A mon cher

Monsieur [illegible]

Hommage très cordial

M. Frolow

Le 7 février 1899

LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

DÉMONTRÉE RIGOUREUSEMENT

LA THÉORIE DES PARALLÈLES

DÉMONTRÉE RIGOUREUSEMENT

ESSAI

SUR LE LIVRE Ier DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

PAR

MICHEL FROLOV

DEUXIÈME ÉDITION

REVUE ET COMPLÉTÉE

PARIS
CARRÉ & NAUD, ÉDITEURS
3, rue Racine.

BALE ET GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

1899

GENÈVE

IMPRIMERIE W. KÜNDIG & FILS

PRÉFACE

> « Ex falsis verum effici non potest. »

> « Il est impossible que le faux soit ja-
> « mais utile... la vérité prêtera toujours de
> « bons arguments sans qu'on soit obligé
> « d'avoir recours aux chimères. »
>
> MAUPERTIUS.

Il était reconnu depuis plus de vingt siècles que la théorie des parallèles, étant basée sur l'axiome XI ou le postulat V d'Euclide, manquait de solidité, ce qui empêchait la géométrie d'être considérée comme une science exacte. En vain a-t-on fait des essais innombrables pour démontrer cet axiome, et la multiplicité de ces tentatives infructueuses témoigne de l'anxiété que cette question ardue a fait naître dans l'esprit des mathématiciens. Legendre, après des recherches persévérantes, est parvenu enfin à prouver rigoureusement que *la somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne peut être plus grande que deux angles droits.* Malheureusement, l'illustre géomètre, qui ne s'adonnait jamais qu'à des travaux utiles, entrepris toujours dans une bonne voie, n'a pu prouver que *cette somme ne peut être moindre que deux angles droits;* s'il y avait réussi, la théorie des parallèles serait établie définitivement dès le commencement de notre siècle et l'on n'aurait pas osé se jeter dans des théories hasardées fondées sur des hypothèses arbitraires.

Tous ces insuccès ont suggéré des doutes sérieux sur la possibilité de démontrer l'axiome des parallèles ou une proposition équivalente et ont déterminé quelques mathématiciens téméraires à envisager la question sous un autre point de vue, en se passant de cet axiome. Il y a lieu de présumer que cette initiative émanait du grand Gauss. En effet, sa thèse inaugurale, publiée en 1799, contient un passage qui indique qu'il s'occupait déjà alors de la création de la théorie des quantités complexes, qu'il opposait à *un triangle à la fois rectangle et équilatéral,* absolument impossible, comme renfermant dans sa définition, une contradiction logique. « *Dans une disposition d'esprit pareille,* — dit M. Vassiliev, l'éminent professeur à l'université de Kasan, — *il était naturel de se demander s'il n'était pas possible de construire une géométrie indépendante du postulat d'Euclide*[1]. » — On s'est imaginé que *dans la théorie rien ne s'oppose à admettre que la somme des angles d'un triangle rectiligne soit moindre que deux angles droits,* et l'on a admis aussitôt cette hypothèse que Legendre n'a pu réfuter. Ainsi surgit, dans le second quart de notre siècle, une nouvelle doctrine que Gauss appela *géométrie non-euclidienne* et qui fut élaborée presque simultanément par Lobatschevsky, disciple de Bartels, ami de Gauss, et par Jean Bolyai, dont le père, Wolfgang Bolyai, fut également ami de Gauss. Mais cette doctrine n'aurait probablement pas survécu à ses auteurs, si après la mort de Gauss, qui n'a jamais rien publié de ses travaux personnels sur ce sujet, on n'avait publié sa correspondance avec Schumacher. Dans ses lettres du 12 juillet 1831 et du 28 novembre 1846, il disait, entre autres, que *la géométrie non-euclidienne ne renfermait en elle rien de contradictoire, quoique, à première vue, ses résultats aient l'air de paradoxes,* que *ces contradictions apparentes doivent être regardées comme l'effet d'une illusion, due à l'habitude... de considérer la géométrie euclidienne comme rigoureuse,* que *la géométrie non-euclidienne devrait exister... si la géométrie euclidienne n'était pas vraie,* qu'*il s'en est occupé lui-même pendant 54 ans (depuis 1792)* et que *Lobatschevsky a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique.*

Ces révélations du célèbre mathématicien ont suffi pour assurer le succès de la nouvelle doctrine, et depuis lors on a vu augmenter rapidement le nombre de ses partisans.

Bientôt un savant professeur n'hésita pas à déclarer que *désormais les tentatives de démontrer l'axiome d'Euclide, autrement que par*

---

[1] Recueil de la Société physico-mathématique de Kasan. 1884.

l'expérience, devront être mises au même rang que la quadrature du cerle et le mouvement perpétuel[1]. On est allé même jusqu'à prétendre que des savants non-euclidiens avaient prouvé que le postulat d'Euclide était indémontrable, quand on part de la définition classique de la droite et qu'au lieu d'une seule géométrie il en existe trois ou même un nombre infini, toutes également rigoureuses et possibles[2].

Malgré ces assertions et bien d'autres, non moins décourageantes, il était difficile de se contenter de *résultats ayant l'air de paradoxes,* sans avoir aucune apparence de vérité[3]. Il était pénible d'accepter l'idée que les lois de l'étendue soient livrées au hasard et que l'axiome des parallèles ne soit pas une nécessité géométrique absolue, comme le sont, par exemple, les trois dimensions de l'espace. Il était enfin impossible d'admettre dans l'espace réel, qui est unique et homogène, l'existence de plusieurs géométries distinctes, sans qu'on puisse savoir laquelle est réalisée dans la nature. Qu'est-ce qui empêcherait dès lors l'existence de plusieurs mécaniques, de plusieurs géodésies, de plusieurs cristallographies, etc.? — Ce serait réduire la géométrie au rôle d'une étude analytique, ou tout bonnement, supprimer la géométrie et l'esprit humain qui l'a créée, *en renfermant,* selon l'expression de d'Alembert, *toute la logique dans les formules.*

Dans cet état de choses, pour conserver à la géométrie son rang de science exacte et pour empêcher la nouvelle doctrine de s'introduire dans l'enseignement, il devenait urgent de décupler les efforts pour

---

[1] Hoüel. *Essais sur les principes fondamentaux de la géométrie.*

[2] En effet, on a aujourd'hui, outre la géométrie léguée par Euclide, les systèmes géométriques de Lobatchevsky et Bolyai, de Riemann, de MM. Beltrami, Frischauf, de Tilly, Gérard (approuvé par l'Académie des Sciences de Paris en 1892 et par la Société physico-mathématique de Kasan en 1897), etc., etc. Comme chacun de ces systèmes dépend d'un paramètre absolument indéterminé, leur nombre paraît être infini.

[3] Les *résultats qui ont l'air de paradoxes* sont nombreux : 1. La dépendance des angles de parallélisme d'une certaine longueur, qui contredit le principe de l'homogénéité; 2. L'impossibilité des droites équidistantes; 3. L'existence des droites qui n'ont aucune perpendiculaire commune et sont asymptotes l'une de l'autre; 4. L'existence de celles qui n'ont qu'une seule perpendiculaire commune, à partir de laquelle elles divergent indéfiniment; 5. L'absence de figures semblables; 6. L'existence d'une limite finie de l'aire d'un triangle, etc., etc.

démontrer la théorie des parallèles. Mais on ne pouvait guère y aboutir qu'en prouvant que la doctrine non euclidienne renferme en elle une contradiction intrinsèque, car les non-euclidiens acceptent de bonne grâce les résultats les plus invraisemblables, auxquels conduit cette doctrine, ce qui paralyse toutes les démonstrations par la réduction à l'absurde. C'est plutôt là et non pas dans la définition de la ligne droite, que se trouve la difficulté qui a arrêté pendant des siècles les efforts de tant de géomètres.

Nous avons longtemps étudié cette question aussi importante que difficile et délicate, sans arriver à un résultat décisif[1]. Ce n'est qu'après deux ans de travail que nous avons eu la chance de prouver le théorème qui a résisté longtemps aux efforts de Legendre et c'est surtout aux travaux de ce géomètre, si admirable par son dévouement désintéressé à la science et par son amour de la vérité, que nous attribuons notre succès. Nous avons réussi à prouver, qu'en admettant avec les non-euclidiens que la somme des angles d'un triangle rectiligne soit moindre que deux angles droits, on arrive inévitablement à des triangles dont la somme des angles surpasse deux droits, ce qui est impossible, comme l'a prouvé Legendre, et après lui Lobatchevsky lui-même[2], et se trouve en contradiction manifeste avec l'hypothèse admise, qui sert de base à la géométrie non-euclidienne.

Il s'ensuit naturellement que cette dernière, telle que l'avaient conçue Gauss, Lobatschevsky et Bolyai, ne saurait subsister sur un plan. Ce fait a été prévu par M. Beltrami, qui a essayé de lui *trouver une base réelle* en prouvant que *ses théorèmes subsistent sans restriction pour toutes les surfaces de courbure constante négative, si l'on considère les géodésiques de ces surfaces comme des lignes droites.* Mais il est clair, sans aucun calcul, que sur une pseudosphère[3], comme sur toute autre surface de révolution, on peut toujours mener entre

---

[1] Les principaux résultats de ces travanx sont exposés dans deux opuscules : I. *Démonstration de l'axiome XI d'Euclide*, 1896, et II. *Recherches sur la théorie des parallèles,* 1897. Genève, Georg & Cie.

[2] LOBATCHEVSKY. *Recherches géométriques*, n° 19.

[3] On appelle *pseudosphère* la surface de révolution engendrée par la développante d'une chaînette, appelée tractrice ou tractoire, tournant autour de la directrice de celle-ci.

deux points, pris sur deux méridiens opposés, deux géodésiques égales, contournant la surface de deux côtés opposés. Il existe donc sur une pseudosphère, comme sur une sphère, et sur toute surface rentrant en elle-même, une infinité de géodésiques qui ne satisfont pas à la définition classique de la ligne droite, celle qui ressort de l'axiome XII ou du postulat VI d'Euclide. Par conséquent, on a le droit de douter que la géométrie non-euclidienne puisse subsister sur une surface quelconque de l'espace réel, et il est licite d'affirmer que la seule géométrie vraie et possible est celle d'Euclide.

Lobatschevsky semble avoir senti cette vérité, lorsqu'il disait dans sa « Géométrie imaginaire » que *son hypothèse ne peut avoir d'application que dans l'analyse, puisque les mesures directes ne nous montrent pas dans la somme des angles d'un triangle rectiligne la moindre déviation de deux angles droits.*

Dans l'opuscule que nous présentons à l'attention des géomètres, la théorie des parallèles est appuyée sur le théorème XIV, que nous avons réussi à démontrer. Il fallait pour cela refondre presque tout entier le livre I des Eléments d'Euclide, en altérant l'ordre et l'énoncé des propositions. Nous avons profité de cette occasion pour combler quelques lacunes, ainsi que pour simplifier les démonstrations ou les rendre plus directes. Chacun peut à son gré accepter ou rejeter ces additions et modifications; mais quel que soit le jugement qu'on en portera, nous considérons comme terminée la tâche que nous nous sommes imposée et nous n'y reviendrons plus, en nous contentant de dire avec Cicéron : « *Quod potui feci, faciant meliora potentes.* »

Cette deuxième édition de notre opuscule diffère de la première par quelques éclaircissements sur le théorème XIV, qui a attiré l'attention des mathématiciens. Nous avons déjà présenté une note sur leurs observations, l'année passée, au Congrès de Nantes de l'Association Française pour l'avancement des sciences. Il suffit de dire ici qu'il semble que toutes les objections reposent sur deux sophismes bien connus : 1° On remplace les lignes droites par des lignes courbes et l'on raisonne sur ces dernières, comme si elles étaient droites. C'est le sophisme appelé *ignorance du sujet,* qui consiste, entre autres, *à prouver la chose en question, mais d'un autre objet que celui qui est en question;* — 2° Le prétendu *théorème du déficit angulaire* n'étant autre chose qu'une conséquence de l'hypothèse que nous réfutons, il s'ensuit qu'en invoquant ce théorème pour soutenir ou justifier l'hypothèse, on tombe dans le sophisme appelé *pétition de principe.* Nous espérons que ces éclaircissements suffiront pour écarter dorénavant les objections fondées sur les dits sophismes et que nous n'aurons plus à revenir à la théorie des parallèles.

