LE
BINOME DE NEWTON

LE

BINOME DE NEWTON

interprété et démontré pour un exposant quelconque d'une manière à la fois rigoureuse et élémentaire, au moyen d'une nouvelle théorie des séries infinies,

PAR

M. F. MORET,

Professeur de Mathématiques.

FRIBOURG.

Imprimerie F. Ræedlé.

1864

PRÉFACE.

La probabilité ne remplace pas l'évidence.

Depuis deux siècles que la célèbre formule dite *binome de Newton*, du nom de l'immortel auteur de sa découverte, appartient au domaine des éléments d'Algèbre, on n'est pas encore parvenu, du moins à ma connaissance, à en trouver une démonstration *élémentaire;* car d'abord on ne peut appeler de ce nom la démonstration de cette formule basée sur les principes du Calcul différentiel; ensuite, quant aux autres prétendues démonstrations qu'on en trouve dans un grand nombre de traités d'Algèbre, telles que celles fondées sur la méthode des coefficients indéterminés, et quelques autres, elles seraient sans doute élémentaires si elles étaient de véritables démonstrations, c'est-à-dire des démonstrations à la fois complètes et rigoureuses; mais aucune ne remplit ces conditions. Ainsi celle où l'on se sert de la méthode des coefficients indéterminés est fondée sur une pétition de principe, puisqu'on devrait justifier la forme du développement en série de la puissance du binome avant de l'admettre comme évidente, ce qu'on ne fait pas parce que c'est une chose trop difficile. Celle qu'on trouve dans l'Algèbre de Bourdon est certainement très-incomplète. Étant parvenu à trouver non-seulement cette démonstration depuis si longtemps désirée par les professeurs et les amis des sciences exactes, mais encore à découvrir le double sens qu'on peut attribuer à la formule

NOUVELLE

THÉORIE MATHÉMATIQUE

OU

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS ET DES SÉRIES INFINIES, AVEC LA DÉMONSTRATION RIGOUREUSE DU BINOME DE NEWTON POUR UN EXPOSANT QUELCONQUE.

§ 1. Nouveau système de définitions relatives aux séries.

DES SUITES. Plusieurs quantités qui se succèdent les unes aux autres forment ce que j'appelle une *suite*, et ces quantités sont dites les *termes* de cette suite. Exemple :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$$

est une suite composée de cinq termes. On conçoit d'ailleurs qu'une suite peut avoir quelquefois une infinité de termes; en tout cas, elle a un premier terme, un deuxième, un troisième, &. Enfin nous admettons que, dans une suite, il peut y avoir des termes négatifs ou affectés du signe —.

Une suite infinie sera dite *croissante* ou *décroissante à partir d'un certain terme,* toutes les fois que, à partir de ce terme, les termes croissent ou décroissent en valeur absolue (c'est-à-dire abstraction faite des signes) de chacun au suivant. Il y a des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

LIMITES. Si on ne peut pas classifier toutes les suites en croissantes et en décroissantes, par contre on peut les diviser en deux grandes classes :

1° celles qui tendent vers une limite ;

2° celles qui ne tendent vers aucune limite.

Précisons : une suite quelconque

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots$$

tend vers une *limite* L toutes les fois que la suite des différences algébriques

$$u_0 - L, \; u_1 - L, \; u_2 - L, \; \ldots\ldots u_n - L, \; \ldots\ldots$$

a tous ses termes inférieurs en valeur absolue, aux termes correspondants d'une suite décroissante dont les termes deviennent plus petits (plus voisins de zéro) que toute quantité assignable. Si, au contraire, il n'existe aucune quantité L, soit positive, soit négative, capable de remplir cette condition, la suite (1) n'aura pas de limite. Dans le premier cas, la suite sera dite *convergente* vers la limite L ; dans le second cas, *divergente*. De plus, il est évident qu'on peut envisager toute suite qui n'a qu'un nombre fini de termes comme convergente et ayant pour limite zéro.

SÉRIES. Une suite dont les termes sont censés devoir être additionnés successivement, c'est ce qu'on appelle une *série*. Exemple :

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Chaque série est donc caractérisée ou distinguée des autres séries par les valeurs des termes qui la composent, en ayant égard aux rangs de ces termes, valeurs qui peuvent d'ailleurs être aussi bien négatives que positives.

Une série infinie est dite *décroissante* toutes les fois que ses termes décroissent de chacun au suivant à partir d'un rang quelconque.

De même, une série infinie est *croissante* si ses termes croissent de chacun au suivant à partir d'un rang quelconque.

Par *série convergente* nous entendons toute série telle que si on somme successivement les deux premiers termes, les trois premiers, et ainsi de suite, les valeurs des sommes ainsi obtenues forment une suite convergente; et alors la *limite* de cette suite sera dite la *limite* ou la *somme* de cette série. Dans tout autre cas, la série sera dite *divergente*, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de somme.

TERME GÉNÉRAL. On appelle *terme général* d'une suite ou d'une série le terme dont le rang est représenté par une lettre arbitraire telle que n; par exemple, si une série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots,$$

son terme général pourra l'être par la notation u_n ou u_i ou u_k, etc., à volonté.

Il existe presque toujours une relation entre le rang n d'un terme quelconque et le terme général u_n : c'est ce qui constitue la *loi* de la suite ou de la série. Cependant il existe beaucoup de suites et de séries qui n'ont pas de terme général; par exemple, la suite naturelle des nombres premiers.

OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES. Effectuer les quatre règles de l'arithmétique et de l'algèbre sur les séries aussi bien que sur les quantités, n'est-ce pas une idée simple? C'est principalement à cette idée que je dois d'être parvenu à démontrer complètement le binome de Newton sans sortir des voies élémentaires, ce qui n'avait pas été fait, que je sache, avant moi. En opérant sur deux séries par voie d'addition, de multiplication, de soustraction ou de division, on obtient pour résultat une série.

Représentons les deux séries sur lesquelles on opère ainsi :

$$(2) \quad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n + \dots\dots,$$

$$(3) \quad v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots\dots + v_n + \dots\dots,$$

d'abord, pour les *additionner*, je les additionne terme à terme, ce qui donne pour la série-somme

(4) $(u_0+v_0)+(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots\ldots+(u_n+v_n)+\ldots\ldots$

dont le terme général est =

$$= u_n + v_n,$$

chaque terme de la nouvelle série se trouve ici renfermé dans une parenthèse. On a donc

(5) $$w_n = u_n + v_n$$

si l'on convient de représenter par

(6) $w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n + \ldots\ldots$

la série-somme des séries (2) et (3).

Nous définissons aussi la *multiplication* entre les séries (2) et (3) ainsi : soit

(7) $$t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_n, \ldots\ldots$$

la *série-produit* des séries (2) et (3); on a, quel que soit n :

(8) $t_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots\ldots + u_n v_0.$

Nous représenterons souvent, pour abréger, les séries par de simples lettres choisies toutefois dans l'alphabet grec : par ces lettres il ne faut pas entendre alors des quantités, puisqu'une série n'est pas une quantité, mais bien un système de quantités rangées dans un certain ordre.

Quand on parle de quantités, la *soustraction* et la *division* dérivent respectivement de l'addition et de la multiplication dont elles ne sont que les opérations inverses : il en est absolument de même quand on parle de séries.

Enfin, des quatre règles qu'on peut effectuer sur les séries, dérivent les *puissances* et *racines de séries*, tout-à-fait de la même manière que les puissances et racines des quantités dérivent des quatre règles sur les quantités. Et on peut même généraliser plus loin, si l'on veut, cette analogie.

Égalité de deux séries. Lorsque deux séries sont égales terme à terme, je conviens de dire que ces séries sont *égales* entre elles, de même qu'on dit en géométrie que deux figures sont égales quand elles sont égales dans toutes leurs parties de manière à pouvoir coïncider. Il suit de cette définition que, pour que deux séries α et β soient égales, il faut nécessairement ou qu'elles aient chacune une infinité de termes ou qu'elles aient un même nombre de termes : ce qui n'est, comme on voit, qu'une condition préalable, de même que l'égalité de deux polygones exige avant tout qu'ils aient un même nombre de côtés.

L'égalité de deux séries quelconques α et β sera indiquée par le signe $=$ placé entre elles, ainsi :

$$\alpha = \beta,$$

de même qu'à l'égard des quantités.

La combinaison des opérations et de l'égalité entre séries donne lieu à ce que je conviens d'appeler *équations sérielles:* par exemple,

$$\alpha^2 = \beta + \gamma$$

signifierait que le carré de la série α et la somme des deux séries β et γ sont deux séries égales, et un tel fait serait une équation sérielle entre les trois séries α, β et γ.

