (1859.) Herausg ... (42 S.) *M* —.70.