Genève, le 21 janvier 1899.

INTRODUCTION

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

I. L'espace, où tous les objets occupent leurs places et exécutent leurs mouvements, est nécessairement continu et infini, car il est impossible de concevoir une borne qui puisse l'interrompre ou s'opposer à son extension ultérieure. « *Nous pouvons encore imaginer au delà,* a dit Descartes, *des espaces indéfiniment étendus.* » La réalité de l'espace est clairement attestée par la perception.

Son existence est non seulement indépendante de la matière, mais elle est encore plus nécessaire que celle de la matière, car, comme l'a remarqué Kant, *il est impossible de se représenter qu'il n'y ait point d'espace, quoiqu'on puisse bien concevoir qu'il ne s'y trouve pas d'objets.*

En faisant l'abstraction de toute la matière qu'il contient, l'espace deviendra vide et par conséquent *homogène,* car on ne saurait concevoir autrement un vide. Il pourra alors être divisé par la pensée en portions limitées ou non limitées, de diverses formes et grandeurs, que l'on appelle *corps géométriques.* Leurs limites mutuelles, appelées *surfaces géométriques,* ont chacune deux faces opposées. A leur tour, les surfaces peuvent être divisées mentalement en différentes portions, fermées ou ouvertes, par des *lignes géométriques.* Enfin on peut diviser les lignes en plusieurs segments par des *points géométriques.* Un point géométrique est indivisible, étant censé n'avoir aucune étendue ; une ligne ne s'étend qu'en *longueur* qui constitue son unique dimension ; une surface s'étend non seulement le long d'une ligne qui s'y trouve, mais encore transversalement à cette ligne, et l'on dit qu'elle a deux dimensions — longueur et *largeur,* enfin un corps s'étend comme une surface qu'il contient et en outre transversalement à cette surface, et l'on dit qu'il a trois dimensions — longueur, largeur et *épaisseur*, de même que l'espace entier, dont il fait partie. Ainsi, il y a trois espèces différentes d'étendue — lignes, surfaces et corps, dont chacune peut être considérée indépendamment des autres; on peut également imaginer des points indépendamment des lignes. La grandeur d'une ligne limitée est déterminée par sa longueur; la grandeur d'une surface limitée s'appelle *aire;* enfin la grandeur d'un corps est appelée *volume.* L'espace renferme en lui ces trois espèces d'étendue; il en est de même des corps; mais les surfaces, en renfermant les lignes et les points, ne peuvent renfermer la moindre parcelle d'un corps, et les lignes, en renfermant les points, ne peuvent renfermer la moindre parcelle ni d'un corps, ni d'une surface.

Remarque. Il est difficile de présenter au début de la géométrie une définition entièrement satisfaisante des dimensions de l'étendue. Ce n'est qu'en considérant la détermination et la mesure des aires et des volumes, qu'on en peut donner une explication complète. Euclide, malgré les subterfuges et les scrupules des sophistes, s'est borné à dire tout court, qu'*une ligne est une longueur sans largeur*, qu'*une surface est ce qui a longueur et largeur* et qu'*un corps est ce qui a longueur*, *largeur et profondeur* (épaisseur).

Un de ses traducteurs, Henrion, dans son ouvrage publié en 1615 a jugé nécessaire d'expliquer qu'*une ligne n'est autre chose que le flux ou coulement du point en longueur* et que *la ligne se mouvant en travers produit la superficie.* Leibnitz, dans un de ses ouvrages philosophiques, a dit que *le nombre ternaire des dimensions est une nécessité géométrique, parce que les géomètres ont pu démontrer qu'il n'y a que trois lignes droites perpendiculaires qui se puissent couper dans un même point*[1]. (Essais sur la bonté de Dieu, n° 350.) Pourtant Legendre accepta les définitions d'Euclide sans aucune explication et en même temps le philosophe allemand Hegel émettait l'opinion suivante: « *En tant que la géométrie n'est pas une science philosophique et qu'elle accepte comme son objet l'espace avec ses déterminations géné-*

---

[1] On a essayé de critiquer cette déclaration du grand géomètre et philosophe, en invoquant la géométrie des êtres superficiels, purement chimériques, qui ne sauraient exister nulle part et encore moins créer une géométrie.

rales, on ne doit pas exiger qu'elle démontre la nécessité des trois dimensions. » (Philosophie der Natur.)

Lacroix se contenta d'expliquer les trois dimensions en disant qu'*un corps ne saurait être privé de l'une de ces dimensions, sans cesser d'exister*, que *les surfaces n'ont pas d'épaisseur* et que *les lignes n'ont ni épaisseur, ni largeur*.

Les auteurs de la plupart des traités modernes ont rejeté les définitions d'Euclide et ne parlent plus des dimensions de l'étendue. Cependant dans l'un des meilleurs parmi eux, on trouve des explications sur ce sujet. C'est en parlant du parallélépipède rectangle qu'il y est dit qu'on entend *sous les noms de longueur, largeur et hauteur les trois sens principaux de l'étendue des corps, bien que la plupart de ces corps n'aient, à proprement parler, ni longueur, ni largeur, ni hauteur, positivement assignables*, que *le mot, « longueur » ne peut s'appliquer rigoureusement qu'aux lignes droites* et que *les surfaces courbes et même les lignes courbes, quand elles ne sont pas planes, exigent à la fois, la considération de ce qu'on nomme « les trois dimensions*[1]. »

Il semble pourtant que, tout en exigeant pour leur représentation l'emploi des trois coordonnées, ces surfaces n'ont, tout de même, que deux dimensions, et ces lignes n'en ont qu'une seule ; et par suite ces surfaces et ces lignes ne diffèrent sous ce rapport en rien des plans et des lignes droites. Il semble aussi que, pour éviter toute confusion entre les dimensions et les coordonnées, il serait préférable de considérer les dimensions non comme des lignes quelconques positivement assignables, mais simplement comme des *facteurs linéaires*. Ainsi, le produit de deux facteurs linéaires, inégaux ou égaux, détermine l'aire, et celui de trois facteurs quelconques — le volume d'une figure. Par exemple, dans une sphère il n'y a qu'une ligne déterminée, son diamètre ou son rayon, dont la première puissance sert à évaluer la longueur de la circonférence du grand cercle, la deuxième puissance — l'aire du grand cercle et celle de la surface du grand cercle, et la troisième — le volume de la sphère.

On parle actuellement des espaces à plus de trois dimensions, mais ce ne sont que des pures fictions analytiques ou, comme on dit, des groupes de quatre, de cinq et d'un plus grand nombre de variables

[1] H. Sonnet. *Géométrie théorique et pratique,* 1848. Troisième édition, nº 624.

indépendantes auxquels on applique le langage géométrique, parce qu'il est plus concis et permet aux analystes de faire des généralisations. Ces espaces-là n'ont aucun rapport avec l'espace réel.

II. On appelle *figure géométrique* un ensemble quelconque que l'on puisse imaginer et représenter, de points, de lignes et de surfaces. La science qui étudie leurs propriétés et rapports s'appelle *géométrie*. Ces figures étant de pures créations de notre esprit, dont l'image ne se rencontre pas toujours dans la nature, il dépend de nous de les supposer telles que nous voulons. Mais, il est nécessaire qu'on puisse les imaginer et représenter graphiquement, car autrement elles ne sauraient exister dans l'espace réel et ne seraient pas des figures géométriques.

Remarque. On considère dans l'analyse, par exemple, la fonction découverte par Weierstrasse, qui, quoique continue, n'a pas de dérivée. Cette fonction correspond à une courbe n'ayant pas de tangente, qui ne peut pas être construite graphiquement, et par suite ne saurait pas exister dans l'espace réel. On connaît un grand nombre d'autres fonctions qui n'ont aucune réalité géométrique.

Pour faciliter les démonstrations, on se représente en général les figures géométriques comme rigoureusement invariables de forme et de grandeur ; mais rien n'empêche, en cas de besoin, de supposer qu'elles soient variables.

Remarque. L'idée d'invariabilité des figures est tout intuitive et ne nous vient aucunement de l'expérience, comme le pensait Hoüel, car la nature ne présente rien d'invariable.

Libre à nous de mener des lignes quelconques par n'importe quels points et d'engendrer des figures qu'il nous plaît par des mouvements quelconques, sans demander la permission de personne, contrairement à ce que faisait Euclide, pour éviter les objections des sophistes, car c'est le droit incontestable de notre pensée, pourvu qu'elle n'entre pas en contradiction avec elle-même.

Pour aider nos raisonnements, nous pouvons transporter mentalement les figures en les posant l'une sur l'autre, afin de nous assurer par leur coïncidence, de leur égalité. Ce procédé, nommé la *superpo-*

sition des figures, offre un secours important à la géométrie. Mentionnons encore un procédé, que nous nommerons *juxtaposition des figures,* celui où l'on pose les figures l'une à côté de l'autre, en les accolant, pour les réunir en une seule figure. Ces procédés, ainsi que la représentation graphique, constituent les moyens d'investigation importants, qui permettent à la géométrie d'établir solidement ses propositions.

III. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite,* et de toutes les surfaces — la *surface plane* ou le *plan.* Quoique les notions de la ligne droite et du plan soient familières à tout le monde, il faut reconnaître avec d'Alembert que *leurs définitions sont nécessaires, car on ne saurait connaître leurs propriétés, sans partir de quelque propriété de ces lignes et de ses surfaces qui puisse être aperçue à la première vue de l'esprit.* — Il est évident que ces notions, étant des concepts de l'esprit, ne sont ni axiomes, ni postulats, et qu'il suffit d'en avoir des définitions claires et précises.

La propriété la plus caractéristique des lignes droites, celle que l'on conçoit le plus nettement, paraît être celle-ci : — *Deux lignes droites se superposent dans toutes leurs positions respectives et forment une seule droite, lorsqu'elles ont deux points communs*[1]. Euclide a énoncé cette propriété en disant dans son axiome XII, ou postulat VI, qui n'est qu'une définition déguisée, que *deux lignes droites n'enceignent pas un espace.* Il s'ensuit immédiatement que deux droites ne peuvent se couper en plus d'un seul point. On conçoit la possibilité des lignes droites autant par l'intuition que par l'observation, car on en trouve l'image dans un rayon de soleil, dans une arête de cristal, dans un fil à plomb, etc.

On peut définir le plan d'une manière analogue, en disant que *deux plans sont superposables par leurs deux faces, lorsqu'ils ont trois points communs non situés en ligne droite*[2]. Nous avons du plan une idée intuitive et nous en trouvons l'image dans une table bien unie, dans une face de cristal, etc.

IV. Les lignes droites étant superposables entre elles, et les plans

---

[1] C'est à peu près la définition donnée par Lobatchevsky : « *la ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions.* »

[2] Selon Hoüel, *l'expérience fait naître en nous l'idée d'une surface superposable à elle-même par retournement. Cette surface est le plan.*

aussi, il en résulte qu'une ligne droite est superposable sur un plan et que, par suite, une droite qui a deux de ses points dans un plan y est contenue tout entière. On comprend dès lors que la définition du plan, donnée par Legendre: « *Le plan est une surface, dans laquelle prenant deux points à volonté et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est tout entière dans la surface,* » — est complètement satisfaisante, qu'*elle ne contient pas une infinité de conditions, dont la compatibilité n'est pas démontrée et ne recèle aucune contradiction intrinsèque.*

Remarque. En effet, prenons dans un plan deux points et joignons-les par une droite ; prenons une seconde figure pareille à celle-là, et superposons les deux plans, en faisant coïncider les deux points de l'un avec les deux points de l'autre. Si l'on supposait que chacune des droites n'était pas tout entière dans le plan respectif, on aurait, après la superpositions des plans deux droites menées par deux points, ce qui est contraire à la définition de la ligne droite. Donc ces lignes sont tout entières dans leurs plans.