Nous verrons que le *binome de Newton* pour un exposant quelconque consiste essentiellement en deux principes distincts dont le second découle du premier, lequel n'est autre chose qu'une équation sérielle.

Équivalence. Deux séries convergentes α et β seront dites *équivalentes* entre elles toutes les fois que leurs limites sont égales. Nous indiquerons cette équivalence ainsi : $\lim.\ \alpha = \lim.\ \beta$.

Deux séries peuvent donc être équivalentes sans être égales; car il est évident qu'on peut imaginer une infinité de séries convergentes ayant une limite donnée.

Réciproquement l'égalité entre deux séries convergentes entraîne leur équivalence. Mais ce serait un non-sens d'en dire autant de deux séries dont une au moins est divergente, puisque l'idée d'équivalence implique celle de somme et que les séries divergentes n'ont pas de somme.

§ 2. Remarques préliminaires.

1° Les épithètes de *suite infinie*, *série infinie*, pour désigner une suite ou une série qui ont une infinité de termes, sont consacrées par l'usage dans le langage mathématique, quoique certains philosophes prétendent qu'on devrait plutôt dire *indéfinie*. On dit conséquemment une *suite finie*, une *série finie* pour désigner une suite ou une série qui ont un dernier terme.

2° On peut indifféremment regarder les polynomes comme des séries qui ont un dernier terme ou bien comme des séries infinies dont les termes deviennent nuls à partir d'un certain rang, sans cesser d'être d'accord avec toutes les définitions précédentes.

3° Les séries convergentes renferment comme un cas très-particulier les polynomes, puisque, en additionnant tous les termes d'un polynome, on obtient ainsi la valeur non approchée mais exacte de sa somme.

4° Une série ne peut être convergente sans être décroissante; mais les séries décroissantes ne sont pas toutes convergentes.

5° Une série convergente reste convergente si l'on supprime un nombre quelconque des premiers termes, et réciproquement.

6° Lorsqu'on multiplie tous les termes d'une série par un même nombre arbitraire, si elle est convergente elle restera convergente, et si elle est divergente elle restera divergente.

7° Deux séries égales à une troisième sont égales entre elles.

8° Deux séries équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles.

9° Chacune des quatre opérations sur deux ou même plusieurs séries

$$\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots,$$
$$\beta = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots,$$

etc.,
revient à opérer sur les suivantes

$$X = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots\ldots,$$
$$Y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots\ldots + b_nx^n + \ldots\ldots,$$

etc.,
de la même manière que sur les polynomes en algèbre, à ordonner le résultat (c'est-à-dire la somme, le reste, le produit ou le quotient) suivant les puissances ascendantes de la lettre x, enfin à faire $x = 1$, en regardant les coefficients des puissances de x dans la série résultante comme les véritables termes du résultat final.

Mais si les séries données sont déjà ordonnées par rapport aux puissances ascendantes d'une même lettre telle que x, on peut se dispenser d'introduire une nouvelle lettre auxiliaire pour effectuer l'opération ou les opérations voulues.

10° Le produit d'un nombre quelconque de séries est indépendant de l'ordre des facteurs.

En effet, quel que soit le nombre des facteurs

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots$$
$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots$$
$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots\ldots,$$

etc.,
le coefficient du terme général en x_n dans le produit de toutes ces séries est évidemment la somme de tous les produits $a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots\ldots$ qu'on peut former dans lesquels la somme des indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ est égale à n; or, il est manifeste que cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel on multiplie ces diverses séries; ainsi tout est prouvé.

11° Lorsque les facteurs d'un produit sont composés de parties, ce produit est égal à la somme de tous les produits partiels, aussi bien lorsqu'on opère sur des séries que lorsqu'on opère sur des quantités : ce qui est très-évident.

§ 3. Conditions de convergence des séries.

Théorème 1. *Étant donnés: 1° une série convergente α dont tous les termes sont positifs; 2° une série β dont les termes sont plus petits, abstraction faite des signes, que les termes correspondants de la série α; je dis que la série β est convergente.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'une suite croissante à termes tous positifs est convergente si ses termes ne dépassent pas une limite : car il existe alors évidemment une plus petite limite L qui n'est pas dépassée; et L est la limite de cette suite, puisque les termes s'approchent indéfiniment de la valeur L, autrement il existerait encore une autre limite inférieure contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent une série dont tous les termes sont positifs sera convergente si la somme de ses n premiers termes ne peut pas dépasser une limite. Il suit de là que le théorème est déjà évident lorsque la série β n'a que des termes positifs, puisque par hypothèse la somme de ses n premiers termes est inférieure à la somme des n premiers termes de la série α et que cette seconde somme ne dépasse pas une limite, vu que la série α est convergente.

Supposons maintenant que les termes de la série β sont les uns positifs, les autres négatifs. Soit S_n la somme des n premiers termes, P_n celle des positifs et $-Q_n$ celle des négatifs. de sorte que

$$S_n = P_n - Q_n;$$

soit aussi A_n la somme des n premiers termes de la série α, et A la somme de cette série; on a :

$$A_n < A.$$

$$P_n < A_n;\ Q_n < A_n.$$

donc à fortiori :

$$P_n < A.\ Q_n < A:$$

donc P_n tend vers une limite P et Q_n vers une limite Q, et par suite $P_n - Q_n$ ou S_n tend vers la limite $P - Q$. en sorte que la série β est convergente.

Corollaire. Il en serait encore de même si les termes de la série β n'étaient inférieurs à ceux de la série α qu'à partir d'un certain rang, en vertu de la cinquième remarque du § précédent.

Théorème 2. *Toute progression géométrique indéfinie est une série convergente si elle est décroissante et une série divergente si elle est croissante.*

Démonstration. Soit :

$$\alpha = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1} + \ldots\ldots$$

une progression géométrique indéfinie.

En appelant, quel que soit n, s_n la somme des n premiers termes, on a :

$$s_n = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1} =$$

$$= \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r};$$

Cela posé, si la progression décroît, c'est-à-dire si l'on a : $r < 1$, on aura :

$$\lim.\ r^n = 0,$$

d'où :

$$\lim. \frac{ar^n}{1 - r} = 0,$$

et par suite :

$$\lim. S_n = \frac{a}{1 - r};$$

donc la série est convergente et sa somme vaut $\frac{a}{1 - r}$.

Mais si l'on a : $r > 1$, on voit que r^n croit à l'infini avec n, donc aussi $\frac{ar^n - a}{r - 1} = s_n$, donc alors la série est divergente.

Théorème 3. *Pour qu'une série soit convergente, il suffit que, en divisant chaque terme par le précédent à partir d'un rang quelconque sans avoir égard aux signes, les quotients ainsi obtenus forment une suite dont les termes soient tous plus petits qu'une même quantité k inférieure à l'unité.*

DÉMONSTRATION. Soit donnée la série

(1) $\alpha = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$,

et supposons que chacun des quotients

(2) $u_1 : u_0$, $u_2 : u_1$, $u_3 : u_2$, et ainsi à l'infini,

est $< k$, abstraction faite des signes, k étant < 1. On aura donc :

(3) $u_1 < u_0 k$, $u_2 < u_1 k$, $u_3 < u_2 k$, ... $u_{n+1} < u_n k$, ...,

d'où :

(4) $u_1 < ak$, $u_2 < ak^2$, $u_3 < ak^3$, ... $u_{n+1} < ak^{n+1}$, ...

en représentant pour abréger u_0 par la lettre a; de sorte que les termes de la série proposée sont inférieurs à ceux de la progression géométrique décroissante

(5) $a + ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \ldots\ldots$,

c'est-à-dire à ceux d'une série convergente dont tous les termes sont positifs (th. 2); donc, en vertu du théorème 1, la série (1) est convergente à fortiori. Le théorème est donc vrai quand la condition dont il s'agit est remplie à partir du premier terme; mais il en est de même si elle n'est remplie qu'à partir d'un certain terme, en vertu de la cinquième remarque du § 2.

SCHOLIE. Ce théorème fournit le procédé le plus simple pour reconnaître si une série est convergente et qui suffit dans la plupart des cas. Cependant il est des séries convergentes qui ne remplissent pas la condition énoncée par ce théorème.

