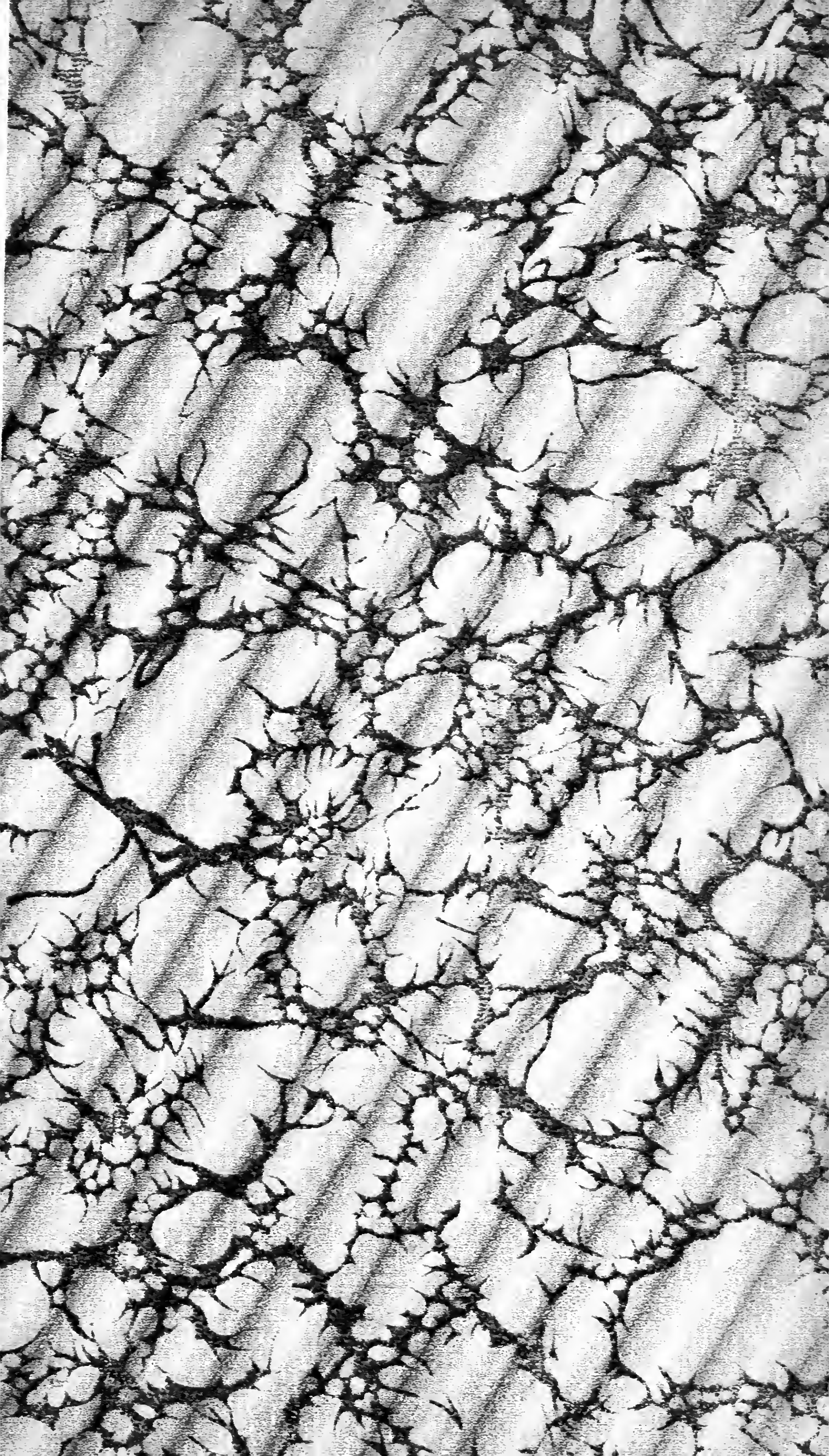

G C Evans.

LEÇONS

SUR LE

PROBLÈME DE PFAFF

LEÇONS

SUR LE

PROBLÈME DE PFAFF

PAR

Edouard GOURSAT
MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE J. HERMANN
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1922

PRÉFACE

Cet Ouvrage complète ceux que j'ai déjà publiés sur les équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre, mais sa lecture n'exige pas la connaissance des précédents. Il suffit que le lecteur soit au courant des théorèmes classiques sur les systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales, théorèmes qui sont exposés dans tous les Traités d'Analyse.

Les deux premiers Chapitres sont consacrés au problème de Pfaff proprement dit ; j'expose les méthodes fondées sur les propriétés du covariant bilinéaire, considéré d'abord par Frobenius et par G. Darboux.

Dans les trois Chapitres suivants, j'étudie les propriétés des formes symboliques de différentielles (formes *extérieures* de M. Cartan), et leur application au problème de Pfaff lui-même et à la théorie des invariants intégraux. Les propriétés de ces formes symboliques pourraient être rattachées très aisément au calcul tensoriel, mais il m'a semblé plus naturel de les établir, indépendamment de toute théorie plus générale.

Enfin, dans les trois derniers Chapitres, j'expose quelques-uns des progrès les plus récents acquis à la science, relatifs aux systèmes de Pfaff. Les plus importants de ces progrès sont dus à M. Cartan, dont on trouvera le nom presque à chaque page de ces trois Chapitres. Je souhaite que cet exposé rapide puisse engager les jeunes mathématiciens à étudier plus à fond ces élégantes méthodes, dont l'auteur a déjà fait de si belles applications.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Boulanger et à M. Cerf, qui m'ont prêté leur concours pour la correction des épreuves.

Paris, le 31 mars 1922.

E. GOURSAT.

LEÇONS

SUR

LE PROBLÈME DE PFAFF

CHAPITRE PREMIER

I. — FORMES CANONIQUES D'UNE EXPRESSION DE PFAFF

Le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre est un cas particulier d'une question plus générale, le *Problème de Pfaff*, que nous allons étudier dans cet ouvrage. On y verra que les diverses méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles sont aussi des cas particuliers de méthodes plus générales permettant de résoudre ce nouveau problème.

1. Énoncé du problème. — Le premier membre d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable

$$(1) \qquad \omega = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0$$

est identique, à un facteur près qui ne dépend que des variables x_i, à une différentielle exacte, $\omega = \mu df$ [1], et l'intégrale générale est représentée par l'équation

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C.$$

Soit M_{n-1} la multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie par la relation précédente

[1] *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n° 26. Les renvois fréquents à ce volume seront indiqués par le mot *Leçons*, suivi du numéro du paragraphe.

où la constante C a une valeur déterminée. Pour tout déplacement infiniment petit du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sur cette multiplicité, les différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ vérifient la relation $df = 0$, et par suite l'équation (1).

Il est clair que l'on peut se proposer plus généralement de rechercher toutes les multiplicités, à un nombre quelconque de dimensions, de l'espace à n dimensions, qui satisfont à la même condition, quelle que soit l'équation proposée, complètement intégrable ou non. Soit M_{n-p} une multiplicité ponctuelle à $n-p$ dimensions définie par les p équations distinctes

$$(3) \qquad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad f_2 = 0, \; \ldots, \; f_p = 0;$$

pour tout déplacement infiniment petit du point $(x_1, \ldots, x_n)$ sur cette multiplicité, les valeurs correspondantes de $dx_1, \ldots, dx_n$ vérifient les p relations linéairement indépendantes

$$(4) \qquad df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \ldots, \quad df_p = 0.$$

Si l'équation proposée $\omega = 0$ est une conséquence des $2p$ équations (3) et (4), nous dirons que la multiplicité ponctuelle M_{n-p} est une *multiplicité intégrale*, ou, plus simplement, une *intégrale*, de l'équation $\omega = 0$. La recherche de toutes ces multiplicités constitue l'objet du *Problème de Pfaff*. Nous appellerons dans la suite *forme de Pfaff* ou *expression de Pfaff* toute forme linéaire en $dx_1, \ldots, dx_n$, dont les coefficients sont des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans le cas d'une équation complètement intégrable, équivalente à l'équation $df = 0$, on obtient immédiatement toutes les multiplicités intégrales, si l'on connaît la fonction $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$. En effet, l'équation $\omega = 0$ exprime que cette fonction f conserve une valeur constante quand on se déplace sur une intégrale d'un ordre quelconque. Toute intégrale d'ordre inférieur à $n-1$ est donc située sur une intégrale M_{n-1}, et réciproquement. Pour avoir toutes les intégrales M_{n-p}, il suffira d'adjoindre à l'équation $f = C$, où la constante C a une valeur arbitraire, $p-1$ équations nouvelles quelconques, formant avec la première un système de p relations distinctes. Pour une équation de Pfaff à coefficients quelconques, nous verrons de même que le problème est résolu dès que l'on connaît les multiplicités intégrales dont l'ordre est le plus grand possible.

Pour que l'équation (1) soit une conséquence des équations (4), linéaires en dx_1, dx_2, ..., dx_n, il faut et il suffit qu'il existe p facteurs λ_1, λ_2, ..., λ_p, tels que l'on ait

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2 + \ldots + \lambda_p df_p,$$

pour tous les systèmes de valeurs de dx_1, ..., dx_n, et par suite que les n équations

$$X_i = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soient compatibles en λ_1, λ_2, ..., λ_p, en tenant compte des relations (3) qui définissent la multiplicité M_{n-p}. Tous les déterminants d'ordre $p+1$ déduits du tableau

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

à n colonnes et $p+1$ lignes doivent donc être nuls en tenant compte des relations (3).

Si les équations

$$(3)' \qquad f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \ldots, \quad f_p = C_p$$

définissent une intégrale, quelles que soient les valeurs des constantes C_1, C_2, ..., C_p, ces multiplicités forment une famille à p paramètres, et il passe une de ces multiplicités par un point quelconque de l'espace (au moins dans certaines régions), et tous les déterminants d'ordre $p+1$ du tableau (T) doivent être identiquement nuls.

On peut exprimer autrement qu'un système de p équations entre x_1, x_2, ..., x_n définit une intégrale de l'équation (1). Supposons ces équations résolues par rapport à p de ces variables, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ par exemple, de façon que la multiplicité M_{n-p} soit définie par les p équations

$$x_1 = \varphi_1(x_{p+1}, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_p = \varphi_p(x_{p+1}, \ldots, x_n),$$

les variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$ n'étant assujetties à aucune relation. Pour que cette multiplicité soit une intégrale de $\omega = 0$, il faut et il suffit que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ vérifient les $n - p$ relations

$$(5) \qquad X_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + X_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} + X_i = 0 \qquad (i = p+1, \ldots, n),$$

où l'on suppose $x_1, \ldots, x_p$ remplacées par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dans $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ces relations forment un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à p inconnues ; mais ce système est d'une forme très particulière, et on ne peut lui appliquer les théorèmes classiques d'existence, sans le transformer tout d'abord, car chaque équation ne contient que les dérivées des fonctions inconnues prises par rapport à la même variable. C'est par des méthodes toutes différentes que l'on est arrivé à la solution générale du problème.

Il est cependant un cas particulier où l'on peut affirmer sans examen que les équations (5) admettent une infinité de solutions, c'est le cas où $p = n - 1$. Le système (5) se compose alors d'une seule équation, et l'on peut choisir arbitrairement $n - 2$ des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Toute équation de Pfaff à n variables admet donc une infinité d'intégrales à une dimension, ou de *courbes intégrales*, dépendant de $n - 2$ fonctions arbitraires d'une variable. L'existence de ces courbes intégrales est d'ailleurs à peu près évidente *a priori*. En effet, si l'on adjoint à l'équation $\omega = 0$ des équations de même forme $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_{n-2} = 0$, linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, formant avec la première un système de $n - 1$ équations linéairement distinctes, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires, dont l'intégrale générale représente une famille de courbes intégrales de l'équation (1), dépendant de $n - 1$ constantes arbitraires, dont on peut disposer de façon qu'une de ces courbes passe par un point arbitraire de l'espace à n dimensions.

Dans le cas de l'équation à trois variables, non complètement intégrable,

$$dx_2 - x_3\,dx_1 = 0$$

il n'existe pas d'intégrale à deux dimensions ; les seules intégrales sont des courbes. Si x_1 n'est pas constant pour une courbe intégrale, on peut prendre x_1 pour la variable indépendante, et les formules

$$x_2 = f(x_1), \qquad x_3 = f'(x_1)$$

où $f(x_1)$ est une fonction arbitraire, représentent une de ces courbes. Il existe, en outre, une famille de courbes intégrales dépendant de deux constantes arbitraires, définies par les relations

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2.$$

Pour faciliter les énoncés, nous appellerons *élément linéaire* dans l'espace à n dimensions l'ensemble d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et d'une direction $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ issue de ce point. Un élément linéaire est dit un *élément linéaire intégral* de l'équation $\omega = 0$ lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ vérifient la relation (1). Chaque point d'une multiplicité M_{n-p} définie par les p équations (3) est l'origine d'une infinité d'éléments linéaires situés sur cette multiplicité et qui vérifient les relations

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \ldots, \quad df_p = 0.$$

Si M_{n-p} est une intégrale de l'équation de Pfaff $\omega = 0$, tous ces éléments linéaires sont des éléments intégraux, et réciproquement. Dans la suite, tout élément linéaire issu d'un point déterminé sera désigné seulement par l'une des notations $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$.

Pour Euler [1], une équation aux différentielles totales

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0$$

n'avait aucune signification, lorsque la condition d'intégrabilité n'est pas vérifiée. Monge [2] fit remarquer cependant qu'on ne

[1] *Inst. Calculi Integralis*, Vol. III, Part. I (1770), p. 5.
[2] *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1784), p. 535.

pouvait considérer cette équation comme absurde, puisqu'il était possible d'y satisfaire d'une infinité de manières en prenant, pour x, y, z des fonctions d'une seule variable indépendante. Mais le problème a été posé pour la première fois dans toute sa généralité par J. F. Pfaff dans un Mémoire classique [1], où il a montré que toute équation aux différentielles totales, contenant $2n$ ou $2n-1$ variables, admet toujours des multiplicités intégrales dont le nombre des dimensions est au moins égal à n ou à $n-1$. La méthode employée par Pfaff exige les intégrations successives de plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires. Cette méthode a reçu depuis lors de nombreux perfectionnements, dont les plus importants sont dus à Gauss, Jacobi, Natani, Clebsch, Grassmann, Frobenius, Darboux, etc.

On trouvera un historique très complet de la question dans le Traité de Forsyth (*Theory of differential equations*, Part I, p. 80, 1890), et au début d'un important Mémoire de M. Cartan dans les *Annales de l'École normale supérieure*, 3e série, t. XI, 1899, p. 239.

2. Changement de variables. — Toute expression de Pfaff $\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n$ peut être mise sous une infinité de formes différentes, au moyen d'un changement de variables. Soient

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dont le jacobien $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ n'est pas identiquement nul ; les formules (6) définissent une transformation ponctuelle faisant correspondre un à un les points de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et de l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ou tout au moins les points de deux domaines D_x et D_y suffisamment restreints des deux espaces. A un élément linéaire $(dy_1, dy_2, \ldots, dy_n)$ de l'espace

(1) *Methodus generalis, æquationes differentiarum partialium, necnon æquationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles, complete integrandi* (Abh. der K. P. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, p. 76-136, 1814-1815).

$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ correspond un élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pour lequel on a

$$(7) \qquad dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} dy_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on remplace, dans la première forme ω, les variables x_i et leurs différentielles par leurs expressions (6) et (7), il vient

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \ldots + Y_n dy_n,$$

où l'on a posé

$$(9) \qquad Y_i = X_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + X_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} + \ldots + X_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et où l'on suppose naturellement qu'on a remplacé $x_1, \ldots, x_n$ par les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dans les seconds membres. Les deux formes de Pfaff

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} Y^i dy_i.$$

se ramènent donc l'une à l'autre par un simple changement de variables, et nous les regarderons dans la suite comme deux expressions différentes d'une même forme. Il est évident que les multiplicités intégrales des deux équations

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i = 0,$$

se correspondent par la transformation ponctuelle (6), de même que les éléments linéaires intégraux se correspondent un à un par la transformation linéaire (7).

Nous allons montrer dans les paragraphes suivants que l'on peut choisir les fonctions φ_i de façon à ramener toute expression de Pfaff ω à une forme canonique particulièrement simple. On peut remarquer tout de suite que, si l'on a choisi les fonctions φ_i de façon que les équations

$$y_1 = C_1, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = C_{n-1},$$

représentent une famille de courbes intégrales (ce que l'on peut faire d'une infinité de manières), la nouvelle équation devra être vérifiée quand on remplacera $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ par des constantes quelconques, et par suite le coefficient Y_n sera nul.

Le principe de la méthode de Pfaff pour résoudre l'équation $\omega = 0$ consiste à chercher d'abord un changement de variables permettant de remplacer cette équation par une équation de même forme où figure une variable de moins. Pour que l'équation

$$Y_1 dy_1 + \ldots + Y_n dy_n = 0,$$

obtenue par le changement de variables (6), ne renferme que les $n - 1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, par exemple, il faut et il suffit que Y_n soit nul, et en outre que le rapport de deux quelconques des coefficients Y_i, Y_k $(i < n,\ k < n)$ soit indépendant de y_n. On peut écrire ces conditions

$$(10) \qquad Y_n = 0, \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \mu Y_i, \qquad i < n,$$

μ étant une fonction ou une constante que nous laisserons indéterminée pour le moment. En remplaçant $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ par leurs expressions tirées des formules (9), on obtient un système de n équations aux dérivées partielles, l'une du premier ordre, les autres du second ordre, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Mais, pour l'objet que l'on se propose, il est inutile d'avoir l'intégrale générale de ce système, il suffit d'en connaître une solution particulière.

Nous allons d'abord montrer qu'on peut remplacer le système (10) par un système équivalent où ne figurent que les dérivées du premier ordre des fonctions inconnues. De la première des équations (10),

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} = 0,$$

on tire, en effet, en différentiant par rapport à y_i,

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i} \right) = 0.$$

D'autre part, on tire de l'expression (9) de Y_i

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \sum_{k=1}^{n} X_h \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_i \partial y_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} \right),$$

ce que l'on peut écrire, en tenant compte de la relation précédente.

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i},$$

ou encore, en permutant les indices h et k dans la seconde sommation,

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \left\{ \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} \right\},$$

et l'équation

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \mu Y_i$$

devient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \left\{ \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} - \mu X_k \right\} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$a_{kh} = \frac{\partial X_k}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (10) est donc remplacé par le système équivalent

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} = 0, \\ & \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \left\{ \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} - \mu X_k \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned} \right.$$

où ne figurent que les fonctions inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et leurs dérivées partielles du premier ordre.

Ces équations seront certainement vérifiées, si μ n'est pas nul, par les intégrales du système

$$(12) \qquad \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} - \mu X_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

cela est évident pour toutes les équations (11), sauf pour la première. Il en est de même de la première, car, si on ajoute les n équations (12) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}$ respectivement, il vient, en tenant compte de la relation évidente $a_{kh} + a_{hk} = 0$,

$$\mu \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} = 0.$$

L'équation $Y_n = 0$ est donc une conséquence des équations (12) si μ n'est pas nul.

Le système (12) ne renferme que les fonctions inconnues φ_i et leurs dérivées partielles *par rapport à la seule variable* y_n. On peut donc le considérer comme un système d'équations différentielles ordinaires, et les fonctions φ_i ne peuvent dépendre des variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ que par l'intermédiaire des constantes arbitraires dont dépend l'intégrale générale du système.

Les équations (12) sont linéaires en $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}$, et le déterminant formé par les coefficients est un déterminant symétrique gauche. Cela étant, plusieurs cas sont à distinguer :

1° Si le déterminant

$$(13) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, ce qui ne peut avoir lieu que si n est pair, on peut supposer $\mu = 1$, et résoudre ce système par rapport aux dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}$, ce qui donne un système de la forme

$$\frac{d\varphi_i}{dy_n} = \lambda_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale générale dépend de $n - 1$ constantes arbitraires, abstraction faite de la constante que l'on peut toujours ajouter à y_n. Soient, pour fixer les idées, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ un système de $n - 1$ intégrales premières distinctes des équations

$$(14) \qquad \frac{a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1n}dx_n}{X_1} = \frac{a_{21}dx_1 + \ldots + a_{2n}dx_n}{X_2} = \ldots = \frac{a_{n1}dx_1 + \ldots + a_{nn}dx_n}{X_n};$$

posons

$$\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \quad \ldots; \quad \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = y_{n-1}.$$

En prenant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ comme constantes d'intégration, les formules qui donnent l'intégrale générale du système (12),

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}; y_n),$$

définissent un système de n fonctions distinctes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux conditions voulues. La fonction Y_n est nulle, tandis que la fonction Y_i, qui satisfait à la relation $\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = Y_i$, est de la forme $e^{y_n}\Phi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$. Par le changement de variables que nous venons de définir, la forme de Pfaff donnée ω se change donc en une nouvelle forme de Pfaff

$$\Omega = e^{y_n}[\Phi_1 dy_1 + \ldots + \Phi_{n-1}dy_{n-1}].$$

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ étant des fonctions des $n - 1$ variables $y_1, \ldots, y_{n-1}$ seulement.

2° Si le déterminant Δ est nul, ce qui a toujours lieu lorsque n est impair, le calcul précédent ne s'applique plus. Mais on peut alors satisfaire aux n équations

$$(14)' \qquad a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

par des valeurs non toutes nulles de dx_1, dx_2, ..., dx_n. Soient

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda_n} = dy_n$$

un système de solutions de ces équations. On peut avoir $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n \neq 0$, ou $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n = 0$. Dans le premier cas, nous supposerons que l'on a $\sum_i \lambda_i X_i = 1$, ce qui est permis, puisqu'on peut multiplier tous les λ_i par une fonction arbitraire. Les calculs qui ont été faits plus haut prouvent que le système

$$(10)' \qquad Y_n = 1, \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = 0$$

et le système

$$(11)' \qquad \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \left\{ \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_n} \right\} = 0$$

sont équivalents. Par suite, si les formules $x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ représentent l'intégrale générale du système (15), $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ désignant $n-1$ constantes arbitraires autres que celle qu'on peut toujours ajouter à y_n, ces fonctions φ_i sont des intégrales du système (10)', et le changement de variables correspondant conduit de la forme donnée ω à une nouvelle forme de Pfaff

$$\Omega = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1} + dy_n,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ ne dépendent que de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Si l'on a $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0$, on voit de la même façon que le même changement de variables conduit de la forme donnée ω à la nouvelle forme de Pfaff

$$\Omega = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1},$$

où $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ ne dépendent que de $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

On peut donc toujours, par un changement de variables con-

venable, ramener une forme de Pfaff ω *à* n *variables à l'une des trois formes*

$$\text{(I)} \qquad y_n(Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1}),$$

$$\text{(II)} \qquad Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1} + dy_n,$$

$$\text{(III)} \qquad Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1},$$

$Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ *ne dépendant que de* $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

On a écrit y_n au lieu de e^{y_n} dans le cas de la forme (I), ce qui revient à changer la dernière variable; remarquons aussi que quelques-uns des coefficients $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ peuvent être nuls.

Appliquons ce résultat aux cas les plus simples : $n = 2$, $n = 3$.

Soit $\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2$; on a ici $\Delta = (a_{12})^2 = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)^2$. Si $a_{12} = 0$, on sait que ω est une différentielle exacte dy_1. Si a_{12} n'est pas nul, le système auxiliaire (14) est

$$\frac{dx_2}{X_1} + \frac{dx_1}{X_2} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation $\omega = 0$ elle-même. Si $y_1 = C$ est l'intégrale générale, la forme ω peut donc s'écrire $y_2 dy_1$, comme il est bien connu.

Soit $\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$ On a dans ce cas $\Delta = 0$, et le système (14)' est ici

$$a_{12} dx_2 + a_{13} dx_3 = 0, \quad a_{21} dx_1 + a_{23} dx_3 = 0, \quad a_{31} dx_1 + a_{32} dx_2 = 0.$$

Si $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$, ω est une différentielle exacte dy_1. Si ces trois coefficients ne sont pas nuls, on tire des équations précédentes

$$(15)' \qquad \frac{dx_1}{a_{23}} = \frac{dx_2}{a_{31}} = \frac{dx_3}{a_{12}}.$$

Supposons d'abord que $X_1 a_{23} + X_2 a_{31} + X_3 a_{12}$ ne soit pas nul; on peut satisfaire aux équations du système (15)' et à l'équation

$$X_1 \frac{dx_1}{dy_3} + X_2 \frac{dx_2}{dy_3} + X_3 \frac{dx_3}{dy_3} = 1.$$

Soient $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3)$ l'intégrale générale de ce système : on a vu que, par ce changement de variables, ω prend la forme

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + dy_3,$$

Y_1 et Y_2 ne dépendant que de y_1, y_2; $Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2$ ne peut être une différentielle exacte, sans quoi on aurait $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$. Donc, par un nouveau changement de variable, ω prendra la forme $z_2 dz_1 + dy_3$.

Si l'on a $X_1 a_{23} + X_2 a_{31} + X_3 a_{12} = 0$, ω sera réductible à la forme $y_2 dy_1$, résultat classique.

De la proposition précédente on déduit sans peine, comme l'a montré G. Darboux [1], le théorème fondamental suivant :

Toute forme de Pfaff ω peut être ramenée à l'une des deux formes suivantes :

$$(\alpha) \qquad z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1},$$
$$(\beta) \qquad z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p,$$

où les fonctions y_i, z_k constituent un système de variables indépendantes, c'est-à-dire de fonctions indépendantes des variables qui figurent dans ω.

La proposition est immédiate pour une forme à *deux* variables, et nous venons de la vérifier pour une forme à *trois* variables. Il suffit donc de démontrer que, si elle est vraie pour une forme à $n - 1$ variables, elle subsiste pour une forme à n variables. La forme ω étant ramenée à un des trois types (I), (II), (III), il est inutile de considérer le type (III) qui ne dépend que de $n - 1$ variables et pour lequel le théorème est admis. Quand aux types (I) et (II), on peut y remplacer la forme à $n - 1$ variables

$$Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1}$$

par un des types (α) ou (β). On obtient ainsi pour la forme ω une des quatre expressions suivantes :

$$y_n(u_1 dv_1 + \ldots + u_p dv_p + dv_{p+1})$$
$$y_n(u_1 dv_1 + \ldots + u_p dv_p),$$
$$u_1 dv_1 + \ldots + u_p dv_p + dy_n,$$
$$u_1 dv_1 + \ldots + u_p dv_p + dv_{p+1} + dy_n,$$

les variables u_i, v_k étant des fonctions indépendantes des variables $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Les deux dernières expressions sont immédiatement mises sous la forme (α), en écrivant dans la dernière $d(y_n + v_{p+1})$ au lieu de $dv_{p+1} + dy_n$.

La première peut s'écrire

$$w_1 dv_1 + \ldots + w_p dv_p + w_{p+1} dv_{p+1},$$

[1] *Sur le Problème de Pfaff. Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, 1882, p. 26.

en posant $w_1 = y_n u_1, \dots, w_p = y_n u_p, w_{p+1} = y_n$, et il est clair que $v_1, \dots, v_{p+1}, w_1, \dots, w_{p+1}$ sont des fonctions indépendantes des variables qui figurent dans ω, comme les variables u_i, v_k, y_n.

La deuxième expression s'écrira de même

$$w_1 dv_1 + \dots + w_p du_p.$$

Le théorème est donc établi, mais ce premier aperçu laisse subsister bien des questions. En particulier on ne voit pas *a priori* quelle est la valeur du nombre p. Nous laisserons de côté les divers perfectionnements qui ont été apportés successivement à la méthode primitive de Pfaff, pour exposer les méthodes plus récentes fondées sur les propriétés invariantes de certaines expressions associées à une forme de Pfaff [1]. Remarquons toutefois que le système (14) va jouer un rôle fondamental dans la suite.

3. Covariant bilinéaire. — Soient $\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$ et $\sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i$ deux expressions d'une même forme de Pfaff ω au moyen de deux systèmes de variables différentes ; nous supposerons, pour fixer les idées, que les variables x_i s'expriment au moyen des variables y_i par les formules (6). Si, dans l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i,$$

on remplace $y_1, \dots, y_n$ par des fonctions de deux paramètres variables indépendants u et v, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont aussi des fonctions de ces paramètres, et, en égalant les coefficients de du et de dv dans les deux membres, on a les deux relations

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial u} = Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial u} + \dots + Y_n \frac{\partial y_n}{\partial u},$$

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial v} = Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} + \dots + Y_n \frac{\partial y_n}{\partial v}.$$

[1] Ces nouvelles méthodes ont été employées simultanément par G. Frobenius : *Ueber das Pfaffs'sche Problem. Journal de Crelle*, t. LXXXII (1877), pp. 230-315, et par G. Darboux : *Sur le problème de Pfaff. Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI (1882), pp. 14-36, 49-68.

Différentions la première par rapport à v, la seconde par rapport à u, et retranchons membre à membre ; les dérivées du second ordre disparaissent, et on aboutit à une nouvelle relation où ne figurent que les variables x_i, y_k, et leurs dérivées du premier ordre par rapport aux paramètres :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\dots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v}\right\}\frac{\partial x_i}{\partial u}-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial X_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\dots+\frac{\partial X_k}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}\right\}\frac{\partial x_k}{\partial v}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial Y_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial v}+\dots+\frac{\partial Y_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial v}\right\}\frac{\partial y_i}{\partial u}-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial Y_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial u}+\dots+\frac{\partial Y_k}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial u}\right\}\frac{\partial y_k}{\partial v}.$$

Le premier membre de cette relation renferme deux termes en $\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}$ dont les coefficients sont $\frac{\partial X_i}{\partial x_k}$ et $-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$; ce premier membre est donc égal à

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v},$$

le coefficient a_{ik} ayant la même signification que plus haut,

$$(16)\qquad a_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

et la sommation étant étendue à tous les *arrangements* deux à deux des indices i, k. En tenant compte de l'égalité $a_{ik}+a_{ki}=0$, on peut encore écrire ce premier membre

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}-\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right),$$

la sommation étant maintenant étendue à toutes les *combinaisons* deux à deux des indices i, k. Nous conserverons cette écriture dans la suite. Le second membre de la relation obtenue a une expression analogue

$$\sum_{i,\,k} b_{ik}\left(\frac{\partial y_i}{\partial u}\frac{\partial y_k}{\partial v}-\frac{\partial y_i}{\partial v}\frac{\partial y_k}{\partial u}\right),$$

où l'on a posé

$$(16)'\qquad b_{ik}=\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}-\frac{\partial Y_k}{\partial y_i}.$$

Multiplions les deux membres de la relation

$$\sum_{i,k} a_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right) = \sum_{i,k} b_{ik}\left(\frac{\partial y_i}{\partial u}\frac{\partial y_k}{\partial v} - \frac{\partial y_i}{\partial v}\frac{\partial y_k}{\partial u}\right)$$

par $du\delta v$; elle peut s'écrire sous une forme plus abrégée

$$(17)\qquad \sum_{i,k} a_{ik}(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i) = \sum_{i,k} b_{ik}(dy_i\delta y_k - dy_k\delta y_i),$$

en posant

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u}du, \quad \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial v}\delta v, \quad dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial u}du, \quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial v}\delta v.$$

Remarquons que l'on a toujours, pour les deux systèmes de différentielles,

$$(18)\qquad \begin{cases} dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \dfrac{\partial x_i}{\partial y_n}dy_n, \\[2ex] \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \dfrac{\partial x_i}{\partial y_n}\delta y_n, \end{cases}$$

et l'on passe du premier membre de l'identité (17) au second membre en remplaçant dans ce premier membre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les deux systèmes de différentielles dx_i, δx_i par leurs expressions au moyen des variables y_i, et des deux systèmes correspondants de différentielles dy_i, δy_i, qui se déduisent des formules de transformation par lesquelles on passe de la première forme $\Sigma X_i dx_i$ de ω à la seconde forme $\Sigma Y_i dy_i$.

Le premier membre de l'identité (17) est appelé le *covariant bilinéaire* [1] de la forme ω, dénomination qui se justifie d'elle-même. On représente ce covariant par ω',

$$(19)\qquad \omega' = \sum_{i,k} a_{ik}(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i),$$

notation qui sera justifiée plus tard. Remarquons que, pour former ce covariant ω', il est inutile de calculer séparément tous les coefficients a_{ik}. Il est en général préférable de se servir de l'expression symbolique

$$\omega' = \delta\omega(d) - d\omega(\delta),$$

[1] LIPSCHITZ (*Journal de Crelle*, t. LXX, p. 73).

$\omega(d)$ étant identique à ω, et $\omega(\delta)$ désignant ce que devient $\omega(d)$ quand on y remplace d par δ ; on doit en outre tenir compte, dans le calcul, de l'identité $\delta dx_i = d\delta x_i$.

Remarques. — 1° Lorsque la forme ω est une différentielle totale exacte, tous les coefficients a_{ik} sont nuls, et ω' se réduit à zéro. Inversement toute forme de Pfaff dont le covariant bilinéaire est identiquement nul est une différentielle totale exacte ;

2° Quand on multiplie la forme ω par un facteur constant C, ω' est multiplié par le même facteur, mais il n'en est plus de même quand on multiplie ω par une fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Soit $\Omega = k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\omega$; on a

$$\Omega' = \delta\Omega(d) - d\Omega(\delta) = \delta k.\omega(d) + k\delta\omega(d) - dk.\omega(\delta) - kd\omega(\delta),$$

ou

$$\Omega' = k\omega' + \omega(d)\delta k - \omega(\delta)\, dk.$$

D'une façon générale, soient ω_1, ω_2 deux formes quelconques de Pfaff :

$$\omega_1 = A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n, \quad \omega_2 = B_1 dx_1 + \ldots + B_n dx_n;$$

on représente par $[\omega_1, \omega_2]$ la forme bilinéaire

$$\begin{aligned}[A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n][B_1\delta x_1 + \ldots + B_n \delta x_n]& \\ - [A_1\delta x_1 + \ldots + A_n\delta x_n][B_1 dx_1 + \ldots + B_n dx_n]& \\ = \sum_{i,k} (A_i B_k - A_k B_i)(dx_i\delta x_k - dx_k \delta x_i)&.\end{aligned}$$

Avec cette notation, le covariant bilinéaire de la forme $k\omega$ a pour expression

$$(k\omega)' = k\omega' + [\omega, dk].$$

D'après leur définition même, les coefficients a_{ik} vérifient, comme on s'en assure aisément, les relations

$$(20) \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0, \qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} = 0,$$

pour toutes les combinaisons d'indices. Inversement, *si n^2 fonctions a_{ik} des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient les relations* (20), *la forme bilinéaire*

$$\sum_{i,k} a_{ik} dx_i \delta x_k,$$

où la sommation est étendue à tous les arrangements des indices i, k, deux à deux, est le covariant bilinéaire d'une forme de Pfaff. En d'autres termes, il existe un système de n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, satisfaisant aux $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$
(21) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = a_{ik}.
$$

La proposition est classique pour $n = 3$. Pour démontrer qu'elle est générale, supposons-la établie dans le cas de $n - 1$ variables, et considérons les $n - 1$ équations précédentes où $i = 1$, et prenons $X_1 = 0$. Elles donnent

$$
\frac{\partial X_k}{\partial x_1} = - a_{1k},
$$

et par suite

$$
X_k = - \int_{c_1}^{x_1} a_{1k}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \varphi_k(x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 2, 3, \ldots, n).
$$

En tenant compte des conditions (20), que l'on suppose vérifiées, les autres équations (21), où i et k sont supérieurs à un, deviennent

$$
\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = a_{ik}(c_1, x_2, \ldots, x_n) = b_{ik}(x_2, \ldots, x_n).
$$

Ces équations forment un système de même forme que le premier, avec une variable et une inconnue de moins. D'autre part, si l'on fait $x_1 = c_1$ dans les relations (20), où tous les indices sont plus grands que un, on obtient un système de relations de même forme

$$
(20)' \qquad b_{ik} + b_{ki} = 0, \qquad \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial b_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{li}}{\partial x_k} = 0.
$$

La proposition étant vraie pour $n - 1$ variables, elle est donc générale. Connaissant une première forme de Pfaff ayant un covariant bilinéaire donné, on aura toutes les autres formes ayant le même covariant en ajoutant à la première une différentielle exacte.

Deux éléments linéaires $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ issus du même point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont dits *en involution* si les deux systèmes de différentielles dx_i, δx_i vérifient la relation $\omega' = 0$. Il résulte du calcul qui a conduit au covariant bilinéaire que *deux éléments linéaires intégraux appartenant à une multiplicité intégrale à p dimensions ($p > 1$) sont en involution.* Si l'on prend en effet sur cette intégrale M_p une intégrale M_2, telle que les coordonnées d'un quelconque de ses points soient exprimées au moyen de deux paramètres u, v, ces n fonctions vérifient les deux relations

$$\sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \qquad \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0;$$

d'où l'on déduit, par le calcul fait plus haut, que les différentielles dx_i, δx_i correspondant respectivement à des accroissements du et δv des paramètres, vérifient la relation $\omega' = 0$. Or on peut toujours supposer que les courbes $u = C$, $v = C'$ qui passent par un point de M_p sont tangentes respectivement à deux éléments linéaires quelconques de la multiplicité intégrale considérée issus de ce point.

Il résulte aussi de la propriété d'invariance de ω' qu'à deux éléments linéaires en involution $(dy_1, \ldots, dy_n)$, $(\delta y_1, \ldots, \delta y_n)$ de l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ correspondent deux éléments linéaires en involution $(dx_1, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Remarquons aussi que deux éléments linéaires intégraux en involution de l'équation $\omega = 0$ sont des éléments linéaires intégraux en involution de l'équation $\Omega = k\omega = 0$, quel que soit le facteur k.

Ceci nous amène à considérer *quatre* espèces d'éléments linéaires possédant des propriétés spéciales :

1° Les éléments linéaires *quelconques* qui sont en involution avec tous les autres éléments linéaires issus du même point.

2° Les éléments linéaires *intégraux* qui sont en involution avec tous les autres éléments linéaires issus du même point.

3° Les éléments linéaires *quelconques* qui sont en involution avec tous les éléments linéaires *intégraux* issus du même point.

4° Les éléments linéaires *intégraux* qui sont en involution avec tous les éléments linéaires *intégraux* issus du même point.

Les éléments linéaires de chaque espèce sont définies par des systèmes d'équations linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, que nous allons étudier. Ces quatre systèmes se réduisent toujours à deux systèmes distincts, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants.

4. Interprétations du covariant bilinéaire. — Le covariant ω' intervient dans le calcul de la première variation de l'intégrale $\int \omega$, et cette interprétation rend intuitive la propriété d'invariance relativement à un changement de variables.

Considérons une forme de Pfaff à un nombre quelconque de variables indépendantes,

$$\omega = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n,$$

$X_1 \ldots X_n$ étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces n variables étant regardées comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, les n équations

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où t varie de t_0 à t_1, représentent dans cet espace une variété à une dimension ou *courbe* Γ, et l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n,$$

où l'on a remplacé x_i par $f_i(t)$ et dx_i par $f'_i(t)dt$, est encore appelée une intégrale curviligne prise le long de Γ et représentée par

$$I = \int_\Gamma X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n.$$

Quand on remplace la courbe Γ par une courbe infiniment voisine, l'intégrale prend un accroissement dont nous allons calculer la partie principale. Il suffit d'appliquer à ce cas particulièrement simple la méthode générale permettant de calculer la première variation d'une intégrale ; j'indiquerai rapidement le calcul. Pour cela, imaginons une famille de courbes variant d'une manière continue avec un paramètre α et se réduisant pour $\alpha = 0$ à la courbe Γ. Soient $x_i = f_i(t, \alpha)$ les équations de cette famille de courbes, la fonction $f_i(t, 0)$ étant identique à $f_i(t)$.

Nous supposerons que les limites t_0 et t_1 sont elles-mêmes variables avec α, et nous avons à calculer la dérivée $I'(\alpha)$ de l'intégrale définie

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \frac{\partial f_i}{\partial t} dt,$$

par rapport au paramètre α. La formule classique de différentiation donne

$$\mathrm{I}'(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial f_i}{\partial t}\,dt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} X_i(f_1, f_2, \ldots, f_n)\frac{\partial^2 f_i}{\partial\alpha\partial t}\,dt$$
$$+\frac{dt_1}{d\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(f_1, f_2, \ldots, f_n)\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{t=t_1}-\frac{dt_0}{d\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{t=t_0}.$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on peut la remplacer par

$$\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial t}\right)dt.$$

Dans le produit $\delta\mathrm{I}=\mathrm{I}'(\alpha)\delta\alpha$, on a sous le signe d'intégration les termes suivants, en posant $\delta x_i=\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha}\delta\alpha$,

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial t}\,dt\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\delta x_n\right)$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\delta x_i\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}\,dt+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial t}\,dt\right)$$
$$=\int_\Gamma\sum_i dx_i\sum_k\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\delta x_k-\int_\Gamma\sum_i\delta x_i\sum_k\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\,dx_k,$$

ou, en permutant les indices i et k dans la seconde intégrale,

$$\int_\Gamma\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)dx_i\delta x_k.$$

Quant aux termes en dehors du signe $\int$, en les réunissant, on a l'expression suivante :

$$\delta t_1\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{t=t_1}-\delta t_0\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{t=t_0}$$
$$+\delta\alpha\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1}-\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right]_{t=t_0}\right\}.$$

Posons, comme plus haut,

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et, en outre,

$$\begin{cases} (\Delta x_i)_0 = \left[\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{t=t_0} \dfrac{dt_0}{d\alpha} + \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right)_{t=t_0}\right]\delta\alpha, \\ (\Delta x_i)_1 = \left[\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{t=t_1} \dfrac{dt_1}{d\alpha} + \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right)_{t=t_1}\right]\delta\alpha; \end{cases}$$

nous avons pour expression générale de δI

$$\delta I = \int_\Gamma \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i \delta x_k + (X_1 \Delta x_1 + X_2 \Delta x_2 + \ldots + X_n \Delta x_n)_{t_0}^{t_1}.$$

Remarquons que $(\Delta x_1)_0$, $(\Delta x_2)_0$, …, $(\Delta x_n)_0$ représentent les composantes du déplacement infiniment petit de l'origine du chemin d'intégration quand on fait varier α de $\delta\alpha$, et $(\Delta x_1)_1$, $(\Delta x_2)_1$, …, $(\Delta x_n)_1$ ont une signification analogue. Si donc on fait varier le chemin d'intégration sans changer les extrémités, le terme tout intégré disparaît, et la formule générale qui donne δI se réduit à

$$\delta I = \int_\Gamma \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i \delta x_k = \int_\Gamma \omega'.$$

Supposons maintenant que l'on effectue un changement de variables

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la forme linéaire ω se change en une nouvelle forme linéaire de différentielles

$$\omega_1 = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_n dy_n,$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et l'intégrale I, prise le long d'une courbe Γ dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se change en une intégrale

$$I' = \int_{\Gamma'} Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \ldots + Y_n dy_n = \int_{\Gamma'} \omega_1$$

prise le long de la courbe Γ' de l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, qui correspond à la courbe Γ de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par les formules de transformation. De l'égalité $I = I'$, on déduit que les premières variations sont égales. $\delta I = \delta I'$. Mais on peut calculer $\delta I'$ de deux façons, soit en partant de l'expression générale de δI, ce qui donne

$$\delta I' = \int_{\Gamma'} \sum_i \sum_k b_{ik} dy_i \delta y_k, \qquad b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

soit en appliquant la formule générale du changement de variables à l'intégrale δI, et remplaçant en même temps la variation δx_i par

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}\delta y_n.$$

En égalant ces deux expressions de $\delta I'$, on a donc

$$\int \sum_i \sum_k a_{ik} dx_i \delta x_k = \int \sum_i \sum_k b_{ik} dy_i \delta y_k.$$

c'est-à-dire $\omega' = \omega'_1$.

La condition $\omega' = 0$ peut aussi s'interpréter géométriquement. Prenons d'abord une forme à trois variables que nous écrirons

$$\omega = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz;$$

la relation $\omega' = 0$ peut s'écrire sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime que le plan passant par les deux éléments linéaires (dx, dy, dz) $(\delta x, \delta y, \delta z)$ contient le vecteur issu du point (x, y, z) dont les composantes sont

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

ou vecteur-tourbillon du vecteur (P, Q, R) ; donc, *pour que deux éléments linéaires soient en involution, il faut et il suffit que le plan déterminé par ces deux éléments contienne le vecteur-tourbillon.*

Il est facile d'en déduire la condition d'intégrabilité de l'équation $\omega = 0$. Supposons en effet les axes rectangulaires ; toute surface intégrale passant en un point (x, y, z) de l'espace doit être normale au vecteur (P, Q, R) issu de ce point. Mais deux éléments linéaires quelconques du plan tangent doivent être en involution, et par suite ce plan doit passer par le vecteur-tourbillon. Donc le vecteur-tourbillon et le vecteur (P, Q, R) doivent être orthogonaux ; c'est précisément la condition d'intégrabilité.

On peut donner une autre interprétation, en considérant (dx, dy, dz) et $(\delta x, \delta y, \delta z)$ comme les coordonnées homogènes de deux points dans un même plan. La condition $\omega' = 0$ exprime aussi que la droite qui joint ces deux points passe par le point dont les coordonnées homogènes sont égales aux composantes du vecteur-tourbillon.

Considérons maintenant une forme à n variables, et deux éléments linéaires $(dx_1, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ issus d'un même point. Soient

A_1 et A_2 les points d'un espace à $(n-1)$ dimensions dont les coordonnées homogènes sont $(dx_1, \ldots, dx_n)$ et $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$. Ces deux points déterminent une multiplicité linéaire à une dimension, ou droite, dont les coordonnées pluckériennes sont les binomes $dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ La relation $\omega' = 0$ exprime que *cette droite appartient à un complexe linéaire de l'espace à $(n-1)$ dimensions*. Cette interprétation ne sera pas utilisée dans la suite.

5. Le système S_1. — Etant donné un élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, issu d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les éléments linéaires issus du même point, en involution avec le premier, forment en général une multiplicité à $n-1$ dimensions. Il n'y a d'exception que si la relation $\omega' = 0$ est vérifiée identiquement, quelles que soient les valeurs de $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ vérifient les n équations linéaires

$$S_1 \left\{ \begin{array}{l} a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + \ldots + a_{1n}dx_n = 0, \\ a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + \ldots + a_{2n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}dx_1 + a_{n2}dx_2 + \ldots + a_{nn}dx_n = 0. \end{array} \right.$$

De tels éléments linéaires seront appelés *singuliers* ; les éléments linéaires singuliers issus d'un point sont donc en involution avec tous les autres éléments linéaires issus du même point.

Si n est impair, il y a toujours des éléments linéaires singuliers, puisque le déterminant Δ des coefficients a_{ik} est nul [1]. Si n est pair, et si Δ est différent de zéro, il n'y a pas d'éléments linéaires singuliers. C'est le seul cas où il n'existe pas d'éléments de cette espèce.

Soient $(dx_1, dx_2, \ldots dx_n)$ un élément linéaire singulier issu d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et $(dy_1, dy_2, \ldots, dy_n)$ l'élément linéaire issu du point $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ qui correspond au premier par le changement de variables (6). Puisque le premier élément est en involution avec tout autre élément linéaire issu du même point, le second élément linéaire $(dy_1, dy_2, \ldots, dy_n)$ doit aussi être en

[1] Pour démontrer qu'un déterminant symétrique gauche d'ordre *impair* est nul, il suffit d'observer que ce déterminant change de signe, quand on change le signe de tous les éléments. Or cette opération ne change pas la valeur du déterminant, puisqu'elle revient à échanger les lignes et les colonnes.

involution avec tout autre élément linéaire issu du même point dans l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Il faudra donc que l'on ait

$$\sum_i \sum_k b_{ik} dy_i \delta y_k = 0,$$

quels que soient $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$, et, par suite, que $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$ vérifient les n équations du système

$$S_1^{(1)} \begin{cases} b_{11} dy_1 + b_{12} dy_2 + \ldots b_{1n} dy_n = 0, \\ b_{21} dy_1 + b_{22} dy_2 + \ldots b_{2n} dy_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} dy_1 + b_{n2} dy_2 + \ldots b_{nn} dy_n = 0, \end{cases}$$

qui se déduit de la nouvelle forme de Pfaff

$$\omega^{(1)} = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \ldots + Y_n dy_n$$

de la même façon que le système S_1 se déduit de la forme primitive. *Le système S_1 est donc un système covariant de la forme ω, relativement à tout changement de variables.*

En d'autres termes, si, par le changement de variables défini par les formules (6), la forme $\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$ devient $\sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i$, le système S_1 se transforme, par le même changement de variables, en $S_1^{(1)}$.

Supposons que le déterminant Δ soit égal à zéro, de sorte que les n équations de S_1 se réduisent à r équations linéairement distinctes $(r < n)$. Ce système admet alors une infinité de multiplicités intégrales à une dimension, dépendant de constantes arbitraires, si $r = n - 1$, et de fonctions arbitraires si $r < n - 1$. On peut en effet adjoindre aux r équations linéaires du système S_1 un système de $n - r - 1$ équations linéaires en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, à coefficients arbitraires, de façon à former avec les premières un système de $n - 1$ équations différentielles ordinaires [1]

[1] D'après l'interprétation donnée plus haut du covariant bilinéaire, ces multiplicités intégrales à une dimension du système S_1 sont les courbes *extrémales* pour l'intégrale $\int X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n$. Des considérations empruntées au calcul des variations permettent de démontrer sans aucun calcul que le système S_1 est complètement intégrable (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XLIV, 1916, p. 25 et suiv.).

Le système S_1 est complètement intégrable.

Si ce système comprend r équations linéairement indépendantes, ces r équations sont équivalentes à un système de la forme

$$df_1 = 0, \; df_2 = 0, \; \ldots, \; df_r = 0,$$

$f_1, f_2, \ldots, f_r$ étant r fonctions distinctes des variables $x_1, \ldots, x_n$.

Le théorème est évidemment exact si Δ n'est pas nul, car le système S_1 est équivalent aux n équations

$$dx_1 = 0, \quad dx_2 = 0, \quad \ldots, \quad dx_n = 0.$$

Il est vrai aussi si le système S_1 ne contient que $n - 1$ équations linéairement distinctes ; ces équations forment alors un système de $n - 1$ équations différentielles ordinaires et admettent par conséquent $n - 1$ combinaisons intégrables distinctes

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \ldots, \quad df_{n-1} = 0.$$

Prenons le cas où le système S_1 ne contient que r équations linéairement distinctes ($r < n - 1$). Adjoignons à ces r équations un système de $n - r - 1$ équations linéaires

$$A_{i1}dx_1 + \ldots + A_{in}dx_n = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - r - 1),$$

dont les coefficients sont des fonctions des variables x_i, choisies de façon à former avec les r équations de S_1 un système de $n - 1$ équations différentielles ordinaires distinctes. L'intégration de ce système donne une famille de multiplicités intégrales à une dimension du système S_1 dépendant de $n - 1$ constantes arbitraires. Soient

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = C_{n-1}$$

l'intégrale générale de ce système auxiliaire. Imaginons maintenant que l'on fasse un changement de variables, en prenant un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ où $y_1 = f_1, y_2 = f_2, \ldots, y_{n-1} = f_{n-1}$, la dernière variable y_n restant arbitraire, à condition de former avec $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ un système de n variables indépendantes. Par ce changement de variables, la forme donnée ω est remplacée par une nouvelle forme $\sum_i Y_i dy_i$, où l'on peut toujours supposer que le coefficient Y_n a l'une des valeurs *zéro* ou *un*. En effet, si Y_n n'est pas nul, on peut écrire

$$Y_n dy_n = dU - \left(\frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial y_{n-1}} dy_{n-1}\right)$$

et si l'on a pris U à la place de y_n pour la dernière variable indépendante, la forme ω devient, après le changement de variables,

$$\omega^{(1)} = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1} + dy_n.$$

Quant au système S_1, il est remplacé par le système $S_1^{(1)}$, qui doit être vérifié quand on y fait $y_1 = C_1, \ldots, y_{n-1} = C_{n-1}$, y_n étant une variable indépendante, quelles que soient les constantes C_1, C_2, ..., C_{n-1}. On a donc $b_{in} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = 0$ pour toutes les valeurs de l'indice i, et les coefficients Y_i sont indépendants de la variable y_n. Le système $S_1^{(1)}$ se compose donc de $n - 1$ équations où ne figurent que les $n - 1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$,

$$(22) \qquad b_{i1} dy_1 + \ldots, + b_{i,n-1} dy_{n-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et nous avons remplacé un système de r équations à n variables par un système équivalent de r équations à $n - 1$ variables seulement. Si $r = n - 2$, le nouveau système est complètement intégrable, et par suite il en est de même du premier. Si $r < n - 2$, le nouveau système (22) se déduit de la forme de Pfaff à $n - 1$ variables $Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1}$ de la même façon que S_1 se déduit de la forme primitive. On pourra donc recommencer la même transformation sur le système (22), et ainsi de suite. Il est clair qu'on finira par obtenir un système équivalent à S_1 de r équations à $r + 1$ variables, c'est-à-dire un système complètement intégrable. La proposition énoncée est donc établie.

Cela étant, imaginons que l'on fasse un changement de variables de façon que $dy_1 = 0, \ldots, dy_r = 0$ soient précisément r combinaisons intégrables distinctes du système $S_1^{(1)}$. Ce système devant être vérifié quand on y remplace $dy_1, \ldots, dy_r$ par zéro, quelles que soient les valeurs de $dy_{r+1}, \ldots, dy_n$, on a

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = 0,$$

si l'un des indices i, k est supérieur à r. Ces relations prouvent en particulier que, si l'on regarde $y_1, y_2, \ldots, y_r$ comme des paramètres, l'expression

$$Y_{r+1}dy_{r+1} + \ldots + Y_n dy_n$$

est la différentielle totale d'une fonction U des variables $y_{r+1}, \ldots, y_n$, et l'on peut écrire

$$Y_{r+1}dy_{r-1} + \ldots + Y_n dy_n = dU - \left(\frac{\partial U}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial y_r}dy_r\right).$$

La fonction U est distincte des r variables $y_1, \ldots, y_r$, à moins que $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ ne soient nuls, et dans ce cas on peut supposer $U = 0$. Dans tout autre cas, on peut prendre U pour la nouvelle variable y_{r+1}. Les nouvelles variables étant choisies de cette façon, on voit que $\omega^{(1)}$ a l'une des deux formes

$$Y_1 dy_1 + \ldots + Y_r dy_r, \quad Y_1 dy_1 + \ldots + Y_r dy_r + dy_{r+1}.$$

La condition $b_{ik} = 0$, où l'on suppose $k > r$, devient alors $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = 0$ et prouve que les coefficients Y ne dépendent que des variables $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Pour que le système $S_1^{(1)}$ relatif à la forme $\omega^{(1)}$ soit équivalent aux r équations

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_r = 0,$$

il faut en outre que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, ce qui exige que *r soit un nombre pair*, $r = 2p$; résultat que l'on aurait pu prévoir *a priori* d'après les propriétés des mineurs d'un déterminant symétrique gauche.

En résumé, le système S_1 se compose toujours d'un nombre pair $2p$ d'équations linéairement distinctes; si l'on a pris un nouveau système de variables $(y_1, \ldots, y_n)$ de façon que $y_1, \ldots, y_{2p}$ soient

$2p$ intégrales distinctes de S_1, ω peut être ramenée à l'une des deux formes

$$\text{(I)} \qquad Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{2p} dy_{2p} + dy_{2p+1},$$
$$\text{(II)} \qquad Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{2p} dy_{2p},$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2p}$ ne dépendant que des variables $y_1, y_2, \ldots y_{2p}$.

On aura le nombre $2p$ en cherchant l'ordre des premiers mineurs de Δ qui ne sont pas nuls. Quant au système complet qui détermine les intégrales de S_1, on pourra l'obtenir en écrivant que l'équation

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

est une combinaison linéaire des équations du système S_1, c'est-à-dire en égalant à zéro tous les déterminants d'ordre $2p+1$ déduits du tableau

$$(T_1) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array} \right\|,$$

Le système S_1, ou le système complet équivalent, ne sont pas d'ailleurs des systèmes différentiels quelconques, comme nous le verrons plus tard.

Pour reconnaître à laquelle des deux formes (I) ou (II) on peut ramener ω, il suffit d'observer que, dans le premier cas, l'équation $\omega^{(1)} = 0$ est distincte des équations du système $S_1^{(1)}$, tandis que, pour la forme (II), $\omega^{(1)} = 0$ est une conséquence des équations de $S_1^{(1)}$. La forme donnée ω pourra donc être ramenée à la forme (II), si l'équation $\omega = 0$ est une conséquence des équations de S_1, et dans ce cas seulement. On aura la forme (I) si tous les déterminants d'ordre $2p+1$ déduits du tableau

$$(T_2) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{array} \right\|$$

ne sont pas nuls à la fois, et la forme (II) si tous ces déterminants sont nuls.

6. Le système S_2. Classe d'une forme de Pfaff. — Les éléments linéaires singuliers, qui sont en même temps des éléments intégraux, vérifient les équations du système S_2,

$$S_2 \begin{cases} a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n = 0, & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0, \end{cases}$$

que l'on obtient en adjoignant au système S_1 l'équation $\omega = 0$. Il est clair que ce système S_2 est lui-même un covariant de la forme ω relativement à tout changement de variables.

Si l'équation $\omega = 0$ est une conséquence des équations de S_1, le système S_2 est identique à S_1. Si l'équation $\omega = 0$ est distincte des équations de S_1, le système S_2 comprend $2p + 1$ équations distinctes. Supposons ω ramenée à la forme (I) ; après ce changement de variables, S_1 est remplacé par le système

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_{2p} = 0,$$

tandis que le système S_2 devient

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad \ldots, \quad dy_{2p} = 0, \quad dy_{2p+1} = 0.$$

Le système S_2 est donc lui-même complètement intégrable. On voit de plus, d'après les calculs du paragraphe précédent, que, s'il n'est pas identique au système S_1, *on obtiendra la dernière intégrale de ce système par une quadrature quand on aura intégré le système S_1.*

Soit c le nombre des intégrales distinctes du système S_2, c'est-à-dire le nombre des équations linéairement distinctes de ce système ; ce nombre c s'appelle la *classe* (¹) de la forme de Pfaff ω. Ce nombre c est égal au nombre minimum de variables au moyen desquelles puisse s'exprimer ω par un changement de variables convenable (²). Nous avons démontré au paragraphe précédent que si S_2 contient $2p$, ou $2p + 1$ équations distinctes, la forme ω peut être ramenée à la forme (I) ou à la forme (II). Dans les deux cas, l'expression ainsi obtenue pour ω ne dépend que de c variables. On

(¹) Cette expression a été introduite par Frobenius.

(²) On dit qu'une variable figure dans une forme de Pfaff si elle figure sous le signe d ou dans l'un des coefficients.

ne peut pas obtenir pour ω une autre expression où figurent moins de c variables ; supposons en effet que, par un changement de variables convenable, ω prenne la forme

$$\omega^{(1)} = Z_1 dz_1 + \ldots + Z_q dz_q,$$

le nombre q étant inférieur à c, et les coefficients Z_i ne dépendant que des q variables $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Il est clair que le système $S_2^{(1)}$ correspondant à $\omega^{(1)}$ ne peut renfermer plus de q relations linéairement distinctes, puisqu'il ne renferme que q différentielles $dz_1, \ldots, dz_q$. Il ne peut donc être équivalent au système S_2 qui, par hypothèse, renferme $c > q$ équations distinctes.

Le même raisonnement prouve que si, par un moyen quelconque, on a obtenu pour ω une expression où ne figurent que c variables, ces c variables sont des intégrales du système S_2. On peut donc, d'une infinité de façons, trouver des expressions de ω où ne figurent que c variables, mais on déduit toutes ces expressions de l'une d'elles par un changement d'un système de c variables en un nouveau système de c variables. Par la suite, nous dirons que toute intégrale du système S_2 est une *variable canonique*.

Pour obtenir la classe d'une forme de Pfaff, il suffit, d'après cela, de chercher le nombre des équations distinctes de S_2, c'est-à-dire l'ordre des déterminants du tableau T_2, de l'ordre le plus élevé, qui ne sont pas nuls.

Soit ω une forme d'ordre pair $n = 2p$. Si les coefficients X_i sont des fonctions *quelconques* des variables indépendantes, le déterminant Δ ne sera pas nul, et par suite la classe sera égale à $2p$. On voit de la même façon que, pour une forme à un nombre impair de variables et à coefficients *quelconques*, la classe est égale au nombre des variables. Nous appellerons, dans la suite, *forme ordinaire* toute forme dont la classe est égale au nombre des variables qui y figurent, *forme exceptionnelle* toute forme dont la classe est inférieure au nombre des variables qui y figurent. Connaissant la parité de la classe d'une forme, il est facile d'avoir une limite du nombre p au moyen du nombre n des variables. Si la classe est paire, on a $2p \leqslant n$ et, par suite, $p \leqslant \frac{n}{2}$. Si la classe est impaire, on a $2p + 1 \leqslant n$, ou $p \leqslant \frac{n-1}{2}$.

7. Les systèmes S_3 et S_4. — On obtient deux nouveaux systèmes différentiels associés à une forme de Pfaff en procédant comme il suit. Pour qu'un élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ soit en involution avec tous les éléments linéaires *intégraux* issus du même point, il faut et il suffit que l'équation

$$\omega' = -\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{in}dx_n)\delta x_i = 0$$

soit une conséquence de l'équation

$$\omega(\delta) = \sum_{i=1}^{n} X_i \delta x_i = 0,$$

c'est-à-dire que $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ vérifient les relations

$$(S_3)\quad \frac{a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + \ldots + a_{1n}dx_n}{X_1} = \ldots = \frac{a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n}{X_i} = \ldots = dt,$$

t étant une variable auxiliaire, introduite uniquement pour faciliter le raisonnement.

Ce nouveau système S_3 qui est évidemment, d'après sa signification, un covariant de la forme ω, est identique au *système de Pfaff* déjà signalé plus haut (nº **2**).

Enfin les éléments linéaires *intégraux* en involution avec tous les autres éléments linéaires *intégraux* issus du même point vérifient un nouveau système d'équations S_4, que l'on obtient en adjoignant à S_3 l'équation $\omega = 0$; c'est le *système caractéristique*. C'est aussi un système covariant de la forme ω.

Les quatre systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 *se réduisent toujours à deux systèmes distincts seulement.*

Ecrivons le système S_3, en chassant les dénominateurs,

$$(S_3)\quad a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n = X_i dt, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ;$$

deux hypothèses sont à examiner :

1er Cas. — On peut satisfaire aux équations précédentes, sans supposer $dt = 0$. En d'autres termes, on peut trouver au moins un système de solutions des équations

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \ldots + a_{in}\lambda_n = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_i X_i dx_i &= \sum_i (a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \ldots + a_{in}\lambda_n) dx_i \\ &= -\lambda_1 \sum_i a_{1i} dx_i - \lambda_2 \sum_i a_{2i} dx_i - \ldots - \lambda_n \sum_i a_{ni} dx_i,\end{aligned}$$

de sorte que, dans ce cas, l'équation $\omega = 0$ est une conséquence des équations du système S_1. Réciproquement, si l'on a une identité de la forme

$$\sum_i X_i dx_i = \sum_k \mu_k (a_{k1} dx_1 + \ldots + a_{kn} dx_n),$$

on en déduit

$$X_i = \mu_1 a_{1i} + \ldots + \mu_n a_{ni},$$

et l'on satisfait aux équations de S_3 en posant $\dfrac{dx_k}{dt} = -\mu_k$.

Supposons donc que ω soit de classe $2p$; alors S_2 *est identique à* S_1, *et* S_4 *est identique à* S_3. Des équations de S_3,

$$a_{i1} \frac{dx_1}{dt} + \ldots + a_{in} \frac{dx_n}{dt} = X_i,$$

on tire en effet

$$\sum_i \frac{dx_i}{dt} \left(\sum_k a_{ik} \frac{dx_k}{dt} \right) = \sum_i X_i \frac{dx_i}{dt},$$

ou

$$\sum_i \sum_k a_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = \sum_i X_i \frac{dx^i}{dt}.$$

Mais le premier membre de cette équation est identiquement nul, d'après les relations $a_{ik} + a_{ki} = 0$. L'équation $\omega = 0$ est donc une conséquence des équations de S_3.

2e *Cas.* — Si $\omega = 0$ n'est pas une conséquence du système S_1, on ne peut satisfaire aux équations S_3 qu'en posant $dt = 0$; S_3 est identique à S_1, et S_4 à S_2.

En résumé, *si* ω *est de classe paire*, S_2 *est identique à* S_1, *et* S_4 *à* S_3. *Si* ω *est de classe impaire*, S_3 *est identique à* S_1 *et* S_4 *à* S_2. *Les systèmes* S_2 *et* S_3 *sont toujours distincts, ainsi que* S_1 *et* S_4.

Le système S_3 *est complètement intégrable*. Il suffit de le démontrer pour une forme de classe paire ; or si l'on suppose ω ramenée à la forme

$$Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{2p} dy_{2p},$$

le système S_3 contient seulement $2p - 1$ équations distinctes indépendantes de t (¹),

$$\frac{b_{11}dy_1 + \ldots + b_{1,2p}dy_{2p}}{Y_1} = \ldots = \frac{b_{2p,1}dy_1 + \ldots + b_{2p,2p}dy_{2p}}{Y_{2p}};$$

avec $2p$ variables, et la proposition est évidente. Nous voyons en même temps que *le système* S_3 *contient une équation de moins que* S_2, *et toutes les intégrales de* S_3 *sont aussi des intégrales de* S_2. Ces conclusions sont exactes aussi pour une forme de classe impaire, puisque dans ce cas S_3 est identique à S_1.

Dans le cas où ω est de classe $2p + 1$, nous avons vu plus haut, que si l'on a intégré S_1 (qui est identique à S_3), il suffit d'une quadrature pour achever l'intégration de S_2.

Supposons maintenant que ω soit de classe $2p$, et que l'on ait obtenu les $2p - 1$ intégrales des équations S_3, qui sont indépendantes de la variable auxiliaire t. Faisons encore un changement de variables de façon que ces $2p - 1$ intégrales soient précisément $y_1, y_2, \ldots, y_{2p-1}$, et soit

$$\omega^{(1)} = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{2p-1} dy_{2p-1} + \ldots + Y_n dy_n$$

la nouvelle expression de ω après cette transformation.

Le système $S_3^{(1)}$ correspondant doit être équivalent au système

$$dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_{2p-1} = 0,$$

en faisant abstraction de la variable auxiliaire t. Ce système $S_3^{(1)}$ doit donc être vérifié, quels que soient $dy_{2p}, \ldots, dy_n$, quand on fait $dy_1 = 0, \ldots, dy_{2p-1} = 0$. De plus, puisque dans ce cas S_4 est iden-

(¹) Ces équations sont distinctes, car le déterminant des b_{ik} n'est pas nul, puisque ω est de classe $2p$.

tique à S_3, l'équation $\omega^{(1)} = 0$ doit être une conséquence des équations $dy_1 = 0, \ldots, dy_{2p-1} = 0$, ce qui exige que l'on ait $Y_{2p} = 0, \ldots, Y_n = 0$. Les conditions

$$\frac{b_{i2p}dy_{2p} + \ldots + b_{in}dy_n}{Y_i} = \frac{b_{k2p}dy_{2p} + \ldots + b_{kn}dy_n}{Y_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p-1)$$

devant être vérifiées quelles que soient les valeurs de $dy_{2p}, \ldots, dy_n$, on doit avoir, pour toutes les valeurs de l'indice h supérieures à $2p-1$,

$$\frac{b_{ih}}{Y_i} = \frac{b_{kh}}{Y_k} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{Y_i}\frac{\partial Y_i}{\partial y_h} = \frac{1}{Y_k}\frac{\partial Y_k}{\partial y_h}.$$

Ces relations expriment que le rapport de deux quelconques des coefficients $Y_1, \ldots, Y_{2p-1}$ est indépendant de $y_{2p}, \ldots, y_n$.

La forme $\omega^{(1)}$ peut donc s'écrire encore, en changeant un peu les notations,

$$\omega^{(1)} = K(Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{2p-1} dy_{2p-1}),$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2p-1}$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_{2p-1}$.

Le facteur K ne peut être une fonction des variables $y_1, y_2, \ldots, y_{2p-1}$ seulement, car alors ω serait de classe $2p-1$ et non de classe $2p$. On peut donc prendre ce facteur K pour la variable y_{2p} par exemple, et écrire

$$\omega^{(1)} = y_{2p}(Y_1 dy_1 + \ldots + Y_{2p-1} dy_{2p-1}).$$

Les intégrales du système S_2 sont évidemment $y_1, \ldots, y_{2p-1}, y_{2p}$, et l'on voit que, dans le cas d'une forme de classe paire, l'intégration du système S_2 s'achève sans aucune quadrature quand on a intégré le système S_3.

Remarque I. — Etant donnée une forme de Pfaff ω, soit Ω la forme auxiliaire

$$\Omega = x_{n+1}\,\omega + dx_{n+1},$$

où x_{n+1} est une variable distincte des variables $x_1, \ldots, x_n$ qui figurent dans ω. Le covariant bilinéaire Ω' a pour expression

$$\Omega' = x_{n+1}\,\omega' + \delta x_{n+1}\,\omega - dx_{n+1}(X_1\delta x_1 + \ldots + X_n \delta x_n).$$

Le système analogue à S_2 pour la forme auxiliaire Ω est donc le suivant

$$(\Sigma_2)\quad \left\{\begin{aligned} & x_{n+1}(a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n) - X_i dx_{n+1} = 0, \\ & X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0, \\ & dx_{n+1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

et se compose par conséquent du système S_2 auquel on aurait adjoint l'équation $dx_{n+1} = 0$. La classe de Ω est donc supérieure d'une unité à la classe de ω, ce qui paraissait évident *a priori*.

Les équations du système Σ_3, analogue à S_3, pour la forme Ω, sont de même

$$(\Sigma_3)\quad a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n = \frac{X_i}{x_{n+1}}\Omega, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et on en déduit, par une combinaison facile,

$$(23)\qquad \sum_i (a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n)dx_i = 0 = \frac{\omega\Omega}{x_{n+1}}.$$

Cela posé, nous avons à distinguer deux cas, suivant la parité de la classe de ω. Si ω est de classe impaire, on ne peut satisfaire aux équations de (Σ_3) qu'en posant $\Omega = 0$, $a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n = 0$: le système Σ_3 s'obtient en adjoignant l'équation $\Omega = 0$ aux équations de S_1. Si ω est de classe paire, on peut satisfaire aux équations de Σ_3 sans supposer $\Omega = 0$, alors la relation précédente (23) donne $\omega = 0$, et le système Σ_3 se réduit alors au système S_3

$$\frac{a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n}{X_i} = \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a écrit le dernier rapport $\frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}}$ à la place de dt. Ce système admet, outre les $2p - 1$ intégrales indépendantes de x_{n+1}, une autre intégrale où figure x_{n+1}.

Remarque II. — On a remarqué aussi que les systèmes S_1 et S_4 sont toujours distincts : le premier S_1 se compose d'un nombre *pair* d'équations, tandis que S_4 renferme un nombre *impair* d'équations linéairement distinctes. Il est évident, d'après la signification même du système S_4, que ce système ne change pas quand on multiplie la forme ω par un facteur quelconque K, comme on peut s'en assurer par un calcul direct. Nous avons fait remarquer, en effet (page 20), que deux éléments linéaires intégraux en involution de $\omega = 0$ sont aussi des éléments linéaires intégraux en involution de l'équation $K\omega = 0$.

Remarque III. — On peut opérer comme il suit pour avoir l'ordre du système S_4 :

$$\frac{a_{12}dx_2 + \ldots + a_{1n}dx_n}{X_1} = \ldots = \frac{a_{n1}dx_1 + \ldots + a_{n,n-1}dx_{n-1}}{X_n},$$
$$X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0.$$

Si on égale les premiers rapports à dt, il faudra chercher le nombre des équations linéairement distinctes du système

$$a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n - X_i dt = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0,$$

où $dx_1, \ldots, dx_n, dt$ sont regardés comme les inconnues, et diminuer ce nombre d'une unité. Cela revient à chercher l'ordre des premiers mineurs du déterminant symétrique gauche

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & -X_1 \\ a_{21} & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & -X_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & -X_n \\ X_1 & X_2, & \ldots, & X_n, & 0 \end{vmatrix}$$

qui ne sont pas nuls, et à diminuer ce nombre d'une unité.

L'ordre des premiers mineurs de H qui ne sont pas nuls étant toujours pair, on voit bien que l'ordre de S_4 est toujours un nombre impair.

8. Formes de classe 2 et de classe 3. — Si une forme ω est de classe *un*, le covariant bilinéaire doit être nul identiquement, puisque le système S_1 contient toujours un nombre pair d'équations linéairement distinctes ; ω est donc une différentielle exacte df, et, si l'on a pris f pour la variable y_1 par exemple, on a $\omega = dy_1$.

Si ω est de classe *deux*, le système S_1 ne contient que deux équations distinctes et l'équation $\omega = 0$ est une conséquence de celles-là. Il s'ensuit que tous les déterminants du troisième ordre déduits du tableau (T_2) doivent être nuls. Si l'on prend en particulier tous les déterminants du troisième ordre que l'on déduit de ce tableau en associant la dernière ligne à deux autres lignes quelconques, on retrouve les conditions de la page 127 des *Leçons sur les équations de premier ordre*.

$$X_h a_{ik} + X_i a_{kh} + X_k a_{hi} = 0,$$

qui expriment que l'équation $\omega = 0$ est complètement intégrable. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes pour que ω soit de classe 2, car les équations du système S_2 se réduisent à deux équations distinctes, et l'on peut évidemment prendre l'équation $\omega = 0$ pour l'une d'elles.

L'intégration de l'équation $\omega = 0$ permet de ramener cette équation à la forme canonique $y_2 dy_1$, et cette intégration par la méthode de Mayer exige une opération 1.

Quel que soit le nombre des variables indépendantes, on peut aussi employer la méthode de J. Bertrand. Soient en effet y_1 et y_2 deux intégrales distinctes du système S_1 ; on a démontré que l'on peut, par un changement de variables, mettre ω sous la forme $Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2$, ou Y_1 et Y_2 ne renferment que y_1 et y_2, et il suffira d'intégrer ensuite l'équation différentielle

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 = 0,$$

pour mettre enfin ω sous la forme canonique $u_2 du_1$.

Cette méthode exige les opérations 2, 1 et 1. Elle semble donc plus compliquée que la première, mais il est à remarquer qu'elle n'introduit aucune difficulté étrangère au problème. En effet, si l'on a intégré l'équation $\omega = 0$, il suffit d'un changement de variables pour ramener ω à une forme canonique $y_2 dy_1$, et on a immédiatement l'intégrale générale $y_1 = C_1$, $y_2 = C_2$ du système S_1.

Prenons enfin une forme ω de classe 3. Le système S_1 se compose de deux équations et le système S_2 de trois équations. Si l'on prend pour variables nouvelles y_1, y_2 deux intégrales distinctes de S_1, ω prend la nouvelle forme

$$\omega = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + dy_3,$$

y_3 étant une variable distincte des deux premières qui s'obtient par une quadrature (n° **5**), et Y_1, Y_2 ne dépendant que de y_1, y_2. L'intégration de l'équation du premier ordre $Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 = 0$ permet enfin de ramener ω à la forme réduite

$$z_2 dz_1 + dy_3,$$

z_1, z_2, y_3 étant trois fonctions distinctes des variables x_i. Cette méthode de réduction exige les opérations 2, 1, une quadrature et une autre opération 1.

Prenons par exemple une forme à trois variables x_1, x_2, x_3,

$$\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3;$$

le covariant bilinéaire est identiquement nul, si l'on a à la fois

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} = 0,$$

et ω est alors de classe un, $\omega = dy_1$. Si le covariant bilinéaire n'est pas nul, le système S_1 se compose des deux équations

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}} = \frac{dx_3}{\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}};$$

pour que ω soit de classe deux, il faut et il suffit que l'équation $\omega = 0$ soit une conséquence des relations précédentes, c'est-à-dire que l'on ait

$$X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) + X_2\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) + X_3\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Nous retrouvons la condition classique d'intégrabilité.

Prenons le cas général où ω est de classe trois, et supposons que l'on ait obtenu une intégrale particulière du système S_1. On peut faire un changement de variables tel que, pour la nouvelle forme $\omega = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + Y_3 dy_3$, y_1 soit une intégrale particulière du système correspondant S_1. Il faut pour cela que l'on ait,

$$\frac{\partial Y_2}{\partial y_3} = \frac{\partial Y_3}{\partial y_2};$$

en posant

$$u = \int Y_2 dy_2 + Y_3 dy_3,$$

on peut encore écrire

$$\omega = du + \left(Y_1 - \frac{\partial u}{\partial y_1}\right) dy_1 = du + v dy_1.$$

Cette méthode, qui sera étendue plus loin à une forme quelconque de classe trois, exige seulement une opération 2 et une quadrature.

9. Formes canoniques. — Les résultats des paragraphes précédents peuvent être résumés comme il suit :

1° Etant donnée une forme de Pfaff ω de classe $2p+1$, on peut la ramener à la forme

$$\omega_{2p+1} = \omega_{2p} + du_{2p+1},$$

ω_{2p} étant une forme de classe $2p$, où figurent seulement $2p$ variables, et la variable u_{2p+1} ne figurant pas dans ω_{2p}. Cette réduction exige l'intégration du système S_3, puis un changement de variables où l'on prend $2p$ intégrales distinctes de S_3 parmi les nouvelles variables. Ces $2p$ variables sont celles qui figurent dans ω_{2p}. Quant à u_{2p+1}, on la détermine par une quadrature, et cette fonction n'est pas complètement déterminée, car on peut lui ajouter une fonction arbitraire des $2p$ variables qui figurent dans ω_{2p}, à condition de modifier en même temps les coefficients de cette forme.

2° Une forme ω de classe $2p$ peut être mise sous la forme

$$\omega_{2p} = u_{2p}\omega_{2p-1},$$

ω_{2p-1} étant une forme de classe $2p-1$ où figurent seulement $2p-1$ variables, et la variable u_{2p} ne figurant pas dans ω_{2p-1}. Cette réduction exige l'intégration du système S_3, puis un changement de variables où l'on prend $2p-1$ intégrales distinctes de S_3 parmi les variables nouvelles.

Le coefficient u_{2p} se détermine sans aucune quadrature, et on peut multiplier ce coefficient par une fonction arbitraire des variables qui figurent dans ω_{2p-1}, à condition de modifier en même temps les coefficients de cette forme.

Il est facile de déduire de ces propositions l'existence d'une forme canonique pour une expression de Pfaff. Supposons, pour fixer les idées, que ω soit de la classe $2p+1$; après une première transformation, nous pouvons écrire

$$\omega = \omega_{2p} + du_{2p+1} ;$$

la forme ω_{2p} de classe paire peut à son tour s'écrire

$$\omega_{2p} = u_{2p}\omega_{2p-1},$$

ω_{2p-1} étant une forme de classe $2p-1$ où figurent $2p-1$ variables seulement. En continuant ainsi, on a une suite d'égalités

$$\begin{array}{ll}
\omega_{2p+1} = \omega_{2p} + du_{2p+1}, & \omega_{2p} = u_{2p}\omega_{2p-1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\omega_{2r+1} = \omega_{2r} + du_{2r+1}, & \omega_{2r} = u_{2r}\omega_{2r-1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\omega_3 = \omega_2 + du_3, & \omega_2 = u_2\omega_1, \\
\omega_1 = du_1;
\end{array}$$

$\omega_{2p}, \omega_{2p-1}, \ldots, \omega_3, \omega_2, \omega_1$ sont des formes de classe marquée par l'indice, et, d'après la façon même dont on obtient ces égalités, les variables $u_{2p+1}, u_{2p}, \ldots, u_1$ sont indépendantes, puisque la variable u_i ne figure dans aucune des formes d'indice inférieur à i.

En éliminant $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ entre ces relations, on obtient pour ω_{2p+1} l'expression

$$\omega_{2p+1} = du_{2p+1} + u_{2p}du_{2p-1} + u_{2p}u_{2p-2}du_{2p-3} + \ldots + u_{2p}\ldots u_4u_2du_1,$$

ou, plus simplement, en changeant de notations,

$$\omega_{2p+1} = z_1dy_1 + z_2dy_2 + \ldots + z_pdy_p + dy_{p+1},$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}, z_1, z_2, \ldots, z_p$ formant un système de $2p+1$ fonctions distinctes des variables primitives.

On verrait de la même façon qu'une forme de classe paire ω_{2p} peut être ramenée à la forme canonique.

$$\omega_{2p} = z_1dy_1 + z_2dy_2 + \ldots + z_pdy_p,$$

$y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_p$ formant un système de $2p$ variables distinctes.

Les résultats démontrés plus haut (nº **2**) se trouvent ainsi établis de nouveau, et d'une façon beaucoup plus complète.

Nous avons vu déjà comment on peut déterminer la classe d'une forme, et par suite le type auquel elle peut être ramenée. La démonstration précédente donne en même temps le moyen, au moins en théorie, d'effectuer la réduction, par des intégrations successives de systèmes complets et des changements de variables. Remarquons que toutes les formes successives que l'on rencontre, à partir de la seconde, sont des formes ordinaires, dont la classe est égale au nombre des variables qui y figurent.

Puisque deux formes de même classe peuvent être ramenées à une même forme canonique, on peut toujours passer de l'une à l'autre par un changement de variables. Le *seul invariant d'une forme de Pfaff*, vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles les plus générales, *est la classe de cette forme*.

Les propriétés des systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 deviennent intuitives sur les formes canoniques. Pour une forme canonique d'ordre impair, on a

$$\omega'_{2p+1} = dz_1 \delta y_1 - dy_1 \delta z_1 + dz_2 \delta y_2 - dy_2 \delta z_2 + \ldots;$$

les systèmes S_1 et S_3 sont formés des $2p$ équations

$$dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_p = 0. \qquad dz_1 = 0, \ \ldots, \ dz_p = 0.$$

Les systèmes S_2 et S_4 s'obtiennent en adjoignant aux précédentes l'équation $dy_{2p+1} = 0$.

Dans le cas d'une forme canonique d'ordre pair, ω'_{2p} a la même expression que tout à l'heure ; S_1 et S_2 sont formés des $2p$ équations.

$$dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_p = 0, \qquad dz_1 = 0, \ \ldots, \ dz_p = 0,$$

tandis que S_3 et S_4 sont formés des $2p - 1$ équations

$$dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_p = 0, \qquad \frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{z_2} = \ldots = \frac{dz_p}{z_p},$$

et admettent les $2p - 1$ intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p, \dfrac{z_2}{z_1}, \ldots, \dfrac{z_p}{z_1}$.

Exemple I. — Soit

$$\omega = x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3 + (x_1 + x_3 x_5) dx_4 + x_3 x_4 dx_5.$$

Les équations du système S_1 se réduisent à quatre

$$dx_1 = 0, \quad dx_3 = 0, \quad x_3 dx_2 + dx_4 = 0, \quad x_5 dx_4 + x_4 dx_5 = 0,$$

et $\omega = 0$ en est une conséquence. La classe est donc égale à 4.

Le système S_3 se compose des trois équations

$$x_3 dx_2 + x_2 dx_3 + dx_4 = 0, \qquad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{x_2 dx_1 - x_5 dx_4 - x_4 dx_5}{x_1 x_2},$$

et on voit facilement trois intégrales $\dfrac{x_3}{x_1}$, $x_2 x_3 + x_4$, $x_4 x_5$.

Posons $\frac{x_3}{x_1} = y_1$, $x_2x_3 + x_4 = y_2$, $x_4x_5 = y_3$, et prenons un nouveau système de variables x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 ; ω devient

$$\omega = x_1(dy_2 + y_1dy_3).$$

Comme on le savait *a priori*, la forme $dy_2 + y_1dy_3$ est de troisième classe, mais il est inutile de continuer le calcul, puisque cette forme est canonique. En revenant aux premières variables, on obtient l'expression facile à vérifier

$$\omega = x_1d(x_4 + x_2x_3) + x_3d(x_4x_5).$$

Exemple II. — Soit

$$\omega = x_2dx_1 + x_3dx_2 + x_1dx_3.$$

La classe est *trois*, et le système de Pfaff se compose des deux équations

$$\frac{d(x_2 - x_3)}{x_2} = \frac{d(x_3 - x_1)}{x_3} = \frac{d(x_1 - x_2)}{x_1},$$

d'où l'on tire les intégrales $x_2 - x_1 = y_2$, $x_3 - x_1 = y_3$.