Si l'on engendre, à l'exemple du savant belge J. Delbœuf[1] et de quelques autres auteurs, un plan, en faisant passer par un point et une droite fixes une infinité de droites, et si l'on superpose ce plan avec un autre plan engendré de la même manière, on obtiendra un nouveau plan contenant les deux faisceaux de droites, qui ont servi à engendrer les deux plans, et qui formeront un réseau rectiligne situé tout entier dans ce plan. On doit donc reconnaître que la définition de Legendre, qui fut adoptée par Lacroix, Catalan, Briot, etc., est entièrement exacte, sans demander *un théorème qui en établisse la possibilité,* comme le voulait Delbœuf, et que par suite on ne doit pas penser avec lui que *la possibilité de tracer des figures rectilignes est une supposition toute gratuite et qu'à ce point de vue la géométrie manque de base.*

V. La géométrie est divisée en deux parties : 1° la *géométrie plane* ou la *planimétrie* considère les propriétés et les rapports des figures situées dans un plan, et 2° la *géométrie dans l'espace* ou la *stéréométrie* considère les propriétés et les rapports des figures qui ne sauraient être placées dans un plan.

---

[1] J. Delbœuf. *Prolégomènes philosophiques de la géométrie,* 1860, pages 191-195.

On doit y exposer tous les faits dans un ordre simple et naturel, en évitant les démonstrations compliquées et détournées et en prenant soin *autant d'éclairer l'esprit que de le convaincre.* Les faits qui peuvent être établis au moyen d'un simple raisonnement ou par une superposition des figures doivent être exposés simplement; il n'y a que des faits compliqués dont la démonstration exige le secours d'un dessin qu'on doive ériger en *théorèmes.* Les conséquences immédiates d'un théorème sont dites ses *corollaires.*

La géométrie, étant une science exacte, ne doit admettre aucun axiome, aucun postulat, aucune hypothèse non démontrée et tenue pour article de foi. Elle se déduit de ses définitions logiquement, s'appuyant sur le grand principe logique de l'identité et de la contradiction, comme l'a dit Leibnitz, dans sa seconde lettre à Clarke.

GÉOMÉTRIE PLANE

LIVRE PREMIER

I. Figures rectilignes.

1. — La plus simple de toutes les figures planes est un *angle rectiligne,* formé par deux droites qui partent d'un point [1]. Ce point est dit le *sommet* et les deux droites les *côtés* de cet angle.

> *Remarque.* Selon Euclide, l'angle est l'*inclinaison* et selon Legendre l'*écartement* respectif de deux droites qui se coupent; Bezout et Bossut ont préféré le mot *ouverture ;* — ces définitions ne sont que des tautologies. Il semble qu'on ne devrait non plus confondre la notion de l'angle avec celle du plan, car ces notions sont indépendantes l'une de l'autre, et qu'il est plus correct d'envisager un angle comme une quantité abstraite. Ainsi Lobatschevsky désignait deux angles droits par le nombre abstrait π qui exprime le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

Une suite de lignes droites et d'angles est dite *ligne brisée;* les lignes dont aucune partie n'est droite sont dites *lignes courbes.* Une ligne brisée est *convexe* lorsqu'elle ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points. Si elle rentre en elle-même elle forme un *polygone* qui a autant de sommets que de côtés. Le plus simple des polygones est le *triangle,* qui a trois angles et trois côtés; puis viennent le *quadrilatère* ou le *quadrangle,* le *pentagone,* l'*hexagone,* etc., qui ont respectivement quatre, cinq, six côtés, etc. Le contour d'un polygone s'appelle *périmètre.*

---

[1] Cette définition a été donnée par Lacroix et admise par M. de Tilly.

2. — Archimède a défini la ligne droite en disant qu'*elle est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.* Malgré ses imperfections, cette définition donne une idée très nette de la ligne droite, et c'est sans doute à cause de cela qu'elle a été admise par Legendre, Lacroix, Catalan, Briot et tant d'autres géomètres. Tout en préférant la définition contenue dans l'axiome XII d'Euclide, nous croyons nécessaire d'expliquer la propriété de la ligne droite d'être la ligne la plus courte. D'abord, c'est la seule ligne entre deux points qui soit unique dans son genre et par suite la seule qui soit susceptible d'être la plus courte. Superposons deux droites inégales $AB < AC$, en faisant coïncider leurs extrémités A. Alors l'extrémité B se placera entre A et C. On voit nettement qu'on ne peut amener B sur C, sans changer la longueur A B, qu'en rompant cette ligne. Au contraire, si l'on voulait amener C sur B, on ne pourrait le faire qu'en brisant ou en courbant la ligne A C de n'importe quelle manière. Ces opérations sont tout à fait légitimes, car rien n'empêche de faire l'abstraction par la pensée de la rigidité de ces lignes. Donc la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités, et c'est pour cela qu'on la considère comme la *distance de deux points.*

Remarque. On pourrait vérifier ce raisonnement par une expérience. Un sauvage comprend que son arc est tendu parce que la corde est plus courte que le bois de cet arc. On parvient ainsi dès le début de la géométrie à s'expliquer cette propriété importante de la ligne droite, que l'on ne démontre que dans le calcul des variations, par les procédés du calcul infinitésimal qui ne présentent pas plus de rigueur que ceux de la géométrie. Cependant, il ne faut pas oublier que la plupart des personnes qui étudient la géométrie ne vont pas si loin et qu'on ne devrait pas les laisser dans l'ignorance de ce fait important. Quelques penseurs profonds ont partagé cette opinion ; voici l'explication donnée par J. Delbœuf : « Dans la ligne AB, — dit-il, — la plus courte entre les points A et B, chacune des parties, telle que CD, est nécessairement la plus courte entre les points C et D qui la limitent. Or, l'espace étant homogène, la partie CD, en tant que le plus court chemin entre C et D ne peut différer en forme de la ligne AB, le plus court chemin entre A et B. Les parties de cette ligne ont donc la même forme, quelle que soit leur longueur, elles sont semblables entre elles ; la ligne elle-même est donc homogène. »

3. — On peut s'expliquer encore que la ligne droite est la plus courte de toutes les lignes menées entre deux points, en considérant un polygone quelconque A B C D E (Fig. 1). Il est clair qu'il ne saurait subsister si l'on avait A E = ou > A B + B C + C D + D E, car dans ces cas les côtés A B, B C, C D, D E, pourraient tout aussi bien être placés le long du côté A E.

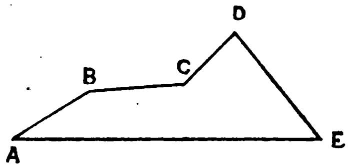


FIG. 1

Cela revient à reconnaître qu'il n'est possible de construire un polygone avec un nombre quelconque de tronçons d'une ligne limitée que si le plus grand parmi eux est moindre que la moitié de cette ligne. C'est une nécessité géométrique, évidente par elle-même et connue même de petits enfants.

Ainsi une ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée ayant les mêmes extrémités. On pourrait en déduire qu'elle est plus courte que toute ligne courbe menée entre les mêmes points, si l'on envisage cette courbe comme une ligne brisée composée d'une infinité de côtés infiniment petits.

> *Remarque.* Le savant Hoüel a reproché à Legendre et à ceux qui ont suivi son exemple, d'avoir adopté la définition de la ligne droite, donnée par Archimède, en disant que cette définition *ne signifie pas autre chose que l'énoncé des conditions de minimum de l'intégrale définie* $\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, *et qu'on fait du calcul intégral, comme M. Jourdain faisait de la prose, et qu'on le fait mal.* Mais les procédés du calcul intégral, basé lui-même sur la considération des limites, n'ajoutent rien à la certitude mathématique que l'on atteint, en appliquant directement à une courbe la considération des limites.

Théorème I. *Une ligne brisée convexe est plus courte que toutes les lignes brisées ou courbes qui l'enveloppent et ont les mêmes extrémités.*

1° Prenons deux lignes brisées ABCD et AEFGHD : il s'agit de démontrer que ABCD < AEFGHD (Fig. 2).

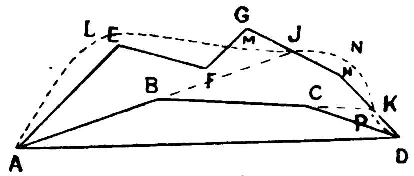


FIG 2

Prolongeons les côtés de la ligne convexe AB et BC jusqu'à leur rencontre avec la ligne extérieure en J et en K. On aura AJ<AEFGI; BK<BJHK; CD<CKD.

En additionnant les premières et les secondes parties de ces inégalités et en éliminant leurs termes égaux, il vient:

$$ABCD < AEFGHD.$$

2° On prouvera de la même manière que la ligne convexe est plus courte qu'une ligne courbe ALMJNKPD qui l'enveloppe et rencontre les prolongements de ses côtés en J et en K.

4. — Pour s'assurer que deux figures planes quelconques sont égales, on les superpose par la pensée. Si leurs côtés et angles se suivent dans le même sens, comme cela a lieu dans les figures P et Q (Fig. 3), on transporte l'une d'elles sur l'autre directement ; mais si les côtés et les angles homologues des deux figures se suivent dans deux sens contraires, comme cela a lieu dans les figures P et R, on renverse l'une d'elles dans le plan.

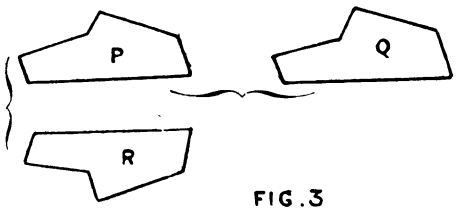


FIG. 3

5. — Deux polygones plans quelconques, ayant n côtés et n sommets, sont superposables et, par suite, égaux, lorsqu'ils ont (n—1) côtés consécutifs et disposés dans le même ordre égaux chacun à chacun, ainsi que les (n—2) angles compris entre eux, ou lorsqu'ils ont (n—1) angles et (—2) côtés consécutifs, disposés entre les sommets de ces angles égaux, égaux chacun à chacun. En effet, en superposant tous les côtés et les angles homologues des deux polygones, les trois autres côtés ou angles homologues coïncideront nécessairement entre eux, de sorte que les deux polygones se couvriront entièrement. Ainsi, deux triangles sont égaux, lorsque l'un d'eux a un côté et deux angles adjacents égaux respectivement à un côté et deux angles homologues de l'autre; ou lorsque l'un d'eux a deux côtés et l'angle compris entre eux égaux à ceux de l'autre triangle. De même, deux quadrilatères sont superposables et égaux, lorsque l'un d'eux a trois côtés et deux angles, compris entre eux égaux respectivement à autant

de côtés et d'angles de l'autre quadrilatère, etc. Tous ces cas d'égalité, qu'on établit par une simple superposition, sans aucun raisonnement, ne constituent pas des théorèmes. — Ce ne sont que de simples identités, évidentes par elles-mêmes. — Ajoutons que deux polygones composés du même nombre de triangles égaux et disposés dans le même ordre sont superposables et, par suite, égaux.