DÉFINITION. Nous appellerons *série géométriquement convergente* toute série dont les termes sont, à partir d'un rang quelconque et abstraction faite des signes, inférieurs aux termes correspondants d'une progression géométrique décroissante; 1° parce qu'une pareille série est convergente en vertu des théorèmes 1 et 2; 2° parce que la rapidité de cette convergence est comparable à celle de cette progression géométrique. On démontre qu'il y a des séries qui sont convergentes sans l'être géométriquement; exemple : la série

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\dots$$

formée avec la suite naturelle des carrés des nombres entiers pour dénominateurs. Dans le théorème précédent, on peut ajouter que la série qui remplit la condition énoncée est géométriquement convergente, ce qui ressort avec évidence de la démonstration. Mais une série peut être géométriquement convergente sans remplir cette condition, par exemple si les termes augmentaient et diminuaient alternativement de chacun au suivant tout en restant inférieurs aux termes correspondants d'une progression géométrique décroissante, ce qui est possible sans contradiction. Ainsi, après avoir constaté qu'une série ne remplit pas la condition du théorème 3, il convient encore de chercher directement si néanmoins elle ne serait pas géométriquement convergente; sinon, on cherchera si elle n'est pas au moins convergente.

Théorème 4. *Pour qu'une série soit géométriquement convergente, il suffit que, en appelant* u_n *la valeur absolue de son terme général, l'expression* $u_n^{\frac{1}{n}}$ *finisse par être constamment moindre qu'une quantité* k *elle-même inférieure à l'unité, à partir d'un rang quelconque.*

Démonstration. Supposons que u_n représente, quel que soit n, la valeur absolue du terme général d'une série et qu'on a pour toute valeur de $n \geqq m$:

$$(1) \qquad u_n^{\frac{1}{n}} < k.$$

k étant une quantité donnée inférieure à l'unité. On déduit de cette inégalité pour les mêmes valeurs de n :

$$(2) \qquad u_n < k^n;$$

or k^n est le terme général d'une progression géométrique décroissante; puisque u_n est constamment inférieur à ce terme général à partir de $n = m$, il en résulte que la série proposée est géométriquement convergente.

Le théorème 3 peut, d'après une remarque précédente, s'énoncer mieux comme suit.

Théorème 5. *Si, en divisant chaque terme d'une série par le précédent sans faire attention aux signes, les quotients obtenus finissent par être, à partir d'un rang quelconque, constamment inférieurs à une quantité k elle-même inférieure à l'unité, cette série sera géométriquement convergente.*

Étudions maintenant les autres cas où une série est convergente sans qu'on puisse affirmer qu'elle l'est géométriquement.

Théorème 6. *Lorsque les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs et décroissent de chacun au suivant en tendant vers la limite zéro, cette série est convergente.*

DÉMONSTRATION. Représentons cette série ainsi

(1) $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots\ldots + u_{2m} - u_{2m+1} + \ldots\ldots$

et par s_n la somme des n premiers termes, quel que soit n. Comme on a par hypothèse :

(2) $$u_n > u_{n+1},$$

quel que soit n, on a évidemment :

(3) $$s_0 > s_2, \; s_2 > s_4, \text{ etc.};$$

(4) $$s_1 < s_3, \; s_3 < s_5, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire que la suite

(5) $$s_0, \; s_2, \; s_4, \; s_6, \; s_8, \; \ldots\ldots;$$

dont les termes sont tous positifs, est croissante, et que la suite

(6) $$s_1, \; s_3, \; s_5, \; s_7, \; s_9, \; \ldots\ldots;$$

dont les termes sont aussi tous positifs, est décroissante. De plus il est évident que s_0 est $> s_1$, $s_2 > s_3$, et en général chaque terme de la suite (5) supérieur au terme correspondant de la suite (6).

Donc il est manifeste que la suite (5) ne croît pas indéfiniment et que la suite (6) ne décroît pas indéfiniment. Or une suite qui croît ou décroît toujours, mais non indéfiniment, tend, sans aucun doute, vers une limite. Donc chacune des suites (5) et (6) tend vers une limite. De plus, elles tendent vers une même limite, puisque l'on a :

(7) $$s_0 - s_1 = u_1, \; s_2 - s_3 = u_3, \; s_4 - s_5 = u_5, \text{ etc.},$$

ce qui montre que la différence de deux termes correspondants décroît et tend vers zéro, ce qui serait évidemment impossible si les suites (5) et (6) tendaient vers des limites différentes.

Soit donc L la limite commune des suites (5) et (6). Il est clair que la suite

(8) $$s_0, \; s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4, \; \ldots\ldots$$

tend aussi vers cette limite L, de sorte que la série proposée est convergente et que sa somme est égale à L, ce qu'il fallait prouver.

REMARQUE I. Si les conditions du théorème n'étaient remplies qu'après la suppression d'un certain nombre des premiers termes, la série serait encore convergente.

REMARQUE II. Dans la série proposée, si n est pair, on a : $L > s_n$, puisque L est la limite de la suite (5) croissante; et si n est impair, on a : $L < s_n$, puisque L est aussi la limite de la suite (6) décroissante. Donc la limite L est comprise entre deux sommes consécutives quelconques s_n et s_{n+1}.

REMARQUE III. Il suit de là que la différence entre les deux sommes s_n et s_{n+1}, qui vaut précisément u_{n+1}, surpasse la différence entre la limite L et la somme s_n ou l'erreur commise en s'arrêtant au terme u_n. Donc l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série proposée est moindre que le terme suivant.

Théorème 7. *Si une série reste convergente quand on change le signe — en + de tous ses termes négatifs, je dis que cette série est convergente.*

DÉMONSTRATION. Soit S_n la somme des n premiers termes de la série proposée, P_n la somme de ceux de ces termes qui sont positifs, et $-Q_n$ la somme de ceux de ces mêmes termes qui sont négatifs, de sorte qu'on a :

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Si l'on appelle T_n la somme des n premiers termes de la nouvelle série obtenue par le changement des signes — en +, il est clair qu'on a :

$$T_n = P_n + Q_n;$$

et puisque cette nouvelle série est convergente (hyp.), T_n converge vers une certaine limite T; or on a constamment :

$$T_n < T, \ P_n < T_n, \ Q_n < T_n.$$

donc à fortiori :

$$P_n < T. \quad Q_n < T.$$

Puisque P_n croit constamment avec n sans dépasser la valeur T, il est évident que P_n tend vers une limite P. Par là même raison, Q_n tend vers une limite Q. Donc la différence $P_n - Q_n = S_n$ tend vers une limite $P - Q$, c'est-à-dire que la série proposée est convergente.

Nous terminerons ce paragraphe par le célèbre théorème de Cauchy sur les séries dont tous les termes sont positifs.

Théorème 8. *Si les termes d'une série*

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots$$

sont tous positifs et vont constamment en décroissant à partir du premier, cette série sera convergente ou divergente en même temps que la suivante.

$$(2) \qquad u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots\ldots$$

DÉMONSTRATION. 1° Si la série (1) est convergente, en observant qu'on a :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = u_0 \\ 2u_1 = 2u_1 \\ 4u_3 < 2u_2 + 2u_3 \\ 8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 \\ 16u_{15} < 2u_8 + 2u_9 + \ldots\ldots + 2u_{15} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit par addition :

$$(4) \quad u_0+2u_1+4u_3+8u_7+16u_{15}+\ldots\ldots<u_0+2u_1+2u_2+2u_3+\ldots+2u_{15}+\ldots\ldots,$$

le second membre est une série convergente, donc à fortiori la série du premier membre, c'est-à-dire la série (2) est aussi convergente. 2° Si la série (1) est divergente, en observant qu'on a :

$$(5)\quad \begin{cases} u_0 = u_0 \\ 2u_1 > u_1 + u_2 \\ 4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \\ 8u_7 > u_7 + u_8 + \ldots\ldots + u_{14} \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

d'où l'on déduit par addition :

$$(6)\quad u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \ldots\ldots > u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{14} + \ldots\ldots$$

la série du second membre a une somme infinie (hyp.) : donc à fortiori il en est de même de la série du premier membre, c'est-à-dire de la série (2), qui est par conséquent divergente.

Théorème 9. *La série*

$$(1)\qquad 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots\ldots$$

où l'exposant m est quelconque entier ou non entier, est convergente pour $m > 1$ et divergente pour $m = 1$ et pour $m < 1$.