Si on prend x_1, y_2, y_3 pour variables, il vient en effet

$$\omega = d\left[\frac{3x_1^2}{2} + x_1(y_2 + y_3)\right] + y_3dy_2.$$

Exemple III. — Soit

$$\omega = x_5dx_1 + x_1dx_2 + x_2dx_3 + x_3dx_4 + x_4dx_5.$$

La classe est *cinq*, et le système S_3 donne les quatre intégrales

$$x_2 - x_1 = y_2, \quad x_3 - x_1 = y_3, \quad x_4 - x_1 = y_4, \quad x_5 - x_1 = y_5.$$

Si l'on exprime ω au moyen de x_1, y_2, y_3, y_4, y_5, on trouve

$$\omega = d\left[\frac{5x_1^2}{2} + x_1(y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\right] + y_2dy_3 + y_3dy_4 + y_4dy_5.$$

La forme

$$\omega^{(1)} = y_2dy_3 + y_3dy_4 + y_4dy_5 \text{ est de classe } quatre,$$

et l'on va voir, à l'exemple suivant, comment on la ramène à une forme canonique.

Exemple IV. — Soit

$$\omega = x_1dx_2 + x_2dx_3 + x_3dx_4.$$

Le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ est différent de zéro.

Le système S_3 est

$$\frac{-dx_2}{0} = \frac{dx_1 - dx_3}{x_1} = \frac{dx_2 - dx_4}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3};$$

on en tire les intégrales

$$x_2 = y_2, \qquad x_3 e^{\frac{x_4}{x_2}} = y_3, \qquad \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_4}{x_2} = y_1 \;:$$

en prenant les nouvelles variables y_1, y_2, y_3, x_4, on a :

$$x_1 = y_3 e^{-\frac{x_4}{y_2}} \left\{ y_1 - \frac{x_4}{y_2} \right\}, \qquad x_2 = y_2, \qquad x_3 = y_3 e^{-\frac{x_4}{y_2}},$$

et ω devient

$$\omega = y_3 e^{-\frac{x_4}{y_2}} \left(y_1 - \frac{x_4}{y_2} \right) dy_2$$

$$+ y_2 e^{-\frac{x_4}{y_2}} \left\{ dy_3 - y_3 \left(\frac{dx_4}{y_2} - \frac{x_4 dy_2}{y_2^2} \right) \right\} + y_3 e^{-\frac{x_4}{y_2}} dx_4$$

$$= y_1 y_3 e^{-\frac{x_4}{y_2}} dy_2 + y_2 e^{-\frac{x_4}{y_2}} dy_3 = y_2 e^{-\frac{x_4}{y_2}} \left(dy_3 + \frac{y_1 y_3}{y_2} dy_2 \right),$$

ce qu'on peut écrire $z_2 dy_2 + z_3 dy_3$, z_2, z_3, y_2, y_3 formant un système de quatre fonctions distinctes.

10. Formation des systèmes de Pfaff successifs. — La méthode de réduction précédente exige l'intégration successive des systèmes de Pfaff associés aux formes intermédiaires que l'on rencontre dans la réduction. En utilisant la classification des intégrales due à Cauchy, G. Darboux (¹) a montré que l'on pouvait écrire ces systèmes de Pfaff successifs d'avant d'avoir effectué aucune intégration, pourvu que l'on choisisse convenablement les nouvelles variables. Supposons, pour fixer les idées, que ω soit une forme de classe $2p$ à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le système S_3 correspondant admet $2p - 1$ intégrales distinctes ; il y a donc

(¹) G. Darboux. Sur le problème de Pfaff (*Bulletin des Sciences Mathématiques* (1882), pp. 30-34).

toujours $n - 2p + 1$ des variables x_i au moins qui ne sont pas des intégrales de ce système.

Pour fixer les notations, nous supposerons que $x_{2p}, x_{2p+1}, \ldots, x_n$ ne sont pas des intégrales de S_3, et nous désignerons par u_i l'intégrale du système S_3 qui se réduit à $x_i (i = 1, 2, \ldots, 2p-1)$ quand on y remplace x_{2p} par x^0_{2p}, x_{2p+1} par $x^0_{2p+1}, \ldots, x_n$ par x^0_n, $x^0_{2p}, x^0_{2p+1}, \ldots, x^0_n$ étant un système de constantes numériques. Si l'on prend pour nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1}, x_{2p}, \ldots, x_n$, on a vu plus haut que l'on a une identité de la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = K[U_1 du_1 + U_2 du_2 + \ldots + U_{2p-1} du_{2p-1}],$$

$U_1, U_2, \ldots, U_{2p-1}$ ne dépendant que de $u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1}$.

Le facteur K n'est pas complètement déterminé, car on peut le diviser par une fonction arbitraire de $u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1}$, à condition de multiplier les coefficients U_i par la même fonction.

On peut profiter de cette indétermination pour supposer que ce facteur se réduit à l'unité quand on fait $x_{2p} = x^0_{2p}, \ldots, x_n = x^0_n$; en effet, s'il se réduit à une fonction $\psi(u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1})$, il suffira de le diviser par ψ. Ce facteur K étant choisi de cette façon, faisons maintenant

$$x_{2p} = x^0_{2p}, \ldots, x_n = x^0_n$$

dans l'identité précédente ; on a $dx_{2p} = 0, \ldots, dx_n = 0$ et $u_1, \ldots, u_{2p-1}$ se réduisent respectivement à $x_1, x_2, \ldots, x_{2p-1}$. Cette identité devient donc

$$\sum_{i=1}^{2p-1} X_i(x_1, \ldots, x_{2p-1}, x^0_{2p}, \ldots, x^0_n) dx_i = \sum_{i=1}^{2p-1} U_i(x_1, \ldots, x_{2p-1}) dx_i.$$

On a donc

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_{2p-1}) = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_{2p-1}; x^0_{2p}, \ldots, x^0_n),$$

ou encore

$$U_i(u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1}) = X_i(u_1, u_2, \ldots, u_{2p-1}; x^0_{2p}, \ldots, x^0_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p-1),$$

ce qu'on peut exprimer comme il suit : *La nouvelle forme* ω_{2p-1}, *obtenue après la première transformation,*

$$\omega_{2p-1} = U_1 du_1 + \ldots + U_{2p-1} du_{2p-1}$$

se déduit de la forme

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_{2p-1} dx_{2p-1}$$

en y remplaçant x_i *par* u_i $(i = 1, 2, \ldots, 2p-1)$, x_{2p} *par* $x^0_{2p}, \ldots, x_n$ *par* x^0_n.

De même, si ω est une forme de classe $2p+1$, le système S_3 admet $2p$ intégrales distinctes, et on peut supposer que $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ ne sont pas des intégrales de ce système. Soit, comme tout à l'heure u_i une intégrale du système S_3 se réduisant à x_i pour $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$. Si l'on prend pour nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2p}, x_{2p+1}, \ldots, x_n$, on est conduit, comme on l'a vu au n° **5**, à une identité de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = dU + U_1 du_1 + \ldots + U_{2p} du_{2p},$$

$U_1, U_2, \ldots, U_{2p}$ ne dépendant que des variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2p}$.

La fonction U n'est pas complètement déterminée, car on peut lui ajouter une fonction arbitraire de $u_1, \ldots, u_{2p}$, à condition de modifier convenablement les coefficients U_i, et on peut profiter de cette indétermination pour choisir la fonction U de façon qu'elle soit identiquement nulle quand on y fait $x_{2p+1} = x^0_{2p+1}, \ldots, x_n = x^0_n$.

Si l'on remplace maintenant $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ par les constantes numériques $x^0_{2p+1}, \ldots, x^0_n$ dans les deux membres de l'identité précédente, elle devient

$$\sum_{i=1}^{2p} X_i(x_1, \ldots, x_{2p};\ x^0_{2p+1}, \ldots, x^0_n) dx_i = \sum_{i=1}^{2p} U_i(x_1, \ldots, x_{2p}) dx_i,$$

et on en conclut comme plus haut que *la forme de Pfaff*

$$\omega_{2p} = U_1 du_1 + U_2 du_2 + \ldots + U_{2p} du_{2p}$$

obtenue après la première transformation, se déduit de la forme

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_{2p} dx_{2p}$$

en y remplaçant x_1 *par* $u_1, \ldots, x_{2p}$ *par* u_{2p}, x_{2p+1}, *par* $x^0{}_{2p+1}, \ldots,$ x_n *par* $x^0{}_n$.

On verra un peu plus loin (Chap. II, n° **18**) une application importante de cette propriété.

11. Rang d'une intégrale de S_2. — Nous allons maintenant exposer des méthodes de réduction qui exigent beaucoup moins d'intégrations que la méthode générale qui précède. On peut les rattacher d'une façon très simple à la notion du *rang* d'une intégrale du système S_2. Nous démontrerons d'abord un lemme sur les systèmes d'équations aux différentielles totales. Soit

$$(24) \qquad A_{i1}dx_1 + A_{12}dx_2 + \ldots + A_{in}dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

un système de m équations aux différentielles totales, comprenant r équations linéairement distinctes ($r \leqslant m$), formant un système complètement intégrable. *Pour que x_1 soit une intégrale de ce système, il faut et il suffit que les équations obtenues en remplaçant x_1 par une constante et dx_1 par zéro dans les équations* (24), *se réduisent à $r - 1$ équations distinctes.*

En effet, si les équations (24) forment un système complètement intégrable de r équations seulement, dont x_1 soit une intégrale, ce système est équivalent à un système de la forme

$$df_1 = 0, \ldots, df_{r-1} = 0, \qquad dx_1 = 0,$$

et le premier membre de l'une quelconque des équations (24) est une combinaison linéaire de $df_1, df_2, \ldots, df_{r-1}, dx_1$. Ce système ne contient donc que $r - 1$ équations distinctes quand on y remplace x_1 par une constante, et dx_1 par zéro. Inversement, si les équations (24) se réduisent à $r - 1$ équations distinctes quand on y fait $x_1 = C$, $dx_1 = 0$, il faut évidemment que les r intégrales distinctes $f_1, \ldots, f_r$ du système (24) se réduisent à $r - 1$ fonctions distinctes quand on suppose x_1 constant, c'est-à-dire que x_1 soit une fonction de ces r intégrales.

Cela posé, soit ω une forme de Pfaff

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ;$$

si l'on remplace dans cette expression x_1 par une constante, d'ailleurs quelconque, on doit remplacer dx_1 par zéro, et la nouvelle forme de Pfaff

$$\omega^{(1)} = X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n,$$

où x_1 est regardé comme un paramètre dans $X_2, \ldots, X_n$, peut être d'une classe inférieure à celle de ω. Cherchons d'abord dans quels cas cela peut arriver. Soit c la classe de ω ; c'est aussi le nombre des équations linéairement distinctes du système S_2,

$$S_2 \begin{cases} a_{i1} dx_1 + \ldots + a_{in} dx_n = 0, & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0. \end{cases}$$

La classe $c^{(1)}$ de $\omega^{(1)}$ est de même égale au nombre des équations linéairement distinctes du système

$$S_2^{(1)} \begin{cases} a_{k2} dx_2 + \ldots + a_{kn} dx_n = 0, & (k = 2, 3, \ldots, n), \\ X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0 ; \end{cases}$$

Ce nombre $c^{(1)}$ est au moins égal à $c - 2$. En effet, si l'on avait par exemple $c^{(1)} = c - 3$, le système obtenu en faisant $dx_1 = 0$ dans les équations de S_2 comprendrait au plus $c - 2$ équations distinctes, puisqu'on obtient ce système en adjoignant *une* équation au système $S_2^{(1)}$. Or ceci est impossible, puisque, par hypothèse, le système S_2 se compose de c équations distinctes. L'abaissement de la classe, quand on passe de ω à $\omega^{(1)}$, est donc *au plus de deux unités*.

Il y a certainement un abaissement de la classe si x_1 est une intégrale du système S_2. Dans ce cas, en effet, d'après le lemme précédent, les équations obtenues en faisant $dx_1 = 0$ dans les équations de ce système se réduisent à $c - 1$ équations distinctes. Les équations du système $S_2^{(1)}$, qui font partie des précédentes, comprennent donc au plus $c - 1$ équations distinctes. Pour démontrer la réciproque, nous examinerons séparément les formes de classe impaire et les formes de classe paire.

1er Cas. — Soit ω une forme de classe $2p + 1$. Le système S_2 contient $2p + 1$ équations distinctes, tandis que, par hypothèse, le système $S_2^{(1)}$ en contient seulement $2p - 1$ ou $2p$. Si $S_2^{(1)}$ ne contient que $2p - 1$ équations distinctes, le système $S_1^{(1)}$

$$(S_1^{(1)}) \qquad a_{k2} dx_2 + \ldots + a_{kn} dx_n = 0, \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

qui comprend toujours un nombre *pair* d'équations linéairement distinctes, se réduit forcément à un système de $2p-2$ équations linéairement distinctes. En faisant $dx_1 = 0$ dans les équations de S_1, le système obtenu contiendra donc moins de $2p$ équations, et par suite *x_1 est une intégrale du système S_1*. Inversement, si x_1 est une intégrale de S_1, le système $S_1^{(1)}$, qui contient moins de $2p$ équations distinctes, en renferme $2p-2$, et le système $S_2^{(1)}$ en contient $2p-1$.

Supposons en second lieu que le système $S_2^{(1)}$ contienne $2p$ équations distinctes ; le système $S_1^{(1)}$ en contiendra lui-même $2p$. La forme $\omega^{(1)}$ étant de classe paire, la dernière équation de $S_2^{(1)}$ est une conséquence des équations de $S_1^{(1)}$. Il en est de même de l'équation

$$a_{12}dx_2 + \ldots + a_{1n}dx_n = 0.$$

En effet, puisque les formes linéaires $a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{in}dx_n$, où $i > 1$, sont des combinaisons linéaires de $2p$ d'entre elles, les formes linéaires $a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{in}dx_n$, où $i > 1$, comprennent au moins $2p$ formes linéairement distinctes ; elles ne peuvent en contenir davantage, puisque le système S_1 ne comprend que $2p$ formes linéairement distinctes. Il en résulte que l'équation

$$a_{12}dx_2 + \ldots + a_{1n}dx_n = 0$$

est une conséquence des $n-1$ dernières équations de S_1 et, comme elle ne contient pas dx_1, elle est une conséquence des équations de $S_1^{(1)}$. Le système obtenu en faisant $dx_1 = 0$ dans les équations de S_2 se réduit donc à $2p$ équations, et par suite *x_1 est une intégrale de S_2*, mais ce n'est pas une intégrale de S_1, comme on vient de le voir. Dans le cas actuel, S_1 est identique à S_3, et on peut énoncer la proposition suivante :

Etant donnée une forme ω de classe $2p+1$, pour que la classe de la forme $\omega^{(1)}$, déduite de ω en y remplaçant x_1 par une constante quelconque, soit inférieure à $2p+1$, il faut et il suffit que x_1 soit une intégrale du système S_2. Si x_1 est une intégrale de S_2 sans être une intégrale de S_3, $\omega^{(1)}$ est de classe $2p$; si x_1 est une intégrale de S_3, $\omega^{(1)}$ est de classe $2p-1$.

2^e^ *Cas.* — Soit $\omega = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n$ une forme de classe $2p$, et supposons que la forme

$$\omega^{(1)} = X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n,$$

où x_1 est regardé comme un paramètre, soit de classe inférieure à $2p$. La forme auxiliaire

$$\Omega = x_{n+1}(X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n) + dx_{n+1},$$

où x_{n+1} est une variable distincte de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est alors de classe $2p+1$, tandis que la forme

$$\Omega^{(1)} = x_{n+1}(X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n) + dx_{n+1}$$

est de classe $2p$ ou $2p-1$ (Voir n° **7**. Remarque).

Cela étant, appliquons le résultat qui vient d'être établi pour les formes de classe impaire à la forme Ω. D'après ce résultat, pour que $\Omega^{(1)}$ soit de classe inférieure à $2p+1$, il faut et il suffit que x_1 soit une intégrale première du système Σ_2, analogue à S_2, pour la forme Ω; ce système est ici

$$\begin{aligned} a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n &= 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n &= 0, \\ dx_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

la variable auxiliaire x_{n+1} ne figurant que dans la dernière équation, pour que x_1 soit une intégrale de ce système, il faut et il suffit que x_1 soit une intégrale du système formé par les $n+1$ premières équations, c'est-à-dire du système S_2.

Pour que $\omega^{(1)}$ soit de classe $2p-2$, il faut et il suffit que $\Omega^{(1)}$ soit de classe $2p-1$, et par suite que x_1 soit une intégrale du système Σ_3 analogue à S_3 pour la forme Ω ; ce système est ici, puisque ω est de classe paire,

$$\frac{a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n}{X_i} = \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}},$$

c'est-à-dire qu'il est identique au système S_3 associé à la forme ω, si l'on fait abstraction du dernier rapport où ne figure que la variable auxiliaire.

La conclusion est la même que pour les formes de classe impaire ; et, d'une manière générale, *la classe s'abaisse* **d'une** *unité quand on passe de* ω *à* $\omega^{(1)}$ *si* x_1 *est une intégrale de* S_2 (*sans être une intégrale de* S_3), *et de* **deux** *unités si* x_1 *est une intégrale de* S_3.

Nous dirons dans le premier cas que x_1 est de *rang un*, et dans le second cas que x_1 est une intégrale de *rang deux*.

Ces propriétés sont faciles à vérifier sur les formes canoniques. Soit

$$\omega_{2p+1} = z_1 dy_1 + \dots + z_p dy_p + dy_{p+1} ;$$

si l'on remplace y_{p+1} par une constante, la nouvelle forme est de classe $2p$. La classe s'abaisse de deux unités si l'on remplace y_i ou z_i par une constante ; si l'on suppose par exemple $z_i = C$, on peut écrire $dy_{p+1} + C_i dy_i = d(y_{p+1} + C_i y_i)$ et, au lieu de trois variables y_i, z_i, y_{p+1}, on n'en a plus qu'une $y_{p+1} + C_i y_i$.

Prenons encore une forme de classe $2p$. Si l'on suppose $y_i = C$, la classe s'abaisse de deux unités ; elle s'abaisse d'une unité seulement, si l'on suppose $z_i = C$. Mais elle s'abaisse aussi de deux unités si l'on suppose le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ égal à une constante C, car on peut alors écrire

$$z_1 dy_1 + z_2 dy_2 = z_1 d(y_1 + C y_2),$$

et, au lieu de quatre variables y_1, y_2, z_1, z_2, on n'en a que deux, z_1 et $y_1 + C y_2$.

12. Nouvelle méthode de réduction. — La propriété précédente des intégrales du système S_3 conduit à une méthode de réduction plus simple que la première. Soit

$$\omega = X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n$$

une forme de classe $2p + 1$. Supposons que l'on ait obtenu *une* intégrale u_1 du système S_3 correspondant ; si l'on fait un changement de variables de façon que u_1 soit une des nouvelles variables indépendantes, en prenant par exemple pour variables, $u_1, x_2, \dots, x_n$, l'expression de ω devient

$$\omega = U_1 du_1 + X_2^{(1)} dx_2 + \dots + X_n^{(1)} dx_n,$$

$U_1, X_2^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)}$ étant des fonctions des variables $u_1, x_2, \ldots, x_n$.

D'après ce qui vient d'être démontré, la forme

$$\omega^{(1)} = X_2^{(1)} dx_2 + \ldots + X_n^{(1)} dx_n,$$

où u_1 est regardé comme un paramètre, est de classe $2p-1$. Soit u_2 une intégrale du système de Pfaff correspondant $S_3^{(1)}$, qui est d'ordre $2p-2$; cette intégrale dépend des variables $x_2, \ldots, x_n$, et aussi en général de u_1 qui y figure comme paramètre. Prenons pour nouveau système de variables $u_2, x_3, \ldots, x_n$, au lieu de $(x_2, \ldots, x_n)$; il faudra pour cela poser

$$x_2 = f(u_1, u_2, x_3, \ldots, x_n).$$

En faisant ce changement de variable dans la forme ω elle-même, on doit remplacer dx_2 par

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

et ω devient

$$\omega = U_1^{(1)} du_1 + U_2^{(1)} du_2 + X_3^{(2)} dx_3 + \ldots + X_n^{(2)} dx_n.$$

tandis que $\omega^{(1)}$ a pour nouvelle expression

$$\omega^{(1)} = U_2^{(1)} du_2 + X_3^{(2)} dx_3 + \ldots + X_n^{(2)} dx_n.$$

Si dans cette forme $\omega^{(1)}$ on regarde u_2 comme constant, ainsi que u_1, la forme

$$\omega^{(2)} = X_3^{(2)} dx_3 + \ldots + X_n^{(2)} dx_n,$$

où u_1 et u_2 ne figurent que comme paramètres, est de classe $2p-3$. Soit u_3 une intégrale du système $S_3^{(2)}$ correspondant, qui est d'ordre $2p-4$. Un nouveau changement de variables permet d'écrire ω sous la forme

$$\omega = U_1^{(2)} du_1 + U_2^{(2)} du_2 + U_3^{(2)} du_3 + \omega^{(3)},$$

où $\omega^{(3)}$ est une nouvelle forme

$$\omega^{(3)} = X_4^{(3)} dx_4 + \ldots + X_n^{(3)} dx_n$$

qui est de classe $2p-5$ quand on regarde u_1, u_2, u_3 comme des paramètres dans les coefficients. En continuant ainsi, au bout de p transformations de ce genre dont chacune diminue la classe de deux unités, on aura pour ω une expression de la forme

$$\omega = U_1^{(p)} du_1 + U_2^{(p)} du_2 + \ldots + U_p^{(p)} du_p + \omega^{(p)},$$

$u_1, u_2, \ldots, u_p$ étant p variables indépendantes, $U_1^{(p)}, \ldots, U_p^{(p)}$ des fonctions de ces p variables et de $n - p$ variables x_i, et $\omega^{(p)}$ une forme de classe un, quand on y regarde $u_1, \ldots, u_p$ comme des paramètres. On a donc

$$\omega^{(p)} = dV - \left(\frac{\partial V}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial u_p} du_p\right),$$

la fonction V se déterminant par une quadrature, et on voit qu'en modifiant un peu les notations, l'expression obtenue pour ω peut s'écrire

$$\omega = z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1};$$

la forme ω se trouve ainsi ramenée à une forme canonique, et *cette réduction exige les opérations* $2p$, $2p-2$, ..., 2, *et une quadrature, avec des changements de variables*.

La méthode est la même pour une forme de classe $2p$. *La réduction à une forme canonique exige les opérations* $2p-1$, $2p-3$, ..., 3, 1, *et des changements de variables*.

On a intégré par là-même les systèmes S_3 et S_2 relatifs à la forme ω. Nous avons supposé, pour simplifier, que dans chaque changement de variables, on conservait toutes les variables indépendantes x_i, sauf une, qui figuraient dans la forme d'où l'on part. Mais il est clair que cette hypothèse n'est nullement nécessaire ; l'essentiel est de prendre une intégrale du système $S_3^{(i)}$ auquel on est parvenu pour l'une des nouvelles variables. Remarquons encore que, quand on passe d'une forme $\omega^{(i)}$ à la suivante, la classe diminue de deux unités, mais le nombre des variables qui figurent dans la nouvelle forme n'est pas forcément égal à la classe, comme il arrivait dans la première méthode de réduction.

Exemple I. — Reprenons la forme considérée plus haut

$$\omega = x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3 + (x_1 + x_3 x_5) dx_4 + x_3 x_4 dx_5$$

qui est de classe *quatre*. Dans la nouvelle méthode, on n'utilise qu'une des intégrales du système S_3 ; posons, par exemple, $x_1 = x_3 u_1$. L'expression de ω devient

$$\omega = u_1 x_3^2 dx_2 + x_2 x_3 u_1 dx_3 + x_3 (u_1 + x_5) dx_4 + x_3 x_4 dx_5,$$

d'après la théorie générale, si on considère u_1 comme un paramètre, cette forme ω est de classe *deux*, et par suite l'équation obtenue en l'égalant à zéro est complètement intégrable. On vérifie en effet immédiatement que l'on a

$$\omega = x_3 d \left\{ u_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 + u_1 x_4 \right\},$$

en regardant toujours u_1 comme constant, et par conséquent, si l'on considère aussi u_1 comme variable,

$$\omega = x_3 d \left\{ u_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 + u_1 x_4 \right\} - x_3 (x_4 + x_2 x_3) du_1 :$$

au moyen des variables primitives, ω aura l'expression

$$\omega = x_3 d \left\{ \frac{x_1 x_4}{x_3} + x_4 x_5 + x_1 x_2 \right\} - (x_3 x_4 + x_2 x_3^2) \, d\left(\frac{x_1}{x_3}\right),$$

un peu différente de celle qui a été obtenue plus haut (n° 9, Ex. I).

Exemple II. — Soit

$$\omega = x_5 dx_1 + x_1 dx_2 + x_2 dx_3 + x_3 dx_4 + x_4 dx_5$$

qui est de classe *cinq* (n° 9, Ex. III). On a vu que $x_2 - x_1$ était une intégrale de S_3 ; posons $x_1 = x_2 + u_1$. La forme ω devient

$$\omega = x_5 du_1 + \omega^{(1)},$$

où

$$\omega^{(1)} = (u_1 + x_2 + x_5) dx_2 + x_2 dx_3 + x_3 dx_4 + x_4 dx_5.$$

Conformément à la théorie générale, la forme $\omega^{(1)}$ est de classe *trois*, quand on y regarde u_1 comme une constante, et le système $S_3^{(1)}$ correspondant admet les deux intégrales $x_4 - x_2$, $x_5 - x_3$. Pour continuer l'application de la méthode, posons $x_4 = x_2 + u_2$; $\omega^{(1)}$ devient

$$\omega^{(1)} = x_3 du_2 + \omega^{(2)},$$

où l'on a posé

$$\omega^{(2)} = (u_1 + x_2 + x_3 + x_5) dx_2 + x_2 dx_3 + (x_2 + u_2) dx_5.$$

Cette forme $\omega^{(2)}$ est bien une différentielle exacte

$$d\left(\frac{x_2^2}{2} + x_2 x_3 + x_2 x_5 + x_2 u_1 + x_5 u_2\right),$$

quand on regarde u_1 et u_2 comme des paramètres, et, si u_1 et u_2 sont considérés comme des variables, on a

$$\omega^{(2)} = d\left(\frac{x_2^2}{2} + x_2x_3 + x_2x_5 + x_2u_1 + x_5u_2\right) - x_2du_1 - x_5du_2.$$

En remplaçant u_1 et u_2 par leurs valeurs, on trouve successivement

$$\omega^{(2)} = d\left[x_1x_2 + x_4x_5 + x_2x_3 - \frac{x_2^2}{2}\right] + x_2d(x_2 - x_1) + x_5d(x_2 - x_4),$$

$$\omega^{(1)} = \omega^{(2)} + x_3d(x_4 - x_2),$$

et enfin

$$\omega = \omega^{(2)} + x_5d(x_1 - x_2) + x_3d(x_4 - x_2),$$

ou

$$\omega = d\left[x_1x_2 + x_4x_5 + x_2x_3 - \frac{x_2^2}{2}\right]$$
$$+ (x_2 - x_5)\,d(x_2 - x_1) + (x_3 - x_5)\,d(x_4 - x_2).$$

Une forme ω, de classe supérieure à un, peut être mise d'une infinité de manières sous forme canonique ; connaissant une de ces formes canoniques, on peut en déduire toutes les autres par une transformation de contact (*Leçons, chap. X*, *n*[os] **78** *et* **80**).

Exercices

Ramener à une forme canonique les expressions suivantes :

$$x_2x_3dx_1 + x_3(x_1 + x_2 + x_4)dx_2 + x_2(x_1 + x_3 + x_4)dx_3 + x_2x_3dx_4$$

$$(x_2 + x_3)dx_1 + (x_3 + x_4)dx_2 + (x_4 + x_5)dx_3 +$$
$$(x_5 + x_6)dx_4 + (x_6 + x_1)dx_5 + (x_1 + x_2)dx_6,$$

$$x_2dx_1 + x_3 + dx_2x_4dx_3 + x_5dx_4 + x_6dx_5 + x_1dx_6,$$

$$x_4dx_1 + 2x_1dx_2 + x_2dx_3 + 2x_3dx_4$$

$$x_2^2dx_1 + x_3^2dx_2 + x_1^2dx_2$$

CHAPITRE II

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DE PFAFF

13. Classe d'une équation de Pfaff. — Quand on multiplie une forme de Pfaff ω par un facteur K, fonction des variables qui figurent dans ω, pouvant aussi renfermer d'autres variables, la classe de la nouvelle forme $K\omega$ peut être égale, supérieure ou inférieure à celle de ω. On le voit immédiatement si ω est ramené à une forme canonique ; si ω est de classe paire $2p$ et a pour forme canonique $z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p$, il est clair que la forme $K(z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p)$ est au plus de classe $2p$, mais elle peut être de classe inférieure à $2p$, si l'on prend par exemple $K = \frac{1}{z_1}$. Si ω est de classe $2p + 1$, et a pour forme canonique $z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1}$, il est évident que la forme $K[z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1}]$ est au plus de classe $2p + 2$, quelque soit le facteur K. Il résulte de là que, quel que soit K, la classe de $K\omega$ ne peut dépasser la classe de ω de plus d'une unité, et cela ne peut avoir lieu que si ω est de classe impaire.

La classe de $K\omega$ ne peut non plus être inférieure de plus d'une unité à celle de ω, car la multiplication par $\frac{1}{K}$ augmenterait la classe de $K\omega$ de plus d'une unité.

Nous appellerons *classe de l'équation* $\omega = 0$ la classe de la forme $K\omega$ qui est la plus petite possible quand on prend pour le facteur K une fonction arbitraire différente de zéro. *Cette classe* γ *est toujours un nombre impair*. En effet, si $K\omega$ est une forme de classe paire, ayant pour forme canonique

$$K\omega = z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p,$$

$\frac{K}{z_1}\omega$ sera une forme de classe impaire $2p - 1$.

Puisque la classe de ω ne peut diminuer de plus d'une unité quand on donne au facteur K toutes les formes possibles, il s'ensuit que *si ω est une forme de classe impaire $2p+1$, la classe de l'équation $\omega = 0$ est égale à la classe de la forme ω elle-même*, $\gamma = c$.

Au contraire, nous avons remarqué tout à l'heure qu'en multipliant une forme de classe paire $2p$ par un facteur K convenablement choisi, on abaisse la classe. Par suite, *si ω est une forme de classe paire $2p$, la classe de l'équation $\omega = 0$ est égale à $2p-1$*, $\gamma = c - 1$.

Si on écrit la classe $\gamma = 2m + 1$, le nombre m est égal à p pour une forme ω de classe impaire $2p+1$, et à $p-1$ par une forme de classe paire $2p$.

Pour trouver toutes les multiplicités intégrales d'une équation de Pfaff $\omega = 0$, il est évident que l'on peut multiplier le premier membre par une fonction arbitraire K des variables qui y figurent, et il est naturel de choisir ce facteur K de façon que la nouvelle équation $K\omega = 0$ renferme le plus petit nombre de variables possibles. C'est ainsi que la notion de *classe d'une équation de Pfaff* s'introduit d'elle-même dans la question.

Le nombre $m + 1 = \frac{\gamma+1}{2}$ est égal au *plus petit nombre de différentielles* que l'on puisse laisser dans l'équation $\omega = 0$ par tous les changements de variables possibles. En effet, supposons que, par un changement de variables convenable, on ait mis ω sous la forme

$$\omega = U_1 du_1 + \ldots + U_r du_r, \tag{1}$$

aucun des coefficients U_i n'étant nul. Il est clair que l'équation $\omega = 0$ est équivalente à l'équation

$$du_1 + \frac{U_2}{U_1} du_2 + \ldots + \frac{U_r}{U_1} du_r$$

dont la classe est au plus $2r-1$. On a donc $\gamma \leqslant 2r-1$, et par suite $r \geqslant \frac{\gamma+1}{2}$.

Nous dirons qu'*une équation $\omega = 0$ est ramenée à la forme cano-*

nique lorsque, dans cette équation, ne figurent que $\frac{\gamma+1}{2}=m+1$ différentielles, γ étant la classe de cette forme. Si, par un changement de variables convenable, on a mis ω sous la forme

$$(2)\qquad \omega = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_m dy_m + Y_{m+1} dy_{m+1},$$

l'équation $\omega = 0$ peut s'écrire, en divisant tous les coefficients par Y_{m+1},

$$(3)\qquad z_1 dy_1 + \ldots + z_m dy_m + dy_{m+1} = 0$$

où

$$z_i = \frac{Y_i}{Y_{m+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

et l'on est ramené dans tous les cas à résoudre une équation $\omega = 0$, où ω est une forme canonique d'ordre impair.

Pour ramener une équation de Pfaff donnée $\omega = 0$ à la forme (3), où le nombre m a la plus petite valeur possible, nous avons encore deux cas à distinguer, suivant la parité de la classe de ω.

1^er Cas. — Supposons que ω soit de classe paire $2p$; on a dans ce cas $\gamma = 2p - 1$, et par suite $m + 1 = p$, de sorte que le problème revient à mettre une forme de classe paire $2p$ sous la forme

$$Y_1 dy_1 + \ldots + Y_p dy_p,$$

c'est-à-dire à mettre ω sous forme canonique.

2^e *Cas.* — Soit ω une forme de classe impaire $2p+1$; on a, dans ce cas, $\gamma = 2p + 1$, et par suite $m + 1 = p + 1$, de sorte qu'il s'agit de ne laisser dans l'expression de ω que $p + 1$ différentielles. On a une première solution de ce problème si on a mis ω sous forme canonique

$$\omega = z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1},$$

mais ce n'est là qu'une solution particulière, où le coefficient d'une des différentielles est égal à l'unité.

D'une façon générale, si la forme ω de classe $2p + 1$ ne renferme dans son expression que $p + 1$ différentielles

$$(4)\qquad \omega = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_p dy_p + Y_{p+1} dy_{p+1},$$

il est clair que

$$y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}, \frac{Y_1}{Y_{p+1}}, \ldots, \frac{Y_p}{Y_{p+1}}$$

forment un système de $2p+1$ variables distinctes, car autrement l'équation $\omega = 0$ serait de classe inférieure à $2p+1$; cette équation est donc ramenée à la forme (3) où $m = p$. En résumé, si ω est de classe impaire $2p+1$, pour ramener l'équation $\omega = 0$ à la forme canonique (3), il n'est pas nécessaire d'avoir ramené ω elle-même à une forme canonique. *Il suffit d'avoir ramené ω à une expression où ne figurent que $p+1$ différentielles, les coefficients de ces différentielles pouvant être quelconques.*

Pour bien saisir cette distinction entre les deux problèmes, considérons une forme à trois variables

$$\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2,$$

où X_1, X_2 sont des fonctions quelconques des trois variables x_1, x_2, x_3.

Pour ramener ω à une forme canonique, il faudrait intégrer le système S_3, qui est ici

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial X_2}{\partial x_3}} = \frac{-dx_2}{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_3}} = \frac{dx_3}{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1}} = dt,$$

c'est-à-dire le système le plus général du second ordre ayant pour multiplicateur l'unité. Nous voyons au contraire que l'équation $\omega = 0$ est mise immédiatement sous forme canonique si l'on prend pour variables x_1, x_2, et $\dfrac{X_2}{X_1}$.

Prenons encore la forme la plus générale à trois variables

$$\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3,$$

où X_1, X_2, X_3 sont des fonctions quelconques des variables x_1, x_2, x_3.

Pour la ramener à une expression où ne figurent que deux différentielles, on peut procéder comme au n° **8**, en considérant la forme auxiliaire

$$\omega^{(1)} = X_2 dx_2 + X_3 dx_3,$$

où l'on regarde x_1 comme un paramètre. Cette forme est de classe deux en général, et on peut la mettre sous la forme $u_2 du_1$ par un changement de variables, pourvu qu'on ait intégré l'équation différentielle $\omega^{(1)} = 0$, où x_1 est traité comme une constante. Le même changement de variables appliqué à la forme ω conduira à une expression où ne figurent que deux différentielles dx_1 et du_1.

Ce procédé se rattache à la méthode générale du paragraphe suivant.

14. Caractéristiques. — Dans l'étude d'une équation de Pfaff, *le système caractéristique* S_1 défini plus haut (n° **7**) joue le même rôle que le système de Pfaff S_3 dans l'étude de la forme de Pfaff elle-même. Ce système S_4, qui coïncide avec S_3 si la classe de ω est un nombre pair, et avec S_2 si la classe est un nombre impair, s'obtient en écrivant qu'un élément intégral $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ est en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux. Il est évidemment le même pour une forme ω et pour une forme $K\omega$, quelle que soit la fonction par laquelle on multiplie la forme ω ; c'est une conséquence immédiate de sa signification. C'est aussi un covariant de ω relativement à tout changement de variables. On peut donc dire que le système caractéristique S_4 est un *covariant de l'équation de Pfaff* $\omega = 0$, quand on effectue un changement de variables quelconques, et qu'on multiplie le premier membre de l'équation par un facteur quelconque. Nous avons vu (n° **7**) que ce système est complètement intégrable, et il se compose d'un nombre impair d'équations, qui est précisément égal à la classe γ de l'équation $\omega = 0$. Nous dirons, pour abréger, que toute intégrale du système S_4 est une *variable caractéristique* Il y a donc γ variables caractéristiques distinctes pour une équation de classe γ.

Si une équation de Pfaff, de classe γ, a été ramenée à une forme canonique, *les γ variables qui y figurent sont des variables caractéristiques.* Les variables qui figurent dans une équation de Pfaff sont les variables qui figurent sous le signe d, et les rapports de deux coefficients quelconques des différentielles.

Supposons, en effet, qu'une équation de Pfaff, de classe $\gamma = 2m + 1$, ait été mise sous la forme

$$z_1 dy_1 + \ldots + z_m dy_m + dy_{m+1} = 0;$$

pour cette forme canonique, le système caractéristique S_4 se compose des $2m+1$ équation

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_{m+1} = 0, \quad dz_1 = 0, \ldots, dz_m = 0.$$

Les fonctions y_i, z_k des variables x_i sont donc des intégrales du système caractéristique, quelles que soient les variables au moyen desquelles on exprime la forme ω. Si une équation a été ramenée à une forme canonique, on en déduit donc immédiatement l'intégrale générale du système caractéristique. Cela posé, pour ramener *une équation de Pfaff* $\omega = 0$ de classe $2m+1$, à une forme canonique, on peut procéder comme au n° **12** pour ramener *une forme de Pfaff* à une forme canonique ; il suffit de remplacer le système de Pfaff S_3 par le système caractéristique S_4. Les deux calculs sont d'ailleurs identiques si ω est de classe paire, car alors dans ce cas S_3 et S_4 coïncident pour la forme ω, et pour toutes les autres formes que l'on rencontre dans le calcul.

Soit, dans le cas général, u_1 une intégrale du système caractéristique S_4 ; si on prend pour variables $u_1, x_2, \ldots, x_n$, l'équation de Pfaff s'écrit

$$\omega = U_1 du_1 + X_2^{(1)} dx_2 + \ldots + X_n^{(1)} dx_n = U_1 du_1 + \omega^{(1)} = 0.$$

L'équation $\omega^{(1)} = 0$ *est de classe* $2m-1$ *quand on y regarde* u_1 *comme un paramètre.* La propriété est immédiate si la forme ω est de classe paire $2p$, car S_4 coïncide avec S_3, la forme ω est de classe $2p-1$, et $\omega^{(1)}$ de classe $2p-3$. Si la forme ω est de classe impaire $2p+1$, la forme $\omega^{(1)}$ est de classe $2p$ ou $2p-1$, puisque S_4 coïncide dans ce cas avec S_2, et l'équation $\omega^{(1)} = 0$ est de classe $2p-1$. En déterminant ensuite une intégrale du système caractéristique relatif à $\omega^{(1)} = 0$, et ainsi de suite, on démontre comme au n° **12**, qu'on arrivera à mettre l'équation $\omega = 0$ sous une forme où ne figurent que $m+1$ différentielles, c'est-à-dire à une forme canonique.

Si par exemple ω est une forme de classe impaire $2m+1$, où ne figurent que $2m+1$ variables, toutes ces variables sont des intégrales du système caractéristique, et en écrivant l'équation

$$X_1 dx_1 + \omega^{(1)} = 0,$$

l'équation $\omega^{(1)} = 0$, où l'on regarde x_1 comme un paramètre, est de classe $2m - 1$. C'est la généralisation de la remarque qui termine le paragraphe précédent.

Remarque. — On peut aussi comme plus haut (n° **11**) ramener une forme ω de classe impaire $2p + 1$ à n variables à une forme $\Omega = x_{n+1}\omega + dx_{n+1}$ de classe paire. Si Ω a été ramenée à une forme canonique, avec $p + 1$ différentielles, il suffira d'y remplacer x_{n+1} par une constante pour avoir l'équation $\omega = 0$ sous forme canonique.

Soit ω une forme à n variables, telle que l'équation $\omega = 0$ soit de classe γ : en égalant à des constantes les γ variables caractéristiques, on obtient les équations d'une famille de multiplicités à $n - \gamma$ dimensions dans l'espace à n dimensions

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots \quad u_\gamma = C_\gamma,$$

telle qu'il en passe une par chaque point de l'espace $(x_1, \dots, x_n)$. Ce sont les *multiplicités caractéristiques* de l'équation $\omega = 0$.

Si n est pair, γ étant impair, il y a toujours des multiplicités caractéristiques à un nombre impair de dimensions. Si n est impair, il y a des multiplicités caractéristiques à un nombre pair de dimensions, lorsque ω est une forme exceptionnelle, où le nombre des variables dépasse la classe ; si ω est une forme ordinaire, il n'y a pas de caractéristiques.

15. Intégration d'une équation canonique. — Toutes les multiplicités intégrales de l'équation $\omega = 0$ de forme canonique

$$(5) \qquad z_1 dy_1 + \dots + z_m dy_m + dy_{m+1} = 0.$$

peuvent être obtenues par des opérations algébriques [1].

Rappelons brièvement la solution. D'après l'équation (5), il existe une relation au moins entre les variables $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$. Supposons qu'il y ait h relations distinctes et h seulement entre ces variables $(0 < h \leqslant m + 1)$; au lieu de les supposer résolues

[1] *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Chap. IX, pp. 315-320).

par rapport à h des variables, écrivons-les sous la forme la plus générale

$$(6) \qquad \psi_1(y_1, \ldots, y_{m+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_h(y_1, \ldots, y_{m+1}) = 0,$$

les h fonctions ψ_i étant distinctes, et l'une au moins renfermant la variable y_{m+1}. La relation (5) doit être une combinaison linéaire des h relations

$$(7) \qquad d\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\psi_h = 0,$$

puisqu'il résulte des hypothèses qu'il ne peut exister entre les différentielles dy_i aucune relation linéaire distincte de celles-là. On doit donc avoir une identité de la forme

$$z_1 dy_1 + \ldots + z_m dy_m + dy_{m+1} = \lambda_1 d\psi_1 + \ldots + \lambda_h d\psi_h,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ étant h coefficients indéterminés, ce qui entraîne les $m + 1$ relations nouvelles.

$$(8) \qquad \begin{cases} z_i = \lambda_1 \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial\psi_h}{\partial y_i}, & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ 1 = \lambda_1 \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_{m+1}} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial\psi_h}{\partial y_{m+1}}. \end{cases}$$

Ces $m + 1$ équations sont distinctes, puisque tous les déterminants d'ordre h que l'on peut déduire du tableau des dérivées partielles des fonctions ψ_i ne peuvent être nuls à la fois. L'élimination des h paramètres λ_i entre ces $m + 1$ équations conduira donc à un système de $m + 1 - h$ relations entre les variables y_i, z_i,

$$(9) \qquad \Pi_k(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}; z_1, z_2, \ldots, z_m) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m + 1 - h).$$

Inversement, toute multiplicité M dans l'espace à $2m + 1$ dimensions telle que les coordonnées de l'un quelconque de ses points $(y_1, \ldots, y_{m+1}; z_1, \ldots, z_m)$ vérifient les $m + 1$ relations (6) et (9) est une multiplicité intégrale de l'équation $\omega = 0$. On obtiendra donc toutes les intégrales de l'équation $\omega = 0$ en prenant tous les systèmes de m fonctions distinctes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h$ des variables y_i, l'une au moins renfermant y_{m+1} $(0 < h \leqslant m + 1)$, et en adjoignant aux $m + 1$ équations (6) et (9) un système de q relations choisies arbitrairement entre les variables y_i, z_i, pourvu qu'elles ne soient pas incompatibles avec les premières.

La multiplicité intégrale ainsi obtenue est à $2m+1-(m+1+q) = m-q$ dimensions, puisque les équations (6) et (9) sont au nombre de $m+1$. On obtiendra les multiplicités intégrales d'ordre maximum en supposant $q=0$. En résumé, *les multiplicités intégrales ayant le nombre maximum de dimensions sont des multiplicités à m dimensions que l'on obtient en établissant entre les $2m+1$ variables y_i, z_k un système de $m+1$ relations de la forme* (6) *et* (9), *les fonctions ψ_i étant arbitraires.*

Toute multiplicité intégrale M_{m-q} à $m-q$ dimensions est située sur une multiplicité intégrale M_m à m dimensions, et s'obtient en adjoignant aux équations qui définissent M_m q relations nouvelles choisies arbitrairement et distinctes des premières.

Remarque. — On peut écrire les équations de M_m en adjoignant aux relations (6) les équations

$$z_i = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial \psi_h}{\partial y_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_{m+1}} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial \psi_h}{\partial y_{m+1}}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

qui donnent les variables z_i en fonction de $h-1$ paramètres $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}; \ldots, \dfrac{\lambda_h}{\lambda_1}$ et des variables y_i qui dépendent elles-mêmes de $m-h+1$ variables indépendantes.

Soient M_h une intégrale à h dimensions de l'équation (5) et $(y_1^0, \ldots, y^0_{m+1}, z_1^0, \ldots, z^0_m)$ un point ordinaire de M_h. Les coordonnées d'un élément de M_h voisin de celui-là peuvent s'exprimer au moyen de h d'entre elles prises pour variables indépendantes. On peut toujours prendre pour ces h variables indépendantes α des variables y_i et $h-\alpha$ des variables z_i, *toutes ces variables ayant des indices différents.*

En effet, si y_{m+1} est une des variables indépendantes, l'une au moins des variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dépend de y_{m+1}, et la relation

$$z_1 \frac{\partial y_1}{\partial y_{m+1}} + z_2 \frac{\partial y_2}{\partial y_{m+1}} + \ldots + z_m \frac{\partial y_m}{\partial y_{m+1}} + 1 = 0,$$

que l'on déduit de l'équation de Pfaff (5) prouve que toutes les dérivées $\frac{\partial y_1}{\partial y_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial y_{m+1}}$ ne peuvent être nulles à la fois. Si par exemple la dérivée $\frac{\partial y_1}{\partial y_{m+1}}$ n'est pas nulle pour les coordonnées de l'élément considéré, on peut prendre y_1 pour variable indépendante à la place de y_{m+1}, en conservant les autres variables indépendantes.

D'autre part, supposons que deux variables de même indice, y_1 et z_1 par exemple, fassent partie des h variables indépendantes. De la relation (5) on déduit les expressions de $\frac{\partial y_{m+1}}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial y_{m+1}}{\partial z_1}$ au moyen des dérivées de $y_2, \ldots, y_m, z_2, \ldots, z_m$ par rapport aux mêmes variables, et la condition d'intégrabilité conduit à la relation

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D(y_i, z_i)}{D(y_1, z_1)} = 1 + \frac{D(y_2, z_2)}{D(y_1, z_1)} + \ldots + \frac{D(y_m, z_m)}{D(y_1, z_1)} = 0.$$

Il faudra donc que l'un au moins des indices $2, 3, \ldots, m$ ne figure pas parmi les indices des variables indépendantes, sans quoi tous les termes qui suivent le premier seraient nuls dans la relation précédente. Nous pouvons supposer que l'on ait choisi les notations de façon que les indices des variables indépendantes soient $1, 2, \ldots, p$; alors toutes les dérivées

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial z_1}, \qquad \text{où} \quad i > p,$$

ne pourront être nulles pour l'élément initial. Supposons par exemple que $\frac{\partial y_{p+1}}{\partial y_1}$ ne soit pas nul pour cet élément ; on pourra alors prendre y_{p+1} pour variable indépendante à la place de y_1. Les indices 1 et $p+1$ figureront chacun une fois dans les variables indépendantes, et les indices qui n'y figurent pas sont $p+2, \ldots, m$. Si un des indices $2, 3, \ldots, p$ figure encore deux fois dans les variables indépendantes, on peut recommencer la même opération, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un système de h variables indépendantes où tous les indices sont différents.

Ce raisonnement prouve en même temps que le nombre h ne peut être supérieur à m.

On peut toujours supposer que les h variables indépendantes sont $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, z_{\alpha+1}, \ldots, z_h$. Soient

$$(10) \begin{cases} y_{h+1} = u_{h+1}(y_1, \ldots, y_\alpha; z_{\alpha+1}, \ldots, z_h), \; y_{h+2} = u_{h+2}, \ldots, y_m = u_m, \\ z_{h+1} = v_{h+1}(y_1, \ldots, y_\alpha; z_{\alpha+1}, \ldots, z_h), \; z_{h+2} = v_{h+2}, \ldots, z_m = v_m \end{cases}$$

les expressions de $y_{h+1}, \ldots, y_m, z_{h+1}, \ldots, z_m$ en fonction des variables indépendantes, $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ désignant des fonctions arbitraires qui prennent respectivement les valeurs $y^0_{h+1}, \ldots, z_m^0$ pour les valeurs $y_1^0, \ldots, y_\alpha^0, z^0_{\alpha+1}, \ldots, z_h^0$. Nous écrirons l'expression de y_{m+1} comme il suit

$$(11)\qquad y_{m+1} = w(y_1, \ldots, y_\alpha;\, z_{\alpha+1}, \ldots, z_h) - y_{\alpha+1}z_{\alpha+1} - \ldots - y_h z_h$$

w étant une nouvelle fonction arbitraire qui doit satisfaire à une condition initiale évidente. En portant ces expressions de $y_{h+1}, \ldots, y_m, y_{m+1}, z_{h+1}, \ldots, z_m$ dans l'équation de Pfaff (5), et en égalant à zéro les coefficients de $dy_1, \ldots, dy_\alpha, dz_{\alpha+1}, \ldots, dz_h$, on obtient les expression des autres coordonnées $y_{\alpha+1}, \ldots, y_h, z_1, \ldots, z_\alpha$,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
y_{\alpha+1} &= \frac{\partial w}{\partial z_{\alpha+1}} + v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial z_{\alpha+1}} + \ldots + v_m \frac{\partial u_m}{\partial z_{\alpha+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_h &= \frac{\partial w}{\partial z_h} + v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial z_h} + \ldots + v_m \frac{\partial u_m}{\partial z_h},\\
z_1 &= -\frac{\partial w}{\partial y_1} - v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial y_1} - \ldots - v_m \frac{\partial u_m}{\partial y_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_\alpha &= -\frac{\partial w}{\partial y_\alpha} - v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial y_\alpha} - \ldots - v_m \frac{\partial u_m}{\partial y_\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (10), (11), et (12) représentent la multiplicité intégrale M_h dans le voisinage de l'élément donné [1].

En particulier si $h = m$, il y a une seule fonction arbitraire w de m arguments, et les formules qui représentent une intégrale à m dimensions sont les suivantes [Cf. *Leçons*, p. 319, formules (11)].

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
&y_{m+1} = w(y_1, \ldots, y_\alpha;\, z_{\alpha+1}, \ldots, z_m) - z_{\alpha+1}\frac{\partial w}{\partial z_{\alpha+1}} - \ldots - z_m \frac{\partial w}{\partial z_m},\\
&y_{\alpha+1} = \frac{\partial w}{\partial z_{\alpha+1}}, \ldots, y_m = \frac{\partial w}{\partial z_m}, z_1 = -\frac{\partial w}{\partial y_1}, \ldots, z_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial y_\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

16. Résolution de l'équation générale. — Soit ω une forme de Pfaff à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'équation

$$(14)\qquad \omega = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0$$

[1] CARTAN. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e série, t. XVI, p. 270.

sera immédiatement résolue, d'après le paragraphe précédent, si on a pu ramener cette équation à une forme canonique, où ne figurent que $m+1$ différentielles, quand cette équation est de classe $\gamma = 2m + 1$. Toute multiplicité intégrale est définie, nous venons de le voir, par un système de $m+1$ relations, dépendant de fonctions arbitraires, entre les variables de la forme réduite. Il s'ensuit que toute intégrale de l'équation (14) est elle-même définie par un système de $m+1$ relations entre les variables x_i, auxquelles on peut ajouter un nombre quelconque de relations arbitraires nouvelles entre ces variables, pourvu qu'elles ne soient pas incompatibles avec les premières.

Les multiplicités intégrales d'ordre maximum sont donc des multiplicités à $n-(m+1) = n - \frac{\gamma+1}{2}$ dimensions, si γ est la classe de l'équation $\omega = 0$; de plus, toute multiplicité intégrale d'ordre inférieur à cette limite est située sur une multiplicité intégrale d'ordre maximum.

Il est facile d'avoir une limite inférieure du nombre $n - \frac{\gamma+1}{2}$.

En effet si n est pair, $n = 2p$, γ est au plus égal à $2p-1$, $\frac{\gamma+1}{2}$ est au plus égal à p, et par suite on a $n - \frac{\gamma+1}{2} \geqslant p = \frac{n}{2}$.

De même si $n = 2p+1$, γ est au plus égal à $2p+1$, et par suite $n - \frac{\gamma+1}{2} \geqslant p$. Dans les deux cas, les multiplicités intégrales d'ordre maximum sont d'un ordre au moins égal à la partie entière de $\frac{n}{2}$ (Cf. n° **6**).

La méthode précédente de résolution du problème de Pfaff exige la réduction de l'équation $\omega = 0$ à une forme canonique.

Nous allons montrer que les deux problèmes sont équivalents, du moins si l'on demande une solution générale, c'est-à-dire si l'on veut déterminer toutes les multiplicités intégrales d'ordre maximum. Supposons en effet que l'on connaisse toutes les multiplicités intégrales d'ordre $n-(m+1)$ d'une équation $\omega = 0$ à n variables de classe $2m+1$. Prenons en particulier une famille d'intégrales dépendant de $m+1$ constantes arbitraires, de telle façon qu'il en passe une par chaque point de l'espace. Soient

$$(15)\qquad f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \ldots, f_{m+1} = C_{m+1}$$

les équations qui définissent cette famille de multiplicités.

Imaginons que l'on fasse un changement de variables de façon à prendre $f_1, f_2, \ldots, f_{m+1}$ parmi les nouvelles variables. L'équation transformée $\Omega =$ doit être vérifiée quand on y fait $df_1 = 0, \ldots, df_{m+1} = 0$, quelles que soient les valeurs des autres différentielles. Elle est donc de la forme

$$\Omega = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \ldots + F_{m+1} df_{m+1} = 0.$$

et par suite l'équation $\omega = 0$ a été ramenée à une forme canonique par ce changement de variables. On voit même qu'il suffit de connaître une famille de multiplicités intégrales à $n - (m + 1)$ dimensions pour pouvoir effectuer la réduction.

Remarque. — Les conclusions précédentes peuvent être en défaut pour certaines intégrales. Par exemple, l'équation

$$dx_1 - x_1 x_2 dx_3 = 0$$

de classe *trois* admet une intégrale à *deux* dimensions $x_1 = 0$. Si l'on prend pour variables canoniques x_1, $x_1 x_2$ et x_3, les deux relations $x_1 = 0$, $x_1 x_2 = 0$, qui définissent une intégrale, se réduisent à une seule. De même l'équation de classe $2m - 1$

$$y_1 dx_1 + \ldots + y_m dx_m = 0$$

admet l'intégrale à m dimensions $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$, qui ne rentre pas dans le type général. On reviendra au Chapitre IV sur ces *solutions singulières*.

17. Intégrales lieux de caractéristiques. — Quand on a ramené une équation de Pfaff à une forme canonique, il ne figure dans cette nouvelle équation que les γ variables caractéristiques, et par suite toute intégrale d'une équation de Pfaff est définie par un certain nombre de relations entre les variables caractéristiques, auxquelles on peut adjoindre d'autres relations, en nombre quelconque, choisies à volonté, pourvu qu'elles soient compatibles avec les premières. Nous allons développer les conséquences de cette remarque. Imaginons que dans l'équation $\omega = 0$ on ait effectué un changement de variables, en prenant pour variables nouvelles un système de γ variables caractéristiques distinctes $u_1, \ldots, u_\gamma$, avec $n - \gamma$ variables $u_{\gamma+1}, \ldots, u_n$, choisies de façon à former avec les premières un système de n fonctions indépendantes des variables primitives. Après la transformation, les variables $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$ figurent seules dans la nouvelle équation et, par suite, toute multiplicité intégrale est définie par un certain nombre de relations où figurent seulement $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$,

$$(16) \qquad \mathrm{H}_1(u_1, \ldots, u_\gamma) = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}_k(u_1, \ldots, u_\gamma) = 0, \qquad k \leqslant \frac{\gamma+1}{2},$$

auxquelles on peut adjoindre un nombre quelconque de relations choisies arbitrairement entre $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Considérons une multiplicité intégrale à ρ dimensions M_ρ définie par les formules

$$(17) \qquad u_1 = \psi_1(t_1, \ldots, t_\rho), \quad \ldots, \quad u_\gamma = \psi_\gamma(t_1, \ldots, t_\rho),$$

$$(18) \qquad u_{\gamma+1} = \psi_{\gamma+1}(t_1, \ldots, t_\rho), \quad \ldots, \quad u_n = \psi_n(t_1, \ldots, t_\rho),$$

où $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$ désignent ρ variables auxiliaires qui ne figurent pas nécessairement dans toutes les fonctions ψ_i. Les conditions pour que la multiplicité ainsi définie soit une intégrale de l'équation de Pfaff ne renferment que les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_\rho$; si elles sont vérifiées, elles le seront encore quand on remplacera $\psi_{\gamma+1}, \ldots, \psi_n$ par d'autres fonctions quelconques, pouvant renfermer de nouvelles variables indépendantes. En particulier, la multiplicité M' définie par les équations

$$(19) \qquad \begin{cases} u_1 = \psi_1(t_1, \ldots, t_\rho), \quad \ldots, \quad u_\gamma = \psi_\gamma(t_1, \ldots, t_\rho), \\ u_{\gamma+1} = t_{\rho+1}, \quad \ldots, \quad u_n = t_{n-\gamma+\rho}, \end{cases}$$

où $t_{\rho+1}, \ldots, t_{n-\gamma+\rho}$ sont de nouveaux paramètres variables indépendants de $t_1, \ldots, t_\rho$, est aussi une multiplicité intégrale. Or cette multiplicité M' est le lieu des multiplicités caractéristiques de l'équation $\omega = 0$,

$$u_1 = C_1, \ldots, u_\gamma = C_\gamma,$$

issues des différents points de la multiplicité M_ρ. On a donc le théorème suivant :

Le lieu des multiplicités caractéristiques de l'équation de Pfaff $\omega = 0$, *qui passent par les différents points d'une multiplicité intégrale* M *de cette équation, est une nouvelle multiplicité intégrale* M'.

Si la multiplicité M est à ρ dimensions, la multiplicité M' est au plus à $\rho + n - \gamma$ dimensions, mais elle peut en avoir moins. Elle aura ce nombre maximum de dimensions si les γ fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_\gamma$ sont des fonctions distinctes des ρ paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$; les n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ définies par les formules (19) sont alors en effet des fonctions distinctes des $n + \rho - \gamma$ paramètres $t_1, \ldots, t_{n-\gamma+\rho}$. Supposons en second lieu que les γ fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_\gamma$ des ρ paramètres $t_1, \ldots, t_\rho$ ne soient pas distinctes, de telle sorte que le point $(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma)$ décrive dans l'espace à γ dimensions une multiplicité à moins de ρ dimensions. Nous pouvons alors choisir les paramètres t_i de façon que les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_\gamma$ dépendent seulement de $\rho' < \rho$ paramètres $t_1, \ldots, t_{\rho'}$ et en soient des fonctions distinctes, les paramètres $t_{\rho'+1}, \ldots, t_\rho$ ne figurant que dans les expressions $u_{\gamma+1}, \ldots, u_n$. La multiplicité M' représentée par les formules (19) est alors visiblement à $n - \gamma + \rho'$ dimensions seulement. On peut encore énoncer ce résultat comme il suit. Soient $(u_1^0, \ldots, u_n^0)$ les coordonnées d'un point de M_ρ, $t_1^0, \ldots, (t_{\rho'})^0$ les valeurs correspondantes des paramètres, $t_1, t_2, \ldots, t_{\rho'}$; si l'on donne à ces paramètres les valeurs constantes $t_1^0, \ldots, (t_{\rho'})^0$ les autres paramètres $t_{\rho'+1}, \ldots, t_\rho$ variant arbitrairement, le point $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ décrit sur M_ρ une multiplicité à $\rho - \rho'$ dimensions qui appartient aussi à la multiplicité caractéristique

$$u_1 = u_1^0, \ldots, u_\gamma = u_\gamma^0.$$

La multiplicité M_ρ et la multiplicité caractéristique qui passe par un point quelconque de M_ρ ont donc en commun une multiplicité d'ordre $\rho - \rho'$. Par conséquent *lorsque la multiplicité intégrale* M_ρ *et la multiplicité caractéristique qui passe par un point quelconque de* M_ρ *ont en commun une multiplicité d'ordre* $\rho - \rho'$, *le lieu des multiplicités caractéristiques issues des différents points de* M_ρ *est une multiplicité intégrale* M' *à* $n - \gamma + \rho'$ *dimensions.*

Il résulte des propriétés précédentes que *les multiplicités intégrales d'ordre maximum sont composées de multiplicités caractéristiques.* En effet si M_ρ est une intégrale, sans être un lieu de caractéristiques, le lieu des caractéristiques qui passent par les différents points de M_ρ aura évidemment plus de ρ dimensions. Pour obtenir ces multiplicités intégrales d'ordre maximum $n - \frac{\gamma + 1}{2}$, il suffira de prendre le lieu des multiplicités caractéristiques issues des différents points d'une multiplicité intégrale d'ordre $\frac{\gamma - 1}{2}$, n'ayant aucune multiplicité commune avec la multiplicité caractéristique qui passe par un quelconque de ses points. Ces intégrales sont représentées par les formules (19), où l'on suppose que le nombre ρ a sa valeur maximum $\frac{\gamma - 1}{2}$, les γ fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_\gamma$ étant distinctes.

Supposons par exemple que ω soit une forme ordinaire à $2m$ variables ; on a alors $\gamma = 2m - 1$. Les caractéristiques sont à une dimension, et les multiplicités intégrales d'ordre maximum sont d'ordre m. Ces intégrales sont engendrées par les caractéristiques issues de tous les points d'une multiplicité intégrale d'ordre $m - 1$, non composée de caractéristiques.

Remarque. — Les conclusions qui précèdent ne s'appliquent pas aux intégrales, dites singulières, qui ne rentrent pas dans le type général (*Voir* Chap. IV).

18. Application aux équations aux dérivées partielles. — Les propositions précédentes généralisent la méthode d'intégration de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Inversement cette méthode s'en déduit très facilement comme cas particulier. En effet, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\,;\, p_2, \ldots, p_n) \tag{20}$$

revient à la recherche des multiplicités intégrales à n dimensions de l'équation de Pfaff

$$\omega = f dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - dz = 0. \tag{21}$$

Le covariant bilinéaire ω' a pour expression

$$\begin{aligned}\omega' = \delta f dx_1 - df \delta x_1 + \delta p_2 dx_2 - dp_2 \delta x_2 +\\ \ldots + \delta p_n dx_n - dp_n \delta x_n\,;\end{aligned}$$

pour avoir les équations différentielles du système caractéristique S_1, il n'y a qu'a remplacer dz et δz par $f dx_1 + \ldots + p_n dx_n$, $f\delta x_1 + \ldots + p_n \delta x_n$ respectivement dans ω', et à égaler à zéro les cœfficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta p_2, \ldots \delta p_n$. On obtient ainsi un système de $2n - 1$ équations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} & dx_2 = -\frac{\partial f}{\partial p_2} dx_1, \ \ldots, \ dx_n = -\frac{\partial f}{\partial p_n} dx_1, \\ & dp_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z} p_2\right) dx_1, \ldots, dp_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n\right) dx_1, \\ & dz = \left\{ f - p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} - \ldots - p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} \right\} dx_1. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

L'équation $\omega = 0$ admet donc des caractéristiques à une dimension ; de tout élément de l'espace dont les coordonnées vérifient la relation (20) part une de ces caractéristiques et une seule en général. Le lieu des multiplicités caractéristiques issues de tous les points d'une intégrale M est encore une intégrale. En particulier, toute intégrale M_n est le lieu des caractéristiques issues de tous les points d'une intégrale M_{n-1}. La méthode de Cauchy se trouve ainsi rattachée à la proposition plus générale du n° **17**, qui s'applique à toutes les équations de Pfaff admettant des multiplicités caractéristiques.

Then in this M_{n-1} which is an integral

Quand on applique à l'équation (21) la méthode de Pfaff sous sa forme primitive, il semble qu'elle exige non seulement l'intégration du système (22), mais aussi l'intégration de plusieurs autres systèmes d'équations différentielles d'ordre $2n - 2$, $2n - 3$, ..., successivement. C'est là une infériorité apparente de la méthode de Pfaff, mais il suffit, comme l'a montré G. Darboux, (*voir* n° **10**) de diriger convenablement les calculs, pour retrouver les résultats de Cauchy. Soient $X_2, \ldots, X_n, Z, P_2, \ldots, P_n$ les intégrales principales du système (22), c'est-à-dire celles qui se réduisent respectivement à $x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n$ pour $x_1 = x_1^0$; prenons pour nouvelles variables x_1 et ces intégrales principales. Dans les formules de transformation

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= F_2(x_1, x_1^0, X_2, \ldots, P_n), \ldots, x_n = F_n(x_1, x_1^0, X_2, \ldots, P_n), \\ p_2 &= \Phi_2(x_1, x_1^0, X_2, \ldots, P_n), \ldots, p_n = \Phi_n(x_1, x_1^0, X_2, \ldots, P_n), \\ z &= \Psi(x_1, x_1^0, X_2, \ldots, P_n), \end{aligned} \right.$$

les seconds membres représentent précisément les solutions des équations différentielles (22) qui, pour $x_1 = x_1^0$, prennent les valeurs $X_2, \ldots, X_n, P_2, \ldots, P_n$, Z respectivement. Après le changement de variables (23), l'équation $\omega = 0$ se change en une équation où ne figurent que les variables caractéristiques $X_2, \ldots, P_n$, Z, et leurs différentielles. On a donc une identité de la forme

$$\omega = K\,[U_2 dX_2 + \ldots + U_n dX_n + V_2 dP_2 + \ldots + V_n dP_n + H dZ],$$

les fonctions U_i, V_i, H ne dépendant que des variables X_i, P_k, Z. On peut encore supposer (n° **10**) que le facteur K se réduit à l'unité pour $x_1 = x_1^0$. En supposant $x_1 = x_1^0$ dans l'identité précédente, on en déduit que l'on a

$$U_i = P_i, \qquad V_i = 0, \qquad (i > 1), \qquad H = -1,$$

et l'équation $\omega = 0$ est ramenée à une forme canonique

$$(24)\qquad P_2 dX_2 + \ldots + P_n dX_n - dZ = 0,$$

après le premier changement de variables (23) qu'exige la méthode de Pfaff.

Observons en passant que la forme ω elle-même est de classe $2n$ si f contient la variable z, et de classe $2n - 1$ si f ne dépend pas de z.

Remarque. — On a supposé pour le raisonnement que l'équation aux dérivées partielles était résolue par rapport à l'une des dérivées partielles, mais les conclusions sont indépendantes de cette hypothèse. En effet, étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x_1, \ldots, x_n, z; p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

renfermant la dérivée p_1 par exemple, désignons par $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$ la fonction que l'on obtiendrait en résolvant cette équation par rapport à p_1. Si dans les équations du système caractéristique (22) on remplace les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial p_i}$ par leurs expressions tirées des équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial p_k} = 0,$$

on obtient un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} = \frac{-dp_k}{X_k + Z p_k},$$

$$X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad P_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \qquad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

qui, joint à la relation $F = 0$, est identique au système différentiel de Cauchy.

Lorsque F ne renferme aucune des dérivées p_i, on a à rechercher toutes les multiplicités intégrales de l'équation de Pfaff

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0,$$

dont tous les éléments vérifient la relation $F = 0$. De la relation $dF = 0$, on peut tirer l'expression de l'une des différentielles dx_i, dz au moyen des autres, et on est conduit à une équation de Pfaff de forme canonique.

19. Théorie de Lagrange. — La théorie de l'intégrale complète de Lagrange et la méthode de la variation des constantes se rattachent aussi très aisément à la méthode de Pfaff. Soit en effet $z = \Phi(x_1, \ldots x_n; a_1, \ldots, a_n)$ une intégrale dépendant de n constantes arbitraires de l'équation du premier ordre

$$p_1 = f(x_1, \ldots x_n, z; p_2, \ldots, p_n);$$

dans l'équation de Pfaff correspondante

$$\omega = dz - f dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

faisons le changement de variables défini par les formules

$$z = \Phi, \quad p_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \ldots, p_n = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n},$$

les nouvelles variables étant $x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n$. En tenant compte de la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = f\left(x_1, \ldots x_n, \Phi ; \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right),$$

cette équation prend la forme canonique

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} da_n = 0.$$

L'application de la méthode générale d'intégration d'une équation de Pfaff mise sous forme canonique conduit précisément à la méthode de la variation des constantes (*Leçons* n° **32**).

Les caractéristiques sont définies par les n relations

$$z = \Phi, \quad pi = \frac{\partial \Phi}{\partial xi}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + b_1 \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_{n-1}} + b_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0,$$

et dépendent des $2n-1$ constantes arbitraires $a_1 \ldots a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Plus généralement, si l'on connaît une intégrale complète définie par une équation de forme quelconque

$$V(x_1, \ldots x_n, z ; a_1, \ldots, a_n) = 0$$

d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre $F(x_1, \ldots, x_n, z ; p_1, \ldots, p_n) = 0$, l'équation de Pfaff correspondante prend la forme

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0,$$

quand on prend un nouveau système de $2n$ variables (xi, ak), en posant

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial xi} + pi \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(Cf. *Leçons n°* **38**).

On verra plus loin (Chap. IV) comment la seconde méthode de Jacobi se rattache à la méthode de réduction du n° **8** d'une forme de Pfaff.

20. Equations simultanées du premier ordre. — Considérons encore un système de r équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue,

$$(25)\quad \begin{cases} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, z\,;\, p_{r+1}, \ldots, p_n), \\ p_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n, z\,;\, p_{r+1}, \ldots, p_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_r = f_r(x_1, \ldots, x_n, z\,;\, p_{r+1}, \ldots, p_n)\,; \end{cases}$$

intégrer ce système revient à trouver toutes les multiplicités intégrales à n dimensions de l'équation de Pfaff à $2n+1-r$ variables

$$(26)\quad \begin{aligned} \omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_r dx_r + p_{r+1} dx_{r+1} + \ldots \\ + p_n dx_n - dz = 0. \end{aligned}$$

Le covariant bilinéaire a pour expression

$$\begin{aligned} \omega' = \delta f_1 dx_1 - df_1 \delta x_1 + \ldots + \delta f_r dx_r - df_r \delta x_r \\ + \{ \delta p_{r+1} dx_{r+1} - dp_{r+1} \delta x_{r+1} + \ldots + \delta p_n dx_n - dp_n \delta x_n \}; \end{aligned}$$

en remplaçant encore dz et δz par leurs expressions tirées des deux équations $\omega(d) = 0$, $\omega(\delta) = 0$, et en égalant à zéro les coefficients de $\delta x_1, \ldots \delta x_n, \delta p_{r+1}, \ldots, \delta p_n$, on obtient les équations différentielles des multiplicités caractéristiques de l'équation (26) :

$$(27)\quad \begin{cases} dx_{r+1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_{r+1}} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial p_{r+1}} dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_n} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial p_n} dx_r = 0, \\ dz = f_1 dx_1 + \ldots + f_r dx_r + p_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + p_n dx_n, \\ dp_{r+1} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} p_{r+1} \right) dx_1 + \ldots + \left(\dfrac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}} + \dfrac{\partial f_r}{\partial z} p_{r+1} \right) dx_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} p_n \right) dx_1 + \ldots + \left(\dfrac{\partial f_r}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f_r}{\partial z} p_n \right) dx_r, \\ df_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} dx_r + f_1 \left\{ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial z} dx_r \right\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ df_r = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} dx_r + f_r \left\{ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial z} dx_r \right\}. \end{cases}$$

Les $2n - 2r + 1$ premières équations de ce système sont toujours distinctes, et par suite la classe de l'équation $\omega = 0$ est au moins égale à $2n - 2r + 1$. Pour qu'elle soit égale à cette valeur minimum, il faut que les r dernières équations soient des conséquences des premières. Si donc on y remplace $dx_{r+1}, \ldots, dx_n$, dz, $dp_{r+1}, \ldots, dp_n$ par leurs valeurs tirées des premières équations, les relations que l'on obtient doivent être vérifiées, quels que soient $dx_1, \ldots, dx_r$. En faisant le calcul, on trouve les conditions

$$(28) \qquad [p_i - f_i, p_k - f_k] = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

le crochet $[u, v]$ ayant la signification habituelle :

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial u}{\partial p_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial z} p_i\right) - \frac{\partial v}{\partial p_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} p_i\right) \right\};$$

ces conditions (28) expriment précisément que le système (25) est un système en involution (*Leçons*, n° 58). Si elles sont remplies, la classe γ de l'équation de Pfaff (26) est égale à $2n - 2r + 1$, et les multiplicités intégrales d'ordre maximum sont définies par un système de $n - r + 1$ relations entre les variables caractéristiques. Ces multiplicités intégrales ont donc $2n - r + 1 - (n - r + 1) = n$ dimensions, tandis que les multiplicités caractéristiques ont r dimensions. Toute multiplicité intégrale d'ordre n est le lieu des multiplicités caractéristiques qui passent par les différents points d'une intégrale M_{n-r} de l'équation $\omega = 0$. Ces dernières multiplicités se déterminent sans aucune intégration, car il suffit d'adjoindre les r équations (25) aux équations qui déterminent une multiplicité intégrale quelconque à n dimensions de l'équation $p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n - dz = 0$.

La méthode d'intégration précédente conduit exactement aux mêmes calculs que la méthode générale de S. Lie (*Leçons*, Chap. IX), et l'interprétation est la même. En effet, en écrivant que $f(x_1, \ldots, x_n, z; p_{r+1}, \ldots, p_n)$ est une intégrale du système (27), on obtient les équations

$$(29) \qquad [p_1 - f_1, f] = 0, \ldots, [p_r - f_r, f] = 0.$$

On peut aussi démontrer, comme dans le cas d'une seule équation, qu'un changement de variables permet de ramener l'équation $\omega = 0$

à une forme canonique quand on a intégré le système (27). Soient en effet $X_{r+1}, \ldots, X_n, Z, P_{r+1}, \ldots, P_n$ les $2n - 2r + 1$ intégrales de ce système qui se réduisent respectivement à $x_{r+1}, \ldots, x_n, z$; $p_{r+1}, \ldots, p_n$ pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_r = x_r^0$. Quand on prend pour nouvelles variables

$$x_1, \ldots x_r, X_{r+1}, \ldots, X_n, Z, P_{r+1}, \ldots, P_n,$$

le raisonnement employé dans le cas de $r = 1$ s'applique sans modification, et la nouvelle expression de ω, après le changement de variables, est

$$\omega = K[P_{r+1}dX_{r+1} + \ldots + P_n dX_n - dZ] = 0. \tag{30}$$

L'équation $\omega = 0$ est donc ramenée à une forme canonique

$$dZ - P_{r+1}dX_{r+1} - \ldots - P_n dX_n = 0, \tag{31}$$

et on en déduirait aisément les résultats précédents.

Remarque. — Les propriétés de l'intégrale complète pourraient aussi se déduire très aisément de la méthode de Pfaff, comme pour une seule équation. Nous verrons au chapitre IV comment la seconde méthode de Jacobi se rattache à d'autres méthodes d'intégration de l'équation générale de Pfaff.

21. Remarques sur la méthode générale d'intégration. — Soit $\omega = 0$ une équation de Pfaff de classe $2m + 1$; si l'on connaît une famille d'intégrales, définies par m relations distinctes, telle qu'il en passe une par chaque point de l'espace, on peut en déduire l'intégrale générale de l'équation. Soient, en effet,

$$f_1 = C_1, \ldots, f_m = C_m$$

les relations qui définissent la famille d'intégrales considérée ; si l'on prend un nouveau système de variables, tel que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ fassent partie de ces nouvelles variables, l'équation $\omega = 0$ sera mise sous une forme canonique

$$\omega = F_1 df_1 + \ldots + F_m df_m = 0,$$

et par suite on pourra obtenir l'intégrale générale (n° **15-16**).

Ce résultat peut être généralisé. Etant donnée une équation de Pfaff $\omega = 0$ à n variables, supposons que l'on connaisse une famille d'intégrales à $n - r$ dimensions, telle qu'il passe une de ces intégrales par un point quelconque de l'espace. Ces intégrales sont définies par un système de r relations distinctes

$$f_1 = C_1, \ldots, f_r = C_r,$$

et l'on peut encore, par un changement de variables, ramener l'équation proposée à la forme

$$\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_r dx_r = 0\,;$$

les multiplicités intégrales connues M_{n-r} sont alors représentées par les r équations

$$x_1 = C_1,\ x_2 = C_2,\ \ldots,\ x_r = C_r.$$

Nous supposerons d'abord que les rapports

$$\frac{X_2}{X_1},\ \frac{X_3}{X_1},\ \ldots,\ \frac{X_r}{X_1}$$

forment avec $x_1, x_2, \ldots x_r$ un système de n fonctions distinctes, ce qui exige que $2r - 1$ soit au moins égal à n, et par suite $n - r \leqq \frac{n-1}{2}$. S'il en est ainsi, nous pouvons évidemment prendre $n - r$ de ces rapports pour les variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$, les autres rapports pouvant être des fonctions quelconques de $x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_n$.

Sur toute multiplicité intégrale M_h d'ordre h de l'équation $\omega = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont des fonctions de h variables indépendantes

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_h), \quad x_2 = \varphi_2, \ \ldots, \ x_r = \varphi_r\,;$$

en remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_r$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ dans l'équation de Pfaff, et en égalant à zéro les coefficients de $du_1, du_2, \ldots, du_h$, on obtient un système de h équations avec $n - r$ inconnues $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Ces équations sont compatibles, quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, pourvu que h soit inférieur ou au plus égal à $n - r$. Si $h = n - r$, $x_{r+1}, \ldots, x_n$ seront déterminées dès que l'on aura choisi les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$. Si $h < n - r$, les variables $x_{r+1}, \ldots, x_h$ devront vérifier h équations seulement, auxquelles on pourra adjoindre $n - r - h$ relations choisies arbitrairement. En résumé, dans l'hypothèse considérée, *on pourra déterminer, sans aucune intégration, toutes les multiplicités intégrales de l'équation de Pfaff, d'ordre inférieur ou au plus égal à* $n - r$.

Il n'en est plus de même lorsque les rapports $\frac{X_2}{X_1}, \ldots, \frac{X_r}{X_1}$ forment avec $x_1, x_2, \ldots, x_r$ un système de $r + s$ variables indépendantes ($r + s < n$). On peut supposer alors que ces rapports dépendent seulement des variables $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}$, et écrire l'équation

$$\omega = dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_r dx_r = 0,$$

s des coefficients φ_i étant égaux aux variables $x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}$. L'équation $\omega = 0$ étant mise sous forme canonique, il y figure seulement γ variables canoniques $y_1, y_2, \ldots, y_\gamma$, qui peuvent s'exprimer au moyen de $x_1, \ldots, x_{r+s}$,

$$y_1 = P_1(x_1, \ldots, x_{r+s}), \ldots y_\gamma = P_\gamma(x_1, \ldots, x_{r+s}), \qquad \gamma \leqq r+s,$$

et les relations

$$P_1(x_1, \ldots, x_{r+s}) = C_1, \ldots, P_\gamma(x_1, \ldots, x_{r+s}) = C_\gamma$$

représentent des multiplicités caractéristiques à $n - \gamma$ dimensions de l'équation $\omega = 0$.

Soit M_{n-r} l'intégrale à $n-r$ dimensions représentée par les relations

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_r = x_r^0,$$

et M_{n-r-s} la multiplicité à $n-r-s$ dimensions située sur la précédente, dont on obtient les équations en adjoignant aux précédentes les s équations

$$x_{r+1} = x^0_{r+1}, \ldots, x_{r+s} = x^0_{r+s}.$$

Cette multiplicité M_{n-r-s} est située sur la multiplicité caractéristique définie par les relations

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r+s}) = P_i(x_1^0, \ldots, x^0_{r+s}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \gamma),$$

et la multiplicité intégrale M_{n-r} considérée a donc en commun une multiplicité M_{n-r-s} avec la multiplicité caractéristique issue d'un quelconque de ses points. C'est donc un lieu de multiplicités à $n-r-s$ dimensions dont chacune fait partie d'une multiplicité caractéristique. Les multiplicités intégrales M_{n-r} de cette espèce ne sont donc pas les plus générales parmi les multiplicités intégrales à $n-r$ dimensions, et le résultat obtenu dans la première hypothèse peut s'énoncer comme il suit

Soit $\omega = 0$ une équation de Pfaff à n variables, dont on connaît une famille d'intégrales M_{n-r} à $n-r$ dimensions. Si M_{n-r} n'a aucune multiplicité commune avec la multiplicité caractéristique issue de l'un quelconque de ses points, on peut obtenir sans aucune intégration toutes les intégrales de l'équation $\omega = 0$ ayant au plus $n-r$ dimensions.

Cette proposition généralise une propriété évidente de l'équation

$$dz - f dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = 0,$$

à $2n$ variables $(x_1, \ldots x_n; z, p_2, \ldots, p_n)$; on connaît *a priori* une famille d'intégrales à $n-1$ dimensions, définie par les relations

$$x_1 = C_1, \quad x_2 = C_2, \ldots, x_n = C_n, \quad z = C_{n+1},$$

qui n'est pas composée de caractéristiques ; on peut donc obtenir sans intégration toutes les intégrales ayant au plus $n-1$ dimensions. On peut faire la même remarque pour l'équation (26) à laquelle conduit le problème de l'intégration d'un système d'équation aux dérivées partielles du premier ordre.

De même, si l'on connaît une famille de courbes intégrales, l'équation de Pfaff peut être ramenée à ne contenir que $n-1$ différentielles :

$$\omega = X_1 dx_1 + \ldots + X_{n-1} dx_{n-1} = 0\,;$$

si les rapports $\frac{X_i}{X_k}$ dépendent d'une autre variable x_n, on pourra obtenir sans aucune intégration toutes les autres intégrales à *une* dimension de l'équation de Pfaff. Il n'en est plus de même si les rapports $\frac{X_i}{X_k}$ ne dépendent que des $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; dans ce cas, les courbes intégrales $x_1 = C_1, \ldots, x_{n-1} = C_{n-1}$ sont situées sur des multiplicités caractéristiques.