II. Perpendiculaires et obliques.

6.— Deux droites qui se coupent, en formant quatre angles égaux autour de leur point d'intersection, sont dites *perpendiculaires* entre elles, et ces angles sont dits *droits.* Toutes les droites étant superposables, on s'assure, par la superposition des différents couples de droites perpendiculaires, de l'égalité de tous les angles droits. Il s'ensuit immédiatement qu'on ne peut élever sur une droite d'un de ses points qu'une seule perpendiculaire. Il est aussi clair qu'on ne peut pas abaisser sur une droite, d'un point extérieur, plus d'une seule perpendiculaire. En effet, si l'on supposait que d'un point extérieur O on puisse abaisser sur une droite deux perpendiculaires OB et AB, on aurait un triangle ABO, ayant deux angles droits. Prenons un second triangle égal au premier A'B'O', faisant coïncider leur côtés A'B', AB et nous aurons entre deux points O et O' deux droites OAO' et OBO', ce qui est impossible. Il en résulte également que deux perpendiculaires tirées sur une droite prolongées aussi loin qu'on le veut, ne sauraient se rencontrer en aucun point, car autrement on aurait deux perpendiculaires abaissées sur cette droite du point de leur rencontre.

7. — **Théorème II.** *Deux droites coupées par une troisième, appelée sécante, sous des angles correspondants égaux, ou, ce qui revient au même, qui font deux angles intérieurs du même côté de cette sécante, dont la somme est égale à deux angles droits, ne peuvent pas se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.*

En effet, soient données les droites HJ et KL (Fig. 4) coupées par la sécante MN, sous des angles correspondants égaux $\angle JAN = \angle LBN$. Alors on aura $\angle JAN + \angle LBM = 2$ d. Nous allons prouver que HJ et KL ne peuvent pas se rencontrer. Du point C, milieu de AB, abaissons sur HJ la perpendiculaire CD et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec KL en E. Nous aurons $\triangle BCE = \triangle ACD$, car $BC = AC$, $\angle KBM = \angle JAN$ et $\angle BCE = \angle ACD$. Donc les deux triangles sont égaux (5) et nous aurons $\angle BEC = \angle ADC = d$. Par conséquent la droite KL

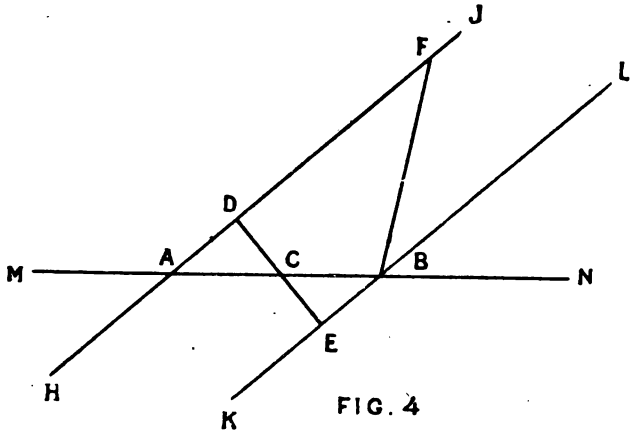


FIG. 4

est perpendiculaire à DE. Il en résulte que HJ et KL étant perpendiculaires à DE ne peuvent pas se rencontrer (6).

8. — Lorsque les angles formés par deux droites, qui se coupent, ne sont pas égaux, on dit que ces droites sont *obliques* entre elles; les deux angles moindres qu'un angle droit sont dits *aigus* et ceux qui sont plus grands qu'un angle droit sont dits *obtus*. On appelle *supplémentaires* deux angles adjacents dont la somme est égale à deux angles droits, et *complémentaires* ceux qui font ensemble un angle droit. Inversement, lorsque deux angles adjacents font ensemble deux angles droits, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite, et lorsqu'ils font ensemble un angle droit, ces côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre. Il en est de même pour plusieurs angles adjacents dont la somme est égale à deux ou à un angle droit. La somme des angles autour d'un point est égale à quatre angles droits.

Les angles formés par l'intersection de deux droites, opposés par le sommet, sont égaux, car, en ajoutant à chacun d'eux le même angle adjacent, la somme des angles dans les deux cas sera égale à deux droits. On dit que les droites qui partent d'un même point indiquent les *directions*, par rapport à ce point, des points qui se trouvent sur leurs prolongements. On appelle *bissectrice* d'un angle une droite qui, partant de son sommet le divise, en deux angles superposables et par conséquent égaux. Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires entre elles, car la somme des moitiés des deux angles est égale à un angle droit.

9. — **Théorème III.** *Parmi toutes les droites qui partant d'un point rencontrent une droite en divers points, la perpendiculaire est la plus courte; les deux obliques menées de part et d'autre de la perpendiculaire et également éloignées de la dernière, sont égales; enfin, de deux obliques quelconques celle qui s'écarte le plus de la perpendiculaire est la plus longue.*

En effet, si l'on abaisse d'un point extérieur O (Fig. 5) sur la droite MN la perpendiculaire OP, les obliques OA et OB, dont les *pieds* A et B sont situées à des distances égales AP = BP du pied P de cette perpendiculaire et une troisième oblique OC, dont le pied C est situé du point P à une distance plus grande CP>BP, on aura OP<OA; OA=OB et OC>OB et >OA.

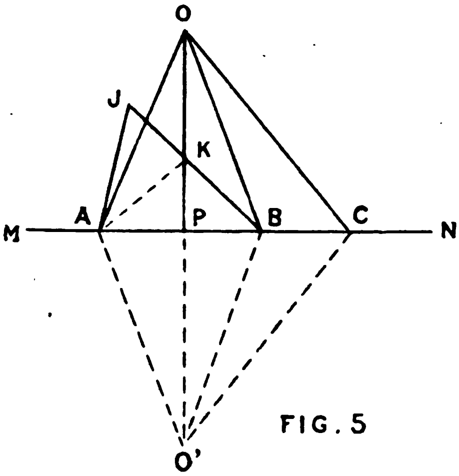


FIG. 5

Pour nous en assurer, faisons tourner le point O et toutes les droites OP, OA, OB, OC autour de la droite MN jusqu'à ce que cette figure soit rabattue sur la partie inférieure du plan, et supposons que le point O vienne en O′ et que les droites OA, OP, OB, OC prennent respectivement les positions O′A, O′P, O′B, O′C[1]. Alors les perpendiculaires OP et O′P formeront une seule droite OO′ et les obliques formeront des lignes brisées OAO′, OBO′, OCO′. Il s'ensuit: 1° Comme une ligne

[1] Il est évident que ce procédé n'est qu'un cas particulier de la juxtaposition des figures égales.

droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités (3), on aura $OO' < OAO'$ et par suite $\frac{OO'}{2} < \frac{OAO'}{2}$, ou $OP < OA$.

2° Comme on a $\triangle\, AOP = \triangle\, BOP$, car OP est leur côté commun, $AP = BP$ et $\angle\, APO = \angle\, BPO$, tous les deux étant droits, et par suite ces deux triangles sont superposables, on aura $OA = OB$.

3° Comme ligne brisée OBO′ est enveloppée par la ligne OCO′, on aura (3) $OCO' > OBO'$, $\frac{OCO'}{2} > \frac{OBO'}{2}$ ou $OC > OB$.

Corollaires : I. *Chaque point de la perpendiculaire élevée du milieu d'une droite est également distant des deux extrémités de cette droite.*

Ainsi, le point P étant le milieu de la droite AB, le point O de la perpendiculaire est également distant des extrémités A et B de la ligne AB, car $OA = OB$.

II. *Tout point situé hors de cette perpendiculaire est plus rapproché de l'extrémité de la droite qui se trouve du même côté de la perpendiculaire.*

Ainsi le point J, pris à gauche de la perpendiculaire OP sera plus rapproché de l'extrémité A située à gauche que de l'extrémité B située à droite de OP. En effet, joignons J avec A et B et le point K avec A, et nous aurons $AK = BK$ et $AJ < AK + JK$, ou en remplaçant AK par BK, $AJ < BJ$.

Comme la perpendiculaire est la plus courte parmi toutes les lignes conduisant d'un point à une droite, elle sert à mesurer leur *distance*.

III. *Une droite ne peut être renfermée dans aucune enceinte.* En effet, quelque loin qu'on prolonge la droite MN, tous ses points seront toujours également distants des points O et O′ et par suite elle ne pourra dévier ni vers l'un, ni vers l'autre de ces derniers points. Donc elle se fera nécessairement une issue dans n'importe quelle enceinte dont on voudrait l'entourer. On peut dire ainsi qu'une droite est une ligne dont chaque point est également éloigné de deux points fixes.

10. — En retournant une figure quelconque autour d'une ligne droite, on obtient une seconde figure égale à la première en semblablement disposée par rapport à cette droite de rotation. Tels sont (Fig. 5) les points O et O′, les droites AO et AO′, les triangles ACO et ACO′. Ces figures sont dites *symétriques* par rapport à la droite

MN autour de laquelle s'est effectuée la rotation, et qui reçoit le nom d'*axe de symétrie.* Un axe de symétrie ne peut être courbé, sans faire cesser l'égalité de deux figures symétriques et, par suite, sans annuler la symétrie.

Il en résulte que les définitions de la ligne droite, tirées de l'axiome XII d'Euclide, sont suffisantes pour distinguer une ligne droite de toutes les lignes courbes.

III. Triangles.

11\. — Un triangle est dit *rectangle* s'il a un angle droit; tel est, par exemple, le triangle AOP (Fig. 5). Le côté opposé à cet angle s'appelle *hypoténuse;* tel est le côté AO; les deux autres s'appellent *cathètes,* tels sont les côtés AP et OP.

Un triangle est *obtusangle* s'il a un angle obtus, et *acutangle,* si tous ses angles sont aigus.

Un triangle est *isoscèle,* s'il a deux côtés égaux, et *équilatéral,* si ses trois côtés sont égaux.

12\. — **Théorème IV**. *Dans un triangle qui a deux angles égaux, les côtés opposés le sont aussi, et ce triangle est isoscèle, et réciproquement.*

Pour le prouver, prenons un triangle ABC (Fig. 6), dans lequel $\angle$ BAC $= \angle$ ACB. Renversons ce triangle, de sorte que le sommet A tombe en A′, B en B′ et C en C′. Les deux triangles ABC et A′B′C′ sont superposables, car

A′C′ $=$ AC, $\angle$ A′C′B′ $=$ $\angle$ ACB $= \angle$ BAC $=$ B′A′C′. Donc le côté C′B′ tombera sur le côté AB, et A′B′ sur BC et ils se rencontreront en un même point B. Donc B′C′ $=$ BC $=$ AB.

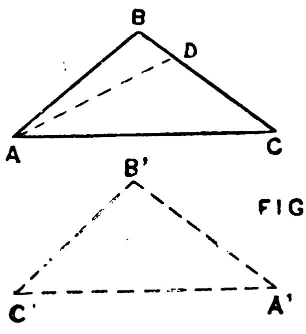


FIG. 6

Réciproquement, *dans un triangle isoscèle les angles opposés aux côtés égaux sont aussi égaux.* Pour le démontrer, nous emploierons la règle de la fausse supposition ou de la réduction à l'absurde. Supposons que dans le triangle ABC (Fig. 6), dans lequel $AB = BC$, on a $\angle ACB < \angle BAC$. Faisons $\angle CAD = \angle ACB$. Alors on aura, selon le théorème, $AD = CD$, et par conséquent, en ajoutant à ces deux lignes la même ligne BD, on aura $AD + BD = CD + BD = BC = AB$, c'est-à-dire que dans le triangle ABD la somme de deux côtés est égale au troisième côté, ce qui est impossible (2 et 3. Donc

$$\angle ACB = \angle BAC.$$

13. — **Théorème V**. *Dans un triangle ayant deux côtés inégaux, l'angle opposé au plus grand côté est le plus grand, et réciproquement.*

Ce théorème et sa réciproque sont les propositions XVIII et XIX d'Euclide. Nous les considérons comme des conséquences du corollaire II (10) du théorème III. En effet on voit dans la figure 5, que dans le triangle ABJ on a à la fois deux inégalités : $BJ > AJ$ et

$$\angle BAJ > \angle BAK = \angle ABJ.$$

14. — **Théorème VI.** *Dans tout triangle la somme de deux côtés quelconques est plus grande que le troisième côté.*

C'est la proposition XX d'Euclide qui a été prouvée plus haut (2, 3).