Démonstration. En vertu du théorème précédent, on voit que la série (1) est convergente ou divergente en même temps que la suivante

$$1 + \frac{2}{2^m} + \frac{4}{4^m} + \frac{8}{8^m} + \ldots\ldots$$

qui revient à la progression géométrique

$$(2)\qquad 1 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{4^{m-1}} + \frac{1}{8^{m-1}} + \ldots\ldots;$$

dont la raison est $\frac{1}{2^{m-1}}$ Cela posé, 1° si l'on a : $m > 1$, il en résulte : $m - 1 > 0$, cette raison est alors < 1, cette progression est décroissante et est par conséquent une série convergente (théor. 2) : donc alors la série (1) est convergente ; 2° si l'on a : $m = < 1$, l'exposant $m - 1$ de la raison $\frac{1}{2^{m-1}}$ est négatif, et comme $\frac{1}{2^{m-1}}$ est la même chose que 2^{1-m}, on voit que la raison est alors égale à une puissance de 2 dont l'exposant est $1 - m$ ou > 0, donc cette raison est > 1, donc cette progression est croissante et par suite une série divergente (th. 2) : donc la série (1) est divergente pour $m =< 1$.

SCHOLIE. Le cas où l'on a : $m = 1$ peut se démontrer plus directement comme suit. La série proposée est alors

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots\dots\dots$$

et il s'agit de faire voir qu'elle est divergente ou que la somme des n premiers termes dépasse toute grandeur assignable quand n croît à l'infini. En effet, il est clair qu'on a :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} \text{ ou } \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} \text{ ou } \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots\dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} \text{ ou } \frac{1}{2};$$

et ainsi de suite, de sorte que cette série est composée d'une infinité de groupes de termes dont chacun a une valeur supérieure à $\frac{1}{2}$: donc sa somme est infiniment plus grande que $\frac{1}{2}$ et par conséquent infinie, d'où il suit que cette série est divergente.

Quant aux autres séries dont tous les termes sont positifs et qui ne convergent que très-lentement, on arrivera souvent à s'assurer si elles sont convergentes ou non en divisant tous les termes par le premier et comparant la série qui en résulte terme à terme à la série

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots\dots,$$

où l'exposant m a une valeur convenablement choisie; nous nous bornerons à énoncer encore un théorème qui se déduit de cette manière du précédent.

Théorème 10. *Si dans la série*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots$$

dont tous les termes sont positifs, le rapport $\frac{u^{n+1}}{u_n}$ *est mis sous la forme* $\frac{1}{1+a}$ *et si* a *est constamment positif et tend vers zéro; la série sera convergente si la limite du produit* na *est supérieure à l'unité, divergente si cette limite est inférieure à l'unité; mais si cette limite est égale à l'unité, on peut seulement dire que la série sera divergente si en même temps le produit* na *est toujours plus petit que la limite 1.*

(Voir Duhamel, *Leçons de calcul infinitésimal.*)

On fait aussi souvent usage de *séries imaginaires*, c'est-à-dire de séries dont les termes sont ce qu'on appelle des *quantités imaginaires.* On n'étudiera le théorème suivant que si l'on connaît bien la théorie du *calcul imaginaire.*

Théorème 11. *Une série imaginaire est convergente lorsque la série des valeurs absolues des modules de tous ses termes est convergente.*

DÉMONSTRATION. Comme toute quantité imaginaire peut se représenter par $r(\cos p+\sin p\sqrt{-1})$, où r est son module, qui est toujours censé positif, et p un angle, on peut représenter le terme général d'une série imaginaire par $r_n(\cos p_n+\sin p_n\sqrt{-1})$, où r_n est le module. Supposons donc que la série

$$(1)\quad r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots + r_n + \ldots\ldots$$

soit convergente. Comme tous ses termes sont censés positifs et qu'un sinus ou cosinus est toujours < 1, chacune des deux suivantes

(2) $r_0\cos p_0 + r_1\cos p_1 + r_2\cos p_2 + \ldots + r_n\cos p_n + \ldots\ldots,$

(3) $r_0\sin p_0 + r_1\sin p_1 + r_2\sin p_2 + \ldots + r_n\sin p_n + \ldots\ldots,$

est aussi convergente (théor. 1). La série dont le terme général est $r_n\cos p_n$ converge donc vers une certaine limite A, et celle dont le terme général est $r_n\sin p_n$ vers une certaine limite B; conséquemment celle dont le terme général est $r_n\cos p_n + r_n\sin p_n\sqrt{-1}$, c'est-à-dire la série proposée converge vers la limite $A + B\sqrt{-1}$, ce qu'il fallait prouver.

REMARQUE. On peut encore prouver que, *si la série (1) est divergente et si ses termes ne tendent pas vers zéro, la série proposée sera divergente*, en faisant voir qu'alors les séries (2) et (3) ne peuvent pas être toutes deux à la fois convergentes. Mais si, la série (1) étant divergente, ses termes décroissent indéfiniment, on n'en peut rien conclure.

§ 4. Egalité entre polynomes.

Ceci paraîtra au premier abord étranger à la théorie des séries; cependant on verra bientôt qu'il n'en est pas ainsi.

Théorème 12. *Si un polynome X s'annule pour $x = a$, il est divisible sans reste par $x - a$; et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. Divisons algébriquement le polynome X par le binome $x - a$. Soit Q le quotient et r le reste, lequel reste est certainement indépendant de la lettre x, puisqu'autrement la division ne serait pas achevée. On aura l'égalité algébrique

$$X = (x-a)\ Q + r,$$

de sorte qu'elle subsiste numériquement, quel que soit **x**. Or si l'on suppose $x = a$, on aura par hypothèse $X = 0$, $(x - a)\ Q$ devient $(a - a)\ Q = 0$, parce que, Q étant un polynome, ne peut devenir infini pour une valeur finie de x; quant à r, il reste toujours le même, quel que soit x; on aura donc : $0 = 0 + r$, d'où : $r = 0$, c'est-à-dire que la division algébrique a lieu sans reste, comme nous l'avions annoncé. La réciproque est manifeste.

Théorème 13. *Si un polynome X s'annule pour n, valeurs distinctes de x, soient a_1, a_2, a_3, ... a_n, il sera divisible algébriquement par le produit*

$$(x-a_1)\ (x-a_2)\ (x-a_3)\ \dots\ (x-a_n).$$

Démonstration. Les n valeurs

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n$$

qu'on peut supposer soit réelles, soit même imaginaires, étant censées distinctes, il est d'abord évident qu'une même valeur de x ne pourra jamais annuler à la fois deux des n binomes correspondants.

(2) $$x-a_1,\ x-a_2,\ x-a_3,\ \dots\ x-a_n.$$

Cela posé, je dis qu'on aura cette suite d'égalités entre polynomes ou fonctions entières de x :

(3) $X=(x-a_1)X_1,\ X_1=(x-a_2)X_2,\ \dots X_{n-1}=(x-a_n)X_n$;

en effet, la première est évidente en vertu du dernier théorème; il en résulte que la fonction $(x-a_1)X_1$ s'annule aussi pour les valeurs a_2, a_3, ... a_n; or un produit ne peut devenir zéro que si un facteur au moins devient zéro, et ces valeurs, d'après la remarque ci-dessus, annulant des binomes autres que $x-a_1$, ne peuvent annuler celui-ci : donc chacune des valeurs a_2, a_3, ... a_n annule la fonction X_1; d'où l'on conclut la seconde égalité; et on prouve semblablement que chacune des valeurs a_3, a_4, ... a_n annule la fonction X_2, ce qui entraîne la troisième égalité. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les valeurs a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}, a_n.

Or les égalités (3) entraînent manifestement en faisant l'une après l'autre toutes les substitutions :

(4) $X = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)X_n$:

donc la fonction entière ou polynome X sera divisible algébriquement par le produit $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

REMARQUE. Le produit $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ est évidemment une fonction du degré n ; soit m le degré de X et N celui de X_n ; le second membre de l'égalité (4) sera du degré $n+N$, et ce degré est le même que celui du premier membre : donc on a :

(5) $$m = n + N.$$

d'où :

(6) $$N = m - n ;$$

or X_n étant une fonction entière, son degré N ne saurait être négatif. On a donc :

(7) $$N \geqq 0,$$

et par suite :

(8) $$m - n \geqq 0,$$

(9) $$n \leqq m,$$

d'où l'on conclut le corollaire qui suit.