Lorsque la somme $r+s$ est inférieure à n, la conclusion précédente ne s'applique plus, mais l'intégration de l'équation $\omega = 0$ est ramenée dans ce cas à l'intégration d'une équation à un nombre de variables inférieur à n. Il y a donc une simplification du problème. Si le nombre s a sa valeur maximum $r-1$, l'équation est ramenée à une forme canonique, et l'intégration est immédiate. Si s est inférieur à $r-1$, on peut encore, en opérant comme tout à l'heure, trouver toutes les intégrales à s dimensions au plus dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_{r+s})$, et il leur correspond des intégrales à $n-r$ dimensions au plus dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La méthode fournit donc de nouvelles intégrales, sauf dans le cas où s est nul. L'équation $\omega = 0$ ne renferme alors que les r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

CHAPITRE III

FORMES SYMBOLIQUES DE DIFFÉRENTIELLES [1]

22. Définitions et notations. — La théorie des formes linéaires de différentielles peut être généralisée de plusieurs façons. On peut tout d'abord, en restant au point de vue purement *algébrique*, considérer des formes d'un degré supérieur par rapport aux différentielles, par exemple des formes quadratiques

$$\sum A_{ik} dx_i dx_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

comme celles qui interviennent dans l'étude de la déformation des surfaces, ou du problème analogue pour les variétés d'ordre quelconque dans un espace à n dimensions. Ces formes sont de véritables formes algébriques par rapport aux différentielles ; quand on effectue un changement de variables

$$(1) \qquad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant les nouvelles variables, on doit remplacer dans la forme quadratique chaque facteur dx_i par

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} dy_n,$$

et appliquer ensuite les règles ordinaires de la multiplication algébrique à chacun des produits $dx_i dx_k$.

Mais on peut se placer à un autre point de vue. Si ω est une

[1] Auteurs à consulter :

H. Poincaré. *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste (tome III) ; Sur les résidus des intégrales doubles (Acta Mathematica, tome IX) ; Analysis situs (Journal de l'Ecole Polytechnique, 1895).*

E. Cartan. *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales de l'Ecole Normale, 3e série, t. XVI, 1899).*

E. Goursat. *Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales et sur une généralisation du problème de Pfaff (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VII, 1915).*

Burali-Forti. *Introduction à la géométrie différentielle, suivant la méthode de Grassmann (Gauthier-Villars, 1898).*

forme de Pfaff, $I = \int_C \omega$ représente une intégrale curviligne étendue à une courbe C de l'espace à n dimensions. Si, au lieu d'une intégrale curviligne, on considère des intégrales étendues à des multiplicités à un nombre quelconque p de dimensions de l'espace à n dimensions, on les représente par des symboles où figurent sous le signe d'intégration des sommes d'expressions telles que

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p, \qquad (p \leqslant n)$$

et le produit $dx_1 dx_2, \ldots dx_p$ n'est plus un produit algébrique au sens propre du mot, mais un *produit symbolique* pour lequel les règles du calcul sont toutes différentes des règles ordinaires du calcul algébrique. Ces règles, que nous allons rappeler, se déduisent naturellement de la signification attribuée à ces produits symboliques.

Considérons d'abord, dans l'espace à trois dimensions, une intégrale de surface $I = \int\int_{(\Sigma)} A(x, y, z)\, dxdy$ étendue à un côté déterminé d'une portion de surface Σ, telle que les coordonnées d'un de ses points s'expriment en fonction de deux paramètres (u, v). Soit R la région du plan (u, v) qui correspond point par point à la portion de surface Σ ; l'intégrale de surface I est égale à l'intégrale double ordinaire

$$I = \int\int_{(R)} A(x, y, z) \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, dudv,$$

étendue à la région R. Il résulte immédiatement de cette nouvelle expression de l'intégrale qu'elle change de signe quand on permute x et y, puisque $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(y, x)}{D(u, v)} = 0$. On a donc :

$$\int\int_{(\Sigma)} A dxdy + \int\int_{(\Sigma)} A dydx = 0,$$

les deux intégrales étant étendues au même côté de Σ ; ce que l'on peut écrire sous forme abrégée

$$(2) \qquad dxdy = - dydx.$$

Le produit symbolique $dxdy$ change donc de signe quand on permute les deux facteurs.

Cette règle d'apparence paradoxale est, comme on le voit, une conséquence de la signification même du produit $dxdy$. D'une façon générale, si l'on adoptait la notation ab pour représenter le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, il est clair que l'on aurait $ab + ba = 0$.

Considérons maintenant une variété E_p à p dimensions de l'espace à n dimensions, et soit

$$I = \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_p$$

une intégrale multiple d'ordre p étendue à cette variété (pour simplifier les notations, nous n'écrirons qu'un seul signe $\int$, ce qui ne peut entraîner aucune ambiguïté).

Supposons que les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point de E_p s'expriment au moyen de p paramètres indépendants $u_1, u_2, \ldots, u_p$, de telle façon que la variété E_p corresponde point par point à un certain domaine R_p de l'espace à p dimensions $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. L'intégrale I est égale à une intégrale multiple ordinaire étendue au domaine R_p,

$$I = \int F \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)} du_1 du_2 \ldots du_p,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ doivent être remplacées dans F par leurs expressions au moyen de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ [1]. Quand on échange deux facteurs consécutifs dans le produit $dx_1 dx_2 \ldots dx_p$, on voit encore que ce produit change de signe et, par conséquent, quand on permute d'une façon quelconque les facteurs du produit symbolique *$dx_1 dx_2 \ldots dx_p$, ce produit ne change pas de signe ou change de*

[1] Quand on permute les variables auxiliaires u_i, le déterminant peut changer de signe, les deux signes possibles correspondant aux deux côtés d'une surface dans l'espace à trois dimensions. Nous supposerons que cet ordre a été fixé une fois pour toutes.

Pour tout ce qui concerne les propriétés des intégrales multiples d'ordre quelconque dans l'espace à n dimensions, je renverrai le lecteur aux Mémoires cités plus haut de Poincaré.

signe, suivant que cette permutation peut être obtenue par un nombre pair ou un nombre impair d'échanges entre deux facteurs consécutifs.

Tout ceci s'étend évidemment à tout produit symbolique de la forme

$$\mathrm{F}dx_{\alpha_1}dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}, \tag{3}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant p nombres entiers *différents*, pris parmi les n premiers nombres, si on n'étudie que des intégrales dans l'espace à n dimensions. Si l'on range ces indices dans un autre ordre $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$, le nouveau produit symbolique

$$\mathrm{F}dx_{\alpha'_1}\,dx_{\alpha'_2}\ldots dx_{\alpha'_p}$$

est égal au premier, ou égal au premier changé de signe, *suivant que les deux permutations* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ *sont de même classe ou de classes différentes.*

Il résulte aussi de la définition que *tout produit symbolique* (3), *où deux indices sont égaux, est identiquement nul*, car le déterminant fonctionnel

$$\frac{\mathrm{D}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_p)}$$

a deux lignes identiques.

Les expressions symboliques telles que (3) seront appelées des expressions *monomes*; F est le *coefficient*, $dx_{\alpha_1}dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}$ est l'analogue de la partie littérale dans un monome algébrique ordinaire.

Plus généralement, toute intégrale étendue à une variété d'ordre p de l'espace à n dimensions est représentée par la notation

$$\mathrm{I} = \int \omega,$$

où ω est une expression de la forme

$$\omega = \sum \mathrm{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}dx_{\alpha_1}dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}, \tag{4}$$

les coefficients $\mathrm{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ étant des fonctions des n variables

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ et la sommation étant étendue à *toutes les combinaisons* des n indices p à p. Nous dirons que ω est une *forme symbolique de différentielles de degré* p.

Il est clair que le degré d'une forme symbolique ne peut dépasser le nombre n des variables, et que toute forme symbolique de degré n se réduit à un seul terme

$$F dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

On peut supposer par exemple que, dans chaque combinaison, les indices sont rangés par ordre de grandeur croissante, mais cela n'est pas nécessaire. Quand on est amené à changer l'ordre des facteurs dans un produit symbolique tel que $dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$, le coefficient correspondant doit être changé de signe si la permutation change de classe. A chaque combinaison d'indices p à p, correspondent donc $p!$ fonctions $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ qui ne peuvent différer que par le signe, deux fonctions $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ et $A_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p}$ étant égales si les deux permutations $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ et $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ sont de même classe, et de signes différents si les deux permutations sont de classes différentes.

Cette remarque trouve son application dans la réduction des *termes semblables*, c'est-à-dire des termes où figurent les mêmes différentielles, à l'ordre près. On peut toujours ramener les termes semblables à contenir les différentielles écrites dans le même ordre, en changeant, s'il est nécessaire, le signe de certains coefficients. Cela fait, on peut ensuite remplacer tous les termes semblables par un seul, dont le coefficient est égal à la somme des coefficients de tous ces termes semblables. Par exemple, on a

$$A dx dy dz + B dy dz dx + C dx dz dy = (A + B - C) dx dy dz.$$

La somme d'un nombre quelconque de formes symboliques de degré p est une forme symbolique du même degré dans laquelle on pourra réduire tous les termes semblables à un seul, en appliquant la règle précédente (¹).

Remarque. — On pourrait ainsi convenir que, dans le second membre de la formule (4), la sommation est étendue à tous les

(¹) Une forme est identiquement nulle lorsque, après réduction des termes semblables, tous les coefficients sont nuls.

arrangements p à p des n indices, en tenant compte des relations qui existent entre les coefficients correspondant à une même combinaison. Il est alors entendu que chaque produit

$$dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}$$

est mis à la place de

$$\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 du_2 \dots du_p,$$

$u_1, u_2, \dots, u_p$ étant p paramètres auxiliaires. La somme des termes qui se déduisent de l'un d'entre eux par une permutation dans l'ordre des indices est bien égale au produit

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p})}{D(u_1, u_2, \dots, u_p)} du_1 du_2 \dots du_p.$$

On se sert aussi quelquefois de p systèmes différents de différentielles, chacun d'eux correspondant à une des variables auxiliaires. Par exemple, une forme du second degré

$$\omega = \sum A'_{ik} dx_i dx_k$$

s'écrira aussi, avec deux systèmes de différentielles,

$$\omega = \sum A_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des n indices deux à deux.

23. Changement de variables. — Considérons d'abord le produit symbolique $dx_1 dx_2$, et cherchons par quelle forme symbolique on doit le remplacer quand on remplace les variables x_i par de nouvelles variables y_i liées aux premières par les relations (1).

Si les nouvelles variables y_i sont remplacées par des fonctions de deux paramètres auxiliaires u, v, les variables x_i se changent aussi en des fonctions de ces paramètres, et le produit $dx_1 dx_2$ doit être remplacé dans tous les calculs par $\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} du dv$. Mais on a, d'après les formules classiques du changement de variables dans les déterminants fonctionnels,

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} = \sum_{i, k} \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_i, y_k)} \frac{D(y_i, y_k)}{D(u, v)},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices i, k, qui peuvent varier de 1 à n. Cette formule peut encore s'écrire, en multipliant les deux membres par $dudv$, et remplaçant $\frac{D(y_i, y_k)}{D(u, v)} dudv$ par $dy_i dy_k$,

$$dx_1 dx_2 = \sum_{i, k} \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_i, y_k)} dy_i dy_k.$$

C'est le résultat que l'on obtiendrait en effectuant le produit des deux différentielles dx_1 et dx_2,

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} dy_n\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} dy_n\right),$$

suivant les règles habituelles du calcul algébrique en ayant bien soin d'écrire dans chaque produit partiel les facteurs dy_i *dans l'ordre même où ils se présentent*, puis en tenant compte des règles spéciales au calcul symbolique, c'est-à-dire des égalités

$$dy_i dy_i = 0, \qquad dy_i dy_k + dy_k dy_i = 0.$$

Il est clair en effet que, dans ce produit, il y a un terme en $dy_i dy_k$ qui a pour coefficient $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_k}$ et un terme en $dy_k dy_i$ qui a pour coefficient $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_k} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}$. La somme de ces deux termes est bien égale à

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_i, y_k)} dy_i dy_k.$$

Le raisonnement est général. D'après les formules du changement de variables, on a

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)} = \sum_{i, k, \ldots, l} \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{D(y_i, y_k, \ldots, y_l)} \frac{D(y_i, y_k, \ldots, y_l)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des n indices p à p. En multipliant les deux membres de cette relation par $du_1 du_2 \dots du_p$, elle devient

$$(5) \qquad dx_1 dx_2 \dots dx_p = \sum_{i, k, \dots, l} \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}{D(y_i, y_k, \dots, y_l)} dy_i dy_k \dots dy_l.$$

C'est encore le résultat que l'on obtiendrait en effectuant le produit des p différentielles

$$dx_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} dy_n,$$
$$dx_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} dy_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$dx_p = \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_n} dy_n$$

d'après les règles ordinaires du calcul algébrique, en ayant soin d'écrire les facteurs dy_i de chaque produit partiel dans l'ordre où ils se présentent, et en n'écrivant pas les produits partiels où figureraient deux facteurs dy_i égaux, puis en réduisant les termes semblables comme on l'a expliqué au numéro précédent.

La méthode est la même pour une forme quelconque de degré p. Il suffit d'appliquer la règle à chacun des monomes, puis de réduire les termes semblables.

24. Produits symboliques. — Considérons d'abord deux formes symboliques réduites à deux monomes

$$\omega_p = A dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}, \qquad \omega_q = B dx_{\beta_1} dx_{\beta_2} \dots dx_{\beta_q}$$

de degrés p et q respectivement. Nous appellerons *produit symbolique* des deux monomes ω_p, ω_q, et nous représenterons par $\omega_p \omega_q$ le monome

$$\omega_p \omega_q = AB dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p} dx_{\beta_1} \dots dx_{\beta_q}$$

obtenu en prenant pour coefficient le produit AB des deux coefficients, et en écrivant dans leur ordre tous les facteurs dx_i de ω_q à la suite des facteurs de ω_p.

Il est clair que ce produit $\omega_p \omega_q$ sera identiquement nul, si l'une des différentielles dx_i figure dans les deux monomes ω_p, ω_q, et dans ce cas seulement.

Considérons maintenant deux formes quelconques, de degrés p et q respectivement,

$$\omega_p = \sum A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

$$\omega_q = \sum B_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_q} dx_{\beta_1} dx_{\beta_2} \ldots dx_{\beta_q},$$

et imaginons qu'on effectue successivement le produit de chacun des monomes de ω_p par chacun des monones de ω_q d'après la règle précédente, puis qu'on fasse la somme de tous les monomes obtenus, en réduisant les termes semblables. La nouvelle forme ainsi obtenue est par définition le *produit symbolique* des deux formes ω_p, ω_q, et se représente par $\omega_p\omega_q$,

$$\omega_p\omega_q = \sum A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p} B_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_q} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p} dx_{\beta_1} \ldots dx_{\beta_q}.$$

Il est clair que ce produit symbolique est de degré $p + q$; on aura donc $\omega_p\omega_q = 0$, si la somme $p + q$ est supérieure à n, puisqu'il n'y a que n facteurs dx_i différents.

La multiplication symbolique est évidemment une opération *distributive* ; on a

$$\omega_1(\omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_k) = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \ldots + \omega_1\omega_k,$$

$$(\omega_1 + \omega_2)(\omega_3 + \omega_4) = \omega_1\omega_3 + \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3 + \omega_2\omega_4.$$

Mais l'opération n'est pas *commutative*. Quand on échange les deux facteurs ω_p, ω_q du produit symbolique, on voit facilement que chacun des monomes de ce produit est multiplié par $(-1)^{pq}$; on a donc

(6) $$\omega_p\omega_q = (-1)^{pq}\omega_q\omega_p.$$

Si les deux nombres p et q sont impairs, on a

(6)' $$\omega_p\omega_q + \omega_q\omega_p = 0 ;$$

si l'un des nombres p ou q est pair, on a, au contraire,

(6)'' $$\omega_p\omega_q = \omega_q\omega_p.$$

Supposons en particulier $\omega_q = \omega_p$; si p est impair, la relation (6)' prouve que le produit $\omega_p . \omega_p = (\omega_p)^2$ est nul. *Le carré d'une forme* *symbolique de degré impair est donc toujours nul identiquement.*

Le produit symbolique d'un nombre quelconque de formes symboliques ω_p, ω_q, ω_r, ... se définit de proche en proche comme le produit algébrique d'un nombre quelconque de facteurs. Par exemple le produit $\omega_p\omega_q\omega_r$ s'obtient en effectuant d'abord le produit symbolique $\omega_p\omega_q$, et en multipliant ensuite ce produit par ω_r. Il est clair qu'il faut ici tenir compte de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs, à moins que tous ces facteurs ne soient de degré pair. Supposons que, dans le produit symbolique

$$\omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_m,$$

nous intervertissions deux facteurs ω_μ, ω_ν, de degrés p et q respectivement, séparés par plusieurs autres facteurs dont la somme des degrés est égale à r, r étant nul si les deux facteurs ω_μ, ω_ν sont consécutifs. Pour faire cette opération, on peut faire passer ω_ν devant ω_μ, puis faire passer ω_μ à la suite des autres facteurs qui séparaient ω_μ et ω_ν. Il est clair que cette opération revient à faire une certaine substitution sur les rangs des différentielles d'un quelconque des monomes qui figurent dans le produit symbolique.

Pour faire passer ω_ν devant ω_μ, on a à effectuer en tout $q(p+r)$ échanges entre deux facteurs dx_i consécutifs dans chacun de ces monomes ; pour faire passer ensuite ω_μ à la suite des facteurs qui précédaient ω_ν, il faut faire de nouveau pr échanges de deux facteurs dx_i consécutifs. Le produit symbolique est donc multiplié par

$$(-1)^{q(p+r)+pr} = (-1)^{qp+r(p+q)} ;$$

s'il n'y a pas plus d'un facteur de degré impair dans le produit symbolique, un seul des trois nombres $p+q$, pq, r peut être impair, et le nombre $pq + r(p+q)$ est toujours pair. Dans ce cas, le produit symbolique est indépendant de l'ordre des facteurs.

Si les deux nombres p et q sont de même parité, $p+q$ est pair, et pq est pair ou impair suivant que p et q sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Donc, *quand on échange deux facteurs* *dont les degrés sont de même parité dans un produit symbolique, ce produit ne change pas si ces facteurs sont tous les deux de degré pair, et il change de signe s'ils sont tous les deux de degré impair.*

Il en résulte que *tout produit symbolique, qui renferme deux facteurs identiques de degré impair, est identiquement nul.* Car ce produit doit changer de signe quand on échange ces deux facteurs.

La puissance $m^{\text{ième}}$ symbolique d'une forme ω est le produit symbolique de m facteurs identiques à ω. *Toute puissance d'une forme de degré impair est*, d'après ce qu'on vient de voir, *identiquement nulle.* Il n'en est pas de même en général des puissances d'une forme de degré pair. Supposons ω écrit sous la forme

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m,$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ étant des monomes. Comme le carré d'un monome est toujours nul, on a

$$\omega^2 = 2(\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \ldots + \omega_1\omega_m + \omega_2\omega_3 + \ldots + \omega_{m-1}\omega_m),$$

car le produit de deux monomes de degré pair est indépendant de l'ordre des facteurs. On a de même

$$\omega^3 = 2.3(\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_4 + \ldots + \omega_{m-2}\omega_{m-1}\omega_m),$$

et d'une manière générale. ω^p s'obtient en multipliant par $p\,!$ la somme de tous les produits p à p des r monomes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$.

Pour justifier la définition d'un produit symbolique de plusieurs formes, il est essentiel de démontrer que cette définition est indépendante du choix des variables indépendantes. En termes plus précis, soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ plusieurs formes et ω leur produit symbolique. Si l'on fait un changement de variables quelconque, les formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ se changent en de nouvelles formes $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ ϖ_m, ω se change en ϖ, et l'on a encore entre ces formes la relation

$$\varpi = \varpi_1\varpi_2 \ldots \varpi_m.$$

Cette propriété, qui joue un rôle capital dans la théorie des formes symboliques, est encore une conséquence des formules du changement de variables.

Pour simplifier l'écriture des formules, considérons d'abord deux formes monomes

$$\omega_1 = A dx_1 dx_2 dx_3, \qquad \omega_2 = B dx_4 dx_5,$$

et leur produit symbolique

$$\omega = \omega_1 \omega_2 = AB dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5,$$

les coefficients A et B étant fonctions de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En introduisant un nouveau système de variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ω_1 se change en une nouvelle forme

$$\varpi_1 = A \sum_{h,i,j} \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_h, y_i, y_j)} dy_h dy_i dy_j,$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons 3 à 3 des n indices ; ω_2 se change de même en une nouvelle forme

$$\varpi_2 = B \sum_{k,l} \frac{D(x_4, x_5)}{D(y_k, y_l)} dy_k dy_l,$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des n indices 2 à 2. Dans le produit symbolique

$$\varpi_1 \varpi_2 = AB \sum_{h,i,j} \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_h, y_i, y_j)} \sum_{k,l} \frac{D(x_4, x_5)}{D(y_k, y_l)} dy_h dy_i dy_j dy_k dy_l,$$

le produit $dy_h dy_i dy_j dy_k dy_l$ se présente évidemment plusieurs fois. Calculons par exemple le coefficient de $dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 dy_5$. Si nous posons pour abréger

$$(h, i, j) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_h, y_i, y_j)}, \qquad [k, l] = \frac{D(x_4, x_5)}{D(y_k, y_l)},$$

ce coefficient est égal, il est facile de le voir, au produit de AB par la somme

$$\begin{gathered}(1,2,3)[4,5] - (1,2,4)[3,5] + (1,2,5)[3,4] + (1,3,4)[2,5] \\ - (1,3,5)[2,4] + (1,4,5)[2,3] - (2,3,4)[1,5] + (2,3,5)[1,4] \\ - (2,4,5)[1,3] + (3,4,5)[1,2].\end{gathered}$$

Or cette somme est égale, d'après une propriété connue des déterminants, au déterminant

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)},$$

et on démontrerait de même que, quelle que soit la combinaison d'indices (h, i, j, k, l), le coefficient de $dy_h dy_i dy_j dy_k dy_l$ dans le produit symbolique $\varpi_1\varpi_2$ est égal à

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{D(y_h, y_i, y_j, y_k, y_l)}.$$

On a donc pour ce produit symbolique l'expression

$$\varpi_1\varpi_2 = AB \sum_{h,i,j,k,l} \frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{D(y_h, y_i, y_j, y_k, y_l)} dy_h dy_i dy_j dy_k dy_l.$$

Or le second membre n'est autre que la forme symbolique ϖ déduite du produit $\omega = \omega_1\omega_2$ par l'introduction du nouveau système de variables. On a donc bien

$$\varpi = \varpi_1\varpi_2.$$

et la démonstration s'étend évidemment au produit de deux monomes de degré quelconque. Si les deux monomes ω_1, ω_2 ont une différentielle commune dx_i, le produit ω est identiquement nul. Il en est évidemment de même du produit symbolique $\varpi_1\varpi_2$, qui contient deux facteurs identiques du premier degré.

Il est à remarquer que la règle du changement de variables (n° **23**) dans le monome $A dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}$ revient à effectuer le produit symbolique obtenu en remplaçant $dx_{\alpha_1}, \dots, dx_{\alpha_p}$ par leurs expressions développées.

Considérons maintenant deux formes quelconques

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m,$$
$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_r,$$

ω_i, Ω_k étant des monomes. On a

$$\omega\Omega = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \omega_i \Omega_k.$$

Soient $\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_m$, $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$, ce que deviennent les formes $\omega, \omega_1, \dots, \omega_m, \Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_r$ par l'introduction d'un nouveau système de variables ;

$$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2 + \dots + \varpi_m,$$
$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_r.$$

Le produit $\omega_i\Omega_k$ se change en $\varpi_i\Pi_k$, et par suite le produit $\omega\Omega$ se change en l'expression

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\varpi_i\Pi_k,$$

qui est identique au produit $(\varpi_1 + \ldots + \varpi_m)(\Pi_1 + \ldots + \Pi_r)$ des deux formes transformées. Le théorème est donc vrai pour le produit de deux formes quelconques. Par un raisonnement bien connu, on en conclut qu'il est vrai aussi pour le produit d'un nombre quelconque de formes.

Application. — Nous dirons que p formes *linéaires* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont indépendantes lorsqu'il n'existe aucun système de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, dont l'un au moins n'est pas nul, tel que l'on ait identiquement

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_p\omega_p = 0. \tag{7}$$

Pour que le produit symbolique de p formes linéaires soit nul, il faut et il suffit que ces p formes ne soient pas indépendantes.

1° *La condition est suffisante.* — Supposons en effet que les p formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ vérifient l'identité (7), le coefficient λ_p par exemple n'étant pas nul. On peut alors écrire cette relation

$$\omega_p = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \ldots + \mu_{p-1}\omega_{p-1},$$

et le produit

$$\omega_1\omega_2 \ldots \omega_p = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{p-1}(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \ldots + \mu_{p-1}\omega_{p-1})$$

est nul, car chaque produit partiel contient deux facteurs linéaires identiques.

2° *La condition est nécessaire.* — Supposons d'abord que l'on ait n formes linéairement distinctes

$$\omega_i = a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n, \qquad (i = 1, 2 \ldots n);$$

le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est alors différent de zéro. On vérifie aisément, d'après la règle de la multiplication symbolique, que l'on a

$$\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n = \Delta dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

et par suite le produit $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n$ n'est pas nul.

Si l'on a p formes linéaire $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ $(p < n)$ indépendantes, on peut toujours leur adjoindre $n - p$ autres formes $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ formant avec les premières un système de n formes linéairement distinctes. D'après ce que nous venons de voir, le produit $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n$ n'est pas identiquement nul. Il en est donc de même du produit $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_p$.

25. Diviseurs linéaires d'une forme. — Une forme symbolique Ω est dite *divisible* par une autre forme ω, s'il est possible de représenter la forme Ω par un produit symbolique dont ω est un des facteurs : $\Omega = \Omega_1\omega$; la forme ω est alors un *diviseur* de Ω. Il est toujours possible de reconnaître par des calculs linéaires si une forme donnée Ω est divisible par un autre forme donnée ω ; soient en effet p et $p - r$ les degrés de ces deux formes. La forme Ω_1 doit être de degré r, et les coefficients inconnus de cette forme doivent satisfaire à un certain nombre de relations linéaires que l'on obtient en écrivant que les coefficients des mêmes termes dans le produit symbolique $\Omega_1\omega$ et dans Ω sont identiques. Nous allons nous occuper en particulier de la recherche des diviseurs du premier degré d'une forme.

Pour que Ω soit divisible par une forme linéaire ω, il faut et il suffit que le produit $\Omega\omega$ soit identiquement nul.

Il est évident que la condition est *nécessaire*, car le produit symbolique $\Omega\omega$ contient alors deux facteurs identiques du premier degré. Pour démontrer que la condition est *suffisante*, supposons que ω contienne dx_n, de telle sorte que l'on puisse exprimer dx_n au moyen de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}, \omega$,

$$dx_n = \alpha\omega + \alpha_1 dx_1 + \ldots + \alpha_{n-1} dx_{n-1}, \qquad \alpha \neq 0.$$

La forme Ω peut alors s'exprimer au moyen de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$, ω et s'écrire

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2\omega,$$

Ω_1 et Ω_2 étant deux nouvelles formes qui ne renferment que

$dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$. Le produit $\Omega\omega = \Omega_1\omega$ ne peut être identiquement nul que si la forme Ω_1 est elle-même identiquement nulle. Soit en effet

$$A_{ik\ldots l}dx_i dx_k \ldots dx_l$$

un terme quelconque de Ω_1 ; le coefficient de $dx_i dx_k \ldots dx_l dx_n$ dans le produit symbolique $\Omega_1\omega$ est égal à $\dfrac{A_{ik\ldots l}}{\alpha}$, et par conséquent ce produit ne peut être nul que si tous les coefficients $A_{ik\ldots l}$ sont nuls. La forme Ω est donc égale au produit symbolique $\Omega_2\omega$.

Pour reconnaître si une forme Ω de degré p à n variables admet des diviseurs linéaires, on cherchera à déterminer n coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de telle façon que le produit

$$\Omega\omega = \Omega(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \ldots + \alpha_n dx_n)$$

soit identiquement nul. Comme ce produit est de degré $p+1$, on aura en tout $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}$ équations linéaires et homogènes pour déterminer les coefficients α_i. Si ces équations sont incompatibles, la forme Ω n'admet pas de diviseur linéaire. Lorsqu'elles sont compatibles, elles admettent r systèmes de solutions linéairement distinctes, et par suite la forme Ω admet r diviseurs du premier degré $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, linéairement indépendants.

La forme Ω est alors divisible par le produit symbolique $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_r$, ainsi qu'il résulte de la propriété suivante : *Si une forme Ω est divisible par k facteurs ($k \leqslant n$) du premier degré $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, linéairement distincts, elle est divisible par le produit $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k$.*

Il nous suffit évidemment de montrer que si le théorème est établi pour $k-1$ facteurs linéaires, il est vrai aussi pour k facteurs. Soient

$$\omega_i = \alpha_{i1}dx_1 + \ldots + \alpha_{in}dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

k formes linéaires indépendantes ; tous les déterminants d'ordre k déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \end{Vmatrix}$$

ne peuvent être nuls à la fois. Nous supposerons par exemple que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, de sorte que $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ peuvent s'exprimer linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$.

Soit maintenant Ω une forme telle que l'on ait à la fois

$$\Omega\omega_1 = 0, \quad \Omega\omega_2 = 0, \dots, \Omega\omega_k = 0\ ;$$

nous voulons démontrer que Ω est divisible par le produit symbolique $\omega_1\omega_2 \dots \omega_k$. Le théorème étant admis pour $k - 1$ facteurs, on a déjà

$$\Omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_{k-1}\Omega_1,$$

et la forme Ω_1 peut s'écrire à son tour

$$\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_3\omega_k + \Omega_4,$$

Ω_2 et Ω_3 ne contenant que les différentielles $dx_{k+1}, \dots, dx_n$, et un terme quelconque de Ω_4 étant divisible par une des formes $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}$. On a donc

$$\Omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_{k-1}(\Omega_2 + \Omega_3\omega_k),$$

$$\Omega\omega_k = \omega_1\omega_2 \dots \omega_{k-1}\Omega_2\omega_k.$$

Pour que $\Omega\omega_k$ soit identiquement nul, il est nécessaire que Ω_2 soit identiquement nul. Soit en effet

$$A_{ij\dots l}dx_i dx_j \dots dx_l$$

un terme quelconque de Ω_2, tous les indices $i, j, \dots, l$ étant supérieurs à k. Le coefficient de $dx_1 \dots dx_k dx_i dx_j \dots dx_l$ dans $\Omega\omega_k$ est au signe près $A_{ij\dots l}\Delta$; il faut donc que l'on ait $A_{ij\dots l} = 0$ pour toutes les combinaisons d'indices, et par suite on a

$$\Omega = \pm\, \Omega_3\omega_1\omega_2 \dots \omega_{k-1}\omega_k.$$

Il suit de là que, *si une forme Ω admet r diviseurs linéaires* *distincts et r seulement* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, *cette forme est égale à un produit symbolique de* $r + 1$ *facteurs*

$$\Omega = \Omega_1 \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r, \tag{8}$$

la forme Ω_1 *n'admettant plus de diviseur linéaire.*

Cette décomposition peut d'ailleurs être effectuée d'une infinité de manières. Si l'on pose en effet

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + \ldots + a_{1r}\omega_r,\\
\varpi_2 &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \ldots + a_{2r}\omega_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varpi_r &= a_{r1}\omega_1 + a_{r2}\omega_2 + \ldots + a_{rr}\omega_r,
\end{aligned}$$

le déterminant des coefficients a_{ik} n'étant pas nul, on a

$$\varpi_1\varpi_2\ldots\varpi_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \omega_1\omega_2\ldots\omega_r,$$

et Ω est aussi divisible par le produit $\varpi_1\varpi_2\ldots\varpi_r$.

Remarque. — Soit Ω une forme de degré $n - 1$ à n variables ; le produit symbolique $\Omega(\alpha_1 dx_1 + \ldots + \alpha_n dx_n)$ contient un seul terme en $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Ces coefficients α_i sont assujettis à vérifier une seule relation linéaire ; il y a donc $n - 1$ diviseurs du premier degré linéairement distincts et, par conséquent, *toute forme* Ω *de degré* $n - 1$ *à* n *variables peut être représentée par le produit symbolique de* $n - 1$ *facteurs linéaires* (Cf. n° **27**).

Exemple. — En dehors du cas que nous venons de citer, une forme symbolique quelconque n'admet pas en général de diviseur linéaire, si ses coefficients sont arbitraires.

Considérons par exemple une forme du second degré à quatre variables.

$$\Omega = A_{12}dx_1dx_2 + A_{13}dx_1dx_3 + A_{14}dx_1dx_4 + A_{23}dx_2dx_3 + A_{24}dx_2dx_4 + A_{34}dx_3dx_4 ;$$

le produit $\Omega(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 dx_4)$ développé est égal à

$$\begin{aligned}
&(A_{12}\alpha_3 - A_{13}\alpha_2 + A_{23}\alpha_1)dx_1dx_2dx_3\\
+ &(A_{12}\alpha_4 - A_{14}\alpha_2 + A_{24}\alpha_1)dx_1dx_2dx_4\\
+ &(A_{13}\alpha_4 - A_{14}\alpha_3 + A_{34}\alpha_1)dx_1dx_3dx_4\\
+ &(A_{23}\alpha_4 - A_{24}\alpha_3 + A_{34}\alpha_2)dx_2dx_3dx_4.
\end{aligned}$$

Pour que ce produit soit nul, les coefficients α_1, α_2, α_3, α_4 doivent vérifier les quatre relations

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_{23}\alpha_1 - A_{13}\alpha_2 + A_{12}\alpha_3 = 0, \\ A_{24}\alpha_1 - A_{14}\alpha_2 \qquad\qquad + A_{12}\alpha_4 = 0, \\ A_{34}\alpha_1 \qquad\qquad - A_{14}\alpha_3 + A_{13}\alpha_4 = 0, \\ \qquad\quad A_{34}\alpha_2 - A_{24}\alpha_3 + A_{23}\alpha_4 = 0. \end{array}\right.$$

Il faut donc que le déterminant symétrique gauche

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & -A_{13} & A_{23} \\ -A_{12} & 0 & A_{14} & -A_{24} \\ A_{13} & -A_{14} & 0 & A_{34} \\ -A_{23} & A_{24} & -A_{34} & 0 \end{vmatrix} = (A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23})^2$$

soit nul. S'il en est ainsi, les équations (9) se réduisent à deux équations distinctes, et la forme Ω admet deux diviseurs du premier degré linéairement distincts. Il était évident *a priori* que si Ω est divisible par un facteur linéaire, il en admet une infinité. Si l'on a mis Ω sous forme d'un produit symbolique

$$\Omega = \omega_1\omega_2,$$

on aura aussi

$$\Omega = (\lambda_1\omega_1 + \mu_1\omega_2)(\lambda_2\omega_1 + \mu_2\omega_2),$$

pourvu que les fonctions λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 vérifient la condition $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1$.

On verra plus loin (Chap. VII) que, par un changement de variables convenable, on peut ramener un système de deux équations de Pfaff à quatre variables à l'une des formes suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & dy_2 - y_3 dy_1 = 0, & dy_3 - y_4 dy_1 = 0, \\ \text{(II)} & dy_2 = 0, & dy_3 - y_4 dy_1 = 0, \\ \text{(III)} & dy_1 = 0, & dy_2 = 0. \end{array}$$

Lorsque le déterminant Δ est nul, la forme Ω peut donc être ramenée, par un changement de variables, à l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega &= K(dy_2 - y_3 dy_1)(dy_3 - y_4 dy_1), \\ \Omega &= K dy_2(dy_3 - y_4 dy_1), \\ \Omega &= K dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

26. Formes dérivées. — Soit

$$\omega = \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

une forme symbolique quelconque de degré p. On appelle *forme* *dérivée* de ω, et on représente par la lettre ω' la forme de degré $p+1$ définie par une somme de produits symboliques

$$\omega' = \sum dA_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}. \tag{10}$$

En remplaçant tous ces produits symboliques par leurs expressions développées, il vient

$$\omega' = \sum \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des n indices $p+1$ à $p+1$. Les coefficients de cette nouvelle forme ont deux expressions différentes suivant la parité de p. Si p est pair, on a

$$\begin{aligned}(11)\quad & \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}} \\ & = \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{A_{\alpha_2\ldots\alpha_p\alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1}\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}},\end{aligned}$$

avec des signes $+$ seulement dans le second membre. Si p est impair, on a

$$\begin{aligned}(12)\quad & \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}} \\ & = \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p\alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1}\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}},\end{aligned}$$

avec le signe $+$ et le signe — alternativement.

Si ω est une forme linéaire

$$\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n,$$

la forme dérivée ω' a pour expression

$$\omega' = \sum_{i,\ k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) dx_k dx_i,$$

ou, en remplaçant $dx_k dx_i$ par $dx_k \delta x_i - dx_i \delta x_k$, avec deux systèmes de différentielles (n° **22**)

$$\omega' = \sum_{i,\ k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) (dx_k \delta x_i - dx_i \delta x_k).$$

La forme dérivée ω' d'une forme de Pfaff est donc identique, au signe près, au covariant bilinéaire (n° **3**).

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les propriétés essentielles du covariant bilinéaire s'étendent à la forme dérivée d'une forme de degré quelconque. Nous allons d'abord démontrer que ω' est un *covariant* de ω, relativement à tout changement de variables. Si avec des variables nouvelles $y_1, y_2, \dots, y_n$, la forme ω se change en ϖ :

$$\varpi = \sum \mathrm{B}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p},$$

la forme ω' dérivée devient, avec les mêmes variables, la forme ϖ' dérivée de ϖ,

$$\varpi' = \sum d\mathrm{B}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p}.$$

Prenons, pour simplifier l'écriture, une forme du second degré, et soient

$$\omega = \sum_{i,\,k} \mathrm{A}_{ik} dx_i dx_k, \qquad \varpi = \sum_{i,\,k} \mathrm{B}_{ik} dy_i dy_k$$

deux formes symboliques qui se déduisent l'une de l'autre par un changement de variables $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Supposons que $y_1, y_2, \dots, y_n$, et par suite $x_1, x_2, \dots, x_n$ soient exprimées au moyen de trois paramètres auxiliaires u, v, w. Les formes ω et ϖ deviennent respectivement

$$\omega = \sum_{i,\,k} \mathrm{A}_{ik} \left\{ \frac{\mathrm{D}(x_i, x_k)}{\mathrm{D}(u, v)} du dv + \frac{\mathrm{D}(x_i, x_k)}{\mathrm{D}(v, w)} dv dw + \frac{\mathrm{D}(x_i, x_k)}{\mathrm{D}(w, u)} dw du \right\},$$

$$\varpi = \sum_{i,\,k} \mathrm{B}_{ik} \left\{ \frac{\mathrm{D}(y_i, y_k)}{\mathrm{D}(u, v)} du dv + \frac{\mathrm{D}(y_i, y_k)}{\mathrm{D}(v, w)} dv dw + \frac{\mathrm{D}(y_i, y_k)}{\mathrm{D}(w, u)} dw du \right\}.$$

En égalant les coefficients de $du dv$, $dv dw$, $dw du$ dans l'identité $\omega = \varpi$, on a donc les trois relations

$$\sum_{i,\,k} \mathrm{A}_{ik} \frac{\mathrm{D}(x_i, x_k)}{\mathrm{D}(u, v)} = \sum_{i,\,k} \mathrm{B}_{ik} \frac{\mathrm{D}(y_i, y_k)}{\mathrm{D}(u, v)},$$

$$\sum_{i,\,k} \mathrm{A}_{ik} \frac{\mathrm{D}(x_i, x_k)}{\mathrm{D}(v, w)} = \sum_{i,\,k} \mathrm{B}_{ik} \frac{\mathrm{D}(y_i, y_k)}{\mathrm{D}(v, w)},$$

$$\sum_{i,\,k} \mathrm{A}_{ik} \frac{\mathrm{D}(x_i, x_k)}{\mathrm{D}(w, u)} = \sum_{i,\,k} \mathrm{B}_{ik} \frac{\mathrm{D}(y_i, y_k)}{\mathrm{D}(w, u)}.$$

Différentions ces trois relations par rapport à w, u, v respectivement et ajoutons les relations obtenues ; en tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{D(f,g)}{D(u,v)}\right\}+\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{D(f,g)}{D(v,w)}\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{D(f,g)}{D(w,u)}\right\}=0,$$

il vient une nouvelle relation

$$\sum_{i,k,l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\left\{\frac{D(x_i,x_k)}{D(u,v)}\frac{\partial x_l}{\partial w}+\frac{D(x_i,x_k)}{D(v,w)}\frac{\partial x_l}{\partial u}+\frac{D(x_i,x_k)}{D(w,u)}\frac{\partial x^l}{\partial v}\right\}$$

$$=\sum_{i,k,l}\frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l}\left\{\frac{D(y_i,y_k)}{D(u,v)}\frac{\partial y_l}{\partial w}+\frac{D(y_i,y_k)}{D(v,w)}\frac{\partial y_l}{\partial u}+\frac{D(y_i,y_k)}{D(w,u)}\frac{\partial y_l}{\partial v}\right\},$$

ou plus simplement

$$\sum_{i,k,l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{D(x_i,x_k,x_l)}{D(u,v,w)}=\sum_{i,k,l}\frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l}\frac{D(y^i,y_k,y_l)}{D(u,v,w)}.$$

On peut encore écrire cette relation en multipliant les deux membres par $du\,dv\,dw$,

$$\sum_{i,k,l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}dx_i dx_k dx_l=\sum_{i,k,l}\frac{\partial A_{ik}}{\partial y_l}dy_i dy_k dy_l,$$

ou

$$(13)\qquad \sum_{i,k} dA_{ik}dx_i dx_k=\sum_{i,k} dB_{ik}dy_i dy_k.$$

Or les deux membres de cette identité sont précisément les formes dérivées ω' et ϖ' des deux formes ω et ϖ. La propriété énoncée est donc établie pour les formes du second degré, et la démonstration est la même pour les formes de degré quelconque.

Si une forme ω est la somme de plusieurs autres $\omega_1+\ldots+\omega_r$, il est évident que ω' est égale à la somme des dérivées $\omega'_1+\ldots+\omega'_r$. Cherchons de même la dérivée d'un produit $\omega=\omega_1\omega_2$, et considérons d'abord le cas où ω_1 et ω_2 sont deux monomes,

$$\omega_1=A\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_p},\qquad \omega_2=B\,dx_{\beta_1}\ldots dx_{\beta_q},$$

$$\omega=\omega_1\omega_2=AB\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_p}dx_{\beta_1}\ldots dx_{\beta_q}.$$

On a

$$\begin{aligned}\omega' = (\omega_1\omega_2)' &= (\mathrm{A}d\mathrm{B} + \mathrm{B}d\mathrm{A})dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}dx_{\beta_1} \dots dx_{\beta_q}\\ &= d\mathrm{A}dx_{\alpha_1}dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}(\mathrm{B}dx_{\beta_1} \dots dx_{\beta_q})\\ &\quad + (-1)^p\mathrm{A}dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}(d\mathrm{B}dx_{\beta_1} \dots dx_{\beta_q}),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(\omega_1\omega_2)' = \omega'_1\omega_2 + (-1)^p\omega_1\omega'_2.$$

En reprenant le raisonnement du n° **24**, on voit que la formule est vraie pour le produit de deux formes symboliques quelconques. Plus généralement, la dérivée d'un produit symbolique de m formes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ a pour expression

$$(14)\qquad (\omega_1\omega_2 \dots \omega_m)' = \omega'_1\omega_2 \dots \omega_m \pm \omega_1\omega'_2 \dots \omega_m \pm \dots \pm \omega_1 \dots \omega_{m-1}\omega'_m.$$

ce qui montre que la dérivée d'un produit est nulle, si chaque facteur a une dérivée nulle.

On a déjà observé (n° **3**) qu'une forme de Pfaff ω est une différentielle exacte lorsque la forme dérivée ω' est identiquement nulle, et dans ce cas seulement. Si on convient de regarder une fonction ordinaire des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme une forme *d'ordre zéro*, on peut dire que toute forme du premier ordre, dont la dérivée est nulle, est elle-même la forme dérivée d'une forme d'ordre zéro. La propriété précédente peut alors être considérée comme un cas particulier de la proposition générale suivante :

Pour qu'une forme ω de degré p soit la dérivée d'une forme de degré $p-1$, il faut et il suffit que la dérivée ω' soit identiquement nulle.

On peut vérifier immédiatement sur les expressions (11) et (12) des coefficients $\mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{p+1}}$ de ω' que la dérivée de ω' est identiquement nulle, c'est-à-dire que la forme que l'on déduit de ω' de la même façon que l'on déduit ω' de ω, a tous ses coefficients nuls. Mais on peut le voir plus simplement en observant que la forme dérivée d'un produit symbolique tel que

$$d\mathrm{A}dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}$$

est nulle, puisque tous les facteurs ont une forme dérivée identiquement nulle (formule 14). La condition énoncée est donc *nécessaire*.

Pour prouver qu'elle est suffisante, nous n'avons qu'à généraliser la démonstration du n° **3**, où le théorème énoncé a été établi pour les formes du second degré. Soit ω une forme de degré quelconque $p > 2$ dont la dérivée est identiquement nulle, c'est-à-dire dont les coefficients vérifient, suivant la parité de p, l'un des deux systèmes de relations

$$(15)\qquad \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1}\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

$$(16)\qquad \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1}\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

quelle que soit la combinaison d'indices $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1})$. Nous voulons démontrer qu'il existe une autre forme Ω de degré $p - 1$ (et même une infinité)

$$\Omega = \sum C_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

dont la forme dérivée Ω' est identique à ω.

Nous le démontrerons en supposant que p est un nombre pair ; la démonstration serait toute pareille pour p impair. Considérons d'abord une forme de degré p à $p + 1$ variables, que nous écrirons, en modifiant un peu les notations du cas général,

$$\omega = A_1 dx_2 \ldots dx_{p+1} + A_2 dx_3 \ldots dx_{p+1} dx_1 + \ldots + A_{p+1} dx_1 \ldots dx_p ;$$

la forme dérivée contient un seul terme qui est, p étant pair,

$$\omega' = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_{p+1}}{\partial x_{p+1}}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_{p+1},$$

et les conditions (15) se réduisent à une seule

$$(17)\qquad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_{p+1}}{\partial x_{p+1}} = 0.$$

Cette condition étant supposée vérifiée, soit Ω une forme de degré $p - 1$

$$\Omega = C_1 dx_2 \ldots dx_p + C_2 dx_3 \ldots dx_p dx_1 + \ldots + C_p dx_1 \ldots dx_{p-1},$$

où ne figure pas la différentielle dx_{p+1} ; on a, puisque $p - 1$ est impair,

$$\begin{aligned} \Omega' = \left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1} - \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \ldots - \frac{\partial C_p}{\partial x_p}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_p \\ - \frac{\partial C_1}{\partial x_{p+1}} dx_2 \ldots dx_p dx_{p+1} \\ + \frac{\partial C_2}{\partial x_{p+1}} dx_3 \ldots dx_{p+1} dx_1 - \ldots + \frac{\partial C_p}{\partial x_{p+1}} dx_{p+1} dx_1 \ldots dx_{p-1}. \end{aligned}$$

Pour que cette forme Ω' soit identique à ω, il faut que l'on ait

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial C_1}{\partial x_{p+1}} = -A_1, \frac{\partial C_2}{\partial x_{p+1}} = A_2, \ldots, \frac{\partial C_{p-1}}{\partial x_{p+1}} = -A_{p-1}, \frac{\partial C_p}{\partial x_{p+1}} = A_p, \\ &\frac{\partial C_1}{\partial x_1} - \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3} - \ldots - \frac{\partial C_p}{\partial x_p} = A_{p+1}. \end{aligned}\right.$$

On tire des p premières relations

$$C_1 = -\int_{\alpha_0}^{x_{p+1}} A_1 dx_{p+1} + U_1,$$

$$C_2 = \int_{\alpha_0}^{x_{p+1}} A_2 dx_{p+1} + U_2, \ldots, C_p = \int_{\alpha_0}^{x_{p+1}} A_p dx_{p+1} + U_p,$$

α_0 étant une constante choisie à volonté, et $U_1, U_2, \ldots, U_p$ *des fonctions arbitraires des p variables* $x_1, x_2, \ldots, x_p$. En remplaçant $C_1, C_2, \ldots, C_p$ par les expressions précédentes dans la dernière des relations (18), et en tenant compte de la condition (17) que vérifient les coefficients A_i, elle devient

$$(19)\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial U_p}{\partial x_p} + A_{p+1}(x_1, \ldots, x_p; \alpha_0) = 0.$$

On peut choisir arbitrairement $p - 1$ des fonctions U_i, et la dernière s'obtient par une quadrature.

La proposition est donc établie pour une forme de degré p à $p + 1$ variables. Pour prouver qu'elle est générale, il suffira donc de montrer que, si elle est vraie pour une forme de degré p à $n - 1$

variables, elle est encore vraie pour une forme de degré p à n variables.

Soit ω une forme de degré pair à p à n variables dont les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p}$ vérifient les relations (15) pour toutes les combinaisons d'indices p à p. Il s'agit de prouver qu'il existe une forme de degré $p-1$,

$$(20) \qquad \Omega = \sum C_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}},$$

telle que l'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices,

$$(21) \quad A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p} = \frac{\partial C_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} - \frac{\partial C_{\alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial C_{\alpha_p\alpha_1 \ldots \alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}.$$

Nous pouvons même supposer que la différentielle dx_n ne figure pas dans Ω, de telle sorte que tous les coefficients $C_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}$, où l'un des indices est égal à n, sont nuls.

En considérant les relations (21) où l'un des indices est égal à n, où l'on a par exemple $\alpha_p = n$, on en tire

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} n} = \frac{\partial C_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_n},$$

et par suite

$$C_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} = \int_{\alpha_0}^{x_n} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} n} dx_n + U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

α_0 étant une constante, et $U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ une fonction arbitraire des $n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Il reste à montrer que l'on peut choisir ces fonctions $U_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}$ de façon à satisfaire aux autres relations (21) où tous les indices sont inférieurs à n. Si, dans une de ces relations, on suppose tous les indices inférieurs à n, elle devient, en remplaçant les coefficients $C_{ij \ldots l}$ par les expressions précédentes

$$A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p} = \frac{\partial U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} - \frac{\partial U_{\alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial U_{\alpha_p\alpha_1 \ldots \alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{x_n} \left\{ \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} n}}{\partial x_{\alpha_p}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p n}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_p\alpha_1 \ldots \alpha_{p-2} n}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \right\} dx_n,$$

ou, en tenant compte de la condition (15), où les indices sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, n$,

$$A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \int_{\alpha_0}^{x_n} \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial U_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} - \frac{\partial U_{\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial U_{\alpha_p\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}.$$

On peut encore écrire cette condition

$$(22)\quad \left(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\right)_{x_n=\alpha_0} = \frac{\partial U_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} - \ldots - \frac{\partial U_{\alpha_p\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}},$$

et on a, pour déterminer les fonctions $U_{ij\ldots l}$, un système d'équations tout à fait pareilles aux équations (21), où x_n a été remplacé dans le premier membre par une constante α_0. Or, si l'on prend dans les conditions (15) le groupe formé par les conditions où ne figurent que les coefficients dont tous les indices sont inférieurs à n, ce groupe de conditions exprime précisément que la forme ω_1 déduite de ω, en y remplaçant x_n par la constante α_0 et dx_n par zéro, a une dérivée ω'_1 identiquement nulle. Le théorème que nous voulons démontrer étant supposé vrai pour une forme de degré p à $n-1$ variables, les équations (22) sont donc compatibles par rapport aux fonctions $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{p-1}}$, et par conséquent le théorème est vrai aussi pour une forme de degré p à n variables.

La démonstration prouve même que, si les relations (15) sont vérifiées, il existe une infinité de formes Ω de degré $p-1$ ayant ω pour forme dérivée, et dont les coefficients se déterminent par des quadratures. Si l'on a obtenu une de ces formes Ω, toutes les autres s'en déduisent immédiatement. En effet, si deux formes Ω, Ω_1 ont la même forme dérivée ω, la différence $\Omega - \Omega_1$ a une dérivée identiquement nulle, et par suite cette différence est la dérivée d'une forme ϖ de degré $p-1$. La réciproque est évidente. Si l'on a $\Omega' = \omega$, il est clair que la forme $\Omega + \varpi'$ a aussi ω pour forme dérivée, quelle que soit la forme de ϖ de degré $p-1$.

Les formes dérivées interviennent dans la généralisation de la formule de Stokes. Soit ω une forme symbolique de degré p ; l'intégrale $I_p = \int \omega$, étendue à une multiplicité *fermée* E_p d'ordre p de l'espace à n dimensions, est égale, d'après le théorème de Stokes généralisé, à une intégrale d'ordre $p+1$ étendue à une multiplicité M_{p+1} à $p+1$ dimensions limitée par E_p, et cette nouvelle intégrale est représentée par $\int \omega'$, où ω' est précisément la forme dérivée de ω [1]. Cette liaison entre les deux formes symboliques ω, ω' explique bien pourquoi ω' est un covariant de ω, car elle est évidemment indépendante du choix des variables. Elle explique aussi pourquoi la dérivée de ω' est identiquement nulle. En effet, l'intégrale $\int \omega'$ étendue à une multiplicité E_{p+1} peut être remplacée par l'intégrale $\int \omega$ étendue à la multiplicité E_p qui limite E_{p+1}. Il s'ensuit que *l'intégrale $\int \omega'$ étendue à une multiplicité fermée est nulle*, puisque la multiplicité E_p disparaît dans ce cas. Or l'intégrale $\int \omega'$, étendue à une multiplicité fermée E_{p+1} peut à son tour être remplacée par l'intégrale $\int \omega''$ (où ω'' est la forme dérivée de ω') étendue à une multiplicité E_{p+2}, limitée par E_{p+1}. Cette intégrale devant être nulle, quelle que soit la multiplicité E_{p+2}, il s'ensuit que *la forme ω'' est identiquement nulle*. Inversement, si une forme ω de degré p est telle que l'intégrale $\int \omega$ étendue à une multiplicité *fermée* quelconque E_p est nulle, ω est une forme dérivée. Car l'intégrale $\int \omega'$ étendue à une multiplicité *quelconque* E_{p+1} doit être nulle, ce qui ne peut avoir lieu que si ω' est identiquement nul.

Les formes dérivées jouissent donc, dans la théorie des intégrales multiples d'ordre quelconque, des mêmes propriétés que les différentielles totales dans la théorie des intégrales curvilignes. Cette analogie justifie le nom de différentielles totales que leur a donné Poincaré ; pour éviter toute méprise, nous les appellerons *différentielles totales symboliques*.

Remarque. — Si dans une forme dérivée on remplace l'une des variables par une constante, et la différentielle correspondante par zéro, la forme à $n-1$ variables obtenue est encore une différentielle totale symbolique. En effet si l'on fait par exemple $x_1 = C$, $dx_1 = 0$, la forme obtenue ne renferme plus que les termes

$$\sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

[1] Je renverrai pour la démonstration aux travaux cités de Poincaré. On suppose, bien entendu, que tous les coefficients de la forme ω, ainsi que leurs dérivées, sont continus dans un domaine renfermant les multiplicités dont il est question dans l'énoncé. Voir, sur ce sujet, plusieurs Mémoires de M. Buhl dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1912-1918).

où tous les indices sont différents de l'unité, et les relations qui expriment que cette forme est une différentielle totale symbolique sont comprises parmi celles qui expriment que la forme considérée est une forme dérivée.

27. Extension du problème de Pfaff. — Etant donnée une forme linéaire de différentielles $\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n$, où les coefficients A_i sont des fonctions des n variables x_i, le problème de Pfaff peut être posé comme il suit : *Trouver dans l'espace à n dimensions toutes les multiplicités M_r à r dimensions $(1 \leqslant r < n)$ telles que l'intégrale $\int\omega$, étendue à une ligne quelconque située sur M_r, soit nulle.* Si, au lieu d'une forme linéaire, on prend une forme symbolique ω de degré quelconque p, une généralisation toute naturelle du problème précédent consiste à *trouver dans l'espace à n dimensions toutes les multiplicités M_r à r dimensions $(p \leqslant r < n)$ telles que l'intégrale $\int\omega$, étendue à une variété quelconque d'ordre p faisant partie de M_r, soit nulle.*

Ce problème d'une si grande généralité comprend la plupart des problèmes classiques. Toute multiplicité de l'espace à n dimensions, satisfaisant à la condition précédente, sera dite une multiplicité intégrale, ou plus simplement une *intégrale*, de l'équation

$$\omega = 0. \tag{23}$$

Nous ne nous occuperons que des intégrales appartenant à des familles d'intégrales telles qu'il passe une intégrale de cette famille et une seule par chaque point de l'espace, ou tout au moins d'un domaine assez restreint de l'espace. Ces intégrales M_r sont alors représentées par un système d'équations

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \ldots, f_{n-r} = C_{n-r}, \tag{24}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ étant des constantes arbitraires.

La détermination de ces familles d'intégrales à r dimensions se ramène à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont l'étude ne semble pas avoir été abordée, lorsque p est > 1. Il est facile de former ce système d'équations en s'appuyant sur les propriétés d'invariance d'un produit symbolique.

Proposons-nous d'abord de rechercher s'il existe des familles d'intégrales à $n - 1$ dimensions. Soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{25}$$

une équation définissant une famille d'intégrales de cette espèce. Imaginons que l'on prenne un nouveau système de variables de façon que l'équation de cette famille d'intégrales soit, avec les nouvelles variables,

$$y_1 = C;$$

la forme ω se change en une nouvelle forme symbolique ϖ de degré p en $dy_1, dy_2, \ldots, dy_p$. Pour que l'intégrale $\int\varpi$ étendue à une multiplicité quelconque de degré p, sur laquelle y_1 est constant, soit nulle, il faut et il suffit évidemment que dy_1 figure dans tous les termes de ϖ ou, ce qui revient au même (n° **25**), que le produit ϖdy_1 soit identiquement nul. Si l'on revient aux variables primitives, le produit ϖdy_1 se transforme en ωdf (n° **24**), et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Pour que les multiplicités M_{n-1} définies par l'équation $f = C$, soient des intégrales de l'équation $\omega = 0$, il faut et il suffit que le produit symbolique ωdf soit identiquement nul.

En égalant à zéro les coefficients de tous les termes de ce produit développé, on obtient un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre qui doivent être compatibles pour que l'équation $\omega = 0$ admette des familles d'intégrales à $n - 1$ dimensions. Dans le cas particulier où $p = n - 1$, le produit symbolique ωdf ne renferme qu'un terme en $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, et le système qui détermine f se compose d'une seule équation.

En simplifiant un peu les notations, écrivons

$$\omega = A_1 dx_2 \ldots dx_n + A_2 dx_3 \ldots dx_n dx_1 + \ldots + A_n dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1};$$

le produit ωdf a deux expressions différentes suivant la parité de n. Si n est impair.

$$\omega df = \left\{ A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

et, si n est pair,

$$\omega df = \left\{ A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots - A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Suivant la parité de n, la fonction f doit satisfaire à l'une ou l'autre des deux équations

$$(26) \qquad A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$(26)' \qquad A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots - A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Le résultat s'explique facilement dans l'espace à 3 dimensions : soit

$$\omega = A dy dz + B dz dx + C dx dy;$$

on a

$$\omega df = \left(A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Pour que l'intégrale $\int \omega$, étendue à une portion quelconque d'une surface S représentée par l'équation $f = f_0$ soit nulle, il faut et il suffit que la fonction $f(x, y, z)$ vérifie la condition

$$(26)'' \qquad A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ceci est bien d'accord avec la signification de l'intégrale $\int \omega$, car un élément de cette intégrale est égal à $(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)\, d\sigma$, α, β, γ étant les angles que fait la normale à la surface avec les axes, et la condition (26)″ exprime précisément que la normale est perpendiculaire à la droite de paramètres directeurs A, B, C.

Si ω est de degré quelconque, et admet r diviseurs du premier degré linéairement distincts $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, la forme ω est égale à un produit symbolique

$$\omega = \Omega \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r,$$

la forme Ω n'admettant plus de diviseur linéaire. Pour que le produit ωdf soit nul, df doit être un diviseur de ω et par suite une combinaison linéaire des r diviseurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$,

$$df = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \ldots + \lambda_r \omega_r.$$

On est donc ramené à la recherche des combinaisons intégrables d'un système de r équations de Pfaff (*Leçons*, nº **25**). Si ω

n'admet pas de diviseur linéaire, on ne peut avoir $\omega df = 0$, quelle que soit la fonction f.

La recherche des familles d'intégrales à r dimensions conduit à un problème d'analyse plus compliqué. Supposons que les équations (24) représentent une famille d'intégrales, et imaginons que l'on ait choisi un nouveau système de variables tel que cette famille d'intégrales soient représentée par les équations

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad \ldots, \quad y_{n-r} = C_{n-r}.$$

Soit ϖ ce que devient la forme ω avec ce nouveau système de variables. Pour que l'intégrale $\int \varpi$, étendue à toute multiplicité d'ordre p, sur laquelle $y_1, y_2, \ldots, y_{n-r}$ ont des valeurs constantes, soit nulle, il faut et il suffit que chaque terme de ϖ contienne au moins un des facteurs $dy_1, \ldots, dy_{n-r}$, ou, ce qui revient au même, que le produit symbolique $\varpi dy_1 \ldots dy_{n-r}$ soit identiquement nul. En revenant aux variables primitives, nous avons donc la proposition suivante :

Pour que les équations (24) représentent une famille d'intégrales à r dimensions de l'équation $\omega = 0$, il faut et il suffit que le produit symbolique

$$\omega df_1 df_2 \ldots df_{n-r}$$

soit identiquement nul.

En égalant à zéro tous les coefficients de ce produit symbolique développé, le nombre des équations obtenues est égal au nombre C_n^{n+p-r} des combinaisons de n objets $n+p-r$ à $n+p-r$. Le nombre des fonctions inconnues étant égal à r, il y a lieu de présumer que ces équations sont compatibles dès que r est égal ou supérieur à C_n^{n+p-r}, et ne le sont pas, tout au moins si les coefficients de ω sont quelconques, si r est inférieur à C_n^{n+p-r}, mais il y aurait lieu de pousser plus loin cette étude, ce qui serait sans doute possible en généralisant les méthodes employées par M. Cartan pour les systèmes de Pfaff [1]. Il serait important en particulier de connaître la valeur minimum de $n-r$. Il est un cas

[1] Voir une note de M. Cerf dans les *Comptes rendus* (tome 170, p. 374; 1920).

limite où les équations du système précédent se réduisent à une seule, c'est le cas où $p=r$; on peut même choisir arbitrairement $n-r-1$ des fonctions f_i, et la dernière est déterminée par une équation linéaire du premier ordre. L'existence de ces multiplicités intégrales à p dimensions était évidente *a priori*; en effet, si l'on se donnait $x_{p+1}, \ldots, x_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_p$, ces $n-p$ fonctions doivent satisfaire à une seule condition pour que l'intégrale $\int \omega$ étendue à la multiplicité ainsi définie soit nulle.

Remarque. — Pour qu'une multiplicité définie par les $n-r$ équations $f_1=0, f_2=0, \ldots, f_{n-r}=0$ soit une intégrale, il n'est pas nécessaire que le produit symbolique $\omega df_1 \ldots df_{n-r}$ soit nul identiquement ; il suffit que tous les coefficients de ce produit développé soient nuls en tenant compte des équations $f_i=0$ elles-mêmes.

Les conditions pour qu'une multiplicité M_r soit une intégrale d'une équation symbolique $\omega=0$ peuvent s'écrire d'une autre façon. Considérons la multiplicité M_r définie par les formules

$$x_{r+1}=\varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_r), \ldots, x_n=\varphi_n(x_1, \ldots, x_r).$$

Si on remplace dans ω les variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$ par les expressions précédentes, et les différentielles par les expressions correspondantes, en ayant soin de conserver l'ordre des facteurs dans tous les produits, on obtient une forme symbolique ω_1 de degré p à r variables, qui doit être nulle identiquement, puisque l'intégrale $\int \omega_1$ étendue à une multiplicité quelconque d'ordre p dans l'espace à r dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ doit être nulle. Il en est ainsi en particulier toutes les fois que r est inférieur à p, ce qui conduit à considérer toute multiplicité d'ordre inférieur à p comme une multiplicité intégrale d'une équation symbolique quelconque de degré p.

Si r est supérieur à p, les fonctions $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ devront satisfaire à un certain nombre d'équations renfermant les variables, les fonctions inconnues, et les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions.

Tout système d'équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables et d'inconnues peut toujours se ramener à un système d'équations de Pfaff, en faisant figurer dans ces équations un nombre suffisant de dérivées des fonctions inconnues. Dans le problème actuel, la réduction à un système de Pfaff peut s'effectuer très simplement. Considérons un système de r équations de Pfaff

$$\omega_i = a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{in}dx_n = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots r);$$

une multiplicité intégrale de ce système sera aussi une multiplicité intégrale d'une équation symbolique $\Omega = 0$ de degré supérieur si, en remplaçant r des différentielles dx_i par leurs valeurs tirées des relations $\omega_i = 0$ dans la forme $\Omega = 0$, on arrive à une forme identiquement nulle. On obtient ainsi un certain nombre de relations entre les coefficients a_{ik} des formes ω_i et les coefficients de la forme Ω. Ces relations permettent d'exprimer les a_{ik} au moyen des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et d'un certain nombre d'indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$. En substituant dans les équations $\omega_i = 0$, on arrive à un système d'équations de Pfaff entre les $n+q$ variables $x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, ces dernières variables ne figurant que dans les coefficients.

La méthode précédente donnera bien toutes les intégrales, car elle généralise la dernière méthode indiquée pour déterminer les multiplicités intégrales M_r.

Le résultat est particulièrement simple lorsque la forme symbolique donnée est le produit de p formes de Pfaff $\Omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_p$. Soit M_r une multiplicité intégrale à r dimensions représentée par les équations

$$x_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_r), \qquad (i = 1, 2, \ldots n);$$

quand on remplace les variables x_i et leurs différentielles par les fonctions φ_i et $d\varphi_i$ dans les formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots$ on obtient p formes de Pfaff $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$, où ne figurent plus que les variables u_i et leurs différentielles. Pour que M_r soit une multiplicité intégrale de l'équation symbolique $\Omega = 0$, il faut et il suffit que le produit $\Pi_1\Pi_2 \ldots \Pi_p$ soit identiquement nul, c'est-à-dire (n° **24**) qu'il y ait une relation linéaire entre ces p formes, $\lambda_1\Pi_1 + \ldots + \lambda_p\Pi_p = 0$. La multiplicité M_r est donc une intégrale d'une équation de Pfaff de la forme

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_p\omega_p = 0,$$

et la réciproque est évidente, car on déduit de la relation précédente que le produit symbolique $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_p$ est identiquement nul. *L'intégration de l'équation symbolique $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_p = 0$ se ramène donc à l'intégration de l'équation de Pfaff*

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_p\omega_p = 0,$$

où entrent $n + p - 1$ inconnues, les variables x_i et les rapports $\frac{\lambda_h}{\lambda_k}$.

Par exemple, l'intégration de l'équation symbolique

$$(dy_2 - y_3dy_1)(dy_3 - y_4dy_1) = 0$$

se ramène à l'intégration de l'équation de Pfaff

$$dy_2 - y_3dy_1 - \lambda(dy_3 - y_4dy_1) = 0,$$

qui est de forme canonique

$$dy_2 - \lambda dy_3 - (y_3 - \lambda y_4)dy_1 = 0.$$

Les intégrales M_2 sont représentées par les formules

$$y_2 = \varphi(y_1, y_3), \quad \lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial y_3}, \quad y_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + y_4\frac{\partial\varphi}{\partial y_3},$$

et par d'autres formules qu'il serait facile d'écrire (n° **15**).

Si les équations $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_p = 0$ forment un système complètement intégrable, ce système est équivalent à p équations $df_1 = 0, \ldots, df_p = 0$, et l'équation symbolique peut s'écrire $df_1 df_2 \ldots df_p = 0$. Toute solution s'obtient en établissant une relation au moins entre $f_1, f_2, \ldots, f_p$. L'équation de Pfaff correspondante $\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_p df_p = 0$ conduit bien au même résultat.

On reviendra plus loin sur ce sujet (n° **32**)

28. Les formes de degré n — 1. — Revenons au cas d'une forme ω de degré $n - 1$ à n variables. Si l'on prend un nouveau système de variables indépendantes $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ tel que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ soient n intégrales indépendantes de l'équation $\omega df = 0$, la dernière variable y_n restant quelconque et distincte des premières, ω se change en une nouvelle forme symbolique ϖ, divisible par $dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}$, et qui par conséquent ne contient qu'un terme

$$\varpi = K dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

Si le facteur K ne dépend que de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, et est indépendant de y_n, on peut prendre $\int K dy_1$ pour variable à la place de y_1, et l'expression précédente devient

$$\varpi = dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

Lorsque le facteur K contient y_n, on peut prendre ce facteur K lui-même pour la dernière variable y_n, et l'on a alors

$$\varpi = y_n dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

En résumé, *toute forme symbolique de degré $n - 1$ à n variables peut, par un choix convenable des variables indépendantes, être ramenée à l'une des deux formes*

$$\text{(I)} \quad dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}, \qquad \text{(II)} \quad y_n dy_1 \ldots dy_{n-1}.$$

Il est aisé de savoir *a priori* quelle est celle des deux expressions qui convient à une forme donnée ω. En effet, la forme réduite (I) a une dérivée nulle, tandis que la forme réduite (II) a pour dérivée $dy_n dy_1 \ldots dy_{n-1}$. *La forme ω peut donc être ramenée à la forme réduite (I) lorsque sa dérivée est nulle, et à la forme (II) dans le cas contraire.*

Considérons encore une forme ω de degré $n-2$ à n variables. Si ω n'est pas une différentielle totale symbolique, sa dérivée ω' est une forme d'ordre $n-1$ à n variables, et par conséquent on peut l'écrire, avec un choix convenable des variables indépendantes,

$$\omega' = dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

Les deux formes ω et $y_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}$ ayant la même forme dérivée, leur différence est la dérivée Ω' d'une forme Ω de degré $n-3$, et la forme ω a pour expression

$$\omega = y_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} + \Omega'.$$

On remarquera l'analogie de cette expression avec la forme réduite d'une forme de Pfaff à trois variables.

29. Multiplicateurs d'une forme. — On peut aussi étendre aux formes symboliques la théorie du facteur intégrant. Soit ω une forme symbolique de degré p ; une fonction μ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un *multiplicateur* ou un *facteur intégrant* pour ω si le produit $\mu\omega$ est une différentielle totale symbolique. Pour que μ soit un facteur intégrant, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(\mu\omega)' = \mu\omega' + (d\mu)\omega = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des différents termes de la forme $(\mu\omega)'$ développée, on a un système d'équations linéaires (mais non homogènes) par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\lambda = \log\mu$. Ces équations doivent être compatibles pour qu'il existe un facteur intégrant pour ω. S'il en est ainsi, l'intégrale générale de ce système est de la forme

$$\lambda = \lambda_1 + F(f_1, f_2, \ldots, f_q),$$

où λ_1 est une intégrale particulière, F une fonction arbitraire et

$f_1, f_2, \ldots, f_q$ les q intégrales distinctes du système linéaire et homogène que l'on obtient en supprimant les termes indépendants de λ dans les équations qui déterminent λ. Mais, d'après la façon même dont on obtient ces équations, $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sont précisément des intégrales du système que l'on obtient en écrivant que le produit symbolique ωdf est identiquement nul.

S'il n'existe pas de fonction f satisfaisant à cette condition, la forme ω admet au plus un facteur intégrant qui s'obtient par une quadrature. S'il y a une infinité de facteurs intégrants distincts, la forme ω est égale à un produit symbolique

$$\omega = \Omega df_1 df_2 \ldots df_q,$$

et l'expression générale des facteurs intégrants est

$$\mu = \mu_1 \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_q),$$

Π désignant une fonction arbitraire. Le produit $\mu\omega$ peut s'écrire comme produit symbolique

$$\mu\omega = \pm(\mu_1\Omega)\Pi(f_1, f_2, \ldots f_q) df_1 df_2 \ldots df_q\,;$$

or $\Pi df_1 df_2 \ldots df_q$ est une différentielle totale symbolique. Il faudra donc que le produit $\mu_1\Omega$ soit aussi une différentielle totale symbolique.

On voit que, dans le cas où ω admet plusieurs facteurs intégrants distincts, l'équation $\omega = 0$ admet des intégrales à $n - 1$ dimensions ; si μ_1 et μ_2 sont deux facteurs distincts, l'équation $\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$ représente une famille d'intégrales de cette espèce.

Les formes pour lesquelles le facteur intégrant a le plus haut degré de généralité possible sont les formes représentées symboliquement par un produit de différentielles totales tel que $K df_1 \ldots df_p$. Il en est ainsi, en particulier, si $p = n - 1$, et l'on est ainsi amené à la théorie du dernier multiplicateur de Jacobi.

Soit comme plus haut

$$\omega = A_1 dx_2 \ldots dx_n + A_2 dx_3 \ldots dx_n dx_1 + \ldots + A_n dx_1 \ldots dx_{n-1}\,;$$

l'équation qui exprime que $\mu\omega$ est une différentielle totale symbolique est différente, suivant la parité de n. Si n est impair, cette condition est

$$\frac{\partial(\mu A_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu A_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(\mu A_n)}{\partial x_n} = 0,$$

et, si n est pair,

$$\frac{\partial(\mu A_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\mu A_2)}{\partial x_2} + \ldots - \frac{\partial(\mu A_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Dans le premier cas, μ est un multiplicateur pour le système d'équations différentielles dont l'intégration donne les intégrales de l'équation $\omega df = 0$. Dans le second cas, μ est un multiplicateur pour le système

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{-A_2} = \frac{dx_3}{A_3} = \ldots = \frac{dx_n}{-A_n},$$

qui doit remplacer le précédent.

On voit immédiatement, d'après cela, que la connaissance de $n-2$ intégrales de l'équation $\omega df = 0$ et d'un multiplicateur permet d'achever l'intégration par une quadrature. Supposons en effet que l'on ait effectué un changement de variables de façon que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ soient les $n-2$ intégrales connues; si μ est un multiplicateur, $\mu\omega$ est une différentielle totale symbolique qui, après le changement de variables, prend la forme

$$\mu\omega = dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-2}(B_{n-1}dy_{n-1} + B_n dy_n).$$

Pour que la dérivée de $\mu\omega$ soit nulle, il est nécessaire que l'on ait

$$\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y_n} = \frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}},$$

et en posant

$$z = \int B_{n-1}dy_{n-1} + B_n dy_n,$$

on a aussi

$$\mu\omega = dy_1 \ldots dy_{n-2} dz;$$

z est donc une nouvelle intégrale de l'équation $\omega df = 0$.

On peut obtenir la dernière intégrale sans aucun changement de variables. Le produit $\mu\omega$ est en effet de la forme

$$\mu\omega = df_1 \ldots df_{n-1} (a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n),$$

les coefficients a_i pouvant être calculés par identification. Puisque $\mu\omega$ est une forme dérivée, Σa_idx_i est aussi une différentielle exacte (nº **26**).

On a étendu la définition du multiplicateur de Jacobi aux systèmes complètement intégrables. Avec la théorie des formes symboliques, cette extension est bien facile Soit

$$(27) \qquad \omega_i = a_{i1}dx_1 + \ldots + a_{in}dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

un système complètement intégrable de s équations. équivalent au système

$$(27)' \qquad df_1 = 0, \qquad df_2 = 0, \ldots, df_s = 0,$$

$f_1, f_2, \ldots. f_s$ étant s fonctions distinctes. On a

$$\omega_i = \lambda_{i1}df_1 + \ldots + \lambda_{is}df_s,$$

le déterminant Δ des coefficients λ_{ik} étant différent de zéro. Considérons le produit symbolique

$$\Omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_s ;$$

toute fonction μ des variables $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $\mu\Omega$ soit une différentielle totale symbolique est un multiplicateur du système (27). D'après ce qui a été démontré plus haut, il existe une infinité de multiplicateurs, dont il est facile d'avoir l'expression générale. Imaginons en effet que l'on ait effectué un changement de variables de façon que s des nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_s$ soient précisément les intégrales $f_1. f_2, \ldots, f_s$ du système. Le produit symbolique Ω devient $\Delta dy_1 \ldots dy_s$, et l'on a

$$\mu\Omega = \mu\Delta dy_1 \ldots dy_s.$$

Pour que $(\mu\Omega)'$ soit identiquement nul, il suffit que $\mu\Delta$ ne dépende que de $y_1, \ldots, y_s$. Le quotient de deux multiplicateurs distincts est toujours une intégrale du système (27).

La connaissance d'un multiplicateur est de la même utilité que pour un système d'équations différentielles. Si l'on connaît $s - 1$

intégrales premières $f_1, f_2, \ldots, f_{s-1}$ et un multiplicateur μ, on a encore une relation de la forme

$$\mu\Omega = df_1 df_2 \ldots df_{s-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i \right\},$$

les cœfficients a_i se calculant par identification. Pour que $(\mu\Omega)'$ soit nul, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i},$$

et on aura une nouvelle intégrale par une quadrature

$$z = \int \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i.$$

30. Intégrale intermédiaire d'une équation symbolique. — Toute multiplicité intégrale M_r d'une équation symbolique $\omega = 0$ d'ordre p est aussi une intégrale de l'équation $\omega' = 0$. La proposition est évidente si $r = p$, puisque toute multiplicité d'ordre p est une intégrale d'une équation symbolique d'ordre $p + 1$. Si on a $r > p$, l'intégrale $\int \omega'$, étendue à une multiplicité quelconque d'ordre $p + 1$, appartenant à la multiplicité M_r, est égale, d'après le théorème de Stokes généralisé, à l'intégrale $\int \omega$, étendue à la multiplicité M_p, qui limite M_{p+1} ; cette multiplicité M_p appartient elle-même à la multiplicité M_r, et par conséquent l'intégrale $\int \omega$, étendue à M_p, est nulle, puisque M_r est une intégrale de l'équation $\omega = 0$.

Réciproquement, soit M_r une intégrale à r dimensions de l'équation symbolique $\omega' = 0$, de degré $p + 1$. L'intégrale $\int \omega'$ étendue à une multiplicité quelconque M_{p+1}, appartenant à M_r, est nulle, et par suite l'intégrale $\int \omega$, étendue à une multiplicité *fermée* quelconque M_p située sur M_r, est nulle aussi. Supposons la multiplicité M_r représentée par les équations

$$x_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_r), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) ;$$

si on remplace dans ω les variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$ et leurs différentielles par $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n, d\varphi_{r+1}, \ldots, d\varphi_n$ respectivement, on obtient une forme symbolique ω_1 de degré p où figurent seulement r variables $x_1, \ldots, x_r$ et leurs différentielles, et l'intégrale $\int \omega_1$ étendue à une multiplicité fermée quelconque à p dimensions de l'espace à r dimensions $(x_1, \ldots, x_r)$ doit être nulle, de sorte que l'intégrale $\int \omega_1'$ étendue à une multiplicité quelconque à $p + 1$ dimensions du même espace doit être nulle, ce qui exige que l'on ait $\omega_1' = 0$, ou $\omega_1 = (\omega_2)'$, ω_2 étant une forme symbolique de degré $p-1$ à r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. La multiplicité M_r est donc une intégrale d'une équation de la forme

$$\omega = \Pi', \tag{28}$$

Π étant une forme symbolique de degré $p-1$, et inversement, quelle que soit cette forme Π, toute intégrale de l'équation (28) est aussi une intégrale de l'équation $\omega' = 0$. Nous dirons que l'équation (28), où figure une forme arbitraire, est une *intégrale intermédiaire* de l'équation $\omega' = 0$. L'analogie avec la théorie des équations aux dérivées partielles est évidente. Pour qu'une équation symbolique admette une intégrale intermédiaire, il suffit qu'il existe un multiplicateur pour le premier membre

Remarque. — Le raisonnement semble être en défaut si $r = p$, car toute multiplicité d'ordre p est une intégrale de l'équation $\omega' = 0$, mais le théorème est encore exact. Soit M_p la multiplicité définie par les équations

$$x_{p+1} = \varphi_{p+1}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p);$$

si on remplace dans ω les variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$ et leurs différentielles par les fonctions $\varphi_{p+1} \ldots, \varphi_n$ et $d\varphi_{p+1}, \ldots, d\varphi_n$, il vient

$$\omega = f(x_1, \ldots x_p)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p.$$

Soient $F(x_1, \ldots, x_p)$ une fonction telle que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f$, et Π la forme de degré $p-1$

$$\Pi = F dx_1 \ldots dx_p;$$

la multiplicité M_p considérée est bien une intégrale de l'équation $\omega = \Pi'$.

Dans le cas particulier où la forme dérivée ω' est du second ordre, ω est une forme de Pfaff, et l'intégration de l'équation symbolique $\omega' = 0$ est ramenée à l'intégration de l'équation de Pfaff

$$\omega = dx_{n+1},$$

à $n+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Prenons par exemple l'équation symbolique [1]

$$dx_1 dx_2 - dx_3 dx_4 = 0;$$

[1] On est conduit à cette équation, quand on cherche toutes les transformations ponctuelles d'un plan qui conservent les aires (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. 41, 1917). J'ai montré dans cet article comment on peut trouver toutes les solutions de l'équation plus générale

$$dy_1 dy_2 \ldots dy_n = dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

elle admet l'intégrale intermédiaire

$$x_1 dx_2 + x_4 dx_3 = dx_5.$$

Si x_2 et x_3 sont des variables indépendantes, la solution générale est donnée par les deux relations

$$x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad x_4 = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$f(x_2, x_3)$ étant une fonction arbitraire de x_2 et de x_3.

31. Application aux systèmes canoniques. — Soit

$$\text{(29)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

un système canonique, où H est une fonction des $2n$ variables x^i, y_k, et de t. H. Poincaré (1) a démontré que $\int \sum_{i=1}^{n} dx_i dy_i$ est pour ce système un *invariant intégral*.

Considérons les intégrales

$$\text{(30)} \qquad x_i = f_i(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; t), \qquad y_i = \varphi_i(a_1, \dots, b_n; t)$$

qui, pour $t = t_0$, prennent les valeurs a_i, b_i respectivement.

Lorsque le point de coordonnées (a_i, b_i) décrit une multiplicité M_0 à deux dimensions dans l'espace à $2n$ dimensions, le point (x_i, y_i) décrit lui-même une multiplicité M_t à deux dimensions dans ce même espace, et *les deux intégrales multiples*

$$\int_{M_t} \sum_i dx_i dy_i, \qquad \int_{M_0} \sum_i da_i db_i$$

sont égales, quel que soit t. En d'autres termes les fonctions f_i, φ_i satisfont, quel que soit t, à l'équation symbolique

$$\text{(31)} \qquad \sum_{i=1}^{n} dx_i dy_i - \sum_{i=1}^{n} da_i db_i = 0,$$

qui peut être remplacée par l'intégrale intermédiaire

$$\text{(32)} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i + \sum_{i=1}^{n} a_i db_i = dV.$$

(1) H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. III, p. 43.

Les $2n$ variables x_i, b_k sont indépendantes, puisque, pour $t = t_0$, $x_1, \ldots, x_n$ se réduisent respectivement à $a_1, \ldots, a_n$, et les valeurs initiales a_i, b_k peuvent être choisies arbitrairement. Il ne peut donc y avoir aucune relation linéaire entre les différentielles dx_i, db_i, et par suite les fonctions cherchées f_i, φ_i, vérifient des relations de la forme

$$(33)\qquad y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad a_i = \frac{\partial V}{\partial b_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

V étant une fonction des $2n$ variables x_i, b_k et de t. D'après les conditions initiales, cette fonction V doit se réduire à $b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$ pour $t = t_0$, pour que les fonctions x_i, y_i définies par les relations (33) se réduisent respectivement aux valeurs données pour $t = t_0$. De plus, ces fonctions doivent être des intégrales du système canonique (29). On obtient ainsi les conditions

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial H}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial t} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial t} + \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial x_k}\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, t\right)\right\} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial b_i}\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x_1, \ldots, x_n ; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, t\right)\right\} = 0.$$

Il s'ensuit que $\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x_1, \ldots, x_n ; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, t\right)$ ne peut dépendre que de la variable t, et des paramètres $a_1, \ldots, a_n$. Or on ne change pas les équations (33) en ajoutant à V une fonction quelconque de $a_1, \ldots, a_n, t$. On peut donc supposer que l'expression précédente est nulle, et la conclusion est la suivante :

Les intégrales du système canonique (29) qui prennent les valeurs initiales a_i, b_i, pour $t = t_0$, sont données par les équations (33), où $V(x_1, \ldots x_n ; b_1, b_2, \ldots, b_n, t)$ est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(34)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, t\right) = 0,$$

qui, pour $t = t_0$, se réduit à $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$.