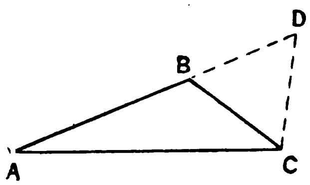


FIG. 7

Pour démontrer que $AB + BC > AC$ (Fig. 7), Euclide prolonge le côté A B et construit le triangle isoscèle BCD, dans lequel $BD = BC$, et par conséquent (Th. IV)

$$\angle BCD = \angle BDC. \text{ Donc}$$

$$\angle ACD > \angle ADC \text{ et } AD > AC \text{ (Th. V)}$$

ou $AB + BC > AC$[1].

15. — **Théorème VII.** *Dans tout triangle, un angle extérieur, supplémentaire d'un angle intérieur, est plus grand que chacun des deux autres angles intérieurs.*

C'est la proposition XVI d'Euclide qui n'est qu'une conséquence du théorème II. En effet, si l'on considère un triangle ABF (Fig. 4), on voit qu'il ne peut exister que parce que l'angle extérieur $\angle FBN$ est plus grand que l'angle intérieur $\angle JAN = \angle LBN$ et qu'il cesse

---

[1] Au dire de Proclus et de Commandino, les anciens philosophes se ralliaient de ce théorème, prétendant que les ânes même l'admettent sans démonstration. Nous trouvons que cette démonstration est trop indirecte et que la proposition vient trop tard dans l'ouvrage d'Euclide.

d'exister aussitôt que cet angle $\angle$ FBN devient égal à $\angle$ LBN, car les droites KL et HJ ne se rencontreront plus. Voici la démonstration d'Euclide qui est moins directe : Dans le $\triangle$ ABC (Fig. 8) prolongeons les côtés AC et BC et nous au-

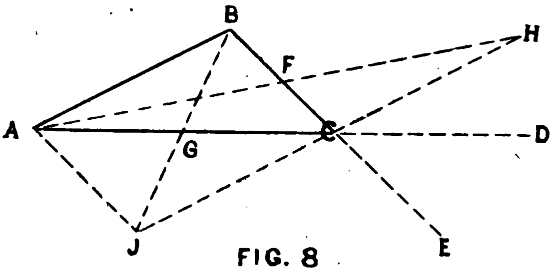


FIG. 8

rons deux angles extérieurs égaux $\angle$ BCD $=$ $\angle$ ACE. Pour prouver que $\angle$ BCD $>$ $\angle$ ABC, joignons le sommet A avec le point F, qui est le milieu du côté BC, faisons FH $=$ AF, joignons H et C et nous aurons l'égalité $\triangle$ CFH $=$ $\triangle$ ABF, car CF $=$ BF, FH $=$ AF et $\angle$ CFH $=$ $\angle$ AFB. Donc $\angle$ FCH $=$ $\angle$ ABF et par suite $\angle$ BCD $>$ $\angle$ ABC. On prouvera de même que $\angle$ ACJ $=$ $\angle$ BAC et par suite $\angle$ ACE $>$ $\angle$ BAC. Cette démonstration nous paraît moins directe.

16. — **Corollaires** : I. *Dans tout triangle rectiligne la somme de deux angles intérieurs est moindre que deux droits.* En effet, on a $\angle$ ABC $+$ $\angle$ BCD $=$ 2 d et $\angle$ BCD $>$ $\angle$ ABC. Il s'ensuit que $\angle$ ACB $+$ $\angle$ ABC $<$ 2 d. II. — *Un angle, dont le sommet se trouve à l'intérieur d'un triangle et dont les côtés passent par deux sommets de ce triangle est plus grand que le troisième angle de ce dernier.*

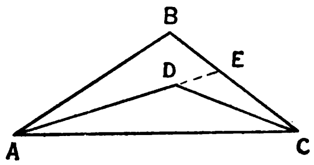


FIG. 9

Ainsi on aura $\angle$ ADC $>$ $\angle$ ABC (Fig. 9), car en prolongeant AD jusqu'à E, on voit que $\angle$ ADC $>$ $\angle$ AEC. (Th. VII) et $\angle$ AEC $>$ $\angle$ ABC. Donc à plus forte raison $\angle$ ADC $>$ $\angle$ ABC. C'est la seconde partie de la proposition XXI d'Euclide.

17. **Théorème VIII.** — *Si un triangle a deux côtés respectivement égaux à deux côtés d'un autre triangle, mais que l'angle compris entre les deux côtés du premier est plus grand que celui de l'autre, le troisième côté du premier est plus grand que celui du second triangle, et réciproquement.*

C'est la proposition XXIV et la réciproque est la proposition XXV d'Euclide. Nous en donnerons les démonstrations plus simples et plus directes. Il faut distinguer trois cas :

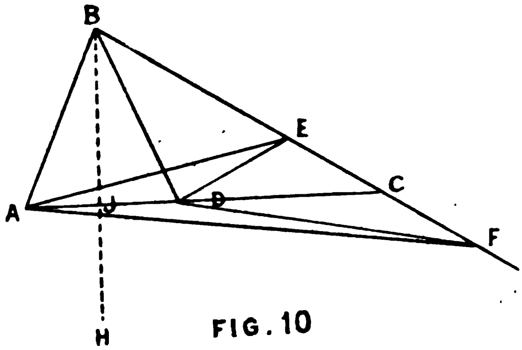


FIG. 10

1° Prenons d'abord deux triangles ABC et BCD (Fig. 10), qui ont un côté commun BC et deux côtés égaux AB = BD, et dont les troisièmes côtés AC et CD sont en ligne droite. D'après l'hypothèse $\angle$ ABC $>$ $\angle$ CBD, et l'on voit immédiatement que AD $>$ CD; et réciproquement, si AC $>$ CD, on a $\angle$ ABC $>$ $\angle$ CBD.

2° Prenons deux triangles ABE et BDE, dont le premier n'enveloppe pas le second tout entier. Abaissons sur AD la perpendiculaire BH qui le coupera en son milieu J. Comme le point E est plus rapproché de l'extrémité D que de l'extrémité A de la droite AD, on a AE $>$ DE (10).

3° Considérons deux triangles ABF et BDF, dont le second est enveloppé par le premier. Comme le point F est plus rapproché du point D que du point A, on a AF $>$ DF (10).

Dans tous ces cas, il est visible que la réciproque du théorème est aussi vraie.

18. — Passons à la considération des cas de l'égalité des triangles, qu'on ne peut pas démontrer par une simple superposition de ces figures.

Théorème IX. *Deux triangles sont égaux, si un côté de l'un est égal à un côté de l'autre et si l'un d'eux a un angle adjacent et un angle opposé respectivement égaux à ceux de l'autre.*

Prenons deux triangles ABC et DEF (Fig. 11) dans lesquels AC = DF, $\angle$ BAC = $\angle$ EDF, $\angle$ ABC = $\angle$ DEF. Portons A sur D, C sur F; le côté AB tombera sur le côté DE. Supposons que B, au lieu de tomber sur E, tombe sur B′ et nous aurons

$$\angle \text{DB'F} = \angle \text{ABC} > \angle \text{DEF},$$

ce qui est contraire à l'énoncé du théorème. Supposons que B tombe en B″ et nous aurons

$\angle DB''F = \angle ABC > \angle DEF$,

ce qui est aussi contraire à l'énoncé du théorème. Donc le point B ne peut tomber qu'en E et les deux triangles coïncideront.

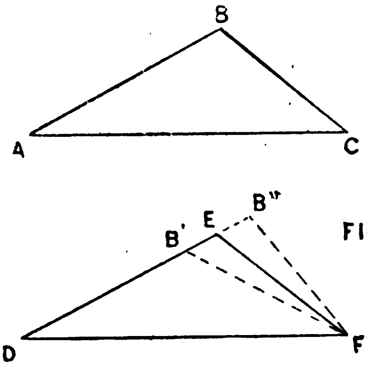


FIG. 11

Remarque. On comprendra pourquoi un triangle qui a un angle, un côté adjacent et un côté opposé égaux respectivement aux parties analogues d'un autre triangle, n'est pas toujours égal à celui-ci, lorsqu'on examinera les triangles ABC et BDC (Fig. 10), dans lesquels l'angle ACB est commun, le côté BC est commun et $AB = BD$, et pourtant ces triangles ne sont pas égaux. On comprendra aussi par l'inspection de cette figure pourquoi cette inégalité n'est absolue que pour des triangles rectangles, car il n'y a qu'un seul triangle rectangle BCJ (Fig. 10) qu'on puisse construire lorsqu'on connaît son hypoténuse BC et un de ses cathètes BJ ou CJ. — Il en résulte le théorème :

19. — **Théorème X**. *Deux triangles rectangles sont égaux si l'hypoténuse et un cathète de l'un sont égaux à l'hypoténuse et à un cathète de l'autre.*

Soient donnés deux triangles rectangles ABC et DEF.

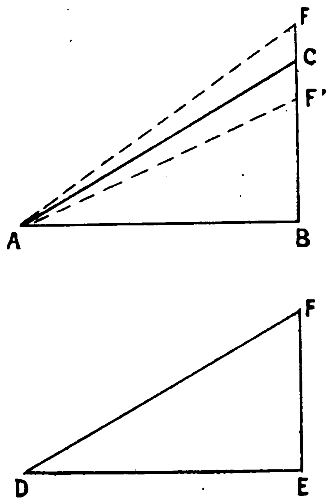


FIG. 12

(Fig. 12) dans lesquels

$$AC = DF,\ AB = DE$$

et les angles $ABC = DEF$ sont droits. Mettons D sur A, E sur B ; le cathète EF coïncidera avec le cathète BC. Si F tombait en F′ ou en F″, au-dessous ou au-dessus de C, on aurait

$AF' = DF < AC$ ou $AF'' = DF > AC$

ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent F ne peut tomber qu'en C.

20. — **Théorème XI.** ***Deux triangles quelconques rectilignes sont égaux si les trois côtés de l'un sont respectivement égaux aux trois côtés de l'autre.***

Soient deux triangles ABC et DEF (Fig. 13) dans lesquels $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$. Mettons A sur D, C sur F et nous remarquons que le sommet B ne saurait tomber ni dans $\angle DEF$, ni dans l'angle opposé par le sommet $\angle D'EF'$, car dans le premier cas on aurait $AB + BC < DE + DF$ et dans le second $AB + BC > DE + DF$, ce qui n'est pas conforme à l'énoncé du théorème. Nous remarquons aussi que B ne peut non plus tomber ni sur les côtés DE et EF, ni sur leurs prolongements ED' et EF', car s'il tombait, par exemple, en B', on aurait $B'F = BC > EF$, ce qui ne s'accorde pas à l'hypothèse du théorème, d'après laquelle $BC = EF$. Il reste donc à prouver que B ne peut pas tomber dans les angles DEF' et FED', supplémentaires de $\angle DEF$.

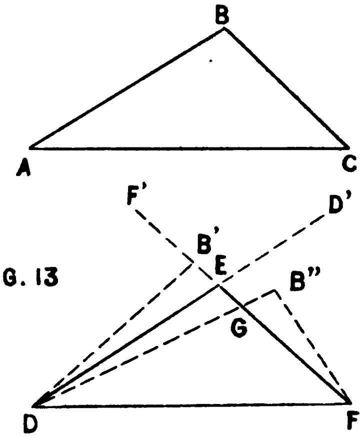


FIG. 13

Supposons qu'il tombe en B″, dans l'angle FED' et tirons les droites DB″ et FB″. Nous aurons alors $DB'' = AB = DE$ et $FB'' = BC = EF$ et par suite $DB'' + EF = DE + FB''$

Mais dans le $\triangle$ DEG on a $DG + EG > DE$ et dans le $\triangle$ FB″G : $B''G + FG > FB''$. En additionnant, il vient $DB'' + EF > DE + FB''$ ou $AB + EF > DE + BC$, et comme $EF = BC$, on aurait $AB > DE$, ce qui n'est pas d'accord avec l'hypothèse, d'après laquelle $AB = DE$. Donc le sommet B ne peut pas tomber dans les angles FED' et DEF, et par suite doit coïncider avec le sommet E. Ainsi les triangles sont superposés l'un sur l'autre.