COROLLAIRE. *Le nombre des valeurs distinctes de* x, *soit réelles, soit imaginaires, capables d'annuler un polynome ou fonction entière X du degré m, ne peut jamais surpasser ce nombre m.*

DÉMONSTRATION. On peut démontrer ce corollaire d'une manière plus directe comme suit. Supposons, pour un moment, que la fonction entière X devient nulle pour les n valeurs de x, savoir :

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\dots\ a_n$$

soit réelles, soit imaginaires, et toutes distinctes, et que cette fonction est seulement du degré n — 1. En posant :

(2) $X_1 = X - k\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,\ldots\,(x - a_{n-1})$,

et déterminant k de manière à ce que le terme le plus élevé du second membre ait zéro pour coefficient, ce qui a lieu en faisant k égal au coefficient du premier terme de X, on aura une fonction entière X_1 du degré $n - 2$, qui s'annule évidemment pour chacune des $n - 1$ valeurs

(3) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n.$$

sans être identiquement nulle : car si elle était nulle, quel que soit x, on aurait l'égalité algébrique

(4) $$X = k\,(x - a_1)\,(x - a_2)\ \ldots\ (x - a_{n-1}).$$

de sorte que le produit

(5) $$k\,(x - a_1)\,(x - a_2)\ \ldots\ (x - a_{n-1})$$

s'annulerait pour $x = a_n$, ce qui est impossible. Ainsi, en diminuant n d'une unité, un fait semblable aurait lieu : donc on finirait par arriver à une fonction entière du premier degré qui s'annulerait pour au moins deux valeurs de x, ce qui est absurde. Donc, etc.

SCHOLIE. Cette dernière méthode peut devenir d'une grande utilité dans la théorie des nombres soit réels, soit idéaux, branche plus élevée de l'algèbre.

Théorème 14. *Pour que deux fonctions entières de x soient égales, il suffit qu'elles deviennent équivalentes pour un nombre de valeurs de x supérieur à chacun des degrés des deux fonctions.*

DÉMONSTRATION. Supposons que deux fonctions entières P et Q de x, des degrés m et n, deviennent équivalentes pour k valeurs

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_k$$

de l'indéterminée x et que l'on ait :

(2) $$k > m \text{ et } > n.$$

Je dis que ces fonctions seront égales, car autrement on aurait une fonction entière

$$(3) \qquad P - Q = R$$

non *égale* à zéro, dont le degré ne surpasse ni m ni n et est par conséquent $< k$, et cette fonction serait *équivalente* à zéro pour k valeurs de x, ce qui est impossible (th. 13 cor.).

Corollaire 1. Toutes les fois que deux fonctions entières de x sont égales, il en sera de même des deux fonctions entières qu'on obtient en changeant dans les deux premières x en $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction entière et arbitraire.

En effet, si les deux fonctions entières F (x) et f (x) sont égales, elles seront par le fait équivalentes pour toute valeur de x ; par conséquent, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, les deux autres fonctions $F(\varphi(x))$ et $f(\varphi(x))$ seront équivalentes pour toute valeur numérique de $\varphi(x)$ et par suite quel que soit x ; d'ailleurs elles sont des fonctions entières de x ; donc enfin elles sont égales.

Corollaire 2. En multipliant ensemble plusieurs égalités entre des fonctions entières, on obtient une égalité de même genre. Ce qui se ferait voir comme ci-dessus. Et en général, tant d'égalités qu'on voudra entre des fonctions entières de x en entraînent une nouvelle en composant une expression semblable quelconque avec les premiers membres et avec les seconds, s'il n'y entre que des additions, des soustractions et des multiplications (y compris les puissances à exposant entier positif).

Corollaire 3. Toutes les fois que deux fonctions entières de x sont égales, l'égalité subsistera si l'on y change x en $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions entières arbitraires, pourvu qu'après cette substitution l'on multiplie chaque résultat par $\{\psi(x)\}^i$, i étant le degré le plus élevé des deux fonctions données.

Car si les fonctions entières F (x) et f (x) sont égales, elles sont par le fait équivalentes pour toute valeur de x...

Par conséquent, quelles que soient les fonctions entières $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on a l'équivalence :

$$(1) \qquad F\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = f\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)$$

quel que soit x, ce qui entraîne, quel que soit i, l'équivalence :

$$(2)\ F\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) \times \{\psi(x)\}^i = f\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) \times \{\psi(x)\}^i$$

Or si l'on suppose i égal au degré le plus élevé des fonctions F (x) et f (x), chaque membre de l'équivalence (2) est une fonction entière de x : donc les deux membres sont aussi des fonctions égales de x.

§ 5. Égalité entre séries infinies.

Nous nous bornerons à la loi suivante et à ses conséquences très-nombreuses et très-utiles, comme on le verra dans la suite.

Théorème 15. *Deux fonctions entières par rapport à un nombre quelconque d'indéterminées x, y, z, ... seront identiques si elles deviennent équivalentes pour toutes les valeurs entières positives des lettres x, y, z, ...*

Démonstration. Représentons par a, b, c. .... les valeurs quelconques entières et positives de x, y, z ....; et par α, β, γ .... les valeurs quelconques réelles ou imaginaires de x, y, z ... (*). En nous bornant, par exemple, au cas de trois lettres x, y, z, et désignant pas F (x, y, z)

(*) Ici nous nous permettons pour un moment d'user de lettres grecques pour désigner des quantités.

les deux fonctions données telles qu'on a, par hypothèse, l'équivalence :

$$(1) \qquad F(a, b, c) = f(a, b, c),$$

en nous basant sur le théorème 13, nous en déduisons successivement les équivalences :

$$(2) \qquad F(\alpha, b, c) = f(\alpha, b, c),$$

$$(3) \qquad F(\alpha, \beta, c) = f(\alpha, \beta, c),$$

$$(4) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma),$$

c'est-à-dire que toutes les valeurs imaginables α, β, γ, des lettres x, y, z, rendent équivalentes les deux fonctions $F(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$: d'où l'on est en droit de conclure que ces fonctions sont identiques. On raisonnerait semblablement, quel que soit le nombre des lettres x, y, z, t, u, ... dont il s'agit. Donc &.

Corollaire. Si dans les deux séries

$$\alpha = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

$$\beta = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

les coefficients des mêmes puissances de la lettre x sont des fonctions entières d'une ou de plusieurs indéterminées m, n, p, ..., et si les deux séries α et β sont égales pour toutes les valeurs entières positives de ces indéterminées, je dis qu'elles seront égales pour toutes les valeurs, réelles ou imaginaires, de ces indéterminées m, n, p, ...

En partant de ce seul corollaire et de la formule du *binome de Newton*, pour le cas de l'exposant entier positif, supposée démontrée, je vais démontrer la même formule pour le cas plus étendu de l'exposant fractionnaire ou entier, négatif ou positif.

La formule dont il s'agit, réduite à sa forme la plus simple, est la suivante :

$$(1 \times x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n + \ldots$$

Lorsque l'exposant m est entier positif, elle signifie que le binome $1 + x$, multiplié par lui-même m fois facteur, donne pour produit le second membre, sens qui est évident. Mais ce qui l'est moins, c'est le sens qu'il faut attacher à la même formule dans le cas où l'exposant m est fractionnaire ou négatif. Pour préciser ce sens, il faut d'abord savoir interpréter les exposants de cette nature affectant un binome $1 + x$, ou une fonction entière de x, ou même une série ordonnée par rapport à la lettre x.

De même qu'à l'égard des nombres, les exposants $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., indiquent l'opération inverse des puissances 2^{e}, 3^{e}, etc., c'est-à-dire que généralement l'expression

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^{\frac{1}{q}}$$

indique la série, laquelle élevée à la puissance q reproduirait la série $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, en un mot, une *racine* q^e de celle-ci, quel que soit q, supposé toutefois entier positif.

Quant à l'expression plus générale

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots)^{\frac{p}{q}},$$

où $\frac{p}{q}$ désigne une fraction quelconque positive, elle indique une racine q de la puissance p de la série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots$$

Enfin l'expression suivante

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^{-\frac{p}{q}}$$

où $-\frac{p}{q}$ désigne une fraction quelconque négative, indique une série, laquelle multipliée par la série

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^{\frac{p}{q}}$$

donne pour produit la série composée du seul terme 1. Ce ne sont là que des définitions. On conçoit qu'il puisse, à la rigueur, exister plusieurs séries répondant à une même expression de la nature des précédentes, de même que les nombres admettent plusieurs racines : aussi ces expressions doivent-elles être envisagées comme indéterminées. Ces définitions font connaître avec une entière précision le sens de la formule dont il s'agit quand m est fractionnaire ou négatif ou tous les deux à la fois, sens qui peut se résumer brièvement dans cette *équation sérielle* ou *égalité :*

$$(1+x)^{\pm p} = \left\{ 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} x^2 + \ldots\ldots \right\}^q,$$

en posant pour abréger $\pm\frac{p}{q} = m$, en observant de plus que le cas de $m = -\frac{p}{q}$ revient à l'égalité

$$1 = (1+x)^p \left\{ 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} x^2 + \ldots\ldots \right\}^q.$$

La démonstration se composera de deux parties.