Ce résultat est identique à celui que l'on déduit de la première méthode de Jacobi (*Leçons*, n° 50).

32. Rang d'une forme symbolique. — Soit

$$\Omega = \sum \mathrm{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

une forme quelconque de degré p à n variables. Prenons une permutation quelconque de $p - 1$ des indices $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})$, et écrivons l'ensemble des termes de Ω où figure le produit symbolique $dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}} dx_i.$$

Si nous supprimons le produit $dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$ dans chaque terme, il reste une forme de Pfaff

$$\omega_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} dx_i.$$

En opérant ainsi avec toutes les combinaisons des n indices $p - 1$ à $p - 1$, on obtient un système de formes de Pfaff, que nous dirons *associées* à la forme ω, et en égalant toutes ces formes à zéro, on obtient un système S d'équations de Pfaff que j'appellerai pour abréger le *système associé à la forme* ω.

Pour trouver la signification de ce système, nous démontrerons d'abord le lemme suivant.

Lemme. — Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ des formes de Pfaff linéairement distinctes. Si on développe le produit symbolique $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p$, toutes les formes de Pfaff associées à cette forme symbolique sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Il suffit évidemment de prouver que le coefficient de $dx_1 dx_2 \ldots dx_{p-1}$, par exemple, s'exprime uniquement au moyen de ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_p$. Soit

$$\omega_i = a_{i_1} dx_1 + a_{i_2} dx_2 + \ldots + a_{in} dx_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

si l'on prend chacun des facteurs $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{p-1}$, dans l'un des facteurs $\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}$, le cœfficient de $dx_1 dx_2 \ldots dx_{p-1}$ est égal à la forme de Pfaff

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,p-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \ldots & a_{p-1,p-1} \end{vmatrix} \left\{ \omega_p - a_{p1} dx_1 \ldots - a_{p,p-1} dx_{p-1} \right\}.$$

En opérant de même avec tous les autres produits symboliques qui renferment $dx_1 \ldots dx_{p-1}$, on voit que le coefficient de ce produit symbolique est égal à une combinaison linéaire des formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, diminuée du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,p-1}, & a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1,p-1}dx_{p-1} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,p-1}, & a_{21}dx_1 + \ldots + a_{2,p-1}dx_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{p,p-1}, & a_{p1}dx_1 + \ldots + a_{p,p-1}dx_{p-1} \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, comme somme de déterminants ayant deux colonnes identiques.

Cela posé, supposons que la forme donnée Ω puisse s'exprimer symboliquement au moyen de r formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ linéairement distinctes $(p \leqslant r \leqslant n)$,

$$\Omega = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \ldots \omega_{\alpha_p},$$

les coefficients $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ étant des fonctions quelconques des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; d'après le lemme précédent, toutes les formes de Pfaff associées à la forme Ω s'exprimeront linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, et par conséquent *le système associé S comprend au plus r équations distinctes*.

Réciproquement, supposons que le système S contienne r équations distinctes et r seulement, de telle sorte que toutes les formes de Pfaff associées à Ω soient des combinaisons linéaires de r formes de Pfaff linéairement distinctes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Admettons, pour fixer les idées, que le déterminant des coefficients de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$ dans ces formes est différent de zéro ; les n formes

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r, \qquad \omega_{r+1} = dx_{r+1}, \ldots, \omega_n = dx_n$$

sont alors linéairement distinctes, et la forme symbolique Ω peut s'exprimer au moyen de celles-là (n° **25** p. 99)

$$\Omega = \sum C_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\omega_{\beta_1}\omega_{\beta_2}\cdots\omega_{\beta_p}.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ un système quelconque de $p-1$ indices différents ; par hypothèse, la forme associée correspondante s'exprime au moyen des r formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. *Ceci ne peut avoir lieu que si les formes $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$ ne figurent pas dans l'expression de Ω.* En effet, mettons à part dans Ω la forme $\Omega_1 dx_n$, où figure dx_n, et soit Ω_2 la différence $\Omega - \Omega_1 dx_n$ qui s'exprime au moyen de $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. Les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ étant supposés inférieurs à n, la portion de $\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}$ qui provient de Ω_2 s'exprime au moyen des formes $\omega_1, \ldots \omega_{n-1}$, tandis que la partie qui provient de $\Omega_1 dx_n$ est égal au produit de dx_n par le coefficient de $dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_{p-1}}$ dans Ω_1. La forme $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}$ renfermera donc un terme en dx_n à moins que le coefficient de $dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_{p-1}}$ dans Ω_1 soit nul. Ceci ne peut avoir lieu pour toutes les combinaisons des $n-1$ indices $1, 2, \ldots, n-1$, $p-1$ à $p-1$ à moins que la forme Ω_1 ne soit identiquement nulle, c'est-à-dire à moins que ω_n ne figure pas dans l'expression de Ω. On verrait de la même façon que les formes $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{n-1}$ ne peuvent figurer dans Ω si toutes les formes de Pfaff associées sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$.

En rapprochant ces deux résultats, on voit que lorsque les équations du système S se réduisent à r équations distinctes

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots\ \omega_r = 0,$$

la forme symbolique Ω peut s'exprimer symboliquement au moyen des r formes linéairement distinctes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ [1]. Elle ne peut s'exprimer au moyen de moins de r formes linéaires distinctes, puisque dans ce cas les équations du système associé se réduiraient à moins de r équations distinctes. Nous dirons pour abréger que

[1] Ce théorème peut être considéré comme l'extension aux formes symboliques d'un théorème d'algèbre, relatif aux formes algébriques ordinaires.

Pour qu'une forme algébrique $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de degré p à n variables puisse s'exprimer au moyen de r formes du premier degré linéairement distinctes, il faut et il suffit que toutes les dérivées partielles d'ordre $p-1$ de la forme F se réduisent à r formes linéairement distinctes.

la forme symbolique est de rang r. On peut d'ailleurs remplacer $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ par r combinaisons linéaires distinctes de ces formes.

Il est évident que ce nombre r est un *invariant*, relativement à tout changement de variables. Le système S est de même un système covariant. Supposons en effet que la forme Ω s'exprime symboliquement au moyen de r formes de Pfaff linéairement distinctes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_r$, et ne puisse s'exprimer au moyen de moins de r formes de Pfaff. Le système S est alors équivalent aux r équations $\omega_i = 0$. Si, par un changement de variables $x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n)$, les formes $\omega_1, \ldots, \omega_r$ se changent en r formes de Pfaff $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$, la forme Ω elle-même se change en une nouvelle forme symbolique qui s'exprimera au moyen des formes $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r$, et les équations du système associé à la nouvelle forme sont des combinaisons linéaires des r équations $\Pi_i = 0$. D'ailleurs ces équations ne peuvent se réduire à moins de r équations distinctes, car la forme Ω pourrait alors s'exprimer au moyen de moins de r formes de Pfaff. Les équations du système S se transforment donc, par un changement de variables, en un nouveau système d'équations de Pfaff qui est précisément le système associé à la forme transformée.

Le rang r d'une forme de degré p à n variables est au moins égal à p et au plus égal à n. Si les coefficients de la forme Ω sont quelconques, on a $r = n$. Le rang est égal à p si la forme considérée est le produit symbolique de p formes de Pfaff et dans ce cas seulement, ce qui fournit un moyen de reconnaître si une forme de degré p est décomposable en un produit de p formes de Pfaff. Pour une forme de Pfaff ω, le système associé se réduit à l'équation $\omega = 0$ elle-même et le rang est égal à *un*.

Remarque. — Si une forme Ω à n variables s'exprime au moyen de $n - \nu$ formes de Pfaff distinctes, on ne peut en conclure immédiatement que la forme est de rang $n - \nu$. On peut seulement affirmer que le rang est au plus égal à $n - \nu$, car les équations de S contiennent au plus $n - \nu$ équations distinctes.

Applications. — 1° Etant donnée une forme Ω *de degré supérieur à un*, on ne peut pas toujours, par un changement de variables, la ramener à une forme où figurent moins de n différentielles.

En effet, si dx_n par exemple ne figure pas dans Ω, *le rang est au plus égal à* $n-1$, puisque Ω s'exprime au moyen de $n-1$ formes de Pfaff seulement, $dx_1, \ldots, dx_{n-1}$.

Cette condition est suffisante. Soit en effet Ω une forme de rang $r < n$, qui s'exprime au moyen de r formes linéairement distinctes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Ainsi qu'on l'a déjà démontré à plusieurs reprises, nous pouvons choisir un nouveau système de variables $y_1, \ldots, y_n$, tel que les équations

$$y_1 = C_1, \ldots, y_{n-1} = C_{n-1}$$

représentent une famille d'intégrales M_1 à une dimension des r équations $\omega_i = 0$. Les formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ s'expriment donc au moyen des différentielles $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$ seulement, et la forme Ω elle-même ne renfermera pas dy_n.

2° Pour une forme symbolique du second degré

$$\Omega = \sum A_{ik} dx_i dx_k,$$

le système associé S se compose des n équations

$$(35) \qquad A_{i1}dx_1 + A_{i2}dx_2 + \ldots + A_{in}dx_n = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont le déterminant est un déterminant symétrique gauche. Ces équations se réduisent donc à un nombre pair d'équations distinctes, et par conséquent *le rang d'une forme symbolique du second ordre est toujours un nombre pair*. Une forme de cette espèce peut être ramenée à une forme simple qui rappelle la forme canonique d'un covariant bilinéaire. En effet toute forme du second degré de rang 2ρ pe t s'écrire comme il suit

$$(36) \qquad \Omega = \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots \omega_{2\rho-1}\omega_{2\rho},$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\rho}$ étant 2ρ formes de Pfaff linéairement distinctes. La propriété est évidente si $\rho = 1$. Pour démontrer qu'elle est générale, il suffit de vérifier que, si elle est vraie pour une forme de rang $2\rho-2$, elle est vraie pour une forme de rang 2ρ. Si Ω est une forme de rang 2ρ, on a

$$\Omega = \omega_1 \left(\sum A_{1k}\omega_k\right) + \sum B_{ik}\omega_i\omega_k, \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, 2\rho)$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\rho}$ étant 2ρ formes de Pfaff distinctes. La forme $\sum B_{ik}\omega_i\omega_k$ est de rang inférieur à 2ρ ; comme elle est de rang pair, elle est au plus de rang $2\rho - 2$. Elle ne peut être de rang inférieur à $2\rho - 2$, car Ω serait de rang inférieur à 2ρ. La propriété étant admise pour une forme de rang $2\rho - 2$, il s'ensuit qu'elle est vraie pour une forme de rang 2ρ.

La démonstration prouve d'ailleurs que Ω peut être mise sous la forme (36) d'une infinité de manières.

Si le déterminant de Pfaff relatif aux équations (35) est nul, la forme Ω est de rang inférieur à n, et on peut la ramener à une forme où ne figurent que $n - 1$ différentielles. C'est ce qui a toujours lieu si n est impair. Si $n = 4$, et si ce déterminant est nul, on a $r = 2$, et la forme Ω est le produit de deux formes de Pfaff $\omega_1\omega_2$, comme on l'a déjà démontré (n° **25**).

3° Reprenons une forme Ω à n variables et de rang r inférieur à n. Si l'on a choisi les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de façon que les formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ ne renferment pas dy_n, il en sera de même de Ω, et toute multiplicité M_p à p dimensions définie par $n - p$ relations de la forme

$$f_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) = C_1, \ldots, f_{n-p}(y_1, \ldots, y_{n-1}) = C_{n-p},$$

où ne figurent que les $n - 1$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ est une multiplicité intégrale de l'équation $\Omega = 0$, car le produit $\Omega df_1 \ldots df_{n-p}$, qui est de degré n et ne renferme que $n - 1$ différentielles, est identiquement nul. Ces intégrales s'obtiennent en associant suivant une loi arbitraire les intégrales M_1 à une dimension, représentées par les équations $y_i = C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, du système de Pfaff

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \ldots, \omega_r = 0.$$

Plus généralement, supposons que le système précédent admette une famille d'intégrales M_q à q dimensions, telle qu'il passe une de ces intégrales par un point arbitraire. On peut alors choisir un système de variables $y_1, \ldots, y_n$, tel que les différentielles $dy_{n-q+1}, \ldots, dy_n$ ne figurent pas dans les formes ω_i, et ces intégrales M_q sont définies par les $n - q$ équations

$$y_1 = C_1, \ldots, y_{n-q} = C_{n-q}.$$

Les différentielles $dy_{n-q+1}, \ldots, dy_n$ ne figurent pas non plus dans la forme Ω, et le produit $\Omega df_1 \ldots df_{n+1-p-q}$ est identiquement nul, quelles que soient les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1-p-q}$ des $n - q$ variables $y_1, \ldots, y_{n-q}$ On obtient ainsi des intégrales à $p + q - 1$ dimensions de l'équation symbolique $\Omega = 0$, engendrées par les multiplicités M_q associées suivant une loi arbitraire.

4° Les raisonnements de ce paragraphe prouvent qu'une forme symbolique qui s'exprime au moyen des r formes de Pfaff

$$\Omega = \sum C_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\omega_{\beta_1}\ldots\omega_{\beta_p}$$

ne peut être identiquement nulle s'il n'existe pas une relation linéaire au moins entre ces r formes. Toute intégrale de l'équation symbolique $\Omega = 0$ satisfait donc à une ou plusieurs relations de la forme

$$\lambda_{1i}\omega_1 + \lambda_{2i}\omega_2 + \ldots + \lambda_{ri}\omega_r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots q).$$

En écrivant que la relation $\Omega = 0$ est une conséquence des équations précédentes, on obtient un certain nombre de conditions entre les coefficients $C_{\beta_1 \ldots \beta_p}$ et les coefficients λ_{ki}, qui permettent d'exprimer tous ces coefficients au moyen des variables $x_1, \ldots, x_n$, et d'un certain nombre de paramètres arbitraires $u_1, \ldots, u_s$. On est ainsi conduit à un système d'équations de Pfaff à $n + s$ inconnues $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_s$.

33. Classe d'une forme dérivée. — Les formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ au moyen desquelles s'exprime une forme symbolique Ω de degré supérieur pouvant être quelconques, il est clair que le système S associé à une forme Ω n'est pas en général complètement intégrable. Mais le système *associé à une forme dérivée est toujours complètement intégrable.*

On le vérifie immédiatement pour une forme dérivée du second degré qui, d'après la théorie d'une forme de Pfaff, peut être ramenée à la forme canonique

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{2r-1} dx_{2r}\,;$$

le système associé se compose des $2r$ équations $dx_i = 0$.

Pour ne pas compliquer l'écriture, nous démontrerons la proposition pour une forme dérivée du 3e ordre; la méthode est d'ailleurs générale [1].

Soit Ω' une différentielle totale symbolique du troisième ordre

$$(37) \qquad \Omega' = \sum_{i,\,k,\,l} A_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l\,;$$

le système associé S' se compose des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de Pfaff

$$(38) \qquad \sum_{l=1}^{n} A_{ikl}\, dx_l = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous voulons établir que, si ce système se compose de r équa-

[1] *Annales de la Faculté de Toulouse, t. VII, 1915, p. 20 et suivantes.*

tions linéairement distinctes, il est équivalent à un système de r équations

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \ldots, df_r = 0,$$

$f_1, f_2, \ldots, f_r$ étant r fonctions indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle qui a été développée au n° **5**, pour le système S_1, qui n'est au fond que le système S' correspondant à la forme dérivée ω' d'une forme de Pfaff. La propriété que l'on veut établir est encore évidente si le système S' contient n ou $n-1$ équations distinctes. Il suffit donc d'examiner le cas où ce système S' contient seulement r équations distinctes $(r < n-1)$. On peut alors adjoindre à ce système $n-r-1$ équations de Pfaff

$$A_{i1}dx_1 + \ldots + A_{in}dx_n = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-r-1),$$

dont les coefficients peuvent être choisis arbitrairement, à condition de former avec S' un système de $n-1$ équations linéairement distinctes. Le système ainsi obtenu admettant $n-1$ intégrales premières, supposons que l'on ait choisi un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de façon que ce système admette les combinaisons intégrables $dy_1 = 0, \ldots, dy_{n-1} = 0$. Après ce changement de variables, la forme Ω' se change en une nouvelle forme

$$\Omega' = \sum_{i,k,l} B_{ikl}\,dy_i\,dy_k\,dy_l,$$

qui est aussi une différentielle totale symbolique, et le système S' devient, par le même changement de variables,

$$\sum_{l=1}^{n} B_{ikl}\,dy_l = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce système doit être vérifié identiquement quand on y fait $dy_1 = 0, \ldots, dy_{n-1} = 0$; tous les coefficients B_{ikn} sont donc nuls, quels que soient les indices i et k. D'autre part, puisque la forme Ω' est une différentielle totale symbolique, on a les relations

$$\frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_n} - \frac{\partial B_{kln}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{lni}}{\partial y_k} - \frac{\partial B_{nik}}{\partial y_l} = 0,$$

qui deviennent ici $\dfrac{\partial B_{ikl}}{\partial y_n} = 0$, puisque $B_{kln} = B_{iln} = B_{ikn} = 0$.

Après le changement de variables, la forme Ω' et le système S' ne renferment donc ni y_n, ni dy_n. On a donc, par ce changement de variables, ramené le système S' à un système de r équations à $n-1$ variables.

Si $r = n-2$, le théorème énoncé est établi. Si $r < n-2$, on remarquera que le nouveau système S' est associé à une forme dérivée Ω' à $n-1$ variables. On peut donc, par un nouveau changement de variables, le ramener à un système équivalent de r équations à $n-2$ variables, et ainsi de suite. On finira donc par le ramener à un système de r équations à $r+1$ variables, c'est-à-dire à un système complètement intégrable.

Voici une conséquence importante de ce théorème. Le système S' étant complètement intégrable est équivalent à un système de r équations

$$df_1 = 0, \qquad df_2 = 0, \ldots, df_r = 0\,;$$

nous prendrons un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, où $y_1 = f_1, \ldots, y_r = f_r$. Avec ce nouveau système de variables, la forme Ω' devient

$$\Omega' = \sum_{i,k,l} B_{ikl}\, dy_i\, dy_k\, dy_l, \tag{39}$$

et le système associé S' doit être vérifié identiquement quand on y fait $dy_1 = 0, \ldots, dy_r$, quels que soient $dy_{r+1}, \ldots, dy_n$. Il faut pour cela que tous les coefficients B_{ikl}, *où l'un des indices est supérieur à r*, soient nuls, et on en déduira, comme plus haut, que les autres coefficients sont indépendants de $y_{r+1}, \ldots, y_n$. *Dans la nouvelle expression de Ω' ne figurent donc que les r variables $y_1, \ldots, y_r$ et leurs différentielles $dy_1, \ldots, dy_r$.*

Quelles que soient les variables choisies, on ne peut trouver pour Ω' une expression où figurent moins de r variables (soit dans les coefficients, soit sous le signe d). En effet, si l'on pouvait mettre Ω' sous une forme

$$\Omega' = \sum_{i,k,l} C_{ikl}\, dz_i\, dz_k\, dz_l,$$

où ne figurent que $r-s$ variables $z_1, z_2, \ldots, z_{r-s}$ et leurs différentielles, dans les équations du système associé ne figureraient que $r - s$ différentielles $dz_1, \ldots, dz_{r-s}$, et par suite ce système ne pourrait renfermer r équations linéairement distinctes.

Ceci permet d'étendre la notion de *classe* à une forme symbolique de degré quelconque. On appelle ainsi le nombre minimum de variables au moyen desquelles on puisse exprimer cette forme par un choix convenable des variables, ces nouvelles variables figurant soit dans les coefficients, soit sous le signe d. Le résultat qui vient d'être démontré prouve que *la classe d'une forme dérivée est égale au rang de cette forme*.

Nous dirons qu'une forme de classe r est ramenée à une *forme réduite* lorsque dans son expression ne figurent que r variables et leurs différentielles. Il y a évidemment une infinité de manières de ramener une forme dérivée à une forme réduite, mais toutes ces formes se déduisent l'une de l'autre par un changement de variables portant sur les r variables qui y figurent. Soient en effet

$$\sum B_{ikl}\, dy_i\, dy_k\, dy_l, \qquad \sum C_{ikl}\, dz_i\, dz_k\, dz_l \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots r)$$

deux expressions réduites d'une même forme dérivée. Le système associé S' peut être écrit sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(dy_1 = 0, \ldots, dy_r = 0) \qquad (dz_1 = 0, \ldots, dz_r = 0).$$

Il s'ensuit que les équations $y_i = C_i$, ou $z_i = C'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) représentent l'intégrale générale d'un même système complètement intégrable de r équations. On a donc des relations $y_i = \varphi_i(z_1, \ldots, z_r)$, et l'on passe d'une des formes réduites à l'autre par un changement de variables.

Les variables qui figurent dans une forme réduite de Ω' constituent donc un système d'intégrales du système associé S'. Si l'on peut ramener Ω' à une forme réduite, on a par là même intégré le système S'.

34. Classe d'une forme quelconque. — La classe d'une forme symbolique quelconque se définit comme la classe d'une forme dérivée. Il est clair que, quand on passe d'une forme Ω à sa dérivée Ω', on n'introduit aucune variable nouvelle qui ne figure pas dans Ω; la classe ne peut donc augmenter. Par suite, si Ω' est de classe r, Ω est au moins de classe r, mais elle peut être de classe supérieure à r. Supposons la forme Ω' de classe r mise sous une forme réduite où figurent seulement r variables et leurs différentielles; on peut par des quadratures (n° **26**) déterminer une forme Ω_1 ayant pour dérivée Ω' et où ne figurent que les mêmes variables qui figurent dans Ω'. Cette forme Ω_1 est donc de classe r, et la différence $\Omega - \Omega_1$ est une différentielle totale symbolique qui peut dépendre d'un nombre quelconque de variables ne figurant pas dans Ω'. Si Ω n'est pas une forme de Pfaff, sa classe peut donc être un nombre quelconque supérieur à r.

Pour déterminer la classe d'une forme de degré supérieur, prenons par exemple une forme du second degré, qui ne soit pas une forme dérivée

$$\Omega = \sum_{i,\,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k\,; \tag{40}$$

le raisonnement est d'ailleurs général. Soit Ω_1 la forme auxiliaire

$$\Omega_1 = e^{x_{n+1}}\Omega = e^{x_{n+1}}\Big(\sum_{i,\,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k\Big), \tag{41}$$

où x_{n+1} est une nouvelle variable indépendante, qui restera la même dans tous les changements de variables portant uniquement sur les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La forme dérivée Ω'_1 a pour expression

$$\begin{aligned}(42)\quad \Omega'_1 &= e^{x_{n+1}}\Omega' + e^{x_{n+1}}dx_{n+1}\Omega\\ &= e^{x_{n+1}}\Big\{\sum_{i,\,k,\,l} A_{ikl}\,dx_i\,dx_k\,dx_l + \sum_{i,\,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k\,dx_{n+1}\Big\},\\ &\qquad\qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned}$$

Le système S'_1 associé à la forme Ω'_1 se compose de deux groupes d'équations

$$S'_1\left\{\begin{array}{lll}(43) & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,dx_k = 0, & (i = 1, 2, \ldots, n)\\ (44) & \displaystyle\sum_{l=1}^{n} A_{ikl}\,dx_l + A_{ik}\,dx_{n+1} = 0, & (i, k = 1, 2, \ldots, n).\end{array}\right.$$

Ce système S'_1 est complètement intégrable, d'après la proposition générale du paragraphe précédent. C'est aussi un système covariant de la forme Ω, relativement à tout changement de variables portant uniquement sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on adjoint aux équations du système S'_1 l'équation $dx_{n+1} = 0$, on obtient un nouveau système complètement intégrable qui, abstraction faite de la dernière équation (la seule qui contienne dx_{n+1}), se compose des deux groupes d'équations

$$(45) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_{ik} dx_k = 0, \qquad \sum_{l=1}^{n} A_{ikl} dx_l = 0, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce système $S + S'$ s'obtient donc en prenant toutes les équations des deux systèmes S et S'. Il est évident, d'après cela, que c'est un système covariant de la forme Ω, et il serait facile de démontrer directement qu'il est complètement intégrable, par un raisonnement tout pareil à celui du numéro précédent.

Si le système $S + S'$ se compose de q équations linéairement distinctes, la forme Ω est de classe q.

Soit en effet $df_1 = 0, \ldots, df_q = 0$ un système de q intégrales premières distinctes de $S + S'$. Si l'on prend un nouveau système de variables $(y_1, \ldots, y_n)$ telles que $y_1 = f_1, \ldots, y_q = f_q$, la forme Ω se change en une nouvelle forme

$$\Omega = \sum_{i, k} B_{ik} dy_i dy_k.$$

et le système $S + S'$ correspondant à cette forme doit se composer des q équations $dy_1 = 0, \ldots, dy_q = 0$. Tous les coefficients B_{ik}, B_{ikl}, où l'un des indices est supérieur à q, doivent donc être nuls. Il s'ensuit que les différentielles $dy_1, \ldots, dy_q$ figurent seules dans l'expression de Ω. De plus, tous les coefficients B_{ik}, où $i < q + 1$, $k < q + 1$, ne dépendent que de $y_1, y_2, \ldots, y_q$. On a par exemple, si $i < q + 1$, $k < q + 1$,

$$B_{ikn} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_n} + \frac{\partial B_{kn}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{ni}}{\partial y_k} = 0,$$

et par suite $\dfrac{\partial B_{ik}}{\partial y_n} = 0$; on démontrerait de même que B_{ik} est indépendant de $y_{n-1}, \ldots, y_{q+1}$.

En second lieu, il n'est pas possible d'exprimer Ω au moyen de q' variables $z_1, z_2, \ldots, z_{q'}$ et de leurs différentielles, si $q' < q$. En effet, le système $S + S'$, ne contenant que q' différentielles, ne pourrait se composer de q équations linéairement distinctes.

Soit c la classe d'une forme Ω, c' la classe de la forme dérivée. Lorsque le système S ne renferme pas d'équations linéairement distinctes des équations de S′, on a $c = c'$, et il suffira d'intégrer le système S′ pour ramener Ω et Ω' à une forme réduite par un même changement de variables.

Si $c > c'$, le système $S + S'$ contient $c - c'$ équations de plus que le système S′. Pour intégrer le système $S + S'$, on intégrera d'abord le système S′, et il restera ensuite à intégrer un système complètement intégrable de $c - c'$ équations.

Exemple. — Soit $\Omega = x_1^2 dx_2 dx_3 + x_1 dx_2 dx_4 + dx_3 dx_4$; on a

$$\Omega' = 2x_1 dx_1 dx_2 dx_3 + dx_1 dx_2 dx_4.$$

Le système S′ ne comprend que trois équations distinctes

$$2x_1 dx_3 + dx_4 = 0, \qquad dx_1 = 0, \qquad dx_2 = 0,$$

tandis que le système $S + S'$ comprend quatre équations

$$dx_1 = 0, \qquad dx_2 = 0, \qquad dx_3 = 0, \qquad dx_4 = 0.$$

La forme Ω est donc de classe quatre, et la forme Ω' de classe trois. On peut écrire en effet

$$\Omega' = dx_1 dx_2 d(2x_1 x_3 + x_4).$$

Remarque. — Toute forme de degré p et de classe p peut être ramenée à la forme $\Omega = K dy_1 dy_2 \ldots dy_p$, où K doit être une fonction de $y_1, \ldots, y_p$. On peut donc supposer $K = 1$, et Ω est une différentielle totale symbolique.

Toute forme de degré p et de classe $p + 1$ peut de même être ramenée à la forme $y_{p+1} dy_1 dy_2 \ldots dy_p$ (n° **28**), et n'est pas une différentielle totale symbolique. La forme dérivée est aussi de classe $p + 1$.

Application. — Etant données p fonctions quelconques indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n (n > p)$, les déterminants fonctionnels $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots f_p)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p nombres entiers différents choisis parmi les n premiers nombres, vérifient des relations différentielles et des relations algébriques. On obtient ces relations en exprimant que la forme symbolique

$$\Omega = \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p} = df_1 df_2 \ldots df_p,$$

où le signe Σ est étendu à toutes les combinaisons p à p des n indices, est une différentielle totale symbolique de classe p. On a les relations différentielles en écrivant que Ω est une différentielle totale symbolique, et les relations algébriques en écrivant que Ω est de classe p. Ces conditions sont suffisantes pour que les fonctions $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ soient les jacobiens de p fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ par rapport à p des variables x_i, car toute forme de degré p et de classe p, qui est une différentielle totale symbolique, est réductible à la forme $df_1 df_2 \ldots df_p$. Il suffit même, nous venons de le voir, que cette forme soit de classe p. On peut donc écrire les conditions de deux façons, soit en écrivant que Ω est une différentielle totale symbolique, et que les équations de S se réduisent à p équations distinctes, soit en écrivant que les équations du système S + S′ se réduisent à p équations distinctes.

35. Analogies avec une forme de Pfaff. — Le système S′ est l'analogue du système S_1 étudié au n° **5**, et le système S + S′ l'analogue du système S_2 (n° **6**), qui détermine la classe d'une forme de Pfaff. On peut expliquer comme il suit pourquoi les systèmes S′ et S + S′ sont une généralisation naturelle des systèmes S_1 et S_2. Etant donné une forme symbolique de degré p

$$\Omega = \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

considérons p éléments linéaires différents

$$(dx_1^1, dx_2^1, \ldots, dx_n^1), \quad (dx_1^2, dx_2^2, \ldots, dx_n^2), \ldots, (dx_1^p, \ldots, dx_n^p),$$

nous dirons que ces p éléments sont *en involution relativement à la forme* Ω, s'ils satisfont à la relation

$$\sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \left(dx_{\alpha_1}\right)^1 \left(dx_{\alpha_2}\right)^2 \ldots \left(dx_{\alpha_p}\right)^p = 0,$$

la sommation étant étendue à tous les arrangements des n indices n à p.

Dans le cas particulier où $p=2$, si la forme donnée est la forme dérivée ω' d'une forme de Pfaff ω, la définition de deux éléments linéaires en involution coïncide bien avec celle qui a été donnée plus haut (n° **3**) Il résulte aussi de cette définition que p éléments linéaires distincts appartenant à une même multiplicité intégrale de l'équation $\Omega=0$ sont en involution relativement à la forme Ω.

Un élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ est un élément *singulier* pour une forme Ω s'il est en involution avec $p-1$ autres éléments linéaires quelconques relativement à cette forme. Les équations du système S déterminent précisément les éléments singuliers pour la forme Ω, et les équations S′ les éléments singuliers pour la forme dérivée Ω'. Dans le cas limite où la forme Ω est une forme linéaire, les éléments singuliers pour cette forme ne peuvent être que les éléments intégraux eux-mêmes. On voit d'après cela que le système S_1 (n° **5**) définit les éléments singuliers pour la forme dérivée ω', et le système S_2 les éléments singuliers pour les deux formes ω et ω'. Les systèmes S′ et S + S′ pour une forme de degré quelconque jouent donc le même rôle dans l'étude de cette forme que les systèmes S_1 et S_2 dans l'étude d'une forme de Pfaff.

L'analogie avec la théorie d'une forme linéaire se poursuit plus loin. Le système S'_1 écrit plus haut est évidemment l'analogue du système S_4 (n° **7**) ou système caractéristique pour une équation de Pfaff, tandis que le système S″ formé par le second groupe des équations de S'_1

$$(S'')\qquad \sum_{l=1}^{n} A_{ikl}dx_l + A_{ik}dx_{n+1} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

est l'analogue du système S_3, ou système de Pfaff.

Si l'on peut satisfaire aux équations de S″ sans supposer $dx_{n+1}=0$, le système S + S′ est identique au système S′. Si nous posons en effet

$$\frac{dx_l}{dx_{n+1}} = \lambda_l,$$

les équations de S″ s'écrivent

$$\sum_l A_{ikl}\lambda_l + A_{ik} = 0,$$

et on en déduit

$$\sum_l \lambda_l \left\{ \sum_k A_{ikl} dx_k \right\} + \sum_k A_{ik} dx_k = 0,$$

de sorte que les équations du système S sont des conséquences des équations de S′.

Par conséquent, lorsque les deux formes Ω, Ω' sont de classes différentes, on ne peut satisfaire aux équations de S″ qu'en prenant $dx_{n+1} = 0$. Ce système S″ est donc identique à S′, et le système S'_1 est identique à S + S′.

Lorsque les deux formes Ω, Ω' sont de même classe, les équations de S sont des conséquences des équations de S′, et les deux systèmes S″, S_1' sont identiques. On voit en effet, par une combinaison immédiate, que les éléments linéaires qui vérifient les relations S″ vérifient aussi les relations

$$\sum_{k,\,l} A_{ikl} dx_k dx_l + dx_{n+1} \left(\sum_k A_{ik} dx_k \right) = 0,$$

qui deviennent, en tenant compte de la condition $A_{ikl} + A_{ilk} = 0$,

$$dx_{n+1} \left(\sum_k A_{ik} dx_k \right) = 0.$$

Si dx_{n+1} n'est pas nul, on retrouve les équations du système S. Si $dx_{n+1} = 0$, le système S″ est identique à S′ et, par hypothèse, les équations de S sont des conséquences des équations de S′. Tous les éléments linéaires qui vérifient le système S″ vérifient donc aussi le système S et par suite le système S_1'.

Des quatre systèmes complètement intégrables S′, S + S′, S_1', S″, il y a donc au plus deux systèmes distincts.

36. Classe d'une équation symbolique. Caractéristiques. — Le système S_1' donne la *classe de l'équation* $\Omega = 0$. Supposons que ce système se compose de $m + 1$ équations distinctes. Il admet alors m intégrales indépendantes de x_{n+1} et une dernière intégrale dépendant de x_{n+1} de la forme

$$x_{n+1} + F(x_1, \ldots, x_n) = C,$$

qui s'obtiendra par une quadrature quand on aura obtenu les intégrales premières indépendantes de x_{n+1}. Imaginons que l'on fasse un changement de variables de façon que $y_1, y_2, \ldots, y_m$ soient précisément m intégrales de S_1', la variable auxiliaire x_{n+1} n'étant pas changée. Les équations

$$\sum_{k=1}^{n} B_{ik} dy_k = 0, \qquad \sum_{l=1}^{n} B_{ikl} dy_l + B_{ik} dx_{n+1} = 0$$

devront être vérifiées quand on y remplacera $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ par zéro. Il faut pour cela que tous les coefficients B_{ik}, où l'un des indices est supérieur à m, soient nuls, de sorte que Ω ne renfermera que les différentielles $dy_1, \ldots, dy_m$. Il faut de plus que les relations

$$\sum_{l=m+1}^{n} B_{ikl} dy_l + B_{ik} dx_{n+1} = 0 \qquad (i \leqslant m, \quad k \leqslant m)$$

se réduisent à une seule, ce qui exige que le rapport $\frac{B_{ikl}}{B_{ik}}$ soit indépendant des indices i et k. Mais on a

$$B_{ikl} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l} + \frac{\partial B_{kl}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{li}}{\partial y_k} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l}.$$

Le rapport $\frac{1}{B_{ik}} \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_l}$ doit donc être indépendant de y_l $(l > m)$, et par suite le rapport de deux coefficients quelconques de Ω est indépendant des variables $y_{m+1}, \ldots, y_n$, et l'on a pour Ω une expression de la forme

$$(46) \qquad \Omega = K \sum_{i,k} C_{ik} dy_i dy_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

les coefficients C_{ik} ne dépendant que des variables $y_1, \ldots, y_m$. Par un raisonnement déjà employé plusieurs fois, on démontre que la forme Ω ne peut être mise sous une forme analogue, où le nombre m serait remplacé par un nombre inférieur. C'est ce nombre m que j'appelle *la classe de l'équation* $\Omega = 0$.

Nous avons maintenant deux cas à distinguer. Si le facteur K ne dépend que des variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut évidemment supposer $K = 1$. La forme Ω est elle-même de classe m, mais la classe de Ω' peut être un nombre quelconque inférieur à m.

Si le facteur K dépend d'autres variables que $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut supposer $K = y_{m+1}$. Les $m+1$ équations du système S'_1 se réduisent à

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_m = 0, \qquad dy_{m+1} + y_{m+1}dx_{n+1} = 0.$$

La classe de Ω est $m+1$, tandis que la classe de l'équation $\Omega = 0$ est seulement m. Dans ce cas, la classe de Ω' est aussi $m+1$, puisque les systèmes S'_1 et $S + S'$ sont différents.

En résumé, nous avons trois nombres à considérer : 1° la classe c de la forme Ω ; 2° la classe c' de la forme Ω' ; 3° la classe γ de l'équation $\Omega = 0$. Ces nombres ne peuvent être tous les trois différents, puisque l'on a $\gamma = c$, si $c > c'$. Dans le cas d'une forme de Pfaff, deux de ces nombres sont toujours différents.

Pour une forme de degré supérieur, ces trois nombres peuvent être égaux.

Par exemple, pour la forme $\Omega = x_1 dx_2 dx_3 + x_4 dx_5 dx_6 + dx_5 dx_6$, les systèmes S', S'', $S + S'$, S'_1 sont identiques et donnent $dx_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Les trois classes sont égales à 6. Il en est ainsi toutes les fois que le système S est équivalent à S'. Au contraire, pour une forme $y_{p+1}dy_1 \ldots dy_p$, on a $c = c' = p+1$, $\gamma = p$.

Le système S'_1, où x_{n+1} est regardé comme un paramètre auxiliaire, est encore *le système caractéristique pour l'équation* $\Omega = 0$. Toute multiplicité intégrale de ce système, c'est-à-dire toute multiplicité dont tous les éléments linéaires vérifient les m équations de S'_1, est une *multiplicité caractéristique.* Il existe des multiplicités caractéristiques M_{n-m} à $n-m$ dimensions représentées par les équations

$$y_1 = C_1, \ldots, y_m = C_m,$$

où $y_1, \ldots, y_m$ sont m intégrales de S'_1, indépendantes du paramètre x_{n+1}, et toute multiplicité caractéristique s'obtient en prenant une multiplicité arbitraire sur une de ces multiplicités M_{n-m}. Nous dirons que $y_1, \ldots, y_m$ forment un système de variables caractéristiques.

Le lieu des multiplicités caractéristiques M_{n-m} issues des différents points d'une multiplicité intégrale quelconque M_r de l'équa-

tion $\Omega = 0$ *est aussi une multiplicité intégrale de la même équation.*

La démonstration est toute pareille à celle du n° **17**. Supposons l'équation $\Omega = 0$ ramenée à une forme réduite où ne figurent que les m variables caractéristiques $y_1, \ldots, y_m$, et leurs différentielles. Soient

$$(47) \qquad y_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_r), \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

les équations qui représentent une intégrale M_r à r dimensions, $u_1, \ldots, u_r$ étant r paramètres arbitraires. Les conditions qui expriment que les équations (47) définissent une multiplicité intégrale ne font intervenir que les m fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. On peut donc remplacer $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$ par des fonctions absolument arbitraires des r paramètres u_i ou d'autres paramètres. Les équations

$$y_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_r), \ldots, y_m = \varphi_m(u_1, \ldots, u_r),$$

$$y_{m+1} = u_{r+1}, \ldots, y_n = u_{r+n-m},$$

où $u_{r+1}, \ldots, u_{r+n-m}$ sont de nouveaux paramètres arbitraires, représentent donc aussi une multiplicité intégrale qui sera à $r + n - m$ dimensions au plus. Il est clair que cette multiplicité est le lieu des multiplicités caractéristiques M_{n-m} issues des différents points de la multiplicité M_r. En particulier, le lieu des multiplicités caractéristiques M_{n-m} issues des différents points d'une multiplicité quelconque d'ordre inférieur à p est une multiplicité intégrale.

Remarque. — Considérons le produit symbolique de p formes de Pfaff distinctes

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p.$$

Si les p équations $\omega_i = 0$ forment un système complètement intégrable, ce produit peut être ramené à la forme

$$\Omega = \mathrm{K} dy_1 \ldots dy_p ;$$

$y_1, \ldots, y_p$ sont les variables caractéristiques, et la détermination des multiplicités caractéristiques est ramenée à l'intégration du système des p équations $\omega_i = 0$.

Plus généralement, si Ω est le produit de p formes de Pfaff *quel-*

conques linéairement distinctes, la classe de l'équation $\Omega = 0$ est égale à la classe du système de Pfaff formé par les p équations $\omega_i = 0$ (Voir *plus loin Chap.* VI).

37. Remarques sur l'intégration des systèmes précédents — Les systèmes S', S + S', ne sont pas des systèmes différentiels quelconques. *Si l'on connaît toutes les intégrales du système S', sauf une, on peut achever l'intégration par une quadrature.* Supposons que le système S' se compose de r équations distinctes et que l'on connaisse $r - 1$ intégrales premières. On peut supposer que l'on ait effectué un changement de variables tel que ces intégrales premières soient $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$. Les r équations distinctes du système S' doivent donc se composer des $r - 1$ équations $dy_1 = 0, \ldots, dy_{r-1} = 0$, et d'une seule équation distincte de celles-là. En d'autres termes, les équations du système S' doivent se réduire à une seule, quand on y fait $dy_1 = 0, \ldots dy_{r-1} = 0$. Elles ne peuvent d'ailleurs être toutes vérifiées identiquement après cette substitution, car le système S' ne comprendrait alors que $r - 1$ équations distinctes au plus. *Tous les coefficients B_{ikl}, où deux des indices sont supérieurs à $r - 1$, doivent être nuls.* Supposons, par exemple, que l'on ait $B_{ikh} \neq 0$, h et k étant supérieurs à $r - 1$ Les deux équations du système S', où l'on a fait $dy_1 = 0, \ldots dy_{r-1} = 0$,

$$\sum_{l=r}^{n} B_{ikl}\,dy_l = 0, \qquad \sum_{l=r}^{n} B_{ihl}\,dy_l = 0,$$

ne peuvent se réduire à une seule, car la première contient un terme en dy_h et ne contient pas de terme en dy_k, tandis que c'est l'inverse pour la seconde.

Cela étant, prenons un système de valeurs pour les indices i et k tel que tous les coefficients B_{ikl} (où $l \geqq r$) ne soient pas nuls. La relation générale

$$(48) \qquad \frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_h} - \frac{\partial B_{hlk}}{\partial y_i} + \frac{\partial B_{lhi}}{\partial y_k} - \frac{\partial B_{hik}}{\partial y_l} = 0$$

devient, puisque $B_{klh} = B_{lhi} = 0$, si l et h sont $\geqq r$,

$$(49) \qquad \frac{\partial B_{ikl}}{\partial y_h} - \frac{\partial B_{ikh}}{\partial y_l} = 0 \qquad (l, h = r, r+1, \ldots n).$$

Le premier membre de l'équation $\sum_{l=r}^{n} B_{ikl}\,dy_l = 0$, où l'on regarde $y_1, \ldots, y_{r-1}$ comme des paramètres, est donc une différentielle exacte, et la dernière intégrale s'obtient bien par une quadrature.

Le théorème classique de Jacobi sur le multiplicateur peut être considéré comme un cas particulier de cette proposition. Supposons en effet que le système d'équations différentielles

$$(50) \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n}$$

admette pour multiplicateur l'unité, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0.$$

Si n est impair, par exemple, la forme
$\Omega_{n-1} = A_1 dx_2 \ldots dx_n + A_2 dx_3 \ldots dx_n dx_1 + \ldots + A_n dx_1 \ldots dx_{n-1}$
est une différentielle exacte (nº **26**), et le système S' correspondant est identique au système donné (50).

On démontrerait de la même façon que, si l'on connaît toutes les intégrales du système S + S' sauf une, les intégrales connues comprenant celles du système S', on peut trouver la dernière intégrale par une quadrature.

Dans le cas où l'on a $c = \gamma + 1$, on a vu au numéro précédent que si l'on a intégré le système caractéristique, on a sans aucune intégration la dernière intégrale du système S + S'.

Quant au système caractéristique lui-même, l'exemple cité à la fin du numéro précédent prouve qu'il peut être un système complètement intégrable quelconque.

38. Rang d'une fonction relativement à une forme symbolique. — Soit Ω une forme symbolique de degré p à n variables, et de classe c. Si, dans cette forme, on remplace l'une des variables, x_1 par exemple, par une constante C et dx_1 par zéro, on obtient une nouvelle forme à $n - 1$ variables Ω_1 de classe $c_1 = c - r$, r étant positif ou nul. Nous dirons que r est le rang de x_1 relativement à la forme Ω. Plus généralement, $f(x_1, \ldots, x_n)$ étant une fonction quelconque, supposons que nous établissions entre les n variables x_i la relation $f = C$, d'où résulte la relation $df = 0$ entre leurs différentielles. Ce cas se ramène immédiatement au précédent par un changement de variables. Si par exemple f contient x_1, on peut conserver les variables $x_2, \ldots, x_n$; en remplaçant x_1 par sa valeur tirée de $f = C$, et dx_1 par sa valeur tirée de $df = 0$, on obtient une forme Ω_1, à $n - 1$ variables, et de classe $c_1 = c - r$. *Le nombre r est le rang de la fonction f relativement à la forme Ω.*

Supposons Ω ramenée à une forme réduite, c'est-à-dire exprimée au moyen de c variables $y_1, y_2, \ldots, y_c$, et de leurs différentielles. Si la fonction donnée f ne s'exprime pas au moyen des variables $y_1, \ldots, y_c$ seulement, mais renferme d'autres variables, il est clair que la relation $f = C$ ne modifie pas l'expression de la forme réduite, et par suite le rang de f est égal à zéro. *Les seules fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$ dont le rang relativement à une forme Ω n'est pas nul sont donc les intégrales du système $S + S'$, dont l'ordre est égal à la classe de Ω.*

Pour trouver le rang d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$, on peut appliquer la règle générale suivante [1].

Soient c la classe de la forme Ω, et γ la classe du produit symbolique Ωdf; le rang de f relativement à la forme Ω est égal à $c - \gamma + 1$.

Supposons toujours Ω mise sous une forme réduite, où figurent seulement les variables $y_1, \ldots, y_c$ et leurs différentielles. Si la fonction f est indépendante de $y_1, \ldots, y_c$, il est clair que le produit Ωdf est de classe $c + 1$: il est d'ailleurs aisé de s'en assurer en observant que le système S + S' relatif à ce produit contient une équation de plus, soit $df = 0$, que le système correspondant à la forme Ω. On a dans ce cas $\gamma = c + 1$, et par suite $r = 0$, conformément à ce qui vient d'être énoncé.

Si f est une intégrale du système S + S', nous pouvons évidemment supposer que l'on a $f = y_1$. Nous pouvons écrire $\Omega = \Pi_1 + \Pi_2 dy_1$, Π_1 et Π_2 étant deux formes de degrés p et $p - 1$ respectivement, la première Π_1 ne renfermant pas dy_1. Soit c_1 la classe de la forme Π_1 quand on y regarde y_1 comme un paramètre ; ce nombre c_1 est inférieur à c, et le rang de y_1 est $c - c_1$. D'ailleurs on a $\Omega_1 = \Omega dy_1 = \Pi_1 dy_1$ et par suite $\Omega_1' = \Pi_1' dy_1$, Π_1' désignant la forme dérivée de Π_1 où l'on regarde y_1 comme un paramètre. Les équations du système S + S' qui déterminent la classe de la forme Ω_1 s'obtiennent donc en adjoignant la relation $dy_1 = 0$ aux équations du système analogue dont l'ordre est égal à la classe de

(1) *Comptes rendus*, t. 165, p. 541, 1917.

la forme Π_1 où y_1 est regardé comme un paramètre. On a donc $\gamma = c_1 + 1$, et par suite $r = c - \gamma + 1$.

Il est à remarquer que l'énoncé est en défaut si Π_1 disparaît ; dans ce cas γ et c_1 sont nuls, et y_1 est de rang c. Ceci ne peut arriver que si la forme Ω est divisible par un facteur df.

Pour qu'une fonction f soit de rang r, il faut donc que le produit Ωdf soit de classe $c - r + 1$. En écrivant que les équations du système correspondant $S + S'$ se réduisent à $c - r + 1$ équations distinctes, on a un système d'équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre auxquelles doit satisfaire la fonction f. Ces systèmes n'ont pas été, je crois, étudiés jusqu'à présent.

Exemple. — Soit $\Omega = dx_1dx_2dx_3 + dx_4dx_5dx_6$; on a $\Omega' = 0$,

$$\Omega df = dx_1dx_2dx_3(p_4dx_4 + p_5dx_5 + p_6dx_6)$$

$$+ dx_4dx_5dx_6(p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3), \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Les équations du système S' relatif à Ωdf donnent les 6 conditions $dx_i = 0$, à moins que l'on n'ait à la fois $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, ou $p_4 = p_5 = p_6 = 0$. Il y a donc deux familles de fonctions de rang *trois*, les fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et les fonctions $\Phi(x_4, x_5, x_6)$. Toute autre fonction est de rang *un*.

Remarque. — Il n'existe pas toujours de fonctions de rang supérieur à un pour une forme symbolique Ω. Soit par exemple Ω_2 une forme du second degré de classe 5 ; s'il existe une fonction de rang deux par rapport à cette forme, on peut, par un choix convenable des variables, l'écrire

$$\Omega_2 = x_1dx_2dx_3 + (A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 + A_4dx_4)dx_5.$$

La forme la plus générale du second degré à cinq variables ne peut être ramenée à cette forme, car elle dépend de *dix* coefficients arbitraires, Ω_2 n'en renferme que *quatre*, et le changement de variables le plus général n'introduit que *cinq* fonctions arbitraires.

Généralisation. — On peut généraliser cette théorie, en considérant un groupe de fonctions au lieu d'une fonction unique. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_q$ un système de q fonctions distinctes des variables indépendantes. Si l'on prend un nouveau système de variables, tel que $f_1 = y_1, \ldots, f_q = y_q$, il peut arriver qu'en faisant

$y_i = C_i$, $dy_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ dans la forme Ω, la classe de la nouvelle forme soit inférieure de r unités à la classe de la forme Ω. On dit alors que le groupe de fonctions $(f_1, f_2, \ldots, f_q)$ est de rang r relativement à la forme Ω. Pour que r soit positif, il faut et il suffit que, parmi toutes les fonctions de la forme $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_q)$, il y ait une ou plusieurs intégrales du système $S + S'$; la démonstration est toute pareille à la précédente. On peut donc se borner à étudier les groupes formés d'intégrales du système $S + S'$. Soient, par exemple, f_1 et f_2 deux intégrales de ce système, de rangs r_1 et r_2 respectivement ; si les relations $f_1 = C_1$, $f_2 = C_2$ abaissent la classe de Ω de r unités, r est le rang du groupe (f_1, f_2). Il est à remarquer que r est au moins égal au plus grand des deux nombres r_1, r_2, mais il n'est pas forcément égal à $r_1 + r_2$. Ainsi, pour la forme de Pfaff $\omega = y_1 dz_1 + y_2 dz_2$, les fonctions y_1, y_2 sont de rang *un*, et z_1, z_2 sont de rang *deux* ; les couples (y_1, z_1), (y_2, z_2) sont de rang *deux* aussi, les couples (z_1, y_2), (z_2, y_1), (y_1, y_2) sont de rang *trois*, le couple (z_1, z_2) est de rang *quatre*. Voici un autre exemple où r est supérieur à $r_1 + r_2$. Pour la forme du second degré $x_4 dx_1 dx_2 + x_2 dx_3 dx_4$, x_1 et x_3 sont de rang *un*, tandis que le couple (x_1, x_3) est de rang *quatre*. On reviendra en détail sur ce sujet pour une forme de Pfaff (Chap. IV).

Application. — Une différentielle totale symbolique du second degré est toujours de classe paire, puisque le rang de cette forme est toujours un nombre pair (n° **32**). Il s'ensuit que le rang d'une fonction f relativement à Ω' est *zéro* ou *deux* ; en reprenant une suite de raisonnements tout à fait analogues à ceux du n° **12**, il serait facile d'en déduire directement que cette forme Ω' peut être ramenée à une forme canonique

$$dy_1 dz_1 + \ldots + dy_p dz_p,$$

si elle est de classe $2p$. Nous laisserons au lecteur le soin de développer lui-même la démonstration, sans supposer connue la réduction d'une forme de Pfaff. On peut prendre pour y_1 une fonction quelconque de rang deux (voir n° **12**).

39. Formes du second degré à quatre variables. — Soit Ω une forme du second degré à quatre variables

$$\Omega = \sum_{i,k} A_{ik} dx_i dx_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4); \tag{51}$$

si cette forme est une différentielle totale symbolique, elle est de classe 2 ou 4, et peut être ramenée à une des formes canoniques dy_1dy_2, $dy_1dy_2 + dy_3dy_4$, y_1, y_2, y_3, y_4 étant des fonctions distinctes des variables x_1, x_2, x_3, x_4. Si Ω n'est pas une différentielle totale symbolique, elle est de classe 3 ou 4 ; si elle est de classe 3, elle peut être ramenée à la forme canonique $y_3dy_1dy_2$ (n° **34**), les trois fonctions y_1, y_2, y_3 étant distinctes. Considérons enfin le cas général où Ω est de classe 4, sans être une différentielle totale symbolique.

La forme dérivée

$$(52)\qquad \Omega' = \sum dA_{ik}dx_idx_k = \left(\frac{\partial A_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{42}}{\partial x_3}\right) dx_2dx_3dx_4$$
$$+ \left(\frac{\partial A_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_4}\right) dx_3dx_4dx_1$$
$$+ \left(\frac{\partial A_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{24}}{\partial x_1}\right) dx_4dx_1dx_2$$
$$+ \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2dx_3$$

n'est pas identiquement nulle, et l'on a observé qu'elle était de troisième classe. On peut la ramener (n° **34**) à la forme canonique $\Omega' = dy_1dy_2dy_3$, en prenant pour y_1, y_2, y_3 trois intégrales distinctes convenablement choisies de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(53)\qquad \Omega'df = -\left(\frac{\partial A_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{42}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}$$
$$+ \left(\frac{\partial A_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_4}\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$- \left(\frac{\partial A_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{24}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial f}{\partial x_3}$$
$$+ \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

On peut même ramener Ω' à cette forme canonique d'une infinité de façons en remplaçant y_1, y_2, y_3 par trois fonctions $Y_i(y_1, y_2, y_3)$ $(i = 1, 2, 3)$, dont le jacobien $\dfrac{D(Y_1, Y_2, Y_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}$ est égal à l'unité.

D'après sa signification, *l'équation* (53) *est un covariant de la* *forme* Ω, relativement à tout changement de variables, puisque toute intégrale de cette équation annule identiquement le produit symbolique $\Omega' df$, qui est un covariant de Ω. Le système d'équations différentielles

$$(54)\quad \frac{dx_1}{\frac{\partial A_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial A_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial A_{42}}{\partial x_3}} = \frac{-dx_2}{\frac{\partial A_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial A_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial A_{13}}{\partial x_4}}$$
$$= \frac{dx_3}{\frac{\partial A_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial A_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial A_{24}}{\partial x_1}} = \frac{-dx_4}{\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial A_{31}}{\partial x_2}}.$$

associé à l'équation aux dérivées partielles (53), est aussi un *système covariant* de la forme Ω.

Les intégrales de l'équation (53) sont de rang 2 ou 4 relativement à la forme Ω.

Il suffit évidemment de prouver que l'intégrale y_1 par exemple est de rang 2 ou 4. Or, puisque l'on a $\Omega' = dy_3 dy_4 dy_2$, on en conclut que la forme Ω peut s'écrire

$$\Omega = y_3 dy_1 dy_2 + \omega',$$

ω étant une forme de Pfaff à quatre variables y_1, y_2, y_3, y_4. Si l'on fait maintenant $y_1 = C$, ω' devient une différentielle totale symbolique à trois variables et du second degré ; elle est donc de classe deux, à moins d'être identiquement nulle, ce qui ne peut arriver que si Ω est divisible par dy_1.

Réciproquement, soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ une fonction de rang deux relativement à la forme Ω. Cette forme peut s'écrire $\Omega = \omega df + \Pi$, ω étant une forme de Pfaff, Π une forme du second degré qui ne contient pas la différentielle df, et qui est de seconde classe quand on regarde f comme une constante. On peut donc, en choisissant deux autres fonctions f_1, f_2, distinctes de f, mettre encore Ω sous la forme

$$\Omega = \omega_1 df + df_1 df_2,$$

on en tire $\Omega' = d\omega_1 df$, et par suite f est une intégrale de l'équation (53) $\Omega' df = 0$.

Il existe donc pour une forme générale du second degré à quatre variables une infinité de fonctions de rang deux, qui sont des fonctions arbitraires de trois fonctions indépendantes. Ce sont des *fonctions distinguées* relativement à cette forme. Nous avons vu qu'il n'existait pas de fonctions de cette espèce pour une différentielle totale symbolique du second ordre de classe 4 à 4 variables.

Si la forme Ω admet un facteur intégrant sans être une différentielle totale symbolique, on peut l'écrire $\Omega = y_1 \Omega_1$, la forme Ω_1 étant une différentielle totale symbolique de classe *quatre*. La variable y_1 est nécessairement de rang *deux* relativement à cette forme Ω_1, qui peut alors s'écrire $dy_1 dy_2 + dy_3 dy_4$, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent. La forme Ω peut donc être ramenée à une forme canonique

$$\Omega = y_1(dy_1 dy_2 + dy_3 dy_4),$$

et l'équation (53) devient $\dfrac{\partial f}{\partial y_2} = 0$.

Si Ω n'admet pas de facteur intégrant, il n'existe pas de forme canonique. Nous venons de voir que Ω peut être ramenée à la forme

$$\Omega = y_1 dy_2 dy_3 + \Omega^{(1)},$$

$\Omega^{(1)}$ étant une différentielle totale symbolique qui contient nécessairement une variable y_4 distincte des variables y_1, y_2, y_3. Cette forme $\Omega^{(1)}$ peut être de classe 2 ou 4. Si elle est de classe deux, on peut écrire Ω sous la forme

$$\Omega = y_1 dy_2 dy_3 + dy_4 df,$$

f étant une fonction arbitraire de y_1, y_2, y_3, y_4. Si $\Omega^{(1)}$ est de classe quatre, elle renferme les quatre variables y_1, y_2, y_3, y_4, et on peut la mettre sous la forme

$$\Omega^{(1)} = dy_1 df + \Omega^{(2)},$$

$\Omega^{(2)}$ étant une autre différentielle totale symbolique de classe deux. Si f ne renfermait pas y_4, la forme $y_1 dy_2 dy_3 + dy_1 df$ serait une forme de classe trois, que l'on pourrait écrire par un changement effectué sur ces variables seulement, $z_1 dz_2 dz_3$ et l'on serait ramené au cas précédent. Si f contient la variable y_4, on peut poser $f = y_4$, et Ω prend la forme

$$\Omega = y_1 dy_2 dy_3 + dy_1 dy_4 + df_1 df_2,$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions arbitraires. Il est évident *a priori* qu'on ne peut trouver pour Ω de forme réduite où figurent *moins de deux fonctions* arbitraires, puisque cette forme contient *six* coefficients A_{ik}, et un changement de variables n'introduit que *quatre* fonctions arbitraires.

Remarque. — L'intégrale $\int \Omega'$ est un invariant intégral *absolu* pour le système d'équations différentielles (54), et l'intégrale $\int \Omega$ un invariant intégral *relatif* pour le même système (Voir chapitre V).

L'équation symbolique $\Omega = 0$ admet toujours une infinité d'intégrales à deux dimensions dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables. Si l'on considère, pour fixer les idées, x_1 et x_2 comme deux variables indépendantes, la multiplicité M_2 définie par les deux équations $x_3 = f(x_1, x_2)$, $x_4 = \varphi(x_1, x_2)$ est une intégrale de l'équation $\Omega = 0$, pourvu que les fonctions f et φ vérifient une seule relation

$$\Pi\left(x_1, x_2, f, \varphi, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant x_3, x_4, dx_3, dx_4 par f, φ, df, $d\varphi$ respectivement dans la forme Ω. L'une des fonctions f, φ peut être choisie arbitrairement, et la seconde est déterminée ensuite par une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On a déjà remarqué (nos **27** et **30**) que les équations de ces multiplicités peuvent être écrites explicitement, après l'intégration d'une équation de Pfaff, lorsque la forme Ω est le produit symbolique de deux formes linéaires, ou lorsqu'elle admet un multiplicateur [1].

[1] Certains problèmes de géométrie conduisent à des équations symboliques de la forme (51). En voici un exemple, qui se rattache à un problème étudié par M. Axel Egnell (*Comptes rendus*, t. 171, p. 1119).

Considérons la congruence de droites définie par les équations

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c},$$

où x, y, z, a, b sont des fonctions de deux paramètres arbitraires u et v. Pour que la surface S lieu du point (x, y, z) soit la *surface moyenne* de cette congruence, il faut et il suffit que les fonctions x, y, z, a, b vérifient l'équation symbolique

$$da\,dy - db\,dx + dz\,(b\,da - a\,db) = 0.$$

La surface S étant donnée, on peut poser

$$x = x_1,\ y = x_2,\ dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2,\ a = x_3,\ b = x_4,$$

et cette équation devient

$$\Omega = p_1 x_4 dx_1 dx_3 + (1 - p_1 x_3) dx_1 dx_4 + (p_2 x_4 - 1) dx_2 dx_3 - p_2 x_3 dx_2 dx_4 = 0\ ;$$

il serait facile d'en déduire les résultats de M. Axel Egnell.

La forme Ω admet un facteur intégrant si la surface S est un plan et dans ce cas seulement.

CHAPITRE IV

APPLICATION DES FORMES SYMBOLIQUES AU PROBLÈME DE PFAFF [1]

40. Dérivées successives d'une forme linéaire. — Soient ω une forme linéaire de différentielles à n variables

$$\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n$$

et ω' la forme dérivée

$$\omega' = dA_1 dx_1 + dA_2 dx_2 + \ldots + dA_n dx_n.$$

Le produit symbolique

$$\omega'' = \omega\omega' = (A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n)(dA_1 dx_1 + \ldots + dA_n dx_n)$$

est une forme du 3e ordre que nous appellerons la *seconde forme dérivée de* ω. De même le carré symbolique

$$\omega''' = \frac{1}{2}(\omega')^2 = \frac{1}{2}(dA_1 dx_1 + \ldots dA_n dx_n)^2$$

$$= \sum_{i,\,k} dA_i dx_i dA_k dx_k,$$

où la sommation est étendue à toutes les combinaisons des indices 2 à 2, est la *troisième forme dérivée de* ω. Le produit symbolique

$$\omega^{\mathrm{IV}} = \omega\omega''' = (A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n)\Big(\sum_{i,\,k} dA_i dx_i dA_k dx_k\Big)$$

est la *quatrième forme dérivée de* ω. D'une façon générale, la dérivée d'ordre impair $2m-1$ de ω est égale à la puissance $m^{\text{ième}}$ symbolique de ω', divisée par $m\,!$

$$\omega^{(2m-1)} = \frac{1}{m!}(\omega')^m\,;$$

[1] Voir le Mémoire déjà cité de M. E. Cartan, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, t. 16, 1899, p. 239-332).* Le contenu de ce Chapitre est extrait presque entièrement de ce Mémoire, sauf quelques changements dans les démonstrations.

c'est donc la somme de tous les produits m à m des produits symboliques dA_1dx_1, dA_2dx_2, ..., dA_ndx_n. La dérivée d'ordre pair $2m$ est égale au produit de ω par $\omega^{(2m-1)}$

$$\omega^{(2m)} = \omega(\omega')^m$$

La dérivée d'un ordre quelconque p est donc une forme de degré $p+1$.

Supposons qu'avec un nouveau système de variables $(y_1, \ldots, y_n)$ la forme ω se change en une forme ϖ linéaire par rapport aux différentielles dy_i. On a déjà démontré (nº **26**) que, par ce changement de variables, la forme dérivée ω' se change en ϖ'. Le produit symbolique $\omega'' = \omega\omega'$ se transforme donc en le produit symbolique $\varpi\varpi' = \varpi''$. La même propriété s'étend à toutes les formes dérivées de ω, qui se déduisent de ω et de ω' par des multiplications symboliques. Si un changement de variables transforme la forme linéaire ω en une nouvelle forme linéaire ϖ, la même transformation change la dérivée $\omega^{(p)}$ en la dérivée $\varpi^{(p)}$.

Soit $\omega = \omega_1 + \omega_2$ la somme de deux formes linéaires. On a évidemment $\omega' = \omega'_1 + \omega'_2$, et une dérivée d'ordre impair $\omega^{(2m-1)}$ est égale à la puissance $m^{\text{ième}}$ symbolique [1] de ω' divisée par $m!$

$$\omega^{(2m-1)} = \frac{1}{m!}(\omega'_1 + \omega'_2)^m.$$

Comme ω'_1 et ω'_2 sont des formes d'ordre pair, on a aussi

$$\omega^{(2m-1)} = \frac{1}{m!}\Big\{(\omega'_1)^m + \frac{m}{1}(\omega'_1)^{m-1}\omega'_2 + \frac{m(m-1)}{1,2}(\omega'_1)^{m-2}(\omega'_2)^2 + \ldots + (\omega'_2)^m\Big\},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(1)\qquad \omega^{(2m-1)} = \omega_1^{(2m-1)} + \omega_2^{(2m-1)} + \sum C_{pq}\omega_1^{(2p-1)}\omega_2^{(2q-1)},$$

C_{pq} étant un coefficient différent de zéro, et la somme des deux nombres positifs p et q étant égale à m. On remarquera qu'*il ne figure dans l'expression de* $\omega^{(2m-1)}$ *que les dérivées d'ordre impair de* ω_1 et de ω_2.

[1] Il ne faut pas confondre les deux expressions $(\omega)^m$ et $\omega^{(m)}$, dont la première désigne la puissance $m^{\text{ième}}$ symbolique de ω, qui est nulle, tandis que la seconde représente la $m^{\text{ième}}$ forme dérivée de ω.

On a de même

$$(2) \quad \omega^{(2m)} = \omega^{(2m-1)} \times \omega = \Big[\omega_1{}^{(2m-1)} + \omega_2{}^{(2m-1)} + \sum C_{pq}\omega_1{}^{(2p-1)}\omega_2{}^{(2q-1)}\Big][\omega_1 + \omega_2)$$
$$= \omega_1{}^{(2m)} + \omega_2{}^{(2m)} + \omega_1{}^{(2m-1)}\omega_2 + \omega_2{}^{(2m-1)}\omega_1 + \sum C_{pq}\omega_1{}^{(2p)}\omega_2{}^{(2q-1)} + \sum C_{pq}\omega_1{}^{(2p-1)}\omega_2{}^{(2q)}; \; (p+q=m);$$

chacun des produits partiels contient une forme dérivée d'ordre pair et une forme dérivée d'ordre impair. On remarquera que, dans les deux cas, toutes les dérivées d'ordre impair de ω_1 et de ω_2 y figurent.

Remarque. — Si, dans une forme linéaire ω, on supprime le terme en dx_1 et qu'on regarde x_1 comme une constante dans les coefficients de dx_2, ..., dx_n, on obtient une forme linéaire ω_1 à $n-1$ variables. Quand on fait de même $dx_1 = 0$ dans la $p^{\text{ième}}$ forme dérivée $\omega^{(p)}$, on obtient une forme de degré $p+1$ qui est précisément la $p^{\text{ième}}$ forme dérivée de ω_1, où x_1 est considéré comme un paramètre. Il est évident en effet qu'on aboutit au même résultat en faisant $dx_1 = 0$ au début des calculs qui conduisent de ω et de ω' à $\omega^{(p)}$, ou en effectuant ces calculs sans faire cette hypothèse, et remplaçant ensuite dx_1 par zéro dans le résultat obtenu. Or supposer $dx_1 = 0$ dans ω et ω', cela revient à remplacer ω par ω_1 et la forme dérivée ω' par ω'_1. Il est d'ailleurs évident que si la forme $\omega^{(p)}$ est nulle, il en est de même de $\omega_1{}^{(p)}$.

41. Nouvelle détermination de la classe d'une forme de Pfaff. — Toutes les formes dérivées successives d'une forme ω de classe c sont elles-mêmes de classe c au plus, car si ω ne renferme que c variables $x_1, x_2, \ldots, x_c$ et les différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_c$, il est de même de toutes ses formes dérivées. La dérivée $\omega^{(c)}$, étant de degré $c+1$, sera donc nulle; *la $c^{\text{ième}}$ forme dérivée $\omega^{(c)}$ d'une forme ω de classe c est nulle.* Il en est évidemment de même des formes dérivées suivantes.

Réciproquement, *si la $c^{\text{ième}}$ forme dérivée de ω est nulle, la forme ω est au plus de classe c* (1).

(1) La démonstration serait très facile en s'appuyant sur les propriétés des formes de Pfaff établies au chapitre I, mais la démonstration du texte est indépendante de cette théorie.

D'une façon plus précise, nous allons démontrer que *les* $c - 1$ *premières formes dérivées* ω', ω'', ..., $\omega^{(c-1)}$ *d'une forme* ω *de classe* c *ne sont pas nulles.*

Il en résulte que, pour avoir la classe d'une forme linéaire ω, il suffira de former la suite des dérivées successives de ω ; si la première forme dérivée qui est nulle est $\omega^{(m)}$, la classe de ω est m.

La proposition est évidente pour une forme de classe *un*. Elle est aussi très facile à établir pour une forme de classe *deux*. Si ω est une forme de classe *deux*, on peut l'écrire, par un choix convenable des variables, $\omega = y_1 dy_2$; on a alors

$$\omega' = dy_1 dy_2, \qquad \omega'' = \omega'.\omega = dy_1 dy_2 \times y_1 dy_2 = 0,$$

$$\omega''' = \frac{1}{2}(dy_1 dy_2)^2 = 0, \qquad \omega^{\text{IV}} = \omega''\omega = 0.$$

Pour établir que le théorème est général, il suffira donc de montrer que, s'il est vrai pour les formes de classe inférieure à c, il est encore vrai pour les formes de classe c.

Soit ω une forme de classe c. Nous pouvons supposer qu'elle ne contient que c variables et leurs différentielles

$$\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_c dx_c,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_c$ étant des fonctions des c variables $x_1, x_2, \ldots, x_c$, et de celles-là seulement. La forme ω_1 obtenue en faisant $dx_1 = 0$ dans ω,

$$\omega_1 = A_2 dx_2 + \ldots + A_c dx_c,$$

est au plus de classe $c - 1$, quand on regarde dans les coefficients x_1 comme une constante, car cette forme ne renferme plus que les $c - 1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_c$. *Elle ne peut être de classe inférieure à* $c - 2$. Supposons en effet qu'elle soit de classe $c - 3$ par exemple. On pourrait alors choisir un nouveau système de variables $y_2, \ldots, y_{c-2}$, fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_c$, telles que l'on ait

$$\omega_1 = B_2\left(dy_2 - \frac{\partial y_2}{\partial x_1}dx_1\right) + \ldots + B_{c-2}\left(dy_{c-2} - \frac{\partial y_{c-2}}{dx_1}dx_1\right),$$

$B_2, B_3, \ldots, B_{c-2}$ étant aussi des fonctions de $x_1, y_2, \ldots, y_{c-2}$, et l'on aurait

$$\omega = B_1 dx_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{c-2} dy_{c-2}.$$

Cette forme ω ne peut être de classe c. En effet, si B_1 ne dépend que de $x_1, y_2, \ldots, y_{c-2}$, ω ne renferme que ces $c-2$ variables et leurs différentielles. Si B_1 est indépendant de $x_1, y_2, \ldots, y_{c-2}$, on peut poser $B_1 = y_{c-1}$, y_{c-1} étant une nouvelle variable, et ω ne renferme encore que $c-1$ variables.

La forme ω_1 est donc de classe $c-2$ ou de classe $c-1$, quand on regarde x_1 comme une constante dans les coefficients $A_2, \ldots, A_c$.

On peut toujours choisir la variable x_1 de façon que la classe de ω_1 soit $c-2$. Supposons en effet que la classe de ω_1, où l'on donne à x_1 une valeur constante, soit $c-1$. La forme dérivée $\omega^{(c-2)}$ ne peut alors être nulle, car il en serait de même de la forme obtenue en faisant $dx_1 = 0$ dans $\omega^{(c-2)}$; or, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, cette nouvelle forme est identique à la forme dérivée $\omega_1^{(c-2)}$, prise en regardant x_1 comme un paramètre dans les coefficients de ω_1. Cette forme ne peut donc être nulle dans l'hypothèse où l'on se place.

La forme $\omega^{(c-2)}$ est donc une forme de degré $c-1$ à c variables dont tous les coefficients ne sont pas nuls, et l'équation

$$\omega^{(c-2)} df = 0$$

admet $c-1$ intégrales distinctes. Supposons que l'on prenne un nouveau système de variables $y_1, y_2, \ldots, y_c$, de façon que y_1 soit l'une de ces intégrales. La forme ω se transforme en une nouvelle forme

$$\varpi = B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots B_c dy_c,$$

et l'on a la relation

$$\varpi^{(c-2)} dy_1 = 0.$$

Il s'ensuit que la forme à laquelle se réduit $\varpi^{(c-2)}$ quand on y fait $dy_1 = 0$ est nulle, c'est-à-dire que la $(c-2)^{\text{ième}}$ forme dérivée de

$$\varpi_1 = B_2 dy_2 + \ldots + B_c dy_c$$

où l'on regarde y_1 comme constant, est nulle. Cette forme ϖ_1, ne pouvant être que de classe $c-1$ ou $c-2$, quand on fait cette convention, est donc de classe $c-2$, et nous retombons sur la première hypothèse [1].

[1] On peut remarquer que le raisonnement prouve directement qu'une fonction f ne peut être d'un rang supérieur à deux relativement à une forme de Pfaff, et qu'il existe effectivement des fonctions de rang deux (Cf. n° **11**).

On peut donc toujours supposer que l'on a choisi la variable x_1 de telle façon que la forme ω_1

$$\omega_1 = A_2 dx_2 + \ldots + A_c dx_c,$$

où l'on fait $x_1 = C$, est de classe $c - 2$. On peut alors prendre un nouveau système de variables $y_2, \ldots, y_{c-1}$, fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_c$ de façon que l'on ait

$$\omega_1 = B_2\left(dy_2 - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1\right) + \ldots + B_{c-1}\left(dy_{c-1} - \frac{\partial y_{c-1}}{\partial x_1} dx_1\right),$$

$B_2, \ldots, B_{c-1}$ étant des fonctions de $x_1, y_2, \ldots, y_{c-1}$, et l'on a aussi

$$\omega = B_1 dx_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{c-1} dy_{c-1}.$$

Le coefficient B_1 est forcément indépendant de $x_1, y_2, \ldots, y_{c-1}$, sans quoi ω_1 ne pourrait être de classe c. On peut donc prendre ce coefficient pour une nouvelle variable x_c, et, en revenant aux premières notations, on voit que toute forme ω de classe c peut, en choisissant convenablement les variables, être mise sous la forme

$$\omega = x_c dx_1 + \omega_1,$$

ω_1 ne renfermant ni x_c, ni dx_c, ni dx_1, et cette forme étant de classe $c - 2$ quand on y regarde x_1 comme une constante

Il est facile d'en déduire que les formes dérivées $\omega^{(c-1)}$, $\omega^{(c-2)}$, ne sont pas nulles. Démontrons-le par exemple pour la première. Puisque ω_1 est de classe $c - 2$ quand on y regarde x_1 comme un paramètre, on a

$$\omega_1^{(c-1)} = 0, \qquad \omega_1^{(c-2)} = \Omega_1 dx_1, \qquad \omega_1^{(c-3)} = \Omega_2 + \Omega_3 dx_1,$$

Ω_2 étant une forme différente de zéro, où dx_1 ne figure pas. D'après les formules qui donnent les formes dérivées d'une somme, on a

$$\omega^{(c-1)} = \omega_1^{(c-1)} + C_1 x_c dx_1 \omega_1^{(c-2)} + C_2 dx_c dx_1 \omega_1^{(c-3)},$$

C_1, C_2 étant des coefficients numériques *dont le second C_2 n'est pas nul* ; il reste donc

$$\omega^{(c-1)} = C_2 dx_c dx_1 \Omega_2,$$

et cette forme ne peut être nulle, puisque Ω_2 ne renferme ni dx_1, ni dx_c. On verrait de la même façon que dans la forme $\omega^{(c-q)} (q > 1)$, tous les termes qui renferment dx_c ne peuvent être nuls. Le théorème énoncé est donc établi (¹).

42. Systèmes adjoints à une forme linéaire. — Soit ω une forme linéaire de classe c à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($c \leqslant n$).

La forme dérivée $\omega^{(c-1)}$ n'étant pas nulle, l'équation symbolique

$$\omega^{(c-1)} df = 0 \tag{3}$$

est équivalente à un système complet Σ_1 d'équations linéaires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, qui est dit *adjoint* à la forme ω. Il est évident que ce système Σ_1 est un covariant de la forme ω relativement à tout changement de variables. En effet, supposons que, par un nouveau choix de variables $(y_1, \ldots, y_n)$, ω se change en une nouvelle forme $\varpi = B_1 dy_1 + \ldots + B_n dy_n$, et $f(x_1, \ldots, x_n)$ en $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$; le produit symbolique $\omega^{(c-1)} df$ se change en $\varpi^{(c-1)} d\varphi$ et l'équation (3) est remplacée par l'équation de même espèce

$$\varpi^{(c-1)} d\varphi = 0. \tag{4}$$

La forme ω étant de classe c, on peut choisir les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de façon que ϖ ne renferme que les c variables $y_1, y_2, \ldots, y_c$ et leurs différentielles. Comme $\varpi^{(c-1)}$ est de classe c au plus et n'est pas nulle, on a forcément, avec ce système de variables,

$$\varpi^{(c-1)} = A dy_1 dy_2 \ldots dy_c,$$

A étant une fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_c$, différente de zéro, et l'équation (4) est équivalente *algébriquement* au système complet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_{c+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} = 0,$$

qui admet les c intégrales distinctes $\varphi = y_1, \ldots, \varphi = y_c$.

Le système adjoint Σ_1 admet donc c intégrales distinctes qui sont précisément les variables canoniques, figurant dans la forme réduite de ω (nº **6**). Si en particulier $c = n$, une fonction quelconque de $x_1, \ldots, x_n$ est une intégrale de ce système.

(¹) La démonstration donnée par M. Cartan est un peu différente (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 3ᵉ *série, t.* 16, *p.* 254-257).

Soit de même $\omega^{(c-2)}$ la $(c-2)^{\text{ième}}$ forme dérivée de ω. L'équation symbolique

$$\omega^{(c-2)} df = 0 \tag{5}$$

est équivalente algébriquement à un nouveau système complet Σ_2 qui est le *second système adjoint* à la forme ω. Il est évident que ce système Σ_2 est encore un covariant de ω relativement à tout changement de variables. Ce point admis, prenons le même système de variables que tout à l'heure, de façon que ω se change en une forme ϖ où ne figurent que les c variables $y_1, \ldots, y_c$ et leurs différentielles. La forme dérivée $\varpi^{(c-2)}$ ne renfermera elle-même que ces variables, et on aura

$$\varpi^{(c-2)} = \alpha_1 dy_2 \ldots dy_c + \alpha_2 dy_3 \ldots dy_c dy_1 + \ldots + \alpha_c dy_1 \ldots dy_{c-1},$$

les coefficients α_i ne dépendant que de $y_1, \ldots, y_c$, et l'un au moins n'étant pas nul. Le produit $\omega^{(c-2)} df$ se change en

$$\varpi^{(c-2)} d\varphi = \left\{ \alpha_1 dy_2 \ldots dy_c + \alpha_2 dy_3 \ldots dy_c dy_1 + \ldots + \alpha_c dy_1 \ldots dy_{c-1} \right\} \times \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} dy_n \right\},$$

et, pour que ce produit symbolique soit nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\varphi}{\partial y_{c+1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} = 0, \\ & \alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \pm \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \ldots \pm \alpha_c \frac{\partial\varphi}{\partial y_c} = 0. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Ce système qui n'est autre que le système Σ_2, écrit avec les nouvelles variables $y_1 \ldots, y_n$ admet évidemment $c-1$ intégrales indépendantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{c-1}$, fonctions de $y_1, \ldots . y_c$.

Le second système adjoint Σ_2 admet donc $c-1$ intégrales distinctes, qui sont elles-mêmes des fonctions des c intégrales du premier système Σ_1.

Il est facile d'avoir la signification de ces intégrales. Soit en effet $y_1 = f_1$ une de ces intégrales. L'équation

$$\omega^{(c-2)} dy_1 = 0$$

exprime, comme on l'a déjà remarqué au numéro précédent, que quand on fait $y_1 = C$, $dy_1 = 0$ dans la forme ω exprimée au moyen de n variables dont fait partie y_1, la classe est diminuée de *deux* unités. *Les intégrales du système Σ_2 sont donc identiques aux intégrales premières du système de Pfaff S_3 (n° **7**)*, et par suite Σ_2 est le système complet associé au système complètement intégrable S_3.

Les deux systèmes Σ_1 et Σ_2 sont les systèmes complets *adjoints à la forme* ω, qui admettent respectivement c et $c - 1$ intégrales distinctes. Toute intégrale de Σ_2 appartient à Σ_1 et est de rang *deux* ; toute intégrale de Σ_1, n'appartenant pas à Σ_2, est de rang *un* (n° **11**). On voit que l'on peut très facilement, au moyen des formes dérivées successives, avoir tous les éléments nécessaires pour la réduction d'une forme de Pfaff.

EXEMPLE. — Soit

$$\omega = x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3 + (x_1 + x_3 x_5) dx_4 + x_3 x_4 dx_5 ;$$

on a successivement

$$\begin{aligned}
\omega' &= x_3 dx_1 dx_2 + x_2 dx_1 dx_3 + dx_1 dx_4 + x_5 dx_3 dx_4 + x_4 dx_3 dx_5,\\
\omega'' &= \omega\omega' = x_3^2 x_5 dx_1 dx_2 dx_4 + x_2 x_3 x_5 dx_1 dx_3 dx_4 + x_3^2 x_4 dx_1 dx_2 dx_5\\
&\quad + x_2 x_3 x_4 dx_1 dx_3 dx_5 + x_3 x_4 dx_1 dx_4 dx_5 + x_1 x_3 x_5 dx_2 dx_3 dx_4\\
&\quad + x_1 x_3 x_4 dx_2 dx_3 dx_5 - x_1 x_4 dx_3 dx_4 dx_5,\\
\omega''' &= \frac{1}{2} (\omega')^2 = x_3 x_5 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4\\
&\qquad\qquad + x_3 x_4 dx_1 dx_2 dx_3 dx_5 - x_4 dx_1 dx_3 dx_4 dx_5,\\
\omega'''' &= \omega''' \omega = 0.
\end{aligned}$$

La forme ω est donc de *quatrième classe*. Le premier système adjoint Σ_1 déduit de $\omega''' df = 0$ se compose d'une seule équation

$$x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_3 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_3 x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$

qui admet les quatre intégrales distinctes

$$x_1, \quad x_3, \quad x_4 x_5, \quad x_4 + x_2 x_3.$$

L'équation $\omega'' df = 0$ fournit de même un système complet Σ_2 formé de deux équations

$$x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_3 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_3 x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

qui admet les trois intégrales $\frac{x_1}{x_3}$, $x_2x_3 + x_4$, x_4x_5. Si l'on prend pour variables

$$x_1, x_2, x_3, \qquad x_2x_3 + x_4 = y_4, \qquad x_4x_5 = y_5,$$

on trouve immédiatement pour ω une forme canonique

$$\omega = x_1dy_4 + x_3dy_5.$$

Nous allons calculer les formes dérivées de l'ordre le plus élevé pour une forme canonique. Soit

$$\omega = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \ldots + p_mdx_m$$

une forme canonique de classe paire $2m$, les variables indépendantes étant $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, \ldots, p_m$. Nous avons d'abord

$$\omega^{(2m-1)} = \frac{(\omega')^m}{m!} = \frac{(dp_1dx_1 + dp_2dx_2 + \ldots + dp_mdx_m)^m}{m!}$$
$$= dp_1dx_1\, dp_2dx_2 \ldots dp_mdx_m;$$

puis

$$\omega^{(2m-2)} = \omega^{(2m-3)}\omega = \frac{(\omega')^{m-1}}{(m-1)!}\omega$$
$$= \frac{(dp_1dx_1 + \ldots + dp_mdx_m)^{m-1}}{(m-1)!}(p_1dx_1 + \ldots + p_mdx_m).$$

Dans le développement de ce produit symbolique, il y a un seul terme contenant dx_1 qui est

$$p_1dx_1dp_2dx_2 \ldots dp_mdx_m$$

et les autres termes s'en déduisent par permutation. On a donc

$$\omega^{(2m-2)} = p_1dx_1dp_2dx_2 \ldots dp_mdx_m + dp_1dx_1p_2dx_2 \ldots dp_mdx_m + \ldots;$$

on peut remarquer que $\omega^{(2m-2)}$ se déduit de $\omega^{(2m-1)}$ en remplaçant successivement dp_1 par p_1, dp_2 par p_2, …, et faisant la somme des monomes ainsi obtenus.