IX. Polygones.

21. — Dans un polygone, les angles intérieurs sont dits *saillants* s'ils sont moindres et *rentrants* s'ils sont plus grands que deux angles

droits. Un polygone est dit *convexe* s'il n'a pas d'angles rentrants; un tel polygone ne peut être coupé par une droite quelconque qu'en deux points. Pour éviter les embarras[1], nous distinguerons dans les polygones deux espèces d'angles extérieurs, en appelant *complet* l'angle extérieur qui fait la somme de quatre angles droits avec l'angle intérieur, ayant le même sommet, et *incomplet* celui qui est formé par un côté et par le prolongement du côté adjacent; ainsi un angle extérieur incomplet est égal à l'angle extérieur complet, au même sommet, diminué de deux angles droits. Un quadrilatère peut avoir un seul angle rentrant, un pentagone en peut avoir deux, un hexagone trois et ainsi de suite. Aucun polygone ne peut avoir moins de trois saillants (25).

22. — On appelle *diagonales* d'un polygone les droites, autres que ses côtés, qui joignent deux de ses sommets. Un quadrilatère a deux diagonales, un pentagone en a cinq, un hexagone neuf, etc.

Remarque. En général dans un polygone de n côtés le nombre total de côtés et diagonales est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$; en retranchant le nombre de côtés n, on trouve que le nombre des diagonales est $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

23. — Un quadrilatère dans lequel les côtés opposés sont égaux est un *rhomboïde* et celui dont tous les quatre côtés sont égaux est un *rhombe* ou un *losange*. Un rhomboïde s'obtient en appliquant l'un contre l'autre, dans deux sens opposés, deux triangles égaux; on obtient un rhombe, si les deux triangles sont isoscèles. On obtient aussi un rhomboïde en prenant sur deux droites, qui se coupent, deux segments égaux sur chacune d'elles, à partir du point de leur rencontre, et en joignant leurs extrémités; si ces droites sont perpendiculaires mutuellement, on obtient un rhombe. Il en résulte que dans tout rhomboïde: 1. Les angles opposés sont égaux; 2. les angles opposés formés par une diagonale avec deux côtés opposés sont aussi égaux; 3. les diagonales se coupent mutuellement en leurs milieux, et, réciproquement, un quadrilatère qui satisfait à une de ces conditions est un rhomboïde.

24. — **Théorème XII.** *Un quadrilatère dont les angles opposés sont égaux est un rhomboïde.*

---

[1] Ces embarras ont été signalés par Legendre dans la Scholie de la page 28 de la 12me édition de sa géométrie.

En effet, soit donné un quadrilatère ABCD (Fig. 14) dans lequel $\angle$ BAD $= \angle$ BCD et $\angle$ ABC $= \angle$ ADC. Prenons un triangle A′B′D′ $=$ ABD et construisons le rhomboïde A′B′C′D′. On aura

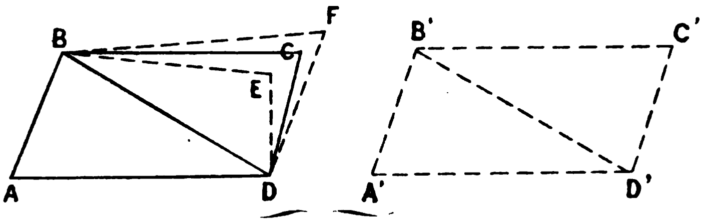


FIG. 14

$\triangle$ B′C′D′ $= \triangle$ A′B′D′ et par suite $\triangle$ B′C′D′ $= \triangle$ ABD. Donc $\angle$ B′C′D′ $= \angle$ BAD. Transportons mentalement le rhomboïde A′B′C′D′ sur le quadrilatère ABCD, en faisant coïncider les sommets A′, B′, D′ respectivement avec les sommets A, B, D. Comme on a $\angle$ A′B′C′ $= \angle$ A′D′C′ et $\angle$ ABC $= \angle$ ADC, les côtés B′C′ et D′C′ se dirigeront simultanément en dedans ou en dehors du $\triangle$ BCD. Dans le premier cas le sommet C′ tombera en un point E et dans le second en un point F. Dans le premier cas on aura $\angle$ BED $> \angle$ BCD et dans le second $\angle$ BFD $< \angle$ BCD. Ces deux résultats contredisent l'énoncé du théorème, selon lequel $\angle$ BCD $= \angle$ BAD et par suite $\angle$ BCD $= \angle$ B′A′D′ $= \angle$ B′C′D′. Donc le sommet C′ ne peut tomber ni en E, ni en F et doit coïncider avec le sommet C, et par suite le quadrilatère ABCD est un rhomboïde.

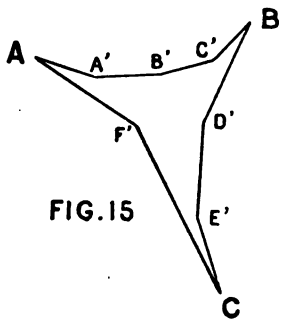


FIG. 15

25. — Un rhomboïde dont tous les angles sont droits est un *rectangle,* et un rhombe dont tous les angles sont droits est un *carré*[1]. Un polygone est dit *équilatéral* ou *équiangle* suivant que tous ses côtés ou tous ses angles sont égaux. Il est dit *régulier,* s'il est à la fois équilatéral et équiangle.

On ne peut pas entourer un espace avec moins de trois droites et, à plus forte raison ,avec moins de trois lignes brisées ren-

[1] La possibilité des rectangles et des carrés sera prouvée plus bas au n° 32.

trantes. Tel est le polygone AA'B'C'BD'E'CF' (Fig. 15), ayant trois angles saillants A, B, C et six angles rentrants A', B', C', D', E' F'. On voit qu'un polygone peut avoir un nombre illimité d'angles rentrants, disposés dans un ordre quelconque.

26. — Un polygone quelconque peut toujours être décomposé en triangles, dont le nombre est moindre que celui de ses côtés de deux unités et dont la somme totale des angles intérieurs est la même que celle des angles intérieurs du polygone proposé.

Si le polygone proposé a n côtés, il suffit, pour le décomposer en $(n-2)$ triangles, de mener entre tous les sommets, excepté deux, $(n-3)$ diagonales, qui restent toutes à l'intérieur du polygone et ne se coupent pas entre elles.

Par exemple, le polygone AB...LM (Fig. 15) ayant douze côtés, neuf angles saillants et trois angles rentrants en D, E et L, peut être partagé en dix triangles: NN° I–X par neuf diagonales indiquées sur la figure. On voit qu'on peut le faire de beaucoup d'autres manières,

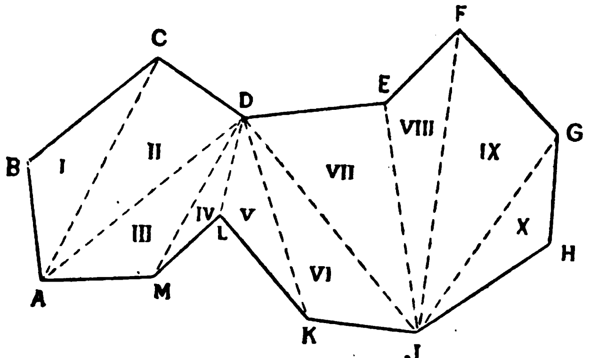


FIG. 16

mais le résultat reste toujours le même, c'est-à-dire que ce polygone sera toujours décomposé par $n-3=9$ diagonales en $n-2=10$ triangles, dont les angles font partie des angles intérieurs du polygone.

Cette construction revient à enlever mentalement du polygone les triangles, l'un après l'autre, en commençant par le $\triangle$ ABC et en finissant par le $\triangle$ FGJ; donc, le nombre de diagonales est égal au nombre de triangles enlevés, et comme il reste encore le triangle GHJ, il en résulte que le nombre des diagonales est moindre d'une unité que celui des triangles. Puis, comme deux triangles extrêmes ABC et GHJ contiennent chacun deux côtés du polygone et les autres triangles n'en contiennent qu'un seul, il s'ensuit que le nombre de triangles est moindre que celui de côtés de deux unités.

Si nous appelons S la somme des angles du polygone et S_1, S_2, S_3... S_{n-2} les sommes des angles des $(n-2)$ triangles, on aura ainsi :

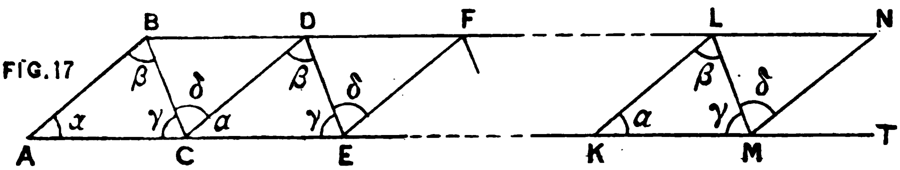
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_{n-2}. \qquad \text{(I)}$$

V. Somme des angles des polygones.

27. — Une des conséquences de la vérité que deux perpendiculaires tirées sur une droite ne peuvent se rencontrer (6) et du théorème II (7) est évidemment celle que la somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux angles droits. En effet, dans le cas contraire, rien n'empêcherait, que deux perpendiculaires tirées sur une droite proposée se rencontrent à une distance plus ou moins éloignée, en formant ainsi un triangle dont la somme des angles serait supérieure à deux angles droits. En retournant ce triangle autour de la droite proposée on arriverait à la possibilité de mener deux droites entre deux points, ce qui est contraire à la définition de la ligne droite, contenue dans l'axiome XII d'Euclide. Legendre donna, en 1800, dans la 3e édition de sa géométrie, une démonstration rigoureuse de cette vérité dans sa proposition A, que nous allons exposer :

28. — **Théorème XIII**. *La somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne peut pas être plus grande que deux angles droits.*

FIG. 17



Prenons un triangle quelconque ABC (Fig. 17), désignons ses angles par α, β, γ et supposons $\alpha + \beta + \gamma > 2\,d$. Sur une droite AT disposons n triangles, tous égaux au triangle proposé $ABC = CDE = \ldots\ldots$

$= KLM$, ce qui est toujours possible, car l'angle extérieur BCT est plus grand que son angle intérieur α.

Désignons $\angle BCD = \angle DEF = .. = \angle LMN$ par δ. Joignons les sommets B, D, F... N par les droites BD, DF... LN. On aura au point C

$$\alpha + \gamma + \delta = 2\,\mathrm{d}.$$

et comme on a $\alpha + \beta + \gamma > 2\,\mathrm{d}$, il vient $\delta < \beta$. Donc, d'après le théorème VIII, $BD < AC$, soit $AC - BD = e$; alors $AM - BDF\ldots LN = ne$ et on aura

$$AM - ABDF..LNM = ne - (AB + MN) = ne - 2\,AB.$$

Quelque petite que l'on suppose la différence e, en prenant n suffisamment grand, on peut faire que la quantité ne surpasse 2 AB, et par conséquent la droite AM soit plus grande que la ligne brisée ABD... LKU, ayant les mêmes extrémités A et M, ce qui est impossible. Il s'ensuit que l'hypothèse admise est fausse et que la somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne peut pas être plus grande que deux angles droits.

29. — **Corollaire.** *La somme des angles d'un polygone quelconque de* n *côtés ne peut pas être plus grande que le produit* $2\,\mathrm{d}\,(n-2)$.

En effet dans la formule I (26) aucune des $(n-2)$ sommes $S_1, S_2, \ldots S_{n-2}$ ne pouvant être supérieure à 2 d, la somme totale S ne saurait surpasser $2\,\mathrm{d}\,(n-2)$.