Première partie. J'emploie la notation

$$(1) \qquad [k] = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \, . \, 2} x^2 + \ldots\ldots$$

quelle que soit la quantité k entre parenthèse. Cette première partie consiste à prouver que, quelles que soient les quantités m et m′, les deux séries représentées l'une par le produit [m] [m′] l'autre par [m + m′] seront égales.

1° Je dis que les deux séries [m] [m′] et [m+m′] sont égales pour toutes les valeurs entières positives de m et m′. En effet, supposant m et m′ entiers positifs, la formule du binome pour le cas de l'exposant entier positif donnera

$$(2) \qquad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} x^2 + \ldots\ldots,$$

$$(3) \qquad (1+x)^{m'} = 1 + m'x + \frac{m'(m'-1)(m'-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} x^3 + \ldots\ldots,$$

ou, d'après la notation (1) :

$$(4) \qquad (1+x)^m = [m],$$

$$(5) \qquad (1+x)^{m'} = [m'],$$

d'où je tire par multiplication :

$$(6) \qquad [m] \, [m'] = (1+x)^m \, (1+x)^{m'} = (1+x)^{m+m'};$$

mais, m + m′ étant aussi entier positif, la dite formule donne encore :

$$(7) \qquad (1+x)^{m+m'} = [m+m'];$$

et de ces deux dernières égalités je conclus :

$$(8) \qquad [m]\,[m'] = [m+m'].$$

2° Dans chacune des deux séries $[m+m']$ et $[m]\,[m']$, chaque terme a pour coefficient une fonction entière de m, de m′ ou de m et m′ à la fois. En effet, les fonctions entières donnent pour résultat des fonctions entières quand on n'opère sur elles que des additions, des soustractions, des multiplications. Or, m, $m-1$, $m-2$, &., sont des fonctions entières de m. Donc $m(m-1)$, $m(m-1)\,(m-2)$, &., à l'infini le sont aussi. Une fonction entière subsiste encore telle lorsqu'on la divise par les constantes 1, 2, 3, &. Ainsi on peut dire que

$$(9) \qquad 1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2},\ \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \ldots$$

sont des fonctions entières de m. Par la même raison,

$$(10) \qquad 1,\ m',\ \frac{m'(m'-1)}{1\,.\,2},\ \frac{m'(m'-1)\,(m'-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \ldots$$

sont de pareilles fonctions de m′. Et

$$(11) \qquad 1,\ (m+m'),\ \frac{(m+m')\,(m+m'-1)}{1\,.\,2},\ \ldots$$

sont des fonctions entières de la somme $m+m'$ et par suite aussi relativement à m et à m′.

Or les coefficients des termes successifs des séries $[m]$, $[m']$, $[m+m']$ sont respectivement les expressions (9), (10) et (11). Ainsi chacun des coefficients de la série $[m+m']$ est certainement une fonction entière de m et m′. Je dis qu'il en est de même des coefficients de la série $[m]\,[m']$: car chacun de ces coefficients est une somme de produits de coefficients des séries $[m]$ et $[m']$ et par suite une somme de produits de fonctions entières de m et m′ et par conséquent une fonction entière de m et m′.

3° De 1° et de 2° on est en droit de conclure, en vertu du corollaire du théor. 15, que les deux séries $[m]\,[m']$ et $[m+m']$ sont égales, quelles que soient les quantités m et m′, soit réelles, soit imaginaires, ce qui était l'objet de la première partie.

Seconde partie. Cette seconde partie a pour objet de prouver la formule en question en partant de l'identité

$$(12) \qquad [m]\,[m'] = [m+m'].$$

On en tire d'abord l'égalité

$$[m+m'+m''] = [m+m'] [m''] = [m] [m'] [m''],$$

et en général :

$$(13) \quad [m+m'+m''+m'''+......] = [m] [m'] [m''] [m'''] .....,$$

ce qui a lieu pour un nombre indéfini de quantités arbitraires m, m', m'', m'''. &.

En les supposant toutes égales à m et appelant q combien il y en a, cela devient :

$$(14) \qquad [qm] = [m]^q;$$

Cette dernière a lieu pour toute quantité m et pour tout nombre entier positif q. Supposant donc, ce qui est permis, $m = \frac{p}{q}$, on a :

$$(15) \qquad [p] = \left[\frac{p}{q}\right]^q,$$

pour toute valeur de p. Soit donc p entier positif : alors on a par la formule du binome pour le cas de l'exposant entier positif :

$$(16) \qquad [p] = (1+x)^p,$$

et par suite :

$$(17) \quad (1+x)^p = \left[\frac{p}{q}\right]^q = [m]^q = \left\{1+mx+\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2+\ldots\right\}^q,$$

ce qui est le premier cas de l'*égalité* qu'il s'agit de démontrer, et peut aussi se formuler ainsi :

$$(18) \quad (1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots,$$

pourvu qu'on ne regarde cette forme-ci que comme une manière abrégée de représenter la dite *égalité de séries.*

Quant au second cas ou celui d'un exposant négatif $m = -\frac{p}{q}$, l'identité (12) donnera :

$$(19) \qquad [p] [-p] = [0] = 1,$$

quel que soit p. D'ailleurs on a aussi par la formule (15) :

$$(20) \qquad [-p] = \left[-\frac{p}{q}\right]^q,$$

quel que soit p, q étant supposé entier positif. De ces deux dernières je déduis :

$$(21) \qquad 1 = [p]\left[-\frac{p}{q}\right]^q.$$

Soit en outre p entier positif : alors, la formule (16) ou le binome ayant lieu, cela devient :

$$(22) 1=(1+x)^p\left[-\frac{p}{q}\right]^q=(1+x)^p[m]^q=(1+x)^p\left\{1+mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\ldots\right\}^q,$$

ce qu'il restait à démontrer.

NB. Il ne faut pas perdre de vue que l'égalité

$$(1+x)^{\pm p} = \left\{1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots\right\}^q,$$

que nous venons de démontrer en supposant p et q entiers, $m=\pm\frac{p}{q}$, x quantité arbitraire, équivaut à une infinité d'égalités qu'on obtiendrait en effectuant les opérations algébriques indiquées par les exposants p et q, réunissant tout dans un seul membre, ordonnant celui-ci par rapport à la lettre x et égalant à zéro chacun de ses coefficients. Pour le cas où le signe de p est —, on adoptera cette manière d'écrire la formule ci-dessus :

$$1 = (1+x)^p \left\{1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots\ldots\right\}^q,$$

ce qui revient au même quant au sens, et on opérera comme nous venons de dire.

§ 6. De l'équivalence entre séries ou fonctions de séries.

Théorème 18. *Le produit de deux séries convergentes*

$$\alpha = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots$$
$$\beta = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots$$

dont tous les termes sont positifs, est toujours une série convergente dont la limite équivaut au produit des limites des séries-facteurs α et β.

DÉMONSTRATION. Nous poserons généralement :

(1) $$A_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n,$$

(2) $$B_n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_nx^n,$$

(3) $$\alpha\beta = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \ldots\ldots,$$

(4) $$P_n = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \ldots + k_nx^n,$$

(5) $$A = \text{lim.}\ \alpha,\ B = \text{lim.}\ \beta,$$

sans oublier que A_n, B_n, P_n représentent des quantités et non des séries puisque ce ne sont pas des lettres grecques. Il est d'abord évident que l'on a, quel que soit n :

(6) $$P_n < A_nB_n.$$

On a d'ailleurs, quel que soit n :

(7) $$A_n < A,\ B_n < B,$$

d'où :

(8) $$A_nB_n < AB.$$

On a donc à fortiori :

(9) $$P_n < AB,$$

quel que soit n ; donc on a aussi :

(10) $$P_{2n} < AB.$$

En second lieu, on a évidemment :

(11) $$A_nB_n < P_{2n},$$

de sorte que P_{2n} est compris entre A_nB_n et AB, quel que soit n. Or, par hypothèse, quand n croît indéfiniment, A_n tend vers la limite A, et B_n vers la limite B, donc A_nB_n vers la limite AB. Donc à fortiori P_{2n} converge en même temps vers la limite AB dont elle est toujours plus rapprochée que A_nB_n. Et comme la limite de P_{2n} n'est autre que celle de la série $\alpha\beta$, on a donc :

$$\text{lim.}\ (\alpha\beta) = AB = \text{lim.}\ \alpha \times \text{lim.}\ \beta.$$

Ainsi tout est prouvé.