Une fonction quelconque des $2m$ variables x_i, p_k est une intégrale de l'équation $\omega^{(2m-1)}df = 0$, tandis que le produit $\omega^{(2m-2)}df$ est égal à

$$-\left(p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}\right)dp_1dx_1dp_2dx_2 \ldots dp_mdx_m.$$

L'équation symbolique $\omega^{(2m-2)}df = 0$ est donc équivalente à l'équation linéaire (Cf. nº **9**)

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \dots p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} = 0,$$

qui admet les $2m - 1$ intégrales

$$x_1, \dots x_m, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_m}{p_1}.$$

Calculons encore le produit symbolique

$$\omega^{(2m-3)} df d\varphi,$$

f et φ étant deux fonctions quelconques des variables x_i, p_k. On a

$$\omega^{(2m-3)} = \frac{(\omega')^{m-1}}{(m-1)!} = \frac{(dp_1 dx_1 + \dots + dp_m dx_m)^{m-1}}{(m-1)!},$$

ou encore

$$\omega^{(2m-3)} = dp_2 dx_2 \dots dp_m dx_m + dp_1 dx_1 dp_3 dx_3 \dots dp_m dx_m$$
$$+ \dots + dp_1 dx_1 \dots dp_{m-1} dx_{m-1}.$$

Le produit symbolique $dp_2 dx_2 \dots dp_m dx_m df d\varphi$ est évidemment égal à

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dp_1 dx_1 dp_2 dx_2 \dots dp_m dx_m,$$

et de même pour les autres produits partiels. On a donc

$$\omega^{(2m-3)} df d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dp_1 dx_1 dp_2 dx_2 \dots dp_m dx_m,$$

c'est-à-dire (*Leçons* nº **48**).

(7) $$\omega^{(2m-3)} df d\varphi = (f, \varphi) dp_1 dx_1 dp_2 dx_2 \dots dp_m dx_m.$$

Prenons maintenant une forme canonique de classe impaire $2m + 1$, que nous écrirons

$$\omega = dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 \dots - p_m dx_m.$$

On a

$$\omega' = dx_1 dp_1 + \dots + dx_m dp_m$$

$$\omega^{(2m-1)} = \frac{(\omega')^m}{m!.} = dp_1 dx_1 dp_2 dx_2 \dots dp_m dx_m$$

$$\omega^{(2m)} = \omega^{(2m-1)} \times \omega = dz dp_1 dx_1 \dots dp_m dx_m.$$

Toute fonction de z, x_1, ..., p_m est une intégrale de $\omega^{(2m)}df = 0$, tandis que l'équation $\omega^{(2m-1)}df = 0$ est équivalente à $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (n° **9**).

Calculons aussi le produit symbolique

$$\omega^{(2m-2)}df d\varphi,$$

f et φ étant des fonctions quelconques des $2m+1$ variables z, x_i, p_k.

Il est clair que $dz dp_1 dx_1 \ldots dp_m dx_m$ figure dans tous les produits partiels. En prenant le facteur dz dans ω, on voit comme tout à l'heure que la somme des coefficients obtenus est

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = (f, \varphi).$$

En prenant le facteur dz dans df ou dans $d\varphi$, on reconnaît de même que la somme des coefficients obtenus est égale à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial z}\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}.$$

On a donc (*Leçons* n° **49**)

$$(8)\quad \omega^{(2m-2)}df d\varphi = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\} dz dp_1 dx_1 \ldots dp_m dx_m$$
$$= [f, \varphi] dz dp_1 dx_1 \ldots dp_m dx_m.$$

43. Groupes de fonctions conjuguées. — Les propositions qui font l'objet du paragraphe précédent se généralisent facilement. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_q$ un système de q fonctions distinctes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(q < n)$. Imaginons que l'on prenne un nouveau système de variables telles que q de ces variables soient les q fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_q$ elles-mêmes, les $n-q$ autres variables $y_{q+1}, \ldots, y_n$ pouvant être choisies d'une façon quelconque de manière à former avec $f_1, f_2, \ldots, f_q$ un système de n variables distinctes. La forme linéaire ω se change en une nouvelle forme linéaire

$$(9) \quad \varpi = B_1 df_1 + \ldots + B_q df_q + B_{q+1} dy_{q+1} + \ldots + B_n dy_n,$$

$B_1, \ldots, B_n$ étant des fonctions de $f_1, f_2 \ldots, f_q, y_{q+1}, \ldots, y_n$. On pourra par exemple prendre pour nouvelles variables, avec $f_1, f_2, \ldots, f_q$, $n-q$ des variables x_i, soit $x_{q+1}, \ldots, x_n$; des q relations

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots q),$$

on tirera $dx_1, \ldots, dx_q$ en fonction de $df_1, \ldots, df_q, dx_{q+1}, \ldots, dx_n$, et en les portant dans ω, on aura la nouvelle forme ϖ, où il faudra encore remplacer $x_1, \ldots, x_q$ dans les coefficients par leurs expressions au moyen de $f_1, \ldots, f_q, x_{q+1}, \ldots, x_n$.

Si dans la nouvelle forme ϖ on supprime les termes en $df_1, \ldots, df_q$, et qu'on remplace ensuite dans $B_{q+1}, \ldots, B_n$ les nouvelles variables $f_1, \ldots, f_q$ par des constantes quelconques $a_1, \ldots, a_q$, on obtient une nouvelle forme

$$\varpi_q = B_{q+1} dy_{q+1} + \ldots + B_n dy_n,$$

de classe $c - r$ $(r \geq 0)$, c étant la classe de ω. Nous dirons que *les relations*

$$(10) \qquad \begin{cases} f_1 = a_1, & f_2 = a_2, \ldots, f_q = a_q, \\ df_1 = 0, & df_2 = 0, \ldots, df_q = 0 \end{cases}$$

abaissent la classe de ω de r unités, ou, d'une façon plus abrégée, que *les q fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_q$ forment un groupe de rang r.*

Le nombre r ne peut évidemment être supérieur à la classe c de ω. *Pour que les q fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ forment un groupe de rang r, il faut et il suffit que le produit symbolique*

$$(11) \qquad \omega^{(c-r)} df_1 df_2 \ldots df_q$$

soit nul, tandis que les produits symboliques $\omega^{(i)} df_1 \ldots df_q$, où $i < c - r$, sont différents de zéro.

La condition est nécessaire. En effet, si l'on a pris un nouveau système de variables $f_1, \ldots, f_q, y_{q+1}, \ldots, y_n$, la forme dérivée $\varpi^{(c-r)}$ de la forme ϖ, déduite de ω par ce changement de variables, ne doit renfermer aucun terme où ne figure au moins une des différentielles $df_1, \ldots, df_q$, puisque cette forme dérivée doit être nulle, quand on suppose $df_1 = 0, \ldots, df_q = 0$. Réciproquement, si le produit symbolique (11) est nul, la forme $\varpi^{(c-r)}$ est nulle quand on y supprime tous les termes en $df_1, \ldots, df_q$. Les relations (10) abaissent donc la classe de ω d'au moins r unités. Elles ne peuvent l'abaisser de plus de r unités ; en effet, si elles l'abaissaient davantage, le produit symbolique $\omega^{(c-r-1)} df_1 \ldots df_q$ devrait être nul.

Il résulte de là que, si un produit symbolique

$$\omega^{(m)} df_1 \ldots df_q$$

est nul, il en est de même de tous les produit symboliques

$$\omega^{(m+1)} df_1 \ldots df_q, \qquad \omega^{(m+2)} df_1 \ldots df_q, \; \ldots .$$

L'équation $\varpi^{(c-r)} df = 0$, où $r > 2$, ne peut admettre d'autre intégrale que $f = C$, puisqu'on a remarqué plus haut (n° **41**) que les relations $f = 0$, $df = 0$ ne peuvent abaisser la classe de ω de plus de deux unités.

Le rang d'un groupe de q fonctions n'est pas forcément égal à la somme des rangs des q fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_q$ de ce groupe. Par exemple, les deux fonctions x_2, x_3 sont de rang deux pour la forme $\omega = dx_1 + x_2 dx_3 + x_4 dx_5$, et le groupe (x_2, x_3) est lui-même de rang deux. Dans ce cas, le rang du groupe est inférieur à la somme des rangs des deux fonctions qui constituent le groupe. Il peut aussi être plus grand ; ainsi, pour la même forme, x_1 et $x_1 + \dfrac{x_4}{x_2}$ sont de rang un, tandis que le groupe $\left(x_1, x_1 + \dfrac{x_4}{x_2}\right)$ est de rang trois, car si l'on pose $x_1 = a$, $x_1 + \dfrac{x_4}{x_2} = b$, la forme ω devient

$$x_2 d \left\{ x_3 + (b-a) x_5 \right\}.$$

Le rang d'un groupe de q fonctions distinctes ne peut être supérieur à $2q$. Soient, en effet, ω_1 la forme que l'on déduit de ω en établissant la relation $f_1 = a_1$ entre les variables, ω_2 la forme que l'on déduit de ω_1 en établissant une nouvelle relation $f_2 = a_2$, et ainsi de suite ; la dernière forme obtenue ω_q est identique à ϖ. Dans la suite des formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$, la classe ne peut s'abaisser de plus de deux unités quand on passe d'une forme à la suivante (n° **41**). La dernière forme $\omega_q = \varpi$ est donc au moins de classe $c - 2q$, et ce minimum ne peut être atteint que si chaque relation nouvelle $f_i = a_i$ abaisse la classe de deux unités. De plus, cet abaissement de deux unités dans la classe doit toujours avoir lieu quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les opérations, quand on introduit une relation de plus entre les variables. Nous dirons que q fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ formant un groupe de rang $2q\,(2q \leqslant c)$ constituent un *groupe de q fonctions conjuguées*, ou plus simplement un *groupe conjugué*. Des explications qui précèdent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

1° *Pour que q fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ forment un groupe conjugué, il faut et il suffit que le produit symbolique*

$$\omega^{(c-2q)} df_1 \ldots df_q$$

soit nul.

2° *Si $f_1, f_2, \ldots, f_q$ forment un groupe conjugué, r fonctions quelconques $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_r}$ appartenant à ce groupe forment aussi un groupe conjugué de r fonctions.*

On peut supposer en effet que l'on passe de ω à ϖ en introduisant d'abord les r relations $f_{\alpha_1} = a_1, \ldots, f_{\alpha_r} = a_r$, ce qui doit conduire, on l'a vu, à une forme de classe $c - 2r$.

En particulier, chacune des fonctions du groupe doit être de rang deux, mais la réciproque n'est pas vraie, comme on l'a remarqué plus haut.

Pour une forme ω de classe $2p$ ou $2p + 1$, il ne peut exister de groupe conjugué de plus de $2p$ fonctions. *La connaissance d'un groupe conjugué de 2p fonctions permet de ramener ω à une forme canonique par un changement de variables.*

Soit ω une forme de classe $2p$, et soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ un groupe conjugué de p fonctions. Quand on prend un système de variables parmi lesquelles figurent ces p fonctions f_i, ω se change en une nouvelle forme linéaire

$$(12) \qquad \varpi = B_1 df_1 + \ldots + B_p df_p + B_{p+1} dy_{p+1} + \ldots + B_n dy_n.$$

Si l'on remplace dans cette forme $df_1, \ldots, df_p$ par zéro, la classe de la nouvelle forme doit être zéro, quelles que soient les constantes par lesquelles on remplace $f_1, \ldots, f_p$ dans $B_{p+1}, \ldots, B_n$. Il faut évidemment pour cela que ces coefficients $B_{p+1}, \ldots, B_n$ soient nuls, et la forme ϖ se réduit à ses p premiers termes

$$\varpi = B_1 df_1 + \ldots + B_p df_p.$$

Les p coefficients $B_1, \ldots, B_p$ doivent former avec $f_1, \ldots, f_p$ un système de $2p$ fonctions distinctes ; sans quoi la forme ϖ serait de classe inférieure à $2p$. En prenant pour variables ces $2p$ fonctions, la forme ω est donc ramenée à une forme canonique

$$\varpi = z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p.$$

Connaissant un groupe conjugué de p fonctions, on voit que cette réduction exige seulement un changement de variables tel que les p fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ du groupe soient précisément p des nouvelles variables, les autres pouvant être prises d'une façon arbitraire. On peut aussi obtenir les coefficients B_i par un calcul d'identification avant tout changement de variables.

Considérons maintenant une forme ω de classe $2p+1$. et soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ un groupe conjugué de p fonctions pour cette forme. Le même changement de variables que dans le premier cas conduit à une nouvelle forme ϖ dans laquelle l'ensemble des termes qui suivent les p premiers

$$B_{p+1} dy_{p+1} + \ldots + B_n dy_n$$

représente une forme de classe *un*, c'est-à-dire une différentielle totale dU, quand on regarde $f_1, \ldots, f_p$ comme des constantes dans $B_{p+1}, \ldots, B_n$. On peut donc écrire

$$B_{p+1} dy_{p+1} + \ldots + B_n dy_n = dU - \frac{\partial U}{\partial f_1} df_1 - \ldots - \frac{\partial U}{\partial f_p} df_p,$$

et par suite

$$\varpi = C_1 df_1 + \ldots + C_p df_p + dU.$$

Les $2p+1$ fonctions $f_1, \ldots, f_p, C_1, \ldots, C_p, U$ doivent encore être distinctes et, en les prenant pour nouvelles variables, ω est ramené à une forme canonique

$$\omega = z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1}.$$

On voit que cette réduction exige, outre le changement de variables, une quadrature.

44. Détermination d'un groupe conjugué. Première méthode. — De la définition même d'un groupe conjugué, on déduit aisément une méthode de recherche de ces groupes. Soient ω une forme de classe c, et f_1 une intégrale de l'équation symbolique

$$\omega^{(c-2)} df = 0, \tag{13}$$

équivalente au système complet adjoint Σ_2, qui admet $c-1$ intégrales distinctes. L'équation symbolique

$$\omega^{(c-4)} df_1 df = 0 \tag{14}$$

est elle-même équivalente à un système complet admettant $c-2$ intégrales distinctes, y compris $f = f_1$. Supposons en effet que l'on ait pris la fonction f_1 elle-même pour l'une des variables, et soit ω_1 la forme déduite de ω en posant $f_1 = a_1$, $df_1 = 0$. Cette forme ω_1 est de classe $c-2$, et l'équation symbolique (14) est équivalente à l'équation

$$\omega_1^{(c-4)} df = 0 \tag{15}$$

que l'on déduit de l'équation (14) en supprimant dans $\omega^{(c-4)}$ tous les termes où figure df_1. La forme ω_1 étant de classe $c-2$, l'équation $\omega_1^{(c-4)} df = 0$ admet $c-3$ intégrales distinctes, qui peuvent dépendre de f_1 en même temps que des autres variables, et qui sont données par l'intégration du second système adjoint à la forme ω_1. Soit f_2 une intégrale de ce nouveau système. L'équation symbolique

$$\omega^{(c-6)} df_1 df_2 df = 0 \tag{16}$$

admet à son tour $c-5$ intégrales distinctes, non compris les intégrales évidentes $f = f_1$, $f = f_2$. En effet, pour la même raison que tout à l'heure, cette équation symbolique est équivalente à l'équation

$$\omega_2^{(c-6)} df = 0, \tag{17}$$

ω_2 étant la forme que l'on déduit de ω au moyen des quatre relations

$$f_1 = a_1, f_2 = a_2, \qquad df_1 = 0, df_2 = 0;$$

cette forme ω_2 étant de classe $c-4$, l'équation (17) admet $c-5$ intégrales distinctes, qui s'obtiendraient par l'intégration d'un système complet, dont on connaît déjà deux intégrales f_1, f_2. En continuant de la sorte, on en déduit la méthode générale suivante pour obtenir un groupe de q fonctions conjuguées relatif à une forme ω de classe c $\left(q \leqslant \frac{c}{2}\right)$.

On cherche une intégrale f_1 de l'équation symbolique

$$\omega^{(c-2)}df = 0,$$

puis une intégrale f_2, distincte de f_1, de l'équation

$$\omega^{(c-4)}df_1 df = 0,$$

puis une intégrale f_3, distincte de f_1 et f_2, de l'équation

$$\omega^{(c-6)}df_1 df_2 df = 0,$$

et ainsi de suite, ... enfin une intégrale f_q, indépendante de $f_1, f_2, \ldots, f_{q-1}$, de l'équation $\omega^{(c-2q)}df_1 \ldots df_{q-1}df = 0$.

Cette recherche exige les opérations $c-1, c-3, \ldots, c-2q+1$. En particulier, si $c = 2p$, la recherche d'un groupe de p fonctions conjuguées exige les opérations $2p-1, 2p-3, \ldots, 3, 1$. Si $c = 2p+1$, cette recherche exige les opérations $2p, 2p-2, \ldots, 4, 2$. Les intégrations à effectuer pour ramener ω à une forme canonique sont donc les mêmes que celles qu'exige la méthode du n° **12**, qui ne diffère pas essentiellement de celle-ci. Mais la nouvelle méthode offre cet avantage, de n'exiger un changement de variables que lorsqu'on a achevé de déterminer la moitié des fonctions qui doivent figurer dans la forme réduite, tandis que le procédé du n° **12** suppose un changement de variables après chaque intégration [1].

Remarque. — Lorsque ω est de classe impaire $2p+1$, après avoir déterminé les p fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ d'un groupe conjugué, on peut, avant tout changement de variables, déterminer une intégrale f_{p+1}, indépendante de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, de l'équation symbolique

$$\omega df_1 \ldots df_p df = 0.$$

[1] Pour une forme de classe paire, la méthode de réduction de Frobenius ne diffère que par la forme de celle qui vient d'être exposée. Pour une forme ω de classe impaire, Frobenius commence par déterminer une fonction f telle $\omega - df$ soit de classe paire.

La forme donnée ω peut alors s'exprimer au moyen des différentielles $df_1, \ldots, df_p, df_{p+1}$ seulement, dont on peut, comme tout à l'heure, calculer les coefficients B_i par identification :

$$\omega = B_1 df_1 + \ldots + B_p df_p + B_{p+1} df_{p+1}.$$

De plus $B_{p+1} df_{p+1}$ doit être de classe *un*, quand on y regarde $f_1, \ldots, f_p$ comme des constantes, ce qui exige que B_{p+1} ne dépende que de $f_1, f_2, \ldots, f_{p+1}$. Il suffit alors de prendre pour variable $\int B_{p+1} df_{p+1}$, à la place de f_{p+1}, pour obtenir une forme canonique.

Exemple. — Soit

$$\omega = x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_3 x_5 dx_4 - x_3 x_4 dx_5 + x_2 dx_6 ;$$

on a

$$\omega' = - x_5 dx_3 dx_4 - x_4 dx_3 dx_5 + dx_2 dx_6,$$

$$\omega''' = \frac{1}{2}(\omega')^2 = - x_4 dx_2 dx_3 dx_5 dx_6 - x_5 dx_2 dx_3 dx_4 dx_6,$$

$$\omega^{\mathrm{v}} = 0 ;$$

d'autre part, on s'assure aisément que $\omega'''' = \omega'''\omega$ n'est pas nul. La forme ω est donc de cinquième classe. On voit immédiatement, sans qu'il soit nécessaire de développer, que $f = x_6$ est une intégrale de

$$\omega''' df = 0 ;$$

on peut donc prendre $f_1 = x_6$. On reconnaît de même que $f = x_3$ est une intégrale de l'équation symbolique

$$\omega' df_1 df = - (x_5 dx_3 dx_4 dx_6 + x_4 dx_3 dx_5 dx_6) df = 0.$$

Il en résulte que si l'on remplace x_3 et x_6 par des constantes dans ω, on obtient une différentielle totale. On peut écrire en effet

$$\omega = x_2 dx_6 + d(x_1 x_2 - x_3 x_5 x_4) + x_5 x_4 dx_3,$$

et ω est mis sous forme canonique.

45. Détermination d'un groupe conjugué. Deuxième méthode. — Nous démontrerons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme I. — Soit ω une forme de classe c. Si l'on a

$$\omega^{(c-3)}\omega_1 = 0,$$

ω_1 étant une autre forme linéaire, la classe c est un nombre impair, et ω_1 est identique à ω à un facteur près.

Lemme II. — Si l'on a

$$\omega^{(c-2)} = \omega^{(c-3)}\omega_1,$$

la classe c est un nombre pair et ω_1 est identique à ω.

Il suffit évidemment de démontrer ces lemmes pour une forme canonique. Soit

$$\omega = y_1 dx_1 + \ldots + y_m dx_m$$

une forme de classe $c = 2m$; on a

$$\omega^{(c-3)} = \omega^{(2m-3)} = \frac{(\omega')^{m-1}}{(m-1)!} = \Sigma dy_1 dx_1 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1},$$

chaque produit partiel se déduisant de $dy_1 dx_1 \ldots dy_m dx_m$ en supprimant un groupe de deux facteurs $dy_i dx_i$ (n° **42**. p. 164). Pour qu'un produit symbolique

$$(\Sigma dy_1 dx_1 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1})(\Sigma \alpha_i dx_i + \Sigma \beta_i dy_i)$$

soit nul, il faut que tous les coefficients α_i et β_i soient nuls, car le terme $\alpha_1 dx_1 dy_2 dx_2 \ldots dy_m dx_m$ par exemple ne se réduit avec aucun autre.

Prenons en second lieu une forme de classe impaire $2m + 1$

$$\omega = dz + y_1 dx_1 + \ldots + y_m dx_m ;$$

$$\omega^{(c-3)} = \omega^{(2m-2)} = \frac{(\omega')^{m-1}}{(m-1)!}\,\omega$$
$$= (\Sigma dy_1 dx_1 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1})(dz + y_1 dx_1 + \ldots).$$

On a déjà la relation $\omega^{(c-3)}\omega = 0$; si l'on a aussi $\omega^{(c-3)}\omega_1 = 0$, ω_1 étant une autre forme linéaire, le produit symbolique

$$\omega^{(c-3)}(\omega_1 - K\omega)$$

sera nul, quel que soit le facteur K. Choisissons ce facteur de façon que $\omega_1 - K\omega$ ne renferme pas dz,

$$\omega_1 - K\omega = \Sigma \alpha_i dx_i + \Sigma \beta_i dy_i ;$$

on aura

$$(\Sigma dy_1 dx_1 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1})(dz + \Sigma y_i dx_i)(\Sigma \alpha_i dx_i + \Sigma \beta_i dy_i) = 0.$$

En considérant tous les termes qui contiennent dz, on voit, comme tout à l'heure, que tous les coefficients α_i et β_i doivent être nuls, et ω_1 est identique à $K\omega$.

Le second lemme se démontre de la même façon. Pour une forme ω de classe paire

$$\omega = y_1 dx_1 + \ldots + y_m dx_m,$$

on a

$$\omega^{(c-2)} = (\Sigma dy_1 dx_1 dy_2 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1})\omega,$$
$$\omega^{(c-3)} = \Sigma dy_1 dx_1 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1},$$
$$\omega^{(c-2)} = \omega^{(c-3)}\omega.$$

Si l'on a d'autre part $\omega^{(c-2)} = \omega^{(c-3)}\omega_1$, ω_1 étant une forme linéaire, on en conclut que le produit $\omega^{(c-3)}(\omega - \omega_1)$ est nul, ce qui exige, on vient de le voir, que $\omega_1 = \omega$.

Pour une forme de classe impaire

$$\omega = dz + y_1 dx_1 + \ldots + y_m dx_m,$$
$$\omega^{(c-2)} = dy_1 dx_1 \ldots dy_m dx_m,$$

$$\omega^{(c-3)} = (\Sigma dy_1 dx_1 \ldots dy_{m-1} dx_{m-1})(dz + y_1 dx_1 + \ldots + y_m dx_m).$$

On ne peut avoir

$$\omega^{(c-2)} = \omega^{(c-3)}\omega_1,$$

car le premier membre ne contient pas dz, tandis que le second membre renferme des termes en dz, à moins que ω_1 ne soit nul.

Cela étant, soient ω une forme linéaire de classe c et $(f_1, \ldots, f_q)$ un groupe conjugué de q fonctions $\left(q < \frac{c}{2}\right)$. *L'équation symbolique*

$$(18) \qquad \omega^{(c-2q-2)} df_1 df_2 \ldots df_q df = 0$$

est équivalente au système

$$(19) \qquad \omega^{(c-2)} df = 0, \ \ldots \ \omega^{(c-3)} df_1 df = 0, \ \ldots, \ \omega^{(c-3)} df_q df = 0.$$

Il est évident en effet que toute fonction f qui annule le produit symbolique (18) annule aussi tous les produits symboliques (19) (n° **44**). Pour démontrer la réciproque, comme la propriété est indépendante du choix des variables au moyen desquelles on a exprimé ω, nous supposerons qu'on a exprimé ω au moyen de c variables canoniques ; $f_1, f_2, \ldots, f_q$ et f sont alors des fonctions des mêmes variables. La relation (18) exprime que f est de rang *deux* par rapport à la forme ϖ déduite de ω au moyen des q relations

$$f_1 = a_1, \ \ldots, f_q = a_q$$

établies entre les variables canoniques. Cette forme ϖ est de classe $c - 2q$ par hypothèse, et par suite les fonctions de rang *deux* par rapport à ϖ sont déterminées par un système complet qui admet $c - 2q - 1$ intégrales distinctes, en plus des intégrales évidentes $f_1, f_2, \ldots, f_q$. L'équation (18) conduit donc pour déterminer f à un système complet Σ qui admet $c - q - 1$ intégrales distinctes. Comme la fonction f dépend de c variables, tout système de $q + 1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées de f est équivalent au système Σ, pourvu que ces équations admettent toutes les intégrales de Σ et soient linéairement distinctes. Or les $q + 1$ équations du système (19) sont linéaires par rapport aux dérivées de f, car $\omega^{(c-2)}$ et $\omega^{(c-3)} df_i$ sont des formes de degré $c - 1$, et ces équations admettent toutes les intégrales du système Σ. Il suffit donc de montrer que ces $q + 1$ équations (19) sont linéairement distinctes pour prouver que le système Σ est identique au système (19).

Si les q dernières équations (19) n'étaient pas linéairement distinctes, on aurait une relation de la forme

$$\omega^{(c-3)} \left\{ \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2 + \ldots + \lambda_q df_q \right\} df = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont des fonctions des variables indépendantes, non toutes nulles, qui devrait être vérifiée quelle que soit la fonction f. Il ne peut en être ainsi que si le produit

$$\omega^{(c-3)}(\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_q df_q) = 0.$$

Ceci exige que $\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_q df_q$ soit identiquement nul, ou bien que $\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_q df_q$ soit identique à ω à un facteur près, la classe c étant un nombre impair. La première hypothèse est à rejeter puisque tous les coefficients λ_i ne sont pas nuls, et que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sont indépendantes. La seconde hypothèse est aussi à rejeter, car la classe de ω serait au plus égal à $2q$, et comme c est impair, on aurait $c < 2q$, ce qui est absurde.

Si la première des équations (19) était une combinaison linéaire des autres, on aurait de même une identité de la forme

$$\omega^{(c-2)} = \omega^{(c-3)}(\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_q df_q).$$

Il faudrait que $\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_q df_q$ fût identique à ω, et l'on aurait $c = 2q$. L'équation symbolique (18) n'a alors aucun sens.

De la proposition précédente on déduit une nouvelle méthode pour déterminer un groupe de q fonctions conjuguées.

Soit f_1 une intégrale de l'équation $\omega^{(c-2)}df = 0$, on cherchera une intégrale f_2, distincte de f_1, du système

$$\omega^{(c-2)}df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_1 df = 0,$$

puis une intégrale f_3, indépendante de f_1 et f_2, du système

$$\omega^{(c-2)}df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_1 df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_2 df = 0,$$

. . . .

et enfin une intégrale f_q, indépendante de $f_1, f_2, \ldots, f_{q-1}$ du système

$$\omega^{(c-2)}df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_1 df = 0, \ \ldots \ \omega^{(c-3)}df_{q-1}df = 0.$$

Il résulte en effet de la proposition précédente, que les groupes successifs $(f_1, f_2), (f_1, f_2, f_3), \ldots (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ de 2, 3, ..., q fonctions sont des groupes conjugués.

Il est clair que le nombre des intégrations à effectuer est le même dans les deux méthodes, puisque nous n'avons fait que remplacer un système complet par un système complet équivalent. Mais la nouvelle méthode est beaucoup plus simple pour la formation des systèmes complets successifs dont on a à rechercher une intégrale particulière, car chacun d'eux contient toutes les équations du système précédent ; de plus dans chacune de ces équations, il ne figure qu'une des intégrales déjà obtenues. Supposons en particulier que la classe de ω soit égale au nombre n des variables indépendantes qui figurent dans cette forme. Chacun des produits symboliques

$$\omega^{(n-2)}df, \qquad \omega^{(n-3)}df_1 df, \ \ldots$$

est de degré n et par suite contient un seul terme en $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. En égalant à zéro un quelconque de ces produits, on obtiendra donc une seule équation linéaire en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Chacun des systèmes complets successifs se déduira donc du précédent en lui adjoignant une seule équation formée au moyen de la dernière intégrale obtenue.

Dans le cas général où le nombre n des variables est supérieur à la classe c de ω, la première équation $\omega^{(c-2)}df$ fournit un système complet de $n - c + 1$ équations. Pour avoir chacun des systèmes complets successifs, on adjoindra au précédent une équation nouvelle distincte des précédentes, que l'on déduira de la dernière intégrale obtenue, en égalant à zéro le coefficient de l'un des monomes dans $\omega^{(c-3)}df_i df$, f_i étant la dernière intégrale calculée.

Dans le cas où le nombre des variables est pair $2r$ et égal à la classe, la méthode précédente pour déterminer un groupe conjugué de r fonctions est due à Clebsch, qui n'a jamais étendu complètement sa méthode aux autres cas.

Exemple. — Considérons la forme de Pfaff (Forsyth)

$$\omega = x_2dx_1 + x_3dx_2 + x_4dx_3 + x_5dx_4 + x_6dx_5 + x_1dx_6\,;$$

les formes dérivées d'ordre impair ont les expressions suivantes

$$\omega' = dx_2dx_1 + dx_3dx_2 + dx_4dx_3 + dx_5dx_4 + dx_6dx_5 + dx_1dx_6,$$

$$\begin{aligned}\omega''' = \frac{1}{2}(\omega')^2 = {} & dx_1dx_2dx_3dx_4 + dx_1dx_2dx_4dx_5 + dx_1dx_2dx_5dx_6 \\ & + dx_2dx_3dx_4dx_5 + dx_2dx_3dx_5dx_6 + dx_2dx_3dx_6dx_1 \\ & + dx_3dx_4dx_5dx_6 + dx_3dx_4dx_6dx_1 + dx_4dx_5dx_6dx_1,\end{aligned}$$

$$\omega^{\mathrm{v}} = \frac{1}{6}(\omega')^3 = 0$$

D'ailleurs $\omega'''' = \omega'''\omega$ renferme évidemment un terme en

$$dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5$$

qui ne se réduit avec aucun autre ; la forme ω est donc de cinquième classe. Pour ramener ω à une forme canonique, il faut d'abord déterminer une intégrale de l'équation

$$\begin{aligned}\omega'''df = {} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_5}\right)(dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5 \\ & \qquad + dx_1dx_2dx_3dx_5dx_6 + dx_1dx_3dx_4dx_5dx_6) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{\partial f}{\partial x_6}\right)(dx_2dx_3dx_4dx_5dx_6 \\ & \qquad + dx_4dx_5dx_6dx_1dx_2 + dx_1dx_2dx_3dx_4dx_6) = 0,\end{aligned}$$

équivalente au système complet

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_5}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_4}+\frac{\partial f}{\partial x_6}=0.$$

Soit $f_1 = x_3 - x_1$ une intégrale de ce système. Nous avons ensuite à chercher une intégrale du système complet obtenu en ajoutant aux deux équations précédentes l'équation symbolique $\omega'' d(x_3-x_1)df = 0$. On trouve facilement, en faisant le calcul, qu'il suffit d'adjoindre au système précédent l'équation $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. La fonction $f_2 = x_5 - x_1$ est une intégrale du nouveau système.

En posant $x_3 - x_1 = y_3$, $x_5 - x_1 = y_5$, la forme ω peut s'écrire

$$\omega = x_2 dx_1 + (x_1+y_3)dx_2 + x_4 dx_1 + x_4 dy_3 + x_1 dx_4 + y_5 dx_4 + x_6 dx_1 + x_6 dy_5 + x_1 dx_6,$$

et on vérifie immédiatement que si l'on y remplace y_3 et y_5 par des constantes, on a une différentielle totale

$$d(x_1x_2 + y_3x_2 + x_1x_4 + x_1x_6 + y_5x_4).$$

On a donc, en regardant y_3 et y_5 comme des variables,

$$\omega = d(x_1x_2 + x_2y_3 + x_1x_4 + x_1x_6 + y_5x_4) + (x_4 - x_2)dy_3 + (x_6 - x_4)dy_5,$$

et enfin, en remplaçant y_3 et y_5 par leurs expressions,

$$\omega = d(x_2x_3 + x_1x_6 + x_4x_5) + (x_4 - x_2)d(x_3 - x_1) + (x_6 - x_4)d(x_5 - x_1).$$

46. Forme canonique d'une équation de Pfaff. — On a déjà démontré (n° **15**) que l'on peut trouver explicitement les intégrales d'une équation de Pfaff $\omega = 0$ de classe $\gamma = 2m - 1$, si l'on a ramené la forme ω à ne contenir que m différentielles, de telle sorte que l'équation $\omega = 0$ s'écrive

$$\omega = B_1 df_1 + \ldots + B_m df_m = 0, \tag{20}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ étant m fonctions distinctes. Nous dirons alors que *l'équation $\omega = 0$ de classe $2m - 1$ est mise sous forme canonique.*

La forme ω elle-même peut être de classe $2m$ ou de classe $2m - 1$ (n° **13**). Si ω est de *classe paire* $2m$, les $2m$ fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$, $B_1, \ldots, B_m$ doivent être distinctes, sans quoi ω serait de classe inférieure à $2m$. L'expression (20) est donc aussi une forme canonique pour ω, et il revient au même de mettre la forme ω ou l'équation $\omega = 0$ sous forme canonique. Le problème revient à la recherche d'un groupe conjugué de m fonctions $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Il n'en est plus de même si ω est de *classe impaire* $2m - 1$; $B_1 df_1 + \ldots + B_m df_m$ n'est une forme canonique pour ω que si l'un des coefficients B_i est égal à l'unité. Les m fonctions $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ forment alors un groupe de rang $2m - 1$ pour la forme ω, et la réduction de l'équation $\omega = 0$ à une forme canonique est équivalente au problème suivant :

Déterminer un groupe de m fonctions distinctes $(f_1, \ldots, f_m)$ qui soit de rang $2m - 1$ par rapport à la forme ω.

Il est clair en effet qu'ayant obtenu un groupe de cette espèce, si l'on prend un nouveau système de variables de telle façon que les m fonctions f_i de ce groupe fassent partie des nouvelles variables, ω ne doit contenir que les différentielles $df_1, \ldots, df_m$, puisque ω doit être de classe nulle, quand on y remplace ces différentielles par zéro.

D'une façon générale, nous dirons qu'un groupe de q fonctions distinctes $(f_1, f_2, \ldots, f_q)$ est *semi-conjugué* par rapport à une forme ω, lorsque les relations

$$(21) \qquad \begin{cases} f_1 = a_1, \ldots, f_q = a_q, \\ df_1 = 0, \ldots, df_q = 0 \end{cases}$$

abaissent la classe de ω de $2q - 1$ unités. Les q fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_q$ vérifient l'équation symbolique

$$(22) \qquad \omega^{(c-2q+1)} df_1 \ldots df_q = 0 ;$$

inversement, si q fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_q$ satisfont à cette relation, les équations (21) abaissent la classe de ω de $2q - 1$ unités au moins : les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ forment donc un groupe *conjugué* ou *semi-conjugué*. En reprenant les raisonnements du n° **43**, on voit facilement que, si q fonctions $f_1, \ldots, f_q$ forment un groupe conjugué ou semi-conjugué, r quelconques de ces fonctions $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_r}$ vérifient la relation

$$(23) \qquad \omega^{(c-2r+1)} df_{\alpha_1} \ldots df_{\alpha_r} = 0,$$

c'est-à-dire forment aussi un groupe conjugué ou semi-conjugué. En particulier, chacune des fonctions du groupe est au moins de rang un, et l'on a

$$\omega^{(c-1)} df_1 = 0, \ \ldots, \ \omega^{(c-1)} df_q = 0.$$

Pour déterminer un groupe semi-conjugué de q fonctions, on peut suivre deux méthodes tout à fait analogues aux deux méthodes exposées plus haut pour les groupes conjugués.

Première méthode. — *On cherche d'abord une intégrale f_1 de l'équation*

$$\omega^{(c-1)} df = 0,$$

puis une intégrale f_2, distincte de f_1, de l'équation

$$\omega^{(c-3)} df_1 df = 0,$$

puis une intégrale f_3, indépendante de f_1, f_2, de l'équation

$$\omega^{(c-5)} df_1 df_2 \, df = 0,$$

. . . .

et enfin une intégrale f_q, indépendante de $f_1, \ldots, f_{q-1}$ de l'équation

$$\omega^{(c-2q+1)} df_1 \ldots df_q df = 0.$$

Si la classe c est égale au nombre n des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, on peut prendre pour f_1 une fonction arbitraire de ces variables.

En particulier, pour ramener une équation $\omega = 0$, où ω est de classe $2m - 1$, à une forme canonique, on a à chercher successivement une intégrale particulière de chacune des équations

$$\omega^{(2m-2)} df = 0, \quad \omega^{(2m-4)} df_1 df = 0, \ \ldots$$
$$\omega^{(2)} df_1 \ldots df_{m-2} df = 0, \ \omega df_1 \ldots df_{m-1} df = 0,$$

puis à faire un changement de variables, de façon que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ fassent partie des nouvelles variables.

On a ainsi à déterminer une intégrale particulière de plusieurs systèmes complets successifs dont chacun admet toutes les intégrales du précédent. Ces systèmes complets peuvent être remplacés par d'autres systèmes équivalents, plus faciles à former. Il suffit pour cela de reprendre les raisonnements du n° **44**. Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_q)$ un groupe conjugué ou semi-conjugué relativement à une forme ω de classe c ; *l'équation symbolique*

$$(24) \qquad \omega^{(c-2q-1)} df_1 \ldots df_q df = 0$$

est équivalente au système

$$(25) \qquad \omega^{(c-1)} df = 0, \qquad \omega^{(c-3)} df_1 df = 0, \ \ldots, \ \omega^{(c-3)} df_q df = 0.$$

On a déjà observé que toute fonction f qui annule le produit symbolique (24) annule aussi tous les produits (25). Pour démontrer la réciproque, comme la propriété est indépendante du choix des variables au moyen desquelles on a exprimé ω, nous supposerons ω exprimée au moyen de c variables canoniques ; $f_1, f_2, \ldots, f_q$ et f sont alors des fonctions des mêmes variables. Cela étant, soit ϖ la forme déduite de ω au moyen des q relations $f_1 = a_1, \ldots f_q = a_q$; cette forme peut être de classe $c - 2q + 1$ ou de classe $c - 2q$. Si ϖ est de rang $c - 2q + 1$, la relation (24) exprime que f est de rang 2 par rapport à ϖ ; c'est donc une intégrale d'un système complet qui admet $c - 2q$ intégrales distinctes, en plus des intégrales évidentes $f_1, \ldots, f_q$. Si ϖ est de rang $c - 2q$, l'équation (24) exprime que f est de rang 1 au moins par rapport à ϖ ; c'est donc une intégrale d'un système complet qui admet $c - 2q$ intégrales distinctes, non compris les intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_q$. Dans les deux cas, nous voyons que l'équation (24) est équivalente à un système complet Σ admettant $c - 2q$ intégrales distinctes. Comme f dépend uniquement des c variables canoniques, tout système de q équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de f est identique à Σ, pourvu que ces q équations soient linéairement distinctes et admettent toutes les intégrales de Σ.

La première des équations (25) exprime que f ne dépend que des variables canoniques ; les q équations suivantes $\omega^{(c-3)} df_i df = 0$ forment comme on l'a vu (n° **44**) un système de q équations linéairement distinctes admettant toutes les intégrales de l'équation (24). Elles forment donc un système complètement intégrable équivalent à Σ.

On déduit de cette proposition une nouvelle méthode pour déterminer un groupe semi-conjugué de q fonctions relatif à une forme ω de classe c $\left(q \leqslant \frac{c+1}{2}\right)$.

Deuxième méthode. — *Soit f_1 une intégrale particulière de l'équation $\omega^{(c-1)}df = 0$; on cherchera une intégrale f_2, distincte de f_1, du système*

$$\omega^{(c-1)}df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_1 df = 0,$$

puis une intégrale f_3, indépendante de f_1 et f_2, du système

$$\omega^{(c-1)}df = 0, \ \omega^{(c-3)}df_1 df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_2 df = 0,$$

. . . .

enfin une intégrale f_q, indépendante de $f_1, \ldots, f_{q-1}$, du système

$$\omega^{(c-1)}df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_1 df = 0, \ \ldots \ \omega^{(c-3)}df_{q-1} df = 0.$$

En particulier, si la classe c est égale au nombre des variables x_i qui figurent dans ω, on peut prendre pour f une fonction arbitraire de ces variables, et supprimer la première équation $\omega^{(c-1)}df = 0$ dans tous les systèmes suivants.

Si nous rapprochons la première des méthodes précédentes pour déterminer un groupe semi-conjugué de m fonctions relativement à une forme ω de classe $2m - 1$ de la méthode du n° **43** pour déterminer un groupe conjugué de m fonctions relativement à une forme ω de classe $2m$, on en déduit aussitôt la méthode générale suivante pour ramener l'équation de Pfaff $\omega = 0$ à une forme canonique, qui s'applique quelle que soit la classe de ω.

Soit m le plus petit nombre entier tel que la forme dérivée $\omega^{(2m)}$ soit nulle. On cherchera une intégrale f_1 de l'équation

$$\omega^{(2m-2)}df = 0,$$

puis une intégrale f_2, distincte de f_1, de l'équation

$$\omega^{(2m-4)}df_1 df = 0,$$

puis une intégrale f_3, indépendante de f_1 et f_2, de l'équation

$$\omega^{(2m-6)}df_1 df_2 df = 0,$$

. . . .

enfin une intégrale f_m, indépendante de $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ de l'équation

$$\omega df_1 df_2 \ldots df_{m-1} df = 0.$$

Ayant obtenu ces m fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$, il suffira de faire dans ω un changement de variables, tel que $f_1, \ldots, f_m$ soient m des nouvelles variables.

La première équation dont on a à chercher une intégrale

$$\omega^{(2m-2)} df = 0$$

admet toujours, comme on l'a déjà observé plusieurs fois, $2m - 1$ intégrales distinctes. Elle est donc équivalente à un système complet, formé de $n - 2m + 1$ équations linéairement indépendantes, que l'on appelle *le système adjoint à l'équation $\omega = 0$.*

Pour former les systèmes complets équivalents aux équations $\omega^{(2m-4)} df_1 df = 0$, $\omega^{(2m-6)} df_1 df_2 df = 0$, on peut d'ailleurs employer l'une ou l'autre des méthodes qui ont été indiquées plus haut, suivant la classe de la forme ω. Nous dirons, pour abréger, que m fonctions $(f_1, \ldots, f_m)$, déterminées comme il vient d'être dit, forment *un groupe conjugué relativement à l'équation $\omega = 0$.* Il existe évidemment une infinité de groupes conjugués de m fonctions pour une équation de Pfaff de classe $2m - 1$. Nous allons montrer que les m fonctions d'un groupe conjugué peuvent être déterminées par des conditions initiales analogues à celles qui déterminent les intégrales principales d'un système complet dans le domaine d'un point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Soit ω une forme à n variables, de classe $2m$ ou $2m - 1$, dont tous les coefficients sont holomorphes dans le voisinage d'un point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Il en est évidemment de même de tous les coefficients des formes dérivées successives $\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(2m-2)}$ et, si le point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ n'a pas été choisi d'une façon particulière, *tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ ne sont pas nuls pour ce système de valeurs.* Nous supposerons par exemple que le coefficient de $dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-1}$ n'est pas nul dans cette forme pour les valeurs $x_1^0, \ldots, x_n^0$ des variables indépendantes. Comme $\omega^{(2m-2)} = \omega^{(2m-4)}\omega'$, tous les termes de $\omega^{(2m-4)}$ qui ne renferment que les différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{2m-1}$ ne peuvent avoir des coefficients nuls pour ce système de valeurs. En choisissant convenablement l'ordre des indices, on peut évidemment supposer que $\omega^{(2m-4)}$ contient un terme en $dx_2 \ldots dx_{2m-2}$ dont le coefficient n'est pas nul pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Il est facile de poursuivre le raisonnement et, en définitive, nous pouvons supposer que pour le système de valeurs $x_1^0, \ldots, x_n^0$:

le coefficient de $dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-1}$ n'est pas nul dans $\omega^{(2m-2)}$;

le coefficient de $dx_2 \ldots dx_{2m-2}$ n'est pas nul dans $\omega^{(2m-4)}$;

. . . .

le coefficient de $dx_r dx_{r+1} \ldots dx_{2m-r}$ n'est pas nul dans $\omega^{(2m-2r)}$;

. . . .

le coefficient de dx_m n'est pas nul dans ω.

Pour former le système complet adjoint à l'équation $\omega = 0$, il suffit d'annuler dans le produit $\omega^{(2m-2)} df$ les coefficients des monomes

$$\begin{gathered} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-1} dx_{2m}, \\ dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-1} dx_{2m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-1} dx_n. \end{gathered}$$

On obtient ainsi en effet $n - 2m + 1$ équations que l'on peut résoudre par rapport aux dérivées.

$$\frac{\partial f}{\partial x_{2m}}, \frac{\partial f}{\partial x_{2m+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

les seconds membres renfermant les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{2m-1}}$, et les coefficients de ces dérivées étant holomorphes, d'après les hypothèses faites, dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Ce système est forcément identique au système adjoint à l'équation $\omega = 0$, puisqu'il renferme le même nombre d'équations linéairement distinctes. Par suite ce système admet une intégrale u_1 holomorphe dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et qui se réduit à x_1 pour $x_{2m} = x_{2m}^0, \ldots, x_n = x_n^0$; dans le domaine du point considéré, elle est représentée par un développement de la forme

$$u_1 = x_1^0 + (x_1 - x_1^0) + \alpha_{2m}(x_{2m} - x_{2m}^0) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_n^0) + \ldots$$

tous les termes non écrits contenant au moins un des facteurs

$x_{2m} - x_{2m}^0$, ..., $x_n - x_n^0$. Nous poserons $f_1 = u_1$, et nous aurons ensuite à chercher une intégrale, distincte de u_1, de l'équation

$$\omega^{(2m-4)} du_1 df = 0.$$

Cette équation est équivalente à un système complet admettant $2m - 2$ intégrales indépendantes, y compris l'intégrale évidente u_1. Ce système est donc formé de $n - 2m + 2$ équations linéairement distinctes. Pour les obtenir, il suffit d'égaler à zéro les coefficients des monomes

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-2} dx_{2m-1},\ dx_1 dx_2 \ldots dx_{2m-2} dx_{2m},\ \ldots\ dx_1 \ldots dx_{2m-2} dx_n,$$

du produit symbolique $\omega^{(2m-4)} du_1 df$. En observant que le coefficient de dx_1 dans du_1 se réduit à l'unité pour les valeurs x_1^0, ..., x_n^0, et que le coefficient de $dx_2 \ldots dx_{2m-2}$ n'est pas nul par hypothèse pour ce système de valeurs, on voit que ces coefficients renferment respectivement les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_{2m-1}}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ multipliées par un coefficient qui n'est pas nul pour les valeurs initiales considérées, et en outre des termes en $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_{2m-2}}$. On obtient ainsi un système de $n - 2m + 2$ équations que l'on peut supposer résolues par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_{2m-1}}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, les coefficients des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_{2m-2}}$ étant holomorphes pour $x_1 = x_1^0$, ..., $x_n = x_n^0$.

Ce système admet une intégrale u_2, holomorphe dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ se réduisant à x_2 pour $x_{2m-1} = x^0_{2m-1}$, ... $x_n = x_n^0$.

Cette intégrale est évidemment différente de u_1, et on verra de même que l'équation symbolique

$$\omega^{(2m-6)} du_1 du_2 df = 0$$

peut être remplacée par un système complet de $n - 2m + 3$ équations qui admettent une intégrale u_3, indépendante de u_1 et u_2, holomorphe dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et se réduisant à x_3 pour

$$x_{2m-2} = x^0_{2m-2},\ \ldots,\ x_n = x_n^0.$$

Il est clair que le raisonnement peut se continuer jusqu'à la dernière équation

$$\omega du_1 \ldots du_{m-1} df = 0,$$

qui est équivalente à un système complet de $n - m$ équations admettant une intégrale u_m holomorphe dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, se réduisant à x_m pour $x_{m+1} = x^0_{m+1}, \ldots, x_n = x_n^0$.

En résumé, on obtient ainsi *un groupe conjugué de m fonctions* $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, *qui sont holomorphes dans le domaine du point* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *et qui se réduisent à* $x_1, \ldots, x_m$ *respectivement, lorsqu'on y fait*

$$x_{m+1} = x^0_{m+1}, \ldots, x_n = x_n^0.$$

Nous dirons pour abréger que ce groupe est un *groupe principal* relativement au système de valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$.

47. Solutions singulières. — On a déjà remarqué que l'équation générale de Pfaff peut admettre certaines intégrales auxquelles ne correspondent pas d'intégrales de l'équation ramenée à sa forme canonique (n° **16**). Il est possible maintenant de voir comment on peut définir d'une façon précise ces intégrales et reconnaître s'il en existe. Soient $\omega = 0$ une équation de Pfaff de classe $2m - 1$ à n variables, et M_h une multiplicité intégrale à h dimensions de cette équation. Nous supposerons que l'on peut trouver sur cette multiplicité un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tel que tous les coefficients de ω soient holomorphes dans le voisinage de ce point, et que tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ ne soient pas nuls pour ce système de valeurs. Nous allons montrer que *cette intégrale M_h peut être obtenue par la méthode générale de résolution exposée antérieurement* (*n°* **15**).

On vient de démontrer en effet qu'il existe m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, formant un groupe conjugué pour l'équation $\omega = 0$, holomorphes dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et se réduisant respectivement à $x_1, \ldots, x_m$, quand on y fait $x_{m+1} = x^0_{m+1}, \ldots, x_n = x_n^0$. Ces m fonctions forment évidemment avec $x_{m+1}, \ldots, x_n$ un système de n fonctions distinctes, et si on les prend pour variables indépendantes, l'équation $\omega = 0$ devient

$$\omega = U_1 du_1 + \ldots + U_m du_m = 0, \tag{26}$$

$U_1, U_2, \ldots, U_m$ étant des fonctions holomorphes de $u_1, \ldots, u_m$, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ dans le domaine du point $u_1 = x_1^0, \ldots, u_m = x_m^0$, $x_{m+1} = x^0_{m+1}, \ldots, x_n = x_n^0$. Le coefficient U_m n'est pas nul pour ce système de valeurs, car U_m^0 est égal au coefficient de dx_m dans ω pour les valeurs $x_1^0, \ldots, x_n^0$, d'après la définition même des fonctions $u_1, \ldots, u_m$, et par hypothèse ce coefficient n'est pas nul. Pour obtenir toutes les intégrales de l'équation $\omega = 0$ passant au point considéré, on peut donc diviser tous les coefficients par U_m, ce qui ramène l'équation à la forme canonique

$$(27) \qquad v_1 du_1 + \ldots + v_{m-1} du_{m-1} + du_m = 0,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ étant aussi des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_n$ dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Les $2m - 1$ fonctions $u_1, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ sont distinctes, sans quoi l'équation $\omega = 0$ serait de classe inférieure à $2m - 1$.

Par hypothèse, l'intégrale M_h de l'équation $\omega = 0$ est représentée par un système d'équations

$$x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les n fonctions φ_i étant holomorphes dans le domaine d'un système de valeurs $t_1^0, \ldots, t_h^0$ pour les h variables $t_1, \ldots, t_h$, et prenant les valeurs $x_1^0, \ldots, x_n^0$, pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_h = t_h^0$. En remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans les $2m - 1$ fonctions u_i, v_k, on a les équations d'une multiplicité intégrale M' de l'équation transformée. Imaginons que l'on ait pris pour variables $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{m-1}$, et $n - 2m + 1$ des anciennes variables $x_1, \ldots, x_n$. La multiplicité M' est définie par un certain nombre de relations entre les variables u_i, v_k, et la multiplicité M_h s'obtient en adjoignant aux relations précédentes un certain nombre d'autres relations où figurent les autres variables. Cette intégrale M_h peut donc être obtenue par l'application de la méthode générale du n° **15**.

Les seules intégrales auxquelles ce procédé ne s'applique pas sont donc les intégrales [1] telles que *les coordonnées de tous leurs points annulent tous les coefficients de* $\omega^{(2m-2)}$.

[1] Nous laissons de côté les intégrales telles que l'un au moins des coefficients de ω cesse d'être holomorphe dans le voisinage de l'un quelconque des

Nous appellerons **intégrales singulières** les intégrales de l'équation $\omega = 0$ satisfaisant à cette condition.

Pour qu'il existe des intégrales singulières, il faut donc que les équations obtenues en égalant à zéro tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ soient compatibles. Si ces équations n'admettent pas de systèmes de solutions communes formant une multiplicité à r dimensions $(r > 0)$, il n'existe pas d'intégrales singulières. Si ces équations définissent une multiplicité, cette multiplicité peut se décomposer en plusieurs multiplicités analytiquement distinctes. Soient

$$f_1 = 0, \; \ldots, f_h = 0 \tag{28}$$

les équations qui définissent l'une de ces multiplicités M_{n-h}. Le système (28) étant supposé mis sous forme normale, on peut tirer de ces équations h des variables, $x_1, \ldots, x_h$ par exemple en fonction des $n - h$ autres variables, et en remplaçant $x_1, \ldots, x_h$ par leurs expressions dans l'équation proposée, on sera conduit à une nouvelle équation de Pfaff $\omega_1 = 0$ à $n - h$ variables, dont toute intégrale fournira une intégrale singulière de l'équation proposée. Cette équation $\omega_1 = 0$ peut avoir elle-même des intégrales singulières, que l'on recherchera de la même façon. Il est clair que cette suite d'opérations aura un terme, puisque le nombre des variables va en diminuant quand on passe d'une équation de Pfaff à la suivante.

Remarque. — Il pourrait se faire que l'équation $\omega = 0$ admette des intégrales singulières, telles que les coordonnées de tous leurs points vérifient non seulement les relations (28), mais aussi celles que l'on obtient en égalant à zéro tous les jacobiens des h fonctions $f_1, \ldots, f_h$, par rapport à h quelconques des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En adjoignant aux relations (28) ces nouvelles équations, on obtiendra un nouveau système que l'on étudiera comme le premier, s'il est compatible, et ainsi de suite.

points de cette intégrale. Par exemple l'équation

$$\omega = x dx + y dy + \sqrt{1 - x^2 - y^2} dz = 0$$

admet des intégrales à deux dimensions qui sont des sphères de rayon un ayant leur centre sur Oz. Elle admet en outre pour intégrales le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, et toutes les courbes de ce cylindre.

EXEMPLES : 1° Soit l'équation de Pfaff

$$\omega = x_5 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_4 + x_1 dx_5 = 0 ;$$

on a

$$\omega' = dx_3 dx_2 + dx_1 dx_4,$$

$$\omega''' = \frac{1}{2}(\omega')^2 = -\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

$$\omega^{\text{IV}} = -\, x_1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5,$$

$$\omega^{\text{V}} = 0.$$

On a ici $m = 3$, $\omega^{(2m-2)} = \omega^{\text{IV}}$. Toute intégrale singulière doit appartenir à la multiplicité $x_1 = 0$. En tenant compte de cette relation, l'équation proposée se réduit à

$$x_3 dx_2 = 0,$$

dont l'intégrale générale est $x_2 = a$, et qui admet aussi une intégrale singulière $x_3 = 0$ L'équation proposée admet donc des intégrales singulières à *trois* dimensions, représentées par l'un des systèmes d'équations

$$(\alpha) \qquad x_1 = x_3 = 0, \qquad\qquad (\beta) \qquad x_1 = 0,\ x_2 = a,$$

où a est une constante arbitraire. Toute multiplicité à une ou deux dimensions située sur une des multiplicités précédentes est aussi une intégrale singulière

2° Considérons l'équation *non complètement intégrable*

$$\omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = 0,$$

où A_1, A_2, A_3 sont des fonctions de x_1, x_2, x_3.

Dans ce cas $m = 2$, et l'on a

$$\omega^{(2m-2)} = \omega'' = \omega\omega' = \left[A_1 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \right) + A_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) + A_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3.$$

Toute intégrale singulière doit satisfaire à l'équation

$$(29) \qquad A_1 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \right) + A_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) + A_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

qui, par hypothèse, n'est pas vérifiée identiquement. Si les variables figurent dans cette relation, on pourra exprimer l'une des variables au moyen des deux autres et, en portant dans l'équation $\omega = 0$, on obtient en général une équation de Pfaff à deux variables. L'équation proposée admet donc en général une infinité de solutions singulières à une dimension.

Prenons par exemple [1]

$$\omega = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)dx_1 + x_2x_3^2dx_2 + x_3^3dx_3 = 0\,;$$

la condition (29) est ici

$$2x_1x_2x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0.$$

Cette équation se décompose en quatre autres et, en traitant séparément chacune d'elles, on obtient trois familles d'intégrales singulières à une dimension

$$(\alpha)\qquad x_1 = 0,\ x_2^2 + x_3^2 = a,$$
$$(\beta)\qquad x_2 = 0,\ 2x_1^2 - x_1^4 + x_3^4 = a,$$
$$(\gamma)\qquad x_3 = 0,\ x_1 = a,$$

a étant une constante arbitraire, et une intégrale singulière à deux dimensions

$$(\delta)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

48. Intégrales appartenant à une multiplicité donnée.— La détermination des solutions singulières, de même que l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (nos **18**, **20**) conduisent à rechercher les intégrales d'une équation de Pfaff appartenant à une multiplicité donnée, c'est-à-dire telles que les coordonnées de tous leurs points vérifient un système donné de h relations distinctes du premier ordre

$$(30)\qquad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots, f_h = 0.$$

Ainsi qu'on l'a déjà indiqué au numéro précédent, ce problème se ramène au problème général. Les équations (30) étant mises sous forme normale, si l'on tire de ces h équations les expressions de h des variables au moyen des $n - h$ autres variables, et qu'on les porte dans $\omega = 0$, on a une nouvelle équation de Pfaff $\omega_1 = 0$ à $n - h$ variables. On peut déterminer *a priori* la classe de la nouvelle équation de Pfaff au moyen du lemme suivant.

Soit p le plus petit nombre entier tel que tous les coefficients du produit symbolique $\omega^{(p)}df_1 \ldots df_h$ soient nuls en tenant compte des relations (30) elles-mêmes. Ce nombre p est égal à la classe de la forme de Pfaff ω_1 déduite de ω par la substitution précédente.

[1] Cartan, *loc. cit., p. 282.*

Imaginons en effet que l'on prenne un nouveau système de variables $(y_1, \ldots, y_n)$ tel que $y_1, \ldots, y_h$ soient identiques à $f_1, \ldots, f_h$; on peut toujours faire un changement de variables de cette espèce en considérant un système de valeurs $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ satisfaisant aux relations (30), et tel que toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_h$ soient holomorphes dans le voisinage de ce système, sans que tous les jacobiens des h fonctions $f_1, \ldots, f_h$ par rapport à h quelconques des variables x_i soient nuls pour les valeurs $x_i = x_i^0$. Si l'on pose $y_1 = f_1, \ldots, y_h = f_h$, on peut tirer en effet de ces h équations les expressions de h des variables x_i au moyen de $y_1, \ldots, y_h$ et des $n-h$ autres variables x_i, et ces expressions seront des fonctions holomorphes dans le voisinage du système de valeurs correspondantes des nouvelles variables. Toute fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_n$, dans le domaine du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, se change en une fonction holomorphe des nouvelles variables dans un autre domaine, et la forme ω est remplacée par une nouvelle forme

$$(31) \qquad \varpi = B_1 dy_1 + \ldots + B_h dy_h + B_{h+1} dy_{h+1} + \ldots + B_n dy_n,$$

$B_1, \ldots, B_n$ étant des fonctions des nouvelles variables. La forme ω_1 déduite de ω par la substitution dont il s'agit est identique à la forme ϖ_0

$$\varpi_0 = B^0_{h+1} dy_{h+1} + \ldots + B_n^0 dy_n,$$

déduite de ϖ, en remplaçant $y_1, \ldots, y_h, dy_1, \ldots, dy_h$ par zéro, avec le nouveau système de variables. Il est à peu près évident que ϖ'_0 se déduit de ϖ' par la même substitution. En effet, si dans la forme ϖ'

$$\varpi' = dB_1 dy_1 + \ldots + dB_h dy_h + dB_{h+1} dy_{h+1} + \ldots + dB_n dy_n$$

on fait $y_1 = y_2 = \ldots y_h = dy_1 = \ldots = dy_h = 0$, il reste la forme

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial B_{h+i}}{\partial y_{h+j}}\right)_0 dy_{h+j} dy_{h+i},$$

l'indice o indiquant que l'on remplace $y_1, \ldots, y_h$ par zéro après la différentiation. Mais on a aussi

$$\left(\frac{\partial B_{h+i}}{\partial y_{h+j}}\right)_0 = \frac{\partial B^0_{h+i}}{\partial y_{h+j}}$$

car il revient évidemment au même de remplacer $y_1, \ldots, y_h$ par zéro avant ou après la différentiation. La forme obtenue est donc identique à la forme dérivée de ϖ_0,

$$\varpi'_0 = \sum_{i,\ j} \frac{\partial B^0_{h+i}}{\partial y_{h+j}} a y_{h+j} d y_{h+i}.$$

Les formes dérivées successives de ϖ se déduisant de ϖ et de ϖ' par des multiplications symboliques, il est clair que la forme $\varpi_0^{(p)}$ se déduira de $\varpi^{(p)}$ en remplaçant dans celle-ci les variables $y_1, \ldots, y_h$ et leurs différentielles par zéro, quel que soit p.

D'autre part, le produit $\omega^{(p)} df_1 \ldots df_h$ se transforme en $\varpi^{(p)} dy_1 \ldots dy_h$ par le changement de variables effectué plus haut. Il est clair que si l'on remplace $y_1, \ldots, y_h$ par zéro dans tous les coefficients de ce produit symbolique, il se réduira, en tenant compte des produits partiels nuls, à

$$\varpi_0^{(p)} dy_1 \ \ldots \ dy_h.$$

Ce produit est donc nul si p est égal ou supérieur à la classe de ϖ_0, et dans ce cas seulement, ce qui démontre le lemme énoncé. Remarquons que l'abaissement de la classe quand on passe de ϖ à ϖ_0 peut être supérieur à $2h$ (Cf. n° **43**). Si par exemple on fait $x_1 = 0$ dans la forme $x_1\varpi$, la classe s'abaisse de c unités, si cette forme est de classe c.

Nous pouvons dire encore, en nous reportant aux résultats du n° **46** que *si m est le plus petit nombre entier tel que $\varpi^{(2m)} df_1 \ldots df_h$ ait tous ces coefficients nuls en tenant compte des relations (30) elles-mêmes, l'équation $\omega = 0$ est remplacée par une équation de Pfaff de classe $2m - 1$ quand on y fait la substitution précédente.*

Pour ramener à une forme canonique cette nouvelle équation, qui s'écrit $\varpi_0 = 0$ avec les variables $y_{h+1}, \ldots, y_n$, on a rechercher une intégrale particulière de m systèmes complets successifs. En se reportant aux résultats précédents (n° **46**), on peut écrire ces systèmes complets avant tout changement de variables. En effet, on voit aisément, en reprenant le raisonnement de tout à l'heure, que si tous les coefficients du produit symbolique

$$\omega^{(2m-2k)} df_1 \ \ldots \ df_h df_{h+1} \ \ldots \ df_k$$

sont nuls en tenant compte des relations (30), les $k-h$ fonctions $f_{h+1}, \ldots, f_k$ forment un groupe conjugué pour la nouvelle équation, et réciproquement. On aura donc à chercher successivement une intégrale f_{h+1} du système obtenu en égalant à zéro tous les coefficients du produit $\omega^{(2m-2)} df_1 \ldots df_h df$, puis une intégrale f_{h+2} du système obtenu en égalant à zéro tous les coefficients de $\omega^{(2m-4)} df_1 \ldots df_{h+1} df, \ldots$, et enfin une intégrale f_{h+m} du système obtenu en égalant à zéro tous les coefficients du produit $\omega df_1 \ldots df_{h+m-1} df$, les variables étant supposées liées par les relations (30). Si l'on choisit ces m fonctions $f_{h+1}, \ldots, f_{h+m}$ de façon qu'elles soient indépendantes, même en tenant compte des relations (30), l'équation $\omega = 0$ prendra la forme canonique

$$\varphi_1 df_{h+1} + \ldots, + \varphi_m df_{h+m} = 0,$$

quand on fera $f_1 = 0, \ldots, f_h = 0$ après la transformation.

On peut encore distinguer les solutions *générales* du problème et les solutions *singulières*. Le nombre m étant défini comme on vient de le dire, une intégrale fait partie de l'intégrale générale si les coordonnées d'un point quelconque de cette intégrale n'annulent pas tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)} df_1 \ldots df_h$. Soient $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ les coordonnées d'un point satisfaisant aux équations (30) et n'annulant pas tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)} df_1 \ldots df_h$. Il est clair que ces coordonnées n'annulent pas non plus tous les coefficients du produit $df_1 \ldots df_h$, c'est-à-dire tous les jacobiens des h fonctions $f_1, \ldots, f_h$ par rapport à h quelconques des variables $x_1, \ldots, x_n$. On peut donc faire le changement de variables indiqué plus haut et, en poursuivant le raisonnement comme au n° **47**, on verra facilement que toute intégrale de l'équation $\omega = 0$ passant au point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et vérifiant les h relations (30) correspond à une intégrale non singulière de la nouvelle équation de Pfaff.

Les intégrales singulières sont celles qui annulent tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)} df_1 \ldots df_h$. On les détermine, comme plus haut, en adjoignant aux relations (30) celles qu'on obtient en égalant à zéro tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)} df_1 \ldots df_h$, ce qui conduit à un nouveau problème de même nature que le premier.

49. Intégrales à un nombre donné de dimensions. — L'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue conduit à un problème plus particulier, qui revient à déterminer les intégrales d'une équation de Pfaff, situées sur une multiplicité donnée, et ayant *un nombre donné de dimensions*.

Ce problème peut évidemment être formulé ainsi : *Trouver les intégrales d'une équation de Pfaff définies par un système de r équations, parmi lesquelles h relations ($h < r$) sont données à l'avance.*

Il est aisé de reconnaître à l'avance si ce problème admet des solutions au moyen des deux lemmes suivants.

Lemme A. — Si une intégrale d'une équation de Pfaff est définie par un système de r relations, les coordonnées d'un point quelconque de cette intégrale annulent tous les coefficients de $\omega^{(2r)}$.

Cette propriété étant indépendante des variables au moyen desquelles on exprime la forme ω, nous supposerons qu'on a pris un système de variables $x_1, \ldots, x_n$, tel que l'intégrale en question M_{n-r} soit définie par les r relations

$$x_1 = 0, \ldots, x_r = 0. \tag{32}$$

Les coefficients $A_{r+1}, \ldots, A_n$ de la forme

$$\omega = A_1 dx_1 + \ldots + A_r dx_r + A_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + A_n dx_n$$

doivent donc s'annuler quand on y fait $x_1 = 0, \ldots, x_r = 0$. Dans la forme dérivée

$$\omega' = dA_1 dx_1 + \ldots + dA_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + dA_n dx_n,$$

toutes les dérivées $\frac{\partial A_{r+i}}{\partial x_{r+j}}$ sont nulles aussi pour $i > 0$, $j > 0$, quand on y remplace $x_1, \ldots, x_r$ par zéro, de sorte que le coefficient de $dx_{r+i} dx_{r+j}$ est nul pour ce système de valeurs.

Il s'ensuit que si l'on ne conserve, dans chacun des $r + 1$ facteurs du produit

$$\omega^{(2r)} = \frac{1}{r!} \omega (\omega')^r,$$

que les termes dont les coefficients ne sont pas nuls pour $x_1 = 0, \ldots, x_r = 0$, chacun de ces termes contiendra au moins l'une des différentielles $dx_1, \ldots, dx_r$. Comme il y a plus de facteurs que de différentielles, tous les coefficients du produit symbolique sont certainement nuls, quand on y fait $x_1 = 0$, ..., $x_r = 0$. Le raisonnement prouve qu'il en est de même pour toutes les formes dérivées suivantes $\omega^{(2r+1)}$, $\omega^{(2r+2)}$, ...

Lemme B. — Si une intégrale d'une équation de Pfaff $\omega = 0$ *est définie par un système de r relations parmi lesquelles h relations sont données à l'avance* $f_1 = 0$, ..., $f_h = 0$, *les coordonnées d'un point quelconque de cette intégrale annulent tous les coefficients du produit symbolique* $\omega^{(2r-2h)} df_1 \ldots df_h$.

Nous pouvons, comme tout à l'heure, supposer la multiplicité M_{n-r} définie par les r relations (32), f_1, ..., f_h étant précisément x_1, ..., x_h elles-mêmes. La forme symbolique $\omega^{(2r-2h)}$ est de degré $2r - 2h + 1$, et tous les termes de cette forme qui ne sont pas nuls pour $x_1 = 0$, ..., $x_r = 0$ contiennent au moins $r - h + 1$ des différentielles dx_1, ..., dx_r, et par conséquent l'une au moins des différentielles dx_1, ..., dx_h. Le produit $\omega^{(2r-2h)} dx_1 \ldots dx_h$ a donc tous ses termes nuls, en tenant compte des relations (32), et il en est de même des produits

$$\omega^{(2r-2h+1)} dx_1 \ldots dx_h, \quad \omega^{(2r-2h+2)} dx_1 \ldots dx_h, \ldots$$

Le premier lemme est évidemment un cas particulier du second, obtenu en supposant $h = 0$.

Le même raisonnement prouve que, si tous les coefficients du produit $\omega df_1 \ldots df_r$ sont nuls en tenant compte des équations

$$f_1 = 0, \ldots, f_r = 0,$$

ces équations définissent une intégrale de $\omega = 0$.

Cela étant, pour avoir les intégrales de l'équation $\omega = 0$ définies par un système de r relations entre les variables, parmi lesquelles h relations sont données à l'avance,

$$(33) \qquad f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, f_h = 0,$$

on formera le produit symbolique

$$\omega^{(2r-2h)} df_1 \ldots df_h,$$

et on égalera à zéro tous les coefficients. On obtiendra ainsi un certain nombre de relations qui doivent être vérifiées par les coordonnées de tous les points des multiplicités cherchées.

En adjoignant ces relations aux précédentes (33), on obtient un système de $h' \geqslant h$ relations distinctes. Si h' est supérieur à r, ou si ces h' relations sont incompatibles, le problème n'admet pas de solutions. Si $h' \leqslant r$, on opérera sur ce nouveau système comme sur le précédent, et ainsi de suite. En continuant de cette façon, on constatera l'impossibilité du problème, ou bien on arrivera à un système de k équations distinctes ($k \leqslant r$),

$$f_1 = 0, \ldots, f_k = 0, \tag{34}$$

comprenant les équations données (33), telles que le produit symbolique $\omega^{(2r-2k)} df_1 \ldots df_k$ ait tous ses coefficients nuls, en tenant compte de ces relations elles-mêmes.

Si $k = r$, les équations (34) définissent une multiplicité intégrale, satisfaisant aux conditions du problème.

Supposons $k < r$, et soit m le plus petit nombre entier tel que tous les coefficients du produit symbolique

$$\omega^{(2m)} df_1 df_2 \ldots df_k$$

soient nuls, en tenant compte des relations (34) ; ce nombre m est par hypothèse au plus égal à $r - k$. On a vu au paragraphe précédent que la recherche des intégrales de l'équation $\omega = 0$, situées sur la multiplicité définie par les équations (34), se ramène à la résolution d'une équation de Pfaff de classe $2m - 1$. Les intégrales non singulières de cette équation sont définies par un ou plusieurs systèmes de m relations, auxquelles on peut adjoindre de nouvelles relations choisies arbitrairement. Si l'on adjoint à l'un de ces systèmes de m relations les k équations (34), on a un système de $m + k \leqslant r$ relations définissant une intégrale de l'équation $\omega = 0$, et les coordonnées d'un point quelconque de cette intégrale vérifient $m + k$ relations, parmi lesquelles sont les k relations (34). Si $m + k < r$, il suffira de leur adjoindre $r - (m + k)$ relations choisies arbitrairement, pour avoir une intégrale satisfaisant aux conditions voulues, et il est clair qu'on les obtiendra toutes de cette façon.

La méthode s'applique en particulier pour $k = 0$, et permet de déterminer toutes les intégrales de $\omega = 0$ qui sont définies par un nombre donné r de relations distinctes, c'est-à-dire toutes les intégrales à un nombre déterminé de dimensions.

REMARQUE. — L'équation

$$\omega^{(2r-2h)} df_1 \ldots df_h = 0 \tag{35}$$

entraîne d'autres relations de même forme où ne figurent qu'une ou deux des fonctions $f_1, \ldots, f_h$. Supposons, en effet, qu'il existe une intégrale définie par r relations seulement, parmi lesquelles la relation $f_i = 0$. Il résulte du lemme B que les coordonnées d'un point quelconque de cette intégrale annulent tous les coefficients du produit $\omega^{(2r-2)} df_i$. De même s'il existe une intégrale définie par r relations, parmi lesquelles les deux relations $f_i = 0$, $f_j = 0$, le même lemme prouve que les coordonnées d'un point quelconque de cette intégrale annulent tous les coefficients des produits $\omega^{(2r-4)} df_i df_j$, $\omega^{(2r-3)} df_i df_j$.

Il s'ensuit que la relation (35) entraîne les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^{(2r-2)} df_i = 0, \\ \omega^{(2r-3)} df_i df_j = 0, \quad \omega^{(2r-4)} df_i df_j = 0 \quad (i, j = 1, 2 \ldots h), \end{array}\right. \tag{36}$$

toujours en tenant compte des relations $f_i = 0$ elles-mêmes.

Inversement, sous des hypothèses très générales, les relations (36), ou un certain nombre d'entre elles, peuvent remplacer l'équation (35), et M. Cartan en a déduit une nouvelle méthode de résolution du problème qui est très analogue aux méthodes exposées plus haut (nos **43-46**) pour la formation d'un groupe conjugué ou semi-conjugué.

Nous renverrons à son Mémoire pour les détails de cette méthode, ainsi que pour la recherche des solutions singulières.

50. Application aux équations aux dérivées partielles. — Reprenons le problème de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; p_1, \ldots, p_n) = 0, \end{array}\right. \tag{37}$$

ou le problème équivalent qui consiste à déterminer, dans l'espace à $2n+1$ dimensions, une intégrale à n dimensions de l'équation de Pfaff

$$\omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0, \tag{38}$$

dont tous les éléments vérifient les h relations données (37). C'est un cas particulier du problème étudié au paragraphe précédent, et dans le cas actuel le nombre r est égal à $n+1$. D'après la remarque qui termine ce paragraphe, nous pouvons adjoindre aux relations (30) celles que l'on obtient en égalant à zéro tous les coefficients des produits symboliques

$$\omega^{(2r-2)} df_i, \qquad \omega^{(2r-4)} df_i df_j\,; \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

ici $r = n+1$, $\omega^{(2r-2)} = \omega^{(2n)}$ est de degré $2n+1$, et le produit $\omega^{(2r-2)} df$ est identiquement nul, quelle que soit la fonction f. Quant au produit $\omega^{(2r-4)} df_i df_j$, ou $\omega^{(2n-2)} df_i df_j$, qui a été calculé plus haut (n° **42**), il ne contient qu'un seul terme

$$[f_i, f_j]\, dz dx_1 dp_1 \ldots dx_n dp_n,$$

et nous voyons que *tous les éléments des intégrales cherchées doivent satisfaire aux relations*

$$[f_i, f_j] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)\,; \tag{39}$$

c'est le théorème fondamental de la théorie des systèmes en involution (*Leçons*, n° **58**).

La méthode d'intégration de Jacobi se rattache aussi très facilement aux méthodes d'intégration d'une équation de Pfaff, qui ont été exposées dans ce Chapitre.

Les raisonnements du numéro précédent, appliqués au cas actuel, prouvent que l'on peut toujours ramener l'intégration du système (37) à l'intégration d'un système en involution, si l'on ne constate pas l'impossibilité du problème ; ces raisonnements ne diffèrent pas d'ailleurs de ceux du n° **58**. Supposons donc que les équations (37) forment un système en involution, c'est-à-dire que les équations (39) soient des conséquences algébriques des relations (37). Nous pouvons même supposer que l'on a mis les équations (37) sous une forme telle que les conditions $[f_i, f_j] = 0$

soient des identités. La classe c de ω étant $2n+1$, les h fonctions $f_1, \ldots, f_h$ vérifient donc les relations

$$\omega^{(c-1)}df_i = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_i df_j = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et par suite ces h fonctions forment un groupe conjugué ou semi-conjugué par rapport à ω (n° **46**). On peut alors déterminer un groupe semi-conjugué de $n+1$ fonctions, comprenant les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_h$. Pour cela, on cherche d'abord une intégrale f_{h+1}, indépendante de $f_1, \ldots, f_h$, du système

$$\omega^{(c-1)}df = 0, \qquad \omega^{(c-3)}df_1 df = 0, \ldots, \omega^{(c-3)}df_h df = 0 ;$$

la première équation est vérifiée d'elle-même, et ce système se réduit à

$$[f_1, f] = 0, \ldots [f_h, f] = 0.$$

On a ensuite à chercher une intégrale f_{h+2}, indépendante de $f_1, \ldots, f_{h+1}$ du nouveau système

$$[f_1, f] = 0, \ldots [f_h, f] = 0, \qquad [f_{h+1}, f] = 0,$$

et ainsi de suite. Ayant ainsi déterminé un système de $n+1$ fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_h, \ldots, f_{n+1}$ en involution, ces $n+1$ fonctions forment un groupe semi-conjugué pour l'expression ω, que l'on peut par conséquent mettre sous la forme

$$\omega = \varphi_1 df_1 + \ldots + \varphi_h df_h + \ldots + \varphi_{n+1} df_{n+1}.$$

Les équations

$$f_1 = 0, \ldots, f_h = 0, f_{h+1} = a_{h+1}, \ldots, f_{n+1} = a_{n+1},$$

où $a_{h+1}, \ldots, a_{n+1}$ sont des constantes arbitraires, donnent donc une solution du problème. C'est une intégrale complète, et la méthode précédente est identique à la méthode de Jacobi généralisée par Mayer. Toutes les autres intégrales se déduiraient de même des solutions de l'équation de Pfaff

$$\varphi_{h+1} df_{h+1} + \ldots + \varphi_{n+1} df_{n+1} = 0$$

définies par $n+1-h$ relations, ce qui conduit précisément à des résultats déjà exposés (*Leçons*, n° **51**).

Dans le cas particulier où $f_1, \ldots, f_h$ ne renferment pas z explicitement, les crochets $[f_i, f_j]$ se réduisent aux parenthèses (f_i, f_j), et la méthode peut être simplifiée de façon à retrouver la méthode même de Jacobi.

Supposons donc que l'on ait h fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_h$, indépendantes de z, telles que les parenthèses (f_i, f_j) soit nulles identiquement. La variable z ne figure pas dans les coefficients des équations du système complet

$$[f_1, f] = 0, \ldots, [f_h, f] = 0$$

qui déterminent f_{h+1}. Si l'on adjoint à ces équations la relation $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, on obtient un nouveau système complet

$$(f_1, f) = 0, \ldots, (f_h, f) = 0$$

pour déterminer une fonction f des $2n$ variables x_i, p_h.

La même remarque s'appliquant aux systèmes suivants, on peut donc déterminer de proche en proche n fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_h, \ldots, f_n$, ne renfermant pas z, et telles que toutes les parenthèses (f_i, f_j) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ soient nulles. Ces n fonctions forment un groupe conjugué par rapport à la forme ω, car la relation $\omega^{(c-2)} df = 0$ se réduit dans ce cas à $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (nº **43**). Si donc on prend pour nouvelles variables

$$z, f_1, f_2, \ldots, f_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant n fonctions convenablement choisies *indépendantes de* z, formant avec $f_1, \ldots, f_n$ un système de $2n$ fonctions distinctes des variables x_i, p_k, on sait que ω prendra la forme

$$\omega = dz + \varphi_1 df_1 + \ldots + \varphi_n df_n + df_{n+1},$$

f_{n+1} étant une fonction des variables (x_i, p_k) qui se détermine par une quadrature (nº **43**). On aura donc dans ce cas une intégrale complète

$$f_1 = 0, \ldots, f_h = 0, f_{h+1} = a_{h+1}, \ldots, f_n = a_n, \quad z = f_{n+1} + a_{n+1},$$

qui s'obtient par une quadrature, quand on a déterminé $f_{h+1}, \ldots, f_n$. Cette méthode n'est pas distincte au fond de la méthode même de Jacobi. Supposons en effet, afin de nous placer dans le cas considéré par Jacobi, que le jacobien $\frac{D(f_1, \ldots, f_h)}{D(p_1, \ldots, p_n)}$ ne soit pas nul pour tous les systèmes de valeurs qui annulent $f_1, \ldots, f_h$. Imaginons que l'on prenne pour variables $z, x_1, \ldots, x_n$ et $y_1 = f_1, \ldots, y_n = f_n$; il faut pour cela résoudre les n équations

$$f_1 = y_1, \ldots, f_n = y_n \tag{40}$$

par rapport à $p_1, \ldots, p_n$ et porter les expressions ainsi obtenues dans ω, ce qui conduit à une nouvelle expression de cette forme

$$\omega = dz + \varphi_1 dy_1 + \ldots + \varphi_n dy_n + df_{n+1},$$

f_{n+1} étant une fonction de $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Si l'on regarde dans l'identité précédente $y_1, \ldots, y_n$ comme des paramètres, la fonction f_{n+1}, considérée comme fonction des seules variables $x_1, \ldots, x_n$ a évidemment pour différentielle totale

$$df_{n+1} = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

$p_1, \ldots, p_n$ étant les fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$ et des paramètres $y_1, \ldots, y_n$ déduites des relations (40)

51. Application aux transformations de contact. — Les théorèmes classiques (*Leçons*, nos **75** et suivants) se déduisent très facilement des propriétés d'invariance des formes dérivées et des produits symboliques. Soient $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ un système de $2n+1$ fonctions des $2n+1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, telles que l'on ait identiquement

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n), \tag{41}$$

ρ étant une fonction non identiquement nulle des variables z, x_i, p_h. L'identité précédente peut s'écrire

$$\Omega = \rho\omega, \tag{42}$$

en posant

$$\Omega = dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n,$$
$$\omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n;$$

de sorte que la forme de Pfaff Ω se change en $\rho\omega$, quand on y remplace les variables Z, X_i, P_k par leurs expressions au moyen des variables, z, x_i, p_k.