Remarque. La rigueur de la démonstration de Legendre est reconnue de tout le monde, même des non-euclidiens. Lobatschevsky a donné une seconde démonstration, qui consiste dans la construction de triangles équivalents, c'est-à-dire, ayant les aires égales et les mêmes sommes des angles[1]. Cette démonstration, convenablement corrigée, conduit à prouver, qu'en supposant que la somme des angles d'un triangle rectiligne soit égale à $2\,\mathrm{d} + a$, on arriverait à un triangle dont la somme des angles serait à la fois égale à $2\,\mathrm{d} + a$ et moindre que cette quantité, ce qui est absurde.

Legendre a établi encore une proposition remarquable B : *S'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des angles intérieurs soit égale à deux droits, elle le sera dans tous les triangles.*

---

[1] Lobatschevsky. Recherches géométriques, n° 19.

Cette proposition B est aussi indépendante de l'axiome XI, mais comme nous ne l'emploierons pas, nous remplacerons la démonstration de Legendre par une autre plus simple.

Supposons que la somme des angles dans le △ ABC soit égale à deux droits et qu'il s'agisse de démontrer qu'elle l'est aussi dans un autre triangle quelconque DEF. En juxtaposant deux triangles égaux au △ ABC, on obtiendra un rhomboïde ABCD (Fig. 14), dont la somme des angles sera égale à quatre droits. En juxtaposant un certain nombre de rhomboïdes égaux à celui-ci, on obtiendra un rhomboïde GHJK (Fig. 18), assez grand pour qu'on puisse y introduire le △ proposé DEF. Joignons les sommets des deux figures par sept droites quelconques DG, EG, EH, EJ, FJ, FK, DK qui décomposeront l'espace intermédiaire en sept triangles, de sorte que le rhomboïde GHJK contiendra huit triangles, le triangle DEF y compris. Dans aucun d'eux la somme des angles ne peut surpasser deux angles droits (Th. XIII). De même, dans aucun d'eux elle ne peut être moindre que deux droits, car alors elle serait moindre que quatre droits dans le rhomboïde GHJK, ce qui n'est pas. Donc dans tous ces huit triangles, le △ DEF y compris, elle sera égale à deux droits.

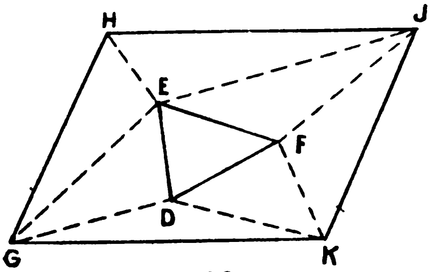


FIG. 18

*
* *

30. — **Théorème XIV.** *La somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne peut pas être moindre que deux angles droits.*

Si l'on supposait que cette somme dans un triangle est moindre que deux angles droits, la somme des angles dans un quadrilatère serait moindre que quatre droits et dans un polygone ayant n côtés elle serait moindre que le produit $2d\,(n-2)$.

Sur une droite indéfinie AT (Fig. 19) juxtaposons un certain nombre de quadrilatères égaux :

$$ABCD = CDEF \ldots. = PQRS = RSTU$$

dont les côtés AB, CD.... RS, TU sont égaux et perpendiculaires à cette droite AT et dont les angles en B, C, F.... R, U, d'après le théorème XIII, ne peuvent être que droits ou aigus. Comme on ne sait pas encore laquelle des deux hypothèses est la vraie, admettons provisoirement la seconde hypothèse, c'est-à-dire que ces angles sont aigus, et désignons-les par θ. Ainsi la ligne composée des côtés supérieurs des quadrilatères, sera une ligne brisée, qui tournera ses angles rentrants, ou, comme on dit, sa *convexité*, vers l'extérieur. On obtiendra ainsi le polygone convexe ABCF. . . . RUT. En désignant par n le nombre de ses côtés et par S la somme de ses n angles intérieurs, on trouvera :

$$S=2d(n-2)-2(d-\theta)(n-3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

Donc, cette somme est toujours moindre que le produit $2d(n-2)$, ce qui est conforme à l'hypothèse admise.

Montrons qu'il est facile d'envelopper extérieurement la ligne polygonale BCF. . . . RU par une ligne brisée convexe, composée d'un petit nombre de côtés.

Prenons deux droites YY′ et ZZ′ se coupant en O et perpendiculaires entre elles; par conséquent elles seront symétriques l'une par rapport à l'autre, et diviseront le plan entier en quatre régions ou secteurs superposables et identiques. Plaçons dans chacun de ces secteurs un polygone égal à celui qui vient d'être construit, de manière à ce que la ligne du milieu KL du polygone se trouve sur la bissectrice OM du secteur et que les côtés OY et OZ de ce dernier ne touchent pas le polygone. Cette condition peut toujours être remplie, car le secteur, embrassant un quart du plan entier, a une aire infiniment grande, tandis que le polygone, quelque grand qu'il soit, a une aire limitée (Fig 19).

Cette disposition de quatre polygones égaux dans les quatre secteurs empêche de courber intentionnellement les côtés de ces derniers. En effet, si l'on s'avisait, par exemple, en considérant le secteur YOZ, de courber le côté OZ, en le remplaçant par une ligne quelconque OW, on devrait, en considérant le polygone adjacent ZOY′, remplacer OZ par la ligne OW′, pareille à OW, et ce côté OZ qui est rectiligne serait ainsi dédoublé en deux lignes OW et OW′, qui ne sauraient être droites, — ce qui est faux.

Pour empêcher de courber la base AT du polygone. il suffit de retourner le polygone, autour de cette base, qui devindra ainsi un axe de symétrie (10).

Des sommets B et U élevons sur les côtés AB et TU les perpendiculaires *bb'* et *uu'*. Comme il n'est pas encore prouvé géométriquement qu'elles rencontrent OY et OZ, supposons qu'elles ne les rencontrent

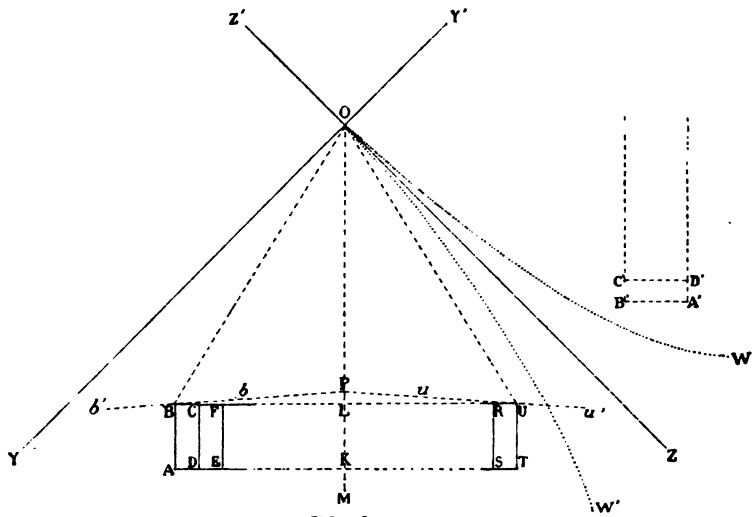


FIG 19

pas. Remarquons : 1° Que *bb'* et *uu'* se trouvent au-dessus de la ligne polygonale BCF. . . . . RU et que, par suite, elles ne peuvent la couper en aucun point entre B et U; 2° Que deux droites, qui ne se rencontrent pas, divisent le plan en trois régions et que toutes les droites, qui joignent les points de ces droites, restent tout entières dans la région du milieu; 3° Qu'on peut joindre le sommet B avec n'importe quel point de la droite YY' et le sommet U avec n'importe quel point de ZZ' et que, par conséquent, on peut les joindre tous les deux avec le sommet O. Il s'ensuit que les droites BO et UO, ne pouvant pas passer au-dessous de *bb'* et de *uu'*, ne rencontreront pas la ligne polygonale BCF. . . . . RU. Donc, cette dernière sera enveloppée extérieurement par la ligne brisée BOU, composée de deux côtés. Dès lors les demi-droites Bb et Uu, étant enfermées dans le polygone BCF. . . . . RUO, ne pourront en sortir qu'en coupant les côtés opposés UO et BO et en se croisant en un point P de la bissectrice. On aura ainsi le polygone BCF. . . . . RUP.

Remarque. On peut arriver au même résultat par les considérations de la géométrie non-euclidienne. En effet, si l'on suppose que bb' et uu' (Fig. 20) ne rencontrent pas respectivement OY et OZ, il en résul-

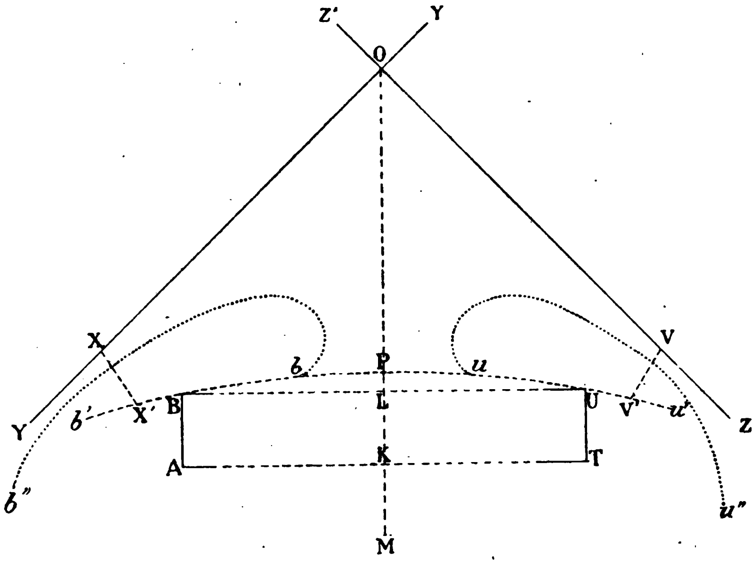


FIG. 20

tera, d'après cette doctrine, que ces lignes ont des perpendiculaires communes quelconques XX′ et VV′ et que la ligne polygonale sera enveloppée par la ligne BX′XOVV′U, composée de six côtés. A partir de ces perpendiculaires, les droites bb' et uu' s'éloigneront indéfiniment des côtés respectifs OY et OZ, en se rapprochant de la bissectrice OM, jusqu'à leur rencontre avec elle en un point P. Donc bb' et uu' ne peuvent pas se replier sur elles-mêmes, comme l'indiquent les pointillés bb'' et uu'', car, dans ce cas, au lieu de s'éloigner des côtés OY et OZ, elles se rapprocheraient de ces derniers. Il est, du reste, facile de comprendre cette rencontre des lignes bb' et uu' avec la bissectrice, puisqu'elles ne pourraient pas sortir autrement de l'espace fermé BX′XOVV′U.

31. — Considérons le polygone BCF.... RUP (Fig. 19). En désignant par 2ω l'angle intérieur BPU, par n' le nombre de côtés de ce polygone et par S′ la somme de ses angles intérieurs, on trouvera

$$S'=2d(n'-2)+2(d-\theta)(n'-2)-2(d-\omega). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

et l'on remarquera : 1° Que la différence ($d—\theta$) est une quantité finie et non pas infiniment petite, car autrement on pourrait la négliger et faire $\theta = d$ [1] ; 2° Que quelque petite que soit cette différence, on peut toujours faire, en prenant le nombre fini n' suffisamment grand, que le terme $2(d—\theta)(n'—2)$ qui est positif, surpasse le dernier terme $2(d—\omega)$, qui est négatif, et que l'on ait :

$$S' > 2d(n'—2)$$

ce qui contredit à la fois le corollaire du théorème XIII (29) et l'hypothèse admise, d'après laquelle on devrait avoir

$$S' > 2d(n' - 2)$$

Cette contradiction manifeste entre l'hypothèse et son résultat prouve qu'elle est fausse et que la somme des angles intérieurs d'un triangle rectiligne ne peut être moindre que deux angles droits.