Théorème 17. *Le produit d'un nombre quelconque de séries convergentes, dont tous les termes sont positifs, est toujours une série convergente dont la limite équivaut au produit des limites des séries-facteurs.*

DÉMONSTRATION. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les séries-facteurs. En vertu du théorème précédent, chacun des produits

$$\alpha\beta,\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\gamma\delta,\ \ldots\ldots$$

sont des séries convergentes, et on a successivement :

$$\text{lim.}\ (\alpha\beta) = \text{lim.}\ \alpha \times \text{lim.}\ \beta,$$

$$\text{lim.}\ (\alpha\beta\gamma) = \text{lim.}\ (\alpha\beta) \times \text{lim.}\ \gamma = \text{lim.}\ \alpha \times \text{lim.}\ \beta \times \text{lim.}\ \gamma,$$

et ainsi de suite.

Théorème 18. *Lorsque deux séries convergentes α et β restent chacune convergentes quand on y change le signe de tous les termes négatifs, leur produit $\alpha\beta$ sera une série convergente et on aura :*

$$\text{lim.}\ (\alpha\beta) = \text{lim.}\ \alpha \times \text{lim.}\ \beta.$$

DÉMONSTRATION. Représentons ainsi les séries proposées :

$$(1) \qquad \alpha = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots,$$

$$(2) \qquad \beta = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots,$$

$$(3) \qquad \alpha\beta = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots,$$

et par α' et β' ce que deviennent respectivement les séries α et β après le changement de signes de tous leurs termes négatifs; enfin la série-produit $\alpha'\beta'$ ainsi :

$$(4) \qquad \alpha'\beta' = q_0 + q_1 + q_2 + \ldots\ldots$$

Il est évident qu'on a, quel que soit n :

$$(5) \qquad p_n \leqq q_n,$$

abstraction faite des signes.

La série dont le terme général est q_n, étant le produit de deux séries convergentes α' et β' à termes positifs, est convergente (théor. 16) et n'a que des termes positifs : donc, à fortiori, à cause de l'inégalité (5), la série-produit $\alpha\beta$ dont le terme général est p_n doit être convergente (théor. 1). Il reste donc seulement à prouver que l'on aura : lim. $(\alpha\beta)$ = lim. $\alpha \times$ lim. β. Pour cela, représentons respectivement, quel que soit n, par

(6) $$a_n.\ b_n.a'_n.\ b'_n$$

la somme des n premiers termes de chacune des quatre séries

(7) $$\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta'.$$

par d_n la quantité

(8) $$a_n b_n - (p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n);$$

et par d'_n la quantité

(9) $$a'_n b'_n - (q_0+q_1+q_2+\ldots\ldots+q_n).$$

Cela posé, considérons les deux suites

(10) $$d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots\ d_n,\ \ldots$$

(11) $$d'_0,\ d'_1,\ d'_2,\ d'_3,\ \ldots\ldots\ d'_n,\ \ldots\ldots$$

Je dis que cette dernière, dont le terme général est d'_n, converge vers la limite zéro. En effet, puisque les séries α' et β' sont convergentes, a'_n tend vers lim. α', et b'_n tend vers lim. β', donc $a'_n b'_n$ tend vers lim. $\alpha' \times$ lim. β'; la série dont le terme général est q_n étant convergente comme on vient de le prouver, la somme

(12) $$q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

est une quantité qui tend vers la limite de cette série, c'est-à-dire vers lim. $(\alpha'\beta')$; on a d'ailleurs, en vertu du théorème 16, par la nature des séries α' et β', la relation

(13) $$\text{lim. } (\alpha'\beta') = \text{lim. } \alpha' \times \text{lim. } \beta'.$$

Donc on a :

(14) $$\text{lim. } (a'_n b'_n) = \text{lim. } (q_0+q_1+q_2+\ldots+q_n).$$

d'où :

(15) $\lim. \{ a'_n b'_n - (q_0+q_1+q_2+\dots+q_n) \} = 0,$

ou simplement :

(16) $$\lim. d'_n = 0.$$

Je dis ensuite qu'on a toujours :

(17) $$d_n =< d'_n.$$

Car il est aisé de voir que d_n ou l'expression (8) équivaut à la somme de tous les produits partiels $u_i v_j$, où la somme $i + j$ des indices i et j est $> n$, mais ne dépasse pas $2n$, en prenant pour ces indices les valeurs 0, 1, 2, 3, ... n, et que d'_n équivaut à la somme des valeurs absolues de ces mêmes produits partiels.

On a donc à fortiori :

(18) $$\lim. d_n = 0,$$

c'est-à-dire

(19) $\lim. \{ a_n b_n - (p_0+p_1+p_2+\dots+p_n) \} = 0.$

d'où :

(20) $\lim. (a_n b_n) = \lim. (p_0+p_1+p_2+\dots+p_n).$

On a d'ailleurs évidemment :

(21) $\lim. (a_n b_n) = \lim. a_n \times \lim. b_n = \lim. \alpha \times \lim. \beta,$

puisque les séries α et β sont convergentes. On a aussi avec évidence :

(22) $\lim. (p_0+p_1+p_2+\dots+p_n) = \lim. \alpha\beta.$

Donc, en substituant, on trouve :

(23) $$\lim. \alpha \times \lim. \beta = \lim. (\alpha\beta),$$

ce qui restait à prouver.

Théorème 19. *Lorsque plusieurs séries convergentes α, β, γ, δ, ... restent chacune convergentes quand on change* *le signe de tous leurs termes négatifs, leur produit* $\alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots$ *sera une série convergente et on aura*

$$\lim.(\alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots) = \lim.\alpha \times \lim.\beta \times \lim.\gamma \times \lim.\delta \times \ldots\ldots$$

DÉMONSTRATION. Soient respectivement

(1) $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots\ldots$

ce que deviennent les séries

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$

après le changement de signe de tous leurs termes négatifs. Chacune des séries (1) étant convergente (hyp.) et n'ayant que des termes positifs, chacun des produits successifs

(3) $\alpha'\beta', \alpha'\beta'\gamma', \alpha'\beta'\gamma'\delta', \ldots\ldots$

est une série convergente. Si l'on compare les deux séries $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, il est manifeste que les termes de la série $\alpha\beta$ sont tous égaux ou inférieurs, abstraction faite des signes, aux termes correspondants de la série $\alpha'\beta'$. Il en est de même des termes de la série $\alpha\beta\gamma$ comparés à ceux de la série $\alpha'\beta'\gamma'$; et ainsi de suite. Et puisque chacune des séries $\alpha'\beta'$, $\alpha'\beta'\gamma'$, &c., est convergente et n'a que des termes positifs, on voit, en vertu du théorème 1, que chacune des séries

(4) $\alpha\beta, \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\gamma\delta, \ldots\ldots$

est convergente et reste convergente quand on change le signe de tous ses termes négatifs. Donc encore, en vertu du théorème précédent, on a :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \lim.(\alpha\beta) = \lim.\alpha \times \lim.\beta, \\ \lim.(\alpha\beta\gamma) = \lim.(\alpha\beta) \times \lim.\gamma, \\ \lim.(\alpha\beta\gamma\delta) = \lim.(\alpha\beta\gamma) \times \lim.\delta, \\ \text{etc.,} \end{array} \right.$$

d'où :

$$(6)\quad \lim.(\alpha\beta\gamma\delta\ldots) = \lim.\alpha \times \lim.\beta \times \lim.\gamma \times \lim.\delta \times \ldots\ldots$$

Ainsi tout est prouvé.

COROLLAIRE. Le produit de plusieurs séries géométriquement convergentes est une série convergente dont la limite équivaut au produit des limites des séries-facteurs.

En effet, il est manifeste que toute série géométriquement convergente possède la propriété de rester convergente (et même géométriquement) quand on change le signe de tous ses termes négatifs, ce qui résulte de la définition même de la convergence géométrique.

Théorème 20. *Le produit d'un nombre quelconque de séries géométriquement convergentes est toujours une série géométriquement convergente.*

Démonstration. 1° Il est d'abord évident que ce théorème sera vrai pour un nombre quelconque de facteurs s'il l'est pour deux facteurs.