De la relation (42) on déduit

$$\Omega' = \rho\omega' + d\rho \times \omega,$$
$$(\Omega')^n = (\rho\omega' + d\rho\omega)^n = \rho^n(\omega')^n + n(\rho\omega')^{n-1}d\rho \times \omega,$$
$$(\Omega')^n\Omega = \rho^{n+1}(\omega')^n\omega.$$

On a donc

$$\Omega^{(2n)} = \rho^{n+1}\omega^{(2n)},$$

ou (nº **42**)

$$dZdX_1 \ldots dP_n = \rho^{n+1}dzdx_1 \ldots dp_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{D(Z, X_1, \ldots, P_n)}{D(z, x_1, \ldots, p_n)} = \rho^{n+1}, \tag{43}$$

ce qui prouve que les $2n + 1$ fonctions Z, X_i, P_k sont nécessairement distinctes.

Soient F, Φ deux fonctions quelconques des variables Z, X_i, P_k, f et φ ce que deviennent ces fonctions lorsque l'on remplace ces variables Z, X_i, P_k par leurs expressions au moyen des variables z, x_i, p_k. On montre comme tout à l'heure que l'on a

$$\Omega^{(2n-2)} = \rho^n\omega^{(2n-2)},$$

et par suite on a l'identité

$$\Omega^{(2n-2)}dFd\Phi = \rho^n\omega^{(2n-2)}dfd\varphi, \tag{44}$$

quelles que soient les fonctions F, Φ. Les produits symboliques qui figurent dans cette formule ont été calculés au nº **42**.

$$\Omega^{(2n-2)}dFd\Phi = [F, \Phi]dZdX_1 \ldots dP_n,$$
$$\omega^{(2n-2)}dfd\varphi = [f, \varphi]dzdx_1 \ldots dp_n,$$

en posant

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial P_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} + P_i\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i} + P_i\frac{\partial F}{\partial Z}\right),$$

$$[f, \varphi] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

En rapprochant les formules (43) et (44), on en déduit la nouvelle identité

(45) $$\rho[F, \Phi] = [f, \varphi].$$

Appliquons cette identité à tous les couples de fonctions obtenus en prenant pour F et Φ deux quelconques des fonctions Z, X_i, P_k; nous obtenons les relations établies directement

(46) $$\begin{cases} [Z, X_i] = [X_i, X_k] = [X_i, P_k] = [P_i, P_k] = 0, & i \neq k \\ [Z, P_i] = -\rho P_i, \qquad [P_i, X_i] = \rho. \end{cases}$$

Dans ces formules $[Z, X_i]$ désigne maintenant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial p_k}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_i}{\partial z}\right) - \frac{\partial X_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial Z}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

et de même pour les autres crochets.

Réciproquement, étant données $n+1$ fonctions indépendantes $Z, X_1, \ldots, X_n$ des $2n+1$ valables $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, satisfaisant aux relations

(47) $$[Z, X_i] = 0, \qquad [X_i, X_k] = 0,$$

il existe n autres fonctions $P_1, \ldots, P_n$ des mêmes variables telles que l'on ait identiquement

(48) $$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n),$$

ρ étant une fonction non identiquement nulle.

Les relations (47) expriment en effet (voir n° **46**) que les $n+1$ fonctions $Z, X_1, \ldots, X_n$ forment un groupe semi-conjugué pour ω. On a donc une identité de la forme

$$\omega = A_1 dX_1 + \ldots + A_n dX_n + A_{n+1} dZ,$$

qui est évidemment équivalente à la relation (48), car le coefficient A_{n+1} ne peut être nul, puisque ω est de classe $2n+1$.

On peut aussi obtenir de cette façon les crochets de ρ et de l'une quelconque des fonctions Z, X_i, P_k. La relation qui donne $(\Omega')^n$ peut en effet s'écrire

$$\Omega^{(2n-1)} = \rho^n \omega^{(2n-1)} - \rho^{n-1} \omega^{(2n-2)} d\rho\ ;$$

F étant une fonction quelconque des variables Z, X_i, P_k, et f ce qu'elle devient après la substitution, on a donc l'identité

$$\Omega^{(2n-1)}dF = \rho^n\omega^{(2n-1)}df - \rho^{n-1}\omega^{(2n-2)}df d\rho.$$

Les expressions de ces produits symboliques ont été obtenues plus haut :

$$\Omega^{(2n-1)}dF = \frac{\partial F}{\partial Z}dZdX_1 \ldots dP_n = \rho^{n+1}\frac{\partial F}{\partial Z}dzdx_1 \ldots dp_n,$$

$$\omega^{(2n-1)}df = \frac{\partial f}{\partial z}dzdx_1 \ldots dp_n,$$

$$\omega^{(2n-2)}dfd\rho = [\rho, f]dzdx_1 \ldots dp_n.$$

En remplaçant dans l'identité précédente, il vient

$$(49) \qquad \rho^2\frac{\partial F}{\partial Z} = \rho\frac{\partial f}{\partial z} + [\rho, f].$$

En remplaçant F par les $2n+1$ fonctions Z, X_i, P_k, on obtient les expressions des nouveaux crochets :

$$(50) \qquad [\rho, Z] = \rho^2 - \rho\frac{\partial Z}{\partial z}, \qquad [\rho, X_i] = -\rho\frac{\partial X_i}{\partial z},$$
$$[\rho, P_i] = -\rho\frac{\partial P_i}{\partial z}.$$

52. Transformations de contact homogènes. — Une transformation de contact homogène est définie par $2n$ fonctions $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ de $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ telles que l'on ait l'identité

$$(51) \qquad P_1dX_1 + \ldots + P_ndX_n = p_1dx_1 + \ldots + p_ndx_n.$$

En désignant par Ω et ω le premier et le second membre de cette relation, on a

$$\Omega^{(2n-1)} = \omega^{(2n-1)},$$

c'est-à-dire

$$(52) \qquad dX_1dP_1 \ldots dX_ndP_n = dx_1dp_1 \ldots dx_ndp_n,$$

ce qui montre que les $2n$ fonctions X_i, P_k sont indépendantes, puisque leur déterminant fonctionnel est égal à l'unité. Soit F une fonction quelconque des variables X_i, P_k, et f la fonction des variables x_i, p_k obtenue en remplaçant dans F les X_i, P_k par leurs expressions. L'identité

$$\Omega^{(2n-2)}dF = \omega^{(2n-2)}df$$

devient, en tenant compte de la relation (52).

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + P_n \frac{\partial F}{\partial p_n} = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n}.$$

En prenant pour F l'une des fonctions X_i, P_k, nous avons

$$(53) \quad \begin{cases} p_1 \dfrac{\partial X_i}{\partial p_1} + \ldots + p_n \dfrac{\partial X_i}{\partial p_n} = 0, \\ p_1 \dfrac{\partial P_i}{\partial p_1} + \ldots + p_n \dfrac{\partial P_i}{\partial p_n} = P_i, \end{cases}$$

ce qui montre que *les X_i sont des fonctions homogènes de degré zéro, et les* P_i *des fonctions homogènes de degré un, des variables* $p_1, \ldots, p_n$ (*Leçons*, n° **80**).

On a enfin, en désignant par F, Φ deux fonctions quelconques des X_i, P_k, et par f et φ les fonctions des x_i, p_k obtenues par la substitution,

$$\Omega^{(2n-3)} dF d\Phi = \omega^{(2n-3)} df d\varphi,$$

ou, en tenant compte de la relation (52),

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} - \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right).$$

Cette identité, appliquée à deux quelconques des fonctions X_i, P_k, donne les relations connues (*Leçons*, n° **80**).

$$(54) \quad \begin{cases} (X_i, X_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad i \neq k, \\ (P_i, X_i) = 1. \end{cases}$$

Réciproquement, étant données n fonctions indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ *des 2n variables* $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *homogènes et de degré zéro en* $p_1, \ldots p_n$, *et satisfaisant aux relations*

$$(X_i, X_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

il existe n autres fonctions $P_1, \ldots, P_n$ *des mêmes variables définissant avec les premières une transformation de contact homogène.*

Les n fonctions X_i vérifient en effet les relations

$$\omega^{(2n-2)} dX_i = 0, \qquad \omega^{(2n-3)} dX_i dX_k = 0,$$

qui expriment que ces fonctions forment un groupe conjugué pour la forme ω. On a donc bien une identité de la forme

$$\omega = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = \mathrm{P}_1 d\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{P}_n d\mathrm{X}_n.$$

Addition au n° 42. — Etant donnée une forme linéaire ω, on a vu comment on pouvait, à l'aide des dérivées ω', ω'', ... obtenir des formes *covariantes* de ω. On peut aussi obtenir des formes covariantes d'un système de formes linéaires. Si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont d'autres formes de Pfaff, il est clair que le produit symbolique

$$\omega^{(h)}\omega_1\omega_2 \ldots \omega_p,$$

où l'on a $h + p \leqq c - 1$ est un covariant du système des forme ω, ω_1, $\ldots$, ω_p. Si, par un changement de variables, ω, $\omega_1, \ldots, \omega_p$ se changent en de nouvelles formes Ω, $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$, on a identiquement

$$\Omega^{(h)}\Omega_1 \ldots \Omega_p = \omega^{(h)}\omega_1 \ldots \omega_p.$$

Si, par exemple, on a $c = n$, $h + p = n - 1$, le produit symbolique $\omega^{(h)}\omega_1 \ldots \omega_p$ contient un seul terme en $dx_1 \ldots dx_n$, et le coefficient de ce terme est un invariant relatif (Cf. G DARBOUX, *Bulletin des Sciences Mathématiques,* tome VI, 2e série, 1882, p. 49).

CHAPITRE V

INVARIANTS INTÉGRAUX [1]

53. Définitions. Généralités. — Les invariants intégraux ont été considérés pour la première fois par H. Poincaré, qui en a fait d'importantes applications à la Mécanique Céleste. La théorie des formes symboliques de différentielles permet d'établir de la façon la plus naturelle les propriétés fondamentales de ces invariants.

Considérons d'abord un système de trois équations différentielles

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=dt, \tag{1}$$

X, Y, Z étant des fonctions de x, y, z. Pour faciliter les énoncés, nous supposerons que ces équations définissent le mouvement d'une molécule dans l'espace, la variable t représentant le temps. La molécule qui, au temps $t=0$, est en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est venue au temps t en un point M_t, de coordonnées (x, y, z). Lorsque le point M_0 décrit un certain domaine D_0 de l'espace, le point M_t décrit un domaine correspondant D_t. Cela posé, soit $F(x, y, z)$ une fonction des variables x, y, z ; nous dirons que l'intégrale triple $I=\int\int\int F(x, y, z)dxdydz$ est un *invariant intégral* du système (1) si la valeur de cette intégrale triple, étendue au domaine D_t, est égale à la même intégrale étendue au domaine D_0. Par exemple, si les équations (1) définissent le mou-

[1] Auteurs à consulter :

H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, tome III, en particulier le Chap. XXII.*

de Donder, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (*1901-1902*).

E. Goursat, *Journal de Mathématiques, tome IV, 6e Série, 1908.*

— *Ibid., tome I, 7e Série, 1915.*

— *Annales Scientifiques de la Faculté des Sciences de Toulouse, tome VII, 1915.*

vement d'un fluide *incompressible*, le volume du domaine D_t est constant, et l'intégrale $\int\int\int dxdydz$ est un invariant intégral.

On définit de la même façon les invariants intégraux de lignes et de surfaces. Si le point M_0 décrit une ligne L_0 ou une surface S_0, le point M_t décrit une ligne L_t ou une surface S_t. Une intégrale curviligne

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

est un invariant intégral du système (1), si la valeur de cette intégrale prise le long de la ligne L_t est indépendante de t et égale à la même intégrale curviligne prise le long de L_0. De même, une intégrale de surface

$$\int\int P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

est un invariant intégral, si la valeur de cette intégrale étendue à la surface S_t est indépendante de t.

Ces définitions s'étendent aisément à un système d'un nombre quelconque d'équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt\,;$$

nous supposerons que les fonctions X_i sont uniformes et continues, ainsi que leurs dérivées partielles, et ne renferment pas le temps t. Nous appellerons *trajectoire* toute multiplicité à une dimension Γ de l'espace à n dimensions représentée par les équations

$$(3) \qquad x_1 = f_1(t), \; x_2 = f_2(t), \; \ldots, \; x_n = f_n(t),$$

$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ formant un système de solutions des équations (2). De chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de l'espace à n dimensions part une trajectoire Γ qui est décrite par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lorsque t varie.

La valeur initiale de t étant supposée nulle, considérons dans l'espace à n dimensions une multiplicité quelconque à p dimensions E_p^0; de chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de cette multiplicité part une trajectoire et, au bout du temps t, le point mobile est venu en un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Le lieu de ces différents points est une autre multiplicité à p dimensions E_p^t, qui correspond point par point à la multiplicité E_p^0. Soit d'autre part ω une forme symbolique de degré $p \leqslant n$,

$$(4) \qquad \omega = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p};$$

si l'intégrale multiple d'ordre p

$$(5) \qquad I_p = \int \omega$$

a la même valeur pour les deux multiplicités E_p^0 et E_p^t quel que soit t, l'intégrale I_p est un **invariant intégral d'ordre** p du système (2). Le nombre p pouvant varier de 1 à n, il y donc n espèces d'invariants intégraux.

Il résulte des propriétés des formes symboliques de différentielles que *tout invariant intégral se change en un invariant intégral quand on effectue un changement quelconque de variables.* Soit en effet $I = \int \omega$ un invariant intégral du système (2) ; si l'on effectue sur ce système le changement de variables défini par les formules

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les fonctions φ_i ne renferment pas le temps t, la forme symbolique ω se change en une nouvelle forme symbolique ϖ, et le système (2) lui-même est remplacé par un système de même espèce

$$(2') \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ne renfermant pas la variable t. Il est clair, d'après la définition même d'un invariant intégral, que l'intégrale $I_1 = \int \varpi$ est un invariant intégral pour le nouveau système (2').

De tout invariant intégral $I = \int \omega$ *du système* (2), *on déduit un nouvel invariant intégral* $I' = \int \omega'$ *du même système*, ω' étant la forme dérivée de ω. Supposons en effet la forme ω de degré p, et soit E^0_{p+1} une multiplicité à $p+1$ dimensions de l'espace à n dimensions. De tout point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de cette multiplicité part une trajectoire, et le point qui, pour $t=0$, coïncide avec le point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ est venu au temps t en un point de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit E^t_{p+1} le lieu de ce point $(x_1, \ldots, x_n)$ lorsque le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ décrit la multiplicité E^0_{p+1}. Ces deux multiplicités E^0_{p+1} et E^t_{p+1} sont limitées par deux multiplicités fermées à p dimensions $\mathcal{E}^0_p$ et $\mathcal{E}^t_p$ qui se correspondent point par point comme les multiplicités E^0_{p+1} et E^t_{p+1} elles-mêmes.

Or les deux intégrales $\int \omega'$ étendues aux deux multiplicités E^0_{p+1} et E^t_{p+1} sont égales respectivement, d'après la formule de Stokes généralisée, aux deux intégrales $\int \omega$, étendues aux deux multiplicités $\mathcal{E}^0_p$, $\mathcal{E}^t_p$, et par conséquent ont la même valeur. De tout invariant intégral d'ordre p du système (2) on peut donc déduire, par des différentiations seulement, un nouvel invariant d'ordre $p+1$ du même système. Si on représente par I_p l'invariant intégral $\int \omega$, on représentera par I^d_{p+1} l'invariant intégral $\int \omega'$, et j'appellerai l'opération par laquelle on passe de I_p à I^d_{p+1} l'opération (D). Cette opération appliquée à un invariant $\int \omega'$ conduit à un résultat identiquement nul, et par conséquent on ne peut déduire de cette façon d'un invariant I_p qu'un seul invariant nouveau, et seulement lorsque la forme ω n'est pas elle-même une forme dérivée.

Remarques. — 1° H. Poincaré a aussi considéré des invariants intégraux d'une autre espèce, tels que

$$\int \sqrt[m]{\Phi(x_i, dx_i)},$$

Φ étant une véritable forme algébrique d'ordre m par rapport aux différentielles, et non plus une forme symbolique. Ils se définissent comme les invariants intégraux du premier ordre $\int \sum A_i dx_i$, dont ils sont une généralisation naturelle.

2° Il est évident que, dans la définition d'un invariant intégral, l'hypothèse que les fonctions X_i ne renferment pas le temps n'a rien d'essentiel. Dans la suite, à moins de mention expresse, nous supposerons les X_i indépendants de t.

3° Au premier abord, il semble que la notion d'invariant intégral est tout à fait distincte de celle d'intégrale première. Cependant les deux notions peuvent se rattacher l'une à l'autre par un passage à la limite. Il suffit pour cela de considérer les trajectoires issues de plusieurs points dont on fera grandir ensuite le nombre indéfiniment de façon à ce qu'ils forment une multiplicité à une ou plusieurs dimensions. On est ainsi conduit à un système d'équations linéaires, appelé par H. Poincaré *équations aux variations*, dont il a déduit les propriétés des invariants intégraux. Nous ne nous servirons pas dans la suite de cette interprétation [1].

54. Invariants relatifs. — Les invariants intégraux que nous venons de définir, où les domaines E_p^0 et E_p^t ne sont assujettis à aucune restriction, sont des *invariants absolus*. Il existe aussi des intégrales $\int \omega$ qui ne possèdent la propriété d'invariance que si les domaines E_p^0, E_p^t sont des domaines *fermés*. De tels invariants ont été appelés par H. Poincaré *invariants relatifs* : nous les désignerons par la lettre J. Il est clair qu'on obtient un invariant relatif en ajoutant à un invariant absolu une intégrale de différentielle totale symbolique quelconque, puisque cette intégrale étendue à une multiplicité fermée est nulle. Réciproquement, on démontrera au paragraphe suivant que tous les invariants relatifs s'obtiennent de cette façon.

Soit $J_p = \int \omega$ un invariant relatif, ω étant une forme symbolique de degré p, qui n'est pas une différentielle totale ; *l'intégrale* $\int \omega'$ *est un invariant absolu d'ordre* $p+1$. En effet, les valeurs

[1] Voir aussi le *Traité de Mécanique* de M. Appell (tome II, p. 450).

de l'intégrale $\int \omega'$ étendue aux deux domaines E^0_{p+1}, E^t_{p+1}, définis précédemment, sont égales respectivement aux deux valeurs de l'intégrale $\int \omega$, étendue aux deux multiplicités *fermées* $\mathcal{E}^0_p$, $\mathcal{E}^t_p$, qui limitent les deux domaines E^0_{p+1}, E^t_{p+1}, et ces deux intégrales sont égales, puisque $\int \omega$ est un invariant relatif.

L'opération (D) appliquée à un invariant relatif J_p, qui n'est pas une intégrale de différentielle totale symbolique, conduit donc aussi à un invariant absolu J_{p+1} d'ordre $p+1$.

Le raisonnement qui précède conduit aussi à la conclusion suivante : *Pour qu'une intégrale* $\int \omega$, *qui n'est pas un invariant absolu, soit un invariant relatif, il faut et il suffit que* $\int \omega'$ *soit un invariant absolu.*

Réciproquement, si $\int \omega'$ est un invariant absolu, $\int \omega$ est un invariant relatif ou un invariant absolu. On verra, au paragraphe suivant, que l'on peut toujours ajouter à ω, et d'une infinité de manières, une différentielle totale symbolique ϖ, d'ordre p, de façon que $\int (\omega + \varpi)$ soit un invariant *absolu.*

55. Existence des invariants intégraux. Forme canonique. — Le système d'équations différentielles (2) peut être ramené à une forme canonique par un changement de variables. Soient f_1, f_2, ..., f_{n-1} un système de $(n-1)$ intégrales distinctes de l'équation du premier ordre :

$$X(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,;$$

le système (2) admet les $n-1$ intégrales premières

$$f_1 = C_1,\, f_2 = C_2,\, \ldots,\, f_{n-1} = C_{n-1},$$

et une dernière intégrale de la forme

$$t = f_n + C_n,$$

la fonction f_n ne dépendant, comme les premières, que des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cela posé, si l'on prend un nouveau système d'inconnues $y_1 = f_1, \ldots, y_{n-1} = f_{n-1}, z = f_n$, le système (2) se change en un nouveau système de n équations différentielles dont l'intégrale générale est représentée par les formules

$$y_1 = C_1, \ldots, y_{n-1} = C_{n-1}, z = t + C_n;$$

ce système a donc la forme simple suivante, que nous appellerons *forme canonique*

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{1} = dt. \tag{6}$$

Il est d'ailleurs évident que le système (2) peut être mis sous forme canonique d'une infinité de manières.

En effet, le système (6) ne change pas de forme quand on prend pour nouvelles inconnues $n-1$ fonctions distinctes $\varphi_i(y_1, \ldots, y_{n-1})$ des inconnues y_i, et qu'on remplace z par $z + \psi(y_1, \ldots, y_{n-1})$, ψ étant une fonction arbitraire.

Cela étant, soit $I = \int \omega$ un invariant intégral absolu d'ordre p du système (2); après le changement de variables qui vient d'être défini, la forme ω se change en une forme symbolique ϖ des différentielles $dy_1, \ldots, dy_{n-1}, dz$ dont les coefficients sont fonctions des y_i et de z. L'intégrale $\int \varpi$ est un invariant intégral pour le système canonique (6) Il est facile de trouver à quelles conditions doit satisfaire la forme ϖ pour qu'il en soit ainsi. Soient E_p^0 un domaine à p dimensions de l'espace à n dimensions $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$, et E_p^t le domaine que l'on déduit du premier en augmentant les coordonnées z de tous ses points d'une même quantité t, sans changer les autres coordonnées. Pour que les valeurs de l'intégrale $\int \varpi$, étendue à ces deux domaines, soient égales quel que soit t, il faut et il suffit que la forme symbolique ϖ ne change pas quand on change z en $z + C$, quelle que soit la constante C, ce qui aura lieu si les coefficients de cette forme ne dépendent pas de z et dans ce cas seulement. Donc, *pour que l'in-*

tégrale $\int \varpi$ *soit un invariant intégral absolu du système canonique* (6), *il faut et il suffit que les coefficients de la forme* ϖ *soient indépendants de* z.

De tout invariant intégral absolu du système canonique (6) on déduira inversement un invariant intégral absolu du système (2), en revenant aux inconnues primitives $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Il existe donc une infinité d'invariants intégraux absolus de tous les degrés (de* 1 *à* n*) pour un système quelconque de* n *équations différentielles* (2). On peut écrire explicitement les expressions générales de ces invariants, si l'on peut ramener le système à une forme canonique, c'est-à-dire si l'on connaît l'intégrale générale de ce système.

A tout invariant intégral relatif du système canonique correspond de même un invariant intégral relatif du système (2). Il est facile d'avoir l'expression générale des invariants intégraux relatifs du système canonique (6). Soit en effet $J = \int \varpi$ un invariant intégral relatif de ce système ; l'intégrale $\int \varpi'$ est un invariant absolu du même système (n° **54**) et par suite les coefficients de la forme ϖ' ne dépendent pas de z. On peut donc écrire $\varpi' = \varpi_1 + \varpi_2 dz$, ϖ_1 et ϖ_2 étant deux formes symboliques de degré $p+1$ et p respectivement, si ϖ est de degré p, qui ne contiennent ni z, ni dz. Or, on doit avoir $\varpi'_1 + \varpi'_2 dz = 0$, et par suite $\varpi'_1 = \varpi'_2 = 0$. On peut donc trouver deux autres formes Ω_1 et Ω_2, de degrés p et $p-1$ respectivement, ne renfermant ni z, ni dz, et telles que l'on ait $\Omega'_1 = \varpi_1$, $\Omega'_2 = \varpi_2$ (n° **26**). Si l'on pose $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 dz$, l'intégrale $\int \Omega$ est un invariant intégral absolu du système (6), et l'on a $\Omega' = \varpi'$. La différence $\varpi - \Omega$ est donc une différentielle totale symbolique, et par suite *tout invariant intégral relatif est la somme d'un invariant intégral absolu et d'une intégrale de différentielle totale symbolique.*

Il est clair que cette décomposition d'un invariant relatif peut être effectuée d'une infinité de manières, car on peut toujours ajouter à un invariant absolu une intégrale de différentielle totale qui soit elle-même un invariant absolu, et il existe évidemment une infinité d'invariants absolus de cette espèce.

Les invariants intégraux du système canonique (6), qui sont de la forme

$$\int \sqrt[m]{\Phi(y_i, z\,;\, dy_i, dz)},$$

s'obtiennent de même en prenant pour Φ une *forme algébrique* de degré m par rapport aux différentielles dy_i, dz, dont les coefficients sont indépendants de z.

Remarque I. — Connaissant r intégrales premières distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_r$, indépendantes de t du système (2) ($r \leqslant n-1$), on peut en déduire des invariants intégraux de ce système. Soit en effet $\omega(f_i, df_i)$ une forme symbolique des différentielles df_1, df_2, $\ldots$, df_r, dont les coefficients ne dépendent que de $f_1, f_2, \ldots, f_r$. *L'intégrale* $\int \omega$ *est un invariant intégral des équations* (2). Il suffit d'observer qu'avec un système de variables canoniques y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}, z$, cette intégrale s'écrirait $\int \varpi$, la forme symbolique ϖ ne renfermant que les variables $y_1, y_2, \ldots, y_r$ et leurs différentielles. Par exemple, si f est une intégrale première des équations (2), $\int df$ est un invariant intégral absolu. Il est facile de le vérifier. Soit Γ_0 un arc de courbe joignant deux points A_0, B_0, de l'espace à n dimensions au temps $t=0$; au temps t, les points A_0, B_0 sont venus en deux points A, B, et l'arc Γ_0 est venu coïncider avec un arc Γ joignant les deux points A et B. On a bien

$$\int_{AB} df = f_B - f_A = f_{B_0} - f_{A_0} = \int_{A_0B_0} df.$$

Les invariants intégraux de cette espèce seront étudiés plus loin (n° **60**).

Remarque II. — Une intégrale $\int df$ peut être un invariant intégral, sans que $f = C$ soit une intégrale première du système.

Par exemple, pour le système canonique (6), $\int dz$ est un invariant intégral, sans que $z = C$ soit une intégrale première. D'une façon générale, pour que $\int df$ soit un invariant intégral du système canonique (6), il faut et il suffit que f soit de la forme

$$f = Cz + \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

C étant une constante quelconque, φ une fonction arbitraire de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ (cf. n° **63**).

56. Relations entre les coefficients d'un invariant. — Etant donnés un système différentiel de la forme (2) où les fonctions X_i ne dépendent pas de t, et une forme symbolique ω de degré p en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, dont les coefficients ne dépendent pas non plus de t, nous nous proposons de rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients de cette forme pour que $\int \omega$ soit un invariant intégral absolu. Considérons, comme au n° **53**, un domaine variable E_p^t de l'espace à n dimensions, et soit $I_p(t)$ la valeur de l'intégrale $\int \omega$ étendue à ce domaine. Pour que $\int \omega$ soit un invariant intégral, il faut et il suffit que l'on ait $\frac{dI_p}{dt} = 0$. Or cette dérivée peut se calculer par les règles habituelles de différentiation sous le signe intégral Nous supposerons pour cela que l'on donne à t un accroissement δt, et nous calculerons la partie principale de la différence $I_p(t + \delta t) - I_p(t)$, en regardant δt comme l'infiniment petit principal. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point quelconque de la multiplicité E_p^t, et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ les coordonnées du point correspondant de la multiplicité $E_p^{t+\delta t}$; on a

$$y_i = x_i + X\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\delta t + \ldots, (i = 1, 2, \ldots n),$$

les termes non écrits étant infiniment petits d'ordre supérieur au premier en δt. Ecrivons les deux intégrales $I_p(t)$, $I_p(t + \delta t)$ sous forme explicite, en exprimant les coordonnées d'un point quelconque de E_p^t et de $E_p^{t+\delta t}$ au moyen de p variables auxiliaires $u_1, u_2, \ldots, u_p$:

$$I_p(t) = \int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 \ldots du_p,$$

$$I_p(t+\delta t) = \int \sum A'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial y_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial y_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 \ldots du_p;$$

dans ces formules, les sommations sont étendues à tous les *arrangements* p à p des indices (n° **22**); $A'_{\alpha_1\alpha_1\ldots\alpha_p}$ désigne ce que devient $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ quand on y remplace x_i par y_i, et les deux intégrales sont étendues à un même domaine de l'espace à p dimensions.

Soit $A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} \dfrac{\partial y_{\beta_1}}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial y_{\beta_p}}{\partial u_p}$ un terme quelconque de la seconde intégrale; on a, en n'écrivant pas les termes infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} = A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} + X\left(A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\right)\delta t + \ldots$$

où l'on a posé

$$X(f) = X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial y_{\beta_1}}{\partial u_1} = \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial u_1} + \delta t \sum_k \frac{\partial X_{\beta_1}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_1} + \ldots$$

$$\frac{\partial y_{\beta_2}}{\partial u_2} = \frac{\partial x_{\beta_2}}{\partial u_2} + \delta t \sum_k \frac{\partial X_{\beta_2}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{\partial y_{\beta_p}}{\partial u_p} = \frac{\partial x_{\beta_p}}{\partial u_p} + \delta t \sum_k \frac{\partial X_{\beta_p}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_p} + \ldots$$

Cherchons le coefficient de $\dfrac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2}\cdots\dfrac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}\delta t$ dans la nouvelle intégrale. Pour que le produit

$$A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\frac{\partial y_{\beta_1}}{\partial u_1}\frac{\partial y_{\beta_2}}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial y_{\beta_p}}{\partial u_p}$$

donne un terme de cette espèce, deux hypothèses sont possibles et deux seulement :

1° On peut avoir $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, ..., $\beta_p = \alpha_p$, ce qui donne le produit

$$X\left(A_{\alpha_1\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p}\right)\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\,\frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}\,\delta t.$$

2° On obtient encore un produit de la forme voulue en supposant que toutes les égalités $\beta_i = \alpha_i$ sont vérifiées, sauf une seule. Si, par exemple, on a $\beta_1 = \alpha_1$, ... $\beta_{i-1} = \alpha_{i-1}$, $\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}$, ... $\beta_p = \alpha_p$, β_i étant quelconque, on a le produit partiel

$$A_{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_{i-1}\,\beta_i\alpha_{i+1}\,\ldots\,\alpha_p}\frac{\partial X_{\beta_i}}{\partial x_{\alpha_i}}\,\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}\,\delta t,$$

et la somme des produits ainsi obtenus en faisant varier β_i peut s'écrire

$$\sum_h A_{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_{i-1}\,h\alpha_{i+1}\,\ldots\,\alpha_p}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_i}}\,\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}\,\delta t.$$

Comme l'indice variable β_i peut remplacer l'un quelconque des indices α_1, α_2, ..., α_p, on voit qu'en définitive le coefficient de $\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}\,\delta t$ dans l'intégrale $I(t+\delta t)$ a pour expression

$$\text{(7)}\qquad B_{\alpha_1\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p} = X\left(A_{\alpha_1\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p}\right)$$
$$+\sum_h\left\{A_{h\alpha_2\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}}\right\}.$$

Quand on permute les indices α_1, α_2, ..., α_p, on voit aisément que l'expression $B_{\alpha_1\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p}$ ne change pas, ou change de signe, suivant que la nouvelle permutation est de même classe que la première ou de classe différente.

La dérivée $\frac{dI_p}{dt}$ est donc représentée par une intégrale définie étendue au domaine E_p^t,

$$\text{(8)}\qquad \frac{dI_p}{dt} = \int\Omega,$$

où Ω est la nouvelle forme symbolique

$$\Omega = \sum B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}, \tag{9}$$

les coefficients $B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ étant donnés par les relations (7).

Ces formules peuvent être résumées dans la règle suivante, qui permet de calculer très simplement la forme Ω : *on remplace dans* ω *chaque coefficient* $A_{ik\ldots l}$ *par* $X(A_{ik\ldots l})$, *et à la forme ainsi obtenue on ajoute la somme des monomes que l'on déduit de* ω *en remplaçant successivement dans chaque terme de* ω *une quelconque des différentielles* dx_i *qui y figurent par* dX_i.

Pour que I_p soit un invariant intégral absolu, il faudra que l'intégrale $\int \Omega$ soit nulle, quel que soit le domaine d'intégration, c'est-à-dire que tous les coefficients $B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ soient nuls, et ces conditions sont évidemment suffisantes. Donc, *pour que l'intégrale*

$$\int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p} \tag{10}$$

soit un invariant intégral absolu, il faut et il suffit que l'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices p *à* p, *les relations*

$$X\left(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\right) + \sum_{h=1}^{n} \left\{ A_{h\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h\ldots\alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right\} = 0. \tag{11}$$

Pour que l'intégrale (10) soit un invariant intégral relatif, il faudra que l'intégrale $\int \omega'$ soit un invariant absolu. On obtiendra les mêmes conditions en écrivant que l'intégrale $\int \Omega$, étendue à une multiplicité fermée quelconque, est nulle, c'est-à-dire que l'on a $\Omega' = 0$ identiquement [1].

[1] La recherche des invariants intégraux se rattache à la théorie des transformations infinitésimales. Considérons $X(f)$ comme le symbole d'une transformation infinitésimale, à un invariant intégral du système (2) corres-

Le système (2) étant donné, les fonctions X_i sont connues et les C_n^p coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ de la forme ω doivent vérifier les C_n^p équations du premier ordre (11), qui constituent un système normal (*Leçons*, n° **1**). Ces équations admettent donc une infinité d'intégrales, ce qui est bien d'accord avec les résultats du paragraphe précédent. Comme vérification, si le système (2) a la forme canonique, on doit prendre $X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = 0$, $X_n = 1$, et les équations (11) se réduisent à $\dfrac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_n} = 0$.

Remarque. — Si les fonctions X_i dépendent de t, les coefficients de ω étant indépendants de t, le calcul précédent s'applique sans modifications, et on obtient les mêmes conditions (11) pour exprimer que $\int \omega$ est un invariant intégral. Au contraire, si les coefficients de ω dépendent aussi de t, on voit aisément qu'il faudra ajouter des termes renfermant les dérivées de ces coefficients par rapport à t.

Il est à remarquer que les équations (11) n'admettent pas toujours d'intégrales indépendantes de t, lorsque les fonctions X_i dépendent de t. Par exemple, le système

$$\frac{dx_1}{t} = \frac{dx_2}{e^{x_1x_2}} = dt$$

n'admet pas d'invariant intégral de la forme $\int F dx_1 dx_2$, F étant indé-

pond une forme symbolique ω admettant la transformation infinitésimale $X(f)$ et réciproquement. La forme ω étant donnée, la recherche des systèmes d'équations différentielles pour lesquels $\int\omega$ est un invariant intégral revient à la recherche des transformations infinitésimales qu'admet cette forme ω. Les transformations *finies*, par lesquelles une forme ω se change en elle-même, forment évidemment un groupe, d'ordre *fini* ou *infini*, et la question est liée à la théorie des groupes, qui est en dehors du plan de cet ouvrage.

On connaît depuis longtemps un certain nombre d'intégrales, dans le plan ou dans l'espace, ayant une signification géométrique simple, qui conservent la même valeur pour toutes les transformations d'un groupe, tel que le groupe des mouvements. Ce sont sans doute les premiers exemples connus d'invariants intégraux. Par exemple, quand tous les coefficients de ω sont constants, la forme Ω sera identiquement nulle, si les fonctions X_i se réduisent à des constantes. Le groupe correspondant se compose des translations de l'espace à n dimensions.

pendant de t, car le système (11) se compose dans ce cas d'une seule équation

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(tF) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{x_1 x_2}F\right) = 0,$$

et conduit à deux équations distinctes n'admettant que la solution banale $F = 0$.

57. Invariants d'ordre n et n — 1. — Un invariant intégral d'ordre n

$$I_n = \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

dépend d'un seul coefficient F ; la forme Ω se compose d'un seul terme, et, en égalant le coefficient à zéro, on obtient une seule équation

$$X(F) + \sum_{h=1}^{n} F \frac{\partial X_h}{\partial x_h} = 0,$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(X_1 F) + \frac{\partial}{\partial x_2}(X_2 F) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(X_n F) = 0.$$

Or cette équation exprime que F est un multiplicateur pour le système (2), ce qui nous conduit à un théorème de H. Poincaré.

Pour que l'intégrale $\int F dx_1 \ldots dx_n$ *soit un invariant intégral du système* (2), *il faut et il suffit que F soit un multiplicateur de ce système.*

Avec un système de variables canoniques $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$, un invariant intégral est de la forme $\int F dy_1 \ldots dy_{n-1}\, dz$. F étant une fonction arbitraire de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, indépendante de z. Les propriétés classiques du multiplicateur s'en déduisent bien aisément.

Un forme ω de degré n en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ est toujours une forme dérivée; par conséquent, tout invariant intégral d'ordre n peut être déduit d'une infinité de manières, par l'opération (D), d'un invariant intégral d'ordre $n - 1$ (n° **54**), et tous ces invariants intégraux d'ordre $n-1$ ne diffèrent que par une intégrale de différentielle totale.

Inversement, H. Poincaré a indiqué une méthode qui sera généralisée plus loin (n° **61**), permettant de déduire d'un invariant intégral d'ordre n un invariant intégral d'ordre $n-1$. Il suffit pour cela d'interpréter les résultats du n° **29** dans la théorie des invariants intégraux. Supposons que les dénominateurs X_i des équations (2) ne renferment pas t, et soit Ω_{n-1} la forme symbolique de degré $n-1$

$$\Omega_{n-1} = X_1 dx_2 \dots dx_n \pm X_2 dx_3 \dots dx_n dx_1 + \dots \pm X_n dx_1 \dots dx_{n-1},$$

où l'on ne prend que des signes + si n est impair, tandis que l'on prend alternativement le signe + et le signe — lorsque n est pair. On a

$$\Omega_{n-1} df = \pm X(f) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

de sorte que toute intégrale de l'équation $X(f) = 0$ est aussi une intégrale de l'équation $\Omega_{n-1} df = 0$, et réciproquement. Avec un système de variables canoniques $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, z)$, la forme Ω_{n-1} sera divisible par $dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}$, et l'on aura

$$\Omega_{n-1} = K dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1},$$

K pouvant être une fonction quelconque de $y_1, \dots, y_{n-1}, z$. En général $\int \Omega_{n-1}$ ne sera pas un invariant intégral du système (2); pour que $\int M\Omega_{n-1}$ soit un invariant intégral de ce système, il faut et il suffit que le produit MK soit indépendant de z, ou, ce qui revient au même, que $M\Omega_{n-1}$ soit une forme dérivée. Ceci exige que l'on ait

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire que M soit un multiplicateur. *De tout multiplicateur* M *du système (2), on déduit donc un invariant intégral d'ordre $n-1$ de ce système,* $\int M\Omega_{n-1}$.

Il est à remarquer que quand on change le multiplicateur M, la forme sous le signe intégral a tous ses coefficients multipliés par un même facteur. Les invariants intégraux d'ordre $n-1$ que l'on obtient ainsi ne sont pas les plus généraux de cet ordre; nous venons de remarquer en effet que la forme $M\Omega_{n-1}$ s'exprime uniquement au moyen de $y_1, \ldots, y_{n-1}$ et de leurs dérivées; *elle ne renferme ni z, ni dz* (voir plus loin, n° **60**).

Considérons maintenant une forme quelconque de degré $n-1$ que nous écrirons

$$\begin{aligned}\omega_{n-1} = A_1 dx_2 \ldots dx_n \pm A_2 dx_3 \ldots dx_n dx_1 + \ldots \\ \pm A_n dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1},\end{aligned}$$

avec des signes $+$ seulement si n est impair, et le signe $+$ et le signe $-$ alternativement si n est pair.

La forme Ω correspondante (page 219) a pour expression

$$\begin{aligned}\Omega = X(A_1)dx_2 \ldots dx_n \pm \ldots \pm X(A_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \\ + A_1[dX_2 dx_3 \ldots dx_n + dx_2 dX_3 \ldots dx_n + \ldots] \\ \pm A_2[dX_3 \ldots dx_n dx_1 + dx_3 dX_4 \ldots dx_1 + \ldots] \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \pm A_n[dX_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} + dx_1 dX_2 \ldots dx_{n-1} + \ldots]\end{aligned}$$

et le coefficient de $dx_2 dx_3 \ldots dx_n$, par exemple, est égal à

$$X(A_1) - A(X_1) + A_1 H,$$

où l'on a posé

$$A(\;) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

et les autres coefficients ont des expressions analogues. En écrivant que tous ces coefficients sont nuls, on voit que *les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\int \omega_{n-1}$ soit un invariant intégral expriment que l'on a identiquement*

$$X(A(f)) - A(X(f)) + HA(f) = 0, \tag{12}$$

quelle que soit la fonction f.

Cette remarque est due à M. Kœnigs [1], qui en a déduit des

[1] G. Kœnigs, Sur les invariants intégraux (*Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXII, p. 25, 6 janvier 1896).

conséquences intéressantes sur lesquelles on reviendra plus loin (nº **59**). On voit immédiatement que, si la condition (12) est vérifiée, les deux équations $X(f)=0$, $A(f)=0$, forment un système complet, lorsqu'elles ne sont pas identiques. On peut aller plus loin en observant que les deux équations

$$(\alpha) \qquad X(f)=0, \qquad A(f)+Mf=0,$$

où $M=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial A_n}{\partial x_n}$, forment aussi un système en involution (*Leçons* nº **18**). En effet, il faut et il suffit pour cela que la relation

$$X(A(f)+Mf)-A(X(f))-MX(f)=0,$$

soit une conséquence des premières. En tenant compte de la condition (12), cette relation devient

$$X(M)f-HA(f)=\{X(M)+HM\}f=0.$$

Or la relation $X(M)+HM=0$ exprime que M est un multiplicateur, ce qui est bien exact, puisque la forme dérivée de ω_{n-1} est $M dx_1, \ldots, dx_n$.

On obtient le système (α) en cherchant les intégrales de l'équation $X(f)=0$, qui sont en même temps des multiplicateurs pour la forme ω_{n-1}. On a en effet

$$(\omega_{n-1}f)'=\omega'_{n-1}f+\omega_{n-1}df=[A(f)+Mf]dx_1\ \ldots\ dx_n;$$

les équations $X(f)=0$, $A(f)=0$ s'obtiennent de même en cherchant les intégrales de $X(f)=0$ qui satisfont aussi à la relation $\omega_{n-1}df=0$. On peut donc énoncer le résultat suivant: *Si l'intégrale $\int\omega_{n-1}$ est un invariant intégral, les équations linéaires*

$$(\omega_{n-1}f)'=0, \qquad X(f)=0$$

forment un système en involution, et par conséquent les équations $\omega_{n-1}df=0$, $X(f)=0$ forment un système complet d'équations linéaires et homogènes.

Ce résultat pouvait être prévu *a priori*, et il est facile de le vérifier si le système (2) a été ramené à la forme canonique (6). Avec les variables canoniques $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$, la forme ω_{n-1}, qui figure dans un invariant intégral d'ordre $n-1$, s'écrit en effet

$$\omega_{n-1} = \varpi_{n-1} + \varpi_{n-2}dz,$$

ϖ_{n-1} et ϖ_{n-2} étant des formes de degré $n-1$ et $n-2$ respectivement, qui ne renferment que les variables $y_1, \ldots, y_{n-1}$, et leurs différentielles, tandis que l'équation $X(f) = 0$ se réduit à $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Si f est une fonction quelconque de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on a identiquement $\varpi_{n-1}df = 0$, $(\varpi_{n-1}f)' = 0$, et par suite $(\omega_{n-1}f)' = (\varpi_{n-2}f)'dz$. Toute intégrale de l'équation linéaire du premier ordre $(\varpi_{n-2}f)' = 0$, indépendante de z, est donc un multiplicateur pour ω_{n-1}. On voit de même que les deux équations $\omega_{n-1}df = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ admettent $n-2$ intégrales communes distinctes.

Remarque. — Nous avons supposé que les deux équations $X(f) = 0$, $A(f) = 0$ sont distinctes, c'est-à-dire que tous les rapports $\frac{A_i}{X_i}$ ne sont pas égaux. Si tous ces rapports sont égaux, on a $\omega_{n-1} = K\Omega_{n-1}$, Ω_{n-1} étant la forme définie plus haut, $A(f) = KX(f)$, et la condition (12) devient

$$X(K) + HK = 0;$$

elle exprime que K est un multiplicateur pour le système (2), et nous retrouvons les invariants intégraux I_{n-1} considérés tout d'abord.

58. Invariants du premier ordre. — Soit

$$\omega = A_1dx_1 + \ldots + A_ndx_n$$

une forme de Pfaff dont les coefficients A_i sont des fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indépendantes de t. Pour que l'intégrale $I_1 = \int \omega$ soit un invariant intégral absolu du système (2), les coefficients A_i doivent satisfaire aux n relations

$$(13) \qquad X(A_i) + A_1\frac{\partial X_1}{\partial x_i} + \ldots + A_n\frac{\partial X_n}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

que l'on peut établir directement, ou qui se déduisent des conditions générales (11), quand on y suppose $p=1$.

Ces conditions permettent de vérifier facilement que

$$A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_nX_n=C^{te}$$

est une intégrale première du système (2), théorème dû aussi à H. Poincaré, et qui sera rattaché plus tard à une proposition plus générale (n° **63**).

Lorsque l'invariant intégral a été ramené à une forme canonique, les conditions (13) prennent une forme simple, qui conduit à un élégant théorème dû à M. Kœnigs [1]. Supposons d'abord que la forme ω soit de classe impaire $2p+1 \leqslant n$; si l'on a pris un système de variables $y, y_1, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q$ $(2p+q+1=n)$ tel que ω prenne la forme canonique

$$\omega=z_1dy_1+\ldots+z_pdy_p+dy,$$

le système (2) est remplacé par un système équivalent

$$(14)\qquad \frac{dy}{Y}=\frac{dy_1}{Y_1}=\ldots=\frac{dy_p}{Y_p}=\frac{dz_1}{Z_1}=\ldots=\frac{dz_p}{Z_p}=\frac{du_1}{U_1}=\ldots=\frac{du}{U_q}$$

où $Y, Y_1, \ldots, Y_p, Z_1, \ldots, Z_p, U_1, \ldots, U_q$ sont des fonctions des variables y, y_i, z_k, u_k et de t.

Pour exprimer que l'intégrale

$$(15)\qquad I_1=\int z_1dy_1+\ldots+z_pdy_p+dy$$

est un invariant intégral [2] absolu du système (14), observons que la forme Ω qui figure dans l'expression de la dérivée

$$\frac{dI_1}{dt}=\int \Omega$$

prend dans ce cas une forme particulièrement simple

$$\Omega=dY+Z_1dy_1+\ldots+Z_pdy_p+z_1dY_1+\ldots+z_pdY_p.$$

(1) *Comptes Rendus, tome CXXI, p. 875, 9 décembre 1895.*

(2) La liaison entre ce problème et la recherche des transformations de contact infinitésimales est évidente (*voir* Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen, tome II*).

Pour que I_1 soit un invariant intégral, les fonctions Y, Y_i, Z_k doivent donc vérifier les n relations

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial Y}{\partial y}+\sum_{k=1}^{p} z_k\dfrac{\partial Y_k}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial Y}{\partial y_i}+Z_i+\sum_{k=1}^{p} z_k\dfrac{\partial Y_k}{\partial y_i}=0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial z_i}+\sum_{k=1}^{p} z_k\dfrac{\partial Y_k}{\partial z_i}=0, & \dfrac{\partial Y}{\partial u_h}+\sum_{k=1}^{p} z_k\dfrac{\partial Y_k}{\partial u_h}=0, \end{array}\right.$$

$$(i=1,\,2,\,\ldots,\,p), \qquad (h=1,\,2,\ldots,\,q).$$

On satisfait d'une façon très élégante à ces conditions en introduisant la fonction auxiliaire.

$$(17)\qquad H=\sum_k z_k Y_k+Y\,;$$

les $2p$ équations qui suivent la première deviennent

$$(18)\qquad \frac{\partial H}{\partial y_i}=-Z_i,\qquad \frac{\partial H}{\partial z_i}=Y_i.$$

On a ensuite

$$Y=H-\sum_k z_k\frac{\partial H}{\partial z_k},$$

et, en substituant ces expressions dans la première et dans les q dernières relations (16), elles deviennent

$$(19)\qquad \frac{\partial H}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial H}{\partial u_h}=0.\qquad (h=1,\,2,\,\ldots.\,q).$$

Le système (14) est donc de la forme

$$(20)\qquad \frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial z_i},\qquad \frac{dz_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_i},$$

$$(21)\qquad \frac{dy}{dt}=H-\sum_k z_k\frac{\partial H}{\partial z_k},$$

$$(22)\qquad \frac{du_1}{dt}=U_1,\ \ldots,\ \frac{du_q}{dt}=U_q,$$

H étant une fonction quelconque de $y_1,\ldots,y_p$, $z_1,\ldots,z_p$ et de t, ne renfermant pas les variables y, u_1, ..., u_q, et les fonctions U_h étant arbitraires. Ce système (14) est donc ramené au système canonique (20) suivi des équations (21) et (22). En particulier, si $n = 2p + 1$, le système (22) disparaît.

Lorsque la forme ω est de classe $2p$, on peut de même choisir $2p + q = n$ variables de façon que l'invariant I_1 ait la forme canonique

$$I_1 = \int z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p,$$

le système d'équations différentielles (14) étant remplacé par le suivant

$$(14') \quad \frac{dy_1}{Y_1} = \ldots \frac{dy_p}{Y_p} = \frac{dz_1}{Z_1} = \ldots = \frac{dz_p}{Z_p} = \frac{du_1}{U_1} = \ldots = \frac{du_q}{U_q} = dt,$$

les dénominateurs Y_i, Z_k, U_h étant des fonctions des variables y_i, z_k, u_h et de t. Pour obtenir l'expression de $\frac{dI_1}{dt}$, il est inutile de recommencer le calcul ; il suffit évidemment de supprimer les termes qui renferment Y et y dans l'expression obtenue plus haut. Les conditions (16) sont alors remplacées par les suivantes

$$(16') \qquad Z_i + \sum_{k=1}^{p} z_k \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = 0, \quad \sum_k z_k \frac{\partial Y_k}{\partial z_i} = 0, \quad \sum_k z_k \frac{\partial Y_k}{\partial u_h} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p), \qquad (h = 1, 2, \ldots, q).$$

Si l'on pose $H = \sum_{k=1}^{p} z_k Y_k$, elles deviennent

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = -Z_i, \quad \frac{\partial H}{\partial z_i} = Y_i, \quad \frac{\partial H}{\partial u_h} = 0.$$

Le système (14') se compose donc encore d'un système canonique de $2p$ équations

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad \frac{dz_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

et d'un système de q équations

$$\frac{du_h}{dt} = U_h, \quad (h = 1, 2, \ldots, q),$$

où les U_h sont quelconques. La fonction H ne dépend que des $2p$ variables y_i, z_i, et vérifie la relation

$$H = \sum_{k=1}^{p} z_k \frac{\partial H}{\partial z_k};$$

c'est donc une fonction homogène et du premier degré des z_i.

Du théorème de M. Kœnigs on déduit très aisément un important théorème de H. Poincaré. Considérons un système canonique quelconque

$$(23) \qquad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z_i}, \qquad \frac{dz_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où H est une fonction arbitraire des y_i, des z_i, et de t. Si on lui adjoint l'équation

$$(24) \qquad \frac{dy}{dt} = H - \sum z^k \frac{\partial H}{\partial y_k};$$

nous venons de voir que l'intégrale

$$\int z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_p dy_p + dy$$

est un invariant intégral absolu du système formé par les équations (23) et (24). On en déduit que l'intégrale obtenue par l'opération (D) (n° **54**)

$$I_2 = \int dy_1 dz_1 + dy_2 dz_2 + \ldots + dy_p dz_p$$

est aussi un invariant intégral du même système, et, comme la variable y ne figure, ni dans l'invariant I_2, ni dans les équations (23), on en conclut que I_2 *est un invariant intégral pour le système canonique* (Cf. n° **62**).

59. Composition des invariants intégraux. — Si les deux intégrales $\int \omega$, $\int \varpi$, où ω et ϖ sont deux formes symboliques du même degré, sont des invariants intégraux d'un système d'équations différentielles, il est clair que l'intégrale $\int C\omega + C'\varpi$ est un invariant intégral du même système, quelles que soient les constantes C, C'.

Connaissant deux invariants de degrés quelconques, $\int \omega^p$, $\int \omega_q$ du même système, on peut en déduire un nouvel invariant par une multiplication symbolique.

Supposons d'abord que les dénominateurs X_i du système d'équations différentielles

$$(25) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt$$

ne dépendent pas de t. On peut alors, par un changement de variables portant uniquement sur les variables x_i, ramener ce système à une forme canonique

$$(26) \qquad \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{1} = dt.$$

Soient ω_p, ω_q deux formes symboliques, de degrés p et q respectivement, en $dx_1, \ldots, dx_n$, telles que les intégrales $I_p = \int \omega_p$, $I_q = \int \omega_q$ soient deux invariants intégraux du système (25). Après le changement de variables qui ramène le système (25) à la forme canonique (26), ces formes symboliques ω_p, ω_q se transforment en deux nouvelles formes symboliques Ω_p, Ω_q, dont les coefficients ne renferment pas z (n° **55**). Il en est évidemment de même du produit symbolique $\Omega_p \Omega_q$, et par conséquent $\int \Omega_p \Omega_q$ est un invariant intégral absolu du système canonique (26). L'intégrale $\int \omega_p \omega_q$ est donc aussi un invariant intégral du système (25), et nous pouvons énoncer le théorème suivant, que H. Poincaré a déduit, par une analyse savante, mais difficile à suivre, de l'étude des équations aux variations.

Si les deux intégrales $\int \omega_p$, $\int \omega_q$ *sont deux invariants inté-*

graux absolus du système (25), *l'intégrale* $\int \omega_p \omega_q$ *est un invariant intégral absolu du même système.*

Le même raisonnement prouve que, si $f = C$ est une intégrale première indépendante de t et $\int \omega$ un invariant intégral, $\int f\omega$ est aussi un invariant intégral. En effet, par le changement de variables précédent, f s'exprime au moyen des variables y_i, et la forme $f\omega$ se change en une forme $F\Omega$, qui ne contient pas ε.

Le théorème s'étend aussi aux systèmes (25), dont les dénominateurs X_i, ou du moins quelques-uns, renferment la variable t ; on suppose toujours que ω_p, ω_q sont indépendants de t. Nous avons remarqué en effet que les conditions (11) qui expriment que $\int \omega_p$, $\int \omega_q$ sont des invariants intégraux ne renfermant aucune dérivée partielle des X_i par rapport à t. Si ces conditions sont vérifiées, les intégrales $\int \omega_p$, $\int \omega_q$ sont des invariants intégraux du système (25), où l'on aurait remplacé, dans les X_i, t par une constante quelconque. Les conditions qui expriment que $\int \omega_p \omega_q$ est un invariant intégral sont donc des conséquences des équations qui expriment que $\int \omega_p$ et $\int \omega_q$ sont des invariants intégraux, puisqu'il en est ainsi quand on donne à t une valeur constante quelconque dans les X_i.

Il est clair que le théorème s'étend au produit symbolique d'un nombre quelconque de formes symboliques ω_p, ω_q, ω_r, ..., qui figurent dans les expressions des invariants absolus. L'énoncé n'exige pas non plus que toutes ces formes soient différentes. De tout invariant absolu $\int \omega_p$, on déduira de nouveaux invariants représentés symboliquement par $\int (\omega_p)^2$, $\int (\omega_p)^3$, ... Tous ces invariants sont nuls si p est impair.

Connaissant un ou plusieurs invariants intégraux du système

(25), si l'opération précédente permet d'en déduire un invariant intégral d'ordre n, on aura un multiplicateur du système. Si, en procédant d'une autre façon, on peut en déduire un autre invariant d'ordre n, le quotient de ces deux multiplicateurs donnera une intégrale du système, pouvant d'ailleurs se réduire à une constante. Supposons, par exemple, que l'on connaisse un invariant intégral du second ordre $I_2 = \int \omega_2$ d'un système de $2n$ équations, la puissance symbolique $(\omega_2)^n$ n'étant pas nulle, et en outre deux intégrales f_1, f_2 de ce système. L'intégrale $I_{2n} = \int (\omega_2)^n$ est un invariant intégral d'ordre n, ainsi que l'intégrale

$$\int (\omega_2)^{n-1} df_1 df_2.$$

Le quotient des deux formes symboliques

$$\frac{(\omega_2)^{n-1} df_1 df_2}{(\omega_2)^n}$$

est donc une nouvelle intégrale du système proposé.

Le théorème classique de Poisson n'est qu'un cas particulier de cette remarque. Supposons que le système considéré soit un système canonique

$$(27) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce système admet l'invariant intégral (nº **58**) :

$$I_2 = \int \omega_2 = \int \sum_{i=1}^{n} dx_i dp_i.$$

La puissance symbolique $(\omega_2)^n$ est identique à $n!\, dx_1 dp_1 \ldots dx_n dp_n$, et par conséquent le système (27) admet pour multiplicateur l'unité, comme il est bien connu. D'autre part, si f_1 et f_2 sont deux intégrales de ce système, $\int (\omega_2)^{n-1} df_1 df_2$ est aussi un invariant intégral d'ordre n. Or le produit symbolique sous le signe intégral est égal, à un facteur constant près (nº **42**), à $(f_1.f_2)dx_1dp_1\ldots dx_ndp_n$, la parenthèse $(f_1.f_2)$ ayant le sens habituel. *L'expression $(f_1.f_2)$ est donc une intégrale du système* (27). Les généralisations bien connues du théorème de Poisson s'établissent de la même façon.

On pourrait évidemment imaginer un grand nombre de combinaisons d'invariants intégraux conduisant à des théorèmes analogues au théorème de Poisson ; nous n'examinerons que l'une d'elles. Supposons que l'on connaisse un invariant intégral $I_{n-1}=\int\omega_{n-1}$ du système (25), où les X_i ne dépendent pas de t, et une intégrale f de ce système indépendante de t ; l'intégrale $I_1=\int df$ est aussi un invariant intégral du système (25), et par suite il en est de même de l'intégrale $\int\omega_{n-1}df$. Si le produit symbolique $\omega_{n-1}df$ n'est pas nul, on aura donc un multiplicateur du système.

Il est facile de vérifier ce résultat, en se reportant au calcul qui a été fait à la page 223. Ecrivons, en reprenant les notations de ce paragraphe,

$$\omega_{n-1}=A_1dx_2\ldots dx_n\pm A_2dx_3\ldots dx_ndx_1+\ldots\pm A_ndx_1\ldots dx_{n-1},$$

$$A(f)=A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

de sorte que l'on a

$$\pm\,\omega_{n-1}df=A(f)dx_1\ldots dx_n.$$

Si l'intégrale $\int\omega_{n-1}$ est un invariant intégral, on a identiquement

$$X(A(f))-A(X(f))+A(f)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0,$$

et par conséquent, si f est une intégrale de $X(f)=0$, on a la relation

$$X(A(f))+A(f)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0,$$

qui prouve que $A(f)$ est un multiplicateur. Si l'on connaît déjà un autre multiplicateur M, le quotient $\frac{A(f)}{M}$ sera une nouvelle intégrale ; si l'on connaît deux intégrales α et β, $A(\alpha)$ et $A(\beta)$ sont deux multiplicateurs et par suite le quotient $\frac{A(\alpha)}{A(\beta)}$ est aussi une intégrale [1].

On peut déduire facilement de ce qui précède la solution d'un problème étudié par M. Buhl [2]. Etant donné un système d'équations différentielles (25), où les X_i ne dépendent pas de t, soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de nouvelles fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $B(f)$ l'expression

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

M. Buhl s'est proposé de *déterminer les fonctions* B_i *de façon que* $B(\varphi)$ *soit une intégrale de l'équation* $X(f) = 0$, *toutes les fois que* φ *est une intégrale de la même équation*.

Il existe toujours une infinité de solutions de ce problème. Soit en effet $I_{n-1} = \int \omega_{n-1}$ un invariant intégral du système (25), tel que ω_{n-1} ne soit pas identique, à un facteur près, à la forme Ω_{n-1} définie à la page 222. On a alors

$$\omega_{n-1} df = A(f) dx_1 \ldots dx_n,$$

$A(f)$ étant une expression linéaire et homogène en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, et les deux équations $X(f) = 0$, $A(f) = 0$ sont distinctes. Nous venons de voir que $A(f)$ est un multiplicateur du système (25), si f est une intégrale de l'équation $X(f) = 0$. Soit d'autre part M un multiplicateur déterminé quelconque du système. *L'expression*

$$B(f) = \frac{A(f)}{M}$$

donne une solution du problème de M. Buhl.

On les obtient toutes de cette manière. Soit en effet

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

(1) Voir la note déjà citée de M. Kœnigs (*Comptes Rendus, t. CXXII, p. 25 ; 6 janvier 1896*).

(2) *Thèse de Doctorat.*

une expression linéaire par rapport aux dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, satisfaisant à l'énoncé. Considérons la forme symbolique
$\varpi_{n-1} = B_1 dx_2 \ldots dx_n \pm B_2 dx_3 \ldots dx_n dx_1 + \ldots \pm B_n dx_1 \ldots dx_{n-1}$;
d'après sa définition même, on a

$$\pm \varpi_{n-1} df = B(f) dx_1 \ldots dx_n,$$

et par suite, M désignant un multiplicateur du système (25),

$$\pm M \varpi_{n-1} df = MB(f) dx_1 \ldots dx_n.$$

Posons $\omega_{n-1} = \pm M\varpi_{n-1}$, et observons que $MB(f)$ est un multiplicateur du système (25) toutes les fois que f est une intégrale de $X(f) = 0$. Il suit de là que *l'intégrale* $\int \omega_{n-1} df$ *est un invariant intégral du système (25) si f est une intégrale de l'équation $X(f) = 0$.*

Imaginons que l'on prenne un système de variables canoniques $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$ pour le système (25); la forme ω_{n-1} s'écrira

$$\omega_{n-1} = K dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} + \Pi_{n-2} dz,$$

K étant une fonction quelconque et Π_{n-2} une forme de degré $n-2$ où ne figurent que les différentielles dy_i. Les $n-1$ intégrales

$$\int \omega_{n-1} dy_i = \int \Pi_{n-2} dy_i dz \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

doivent être des invariants intégraux. Il faut donc que les $n-1$ produits symboliques $\Pi_{n-2} dy_i$ ne renferment pas z, et par suite que les coefficients de la forme Π_{n-2} soient indépendants de z. L'intégrale $\int \Pi_{n-2} dz$ est donc un invariant intégral. Si l'on revient aux variables $x_1, \ldots, x_n$, on voit donc que la forme ω_{n-1} est la somme de deux formes

$$\omega_{n-1} = H\Omega_{n-1} + \Pi_{n-1},$$

Ω_{n-1} étant la forme de degré $n-1$ définie plus haut (n° **57**), et $\int \Pi_{n-1}$ étant un invariant intégral du système. On a donc

$$\begin{aligned} \omega_{n-1} df &= H\Omega_{n-1} df + \Pi_{n-1} df, \\ &= [H_1 X(f) + A_1(f)] df, \end{aligned}$$

$A_1(f)$ se déduisant, comme on vient de l'expliquer, de l'invariant intégral d'ordre $n-1$ $\int \Pi_{n-1} df$; en remplaçant $\omega_{n-1} df$ par cette expression, il vient

$$B(f) = \frac{A_1(f)}{M} + \frac{H_1}{M} X(f).$$

Il est clair que la solution ainsi obtenue n'est pas plus générale que la première, car, si $B(f)$ est une solution, il en est de même de $B(f) + LX(f)$, quelle que soit la fonction L.

60. Invariants attachés aux trajectoires. — Reprenons un système de n équations différentielles $dx_i = X_i dt$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, où les X_i ne dépendent pas de t, et soient $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ des intégrales premières distinctes, indépendantes de t, de ce système. Quand on multiplie toutes les fonctions X_i par un même facteur indéterminé $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, le nouveau système

$$\frac{dx_1}{\lambda X_1} = \frac{dx_2}{\lambda X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda X_n} = dt \tag{28}$$

admet encore les $n-1$ intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, et la dernière intégrale seule, où figure le temps, dépend de λ. En d'autres termes, l'introduction du facteur λ ne modifie pas les trajectoires, mais seulement la loi suivant laquelle chaque trajectoire est parcourue.

Soit ω une forme symbolique de degré p en $df_1, \ldots, df_{n-1}$, dont les coefficients ne dépendent eux-mêmes que de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. L'intégrale $\int \omega$ est un invariant intégral du système (28), quel que soit λ (nº **55**). Nous dirons dans la suite que cet invariant intégral est *attaché aux trajectoires* du système d'équations différentielles $dx_i = X_i dt$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et nous le désignerons par la notation I_p^e, quand nous voudrons mettre cette propriété en évidence.

Si nous prenons un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$ où $y_1 = f_1, \ldots, y_{n-1} = f_{n-1}$, le système (28) est remplacé par un système

$$\frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{\mu} = dt, \tag{29}$$

où μ peut être une fonction quelconque de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z$. Une intégrale $\int \Omega$ sera un invariant intégral de ce système, quel que soit μ, pourvu que la forme Ω ne contienne ni z, ni dz. On voit par là ce qui distingue un invariant intégral absolu *quelconque* d'un système canonique d'un invariant intégral attaché aux trajectoires.

Pour que $\int \Omega$ soit un invariant absolu, il faut et il suffit que les coefficients de Ω ne dépendent pas de z.

Pour que $\int \Omega$ soit un invariant attaché aux trajectoires, il faut que Ω ne contienne ni z, ni dz.

Il existe donc une infinité d'invariants intégraux d'un ordre quelconque (de 1 à n) attachés aux trajectoires pour un système de n équations différentielles. Soit $\int \Omega$ un invariant intégral absolu du système (2). Pour que cet invariant soit attaché aux trajectoires de ce système, il faut et il suffit que $\int \Omega$ soit encore un invariant intégral pour le système obtenu en remplaçant X_i par λX_i, et cela quel que soit λ. Supposons Ω de degré p

$$\Omega = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p};$$

par hypothèse, les coefficients $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ vérifient les conditions (11) (page 219) pour toutes les combinaisons d'indices p à p. Ces coefficients doivent vérifier aussi les relations que l'on obtient en remplaçant X_i par λX_i. Or, ces nouvelles relations deviennent, en tenant compte des premières,

$$\sum_{h=1}^{n} \left[A_{h\alpha_2 \ldots \alpha_p} X_h \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h \ldots \alpha_p} X_h \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots \right.$$
$$\left. + A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h} X_h \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\alpha_p}} \right] = 0,$$

et doivent être vérifiées, quel que soit λ. Si l'on y fait successivement $\lambda = x_1, \ldots, \lambda = x_n$, on voit que les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ doivent vérifier toutes les relations

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} X_i = 0, \tag{30}$$

pour toutes les combinaisons des n indices $p-1$ à $p-1$. On peut énoncer ce résultat de la façon suivante : *Pour que* $\int \Omega$ *soit un invariant intégral attaché aux trajectoires du système* (2), *il faut et il suffit que les coefficients de* Ω *vérifient les conditions* (11), *et que toutes les équations du système de Pfaff attaché à la forme* Ω (n° **32**) *soient vérifiées quand on y remplace* dx_i *par* X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Les conditions (30) expriment que les formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, associées à la forme symbolique Ω s'expriment linéairement au moyen des $(n-1)$ formes $df_1, \ldots, df_{n-1}$, en désignant par $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ un système de $n-1$ intégrales distinctes de l'équation

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

En effet, l'équation de Pfaff

$$\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}\, dx_i = 0$$

sera vérifiée, d'après la relation (30), si l'on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions d'une variable indépendante satisfaisant aux équations (2), c'est-à-dire par des fonctions d'une variable indépendante satisfaisant à $n-1$ relations $f_1 = C_1, \ldots, f_{n-1} = C_{n-1}$. Les équations $\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} = 0$ sont donc des conséquences des équations $df_1 = 0, \ldots, df_{n-1} = 0$, et par suite les formes de Pfaff associées à la forme Ω sont des combinaisons des $n-1$ formes $df_1, df_2, \ldots, df_{n-1}$. La forme symbolique Ω s'exprime donc elle-même au moyen de ces différentielles seulement. Telle est la signification des conditions (30). Quant aux conditions générales (11), qui s'appliquent à tous les invariants intégraux, elles expriment que les coefficients de Ω s'expriment aussi au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.

Remarque I. — Lorsque $\int \Omega$ est un invariant intégral attaché aux trajectoires, il est à peu près évident que l'intégrale $\int \Omega'$ est aussi un invariant attaché aux trajectoires. En effet, si on a ramené le système d'équations différentielles à une forme canonique, Ω ne renferme que $y_1, \ldots, y_{n-1}, dy_1, \ldots, dy_{n-1}$, et il est clair qu'il en est de même de Ω'. Il est aisé de vérifier ce résultat directement et sans aucune transformation.

Supposons, pour fixer les idées, que le degré p de Ω soit pair; la forme dérivée Ω' a pour expression

$$\omega' = \sum \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

où l'on a posé

$$\mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p i}$$

$$= \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}.$$

Il s'agit de montrer que les relations

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_p i} X_i = 0 \tag{31}$$

ou

$$\sum_i X_i \left(\frac{\partial A_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0$$

sont des conséquences des relations (11) et (30).

La relation à vérifier peut s'écrire

$$X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}) + \sum_i \left(\frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \right) X_i = 0,$$

ou, en remplaçant $X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})$ par sa valeur tirée de la relation (11),

$$\sum_i X_i \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \sum_i X_i \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}$$

$$- \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} - \ldots - \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} = 0.$$

Mais, p étant pair, on a

$$A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} = -A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}, \quad \ldots, \quad A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} = -A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}},$$

et il reste

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}}\left(\sum_i A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i} X_i\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_p}}\left(\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} X_i\right) = 0;$$

cette relation résulte immédiatement des conditions (30).

Le calcul prouve aussi que le système formé par les équations (11) et (30) est équivalent au système formé par les équations (11) et (31). Ce résultat est bien d'accord avec les propositions établies antérieurement sur la classe d'une forme symbolique (n° **33**). Si l'on remplace X_i par dx_i dans les équations (31) et (30), on obtient les deux systèmes d'équations de Pfaff S et S′, qui sont associés respectivement aux deux formes Ω et Ω'. Les équations (31) et (30) expriment donc que les intégrales de ce système complètement intégrable font partie des $n-1$ intégrales premières $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ du système (2). Si l'on suppose la forme Ω ramenée à une forme réduite, elle ne contiendra donc dans son expression que les $n-1$ intégrales premières de ce système et leurs différentielles. C'est précisément ce qui a lieu pour une forme Ω, lorsque $\int \Omega$ est un invariant attaché aux trajectoires.

Remarque II. — Si l'intégrale $\int \Omega$ est un invariant intégral attaché aux trajectoires d'un système de n équations différentielles (2), nous venons de voir que la forme Ω est au plus de classe $n-1$. Réciproquement, soit

$$\omega_p = \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}$$

une forme symbolique de degré p à n variables, et de classe *inférieure à n*. L'intégrale $\int \omega_p$ est un invariant intégral attaché aux trajectoires pour un système au moins d'équations différentielles. En effet les équations

$$\sum_i^n A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}\lambda_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_p i}\lambda_i = 0,$$

qui se présentent dans l'étude de la classe d'une forme symbolique (n° **33**), se réduisent à $n-1$ équations distinctes au plus, quand on y regarde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ comme des inconnues. Soit $\lambda_1 = X_1, \ldots, \lambda_n = X_n$ un système de solutions non toutes nulles; nous avons démontré plus haut que $\int \omega_p$ est un invariant intégral attaché aux trajectoires pour le système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Si ω_p est de classe $n-1$, les fonctions X_i sont déterminées à un facteur près. Si ω_p est de classe $n-r$, $X_1, \ldots, X_n$ dépendent linéairement de r coefficients arbitraires. La propriété peut encore s'établir sans aucun calcul. Si la forme ω_p peut s'exprimer au moyen de $n-r$ fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_{n-r}$ et de leurs différentielles, $\int \omega_p$ est un invariant intégral I_p^e pour tout système d'équations différentielles admettant les $n-r$ intégrales premières

$$f_1 = C_1, f_2 = C_2, \ldots, f_{n-r} = C_{n-r}.$$

61. Formation de ces invariants. — H. Poincaré [1] a indiqué rapidement un procédé permettant de déduire d'un inva-

[1] *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* (t. III, p. 33).

riant du second ordre un invariant du premier ordre, qui est précisément un invariant attaché aux trajectoires. On lui doit également un procédé [1] pour déduire d'un invariant intégral d'ordre n un invariant intégral d'ordre $n-1$. En réalité, la méthode de H. Poincaré s'applique à tout invariant intégral, quel qu'en soit l'ordre, et permet de déduire d'un invariant intégral absolu d'ordre p, *non attaché aux trajectoires*, un nouvel invariant intégral absolu d'ordre $p-1$, *attaché aux trajectoires*.

Soit
$$I_p = \int \omega_p = \int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant intégral absolu non attaché aux trajectoires. Posons

$$C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} X_i\,;$$

l'invariant I_p n'étant pas attaché aux trajectoires, toutes les fonctions $C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}$ ne sont pas nulles à la fois. Soit ω_{p-1} la forme symbolique de degré $p-1$

$$\omega_{p-1} = \sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}\,;$$

l'intégrale $\int \omega_{p-1}$ *est un invariant intégral absolu attaché aux trajectoires.*

Il suffit, pour le démontrer, de vérifier que les relations

$$(32) \quad X(C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}) + \sum_{h=1}^{n}\left(C_{h\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + C_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-2}}}\right) = 0$$

sont des conséquences des conditions (11). Or on a

$$X(C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}) = \sum_i X_i X(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i}) + \sum_i\sum_h A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h}.$$

[1] *Acta Mathematica*, t. XIII, p. 66 (1890).

Remplaçons $X(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i})$ par sa valeur tirée des formules (11); il vient

$$X(C_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}) = \sum_i \sum_h A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h}$$

$$- \sum_i X_i \sum_h \left(A_{h\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right).$$

En remplaçant de même les C par leurs valeurs, la relation à vérifier (31) devient

$$\sum_i \sum_h A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h}$$

$$- \sum_i X_i \sum_h \left(A_{h\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right)$$

$$+ \sum_h \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} \sum_i A_{h\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i + \ldots + \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \sum_i A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-2} h i} \right) = 0,$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent à première vue,

$$\sum_i \sum_h A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} = \sum_i \sum_h A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h} X_i \frac{\partial X_h}{\partial x_i};$$

il suffit de permuter les indices i et h dans l'un des deux membres pour obtenir une identité.

L'intégrale $\int \omega_{p-1}$ est donc bien un invariant intégral.

C'est un invariant attaché aux trajectoires. Nous avons en effet

$$\sum_{h=1}^{n} C_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} h} X_h = \sum_h \sum_i A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-2} h i} X_i X_h,$$

et les termes du second membre se détruisent deux à deux, car il change de signe quand on permute les indices i et h.

Pour abréger, j'appellerai l'opération (E) l'opération qui vient d'être définie, et qui permet de déduire d'un invariant absolu I_p, non attaché aux trajectoires, un invariant I^e_{p-1} attaché aux trajectoires. Cette opération, appliquée à un invariant I_p^e, conduit à un résultat identiquement nul. Nous avons appelé plus haut opération (D) l'opération qui conduit d'un invariant intégral absolu I_p ou d'un invariant relatif J_p, représenté par l'intégrale $\int \omega$, à un invariant $I_{p+1}^d = \int \omega'$. Appliquée à un invariant I_p^d, elle conduit aussi à un invariant identiquement nul.

Il est facile, en se servant des conditions (11) et (30), de démontrer les propriétés suivantes [1].

L'opération (D) appliquée à un invariant I_p^e conduit à un invariant $I_p^{d,\,e}$, c'est-à-dire à un invariant attaché aux trajectoires, qui est en même temps égal à une intégrale de différentielle totale symbolique.

L'opération (E) appliquée à un invariant I_p^d conduit à un invariant $I_{p-1}^{d,\,e}$.

Les opérations (D) et (E) sont permutables.

Ces propriétés sont immédiates si l'on suppose le système (4) ramené à une forme canonique. Nous y reviendrons au paragraphe suivant.

Remarque. — Pour appliquer l'opération (E) à un invariant $\int \omega$, il est commode d'appliquer cette opération à chacun des monomes de la forme ω successivement.

Par exemple, soit I_2 un invariant absolu du deuxième ordre

$$I_2 = \int \sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k\,;$$

l'invariant I_1^e que l'on en déduit a pour expression

$$I_1^e = \int \sum A_{ik}(X_i\,dx_k - X_k\,dx_i).$$

[1] *Journal de Mathématiques (6e série), tome IV (1908), p. 344.*

62. Interprétation de la méthode précédente. — Considérons d'abord un système de trois équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

où X, Y, Z ne dépendent pas de t, et un invariant intégral du troisième ordre

$$I = \int\int\int M\,dx\,dy\,dz.$$

Soit S_0 une portion de surface limitée par un contour fermé Γ ; les trajectoires issues des différents points de S_0 engendrent un *tube de trajectoires*, limité par une surface S_1, lieu des trajectoires qui rencontrent le contour Γ. Soit $m_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de S_0 ; le point de l'espace qui est au point m_0 au temps $t = 0$, est venu en un point m au temps $t = T$, et le lieu de ce point m est une surface S qui limite avec S_0 et S_1 un domaine D, le temps T ayant la même valeur pour tous les points de S_0. Pour calculer l'intégrale I étendue au domaine D, supposons les coordonnées d'un point de S_0 exprimées au moyen de deux paramètres (u, v), de façon que S_0 corresponde point par point à un domaine fermé R du plan (u, v). Le domaine D de l'espace correspond alors point par point à un domaine cylindrique de l'espace à trois dimensions (u, v, t) limité par les deux plans $t = 0$, $t = T$. et l'on a

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int M\,dx\,dy\,dz = \int\int\int M\,\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)}\,du\,dv\,dt \\
&= \int\int\int M\left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}Z + \frac{D(y, z)}{D(u, v)}X + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}Y\right]du\,dv\,dt \\
&= \int_0^T dt\int_R M\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}X + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}Y + \frac{D(x, y)}{D(u, v)}Z\right]du\,dv,
\end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$I = \int_0^T dt\int\int_{S_t} M\,\{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy\},$$

l'intégrale de surface $\int\int_{S_t}$ étant étendue à la section S_t du domaine D que l'on obtient en donnant à t une valeur constante comprise entre o et T. L'intégrale I est une fonction de T dont la dérivée pour T = o, par exemple, a pour expression

$$\left(\frac{dI}{dT}\right)_0 = \int\int_{S_0} M(Xdydz + Ydzdx + Zdxdy).$$

Nous définirons un autre domaine Δ analogue à D de la façon suivante. A chaque point m_0 de S_0 faisons correspondre un nombre θ variant d'une manière continue avec la position de m_0. Sur la trajectoire issue de ce point m_0, prenons les points μ_0, et μ occupés par le mobile, qui part de m_0 au temps $t = 0$, aux époques $t = \theta$ et $t = \theta + T$.

Sur chaque trajectoire issue d'un point de S_0, nous prenons ainsi quatre points m_0, m, μ_0, μ, correspondant aux valeurs $t = 0$, $t = T$, $t = \theta$, $t = \theta + T$.

Lorsque le point m_0 décrit S_0, le point m décrit S, et les points μ_0, μ décrivent aussi deux sections Σ_0, Σ du tube de trajectoires. Soit Δ le domaine intérieur à ce tube compris entre Σ_0 et Σ. Il est clair que ce domaine Δ se déduit de la surface Σ_0 de la même façon que D se déduit de S. La dérivée par rapport à T de l'intégrale triple

$$I_1 = \int\int\int_{\Delta} M dxdydz$$

est donc égale aussi, pour T = o, à

$$\left(\frac{dI_1}{dT}\right)_0 = \int\int_{\Sigma_0} M(Xdydz + Ydzdx + Zdxdy).$$

D'autre part, *l'intégrale I_1 étendue au domaine Δ est égale à l'intégrale I étendue au domaine D.* On passe en effet du domaine D au domaine Δ en ajoutant à D le domaine δ compris entre S et Σ, et retranchant ensuite le domaine δ_0 compris entre S_0 et Σ_0. Or les deux valeurs de I étendues à ces deux domaines sont égales, puisque par hypothèse I est un invariant intégral.

On a donc aussi $\left(\frac{dI}{dT}\right)_0 = \left(\frac{dI_1}{dT}\right)_0$, et la valeur de l'intégrale de surface

$$I_2^e = \int\int_S M(Xdydz + Ydzdx + Zdxdy),$$

étendue à une section quelconque du tube de trajectoires, a une valeur constante. Cette intégrale est donc un invariant du second ordre attaché aux trajectoires ; c'est précisément celui que l'on obtient en appliquant l'opération (E) à l'invariant intégral du troisième ordre I.

Le raisonnement qui précède est dû à H. Poincaré *(Acta Mathematica, t. XIII, p. 66)*. Il est aisé de l'étendre à un invariant d'ordre quelconque [1]. Soit

$$(33) \qquad I_p = \int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant intégral d'ordre p du système

$$(34) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

où les X_i ne dépendent pas de t ; je supposerai, pour fixer les idées, que la sommation indiquée par le signe Σ est étendue à tous les *arrangements* p à p des n premiers nombres. Soit E_{p-1} une multiplicité à $p-1$ dimensions de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, non composée de trajectoires du système (34). Quand on fait varier t de o à T, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui, pour $t = 0$, coïncide avec un point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, de E_{p-1} décrit un arc de trajectoire allant du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ à un point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et ces portions de trajectoires engendrent une multiplicité à p dimensions E_p, limitée par E_{p-1}, par la multiplicité E'_{p-1} décrite par le point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et par une autre multiplicité E''_{p-1} engendrée par les segments de

[1] *Journal de Mathématiques (7e série), tome I (1915), p. 242.*

trajectoires issues des points de la multiplicité E_{p-2} qui limite E_{p-1}. Nous allons calculer l'expression de l'intégrale I_p étendue à la multiplicité E_p. Pour cela, supposons les coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de E_{p-1} exprimées au moyen de $p-1$ variables indépendantes, de façon que E_{p-1} corresponde point par point à un certain domaine R_{p-1} à $p-1$ dimensions de l'espace $(u_1\ u_2, \ldots, u_{p-1})$.

Les coordonnées d'un point de E_p sont alors des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, et de t, qui vérifient les relations $\frac{\partial x_i}{\partial t} = X^i$.

L'intégrale cherchée peut s'écrire

$$I_p = \int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial t} du_1 \ldots du_{p-1} dt,$$

la sommation indiquée par le signe Σ étant étendue à tous les arrangements d'indices p à p. On peut encore écrire I_p,

$$(35) \quad I_p = \int_0^T dt \int_{R_{p-1}} \sum C_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} du_1 \ldots du_{p-1},$$

en posant

$$(36) \qquad C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} X_i;$$

cette expression de I peut aussi s'écrire, sous la forme abrégée équivalente,

$$(37) \quad I_p = \int_0^T dt \int_{E_{p-1}} \sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

L'intégrale I_p est donc une fonction de T, dont la dérivée pour $T = 0$ a pour valeur

$$(38) \quad \left(\frac{dI_p}{dT}\right)_0 = \int_{E_{p-1}} \sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

Considérons une autre multiplicité $\mathcal{E}_p$ définie en partant de E_{p-1} d'une façon plus générale. A chaque point $(a_1, \ldots, a_n)$ de E_{p-1} faisons correspondre un nombre θ variant d'une manière continue avec la position de ce point. Sur la trajectoire issue de ce point, prenons les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ occupés par le mobile qui part du point $(a_1, \ldots, a_n)$ au temps $t = 0$, aux époques $t = \theta$, $t = T + \theta$; il y a ainsi sur chaque trajectoire issue d'une point de E_{p-1} quatre points de coordonnées (a_i), (b_i), (α_i), (β_i) respectivement qui correspondent aux valeurs $t = 0$, $t = T$, $t = \theta$, $t = \theta + T$. Lorsque le premier de ces points décrit E_{p-1}, le point (b_i) décrit E'_{p-1}, et les points (α_i) et (β_i) décrivent deux autres multiplicités $\mathcal{E}_{p-1}$, $\mathcal{E}'_{p-1}$.