On ne peut se débarrasser de cette contradiction, qu'en posant, dans les formules II et III, $\theta = d$. Alors la ligne brisée BCF... QRU deviendra droite, les quadrilatères ABCD ; CDEF... se convertiront en rectangles et le polygone BCF.... RUP disparaîtra. Par suite, les formules II et III deviendront identiques :

$$S = 2\,d\,(n - 2) \text{ et } S' = 2\,d\,(n' - 2.)$$

Remarque. Si l'on partait de l'hypothèse opposée, celle qui fut réfutée dans la proposition *A* de Legendre (Théorème XIII), on arriverait par un procédé analogue à un polygone dont la somme des angles serait moindre que $2\,d\,(n — 2)$. Ainsi les deux hypothèses contraires produisent à la fois des polygones et des triangles, dont les uns ont un déficit et les autres un excès angulaire, comme si c'était des polygones et des triangles curvilignes, et, par suite, les deux hypothèses s'entre-détruisent et sont également erronées. Il en résulte que dans tous les polygones non-euclidiens, tracés sur un plan, il y a au moins un côté qui est une ligne courbe : concave dans la géométrie de Lobatschevsky, et convexe dans

---

[1] Cette différence est la moitié de ce qu'on appelle en géométrie non-euclidienne *déficit angulaire*, qui y est considéré comme proportionnel à l'aire du polygone donné, et, par suite, ce déficit étant une quantité finie, l'aire du polygone ne peut croître que jusqu'à une certaine limite. D'après Legendre, c'est un *résultat absurde qui prouve que la somme des angles d'un triangle ne peut être moindre que deux angles droits.* (*Géométrie*, 12^me^ édition, note II, page 278.)

celle attribuée à Riemann. Il est clair que toutes ces figures sont variables. Par exemple, un triangle dont les côtés sont désignés par *a, b, c,* peut présenter sept formes diverses, selon qu'on courbe un ou deux de ses côtés, ou tous les trois côtés : *a ; b ; c ; ab ; ac ; bc ; abc ;* et en général un polygone de *n* côtés peut présenter (2^n — 1) formes diverses. Toutefois les partisans de la géométrie non-euclidienne considèrent toutes ces formes comme absolument identiques et invariables, en fermant les yeux sur les déformations qu'elles subissent, quand on superpose ou juxtapose ces variantes. Cela explique pourquoi il est souvent impossible de tracer ces figures sans courber leurs prétendues lignes droites.

Ainsi, la somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut être ni plus grande ni moindre que deux angles droits. Il en résulte le théorème :

Théorème XV. *Dans tout triangle rectiligne, la somme des angles intérieurs est strictement égale à deux angles droits, et par suite, dans tout polygone rectiligne et plan, ayant* n *côtés, elle est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés, moins deux, c'est-à-dire à* 2 d (—2).

Donc, la somme des angles dans un quadrilatère est égale à quatre, dans un pentagone à six, dans un hexagone à huit droits, etc.

Remarque. Ce théorème important peut remplacer entièrement l'axiome XI d'Euclide et servir de base inébranlable à la théorie des parallèles, sans rien changer dans la définition de la ligne droite, exposée par Euclide dans l'axiome XII.

32. — **Corollaires** : I. *Dans un triangle rectiligne un angle extérieur formé par un côté du triangle et par le prolongement du côté adjacent est égal à la somme de deux angles intérieurs situés aux deux autres sommets.*

II. *Un triangle ne peut avoir plus d'un seul angle intérieur obtus ou droit, car autrement la somme de ses trois angles intérieurs surpasserait deux angles droits.*

III. *Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus étant complémentaires, il est possible de diviser l'angle droit par une droite en deux parties égales respectivement aux angles contigus, de sorte que le triangle soit partagé en deux triangles isoscèles.* Il s'ensuit que cette droite rencontre l'hypoténuse en son milieu et est égale à sa moitié.

IV. *Un quadrilatère équiangle est un rectangle.*

V. *Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.*

On voit que *la possibilité des rectangles est rigoureusement établie, ainsi que celle des carrés qui ne sont qu'un cas particulier des rectangles* (25).

33. — **Théorème XVI.** *Dans tout polygone rectiligne de* n *côtés, la somme des angles extérieurs complets est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés plus deux, c'est-à-dire au produit* $2\,d(n+2)$.

En effet, la somme totale des angles extérieurs complets et des angles intérieurs étant égale à 4 dn; en retranchant la somme des angles intérieurs, on obtiendra la somme des angles extérieurs complets.

$$4\,dn - 2\,d\,(n-2) = 2\,d\,(n+2).$$

Corollaire. *Dans tout polygone rectiligne la différence de la somme des angles extérieurs complets et de celle des angles intérieurs est égale à huit angles droits.*

En effet, $2\,d\,(n+2) - 2\,d\,(n-2) = 8\,d$.

34. — **Théorème XVII.** *Dans tout polygone rectiligne convexe la somme des angles extérieurs incomplets est égale à quatre angles droits.*

En effet, en retranchant de la somme des angles extérieurs complets la quantité 2 dn, on aura

$$2\,d\,(n+2) - 2\,dn = 4\,d.$$

Corollaires : I. *Dans un rectangle les quatre angles extérieurs incomplets sont droits et tous les autres polygones convexes ne peuvent en contenir plus de trois, et, par suite, plus de trois angles intérieurs aigus.*

II. *Un polygone qui a plus de trois angles intérieurs aigus a nécessairement au moins un angle rentrant.*

VI. Parallèles.

35. — Deux droites sont *parallèles,* si elles font avec une sécante, les angles correspondants égaux, ou, ce qui revient au même, si la somme

des angles intérieurs, qui se trouvent du même côté de la sécante, vis-à-vis l'un de l'autre est égale à deux angles droits.

Telles sont les droites HJ et KL (Fig. 4) que nous avons considérées plus haut (7), qui font avec la sécante MN les angles correspondants égaux $\angle$ JAN $= \angle$ LBN, et par suite la somme des angles intérieurs

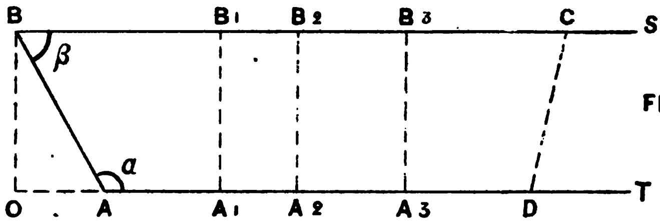


FIG. 21

du même côté de la sécante est égale à deux droites $\angle$ JAN $+ \angle$ LBN $= 2$ d. Telles sont aussi deux perpendiculaires tirées sur une droite. On a vu plus haut (6,7) que les parallèles ne peuvent pas se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge. Deux parallèles sont *équidistantes*. La possibilité des droites équidistantes résulte directement de la possibilité des rectangles. En effet, si l'on a $\angle$ BAT $+ \angle$ ABS $= 2$ d (Fig. 21), toutes les perpendiculaires A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... abaissées des points A_1, A_2,... de l'une d'elles sont perpendiculaires aux deux droites, puisque la somme des angles dans tout quadrilatère ABB_1A_1 ; $A_1B_1B_2A_2$... est égale à quatre angles droits ; par conséquent les angles en A_1, A_2.... B_1, B_2... sont droits. Il s'ensuit que les quadrilatères $A_1B_1B_2A_2$, $A_1B_1B_3A_3$... sont des rectangles et que les perpendiculaires A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3... sont égales ; il s'ensuit aussi que toute oblique CD coupe les deux parallèles en formant avec elles des angles intérieurs supplémentaires : $\angle$ BCD $+ \angle$ ADC $= 2$ d.

Enfin, il est clair que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, car la distance de ces deux droites est constante, étant égale à la somme ou à la différence de leurs distances à la troisième droite.

C'est à cause du parallélisme de ses côtés opposés que le rhomboïde a reçu le nom de *parallélogramme*. Un quadrilatère qui n'a que deux côtés opposés parallèles est appelé *trapèze*[1]. Tel est le trapèze ABCD.

---

[1] Euclide donnait ce nom à tous les quadrilatères, indifféremment.

38. — **Théorème XVIII**. *Si deux droites font avec une sécante deux angles intérieurs, du même côté de celle-ci, dont la somme est moindre que deux angles droits, elles se coupent, étant prolongées suffisamment, du même côté.*

C'est le fameux axiome XI ou postulat VI d'Euclide, qui n'est qu'un simple théorème qu'on peut démontrer de plusieurs manières.

Nous donnerons la démonstration suivante[1] :

Supposons que $\angle \mathrm{BAT} + \angle \mathrm{ABS} = 2d - \varphi$ (Fig. 22) et que la droite BS soit la première de toutes celles qui passent par B et ne rencontrent pas la droite AT, tandis que toutes les droites passant au-dessous d'elles, dans l'angle ABS coupent la droite AT. Par le point B menons la parallèle BU et nous aurons $\angle \mathrm{SBU} = \varphi$. Menons dans l'angle ABS une droite faisant $\angle \mathrm{CBS} = \varphi$, qui coupera AT en un point C et abaissons de ce dernier sur BS la perpendiculaire CD. Nous aurons $\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{CBU} = 2\varphi$, $\angle \mathrm{BCD} = d - \varphi$ et par suite

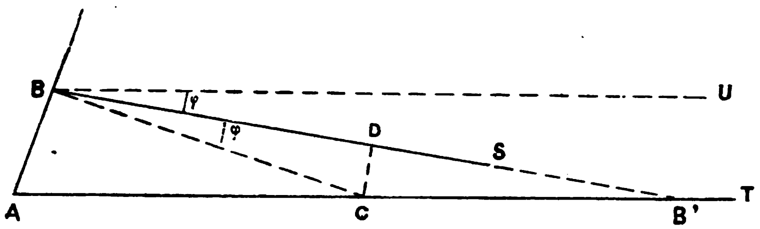


FIG 22

$\angle \mathrm{ACD} = d + \varphi$ et $\angle \mathrm{DCT} = d - \varphi$. Comme CD est perpendiculaire à BS, il s'ensuit qu'en retournant le $\triangle$ BCD autour de CD, le côté BC se dirigera le long de la ligne CT et le sommet B qui se trouve sur BS tombera sur AT, quelque part en un point B′, qui sera le point de rencontre de ces deux droites.

39. — **Corollaires** : I. *Par un point situé hors d'une droite on ne peut mener à cette dernière qu'une seule parallèle.*

---

[1] On trouvera une seconde démonstration dans notre premier opuscule cité plus haut (Théorème G, pages 20-21).

Remarque. C'est la proposition de Gergonne, par laquelle on a remplacé dans les traités modernes l'axiome XI d'Euclide, sous la dénomination d'axiome, de postulat, de demande ou de scholie.

II. *Une droite parallèle à un côté d'un angle donné coupe son second côté.*

Car, autrement on aurait deux parallèles menées par le sommet de cet angle à la droite proposée.

III. *Deux angles, dont les côtés sont respectivement parallèles, sont égaux ou supplémentaires.*

IV. *Deux angles, dont les côtés sont respectivement perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.*

V. *Si un côté d'un angle est parallèle à un côté d'un autre angle tandis que leurs autres côtés sont mutuellement perpendiculaires, la somme ou la différence des deux angles est égale à un angle droit.*

On démontrera les trois derniers corollaires en prolongeant les côtés des angles et en considérant les quadrilatères et les triangles qui seront obtenus par la rencontre des côtés.

FIN

ERRATA

Pages.	*Lignes.*	*Au lieu de:*	*Lisez:*
12	7 et 8	*contions.*	*conditions.*
19	17	OB et AB	OA et OB
22	6	ligne	la ligne
28	16	B′	B″
»	20	= DE	= DE + FB″
35	7 en remontant.	OZY′	ZOY′