2° Soient donc

$$\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + \dots\dots \tag{1}$$

$$\beta = b_0 + b_1 + b_2 + \dots\dots \tag{2}$$

deux séries géométriquement convergentes, c'est-à-dire qu'on a, quel que soit n et abstraction faite des signes :

$$a_n < Ar^n, \; r < 1, \tag{3}$$

$$b_n < Br'^n, \; r' < 1. \tag{4}$$

Représentons ainsi les termes de la série-produit

$$\alpha\beta = p_0 + p_1 + p_2 + \dots\dots + p_n + \dots\dots, \tag{5}$$

de sorte qu'on a toujours :

$$p_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots\dots + a_0 b_n. \tag{6}$$

Soit r la plus grande des valeurs r et r'. On a évidemment :

$$\left\{\begin{array}{l} a_n b_0 < ABr^n, \\ a_{n-1} b_1 < ABr^{n-1}r', \\ a_{n-2} b_2 < ABr^{n-2}r'^2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_0 b_n < ABr'^n. \end{array}\right. \tag{7}$$

Il en résulte à fortiori :

$$(8)\quad \begin{cases} a_n b_0 < ABr^n, \\ a_{n-1} b_1 < ABr^n, \\ a_{n-2} b_2 < ABr^n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0 b_n < ABr^n, \end{cases}$$

et, en additionnant ces égalités et ayant égard à la formule (6), on aura :

$$(9)\qquad p_n < (n+1)\ ABr^n,$$

ce qui montre que la série-produit $\alpha\beta$, dont le terme général est p_n, est géométriquement convergente, ce qui restait à prouver.

COROLLAIRE. Si une série α est géométriquement convergente, il en sera de même de son carré α^2, de son cube α^3 et en général de la puissance α^n pour toute valeur entière positive de l'exposant n.

Théorème 21. *Si plusieurs séries α, β, γ, ... sont géométriquement convergentes, il en sera de même de leur somme, ainsi que de leur différence, s'il ne s'agit que de deux séries α et β.* Et on aura : $\lim. (\alpha+\beta+\gamma+.....) = \lim. \alpha + \lim. \beta + \lim. \gamma + ...$; $\lim. (\alpha-\beta) = \lim. \alpha - \lim. \beta$.

C'est ce qui est très-évident.

Théorème 22. *Si plusieurs séries α, β, γ, &c., sont convergentes, leur somme $\alpha + \beta + \gamma + ...$ sera aussi une série convergente et aura pour limite la somme de leurs limites. On en peut dire autant de la différence.*

C'est ce qui est évident aussi.

Théorème 23. *En supposant n entier positif et étant donnée une série convergente α, on aura :*

$$\lim. (\alpha^n) = (\lim. \alpha)^n$$

en sorte que la série α^n *sera convergente, au moins dans les cas suivants :*

1° *lorsque tous les termes de la série* α *sont positifs ;*

2° *lorsque la série* α *reste convergente quand même on change le signe de tous ses termes négatifs ;*

3° *lorsque la série* α *est géométriquement convergente.*

Démonstration. Le premier cas résulte du théorème 17, le deuxième du théorème 19 ; d'ailleurs il est clair que le troisième cas rentre dans le deuxième.

Théorème 24. *Toute équation algébrique entre des séries géométriquement convergentes subsiste quand on y remplace ces séries par leurs limites.*

Démonstration. La forme la plus générale de l'équation proposée est

$$(1) \qquad \alpha\beta\gamma\ldots. + \alpha'\beta'\gamma'\ldots. + \ldots. = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \alpha', \beta', \gamma', \ldots.$ étant des séries géométriquement convergentes égales ou inégales. Or, il résulte des théorèmes 21, 19 (corollaire), qu'on a :

$$(2) \text{ lim. } (\alpha\beta\gamma\ldots+\alpha'\beta'\gamma'\ldots.+\ldots\ldots) = \text{lim. } \alpha \text{ lim. } \beta \text{ lim. } \gamma \ldots. + \text{lim. } \alpha' \text{ lim. } \beta' \text{ lim. } \gamma' \ldots\ldots\ldots + \ldots$$

D'ailleurs une série *égale* à zéro est à fortiori *équivalente* à zéro : donc le premier membre de l'équation (2) est nul, par conséquent il en est de même du second membre, en sorte que l'équation (1) subsiste en remplaçant les séries α, β, γ, &c., par leurs limites.

§ 7. Binome de Newton envisagé comme équivalence.

Nous avons démontré ci-dessus (§ 5), pour un exposant quelconque commensurable, le binome de Newton envisagé comme une égalité de séries ou équation sérielle. En combinant ce résultat avec le théorème précédent, nous allons démontrer cette même formule envisagée comme équivalence de séries.

L'équation sérielle déjà démontrée est

$$(1)\quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \&c.,$$

où l'exposant m est seulement assujetti à la condition d'être commensurable; et cette équation lie entre elles la série du second membre et la série $1 + x$ qui n'a que deux termes, et elle est d'ailleurs *algébrique* puisque l'exposant m est commensurable.

Supposons maintenant

$$(2)\qquad x < 1.$$

abstraction faite des signes. Je dis d'abord que la série du second membre est géométriquement convergente, puisque le rapport d'un terme au précédent présente les valeurs successives

$$(3)\qquad mx,\ \frac{m-1}{2}x,\ \frac{m-2}{3}x,\ \&c.,$$

lesquelles évidemment sont toutes, à partir d'un certain rang, inférieures à une certaine quantité elle-même plus petite que l'unité (théor. 5). Or la série $1 + x$ l'est aussi par le fait qu'elle n'a que deux termes. Par conséquent, en vertu du théorème 24, l'équation (1) subsiste encore si l'on y remplace la série $1 + x$ par sa limite $= 1 + x$ et la série du second membre aussi par sa limite, en sorte qu'on a l'équivalence :

$$(4)\quad (1+x)^m = \lim.\left\{1+mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots..\right\},$$

ce qu'il fallait prouver.

Pour étendre ce théorème au cas où l'exposant est incommensurable, nous nous baserons sur le lemme suivant.

Lemme. Si on désigne, quel que soit k, par la notation [k], la limite de la série

$$(1)\quad 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots\ldots;$$

où l'on suppose $x < 1$ abstraction faite des signes, je dis que si une suite quelconque

(2) $m', m'', m''', \ldots\ldots\ldots$

converge vers la limite m, la suite correspondante

(3) $[m'], [m''], [m'''], \ldots\ldots\ldots$

convergera vers la limite $[m]$.

Thorème 25. *Pour toute valeur réelle de l'exposant m, pourvu que x soit < 1 en valeur absolue, la quantité $(1+x)^m$ sera la limite de la série convergente*

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

DÉMONSTRATION. Supposons l'exposant m incommensurable, puisque le cas contraire est déjà prouvé ci-dessus. Imaginons arbitrairement une suite indéfinie

(1) $m', m'', m''', \ldots\ldots\ldots$

de quantités commensurables qui converge vers la limite m. La suite correspondante

(2) $[m'], [m''], [m'''], \ldots\ldots$

convergera vers la limite $[m]$ en vertu du lemme précédent. D'ailleurs, puisque les termes de la suite (1) sont tous commensurables, nous avons

(3) $[m'] = (1+x)^{m'}, [m''] = (1+x)^{m''}, \ldots\ldots$

Donc la suite

(4) $(1+x)^{m'}, (1+x)^{m''}, (1+x)^{m'''}, \ldots\ldots$

convergera vers la limite $[m]$; d'ailleurs elle converge évidemment aussi vers la limite $(1+x)^m$ et n'a que cette seule limite. Par conséquent, on a :

(5) $(1+x)^m = [m] = \lim. \left\{ 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \&c. \right\}$,

ce qu'il fallait prouver.

ERRATA.

Page V de la préface, après le mot *géométriques*, fermez la parenthèse.

Même page, 8[me] ligne, au lieu de : *que j'ai*, lisez : *sur lequel j'ai.*

Page 6, 4°, au lieu de : *Une série ne peut*, lisez : *Une série peut.*

Page 13, 10[me] ligne, (5), au lieu de : $s_0, s_2, s_4, \ldots\ldots$ lisez : $s_1, s_3, s_5, \ldots\ldots$; et, 13[me] ligne, au lieu de : $s_1, s_3, s_5, \ldots\ldots$ lisez : $s_0, s_2, s_4, \ldots\ldots$

Page 15, antépénultième ligne, au lieu de : *c'est-à-dire*, lisez : *c'est-à-dire que.*

Page 17, ligne 1, au lieu de : *est négatif*, lisez : *est nul ou négatif*; ligne 3, au lieu de : > 0, lisez : $=> 0$; ligne 4, au lieu de : > 1, lisez, $=> 1$; même ligne, au lieu de : *est croissante et par suite*, lisez : *est croissante ou bien formée de termes égaux à l'unité et est par suite.*

Page 20, lignes 6 et 7, au lieu de : *pour n, valeurs*, lisez : *pour n valeurs.*

Page 25, ligne 4, au lieu de : *sur le théorème 13*, lisez : *sur le théorème 14.*

Page 37, ligne 12, au lieu de : *est géométriquement convergente*, lisez : *est géométriquement convergente, attendu que la série, qui a pour terme général le second membre de cette inégalité, possède manifestement cette propriété* (th. 5).