Soit $\mathcal{E}_p$ la multiplicité engendrée par la portion de trajectoire comprise entre les deux points (α_i) et (β_i), e_p et e'_p les domaines décrits par les segments de la même trajectoire compris entre les points (a_i) et (α_i), (b_i) et (β_i). On obtient le domaine $\mathcal{E}_p$ en ajoutant au domaine E_p le domaine e'_p et retranchant le domaine e_p. Mais les points des deux domaines e_p et e'_p correspondent deux à deux à des valeurs de t qui diffèrent d'une quantité constante T. Les valeurs de l'invariant intégral I_p, étendues à ces deux domaines, sont donc égales. Par suite il en est de même des valeurs de I_p étendues aux domaines E_p et $\mathcal{E}_p$; les valeurs des deux dérivées sont donc égales pour $T = 0$.

Or il est évident que le domaine $\mathcal{E}_p$ se déduit du domaine $\mathcal{E}_{p-1}$ comme E_p se déduit de E_{p-1}. La valeur de l'intégrale.

$$I_{p-1} = \int_{\mathcal{E}_{p-1}} \sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

est donc égale, quel que soit θ, à l'intégrale (38).

L'intégrale I_{p-1} est précisément l'invariant intégral que l'on déduit de I_p par l'opération (E). La démonstration prouve bien que la valeur de cette intégrale étendue à une multiplicité à $p-1$ dimensions, obtenue en prenant un point à volonté sur toutes les trajectoires issues des différents points de E_{p-1}, est égale à la valeur de la même intégrale étendue à E_{p-1}. C'est donc un invariant intégral attaché aux trajectoires.

Cette interprétation de l'opération (E) est évidemment indépendante du choix des coordonnées qui fixent la position d'un point dans l'espace à n dimensions. Cette opération est donc *covariante* pour le système (34). En termes plus précis, soient $I_p = \int \omega_p$ un invariant intégral de ce système, $I_{p-1} = \int \omega_{p-1}$ l'invariant intégral qu'on en déduit par l'opération (E); si on effectue une transformation de coordonnées définie par les formules $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, le système (34) est remplacé par un nouveau système

$$(34') \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt,$$

les deux formes ω_p et ω_{p-1} sont remplacées par deux formes ϖ_p et ϖ_{p-1}, et les deux invariants intégraux I_p et I_{p-1} s'écrivent, avec les nouvelles variables,

$$I_p = \int \varpi_p, \qquad I_{p-1} = \int \varpi_{p-1}.$$

La forme ϖ_{p-1} *se déduit de la forme* ϖ_p *de la même façon que la forme* ω_{p-1} *se déduit de* ω_p, *les variables* x_i *étant remplacées par les variables* y_i *et les fonctions* X_i *par les fonctions* Y_i *respectivement.*

Supposons en particulier que le système (34) ait été ramené à une forme canonique (n° **55**). Avec les variables canoniques $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z$, la forme ω_p s'écrit

$$\omega_p = \Omega_p + \Omega_{p-1} dz,$$

Ω_p et Ω_{p-1} étant des formes de degré p et $p - 1$ respectivement, en $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$, dont les coefficients ne renferment pas z. L'opération (E) appliquée à l'invariant $I_p = \int \omega_p$ conduit à l'invariant $I^e_{p-1} = \int \Omega_{p-1}$, qui est bien un invariant attaché aux trajectoires. L'opération (D) appliquée au même invariant I_p conduit à un invariant $I^d_{p+1} = \int \Omega'_p + \Omega'_{p-1} dz$. Enfin les deux opérations (E) et (D) appliquées successivement à l'invariant I_p conduisent, quel que soit l'ordre dans lequel on les applique, à un seul invariant nouveau $I^{d,e}_p = \int \Omega'_{p-1}$. De l'invariant intégral I_p, on peut donc déduire, en général, trois nouveaux invariants I^e_{p-1}, I^d_{p+1}, $I^{d,e}_p$, et trois seulement. Quelques-uns de ces invariants peuvent disparaître; si, par exemple, l'invariant I_p est égal à une intégrale de différentielle totale, on a $\Omega'_p = \Omega'_{p-1} = 0$, I^d_{p+1} et $I^{d,e}_p$ sont nuls. Si l'invariant I_p est attaché aux trajectoires, $\Omega_{p-1} = 0$, I_{p-1} et $I^{d,e}_p$ disparaissent. Enfin, si l'on a $\Omega_{p-1} = 0$, $\Omega'_p = 0$, les trois invariants que l'on déduit de I_p sont identiquement nuls. Les théorèmes énoncés à la fin du paragraphe précédent sont évidents sur ces formes réduites. On voit de même que tout invariant I^e_{p-1} peut se déduire, d'une infinité de manières, par l'opération (E), d'un invariant I_p, et que tous ces invariants I_p ne diffèrent de l'un d'eux que par un invariant d'ordre p attaché lui-même aux trajectoires.

Exemple. — Supposons que le système (34), où $n = 2p$, admette l'invariant intégral

$$I^d_2 = \int\int dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4 + \ldots + dx_{2p-1} dx_{2p};$$

l'invariant que l'on en déduit par l'opération (E) est un invariant $I^{d,e}_1$, qui a pour expression

$$I^{d,e}_1 = \int X_1 dx_2 - X_2 dx_1 + \ldots + X_{2p-1} dx_{2p} - X_{2p} dx_{2p-1}.$$

La forme de Pfaff qui est sous le signe intégral doit être une différentielle exacte, ce qui exige que le système (34) soit un système canonique (cf. n° **58**).

Remarque I. — D'un invariant relatif $J_p = \int \omega_p$, qui n'est pas une intégrale de différentielle totale, on déduit un invariant intégral absolu $I^d_{p+1} = \int \omega'_p$. Si cet invariant I^d_{p+1} n'est pas attaché aux trajectoires, on en déduira par l'opération (E) un invariant $I^{d,e}_p$. D'un invariant intégral relatif, on peut donc toujours déduire un invariant intégral attaché aux trajectoires.

Lorsque l'invariant $\int \omega'_p$ est attaché aux trajectoires, on peut dire que l'invariant lui-même J_p est attaché aux trajectoires. Considérons en effet une multiplicité E_{p+1} limitée par une multiplicité fermée E_p, et sur chaque trajectoire issue d'un point de E_{p+1} prenons un point à volonté. Le lieu de ces points est une multiplicité E'_{p+1} limitée par une multiplicité E'_p, dont chaque point est situé sur une trajectoire passant par un point de E_p, et inversement. L'invariant $\int \omega'_p$ étant par hypothèse un invariant $I_{p+1}^{d,e}$, les deux intégrales étendues à E_{p+1} et à E'_{p+1} sont égales ; il en est donc de même des deux valeurs de l'intégrale J_p étendue aux deux multiplicités E_p et E'_p. Il s'ensuit que J_p est un invariant intégral relatif pour tous les systèmes d'équations différentielles que l'on obtient en multipliant les fonctions X_i par un facteur arbitraire $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Remarque II. — Il est aisé de reconnaître si un invariant intégral $I_p = \int \omega_p$ peut être ramené à la forme $\int \Omega_{p-1} dz$ avec un système de variables canoniques. Soit

$$I_{p-1} = \int \omega_{p-1} = \int \Omega_{p-1}$$

l'invariant qu'on déduit de I_p par l'opération (E). Avec les variables canoniques, on voit immédiatement que l'on a $\omega_p = \omega_{p-1} dz$. *Il faut donc que la forme ω_p soit le produit de la forme ω_{p-1} par une différentielle exacte.*

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, si l'intégrale $\int \omega_p$ est un invariant intégral, on a

$$\omega_p = \Omega_p + \Omega_{p-1} dz,$$

Ω_p et Ω_{p-1} ne renfermant que les variables y_i et leurs différentielles. La forme ω_{p-1} qui figure dans l'invariant I_{p-1} est égale à Ω_{p-1} ; pour que ω_p soit divisible par ω_{p-1}, il faut donc que Ω_p soit divisible aussi par Ω_{p-1}, et l'on a

$$\omega_p = \omega_{p-1}(dz + \Pi_1),$$

Π_1 étant une forme de Pfaff en $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$. Si la forme linéaire $dz + \Pi_1$ est une différentielle $d(z + \Phi)$, il suffira de remplacer z par $z + \Phi$.

63. Relations entre les invariants et les intégrales. — La connaissance d'un invariant $I_p^e = \int \omega_p$ d'un système d'équations différentielles

$$(39) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

où les dénominateurs X_i ne dépendent pas de t, permet en général de simplifier le problème de l'intégration. Soit $n-r$ la classe de la forme ω_p ; si on ramène cette forme à une forme réduite où ne figurent que $n-r$ variables, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-r}$ et leurs différentielles, nous avons vu (n° **60**) que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-r}$ sont des intégrales distinctes du système (39). La détermination de ces $n-r$ fonctions exige l'intégration d'un système de $n-r$ équations aux différentielles totales complètement intégrable, et nous avons vu les simplifications qui pouvaient se produire dans l'intégration de ce système. Dans le cas le plus défavorable, où $r=1$, et où ω_p est une forme dérivée, on a vu que l'on peut toujours achever l'intégration du système S' associé à la forme ω_p par une quadrature, si l'on connaît $n-2$ intégrales distinctes. La connaissance de l'invariant $\int \omega_p$ offre donc le même avantage que la connaissance d'un multiplicateur.

Après ces généralités, nous allons examiner en détail quelques cas particuliers. Soit M un multiplicateur du système. L'invariant $I_n = \int M dx_1 \ldots dx_n$ est un invariant I_n^d, mais il ne peut être un invariant I_n^e, car la forme sous le signe intégral est de classe n. En lui appliquant l'opération (E), on obtiendra donc un invariant

$$I_{n-1}^{d,e} = \int \omega_{n-1},$$

qui est nécessairement de classe $n-1$. Cet invariant n'est autre que l'invariant $\int M\Omega_{n-1}$ considéré au n° **57**.

Pour déterminer les $n-1$ intégrales de l'équation $M\Omega_{n-1} df = 0$, nous avons vu qu'il suffisait de connaître $n-2$ intégrales distinctes, et la dernière s'obtient par une quadrature.

La simplification est la même si l'on connaît un invariant I^e_{n-1}, car un invariant de cette espèce est de la forme $M\Omega_{n-1}$, où M est un multiplicateur. Supposons en second lieu que l'on connaisse un invariant $I_{n-1} = \int \omega_{n-1}$ qui ne soit pas attaché aux trajectoires. Nous avons vu (nº **57**) que les équations

$$\omega_{n-1} df = 0, \qquad X(f) = 0$$

forment dans ce cas un système complet ; on aura donc $n-2$ intégrales premières du système (39) par l'intégration de ce système complet.

Au lieu d'opérer ainsi, on pouvait d'abord déduire de I_{n-1} un invariant $I^e_{n-2} = \int \omega_{n-2}$, et ramener ensuite la forme ω_{n-2} à une forme réduite. Mais il est à remarquer que les calculs sont au fond identiques. Supposons en effet que l'on ait pris un système de variables canoniques ; avec ces variables, ω_{n-1} et ω_{n-2} ont les formes suivantes

$$\omega_{n-1} = \Pi_{n-1} + \Pi_{n-2} dz, \qquad \omega_{n-2} = \Pi_{n-2},$$

Π_{n-1} et Π_{n-2} ne renfermant que les variables y_i et leurs différentielles, tandis que l'équation $X(f) = 0$ se réduit à $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Les deux systèmes

$$(40) \qquad \omega_{n-1} df = 0, \qquad X(f) = 0,$$

$$(40') \qquad \omega_{n-2} df = 0, \qquad X(f) = 0,$$

sont donc identiques, puisqu'ils s'écrivent avec les variables canoniques

$$\Pi_{n-2} df = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Supposons que l'on ait déterminé $n-2$ intégrales distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ du système (40'). Si la forme ω_{n-2} est de classe $n-1$ on peut l'écrire

$$\omega_{n-2} = F df_1 df_2 \ldots df_{n-2},$$

et le coefficient F, qui s'obtient par un simple calcul d'identification, est une nouvelle intégrale du système (39). Si ω_{n-2} est de classe $n-2$, il est clair que l'on ne peut déduire la dernière intégrale du système (29) de la connaissance de cette forme.

Le calcul est évidemment le même si l'on connaît directement un invariant I^e_{n-2}. D'une façon générale, supposons que l'on connaisse un invariant $I^e_p = \int \omega_p$, où la forme ω_p admet r diviseurs linéaires distincts $df_1, \ldots, df_r$, de sorte que l'on peut écrire ω_p commé un produit symbolique

$$\omega_p = \Omega df_1 \ldots df_r,$$

la forme Ω n'admettant plus de diviseur linéaire qui soit une différentielle exacte. Les deux équations

$$\omega_p df = 0, \qquad X(f) = 0$$

admettent encore les r intégrales distinctes $f_1, \ldots, f_r$, que l'on obtiendra par l'intégration d'un système complet, facile à former en partant de ω_p. Le procédé même permet de reconnaître si la forme ω_p admet des diviseurs de la forme voulue, et d'en déterminer le nombre sans aucune intégration (n° **25**).

Nous examinerons encore le cas où l'on connaît un invariant intégral *absolu* du premier ordre du système(39)

$$I_1 = \int \omega_1 = \int A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n.$$

Nous pouvons reprendre le raisonnement du n° **62** en supposant $p = 1$; la multiplicité E_{p-1} se réduit alors à un point, et l'on en conclut que l'opération (E), appliquée à la forme ω_1, conduit à un invariant intégral *d'ordre zéro*, c'est-à-dire à une intégrale du système (39)

$$A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n = C^{te};$$

c'est au fond la méthode même de H. Poincaré pour établir ce théorème déjà cité plus haut (n° **58**).

Le résultat est illusoire si $A_1X_1 + \ldots + A_nX_n$ se réduit à une constante K. Si cette constante est nulle, l'invariant considéré I_1 est un invariant I_1^e, et il suffira de ramener ω_1 à une forme canonique, ou, plus simplement, d'intégrer le système S_2 correspondant (n° **6**) pour avoir c intégrales distinctes du système (39), si la forme ω_1 est de classe c.

Si la constante K n'est pas nulle, considérons le système auxiliaire à $n + 1$ inconnues, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n+1}}{1} = dt. \tag{39'}$$

Il est évident que l'intégrale

$$I' = \int A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n - K dx_{n+1}$$

est un invariant intégral attaché aux trajectoires pour ce système, d'après la relation $\Sigma A_i X_i - K = 0$. Il suffira donc de ramener $\omega_1 - K dx_{n+1}$ à une forme canonique pour avoir des intégrales de ce système auxiliaire (39').

Supposons d'abord ω_1 de classe paire $2p$; on peut alors, par un changement de variables, la ramener à la forme canonique $z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p$, où $y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_p$ sont $2p$ fonctions distinctes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On aurait donc pour la différence $\omega_1 - K dx_{n+1}$ la forme canonique

$$z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p - K dx_{n+1},$$

et x_{n+1} serait une intégrale du système (39'), ce qui n'a pas lieu.

Il faut donc que ω_1 soit de classe impaire $2p + 1$; elle admet alors la forme canonique

$$z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + dy_{p+1},$$

les variables y_i, z_k ne dépendant que de $x_1, \ldots, x_n$, et $\omega_1 - K dx_{n+1}$ admet aussi la forme canonique

$$z_1 dy_1 + \ldots + z_p dy_p + d(y_{p+1} - K x_{n+1}).$$

Le système (39') admet donc les $2p + 1$ intégrales

$$y_i = C_i, \qquad z_i = C'_i, \qquad y_{p+1} - K x_{n+1} = C_{p+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et par suite le système (39) admet les $2p$ intégrales

$$y_i = C_i, \quad z_i = C'_i,$$

et une intégrale première, *qui renferme le temps*,

$$y_{p+1} - Kt = C_{p+1}.$$

Remarquons qu'il n'est point nécessaire, pour avoir ces intégrales premières, de ramener ω_1 à une forme canonique. Nous avons vu en effet (n° **5**) que, si l'on a intégré le système S_1 associé à cette forme, il suffit d'une quadrature pour ramener ω_1 à la forme

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \ldots + Y_{2p} dy_{2p} + dy_{2p+1},$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2p}$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$. Les nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_{2p+1}$ sont des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$, qui s'obtiennent par l'intégration du système S_1 et une quadrature. Les $2p$ équations $y_i = C_i$ représentent alors des intégrales premières du système (39), et la dernière intégrale, qui renferme le temps est $y_{2p+1} - Kt = C_{2p+1}$.

Supposons enfin que l'on connaisse un invariant *relatif* $J_1 = \int \omega_1$, qui ne soit pas une intégrale de différentielle exacte, du système (39). L'intégrale $\int \omega_1'$ est un invariant absolu I_2^d du même système. En lui appliquant l'opération (E), on en déduit un invariant absolu du premier ordre (n° **61**), $I_2^{d.\,e} = \int \varpi_1$. La forme de Pfaff ϖ_1 doit être une différentielle exacte df, et les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ vérifient la relation $\Sigma X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, puisque cet invariant est un invariant I_1^e. La fonction f est donc une intégrale du système (39), et par conséquent *de tout invariant relatif du premier ordre du système (39) on déduit, par une quadrature, une intégrale de ce système* [1]. La méthode s'applique aussi à un invariant absolu I_1, mais l'intégrale à laquelle on est conduit est identique à l'intégrale de Poincaré $\Sigma A_i X_i$.

[1] *Journal de Mathématiques* (4e *série*), *tome IV*, 1908, *p.* 356.

Ce résultat est illusoire si l'invariant $\int \omega_1'$ est un invariant $I_2^{d,e}$.

Si la forme ω_1' est de classe $2p$, il suffira d'intégrer le système S' associé à cette forme pour avoir $2p$ intégrales du système (39). Or, le système S' est ici identique au système S_1 (n° **5**) associé à la forme ω_1 [1].

Remarque. — Soit $I_p^e = \int \omega_p$ un invariant intégral du système (39) de classe $r < n - 1$; si on sait intégrer le système $S + S'$ relatif à la forme ω_p, on peut, par un changement de variables, exprimer cette forme au moyen de r variables seulement $y_1, y_2, \ldots, y_r$ et de leurs différentielles. Le même changement de variables, appliqué au système (39), conduit à un système admettant les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_r$, et qui est, par conséquent, de la forme

$$(39'') \qquad \frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_r}{0} = \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt.$$

Il est clair que la connaissance d'un invariant intégral $\int \omega_p$, où ω_p s'exprime uniquement au moyen de $y_1, \ldots, y_r, dy_1, \ldots, dy_r$, ne peut être d'aucune utilité pour l'intégration du système

$$(41) \qquad \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt.$$

Mais si l'invariant I_p^e a été déduit par l'opération (E) d'un invariant $I_{p+1} = \int \omega_{p+1}$, après le changement de variables, la forme ω_{p+1} ne s'exprimera pas uniquement au moyen des variables $y_1, y_2, \ldots, y_r$, et de leurs différentielles, et on pourra en déduire un ou plusieurs invariants intégraux pour le système (41). Je renverrai pour ce sujet aux Mémoires déjà cités [2].

[1] *Ibid.*, *p.* 353.
[2] *Journal de Mathématiques* (7e *série*), *tome I*, *p.* 252. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, *t. VII*, 1915, *p.* 38-45.

CHAPITRE VI

CLASSE D'UN SYSTÈME DE PFAFF. CARACTÉRISTIQUES.

Les systèmes les plus généraux d'équations de Pfaff ont d'abord été étudiés par Biermann ([1]), qui s'était proposé de rechercher l'ordre maximum des multiplicités intégrales, en supposant qu'il passe une de ces multiplicités par chaque point de l'espace. Il a trouvé ainsi, *lorsque les coefficients sont quelconques*, que ce nombre maximum est égal au quotient, à une unité près par défaut, du nombre total n des variables par le nombre r des équations augmenté de l'unité. Différents géomètres ont repris depuis lors l'étude du cas général, sans arriver d'ailleurs à une démonstration entièrement rigoureuse du théorème précédent. Des résultats plus précis ont été obtenus ensuite par Engel, von Weber, et surtout par Cartan ([2]), qui a donné une méthode générale pour trouver dans tous les cas l'ordre maximum des multiplicités intégrales *non singulières*. Nous exposons dans les chapitres suivants les principaux résultats de Cartan.

64. Généralités. — Considérons un système de r équations linéaires par rapport aux différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$,

$$
(1) \quad \begin{cases} \omega_1 = X_{11}dx_1 + X_{12}dx_2 + \ldots + X_{1n}dx_n = 0, \\ \omega_2 = X_{21}dx_1 + X_{22}dx_2 + \ldots + X_{2n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_r = X_{r1}dx_1 + X_{r2}dx_2 + \ldots + X_{rn}dx_n = 0, \end{cases}
$$

dont les coefficients X_{ik} sont des fonctions analytiques ; dans cer-

([1]) *Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form* $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ (*Schlöm. Zeitschrift*, t. XXX (1885), p. 234-244).

([2]) *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XVIII, 1901, p. 241-311).

Voir aussi : F. Engel. *Berichte Ges. Leipzig* (t. XLI et XLII, 1889-1890) ; Remarques ajoutées à une nouvelle édition de l'*Ausdenungslehre* de H. Grassmann (Leipzig, 1896), p. 479.

E. von Weber. *Berichte Ges. Leipzig* (t. L et LII, 1898-1900) *Sitzungsberichte Akademie München* (t. XXV et XXX ; 1895-1900). *Mathematische Annalen*, t. LV (1902).

tains cas, il suffit de supposer que ce sont des fonctions continues des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, admettant des dérivées continues, tout au moins dans certains domaines de l'espace à n dimensions. Nous appellerons encore *élément linéaire intégral* de ce système tout élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, issu d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pour lequel les dx_i vérifient les équations (1). Une multiplicité intégrale du système est une multiplicité ponctuelle de l'espace à n dimensions dont tous les éléments linéaires sont intégraux. Si cette multiplicité M_{n-p} est définie par p relations distinctes

$$(2)\qquad f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (p < n),$$

les équations du système (1) doivent être des conséquences des équations (2) et de celles qui s'en déduisent entre les dx_i,

$$(3)\qquad df_1 = 0, \quad \ldots, \quad df_p = 0.$$

Lorsque les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point de M_{n-p} sont exprimées au moyen de $\rho = n - p$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$,

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_\rho), \quad \ldots, x_n = \varphi_n(u_1, \ldots, u_\rho),$$

les équations (1) devront être vérifiées identiquement quand on y remplace x_i par φ_i et dx_i par $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\rho} du_\rho$, et les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ doivent vérifier le système de $r\rho$ équations aux dérivées partielles ainsi obtenues.

On peut toujours supposer que les r équations du système (1) sont linéairement distinctes ; c'est ce que nous ferons désormais, à moins de mention formelle. On a donc $r \leqslant n$; si $r = n$, les équations (1) donnent $dx_1 = 0, \ldots, dx_n = 0$, et n'admettent pas d'intégrales, sauf peut-être des multiplicités dont tous les points annulent le déterminant des coefficients X_{ik} [1]. Si $r = n - 1$, le

[1] Les équations (1) sont supposées linéairement distinctes, c'est-à-dire que tous les déterminants à r lignes du tableau

$$(\mathrm{T})\qquad \left\| \begin{matrix} X_{11}, X_{12}, & \ldots, & X_{1n} \\ X_{21}, X_{22}, & \ldots, & X_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{r1}, X_{r2}, & \ldots, & X_{rn} \end{matrix} \right\|$$

ne sont pas identiquement nuls. Soit M_p une multiplicité ponctuelle à p

système (1) est identique à un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires entre n variables ; il admet donc une famille de multiplicités intégrales à une dimension dépendant de $n-1$ constantes arbitraires, et peut être, par un changement de variables, ramené à la forme

$$df_1 = 0, \quad \ldots, \quad df_{n-1} = 0, \tag{4}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ étant $n-1$ fonctions indépendantes des variables x_i. Lorsque r est inférieur à $n-1$, le système (1) admet toujours une infinité de multiplicités intégrales à une dimension, car on peut adjoindre aux r équations du système $n-r-1$ équations de même forme à coefficients arbitraires, choisies de façon à former avec les premières un système de $n-1$ équations distinctes, c'est-à-dire un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires. Ces intégrales dépendent de $n-r-1$ fonctions arbitraires d'une variable. Si, par exemple, le système (1) est résolu par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$, on peut choisir pour $x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}$ des fonctions arbitraires de x_n, et $x_1, \ldots, x_r$ sont déterminés par un système d'équations différentielles ordinaires.

Le système (1) peut être, d'une infinité de manières, remplacé par un autre système de même forme admettant les mêmes intégrales. Posons en effet

$$\Omega_i = \lambda_{i1}\omega_1 + \ldots + \lambda_{ir}\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

les coefficients λ_{ik} étant des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$, dont le déterminant est différent de zéro. Il est clair que le système

$$\Omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_r = 0 \tag{1'}$$

admet les mêmes intégrales que le premier système et inversement.

dimensions, telle que les coordonnées de l'un quelconque de ses points annulent tous les déterminants d'ordre ρ du tableau (T) ($\rho \leqq r$) ; les coordonnées d'un point quelconque de cette multiplicité peuvent s'exprimer au moyen de p paramètres $u_1, \ldots, u_p$, et en remplaçant x_i et dx_i par leurs expressions dans les équations du système S, on est conduit à un nouveau système de Pfaff de $\rho - 1$ équations à p variables.

On pourrait opérer de la même façon pour obtenir les intégrales du système S qui appartiennent à une multiplicité donnée quelconque à moins de n dimensions.

De pareils systèmes sont dits *équivalents*. En particulier, on peut toujours remplacer un système de Pfaff de r équations par un système de r équations résolues par rapport à r des différentielles dx_i.

On s'est d'abord proposé de trouver le nombre maximum de dimensions que peut avoir une multiplicité intégrale de S. Ce nombre est évidemment au plus égal à $n-r$, et ce maximum n'est atteint que si S est un système complètement intégrable, tout au moins quand il passe une intégrale à $n-r$ dimensions par un point quelconque de l'espace (n° **16**). Dans le cas général, il semblerait naturel de raisonner comme il suit. Si le système S possède des intégrales M_ρ à ρ dimensions, on peut supposer $n-\rho$ des variables x_i exprimées au moyen des ρ variables restantes, $x_1, \ldots, x_\rho$ par exemple. Soient

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_\rho) \qquad (i=\rho+1, \ldots, n)$$

les équations de cette multiplicité. En remplaçant $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ et $dx_{\rho+1}, \ldots, dx_n$ par leurs expressions dans les équations (1), et en égalant à zéro les coefficients de $dx_1, \ldots, dx_\rho$, on a un système de ρr équations aux dérivées partielles pour déterminer les $n-\rho$ fonctions inconnues. En admettant que ces équations sont compatibles, pourvu que leur nombre soit au plus égal au nombre des fonctions inconnues, il faudra que l'on ait

$$r\rho \leqslant n-\rho, \qquad \text{ou} \qquad \rho \leqslant \frac{n}{r+1},$$

pour qu'on puisse affirmer qu'il existe des intégrales à ρ dimensions. Le raisonnement manque évidemment de rigueur, quoique la conclusion soit exacte, lorsque les coefficients X_{ik} sont quelconques. Mais on n'obtient ainsi qu'une limite inférieure de la valeur maximum de ρ.

Von Weber et Cartan ont étudié la question d'une façon beaucoup plus approfondie, et obtenu des résultats très généraux. Leurs recherches sont basées sur l'emploi de certains systèmes *covariants* du système S.

65. Premier système associé. — Soit M_ρ une multiplicité intégrale ($\rho > 1$) du système S ; soient $(dx_1, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ deux éléments linéaires issus d'un même point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et appartenant à cette multiplicité. Ces deux éléments linéaires satisfont (n° **3**) aux r relations

$$(5) \qquad \omega'_1 = 0, \ \ldots, \ \omega'_r = 0,$$

ω'_h ayant la même signification que plus haut

$$\omega'_h = \delta\omega_h(d) - d\omega_h(\delta).$$

Nous dirons encore que deux éléments linéaires intégraux (dx_i) et (δx_i) sont *en involution* quand ils vérifient les r relations (5). Les équations qui expriment que deux éléments linéaires sont intégraux et en involution

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega_1(d) = 0, \ \ldots, \ \omega_r(d) = 0, \\ \omega_1(\delta) = 0, \ \ldots, \ \omega_r(\delta) = 0, \\ \omega'_1 = 0, \ \ldots, \ \omega'_r = 0 \end{cases}$$

forment le *premier système associé à S*. Les $2r$ premières équations forment deux groupes de r équations distinctes, mais les r équations de la dernière ligne ne sont pas toujours distinctes entre elles, et quelques-unes peuvent être des combinaisons des premières, comme nous le verrons par la suite.

Le système (6) reste le même quand on remplace le système (1) par un système équivalent. Si l'on pose en effet

$$(7) \qquad \Omega_i = \lambda_{i_1}\omega_1 + \ldots + \lambda_{ir}\omega_r. \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\Omega'_i = \delta\Omega_i(d) - d\Omega_i(\delta) = \lambda_{i_1}\delta\omega_1(d) + \ldots \\ + \lambda_{ir}\delta\omega_r(d) + \omega_1(d)\delta\lambda_{i_1} + \ldots + \omega_r(d)\delta\lambda_{ir} \\ - [\lambda_{i_1}d\omega_1(\delta) + \ldots + \lambda_{ir}d\omega_r(\delta) + \omega_1(\delta)d\lambda_{i_1} + \ldots + \omega_r(\delta)d\lambda_{ir}],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Omega'_i = \lambda_{i_1}\omega'_1 + \ldots + \lambda_{ir}\omega'_r + \omega_1(d)\delta\lambda_{i_1} + \ldots \\ + \omega_r(d)\delta\lambda_{ir} - \omega_1(\delta)d\lambda_{i_1} - \ldots - \omega_r(\delta)d\lambda_{ir},\end{aligned}$$

et les équations (6) entraînent les équations de même forme

$$(6')\qquad \begin{cases} \Omega_1(d)=0, \;\dots,\; \Omega_r(d)=0, \\ \Omega_1(\delta)=0, \;\dots,\; \Omega_r(\delta)=0, \\ \Omega'_1=0, \;\dots,\; \Omega'_r=0. \end{cases}$$

Inversement, si le déterminant des coefficients λ_{ik} n'est pas nul, on tire des relations (7)

$$(7')\qquad \omega_i=\mu_{i1}\Omega_1+\dots+\mu_{ir}\Omega_r \qquad (i=1, 2, \dots, r),$$

les coefficients μ_{ik} étant des fonctions de $x_1, \dots, x_n$, et les relations (6′) entraînent les relations (6).

Supposons de même que l'on effectue un changement de variables $x_i=\varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, et soient

$$\omega_i=Y_{i1}dy_1+\dots+Y_{in}dy_n$$

la nouvelle expression de la forme ω_i au moyen des nouvelles variables. D'après la propriété d'invariance du covariant bilinéaire, le système (6) est remplacé par le système de même forme déduit du système de Pfaff obtenu en faisant le changement de variables dans les équations (1). En d'autres termes, le *système (6) est un covariant du système de Pfaff S, relativement à tout changement de variables.*

66. Caractéristiques. — Parmi les éléments linéaires intégraux issus d'un point, il y a lieu de distinguer ceux qui sont *en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux issus du même point;* ce sont les *éléments caractéristiques.*

Un élément caractéristique (dx_i) vérifie d'abord les r équations (1) ; il satisfait en outre aux équations obtenues en écrivant que les r équations (6) de la dernière ligne, considérées comme des équations linéaires en $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$, sont des conséquences des r équations de la ligne précédente qui, par hypothèse, sont distinctes. Imaginons ces $2r$ équations ordonnées par rapport à $\delta x_1, \dots, \delta x_n$;

puisque les r premières sont distinctes, l'un au moins des déterminants d'ordre r déduit du tableau.

$$\begin{Vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{r1} & X_{r2} & \dots & X_{rn} \end{Vmatrix}$$

est différent de zéro. Soit

$$\begin{aligned}\omega'_i = (a^i_{11}dx_1 + a^i_{12}dx_2 + \dots + a^i_{1n}dx_n)\delta x_1 \\ + (a^i_{21}dx_1 + a^i_{22}dx_2 + \dots + a^i_{2n}dx_n)\delta x_2 + \dots\end{aligned}$$

le covariant bilinéaire de ω_i. Pour que les r équations $\omega'_i = 0$ soient des conséquences des r équations $\omega_i(\delta) = 0$, où $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ sont regardées comme les indéterminées, il faut et il suffit que tous les déterminants d'ordre $r+1$ déduits des tableaux

$$\begin{Vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ X_{r1} & X_{r2} & \dots \\ a^i_{11}dx_1 + a^i_{12}dx_2 + \dots + a^i_{1n}dx_n, & a^i_{21}dx_1 + a^i_{22}dx_2 + \dots + a^i_{2n}dx_n & \dots \end{Vmatrix}$$

soient nuls. On adjoint ainsi aux r équations $\omega_i = 0$ un certain nombre d'équations nouvelles qui sont également linéaires en $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$. Le système ainsi formé

$$(8)\qquad \omega_1(d) = 0, \dots, \omega_r(d) = 0, \qquad \Pi_1(d) = 0, \dots, \Pi_\mu(d) = 0$$

est le *système caractéristique*. Il est évident, d'après sa signification même, que c'est un covariant du système de Pfaff relativement à tout changement de variables.

Si le système de Pfaff est résolu par rapport à r différentielles, $dx_1, \dots, dx_r$ par exemple, on peut former plus simplement les équations qui définissent les éléments caractéristiques, en portant dans $\omega'_1, \dots, \omega'_r$ les expressions de $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r$ tirées des équations $\omega_i(\delta) = 0$, et en égalant à zéro les coefficients de $\delta x_{r+1}, \dots, \delta x_n$ après la substitution. Le système (8) contient au moins r équations linéairement distinctes, et il en contient au plus n. S'il en contient n, ces équations n'admettent pas d'autre solution que $dx_i = 0$, et il n'y a pas d'éléments caractéristiques. Dans tout autre cas, il y a des éléments de cette espèce.

Quel que soit le système de Pfaff S, *le système caractéristique (8) est complètement intégrable.*

Pour le démontrer, nous suivrons exactement la même marche qu'au n° **5**. La proposition est évidente si le système contient n ou $n-1$ équations linéairement distinctes. Supposons que ce système contienne seulement $n-p$ équations linéairement distinctes ($p > 1$). On peut alors trouver, et d'une infinité de façons, une famille de courbes *caractéristiques* (c'est-à-dire de courbes dont tous les éléments sont caractéristiques), dépendant de $n-1$ constantes arbitraires, de façon qu'il passe une de ces courbes par un point arbitraire. Imaginons que l'on ait effectué un changement de variables tel que les équations de cette famille de courbes caractéristiques soient

$$y_1 = C_1, \ldots, y_{n-1} = C_{n-1},$$

la variable y_n pouvant être choisie à volonté, pourvu qu'elle forme avec $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ un système de n fonctions indépendantes des premières variables. Le système (8) se transforme en un système où ne figure pas la différentielle dy_n, puisque ce système doit être vérifié quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ par des constantes quelconques. En particulier les équations du système de Pfaff (1) ne contiendront pas dy_n après la transformation. Supposons ce système résolu par rapport à $dy_1, dy_2, \ldots, dy_r$,

$$\Omega_i = dy_i - [Y_{i,r+1}dy_{r+1} + \ldots + Y_{i,n-1}dy_{n-1}] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Les relations

$$\begin{aligned} \Omega'_i = \delta Y_{i,r+1}dy_{r+1} + \ldots + \delta Y_{i,n-1}dy_{n-1} \\ - dY_{i,r+1}\delta y_{r+1} - \ldots - dY_{i,n-1}\delta y_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

doivent être vérifiées par tous les éléments linéaires intégraux δy^i du nouveau système quand on prend $dy_1 = 0, \ldots, dy_{n-1} = 0$. Or, le coefficient de dy_n après cette substitution est, au signe près,

$$\frac{\partial Y_{i,r+1}}{\partial y_n}\delta y_{r+1} + \ldots + \frac{\partial Y_{i,n-1}}{\partial y_n}\delta y_{n-1};$$

il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial Y_{i,\, r+1}}{\partial y_n} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial Y_{i,\, n-1}}{\partial y_n} = 0,$$

et la variable y_n ne figure plus dans le système de Pfaff après le changement de variables. Il est évident que les équations qui définissent les éléments caractéristiques ne contiendront elles-mêmes que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, dy_1, \ldots, dy_{n-1}$, et formeront encore un système de $n - p$ équations linéairement distinctes, puisque ce système se déduit aussi du système (8) par un changement de variables. Après $p - 1$ transformations de cette espèce, on sera donc ramené à un système de $n - p$ équations à $n - p + 1$ variables, c'est-à-dire à un système complètement intégrable.

Pour donner une application de ce résultat, supposons que le système de Pfaff S soit complètement intégrable. On peut alors, par un changement de variables, le remplacer par un système équivalent

$$\Omega_1 = dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_r = dy_r = 0\,;$$

les covariants bilinéaires $\Omega'_1, \ldots, \Omega'_n$ sont nuls identiquement, et le système caractéristique se confond avec le système de Pfaff lui-même. Donc, *pour un système de Pfaff complètement intégrable, tout élément intégral linéaire est un élément caractéristique.*

Réciproquement, *tout système de Pfaff, pour lequel cette condition est satisfaite, est complètement intégrable.* En effet, les équations du système (8) se réduisent alors aux r équations du système de Pfaff lui-même. Puisque ce système caractéristique (8) est, on vient de le démontrer, complètement intégrable, il en résulte que le système de Pfaff est complètement intégrable.

On peut encore énoncer cette proposition comme il suit. *Pour que le système de Pfaff* (1) *soit complètement intégrable* [1], *il faut et il suffit que les r équations $\omega'_i =$ soient vérifiées par deux systèmes quelconques d'éléments (dx_i), (δx_i) qui vérifient respectivement les $2r$ équations $\omega_h(d) = 0$, $\omega_h(\delta) = 0$.*

Nous appellerons dans la suite *variable caractéristique* toute

[1] Cette condition a été donnée par FROBENIUS sous une forme équivalente (*Journal de Crelle, t. LXXXII, 1887, p. 276*). Il est aisé de voir que le dernier énoncé s'applique aussi au cas où les r équations du système de Pfaff ne sont pas linéairement distinctes.

intégrale du système caractéristique, *multiplicité caractéristique* toute multiplicité dont tous les éléments linéaires sont caractéristiques. Si le système (8) se compose de $\gamma < n$ équations linéairement distinctes, les multiplicités caractéristiques d'ordre maximum sont à $n - \gamma$ dimensions, et toutes les multiplicités caractéristiques d'ordre inférieur à $n - \gamma$ s'obtiennent en prenant une multiplicité arbitraire sur une multiplicité caractéristique d'ordre maximum.

67. Classe d'un système de Pfaff. — La *classe* d'un système de Pfaff est le nombre minimum de variables que l'on puisse laisser figurer dans les équations de ce système par un changement de variables convenable, deux systèmes équivalents étant regardés comme identiques. *La classe est égale à l'ordre du système caractéristique* (cf. n° **14**), c'est-à-dire au nombre des équations linéairement distinctes du système (8). Supposons en effet que ce système renferme γ équations linéairement distinctes $(r \leqslant \gamma \leqslant n)$. Comme il est complètement intégrable, nous pouvons supposer qu'on ait pris un système de variables indépendantes $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tel que le système caractéristique soit équivalent au système

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_\gamma = 0.$$

Après ce changement de variables, $dy_{\gamma+1}, \ldots, dy_n$ ne doivent pas figurer dans les équations du système de Pfaff transformé, puisque l'élément linéaire $(dy_1 = 0, \ldots, dy_\gamma = 0, dy_{\gamma+1}, \ldots, dy_n)$ est un élément intégral, quels que soient $dy_{\gamma+1}, \ldots, dy_n$. Si nous supposons le système de Pfaff résolu par rapport à r différentielles, $dy_1, \ldots, dy_r$ par exemple,

$$dy_i = Y_{i,r+1}dy_{r+1} + \ldots + Y_{i\gamma}dy_\gamma, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

on démontrera comme au paragraphe précédent que les coefficients $Y_{i,r+1}, \ldots, Y_{i\gamma}$ doivent être indépendants de $y_{\gamma+1}, \ldots, y_n$, et par suite les équations du système transformé ne renferment que les γ variables $y_1, \ldots, y_\gamma$, et leurs différentielles.

On ne peut mettre le système de Pfaff sous une forme où figurent moins de γ variables. En effet, si, par un changement de variables convenable, on a mis le système de Pfaff sous une forme où figurent seulement q variables $z_1, z_2, \ldots, z_q$ et leurs différentielles, les équations du système caractéristique, qui sont linéaires en $dz_1, dz_2, \ldots, dz_q$, contiendront au plus q équations linéairement distinctes. On ne peut donc avoir $q < \gamma$.

Si, en procédant de deux façons différentes, on a mis le système de Pfaff sous deux formes équivalentes, l'une ne renfermant que les γ variables $(y_1, y_2, \ldots, y_\gamma)$ et leurs différentielles, l'autre ne renfermant que γ variables $(z_1, z_2, \ldots, z_\gamma)$ et leurs différentielles, le système caractéristique peut lui-même être mis sous les deux formes équivalentes

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_\gamma = 0,$$

ou

$$dz_1 = 0, \ldots, dz_\gamma = 0.$$

Il en résulte que $z_1, z_2, \ldots, z_\gamma$ sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_\gamma$, et l'on passe d'une des formes du système de Pfaff à l'autre par un simple changement de variables effectué sur γ variables seulement. Lorsqu'un système de Pfaff de classe γ a été mis ainsi sous une forme où n'entrent que γ variables et leurs différentielles, nous dirons qu'il a été ramené à une *forme réduite*. Il suffit, pour mettre un système sous forme réduite, de prendre pour variables indépendantes un système de γ variables caractéristiques distinctes.

Dans le cas où $\gamma = n$, toutes les variables sont caractéristiques, et l'on ne peut diminuer le nombre des variables qui figurent dans les équations du système. Si $\gamma = r$, nous avons vu que le système est complètement intégrable. On ne peut supposer $\gamma = r + 1$. En effet tout système de r équations de Pfaff où figurent seulement $r + 1$ variables est complètement intégrable, et par suite de classe r. Le cas le plus simple, après celui des systèmes complètement intégrables, est donc celui où $\gamma = r + 2$, qui sera étudié plus loin (chap. VII).

Les théorèmes établis plus haut sur les multiplicités caractéristiques d'une équation de Pfaff s'étendent immédiatement aux systèmes de Pfaff, et s'établissent de la même façon (nº **17**).

Le lieu des multiplicités caractéristiques d'ordre maximum passant par tous les points d'une intégrale M_ρ d'un système de Pfaff est une nouvelle intégrale M' dont l'ordre est au plus égal à $\rho+\gamma$.

Les multiplicités intégrales d'ordre maximum sont engendrées par des multiplicités caractéristiques d'ordre maximum.

La définition du *rang* d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ relativement à une forme de Pfaff (nº **11**) s'étend sans difficulté à un système d'équations de Pfaff. On dit qu'une fonction f est de rang ρ relativement à un système de Pfaff S lorsque, en établissant entre les variables x_i et leurs différentielles les relations $f=\mathrm{C}$, $df=0$, le système S se change en un nouveau système de classe $\gamma-\rho$. On voit immédiatement que ρ est nul si f n'est pas une intégrale du système caractéristique, et que ρ est au moins égal à *un*, si f est une intégrale de ce système. Mais le nombre ρ peut être supérieur à *un*. Prenons par exemple le système de classe *cinq*

$$dx_3-x_2dx_1=0, \qquad dx_5-x_4dx_1=0,$$

les fonctions x_1, x_3, x_5 sont de rang *trois*, tandis que x_2 et x_4 sont de rang *un*. La proposition suivante se démontre de la même façon que le théorème analogue relatif aux formes symboliques (nº **38**).

Le rang d'une fonction f relativement à un système de Pfaff S est égal à $\gamma-\gamma_1+1$, γ étant la classe de S, γ_1 la classe du système S_1 obtenu en adjoignant l'équation $df=0$ au système S.

D'une façon générale, supposons que l'on ait obtenu p intégrales $f_1, \ldots, f_p$ du système caractéristique. Si l'on fait un changement de variables de façon que ces intégrales soient p des nouvelles variables $y_1, \ldots, y_p$ par exemple, le nouveau système de Pfaff, où l'on fait $y_i=\mathrm{C}_i$, $dy_i=0$, est au plus de classe $\gamma-p$, mais il peut être de classe inférieure. Par exemple, si ce nouveau système est de classe r, il sera complètement intégrable.

On peut aussi quelquefois simplifier l'intégration du système caractéristique, à l'aide de certains systèmes covariants. On en verra un exemple plus loin (nº **76**, p. 311).

Exemple. — Soit S_2 un système de deux équations de Pfaff à cinq variables,

$$S_2 \begin{cases} \omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_5 dx_5 = 0, \\ \omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_5 dx_5 = 0\,; \end{cases}$$

nous supposerons, pour fixer les idées, que l'on peut résoudre ce système par rapport à dx_4 et dx_5. Dans les covariants ω'_1, ω'_2, on peut remplacer dx_4, dx_5, δx_4, δx_5 par leurs expressions tirées des équations $\omega_i(d) = 0$, $\omega_i(\delta) = 0$, et l'on obtient deux conditions de la forme ci-dessous pour que deux éléments linéaires intégraux soient en involution :

$$\begin{aligned} \omega'_1 = C_1(dx_2\delta x_3 - dx_3\delta x_2) + C_2(dx_3\delta x_1 - dx_1\delta x_3) \\ + C_3(dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1) = 0, \\ \omega'_2 = D_1(dx_2\delta x_3 - dx_3\delta x_2) + D_2(dx_3\delta x_1 - dx_1\delta x_3) \\ + D_3(dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1) = 0. \end{aligned}$$

Considérons (dx_1, dx_2, dx_3), $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ comme les coordonnées homogènes de deux points m, μ d'un plan, et soient P_1, P_2 les points de ce plan de coordonnées (C_1, C_2, C_3), (D_1, D_2, D_3). La relation $\omega'_1 = 0$ exprime que les points m, μ, P_1 sont en ligne droite, et la relation $\omega'_2 = 0$ exprime que les points m, μ, P_2 sont en ligne droite. Pour qu'il y ait un élément caractéristique, il faut et il suffit que les deux points P_1, P_2 soient confondus, ou que l'on ait

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{C_3}{D_3}\,;$$

le système est alors de classe quatre. Il en est ainsi en particulier si l'une des équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ est vérifiée identiquement. Si les deux relations sont vérifiées identiquement, le système est complètement intégrable (voir n° **65**).

Considérons en particulier le système

$$\begin{cases} \omega_1 = dv + A\,du + B\,dx + C\,dy = 0, \\ \omega_2 = dw + A_1 du + B_1 dx + C_1 dy = 0, \end{cases}$$

où les coefficients A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont des fonctions des deux variables x, y seulement. On a

$$\omega'_1 = \left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x}\right)(dx\delta y - dy\delta x) - \frac{\partial A}{\partial y}(dy\delta u - du\delta y) + \frac{\partial A}{\partial x}(du\delta x - dx\delta u) = 0,$$

$$\omega'_2 = \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\right)(dx\delta y - dy\delta x) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(dy\delta u - du\delta y) + \frac{\partial A_1}{\partial x}(du\delta x - dx\delta u) = 0.$$

Pour qu'il y ait un élément caractéristique, il faudra que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial B}{\partial y} - \dfrac{\partial C}{\partial x}}{\dfrac{\partial B_1}{\partial y} - \dfrac{\partial C_1}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial A}{\partial y}}{\dfrac{\partial A_1}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial A}{\partial x}}{\dfrac{\partial A_1}{\partial x}}.$$

Il faut donc que le jacobien $\dfrac{D(A, A_1)}{D(x, y)}$ soit nul. Si A et A_1 se réduisent à des constantes, les quatre dérivées $\dfrac{\partial A}{\partial x}, \dfrac{\partial A_1}{\partial x}, \dfrac{\partial A}{\partial y}, \dfrac{\partial A_1}{\partial y}$ sont nulles et le système caractéristique se réduit aux quatre équations

$$dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dv + A\,du = 0, \qquad dw + A_1 du = 0,$$

et le système est de quatrième classe, à moins que l'on n'ait en même temps $\dfrac{\partial B}{\partial y} = \dfrac{\partial C}{\partial x}$, $\dfrac{\partial B_1}{\partial y} = \dfrac{\partial C_1}{\partial x}$, et le système est alors complètement intégrable.

Supposons que l'on ait $A_1 = \varphi(A)$, A n'étant pas constant et dépendant de la variable x par exemple. Le système sera de quatrième classe si l'on a

$$\frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial x} = \varphi'(A)\left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x}\right).$$

68. Application des formes symboliques. — On peut présenter les résultats qui précèdent sous une forme un peu plus générale, en utilisant les résultats et les notations du chapitre III. Etant donnée une forme symbolique Ω de degré quelconque p en $dx_1, \ldots, dx_n$, soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ n formes de Pfaff linéairement distinctes en $dx_1, \ldots, dx_n$; la forme Ω peut s'exprimer par un polynome symbolique de degré p en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Rappelons encore la notation suivante. Soient Ω et Π deux formes symboliques de même degré, et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ des formes de degré quelconque, dont chacune est de degré inférieur ou au plus égal à celui de Ω. Si l'on peut trouver de nouvelles formes $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$ telles que l'on ait identiquement

$$\Omega = \Pi + \varpi_1\omega_1 + \ldots + \varpi_p\omega_p,$$

nous écrirons cette relation sous forme de congruence

$$\Omega \equiv \Pi \;(\text{mod.}\; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p);$$

il est clair que la congruence précédente entraîne la suivante,

$$\Omega' \equiv \Pi' \;(\text{mod.}\; \omega_1, \ldots, \omega_p, \omega'_1, \ldots, \omega'_p),$$

d'après la règle qui donne la forme dérivée d'un produit symbolique (n° **26**).

Supposons en particulier que Ω soit le covariant bilinéaire d'une forme de Pfaff ω, et que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ soient aussi des formes de Pfaff.

La congruence

$$\omega' \equiv 0 \;(\text{mod.}\; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p),$$

équivalente à l'égalité

$$\omega' = \varpi_1\omega_1 + \varpi_2\omega_2 + \ldots + \varpi_p\omega_p,$$

où $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_p$ sont de nouvelles formes de Pfaff, exprime que deux éléments linéaires quelconques $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$ satisfaisant aux relations

$$\omega_i(d) = 0, \qquad \omega_i(\delta) = 0, \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

sont toujours en involution relativement à l'équation $\omega = 0$. En effet, le produit symbolique $\varpi_1\omega_1$ par exemple représente la différence des deux produits

$$\omega_1(d)\varpi_1(\delta) - \omega_1(\delta)\varpi_1(d),$$

et par suite ce produit symbolique est nul si l'on a à la fois $\omega_1(d) = 0$, $\omega_1(\delta) = 0$. Il en est évidemment de même des autres produits $\omega_i\varpi_i$.

Cela posé, soit S un système de Pfaff de r équations

$$\omega_1 = 0, \;\omega_2 = 0, \;\ldots, \quad \omega_r = 0;$$

aux r formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ adjoignons $\rho = n - r$ formes nouvelles $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$, de façon que les $r + \rho = n$ formes ω_i, ϖ_k soient linéairement distinctes. Toute forme symbolique Ω de degré quelconque, et en particulier tout covariant bilinéaire ω'_i, peut s'exprimer symboliquement au moyen de ces n formes. Si l'on réunit ensemble les produits symboliques où ne figurent que les formes $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$, le covariant ω'_i peut s'exprimer de la façon suivante,

$$\omega'_i = \pi_{i1}\omega_1 + \ldots + \pi_{ir}\omega_r + \sum_{h,k} A_{ihk}\varpi_h\varpi_k, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, \rho)$$

les π_{ik} étant d'autres formes de Pfaff, et les coefficients A_{ihk} étant des fonctions des n variables x_i. Nous écrirons ces égalités sous forme de congruences,

$$\omega'_i \equiv \sum_{h,k} A_{ihk}\varpi_h\varpi_k \;(\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r), \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Dans les paragraphes précédents, nous avions supposé que les r formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ étaient linéairement distinctes relativement aux différentielles $dx_1, \ldots, dx_r$, et nous avions pris $\varpi_1 = dx_{r+1}$, $\ldots, \varpi_\rho = dx_n$, mais il n'est pas nécessaire que ces formes auxiliaires $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$ soient des différentielles exactes. Il suffit qu'elles forment avec $\omega_1, \ldots, \omega_r$ un système de n formes linéairement indépendantes. Tout système de valeurs de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$ définit un élément intégral du système de Pfaff. Pour que deux éléments linéaires intégraux $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ soient en involution relativement au système, il faudra, d'après une remarque antérieure, que l'on ait les r relations

$$\sum_{h,k} A_{ihk} \left\{ \varpi_h(d)\varpi_k(\delta) - \varpi_k(d)\varpi_h(\delta) \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Cherchons encore comment seront déterminés les éléments caractéristiques. La forme symbolique

$$\sum_{h,k} A_{ihk}\varpi_h\varpi_k$$

étant de rang pair 2ν peut être ramenée à une forme réduite (nº **32**)

$$\Pi_1\Pi_2 + \Pi_3\Pi_4 + \ldots + \Pi_{2\nu-1}\Pi_{2\nu},$$

$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{2\nu}$ étant 2ν formes linéairement distinctes qui s'expriment linéairement au moyen de $\varpi_1, \ldots, \varpi_\rho$. Tout élément intégral $(dx_1, \ldots, dx_n)$ qui satisfait aux 2ν relations

$$\Pi_1 = 0, \ldots, \Pi_{2\nu} = 0$$

est en involution avec tous les éléments linéaires intégraux du système relativement à l'équation $\omega_i = 0$. En effet on a

$$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_1(d)\Pi_2(\delta) - \Pi_2(d)\Pi_1(\delta) = 0,$$

quel que soit l'élément intégral $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$. Inversement, soit $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ un élément linéaire intégral quelconque du système. $\Pi_1(\delta), \ldots, \Pi_{2\nu}(\delta)$ ont des valeurs arbitraires pour cet élément, et le polynome symbolique

$$\Pi_1\Pi_2 + \Pi_3\Pi_4 + \ldots + \Pi_{2\nu-1}\Pi_{2\nu}$$

ne peut être nul quel que soit cet élément intégral que si l'on a $\Pi_1(d) = 0, \ldots, \Pi_{2\nu}(d) = 0$.

On a démontré antérieurement (nº **32**) que les 2ν équations $\Pi_i = 0$ sont équivalentes aux équations

$$\sum_k A_{i1k}\varpi_k = 0, \qquad \sum_k A_{i2k}\varpi_k = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_k A_{i\rho k}\varpi_k = 0.$$

En faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, r$, on obtient un système d'équations qui déterminent les éléments caractéristiques. Pour qu'un système de Pfaff soit complètement intégrable, il faut, et il suffit que tous les éléments linéaires intégraux soient caractéristiques, c'est-à-dire que tous les coefficients A_{ikh} soient nuls. On a alors les r congruences

$$\omega'_i \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r},$$

et inversement ces r congruences expriment que le système est complètement intégrable ([1]).

([1]) Cartan, *Bulletin de la Société Mathématique*, p. 248, t. XXIX (1901).

69. Exemples. — 1° Considérons le système de deux équations simultanées du second ordre

$$(9) \qquad r = f(x, y, z, p, q, s), \qquad t = \varphi(x, y, z, p, q, s);$$

à toute intégrale de ce système correspond une intégrale à deux dimensions M_2 du système de Pfaff à 6 variables x, y, z, p, q, s.

$$(10) \qquad \omega_1 = p\,dx + q\,dy - dz = 0,$$
$$\omega_2 = f\,dx + s\,dy - dp = 0, \qquad \omega_3 = s\,dx + \varphi\,dy - dq = 0.$$

Inversement toute intégrale M_2 du système (10) donnera une intégrale des équations (9), pourvu que les équations qui définissent M_2 ne donnent qu'une relation entre x, y, z. Formons ω'_1, ω'_2, ω'_3 ; en y remplaçant dz, dp, dq, δz, δp, δq par leurs expressions au moyen de dx, dy, δx, δy tirées des équations (10) elles-mêmes, il reste

$$\omega'_1 = 0, \quad \omega'_2 = \frac{df}{dy}(dx\delta y - dy\delta x) + \frac{\partial f}{\partial s}(dx\delta s - ds\delta x) + dy\delta s - ds\delta y,$$
$$\omega'_3 = \frac{d\varphi}{dx}[dy\delta x - dx\delta y] + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(dy\delta s - ds\delta y) + dx\delta s - \delta x ds,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}p + \frac{\partial}{\partial p}f + \frac{\partial}{\partial q}s,$$
$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}q + \frac{\partial}{\partial p}s + \frac{\partial}{\partial q}\varphi.$$

En égalant à zéro les coefficients de δx, δy, δs dans ω'_2 et ω'_3, on obtient les six relations suivantes pour définir les éléments caractéristiques

$$(11)\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{df}{dy}dy + \dfrac{\partial f}{\partial s}ds = 0, & \dfrac{df}{dy}dx - ds = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial s}dx + dy = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{dx}dy - ds = 0, & \dfrac{d\varphi}{dx}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}ds = 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}dy + dx = 0. \end{array}\right.$$

Parmi ces équations, il y en a toujours au moins *deux* de distinctes ; la classe du système (10) est donc *cinq* ou *six*. Pour que le système soit de classe cinq, il faut et il suffit que le système (11) se réduise à deux équations seulement. En égalant les deux valeurs de $\dfrac{dy}{dx}$, on a une première condition

$$\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 1. \tag{12}$$

En égalant ensuite les expressions de ds tirées des autres relations, on obtient une nouvelle condition seulement

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{df}{dy} = 0. \tag{13}$$

Si les deux conditions (12) et (13) sont satisfaites, les équations (10) et (11) se réduisent à cinq équations; il y a une famille de *courbes caractéristiques*, déterminées par les équations différentielles

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} & dy = -\frac{\partial f}{\partial s}\,dx, \qquad dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = f\,dx + s\,dy, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad dq = s\,dx + \varphi\,dy, \qquad ds = \frac{df}{dy}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Toute intégrale à deux dimensions M_2 est engendrée, d'après la théorie générale, par une famille de caractéristiques issues des différents points d'une intégrale à une dimension du système. Il suffira, pour obtenir celles-ci, de trouver six fonctions x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0 d'un paramètre α vérifiant les équations

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} = p_0\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + q_0\frac{\partial y_0}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} = f_0\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + s_0\frac{\partial y_0}{\partial \alpha}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial q_0}{\partial \alpha} = s_0\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + \varphi_0\frac{\partial y_0}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right.$$

Le système (9) est dit alors *en involution*, et admet une infinité d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire. Pour résoudre le problème de Cauchy, c'est-à-dire pour déterminer les intégrales passant par une courbe donnée, on peut supposer x_0, y_0, z_0 données en fonction de α; les équations (15) déterminent alors p_0, q_0, s_0 par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. L'intégrale cherchée M_2 est le lieu des multiplicités caractéristiques issues des différents points $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0)$ ainsi obtenus [1]. On remarquera que le problème de Cauchy admet une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire.

[1] E. GOURSAT, *Journal de l'École Polytechnique*, 2e *Série*, 3e *cahier* (1897), *p.* 102.
E. CARTAN, *Annales de l'École Normale Supérieure t.* XXVII, 3e *Série*, (1910).

2° Soient a et b deux fonctions des cinq variables x, y, z, p, q et d'un paramètre u. En éliminant ce paramètre u entre les deux relations

$$(16)\qquad \begin{cases} r-us-a=0, \\ s-ut-b=0, \end{cases}$$

on obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0,$$

dont l'intégration revient à celle du système de Pfaff

$$(17)\qquad \begin{cases} \omega_1=p\,dx+q\,dy-dz=0, \\ \omega_2=u\,dq+a\,dx+b\,dy-dp=0. \end{cases}$$

En remplaçant dans ω'_1, ω'_2, dz, dp, δz, δp par leurs expressions tirées des équations (17) elles-mêmes, et en égalant à zéro les coefficients de δx, δy, δq, δu, on obtient les nouvelles relations

$$u\,dq+b\,dy=0,\qquad b\,dx-dq=0,\qquad u\,dx+dy=0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial u}dx+\frac{\partial b}{\partial u}dy+dq=0,$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial z}q+\frac{\partial a}{\partial p}b-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial z}p-a\frac{\partial b}{\partial q}\right)dy + \left(\frac{\partial a}{\partial q}+u\frac{\partial a}{\partial p}\right)dq+\frac{\partial a}{\partial u}du=0,$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial z}q+\frac{\partial a}{\partial p}b-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial z}p-a\frac{\partial b}{\partial q}\right)dx + \left(\frac{\partial b}{\partial q}+u\frac{\partial b}{\partial p}\right)dq-\frac{\partial b}{\partial u}du=0,$$

$$\left(u\frac{\partial a}{\partial p}+\frac{\partial a}{\partial q}\right)dx+\left(u\frac{\partial b}{\partial p}+\frac{\partial b}{\partial q}\right)dy-du=0.$$

Les équations des deux premières lignes donnent $dx=0$, $dy=0$, $dq=0$, à moins que les fonctions a et b ne vérifient la condition

$$\frac{\partial a}{\partial u}-u\frac{\partial b}{\partial u}+b=0.$$

Si cette condition est vérifiée, on peut poser

$$(18)\qquad \begin{cases} a=\dfrac{\partial\psi(x, y, z, p, q, u)}{\partial u}-2\psi, \\ b=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}. \end{cases}$$

ψ étant une fonction auxiliaire de x, y, z, p, q, u. En écrivant que les trois dernières équations donnent la même valeur pour $\frac{du}{dx}$, on obtient une seule condition nouvelle à laquelle doit satisfaire la fonction ψ. Si cette condition est vérifiée, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles considérée est ramenée à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires, celui qui définit les caractéristiques du système de Pfaff (17) [1].

3° On a déjà remarqué (n° **18**) que l'équation de Pfaff à $2n$ variables, dont l'intégration est équivalente à l'intégration de l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

est de classe $2n - 1$. Cette équation admet donc des caractéristiques à une dimension, qu'il suffit de déterminer pour que le problème soit résolu.

Considérons maintenant un système normal de r équations du premier ordre ($r > 1$),

$$(19) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1} = f_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z_r}{\partial x_1} = f_r,$$

les seconds membres f_i étant des fonctions des variables x_i, des r fonctions inconnues z_h, et de leurs dérivées du premier ordre par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_n$. A tout système d'intégrales des équations (19) correspond une intégrale à n dimensions M_n du système de Pfaff

$$(20) \qquad \omega_i = f_i dx_1 + p_{i2} dx_2 + \ldots + p_{in} dx_n - dz_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où l'on a remplacé dans f_i la dérivée $\frac{\partial z_h}{\partial x_k}$ par p_{hk}. Inversement, à toute multiplicité intégrale à n dimensions M_n de ce système (20) correspond un système d'intégrales des équations (19), pourvu que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient des variables indépendantes sur cette multiplicité. En effet, les relations (20) prouvent que le long de M_n, toutes les variables z_i, p_{ik} peuvent s'exprimer au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et l'on a

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_1} = f_i, \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_2} = p_{i2}, \ldots, \frac{\partial z_i}{\partial x_n} = p_{in}.$$

[1] Pour l'étude des équations de cette classe, et leurs rapports avec les systèmes en involution (9), voir E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre (tome I, p. 210, tome II, p. 164-171)*, et le Mémoire de E. Cartan cité à la page 277.

Il semble assez naturel de rechercher dans quels cas la méthode de Cauchy est applicable au système (19). Il faut pour cela que le système de Pfaff (20) admette des caractéristiques.

On a

$$\omega'_i = df_i\delta x_1 - \delta f_i dx_1 + dp_{i2}\delta x_2 - dx_2\delta p_{i2} + \ldots + dp_{in}\delta x_n - dx_n\delta p_{in},$$

si l'on remplace dans df_i et δf_i les différentielles dz_h, δz_h par leurs expressions tirées des équations (20) elles-mêmes, les éléments caractéristiques doivent satisfaire aux relations obtenues en égalant à zéro les coefficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, et de tous les δp_{hk}, après cette substitution. Le coefficient de δp_{hk}, si h est différent de i, est égal à

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{hk}}\,dx_1.$$

Si l'une des dérivées $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{hk}}$ $(i \neq h)$ n'est pas nulle, on a donc, pour un élément caractéristique, $dx_1 = 0$; les équations $\omega'_i = 0$ prouvent alors que l'on a, quel que soit i,

$$dx_1 = 0, \quad dx_2 = 0, \ldots, dx_n = 0, \quad dp_{i2} = 0, \ldots, dp_{in} = 0, \quad df_i = 0,$$

et par suite $dz_i = 0$, pour un élément caractéristique.

Il ne peut donc y avoir d'éléments caractéristiques pour le système de Pfaff (20) que si toutes les dérivées $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{hk}}$ sont nulles lorsque h et i sont deux nombres différents. Le système (19) doit donc être de la forme

$$(19') \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_1} = f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, z_1, z_2, \ldots, z_r;\, \frac{\partial z_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_i}{\partial x_n}\right),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Cette condition étant supposée remplie, le coefficient de δp_{i2}, par exemple dans ω'_i est

$$-\frac{\partial f_i}{\partial p_{i2}}\,dx_1 - dx_2;$$

on doit donc avoir, pour un élément caractéristique,

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i2}}\,dx_1 + dx_2 = 0.$$

On vient de démontrer que dx_1 ne peut être nul pour un élément caractéristique. Il faut donc que $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i2}}$ soit indépendant de i; il se réduit donc à une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z_1, \ldots, z_n$ indépendante de i.

Il en est évidemment de même de $\frac{\partial f_i}{\partial p_{i3}}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial p_{in}}$, et par suite la fonction f_i est de la forme

$$f_i = A_2 p_{i2} + \ldots + A_n p_{in} + B_i,$$

$A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_r$ ne dépendant que de $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_r$. En achevant les calculs, on vérifie que le système (20) admet des multiplicités caractéristiques à une dimension, mais ce résultat était évident *a priori*, car le système est alors un système de la forme signalée par Jacobi (*Leçons, Chap. II, p.* 99).

4° Considérons le système des quatre équations simultanées

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c', \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c'', & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c''', \end{cases}$$

à une seule fonction inconnue z; c, c', c'', c''' désignent des constantes. En prenant comme inconnues auxiliaires

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \quad p_3 = \frac{\partial z}{\partial x_3}, \quad u = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \quad v = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},$$

l'intégration du système (21) se ramène à la recherche des intégrales M_3 du système de Pfaff

$$(22)\quad \begin{cases} dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3, \\ dp_1 = u\,dx_1 + (v + c)dx_2 + (u + v + c')dx_3, \\ dp_2 = (v + c)dx_1 + v\,dx_2 + (2v + c'')dx_3, \\ dp_3 = (u + v + c')dx_1 + (2v + c'')dx_2 + (u + 3v + c''')dx_3, \end{cases}$$

pour lesquelles il n'existe aucune relation entre x_1, x_2, x_3. En égalant à zéro les covariants bilinéaires, on voit facilement que ce système admet une famille de caractéristiques à une dimension déterminées par les équations (22) elles-mêmes jointes aux relations

$$(23)\qquad du = 0, \qquad dv = 0, \qquad dx_1 = dx_2 = -dx_3.$$

La caractéristique issue du point $x_1^0, x_2^0, x_3^0, z^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0, u^0, v^0$ de l'espace à neuf dimensions est représentée par les formules

$$(24)\quad \begin{cases} u = u^0, \quad v = v^0, \quad x_1 = x_1^0 + t, \quad x_2 = x_2^0 + t, \quad x_3 = x_3^0 - t, \\ p_1 = p_1^0 + (c - c')t, \quad p_2 = p_2^0 + (c - c'')t, \quad p_3 = p_3^0 + (c' + c'' - c''')t \\ z = z^0 + (p_1^0 + p_2^0 - p_3^0)t + \left(c - c' - c'' + \dfrac{c'''}{2}\right)t^2, \end{cases}$$

t désignant une variable auxiliaire.

L'intégration est donc ramenée à la recherche des intégrales à deux dimensions du système (22). Cherchons par exemple les intégrales pour lesquelles x_3 est égale à une constante x_3^0. Le système (22) devient

$$\begin{aligned}
dz^0 &= p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0,\\
dp_1^0 &= u^0 dx_1^0 + (v^0 + c) dx_2^0,\\
dp_2^0 &= (v^0 + c) dx_1^0 + v^0 dx_2^0,\\
dp_3^0 &= (u^0 + v^0 + c') dx_1^0 + (2v^0 + c'') dx_2^0;
\end{aligned}$$

l'intégration du système formé par les trois premières équations se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 z^0}{\partial x_1^0 \partial x_2^0} = \frac{\partial^2 z^0}{(\partial x_2^0)^2} + c.$$

En prenant pour inconnue auxiliaire la dérivée $\dfrac{\partial z^0}{\partial x_2^0}$, on est conduit à une équation du premier ordre, et on en tire facilement l'intégrale générale de l'équation (25),

$$z^0 = c x_1^0 x_2^0 + f(x_1^0 + x_2^0) + \varphi(x_1^0),$$

f et φ étant des fonctions arbitraires. On a ensuite $p_1^0 = \dfrac{\partial z^0}{\partial x_1^0}$, $p_2^0 = \dfrac{\partial z^0}{\partial x_2^0}$,

$$u^0 = \frac{\partial^2 z^0}{(\partial x_1^0)^2} = f''(x_1^0 + x_2^0) + \varphi''(x_1^0),$$

$$v^0 = \frac{\partial^2 z^0}{(\partial x_2^0)^2} = f''(x_1^0 + x_2^0),$$

$$dp_3^0 = [2f''(x_1^0 + x_2^0) + \varphi''(x_1^0) + c'] dx_1^0 + [2f''(x_1^0 + x_2^0) + c''] dx_2^0,$$

$$p_3^0 = 2f'(x_1^0 + x_2^0) + \varphi'(x_1^0) + c' x_1^0 + c'' x_2^0 + \mathrm{C},$$

C étant une nouvelle constante. En remplaçant z^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0 par les expressions précédentes dans les équations (24), les formules qui donnent les valeurs de x_1, x_2, x_3, z, le long d'une caractéristique deviennent

$$x_1 = x_1^0 + t, \qquad x_2 = x_2^0 + t, \qquad x_3 = x_3^0 + t,$$

$$\begin{aligned}
z = c x_1^0 x_2^0 + f(x_1^0 + x_2^0) + \varphi(x_1^0) + [(c - c') x_1^0 + (c - c'') x_2^0 - \mathrm{C}] t \\
+ \left(c - c' - c'' + \frac{c'''}{2}\right) t^2.
\end{aligned}$$

Il suffira d'éliminer t, x_1^0, x_2^0 pour avoir l'intégrale générale du système (21).

Cet exemple est emprunté à M. Beudon qui a étudié une classe étendue d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à une seule fonction inconnue, auxquelles on peut étendre la méthode de Cauchy

[*Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres; (Annales de l'École Normale Supérieure, t. XIII, Supplément, 1896)*]. Les systèmes de M. Beudon peuvent être remplacés par des systèmes de Pfaff, admettant des éléments caractéristiques.

5° Soit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{26}$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre; pour plus de symétrie, au lieu de supposer l'équation résolue par rapport à l'une des dérivées du second ordre, nous supposerons qu'on a exprimé ces dérivées r, s, t au moyen de x, y, z, p, q et de deux variables auxiliaires u et v. L'intégration de l'équation (26) revient à la recherche des intégrales M_2 du système de Pfaff à sept variables x, y, z, p, q, u, v :

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{27}$$
$$\omega_2 = dp - r\,dx - s\,dy = 0, \qquad \omega_3 = dq - s\,dx - t\,dy = 0,$$

où l'on suppose r, s, t remplacées par leurs expressions au moyen de x, y, z, p, q, u, v. De plus, la multiplicité M_2 doit être telle qu'il n'existe aucune relation entre les variables x et y le long de cette multiplicité. *Le système (27) n'admet pas d'éléments caractéristiques.* En effet, supposons, pour simplifier, que r et s soient indépendantes, de façon que l'on puisse prendre $r = u$, $s = v$; on a alors

$$\omega'_2 = \delta r\,dx - dr\,\delta x + \delta s\,dy - ds\,\delta y ;$$

pour un élément caractéristique, on devrait donc avoir

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dr = 0, \quad ds = 0,$$

et par suite

$$dz = dp = dq = 0.$$

Mais on peut quelquefois remplacer le système de Pfaff (26) par un système de deux équations admettant des éléments caractéristiques. Supposons, en effet, que l'équation (26), où l'on regarde x, y, z, p, q comme des paramètres, et r, s, t comme les coordonnées d'un point de l'espace à trois dimensions, représente une surface réglée dont les génératrices sont parallèles à celles du cône $rt - s^2 = 0$. On peut alors prendre pour r, s, t des expressions de la forme suivante

$$r = f_1 + \varphi^2 v, \qquad s = f_2 + \varphi\psi v, \qquad t = f_3 + \psi^2 v,$$

$f_1, f_2, f_3, \varphi, \psi$ étant des fonctions de x, y, z, p, q, u. Les deux dernières équations du système (27) deviennent

$$\omega_2 = dp - (f_1 + \varphi^2 v)dx - (f_2 + \varphi\psi v)dy = 0,$$
$$\omega_3 = dq - (f_2 + \varphi\psi v)dx - (f_3 + \psi^2 v)dy = 0.$$

On en déduit immédiatement une combinaison où ne figure plus la variable v,

$$\omega_4 = \psi\omega_2 - \varphi\omega_3 = \psi dp - \varphi dq - (f_1\psi - f_2\varphi)dx - (f_2\psi - f_3\varphi)dy = 0,$$

et l'intégration de l'équation (26) peut aussi être remplacée par l'intégration du système de deux équations de Pfaff à six variables

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_4 = 0.$$

Or ce système est de la forme du système (14) considéré plus haut, et nous avons observé qu'il peut admettre des éléments caractéristiques (¹).

70. Éléments singuliers. — Soit $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ un élément linéaire intégral e_1 non caractéristique (pour abréger, nous représenterons un élément linéaire intégral par l'une des lettres e_1, ε_1,). Les éléments linéaires intégraux ε_1 en involution avec e_1 sont déterminés par le système des $2r$ équations linéaires en $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$,

$$(28) \qquad \begin{cases} \omega_1(\delta) = 0, \ldots, \omega_r(\delta) = 0, \\ \omega'_1 = 0, \ldots, \omega'_r = 0, \end{cases}$$

qui se réduisent à $2r - q$ équations linéairement distinctes (q pouvant être nul), si l'élément considéré e_1 n'est pas pris d'une façon

(¹) Il semble paradoxal au premier abord que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre puisse se ramener à l'intégration d'un système de Pfaff sans éléments caractéristiques, et aussi quelquefois à l'intégration d'un autre système de Pfaff admettant des éléments caractéristiques. Mais il faut remarquer qu'à une intégrale M_2 du premier système ne correspond pas toujours une intégrale M'_2 du second. Par exemple l'intégration de l'équation $rt - s^2 = 0$ peut se ramener à l'intégration du système de trois équations de Pfaff

$$(\Sigma) \quad dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - rdx - sdy = 0, \quad rdq - rsdx - s^2dy = 0,$$

et aussi à l'intégration du système de deux équations

$$(\Sigma') \qquad dz - pdx - \varphi dy = 0, \quad dp - udq = 0, \quad \text{où } u = -\frac{s}{r}.$$

Le système (Σ) admet l'intégrale M_2 représentée par les cinq équations

$$p = a, \quad q = b, \quad z = ax + by + c, \quad y = f(x), \quad r + sf'(x) = 0, \quad s + tf'(x) = 0,$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires, $f(x)$ une fonction arbitraire, x et t les deux variables indépendantes. A cette intégrale M_2 correspond une intégrale M'_1 de (Σ'). Il est à remarquer que tous les éléments de cette intégrale M_2 sont des *éléments singuliers* du système (Σ') (voir n° 70). Il est évident d'ailleurs qu'à cette intégrale M_2 ne correspond pas une intégrale de l'équation du second ordre $rt - s^2 = 0$, au sens restreint du mot.

particulière. Les éléments linéaires intégraux en involution avec e_1 forment donc en général, pour un élément de situation générale, une multiplicité à $n-2r+q$ dimensions. Mais pour certains éléments linéaires intégraux, il peut se faire que le nombre des équations (28) linéairement distinctes soit inférieur à $2r-q$, sans que les r équations $\omega'_i=0$ soient des conséquences des relations $\omega_i(\delta)=0$. Nous dirons que ces éléments linéaires intégraux sont des *éléments singuliers*.

Considérons par exemple le système de Pfaff

$$(29)\qquad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = dp - f\,dx - s\,dy = 0, \\ \omega_3 = dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

auquel conduit l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(30)\qquad r = f(x, y, z, p, q, s, t).$$

On a vu, au numéro précédent, que ce système n'admet pas d'éléments caractéristiques, mais il admet des éléments singuliers.

On vérifie immédiatement que la relation

$$\omega'_1 = dp\,\delta x - dx\,\delta p + dq\,\delta y - dy\,\delta q = 0$$

est vérifiée par deux éléments linéaires intégraux quelconques. On a ensuite

$$\omega'_2 = df\,\delta x - \delta f\,dx + ds\,\delta y - dy\,\delta s,$$

ou, en tenant compte des équations (29) elles-mêmes, qui donnent les expressions de dz, dp, dq, δz, δp, δq au moyen de dx et dy, ou de δx et δy,

$$\begin{aligned} \omega'_2 = {} & [(Y + qZ + Ps + Qt)dy + S\,ds + T\,dt]\,\delta x \\ & + [ds - (Y + qZ + Ps + Qt)dx]\,\delta y \\ & - (S\,dx + dy)\,\delta s - T\,dx\,\delta t; \end{aligned}$$

$$X = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, T = \frac{\partial f}{\partial t};$$

on a de même

$$\omega'_3 = ds\,\delta x - dx\,\delta s + dt\,\delta y - dy\,\delta t.$$

Les deux équations $\omega'_2 = 0$, $\omega'_3 = 0$ déterminent les éléments intégraux (δx, δy, δs, δt) qui sont en involution avec l'élément intégral (dx, dy, ds, dt). Si cet élément est quelconque, les deux équations $\omega'_2 = 0$, $\omega'_3 = 0$ sont distinctes, et l'on peut choisir arbitrairement les rapports de deux des différentielles δx, δy, δs, δt à l'une d'elles. Pour que l'élément (dx, dy; ds, dt) soit un élément singulier, il faut et il suffit que les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ ne soient pas distinctes, quand on y regarde δx, δy, δs, δt comme les inconnues. On doit donc avoir, pour un élément singulier,

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{(Y + qZ + Ps + Qt)dy + Sds + Tdt}{ds} = \dfrac{ds - (Y + qZ + Ps + Qt)dx}{dt} \\ = \dfrac{Sdx + dy}{dx} = \dfrac{Tdx}{dy}. \end{cases}$$

En égalant les deux derniers rapports, on obtient une équation du second degré en dx et dy

$$(32)\qquad dy^2 + Sdxdy - Tdx^2 = 0,$$

qui admet en général deux racines distinctes

$$dy = m_1 dx, \qquad dy = m_2 dx.$$

Si l'on prend par exemple $dy = m_1 dx$, on voit facilement que les équations (31) se réduisent à deux équations seulement

$$(33)\quad \begin{cases} dy = m_1 dx, \\ Tdt - m_1 ds + m_1(Y + qZ + Ps + Qt)dx = 0. \end{cases}$$

En adjoignant ces deux relations aux équations (29), on a un système de cinq équations de Pfaff à sept variables x, y, z, p, q, s, t, qui définissent une famille d'éléments singuliers du système (29). On obtient une seconde famille d'éléments singuliers en remplaçant m_1 par m_2.

Le système de Pfaff formé des cinq équations (29) et (33) admet une infinité d'intégrales à une dimension, dépendant d'une fonction arbitraire, car on peut prendre pour l'une des variables s ou t une fonction arbitraire de x, et l'on a un système d'équations différentielles ordinaires pour déterminer les cinq autres variables en fonction de x. Ces multiplicités sont les *caractéristiques de Monge* de l'équation (30) et du système (29). Les multiplicités caractéristiques dont il a été question jusqu'ici, et qui ne dépendent que d'un nombre fini de constantes arbitraires, sont les *caractéristiques de Cauchy*.

Considérons encore un système de deux équations de Pfaff à six variables

$$(34)\qquad \begin{cases} \omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_6 dx_6 = 0, \\ \omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_6 dx_6 = 0\,; \end{cases}$$

ces deux équations étant distinctes, on peut les résoudre par rapport à deux des différentielles qui y figurent, par rapport à dx_5 et dx_6, par exemple. Cela étant, si, dans les covariants bilinéaires ω'_1, ω'_2, on remplace dx_5, dx_6, δx_5, δx_6 par leurs expressions au moyen de dx_1, ..., dx_4, δx_1, ..., δx_4, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ prennent la forme

$$(35)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = \sum\limits_{i,\,k} A_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) = 0, \\ \omega'_2 = \sum\limits_{i,\,k} B_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) = 0, \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, 3, 4),$$

les coefficients A_{ik}, B_{ik} s'exprimant au moyen des fonctions A_i, B_k, et de leurs dérivées partielles du premier ordre.

Tout système de valeurs non toutes nulles (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) définit un élément linéaire intégral e_1 du système (34), issu d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ de l'espace à six dimensions. Ce point étant supposé déterminé, et de situation générale, les éléments linéaires intégraux qui en sont issus forment une multiplicité à trois dimensions. Si l'on considère dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à trois dimensions, on peut dire qu'à tout point m de l'espace à trois dimensions correspond un élément linéaire intégral e_1 du système (34), et réciproquement. Soient e_1, ε_1 deux éléments linéaires intégraux en involution du système, m et μ les points correspondants de l'espace ; nous dirons aussi, pour abréger, que ces deux points sont en involution. Les coordonnées (dx_i), (δx_i) de deux points en involution doivent satisfaire aux deux relations (35), qui sont en général distinctes. Le point m étant donné, le lieu des points μ en involution avec m est donc en général une droite D issue de ce point, et, d'après la forme bilinéaire des relations (35), on voit que deux points quelconques de cette droite D sont aussi en involution. Tout élément intégral e_1 est donc en général en involution avec ∞^1 éléments linéaires intégraux issus du même point.

Cette conclusion est en défaut pour certains éléments intégraux. En effet, les relations (35) expriment que la droite D qui joint deux points en involution m et μ appartient à une congruence linéaire. Supposons, ce qui est le cas général, que les deux directrices Δ_1, Δ_2 de la congruence ne sont pas dans un même plan. Il est évident géométriquement que, si le point m n'est pas situé sur l'une de ces directrices, le lieu des points μ en involution avec m est la droite D passant par M et qui rencontre Δ_1 et Δ_2. Mais si le point m est sur la droite Δ_1, par exemple, ce point est en involution avec tout point μ du plan passant par m et par Δ_2 ; l'élément intégral correspondant e_1 est donc en involution avec ∞^2 éléments linéaires intégraux ε_1. Il y a par conséquent *deux familles distinctes d'éléments intégraux singuliers*, représentés par les points de deux droites Δ_1, Δ_2, qui ne sont pas dans un même plan. La discussion géométrique prouve de plus qu'il n'y a pas d'élément caractéristique et le système (34) est de sixième classe.

Il peut aussi y avoir à la fois des *éléments caractéristiques* et des *éléments singuliers non caractéristiques*. Supposons en effet que la congruence définie par les deux relations (35) soit une congruence singulière, composée des droites situées dans un plan P, et des droites qui passent par un point déterminé O de ce plan, pour toutes les positions du point $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$. Le point O est en involution avec tout autre point de l'espace ; chaque point $(x_1, \ldots, x_6)$ est donc l'origine d'un élément caractéristique, et le système (34) est de cinquième classe. Mais il y a aussi des éléments singuliers non caractéristiques. En effet, tout point m du plan P est en involution avec un autre point quelconque μ du même plan, tandis qu'un point m hors du plan P n'est en involution qu'avec les points de la droite Om. Tous les points du plan P représentent donc des éléments singuliers qui sont en involution avec ∞^2 éléments intégraux, tandis qu'un point quelconque de l'espace (en dehors du plan P) représente un élément intégral qui n'est en involution qu'avec ∞^1 éléments intégraux.

Dans le cas général où les deux directrices de la congruence ne se coupent pas, chaque point de l'espace à six dimensions est l'origine de ∞^1 éléments singuliers de chaque famille, définis par quatre équations linéaires en $dx_1, \ldots, dx_6$. Il existe donc une infinité de multiplicités intégrales à une dimension, dépendant d'une fonction arbitraire, dont tous les éléments linéaires sont des éléments singuliers; ce sont les caractéristiques de Monge du système.

Pour déterminer par le calcul les éléments singuliers du système (34), considérons une équation quelconque de ce système $\Omega = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$, où λ et μ sont des fonctions prises arbitrairement des six variables : on a

$$\Omega' = (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' \equiv \lambda\omega'_1 + \mu\omega'_2, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2).$$

ou, en remplaçant ω'_1, ω'_2, par leurs expressions (35),

$$\Omega' = \sum_{i,k} (\lambda A_{ik} + \mu B_{ik})(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

La forme symbolique Ω', que l'on peut encore écrire sous forme abrégée (n° **22**)

$$\Omega' = \sum_{i,k} (\lambda A_{ik} + \mu B_{ik}) dx_i dx_k,$$

est en général de rang *quatre*, si λ et μ sont quelconques Pour qu'elle soit de rang *deux*, il faut et il suffit que le déterminant de Pfaff formé par les coefficients $\lambda A_{ik} + \mu B_{ik}$ soit nul. Or ce déterminant est le carré d'une forme homogène du second degré en λ, μ, qui s'annule en général pour deux valeurs différentes du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. On peut donc, en général, trouver deux formes distinctes $\Omega_1 = \lambda_1\omega_1 + \mu_1\omega_2$, $\Omega_2 = \lambda_2\omega_1 + \mu_2\omega_2$ telles que les deux formes symboliques Ω'_1, Ω'_2 soient de rang deux, ce qui conduit à des relations de la forme (n° **32**)

$$\left.\begin{aligned} \Omega'_1 &= (\lambda_1\omega_1 + \mu_1\omega_2)' \equiv \omega_3\omega_4, \\ \Omega'_2 &= (\lambda_2\omega_1 + \mu_2\omega_2)' \equiv \omega_5\omega_6, \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2).$$

ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 étant de nouvelles formes de Pfaff. Tous les éléments linéaires intégraux qui vérifient les quatre relations

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0$$

sont donc en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système (34) relativement à l'équation $\lambda_1\omega_1 + \mu_1\omega_2 = 0$; ce sont des éléments singuliers. La seconde famille d'éléments singuliers est définie de même par le système d'équations [1]

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_5 = 0, \quad \omega_6 = 0.$$

71. Recherche des éléments singuliers. — Les r équations d'un système de Pfaff S étant supposées résolues par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$, nous avons

$$(36) \qquad \omega'_i \equiv \sum_{h,k} A_{ihk}(dx_h\delta x_k - dx_k\delta x_h), \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r), \qquad (h, k = r+1, \ldots, n),$$

les coefficients A_{ihk} étant des fonctions des n variables x_i. Ordonnons les r équations $\omega'_i = 0$ par rapport à $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$; le coefficient de δx_k dans l'équation $\omega'_i = 0$ est

$$\sum_{h=r+1}^{n} A_{ihk}dx_h, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r ; k = r+1, \ldots, n).$$

Soit s le rang du tableau T, à $n - r$ colonnes et à r lignes formé par ces coefficients, c'est-à-dire l'ordre des déterminants de l'ordre le plus élevé de ce tableau, qui ne sont pas tous nuls identiquement, quels que soient $dx_{r+1}, dx_{r+2}, \ldots, dx_n$. Ce nombre s est le *caractère* du système S [2]. Les r équations $\omega'_1 = 0, \ldots, \omega'_r = 0$ se réduisent à s équations linéairement distinctes pour déterminer $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$ lorsque $dx_{r+1}, \ldots, dx_n$ ont des valeurs arbitraires ; il est clair, d'après cela, que ce nombre s est un *invariant* du système.

Supposons, pour fixer les idées, que les équations $\omega'_1 = 0, \ldots,$

[1] Pour une étude plus complète du système de deux équations à six variables, et les rapports de ce système avec le *problème de Bäcklund*, je renverrai le lecteur à un mémoire récent que j'ai publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. X, (1918), pages 1-109.*

[2] E. von Weber, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen (Leipz. Berichte, pp. 207-229, 1898).*

$\omega'_s = 0$ soient linéairement distinctes ; un élément linéaire intégral $(\delta x_1 \ldots, \delta x_n)$ en involution avec l'élément $(dx_1, \ldots, dx_n)$ doit vérifier les $r+s$ conditions

$$\omega_1(\delta) = 0, \ldots, \omega_r(\delta) = 0, \qquad \omega'_1 = 0, \ldots, \omega'_s = 0,$$

et celles-là seulement. Si par exemple on a $n = 2r - q$, les r équations $\omega'_1 = 0, \ldots, \omega'_r = 0$ ne renferment que $r - q$ inconnues $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_{2r-q}$, et elles admettent toujours une solution évidente $\delta x_{r+1} = dx_{r+1}, \ldots, \delta x_{2r-q} = dx_{2r-q}$; elles comprennent donc au plus $r - q - 1$ équations linéairement distinctes, quels que soient $dx_{r+1}, \ldots, dx_{2r-q}$, et par suite s est au plus égal à $r - q - 1$.

Pour qu'un élément $(dx_{r+1}, \ldots, dx_n)$ soit un élément singulier, il faut que les r équations $\omega'_i = 0$ se réduisent à moins de s équations distinctes et par suite que tous les déterminants d'ordre s du tableau précédent soient nuls. On obtient ainsi un certain nombre d'équations algébriques en $dx_{r+1}, \ldots, dx_n$, qui déterminent les éléments singuliers. Il est évident que ces équations forment un système covariant du système S.

Soit Ω la forme auxiliaire $\Omega = \lambda_1\omega_1 + \ldots + \lambda_r\omega_r$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des fonctions arbitraires des variables x_i. On a

$$\Omega' = (\lambda_1\omega_1 + \ldots + \lambda_r\omega_r)' \equiv \lambda_1\omega'_1 + \ldots + \lambda_r\omega'_r \qquad (\text{mod. } \omega_1, \ldots, \omega_r).$$

La forme symbolique $\lambda_1\omega'_1 + \ldots + \lambda_r\omega'_r$ où ne figurent que les différentielles $dx_{r+1}, \ldots, dx_n, \delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$, est de rang 2ρ, lorsque les coefficients λ_i sont pris arbitrairement (n° **32**). Ce nombre pair 2ρ est, d'après F. Engel, le *rang* du système S [1] ; il est clair que c'est aussi un invariant du système S. Soit $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ le déterminant symétrique gauche attaché à cette forme symbolique Ω' ; ce déterminant est de degré $n - r$ par rapport aux λ_i, et, d'après la définition même du nombre ρ, il est de rang 2ρ, c'est-à-dire que les mineurs de l'ordre le plus élevé qui ne sont pas identiquement nuls, quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, sont d'ordre 2ρ. Supposons en particulier $s = r$; nous avons deux cas à distinguer :

[1] F. Engel, *Leipzig Berichte*. t. XLII (1890).

1° Supposons $n-r=2\rho$, ce qui exige que $n-r$ soit pair. Le déterminant Δ est le carré parfait d'une forme homogène de degré ρ en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Supposons que les valeurs non toutes nulles $\lambda_1=\mu_1, \ldots, \lambda_r=\mu_r$ annulent ce déterminant. La forme correspondante

$$\mu_1\omega'_1+\mu_2\omega'_2+\ldots+\mu_r\omega'_r$$

est de rang $2\rho-2\rho'=2q$ inférieur à 2ρ, et l'on peut la mettre sous la forme

$$\mu_1\omega'_1+\ldots+\mu_r\omega'_r=\varpi_1\varpi_2+\ldots+\varpi_{2q-1}\varpi_{2q} \qquad (\text{mod. } \omega_1, \ldots, \omega_r),$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2q}$ étant $2q$ formes de Pfaff distinctes. Tous les éléments linéaires intégraux qui satisfont aux $2q$ relations

$$(37) \qquad \varpi_1=0, \varpi_2=0, \ldots, \varpi_{2q}=0$$

sont alors en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux de S relativement à l'équation

$$\mu_1\omega_1+\ldots+\mu_r\omega_r=0.$$

Les r équations $\omega'_1=0, \ldots, \omega'_r=0$ se réduisent donc à $s-1$ équations quand on y remplace $dx_{r+1}, \ldots, dx_n$ par des valeurs vérifiant les $2q$ relations (37). Par suite, les $r+2q$ équations

$$\omega_1=0, \ldots, \omega_r=0, \qquad \varpi_1=0, \ldots, \varpi_{2q}=0$$

définissent une famille d'éléments singuliers. Le nombre total de ces équations est au plus égal à $r+2\rho-2=n-2$. A chaque système de solutions non toutes nulles de l'équation $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)=0$ correspond ainsi une famille d'éléments intégraux singuliers du système de Pfaff.

2° Supposons que $2\rho<n-r$, ce qui a toujours lieu si $n-r$ est impair. Le déterminant $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ est identiquement nul et la forme $\lambda_1\omega'_1+\ldots+\lambda_r\omega'_r$ est toujours de rang inférieur à $n-r$; quels que soient les coefficients λ_i, on a

$$\lambda_1\omega'_1+\ldots+\lambda_r\omega'_r\equiv\varpi_1\varpi_2+\ldots+\varpi_{2q-1}\varpi_{2q}, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \ldots, \omega_r)$$

où $2q\leqslant 2\rho<n-r$, et les $n+2q$ équations

$$\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_r=0, \qquad \varpi_1=0, \ldots, \varpi_{2q}=0$$

définissent une famille d'éléments singuliers.

Il y aurait encore lieu de distinguer les éléments singuliers d'après le nombre des dimensions de la multiplicité formée par les éléments intégraux en involution avec un de ces éléments singuliers.

Reprenons, par exemple, un système de deux équations à six variables (n° **70**). Si les coefficients de ce système sont quelconques, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ sont distinctes, et le système est de caractère *deux*.

La forme symbolique $\lambda_1\omega'_1 + \lambda_2\omega'_2$ est de rang quatre ; le nombre ρ est égal à *deux*, et nous avons vu qu'il y a bien en général deux familles d'éléments singuliers. Mais il peut se faire que les deux équations

$$\omega'_1 \equiv 0, \quad \omega'_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

se réduisent à une seule. Le système est alors de caractère *un*. Si l'on reprend l'interprétation géométrique du n° **70**, on voit que la ligne droite joignant les deux points m, μ, qui représentent deux éléments linéaires intégraux en involution appartient à un complexe linéaire. Si ce complexe linéaire n'est pas un complexe singulier, il n'y a ni *éléments caractéristiques*, ni *éléments singuliers* pour le système.

Nous verrons un peu plus loin (n° **73**) que ce système admet alors une combinaison intégrable, ce qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement [1]. Si le complexe précédent se compose des droites qui rencontrent une droite fixe Δ, tous les points de cette droite représentent des éléments caractéristiques ; il y a donc ∞^2 éléments caractéristiques issus de chaque point de l'espace à six dimensions, et le système est de quatrième classe.

[1] *Annales de Toulouse* (1918), p. 7.

CHAPITRE VII

SYSTÈMES DÉRIVÉS. PROBLÈME DE MONGE

72. Systèmes dérivés. — Soit S un système de Pfaff de r équations $\omega_i = 0$. Si l'on adjoint aux r formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, des formes auxiliaires $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$, où $\rho = n - r$, formant avec les premières un système de n formes linéaires distinctes, on a

$$\omega'_i \equiv \sum_{h,k} \mathrm{A}_{ihk} \varpi_h \varpi_k = \Omega_i, \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$$

$$i = 1, 2, \ldots, r.$$

Les r formes symboliques $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$, qui s'expriment au moyen des ρ formes ϖ_i seulement, ne sont pas toujours linéairement distinctes. Si, par exemple, on a une identité de la forme

$$(1) \qquad l_1\Omega_1 + l_2\Omega_2 + \ldots + l_r\Omega_r = 0,$$

on aura aussi

$$(l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \ldots + l_r\omega_r)' \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \ldots, \omega_r),$$

de sorte que deux éléments linéaires intégraux quelconques du système S sont toujours en involution relativement à l'équation

$$l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \ldots + l_r\omega_r = 0.$$

S'il y a r' relations distinctes et r' seulement de la forme (1) entre $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$, *on peut trouver r' équations distinctes du système S, telles que deux éléments linéaires intégraux quelconques de S soient en involution relativement à ces r' équations.* Le système S' formé par ces r' équations est appelé le *système dérivé* de S ; il est formé, comme on voit, par l'ensemble des équations de S telles que deux éléments linéaires intégraux quelconques de S soient en involution relativement à chacune d'elles. Si l'on a écrit les équations de S de façon que les r' équations du système dérivé soient $\omega'_1 = 0, \ldots, \omega'_{r'} = 0$, on aura :

$$\omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv \ldots \equiv \omega'_{r'} \equiv 0 \qquad (\bmod.\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

Il est clair que ce système S′ est le même pour tous les systèmes équivalents à S, et que c'est un covariant de S relativement à tout changement de variables. Si les r formes Ω_i sont linéairement distinctes, il n'y a pas de système dérivé ; nous dirons que ce système S′ est nul.

Lorsque le système S est complètement intégrable, le système S′ se confond avec S. Réciproquement, si S′ se confond avec S, tout élément intégral est un élément caractéristique, et le système est complètement intégrable.

Soit S un système, non complètement intégrable, de r équations à $r+2$ variables ; les covariants bilinéaires s'expriment uniquement au moyen du binôme $dx_{r+1}\delta x_{r+2} - dx_{r+2}\delta x_{r+1}$, et par suite le système dérivé se compose de $r-1$ équations. Il en est évidemment de même de tout système de r équations et de classe $r+2$, puisqu'on peut le ramener à un système où ne figurent que $r+2$ variables. La même propriété appartient à tout système de r équations, à un nombre quelconque de variables, admettant $r-1$ combinaisons intégrables distinctes, sans être complètement intégrable. Il est clair, en effet, que si l'on prend pour $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}$ ces $r-1$ combinaisons intégrables, on a $\omega'_1 \equiv 0, \ldots, \omega'_{r-1} \equiv 0$ (mod. $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$), et le seul covariant bilinéaire qui ne soit pas nul est ω'_r. Ces deux cas sont les seuls où le système dérivé contient une équation de moins que le système primitif (*Voir* n° **73**).

Pour un système S de r équations à $r+3$ variables, on verra de même que le système dérivé se compose en général de $r-3$ équations.

En opérant de la même façon sur le nouveau système S′, on obtient le système dérivé de S′, qu'on représente par S″, et qu'on appelle le second dérivé de S ; S″ a lui-même un système dérivé S‴, qui est le troisième dérivé de S, et ainsi de suite. En continuant ainsi, on finira par arriver à un système $S^{(p)}$ dont le système dérivé $S^{(p+1)}$ est nul, ou bien à un système $S^{(p)}$ qui est à lui-même son propre dérivé, et à partir de $S^{(p)}$ tous les systèmes suivants $S^{(p+1)}$, $S^{(p+2)}$, ..., sont identiques à $S^{(p)}$. Il est facile de trouver les systèmes S pour lesquels le fait se produira Si le système $S^{(p)}$ est à lui-même son propre dérivé, ce système est complètement intégrable ; s'il se compose de q équations, le système S admet donc q combinaisons intégrables distinctes. Inversement, si le système S admet q combinaisons intégrables distinctes, et q seulement, on peut supposer que les q premières équations de ce système sont de la forme

$$\omega_1 = df_1 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_q = df_q = 0\,; \tag{2}$$

il est clair que ces q équations font partie de tous les systèmes dérivés successifs, et on finira par arriver à un système dérivé équivalent au système (2). Ceci donne un moyen, au moins théorique, de déduire du système S le système complètement intégrable d'ordre maximum contenu dans S.

Il est clair que tous les systèmes dérivés successifs sont aussi des covariants de S, relativement à tout changement de variables.

Exemple. — Considérons le système de trois équations de Pfaff à sept variables x, y, z, p, q, r, s.

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = dp - r\,dx - s\,dy = 0, \qquad \omega_3 = dq - s\,dx - f\,dy = 0, \end{cases}$$

auquel conduit l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$t = f(x, y, z, p, q, r, s). \tag{3}$$

On a pour ce système

$$\omega'_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

et le système dérivé se réduit à la seule équation $\omega'_1 = 0$. En effet ω'_2 contient le terme $dr\delta x$, et ω'_3 le terme $ds\delta x$, qui ne peuvent disparaître dans aucune combinaison $\lambda\omega'_2 + \mu\omega'_3$, en tenant compte du système S lui-même. On ne peut donc avoir

$$\lambda\omega'_2 + \mu\omega'_3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

sans avoir à la fois $\lambda = \mu = 0$.

Le système de Pfaff S a donc un système dérivé, composé d'une seule équation de classe cinq.

Inversement tout système de trois équations de Pfaff à sept variables et de classe sept, possédant cette propriété, peut être associé à une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Soient en effet

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0$$

un système de trois équations de Pfaff à sept variables, tel que l'on ait

$$\omega'_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

l'équation $\omega_1 = 0$ étant de classe cinq. Supposons que l'on ait choisi les variables de façon que cette équation ait la forme canonique

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0;$$

les deux autres équations $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ dépendent en outre de deux autres variables u et v. Pour que l'on ait

$$\omega'_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

on voit aisément que le système des deux dernières équations $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ doit pouvoir être résolu par rapport à l'un des couples de différentielles (dp, dq), (dp, dy), (dq, dx), (dx, dy). Comme on peut, à l'aide d'une transformation de Legendre ou d'Ampère, permuter les variables x et p, y et q, on peut supposer les deux dernières équations du système mises sous la forme

$$\begin{aligned} \omega_2 &= dp - (a\,dx + b\,dy + c\,du + g\,dv) = 0, \\ \omega_3 &= dq - (a_1 dx + b_1 dy + c_1 du + g_1 dv) = 0. \end{aligned}$$

Pour que $\omega'_1 = 0$ soit une équation dérivée du système, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_1 = b, \qquad c = 0, \qquad g = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad g_1 = 0,$$

et le système est de la forme

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 &= dp - a\,dx - b\,dy = 0, \\ \omega_3 &= dq - b\,dx - b_1 dy = 0, \end{aligned}$$

a, b, b_1 étant des fonctions de x, y, z, p, q et des deux dernières variables u et v. Ces trois fonctions sont donc liées par une relation $F(x, y, z, p, q, a, b, b_1) = 0$; et le système de Pfaff précédent est associé à l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Reprenons l'équation (3) et le système correspondant S. Soit $z(x, y)$ une intégrale de cette équation ; nous poserons pour abréger

$$p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}.$$

L'équation (3) et celles qu'on en déduit par des différentiations répétées permettent d'exprimer toutes les dérivées p_{ik} au moyen des dérivées p_{i0}, p_{i1}. En particulier les quatre dérivées partielles du troisième ordre s'expriment au moyen de $x, y, z, p, q, s, t, p_{30}, p_{21}$.

Si l'on adjoint au système S le système des deux équations qui donnent dr, ds

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} dr = p_{30}dx + p_{21}dy, \\ ds = p_{21}dx + p_{12}dy, \end{cases}$$

on a un système de cinq équations de Pfaff à 9 variables, que l'on appelle le premier *système prolongé* de S. Si l'on y joint ensuite les deux équations qui donnent dp_{30}, dp_{21}, on a un nouveau système prolongé de sept équations à onze variables et ainsi de suite. Le système $S + \Sigma$ a pour premier dérivé le système S lui-même, et pour second dérivé l'équation $\omega_1 = 0$. De même, le second système prolongé a pour premier système dérivé le système $S + \Sigma$, et ainsi de suite.

73. Systèmes de caractère un. — Soit S un système de Pfaff de r équations dont le système dérivé S' se compose de $r - 1$ équations. On peut supposer que ce système S' se compose des $r - 1$ équations $\omega_2 = 0, \ldots, \omega_r = 0$, de sorte que l'on a

$$\omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \omega'_r \equiv 0, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

Le système S est évidemment de caractère *un*, car la seule condition que doivent vérifier deux éléments linéaires intégraux pour être en involution est $\omega'_1 = 0$.

Inversement, *le système dérivé d'un système de Pfaff de caractère* **un** *contient une équation de moins que le système lui-même.*

Supposons que les équations du système S puissent être résolues par rapport à $dx_{\rho+1}, \ldots, dx_n$ (où $\rho = n - r$) ; on peut écrire alors

$$\omega'_i = \sum_{h,k} A_{ihk}(dx_h \delta x_k - dx_k \delta x_h) \qquad (\text{mod. } \omega_1, \ldots, \omega_r) \ldots,$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, \rho), \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

ce qui revient à prendre $dx_1, \ldots, dx_\rho$ pour les formes auxiliaires $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$ (n° **72**). Les r équations $\omega'_i = 0$, où l'on considère $\delta x_1, \ldots, \delta x_\rho$ comme les inconnues, doivent se réduire à une seule, quels que soient $dx_1, \ldots, dx_\rho$. Il faut pour cela que tous les déterminants du second degré du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \sum A_{11k}dx_k & \sum A_{12k}dx_k & \ldots & \sum A_{1\rho k}dx_k \\ \sum A_{21k}dx_k & \sum A_{22k}dx_k & \ldots & \sum A_{2\rho k}dx_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum A_{r1k}dx_k & \sum A_{r2k}dx_k & \ldots & \sum A_{r\rho k}dx_k \end{matrix} \right\|$$

soient nuls. Supposons par exemple que tous les coefficients A_{1hk} ne soient pas nuls. Tous les mineurs du second degré formés avec les éléments des deux premières lignes doivent être nuls, et on a

$$\frac{\sum A_{21k}dx_k}{\sum A_{11k}dx_k} = \frac{\sum A_{22k}dx_k}{\sum A_{12k}dx_k} = \ldots = \frac{\sum A_{2\rho k}dx_k}{\sum A_{1\rho k}dx_k}.$$

Il faut pour cela que la valeur commune de ces rapports se réduise à une fonction l_2 des seules variables x_i, à moins que l'on n'ait

$$\sum_k A_{1ik}dx_k = m_i \sum_k A_{11k}dx_k,$$

$$(i = 2, 3, \ldots, \rho),$$

$$\sum_k A_{2ik}dx_k = m_i \sum_k A_{21k}dx_k,$$

les coefficients m_i ne dépendant que des variables. Cette dernière hypothèse est à rejeter. En effet, toutes les formes de la première ligne du tableau devraient être identiques à un facteur près. Or la première forme ne renferme pas dx_1, la seconde ne renferme pas dx_2, ..., la dernière ne renferme pas dx_ρ. Toutes ces formes seraient donc nulles, contrairement à l'hypothèse. Il s'ensuit que toutes les formes de la seconde ligne du tableau ne diffèrent des formes correspondantes de la première ligne que par le facteur l_2, et l'on a

$$\omega'_2 \equiv l_2\omega'_1 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

On démontrerait de même que l'on a

$$\omega'_i = l_i\omega'_1 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r), \qquad (i = 2, 3, \ldots, r)$$

et par suite

$$(\omega_i - l_i\omega_1)' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

Le système S admet donc un système dérivé formé des $r-1$ équations

$$\omega_i - l_i\omega_1 = 0, \qquad (i = 2, 3, \ldots, r).$$

On a déjà fait observer plus haut (n° **72**) que tout système de Pfaff de r équations qui admet $r-1$ combinaisons intégrables distinctes, et tout système de Pfaff de r équations et de classe $r+2$, sont de caractère *un*. M. von Weber [1] a démontré que *ce sont les seuls systèmes de caractère un.*

Supposons encore le système mis sous une forme telle que l'on ait

$$\omega'_2 \equiv 0, \ldots, \omega'_r \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

On a par exemple

$$\omega'_2 = \pi_1\omega_1 + \pi_2\omega_2 + \ldots + \pi_r\omega_r,$$

π_1 étant une forme de Pfaff qui ne peut s'exprimer linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, si elle n'est pas nulle identiquement. En prenant les formes dérivées des deux membres, il vient

$$\pi_1\omega'_1 - \omega_1\pi'_1 + \pi_2\omega'_2 - \omega_2\pi'_2 + \ldots = 0,$$

et en remplaçant $\omega'_2, \omega'_3, \ldots, \omega'_r$ par leurs expressions au moyen de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, on voit que l'on a

$$\pi_1\omega'_1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

De cette relation on déduit que le produit symbolique $\omega'_1\pi_1\omega_1 \ldots \omega_r$ est nul, ce qui exige que l'on ait

$$\omega'_1 = \chi_1\pi_1 + \varpi_1\omega_1 + \ldots + \varpi_r\omega_r,$$

[1] E. von Weber, *Zur invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Leipzig Berichte*, pp. 207-229, 1898).

puisque les formes $\varpi_1, \omega_1, \ldots, \omega_r$ sont linéairement distinctes (n° **24**).

Tous les éléments linéaires intégraux qui satisfont en outre aux deux relations $\varpi_1 = 0$, $\chi_1 = 0$ sont donc en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux, et le système S est de classe $r+2$.

Pour que la conclusion soit en défaut, il faut que la forme ϖ_1 soit nulle. Le système S peut alors être de classe quelconque, mais le raisonnement prouve que si S est de classe supérieure à $r+2$, on a $\varpi_1 = 0$, c'est-à-dire $\omega'_2 \equiv 0$ (mod. $\omega_2, \ldots, \omega_r$). On démontrerait de même que l'on a, dans ce cas,

$$\omega'_3 \equiv 0, \ \ldots, \ \omega'_r \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

Le système dérivé formé des $r-1$ équations

$$\omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \ \ldots, \ \omega_r = 0$$

est donc complètement intégrable.

Remarque. — Si le système dérivé S' d'un système S de r équations comprend r' équations distinctes, le caractère de S est au plus égal à $r - r'$, car les $r - r'$ équations qui expriment que deux éléments linéaires intégraux sont en involution ne sont pas nécessairement distinctes. Il revient évidemment au même de dire que, pour un système de r équations et de caractère s, *le nombre des équations du système dérivé est au plus égal à $r - s$*. Mais il peut lui être *inférieur*. Prenons par exemple un système S de r équations et de classe $r+3$; pour la question qui nous occupe, nous pouvons supposer que les équations ne renferment que $r+3$ variables, et qu'on les a résolues par rapport à $dx_4, \ldots, dx_{r+3}$. On a alors

$$\omega'_i = A_i(dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1) + B_i(dx_2\delta x_3 - dx_3\delta x_2) + C_i(dx_3\delta x_1 - dx_1\delta x_3),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

et le système dérivé se compose en général de $r-3$ équations. Cependant le caractère du système est égal à deux, car les r équations $\omega'_i = 0$ admettent toujours la solution évidente $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, $\delta x_3 = dx_3$. Ce cas est le seul où le système dérivé d'un système de r équations et de caractère deux contient moins de $r-2$ équations ([1]).

D'une façon générale, si le système S contient r équations et le système dérivé r' équations, le caractère du système est inférieur à $r-r'$ lorsque la classe est égale ou inférieure à $2r-r'$.

74. Transformations de contact prolongées. — Soient

$$(4)\qquad X=F_0(x, y, z, p, q),\quad Y=F_1,\quad P=F_2,\quad Q=F_3,\quad Z=F_4$$

des formules définissant une transformation de contact, pour lesquelles on a identiquement

$$(5)\qquad dZ-PdX-QdY=\rho(dz-pdx-qdy),$$

ρ étant une fonction de x, y, z, p, q. Les conditions du n° **51**

$$[X, Y]=0,\quad [X, Q]=0,\quad [Y, P]=0,\quad [P, Q]=0,$$
$$[P, X]=\rho,\quad [Q, Y]=\rho$$

peuvent s'écrire encore

$$(6)\qquad \begin{cases} (ad)_{01}+(bc)_{01}=0,\\ (ad)_{02}+(bc)_{02}=0,\\ (ad)_{13}+(bc)_{13}=0,\\ (ab)_{23}+(bc)_{23}=0,\\ (ad)_{03}+(bc)_{03}=(ad)_{12}+(bc)_{12}=\rho, \end{cases}$$

ou sous la forme équivalente (*Leçons*, p. 369)

$$(7)\qquad \begin{cases} (ac)_{03}+(ac)_{12}=0,\\ (bd)_{03}+(bd)_{12}=0,\\ (cd)_{03}+(cd)_{12}=0,\\ (ab)_{03}+(ab)_{12}=0,\\ (ad)_{03}+(ad)_{12}=(bc)_{03}+(bc)_{12}=\rho, \end{cases}$$

([1]) Voir le Mémoire cité de M. E. CARTAN, *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux* (*Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXIX, 1901, pp. 233-302*). Il étudie en particulier certains systèmes qu'il appelle *singuliers*, formés par des systèmes de r équations qui comprennent $r-1$ équations formant un système partiel de caractère un, et des systèmes qui admettent $r-2$ combinaisons intégrables distinctes.

en posant

$$\begin{array}{llll}
a_0=\dfrac{dX}{dx}, & b_0=\dfrac{dX}{dy}, & d_0=\dfrac{\partial X}{\partial p}, & c_0=\dfrac{\partial X}{\partial q},\\
a_1=\dfrac{dY}{dx}, & b_1=\dfrac{dY}{dy}, & d_1=\dfrac{\partial Y}{\partial p}, & c_1=\dfrac{\partial Y}{\partial q},\\
a_2=\dfrac{dQ}{dx}, & b_2=\dfrac{dQ}{dy}, & d_2=\dfrac{\partial Q}{\partial p}, & c_2=\dfrac{\partial Q}{\partial q},\\
a_3=\dfrac{dP}{dx}, & b_3=\dfrac{dP}{dy}, & d_3=\dfrac{\partial P}{\partial p}, & c_3=\dfrac{\partial Q}{\partial q},
\end{array}$$

$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(ad)_{ij}=a_id_j-a_jd_i, \qquad (bc)_{ij}=b_ic_j-b_jc_i,$$

$$(i, j=0, 1, 2, 3).$$

Lorsque l'élément (x, y, z, p, q) décrit une multiplicité M_2 ayant pour support ponctuel une surface σ, l'élément (X, Y, Z, P, Q) décrit aussi une multiplicité $\mathfrak{M}_2$, et nous supposerons que cette multiplicité a pour support ponctuel une autre surface Σ. Soient $z=f(x, y)$ l'équation de la surface σ, et $Z=F(X, Y)$ l'équation de la surface Σ. Les lettres r, s, t, R, S, T ayant la signification habituelle, proposons-nous de calculer R, S, T au moyen de x, y, z, p, q, r, s, t. On les déduit des deux relations

$$dP=R\,dX+S\,dY, \qquad dQ=S\,dX+T\,dY,$$

qui deviennent, en développant les différentielles dX, dY, dP, dQ, remplaçant dz, dp, dq par $pdx+qdy$, $rdx+sdy$, $sdx+tdy$ respectivement, et employant la notation convenue pour les dérivées partielles des fonctions X, Y, P, Q,

$$\begin{aligned}
&a_3dx+b_3dy+d_3(rdx+sdy)+c_3(sdx+tdx)\\
&\qquad =R[a_0dx+b_0dy+d_0(rdx+sdy)+c_0(sdx+tdy)]\\
&\qquad\qquad +S[a_1dx+b_1dy+d_1(rdx+sdy)+c_1(sdx+tdy)],\\
&a_2dx+b_2dy+d_2(rdx+sdy)+c_2(sdx+tdy)\\
&\qquad =S[a_0dx+b_0dy+d_0(rdx+sdy)+c_0(sdx+tdy)]\\
&\qquad\qquad +T[a_1dx+b_1dy+d_1(rdx+sdy)+c_1(sdx+tdy)].
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de dx et de dy dans la première équation, on a un système de deux équations linéaires en R et S, d'où l'on tire

$$(8)\quad R = \frac{(ab)_{31} + (db)_{31}r + (ac)_{31}t + [(ad)_{31} + (cb)_{31}]s + (dc)_{31}(rt - s^2)}{(ab)_{01} + (db)_{01}r + (ac)_{01}t + [(ad)_{01} + (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)},$$

$$(9)\quad S = \frac{(ab)_{03} + (db)_{03}r + (ac)_{03}t + [(ad)_{03} + (cb)_{03}]s + (dc)_{03}(rt - s^2)}{(ab)_{01} + (db)_{01}r + (ac)_{01}t + [(ad)_{01} + (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)}.$$

De la deuxième équation on tire de même

$$(9^{bis})\quad S = \frac{(ab)_{21} + (ab)_{21}r + (ac)_{21}t + [(ad)_{21} + (cb)_{21}]s + (dc)_{21}(rt - s^2)}{(ab)_{01} + (db)_{01}r + (ac)_{01}t + [(ad)_{01} + (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)},$$

$$(9^{ter})\quad T = \frac{(ab)_{02} + (db)_{02}r + (ac)_{02}t + [(ad)_{02} + (cb)_{02}]s + (dc)_{02}(rt - s^2)}{(ab)_{01} + (db)_{01}r + (ac)_{01}t + [(ad)_{01} + (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)}.$$

Les valeurs de S fournies par les relations (9) et (9 *bis*) sont identiques en tenant compte des conditions (6) et (7).

Les formules (4), (8), (9), (9^{ter}) définissent une *transformation de contact prolongée,* la transformation de contact proprement dite étant définie par les formules (4). En passant aux dérivées du troisième ordre, puis du quatrième ordre, etc., on aurait une suite indéfinie de transformations prolongées de la première, pourvu que la suite des dérivées des fonctions X, Y, P, Q, Z soit illimitée.

Bornons-nous à la première transformation de contact prolongée, définie par les formules (4), (8), (9), (9^{ter}). D'après la façon même dont les expressions de R, S, T ont été déduites des fonctions X, Y, Z, P, Q, cette transformation remplace le système de Pfaff formé des trois équations

$$(10)\quad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ \omega_3 = dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

par un système de Pfaff de même forme

$$(11)\quad \begin{cases} \Omega_1 = dZ - P\,dX - Q\,dY = 0, \\ \Omega_2 = dP - R\,dX - S\,dY = 0, \\ \Omega_3 = dQ - S\,dX - T\,dY = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, *le système de Pfaff (11) est un invariant, relativement à toute transformation de contact prolongée.*

Inversement, *toute transformation*

(12) $X = F_1(x, y, z, p, q, r, s, t), \ldots, T = F_8(x, y, z, p, q, r, s, t)$

pour laquelle le système de Pfaff (10) est invariant, est une transformation de contact prolongée.

En effet, si la transformation (12) remplace le système de Pfaff (10) par le système (11), on peut dire que les équations (10) et (11) représentent le même système de Pfaff écrit avec des variables différentes. Le système dérivé de (11) doit être remplacé par le système dérivé de (10) quand on effectue sur ce système (11) le changement de variables défini par les formules (12). Or le système dérivé du système (11) se réduit à la seule équation $\Omega_1 = 0$; on a en effet

$$\Omega'_2 = dX\delta R - dR\delta X + dY\delta S - dS\delta Y,$$
$$\Omega'_3 = dX\delta S - dS\delta X + dY\delta T - dT\delta Y,$$

et on ne peut avoir évidemment

$$\lambda_2\Omega'_2 + \lambda_3\Omega'_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3),$$

que si l'on a $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Pour les mêmes raisons, le système dérivé du système (10) se compose de la première équation de ce système. L'équation $\omega_1 = 0$ doit donc être un invariant relativement à la transformation considérée, et l'on doit avoir identiquement

$$(13) \qquad dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

quand on remplace X, Y, Z, P, Q par leurs expressions tirées des formules (12). Ceci ne peut avoir lieu que si X, Y, Z, P, Q sont indépendants de r, s, t. Il suffit en effet de se reporter à la méthode même qui permet d'obtenir toutes les transformations de contact. L'équation (13) prouve qu'il existe au moins une relation entre x, y, z, X, Y, Z, indépendante des autres variables p, q, r, s, t, P, Q, R, S, T. Supposons par exemple qu'il n'en existe qu'une,

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0.$$

La relation (13) ne doit pas être distincte de $dF = 0$, ce qui permet d'avoir les expressions de X, Y, Z, P, Q en fonction de x, y,

z, p, q, et les cinq premières des formules (12) définissent une transformation de contact.

La transformation (12) est forcément identique à la transformation prolongée, puisque les relations

$$dP = R\,dX + S\,dY, \qquad dQ = S\,dX + T\,dY$$

doivent être des conséquences des relations

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dy + t\,dy;$$

ce qui détermine R, S, T en fonction de x, y, z, p, q, r, s, t.

Le raisonnement peut être généralisé. Supposons que le système de 6 équations de Pfaff à 12 variables

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad dq - s\,dx - t\,dy = 0,\\ &dr - p_{30}dx - p_{21}dy = 0, \quad ds - p_{21}dx - p_{12}dy = 0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad dt - p_{12}dx - p_{03}dy = 0 \end{aligned}\right.$$

soit invariant par un changement de variables

$$(15)\quad X = F_1(x, y, z, p, q, r, s, t, p_{30}, p_{21}, p_{12}, p_{03}), \quad \ldots, \quad P_{03} = F_{12}.$$

Le premier système dérivé du système (14) est formé des trois premières équations de ce système, comme on le voit facilement. Le second système dérivé est formé de la seule équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Cette équation devant être invariante par la transformation (15), il s'ensuit que les cinq premières formules (15) définissent une transformation de contact, et, en raisonnant comme tout à l'heure, on en conclut que les huit premières formules (15), définissent la première transformation prolongée de cette transformation de contact, puis que les formules (15), prises dans leur ensemble, définissent la transformation de contact prolongée jusqu'aux dérivées du troisième ordre. Le raisonnement est évidemment général

Ce résultat peut s'énoncer géométriquement comme il suit : *Les seules transformations de l'espace qui changent deux surfaces ayant un contact d'ordre supérieur au premier en deux surfaces ayant un contact du même ordre sont les transforma-*

tions de contact prolongées [1]. Supposons par exemple qu'une transformation fasse correspondre à deux surfaces ayant un contact du second ordre, deux autres surfaces ayant aussi un contact du second ordre. Cette transformation est définie par des formules donnant X, Y, Z, P, Q, R, S, T en fonction de x, y, z, p, q, r, s, t, telles que les relations

$$dZ - P dX - Q dY = 0, \qquad dP - R dX - S dY = 0,$$
$$dQ - S dX - T dY = 0$$

soient des conséquences des relations

$$dz - p dx - q dy = 0, \qquad dp - r dx - s dy = 0,$$
$$dq - s dx - t dy = 0.$$

Cette transformation est donc une transformation de contact prolongée.

75. Systèmes de Pfaff à quatre variables. — Tout système de trois équations de Pfaff à quatre variables est un système d'équations différentielles ordinaires. Prenons un système de deux équations à quatre variables

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4 = 0, \\ \omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3 + B_4 dx_4 = 0. \end{cases}$$

Si ce système n'est pas complètement intégrable, le système dérivé S' se compose d'une seule équation $\Omega_1 = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = 0$, qui peut être de classe trois ou de classe un (n° **72**).

1° Prenons d'abord le cas général où l'équation $\Omega_1 = 0$ est de classe trois. On peut alors choisir un système de variables (y_1, y_2, y_3, y_4) de façon à ramener l'équation $\Omega_1 = 0$ à la forme canonique $dy_2 - y_3 dy_1 = 0$. Le système S est remplacé par un système formé de l'équation précédente et d'une autre équation où l'on peut supposer que dy_2 ne figure pas :

$$\Omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = H_1 dy_1 + H_3 dy_3 + H_4 dy_4 = 0.$$

L'équation

$$\Omega'_1 = dy_3 \delta y_1 - \delta y_3 dy_1 = 0$$

[1] Le théorème est vrai aussi lorsque chacune des deux surfaces est assujettie à être une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles dont l'ordre est égal à celui de contact.

doit être une conséquence des deux relations

$$H_1 dy_1 + H_3 dy_3 + H_4 dy_4 = 0, \qquad H_1 \delta y_1 + H_3 \delta y_3 + H_4 \delta y_4 = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu si H_1 et H_3 sont nuls. Supposons $H_3 \neq 0$; nous pouvons même le supposer égal à -1, ce qui donne

$$dy_3 = H_1 dy_1 + H_4 dy_4, \qquad \delta y_3 = H_1 \delta y_1 + H_4 \delta y_4,$$

et la relation $\Omega'_1 = 0$ devient

$$H_4 (dy_1 \delta y_4 - dy_4 \delta y_1) = 0,$$

d'où l'on déduit que H_4 est nul. Quant au coefficient H_1, il dépend nécessairement de la variable y_4; autrement les deux équations

$$dy_2 = y_3 dy_1, \qquad dy_3 = H_1 dy_1$$

formeraient un système complètement intégrable. On peut donc prendre ce coefficient H_1 pour la variable y_4 et, par conséquent, dans le cas général considéré, *le système* S *peut être ramené à la forme canonique* [1]

$$\text{(I)} \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4 dy_1 = 0,$$

y_1, y_2, y_3, y_4 étant quatre fonctions indépendantes des variables x_1, x_2, x_3, x_4.

2° Supposons que l'équation $\Omega_1 = 0$ qui forme le système dérivé soit de classe un; on peut alors l'écrire $dy_1 = 0$, y_1 étant une fonction des variables x_1, x_2, x_3, x_4. En prenant pour nouvelles variables y_1, x_2, x_3, x_4 par exemple, le système S est remplacé par un nouveau système

$$dy_1 = 0, \qquad H_2 dx_2 + H_3 dx_3 + H_4 dx_4 = 0.$$

La dernière équation de ce système, où l'on regarde y_1 comme un paramètre, n'étant pas complètement intégrable, peut être mise sous la forme

$$dy_3 - y_4 dy_2 + K dy_1 = 0$$

par un changement de variables portant sur les variables x_2, x_3, x_4

(1) ENGEL, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Leipzig Berichte, t. XLI, p. 157-176*). Voir aussi E. CARTAN, *Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires* (*Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXIX, 1901, p. 118-130*).

(n° 9). *Le système* S *peut donc être ramené à la forme canonique*

$$\text{(II)} \qquad dy_1 = 0, \quad dy_3 - y_4 dy_2 = 0.$$

Enfin, si le système S est complètement intégrable, il admet la forme canonique

$$\text{(III)} \qquad dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0.$$

En définitive, *tout système de Pfaff de deux équations à quatre variables peut être ramené à l'une des formes canoniques* (I), (II), (III).

La forme canonique (I) convient au cas général où le système S n'admet aucune combinaison intégrable, la forme (II) au cas où il existe *une* combinaison intégrable, et la forme (III) au cas où le système est complètement intégrable. La démonstration précédente fait connaître en même temps quelles sont les opérations nécessaires pour effectuer la réduction. Ainsi, dans le premier cas, on a à effectuer l'opération 3, pour ramener une équation de Pfaff de classe 3 à une forme canonique.

Le système S étant ramené à une forme canonique, il est facile d'obtenir toutes les multiplicités intégrales. Laissant de côté le cas de la forme (III), où la solution est évidente, nous voyons d'abord que les systèmes (I) et (II) n'ont que des intégrales à une dimension, dont il est aisé d'avoir les équations générales. Dans le cas de la forme (I), l'intégrale générale est représentée par les formules

$$(16) \qquad y_1 = x, \quad y_2 = f(x), \quad y_3 = f'(x), \quad y_4 = f''(x),$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire, et il existe en outre des intégrales singulières dépendant de trois constantes arbitraires,

$$(17) \qquad y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad y_3 = C_3.$$

L'intégrale générale du système (II) est de même représentée par les formules

$$(18) \qquad y_1 = C_1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = f(x), \quad y_4 = f'(x),$$

et il y a en outre des intégrales singulières, dépendant de trois constantes arbitraires, représentées par les mêmes formules (17) que l'on vient d'écrire. On voit que, dans tous les cas, les multiplicités intégrales à une dimension d'un système de deux équations de Pfaff à quatre variables, non complètement intégrable, peuvent être représentées explicitement par des formules où figurent une fonction arbitraire et ses dérivées jusqu'au second ordre au plus, ou des constantes arbitraires en nombre fini, ou à la fois une fonction et une constante arbitraires.

Exemples : 1° Le problème de Monge (*Leçons*, n° **42**) est un cas particulier du problème précédent. Soit à trouver tous les systèmes de trois fonctions x, y, z d'une variable vérifiant la relation $F(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$, dont le premier membre est homogène en dx, dy, dz. Supposons cette équation résolue par rapport à $\frac{dz}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx} = f\left(x, y, z; \frac{dy}{dx}\right);$$

si le second membre est linéaire en $\frac{dy}{dx}$, on est ramené à trouver toutes les intégrales d'une équation de Pfaff à trois variables $dz = A\,dx + B\,dy$. Dans le cas général, en posant $\frac{dy}{dx} = u$, on est ramené à trouver toutes les intégrales d'un système de deux équations de Pfaff à quatre variables x, y, z, u,

$$\omega_1 = dy - u\,dx = 0, \qquad \omega_2 = dz - f(x, y, z, u)\,dx = 0.$$

Nous avons ici

$$\omega'_1 = du\,\delta x - \delta u\,dx, \qquad \omega'_2 = \frac{\partial f}{\partial u}\left\{du\,\delta x - \delta u\,dx\right\},$$

et, par suite, l'équation dérivée du système est

$$\Omega = dz - f\,dx - \frac{\partial f}{\partial u}(dy - u\,dx) = dz - \frac{\partial f}{\partial u}\,dy - \left(f - u\frac{\partial f}{\partial u}\right)dx = 0,$$

et le problème revient à ramener cette équation de Pfaff à une forme canonique, réduction qui exige, on l'a vu (n° **12**), les mêmes opérations que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. La solution générale est fournie par les courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles; la solution singulière, qui dépend de trois constantes arbitraires, correspond aux caractéristiques.

2° Considérons l'équation à deux fonctions inconnues y et z

$$\frac{dz}{dx} = A\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + B\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right);$$

en posant $\frac{dy}{dx} = u$, l'équation devient

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z, u)\frac{du}{dx} + B(x, y, z, u),$$

et l'on est encore conduit à un système de deux équations de Pfaff à quatre variables,

$$dy - u\,dx = 0, \qquad dz - A(x, y, z, u)\,du - B(x, y, z, u)\,dx = 0.$$

De même, étant données deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, pour obtenir des fonctions x, y d'une variable, telles que les deux intégrales $\int f(x, y)\,dx$, $\int \varphi(x, y)\,dx$, ou les deux intégrales $\int f(x, y)\,dx$, $\int \varphi(x, y)\,dy$, puissent s'exprimer explicitement, il faut trouver sous forme explicite toutes les solutions de l'un des systèmes de Pfaff à quatre variables, x, y, u, v,

$$(S_1) \qquad du - f(x, y)\,dx = 0, \qquad dv - \varphi(x, y)\,dx = 0,$$

$$(S_2) \qquad du - f(x, y)\,dx = 0, \qquad dv - \varphi(x, y)\,dy = 0.$$

Remarque. — Les raisonnements de ce paragraphe peuvent être généralisés. Soit $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ un système de deux équations de Pfaff à un nombre quelconque de variables, telles que le système dérivé se compose de la seule équation $\omega_1 = 0$. Si cette équation est complètement intégrable, la seconde équation du système $\omega_2 = 0$ peut être de classe quelconque plus grande que un. Si l'équation $\omega_1 = 0$ n'est pas complètement intégrable, on peut la supposer mise sous forme canonique

$$\omega_1 = dy_2 - y_3\,dy_1 - \Omega_1 = 0,$$

Ω_1 étant une forme de Pfaff de classe paire (si elle n'est pas nulle), où ne figurent pas les variables y_1, y_2, y_3, ni leurs différentielles. Par hypothèse, on a

$$\omega'_1 = dy_1\delta y_3 - dy_3\delta y_1 - \Omega'_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2),$$

ce qui exige que dy_3 figure dans ω_2. On peut donc écrire cette équation

$$\omega_2 = dy_3 - A_1 dy_1 - \Omega_2,$$

Ω_2 étant une autre forme de Pfaff, où ne figurent pas les différentielles dy_1, dy_2, dy_3. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} &\delta y_1 (A_1 dy_1 + \Omega_2(d)) - dy_1 (A_1 \delta y_1 + \Omega_2(\delta)) + \Omega'_1 \\ &= \delta y_1 \Omega_2(d) - dy_1 \Omega_2(\delta) + \Omega'_1 = 0, \end{aligned}$$

quelles que soient les différentielles dy_1, δy_1 ; il faut donc que l'on ait

$$\Omega_2 = 0, \quad \Omega'_1 = 0,$$

et par suite que la forme Ω_1 soit nulle, puisqu'elle est de classe paire. Le coefficient A_1 ne dépend pas seulement de y_1, y_2, y_3, car le système serait alors de classe deux, et coïnciderait avec son dérivé. On peut donc prendre A_1 pour une nouvelle variable y_4, et le système est ramené à la forme (I).

76. Systèmes de Pfaff à cinq variables. — Nous étudierons encore les systèmes de deux et de trois équations de Pfaff à cinq variables. Etant donné un système S_2 de deux équations de Pfaff à cinq variables $x_1, x_2, \ldots, x_5$, on a vu déjà (n° **67**) que l'on a des relations

$$\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv A_1 (dx_2 \delta x_3 - dx_3 \delta x_2) + A_2 (dx_3 \delta x_1 - dx_1 \delta x_3) + A_3 (dx_1 \delta x_2 - dx_2 \delta x_1), \\ \omega'_2 &\equiv B_1 (dx_2 \delta x_3 - dx_3 \delta x_2) + B_2 (dx_3 \delta x_1 - dx_1 \delta x_3) + B_3 (dx_1 \delta x_2 - dx_2 \delta x_1), \\ &\qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

pourvu que les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ puissent être résolues par rapport à dx_4, dx_5. Les relations $\omega'_1 = \omega'_2 = 0$ expriment que la droite qui joint les deux points m et μ, de coordonnées (dx_1, dx_2, dx_3) et $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ doit passer par les deux points P_1 et P_2 de coordonnées (A_1, A_2, A_3) et (B_1, B_2, B_3), pour que les éléments linéaires intégraux (dx_1, dx_2, dx_3) et $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ soient en involution. Si les deux points P_1 et P_2 sont distincts, ce qui est le cas général, il n'y a pas d'élément caractéristique, et tout point m qui n'est pas situé sur la droite P_1P_2 représente un élément linéaire intégral qui n'est en involution avec aucun autre élément linéaire intégral. Mais il y a une infinité d'éléments singuliers représentés par tous les points de la droite P_1P_2 ; deux points quelconques de cette droite représentent toujours deux éléments en involution.

Soit $\omega_3 = 0$ l'équation de la droite P_1P_2; deux éléments linéaires intégraux représentés par deux points quelconques de cette droite étant toujours en involution, on a nécessairement

$$\omega'_1 \equiv \omega_3\omega_4, \qquad \omega'_2 \equiv \omega_3\omega_5, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2),$$

et les cinq formes de Pfaff ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 sont linéairement distinctes. Dans le cas contraire, en effet, tout élément linéaire vérifiant les cinq relations

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$$

serait un élément caractéristique, et le système ne serait pas de classe cinq.

Il peut encore se présenter deux cas. Si les trois équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ ne forment pas un système complètement intégrable, le système S_2 formé par les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ est le système dérivé du système S_3 formé par les trois équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$.

Il n'en est plus de même lorsque les trois équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ forment un système complètement intégrable. Le système S_2 peut alors être ramené à une forme canonique simple, comme nous le verrons un peu plus loin.

Si les deux points P_1, P_2 sont confondus, le système S_2 admet des caractéristiques à une dimension; il est donc de classe quatre et peut être ramené à une des formes canoniques (I), (II). La forme canonique (II) convient au cas où le système S_2 admet une combinaison intégrable et une seule. Enfin, si l'on a identiquement

$$\omega'_1 \equiv 0, \qquad \omega'_2 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2),$$

le système S_2 est de classe deux, et peut être ramené à la forme canonique (III).

Lorsque le système S_2 est de classe cinq, on ne peut pas, en général, le ramener à une forme canonique, mais on peut, d'une infinité de manières, le ramener à une forme réduite où ne figure qu'une fonction arbitraire. En effet, parmi les équations

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0,$$

il y en a toujours une infinité de classe trois, car la condition pour qu'une équation de Pfaff à cinq variables

$$\Omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_5 dx_5 = 0$$

soit de classe trois est que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{15} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{25} & a_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{51} & a_{52} & \ldots & a_{55} & a_5 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_5 & 0 \end{vmatrix}$$

soit nul (n° **7**). En prenant pour Ω la forme $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$, on est conduit à une condition où figurent les deux fonctions λ, μ, et leurs dérivées partielles du premier ordre. Si par exemple, λ figure dans cette condition, on pourra prendre μ arbitrairement, et l'on a pour déterminer λ une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

On peut donc toujours supposer que l'équation $\omega_1 = 0$ est de classe trois, et ramenée à une forme canonique. Le système proposé peut donc être écrit comme il suit, par un choix convenable des variables,

$$\omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$$
$$\omega_2 = Y_1 dy_1 + Y_3 dy_3 + Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5 = 0;$$

les deux coefficients Y_4, Y_5 ne peuvent être nuls à la fois, car le système serait de quatrième classe. Soit K un facteur tel que l'on ait

$$K[Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5] = \frac{\partial U}{\partial y_4} dy_4 + \frac{\partial U}{\partial y_5} dy_5$$
$$= dU - \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 - \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 - \frac{\partial U}{\partial y_3} dy_3;$$

en prenant U pour la variable indépendante y_4, la seconde équation du système peut s'écrire

$$\omega_2 = dy_4 - U_1 dy_1 - U_3 dy_3 = 0,$$

l'un au moins des coefficients U_1, U_3 dépendant de la variable y_5. Comme on peut permuter y_1 et y_3, on peut supposer que U_3 dépend de y_5 et prendre U_3 pour cette variable. Le système S est donc ramené à la forme réduite

$$\text{(IV)} \qquad \omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad \omega_2 = dy_4 - f dy_1 - y_5 dy_3 = 0,$$

où figure une seule fonction indéterminée $f(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ des cinq variables.

Inversement, quelle que soit la fonction f, le système (IV) est de classe cinq. On a en effet

$$\omega'_1 = dy_1 \delta y_3 - dy_3 \delta y_1,$$

$$\omega'_2 = -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_3} + \frac{\partial f}{\partial y_4} y_5\right) dy_3 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_5\right] \delta y_1$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_3} + \frac{\partial f}{\partial y_4} y_5\right) dy_1 - dy_5\right] \delta y_3 + \left[dy_3 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1\right] \delta y_5,$$
$$(\text{mod. } \omega_1, \omega_2).$$

Tout élément caractéristique devrait donc satisfaire aux relations $dy_1 = 0$, $dy_3 = 0$, $dy_5 = 0$, et par suite aux relations $dy_2 = dy_4 = 0$. On peut vérifier sur ces équations qu'il y a ∞^1 éléments intégraux singuliers; en effet, pour que ces deux équations se réduisent à une seule, il faut et il suffit que l'on ait la nouvelle relation

$$\omega_3 = dy_3 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1 = 0.$$

Les éléments singuliers du système S_2 sont donc définis par le système S_3 des trois équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, ou par le système équivalent

$$\Omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$$

$$\Omega_2 = dy_4 + \left(y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} - f\right) dy_1 = 0, \qquad \Omega_3 = dy_3 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1 = 0.$$

On a

$$\Omega'_1 \equiv 0,$$

$$\Omega'_2 \equiv y_5 \frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}(dy_5 \delta y_1 - dy_1 \delta y_5), \qquad \Omega'_3 \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}(dy_5 \delta y_1 - dy_1 \delta y_5),$$
$$(\text{mod. } \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3),$$

de sorte que le système S_3 est complètement intégrable lorsque f est une fonction linéaire de y_5, et dans ce cas seulement. Le système S_2 peut alors être ramené à une forme canonique. Soient, en effet,

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad f_3 = C_3$$

l'intégrale générale du système S_3 ; les formules précédentes représentent une famille de multiplicités intégrales à deux dimensions du système S_2, telle qu'il en passe une par chaque point de l'espace. Si l'on a choisi un système de variables indépendantes telles que $y_1 = f_1$, $y_2 = f_2$, $y_3 = f_3$, il est clair que les différentielles dy_1, dy_2, dy_3 devront seules figurer dans les équations du système, qui peut par conséquent être ramené à la forme canonique

$$\text{(V)} \qquad dy_2 = y_4 dy_1, \qquad dy_3 = y_5 dy_1.$$

Les intégrales à deux dimensions M_2 représentées par les équations

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad y_3 = C_3$$

doivent être considérées comme des intégrales singulières du système, puisque tous les éléments intégraux $dy_1 = 0$, $dy_2 = 0$, $dy_3 = 0$ sont des éléments singuliers.

En résumé, *un système de deux équations de Pfaff de classe cinq peut être ramené à la forme réduite* (IV) *lorsque les trois équations qui définissent les éléments singuliers ne forment pas un système complètement intégrable, et à la forme canonique* (V), *lorsque ces trois équations forment un système complètement intégrable.*

Dans le cas général, la réduction à la forme réduite (IV) est possible d'une infinité de façons, et la fonction f n'est jamais une fonction linéaire de y_5.

Remarque I. — Lorsque le système S_3 n'est pas complètement intégrable, il n'admet aucune combinaison intégrable. En effet, pour que $dF = 0$ soit une combinaison des équations de S_3, la fonction F doit satisfaire aux relations

$$\frac{\partial F}{\partial y_5} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} y_3 - \frac{\partial F}{\partial y_3} \frac{\partial f}{\partial y_5} + \left(f - y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5}\right) \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0,$$

et par suite à la relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2} \frac{\partial F}{\partial y_3} + y_5 \frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2} \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}$ n'est pas nul, on a donc $\frac{\partial F}{\partial y_3} + y_5 \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$, et par suite, $\frac{\partial F}{\partial y_3} = \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$, puisque F ne dépend pas de y_5. La seconde condition devient alors

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} y_3 = 0,$$

et donne de même $\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0$, la fonction F se réduit donc à une constante.

Remarque II. — Lorsque f n'est pas une fonction linéaire de y_5 on a

$$\Omega'_1 \equiv 0, \quad (\Omega_2 - y_5\Omega_3)' \equiv 0 \qquad (\text{mod}.\ \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3).$$

Or, le système $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 - y_5\Omega_3 = 0$ est identique au système S_2, de sorte que *le système S_2 est le système dérivé de S_3.*

Remarque III. — Le système (IV) admet une infinité d'intégrales M_1, dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable, dont on peut avoir les équations générales sous forme explicite. Si l'on pose, en effet, $y_1 = \alpha$, $y_2 = \varphi(\alpha)$, $y_4 = \psi(\alpha)$, on tire de la première $y_3 = \varphi'(\alpha)$, et la deuxième devient

$$\psi'(\alpha) = y_5\varphi''(\alpha) + f(\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \psi(\alpha), y_5).$$

En la résolvant par rapport à y_5, on aura une fonction déterminée de α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$. Le système admet, en outre, une famille d'intégrales M_1 dépendant de *quatre* constantes arbitraires

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad y_3 = C_3, \quad y_4 = C_4,$$

et une famille dépendant de *deux* constantes et d'une fonction arbitraire

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad y_3 = \alpha, \quad y_4 = \varphi(\alpha), \quad y_5 = \varphi'(\alpha).$$

Considérons maintenant un système S_3 de trois équations de Pfaff à cinq variables, non complètement intégrable. Ce système est de classe 5, et le système dérivé S'_2 se compose, comme on l'a remarqué (nº **72**), de deux équations distinctes. Mais le nouveau système S'_2 peut être de classe 5, 4 ou 2. Nous nous occuperons d'abord des deux derniers cas. Si S'_2 est de classe 2, il est complètement intégrable, et peut être, par un changement de variables, ramené à la forme $\omega_1 = dy_1 = 0$, $\omega_2 = dy_2 = 0$. L'équation $\omega_3 = 0$, qu'il faut joindre aux précédentes pour avoir S_3, est de classe 3 quand on y fait $y_1 = C$, $y_2 = C'$, et par suite le système S_3 peut être mis sous forme canonique

$$\text{(VI)} \qquad dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad dy_4 - y_5 dy_3 = 0.$$

Lorsque S'_2 est de classe 4, il peut être, par un changement de variables, mis sous l'une des formes canoniques (I) ou (II). Supposons d'abord que S'_2 ait la forme canonique

$$\omega_1 = dy_1 = 0 \qquad \omega_2 = dy_3 - y_4 dy_2 = 0,$$

et soit $\omega_3 = 0$ la troisième équation du système S_3, renfermant dy_2, dy_4 et dy_5. Pour que S'_2 soit le dérivé de S_3, on doit avoir

$$\omega'_2 = dy_4 \delta y_2 - dy_2 \delta y_4 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } \omega_3);$$

l'équation $\omega_3 = 0$ doit donc renfermer dy_4, et on peut l'écrire

$$dy_4 = A dy_2 + B dy_5.$$

La condition précédente devient donc

$$B(dy_5 \delta y_2 - dy_2 \delta y_5) = 0,$$

et l'on en conclut que $B = 0$. Le coefficient A ne peut être indépendant de y_5, car le système S_3 ne renfermerait alors que quatre variables. On peut donc prendre ce coefficient A pour la variable y_5 elle-même, et le système S_3 est mis sous la forme canonique

$$\text{(VII)} \qquad dy_1 = 0, \quad dy_3 = y_4 dy_2, \quad dy_4 = y_5 dy_2.$$

On voit de la même façon que, si le système dérivé S'_2 peut être mis sous la forme canonique (I), le système S_3 peut être mis sous la forme canonique

$$\text{(VIII)} \qquad dy_2 = y_3 dy_1, \quad dy_3 = y_4 dy_1, \quad dy_4 = y_5 dy_1.$$

On voit en même temps quelles sont les opérations nécessaires pour ramener S_3 à l'une de ces formes canoniques. Par exemple, dans le cas de la forme (VIII), on a à mettre sous forme canonique une équation de Pfaff de classe 3.

Passons, enfin, au cas où S'_2 est de classe 5; le système S_3 est dit alors un *système normal*. Ainsi qu'on l'a démontré un peu plus haut, on peut choisir un système de variables y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 de façon que le système S'_2 ait la forme réduite (IV), ou la forme canonique (V). Supposons d'abord que S'_2 ait la forme réduite (IV), et soit $\omega_3 = 0$ l'équation qu'il faut adjoindre à S'_2 pour avoir le système S_3. On peut supposer que cette équation ne renferme que les différentielles dy_1, dy_3, dy_5. Pour que l'on ait

$$\omega'_1 = dy_1 \delta y_3 - dy_3 \delta y_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_3),$$

il faut évidemment que ω_3 renferme dy_3, et l'on peut prendre

$$\omega_3 = dy_3 - A dy_1 - B dy_5.$$

Il vient alors

$$\omega'_1 = B(dy_1 \delta y_5 - dy_5 \delta y_1),$$

et on doit avoir $B = 0$. En écrivant que l'on a aussi $\omega'_2 \equiv 0$ (mod. ω_1, ω_2, ω_3), on trouve qu'il faut prendre $A = -\dfrac{\partial f}{\partial y_5}$, et le système S_3 est de la forme *(voir Remarque II, page 317)*

$$\text{(IX)} \quad \omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad \omega_2 = dy_4 - f dy_1 - y_5 dy_3 = 0,$$

$$\omega_3 = dy_3 + \frac{\partial f}{\partial y_5} dy_1 = 0,$$

où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_5^2}$ n'est pas nul. On peut écrire ce système sous une forme plus simple en apparence; $\dfrac{\partial f}{\partial y_5}$ renfermant y_5, on peut prendre $-\dfrac{\partial f}{\partial y_5}$ pour la variable y_5 elle-même, et en remplaçant dy_3 par son expression dans $\omega_2 = 0$, on peut prendre, pour forme réduite du système S_3, la forme suivante,

$$\text{(IX')} \qquad \Omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = dy_3 - y_4 dy_1 = 0,$$
$$\Omega_3 = dy_5 - F(y_1, \ldots, y_5) dy_1 = 0,$$

où l'on a permuté les variables y_4 et y_5.

Le système dérivé de ce système se compose de deux équations

$$\Omega_1 = dy_2 - y_3 dy_1 = 0,$$

$$\Omega_3 - \frac{\partial F}{\partial y_4} \Omega_2 = dy_5 - \frac{\partial F}{\partial y_4} dy_3 + \left(y_4 \frac{\partial F}{\partial y_4} - F \right) dy_1 = 0.$$

Si F était une fonction linéaire de y_4, ce système dérivé serait de classe quatre, et par suite le système S_3 pourrait être ramené à une des formes canoniques précédentes. On doit donc supposer que la fonction F n'est pas une fonction linéaire de y_5 pour que le système (IX') soit un système normal.

Lorsque le système dérivé S'_2 est de classe cinq, il ne peut être ramené à la forme canonique (V). En effet, le système

$$dy_2 - y_4 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_5 dy_1 = 0$$

ne peut être le système dérivé d'un autre système de trois équations, et de même classe. L'équation $\omega_3 = 0$ qu'il faudrait adjoindre aux précédentes pour avoir ce nouveau système serait de la forme

$$dy_1 = Y_4 dy_4 + Y_5 dy_5,$$

et l'on voit immédiatement que l'on devrait avoir $Y_4 = 0$, $Y_5 = 0$, de sorte que le système cherché serait de classe trois.

En résumé, *tout système normal* S_3 *de trois équations de Pfaff à cinq variables peut être ramené à la forme réduite* (IX'), *où* F *n'est pas une fonction linéaire de* y_5. *Le système dérivé de* S_3 *peut être ramené à la forme réduite* (IV), *et inversement tout système de deux équations de Pfaff* (IV), *où* f *n'est pas une fonction linéaire de* y_5, *est le système dérivé d'un système normal de trois équations à cinq variables.*

On voit de plus que tout système normal S_3 à cinq variables peut être ramené, d'une infinité de manières, à la forme (IX'), ou à la forme équivalente (IX). Il suffit pour cela de ramener d'abord le système dérivé, formé de deux équations de classe cinq, à la forme réduite (IV), ce qui est possible, on l'a vu, d'une infinité de manières.

Il est évident que l'on peut obtenir sous forme explicite toutes les intégrales M_1 d'un système canonique de l'une des formes (VI), (VII), (VIII), mais cela n'est pas possible pour un système normal, comme on le démontrera plus loin (n° **78**). Si l'on pose, dans les équations (IX'), $y_1 = \alpha$, $y_2 = \varphi(\alpha)$, on en tire $y_3 = \varphi'(\alpha)$, $y_4 = \varphi''(\alpha)$, et y_5 est déterminé par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre,

$$dy_5 = F(\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha), y_5)\, d\alpha.$$

Les systèmes S_2 et S_3 de classe cinq ont été étudiés dans un important Mémoire déjà cité de M. Cartan (*Annales Sc. de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 109-192*). En supposant $F = y_4^2$ dans les formules (IX'), on a un système de Pfaff

$$dy_2 = y_3 dy_1, \qquad dy_3 = y_4 dy_1, \qquad dy_5 = y_4^2 dy_1,$$

qui admet un groupe de transformations à 14 paramètres.

Etant donné un système S_2 de deux équations de Pfaff de classe *quatre* à n variables ($n > 4$), la détermination des caractéristiques exigerait, d'après la méthode générale, les opérations 4, 3, 2, 1 L'étude qui vient d'être faite permet de réduire beaucoup le nombre de ces opérations. On peut d'abord, sans aucune intégration, déterminer l'équation de ce système qui constitue le système dérivé. Si cette équation est de classe *trois*, il suffira, pour déterminer les caractéristiques, de mettre cette équation sous une forme canonique, ce qui exige les opérations 3 et 1. Si l'équation qui forme le système dérivé est de classe *un*, on a d'abord à intégrer une équation aux différentielles totales complètement intégrable, puis à mettre sous forme canonique une équation de classe trois ; on a donc en tout à effectuer les opérations 1, 3, 1.

Soit de même S_2 un système de classe cinq à n variables ($n > 5$). Si les équations qui déterminent les éléments singuliers forment un système complètement intégrable, il suffira d'intégrer ce système (ce qui exige les opérations 3, 2, 1), pour ramener le système à la forme canonique (V), et par suite pour avoir les caractéristiques. Si le système S_2 n'est pas réductible à la forme (V), une opération 5 donne une intégrale particulière y_1 du système caractéristique. En faisant $y_1 = C$, $dy_1 = 0$ dans les équations du système de Pfaff donné, on est conduit à un système de 4e classe, auquel on appliquera la méthode qui vient d'être indiquée.

Pour intégrer les équations différentielles caractéristiques d'un système S_3 de trois équations de Pfaff de classe cinq à n variables ($n > 5$), on traitera le même problème pour le système dérivé S'_2. Si S'_2 est de classe quatre, on a vu que S_3 pouvait être ramené à une forme canonique, dès que S'_2 est lui-même ramené à une forme canonique. Si S'_2 est de classe cinq, les caractéristiques sont les mêmes pour les deux systèmes.

77. Système de r équations à $r + 2$ variables. — Considérons enfin un système non complètement intégrable de r équations à $r+2$ variables ; ce système est effectivement de classe $r+2$. Les équations de ce système étant supposées résolues par rapport aux r différentielles $dx_1, \ldots, dx_r$, si on remplace dans les covariants bilinéaires $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_r$, les différentielles, $dx_1, \ldots, dx_r$, $\delta x_1, \ldots, \delta x_r$ par leurs expressions tirées des équations elles-mêmes, on a

$$\omega'_i \equiv K_i(dx_{r+1}\delta x_{r+2} - dx_{r+2}\delta x_{r+1}), \qquad (\text{mod. } \omega_1, \ldots, \omega_r),$$

tous les coefficients K_i n'étant pas nuls, car le système serait complètement intégrable. Supposons, par exemple, $K_1 \neq 0$; on tire des relations précédentes

$$\left(\omega_i - \frac{K_i}{K_1}\omega_1\right)' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r),$$

et le système dérivé S' se compose des $r-1$ équations

$$\omega_i - \frac{K_i}{K_1}\omega_1 = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, r).$$

Nous supposerons dans la suite que l'on a écrit le système S sous une forme telle que le système dérivé S' se compose des $r-1$ premières équations de S, et que ces $r-1$ équations sont résolues par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{r-1}$,

$$(\text{S}') \qquad \omega_i = dx_i - (A_i dx_r + B_i dx_{r+1} + C_i dx_{r+2}) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots r-1),$$

et que la dernière équation $\omega_r = 0$ du système S est elle-même résolue par rapport à dx_r,

$$\omega_r = dx_r - (H dx_{r+1} + K dx_{r+2}) = 0.$$

Si dans $\omega'_1, \ldots, \omega'_{r-1}$ on remplace $dx_1, \ldots, dx_{r-1}, \delta x_1, \ldots, \delta x_{r-1}$ par leurs expressions tirées des équations de S', il restera seulement, dans ces covariants bilinéaires, les trois binomes

$$dx_r\delta x_{r+1} - dx_{r+1}\delta x_r, \qquad dx_r\delta x_{r+2} - dx_{r+2}\delta x_r,$$
$$dx_{r+1}\delta x_{r+2} - dx_{r+2}\delta x_{r+1},$$

ou les trois expressions bilinéaires (voir p. 18)

$$[\omega_r, dx_{r+1}], \qquad [\omega_r, dx_{r+2}], \qquad [dx_{r+1}, dx_{r+2}],$$

et puisque ω'_i doit être nul en tenant compte de la dernière équation $\omega_r = 0$ du système S, il reste des identités de la forme

$$(19)\qquad \omega'_i \equiv L_i[\omega_r, dx_{r+1}] + M_i[\omega_r, dx_{r+2}], \quad (\text{mod. } \omega_1, \ldots, \omega_{r-1})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$(19')\qquad \omega'_i \equiv [\omega_r, L_i dx_{r+1} + M_i dx_{r+2}], \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}).$$

Si le rapport des coefficients L_i, M_i n'est pas le même quel que soit i, les $r-1$ équations $\omega'_i = 0$ se réduisent à *deux* équations distinctes, et par suite le système S″ dérivé de S′ se compose de $r-3$ équations seulement. C'est évidemment le cas général, qui se présente lorsque les coefficients du système S sont quelconques ; nous dirons avec M. Cartan que le système S est alors *un système normal*.

Lorsque le rapport des coefficients L_i, M_i est indépendant de i, sans que tous ces coefficients soient nuls, les équations $\omega'_i = 0$ se réduisent à une seule, et le système S″ dérivé de S′ se compose de $r-2$ équations distinctes. Dans ce cas, *le système dérivé* S′ *est de classe* $r+1$. En effet, puisque toutes les formes

$$L_i dx_{r+1} + M_i dx_{r+2}$$

ne diffèrent que par un facteur, on a

$$L_i dx_{r+1} + M_i dx_{r+2} = \mu_i(\alpha dx_{r+1} + \beta dx_{r+2}).$$

Il s'ensuit que tous les éléments linéaires intégraux du système S′ qui satisfont aux deux relations

$$\omega_r = 0, \qquad \alpha dx_{r+1} + \beta dx_{r+2} = 0$$

sont en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du même système S′. Les équations qui définissent les éléments caractéristiques de S′ sont au nombre de $r+1$, et par suite S′ est bien de classe $r+1$.

On peut donc supposer que l'on a choisi les variables x_i de façon que les variables $x_1, \ldots, x_{r+1}$ figurent seules dans les équations du système S′, et par suite que tous les coefficients C_i sont nuls. Dans les covariants ω'_i, quand on aura remplacé les différentielles $dx_1, \ldots, dx_{r-1}, \delta x_1, \ldots, \delta x_{r-1}$ par leurs expressions tirées des équations de S' elles-mêmes, il ne figurera que le binome $dx_r \delta x_{r+1} - dx_{r+1}\delta x_r$ qui devient, en tenant compte de l'équation $\omega_r = 0$,

$$K(\delta x_{r+1} dx_{r+2} - \delta x_{r+2} dx_{r+1}).$$

Pour que les équations $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_{r-1} = 0$ forment le système dérivé de S, il faut donc que le coefficient K soit nul, et la dernière équation de S est de la forme

$$\omega_r = dx_r - \mathrm{H}dx_{r+1} = 0.$$

Le coefficient H dépend nécessairement de la variable x_{r+2}, car autrement le système S serait de classe inférieure à $r+2$, et par suite complètement intégrable. On peut donc prendre ce coefficient H pour la dernière variable x_{r+2}, ce qui permet d'énoncer la proposition suivante : *Lorsque le second dérivé* S'' *de* S *se compose de* $r-2$ *équations, on peut choisir les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_{r+2}$ *de façon que les équations du système aient la forme suivante*

$$(20)\quad \begin{cases} \omega_i = dx_i - (\mathrm{A}_i dx_r + \mathrm{B}_i dx_{r+1}) = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, r-1), \\ \omega_r = dx_r - x_{r+2} dx_{r+1} = 0, \end{cases}$$

les coefficients A_i, B_i *étant indépendants de* x_{r+2}.

Les $r-1$ premières équations forment le système dérivé S'. On remarquera qu'il y a une correspondance univoque entre les intégrales de ces deux systèmes [1]. A toute intégrale de S correspond évidemment une intégrale de S'; inversement connaissant une intégrale M'_1 de S',

$$x_1 = f_1(\alpha), \quad \ldots, \quad x_{r+1} = f_{r+1}(\alpha),$$

on obtiendra une intégrale M_1 de S en joignant aux équations précédentes l'équation

$$x_{r+2} = \frac{f'_r(\alpha)}{f'_{r+1}(\alpha)}.$$

Nous dirons, avec M. Cartan, que le système de Pfaff S est *un prolongement du système* S'.

[1] Nous laisserons de côté dans la suite les intégrales à deux dimensions de S (s'il en existe), et nous ne nous occuperons que des intégrales M_1.

Lorsque tous les coefficients L_i, M_i des formules (19) sont nuls, le système S' est complètement intégrable, et on peut choisir les variables indépendantes x_i de façon que les équations de S' soient

$$\omega_1 = dx_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{r-1} = dx_{r-1} = 0.$$

Si on ne laisse dans la dernière équation $\omega_r = 0$ que les différentielles dx_r, dx_{r+1}, dx_{r+2}, on a, en considérant $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ comme des paramètres dans les coefficients, une forme de Pfaff à trois variables que l'on peut ramener à la forme canonique

$$\omega_r = dx_r - x_{r+2}dx_{r+1} = 0.$$

Nous avons examiné tous les cas qui peuvent se présenter relativement au système dérivé S'. Considérons maintenant un système S qui ne soit pas normal, et la suite des systèmes dérivés S', S'', ... Il arrivera généralement qu'au bout d'un certain nombre d'opérations le nombre des équations diminuera de plus d'une unité quand on passera de l'un de ces systèmes au suivant. Supposons que cela ait lieu pour la première fois pour le système $S^{(r-h)}$, de telle sorte que S' se compose de $r-1$ équations, S'' de $r-2$ équations, $S^{(r-h)}$ de h équations, mais que $S^{(r-h+1)}$ se compose de $h-2$ équations au plus, ce qui exige que l'on ait $h>1$. Alors, d'après ce qui vient d'être démontré tout à l'heure, S' sera de classe $r+1$, et par suite S'' sera de classe r, et ainsi de suite; la classe ira en s'abaissant d'une unité quand on passe d'un système au suivant jusqu'au système $S^{(r-h-1)}$ qui sera de classe $h+3$ et se composera de $h+1$ équations. Le premier dérivé de $S^{(r-h-1)}$, c'est-à-dire $S^{(r-h)}$ se composera de h équations, mais le second dérivé $S^{(r-h+1)}$ ne comprendra que $h-2$ équations. Le système $S^{(r-h-1)}$ est donc un système *normal* de $h+1$ équations et de classe $h+3$, dont le système $S^{(r-h-2)}$ est un prolongement. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, on peut prendre un système de variables tel que les équations de $S^{(r-h-1)}$ ne contiennent que les $h+3$ variables $x_1, \ldots, x_{h+3}$ et leurs différentielles, la dernière équation du système $S^{(r-h-2)}$ étant

$$dx_{h+2} = x_{h+4}dx_{h+3}.$$

Le système $S^{(r-h-3)}$ s'obtient en joignant aux équations de

$S^{(r-h-2)}$ une équation de plus où figure une variable de plus x_{h+5}, et on peut supposer que cette équation est de la forme

$$A dx_{h+3} + B dx_{h+4} + C dx_{h+5} = 0.$$

Un raisonnement tout pareil aux précédents prouve que l'on doit avoir $C = 0$, et l'on peut prendre le rapport $\frac{B}{A}$ pour la variable x_{h+5}, ce qui permet d'écrire la nouvelle équation

$$dx_{h+3} = x_{h+5} dx_{h+4}.$$

En continuant ainsi, on voit que l'on peut choisir les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_{r+2}$, de telle sorte que les équations du système S prennent la forme

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{h+1} = 0, \\ dx_{h+2} = x_{h+4} dx_{h+3}, \\ dx_{h+3} = x_{h+5} dx_{h+4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_r = x_{r+2} dx_{r+1}, \end{array} \right.$$

les $h+1$ équations $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_{h+1} = 0$ étant celles d'un système normal $S^{(r-h-1)}$ où figurent seulement les $h+3$ variables x_1, $x_2, \ldots, x_{h+3}$. On voit encore que les intégrales à une dimension du système S et du système $S^{(r-h-1)}$ se correspondent une à une d'une façon univoque ; de toute intégrale du système $S^{(r-h-1)}$ on peut déduire par des différentiations une intégrale du système S. Nous dirons encore que le système S est *un prolongement de* $S^{(r-h-1)}$.

Il peut se faire aussi qu'un système S ne soit *ni un système normal, ni le prolongement d'un système normal.* Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, *si l'on forme la suite des systèmes* S', S'', S''', ..., *dérivés de* S, *le nombre des équations diminue au plus d'une unité quand on passe d'un système au suivant.* Nous dirons pour abréger que tout système S, qui possède cette propriété, est un *système spécial.*

Deux cas peuvent encore se présenter. Il peut se faire que, quand on passe d'un système au suivant, le nombre des équations diminue toujours d'une unité jusqu'au système $S^{(r)}$. Alors S' se compose de $r-1$ équations et sa classe est $r+1$; S″ se compose de $r-2$ équations et sa classe est $r, \ldots$; $S^{(r-1)}$ se compose d'une seule équation de classe 3, et le $r^{\text{ième}}$ dérivé $S^{(r)}$ est nul ainsi que tous les suivants. Il peut aussi arriver que, pour les premiers systèmes dérivés, tout se passe comme dans le premier cas, mais qu'à partir du système $S^{(r-p)}$ tous les systèmes dérivés successifs soient identiques à $S^{(r-p)}$. Le premier cas peut d'ailleurs être considéré comme un cas particulier du second, que l'on obtiendrait en supposant $p=0$.

Nous allons démontrer que *tous les systèmes spéciaux de r équations à $r+2$ variables, pour lesquels le nombre p a la même valeur, peuvent être ramenés à une même forme canonique.*

La propriété a été déjà établie plus haut lorsque $p=r-1$; le système S′ est alors complètement intégrable, et nous avons vu que, par un choix convenable des variables indépendantes, on peut écrire le système S

$$(22)\qquad dy_1=0, \quad \ldots, \quad dy_{r-1}=0, \qquad dy_{r+1}=y_{r+2}dy_r.$$

Supposons donc $0 \leqslant p < r-1$. Le système $S^{(r-p)}$ se compose alors de p équations distinctes formant un système complètement intégrable si $p>0$, et ce système est nul si $p=0$. Les raisonnements qui vont suivre s'appliquant à ce dernier cas, nous supposerons $0<p<r-1$.

Le système S′ est de classe $r+1$, S″ est de classe $r \ldots$, $S^{(r-p-1)}$ est de classe $p+3$, et enfin le système $S^{(r-p)}$, qui est complètement intégrable est de classe p. Appliquons à ce système $S^{(r-p-1)}$ de $p+1$ équations et de classe $p+3$ la proposition établie plus haut sur les systèmes S dont le système dérivé S′ est complètement intégrable. On peut, par un changement de variables convenable, mettre ce système $S^{(r-p-1)}$ sous la forme

$$(23)\qquad dy_1=0, \quad \ldots, \quad dy_p=0, \qquad dy_{p+2}=y_{p+3}dy_{p+1} ;$$

cette réduction exige d'abord l'*intégration du système* $S^{(r-p)}$, *c'est-à-dire l'intégration d'un système complètement intégrable d'ordre p, puis la réduction d'une équation de Pfaff de classe trois à une forme canonique.*

Ces opérations étant supposées effectuées, si l'on prend pour variables nouvelles les $p+3$ fonctions $y_1, \ldots, y_{p+3}$ et $r-p-1$ des anciennes variables $x_{p+4}, \ldots, x_{r+2}$, par exemple, l'équation qu'il faut joindre au système (23) pour avoir le système précédent $S^{(r-p-2)}$ peut être supposée mise sous la forme

$$\omega_{p+2} = \mathrm{H}dy_{p+1} + \mathrm{K}dy_{p+3} + \Omega_1 = 0,$$

Ω_1 étant une forme qui ne renferme que les différentielles dx_i, et l'équation

$$\delta y_{p+3} dy_{p+1} - dy_{p+3} \delta y_{p+1} = 0$$

doit être une conséquence des deux relations $\omega_{p+2}(d) = 0$, $\omega_{p+2}(\delta) = 0$.

Ceci exige évidemment qu'aucun des coefficients H, K ne soit nul. On peut alors supposer $\mathrm{K} = -1$, et l'on doit avoir identiquement

$$dy_{p+1}[\mathrm{H}\delta y_{p+1} + \Omega_1(\delta)] - \delta y_{p+1}[\mathrm{H}dy_{p+1} + \Omega_1(d)] = 0,$$

ce qui exige que la forme Ω_1 soit nulle, et l'équation $\omega_{p+2} = 0$ se réduit à $dy_{p+3} = \mathrm{H}dy_{p+1}$. Le coefficient H ne peut dépendre seulement de $y_1, y_2, \ldots, y_{p+3}$, car le système $S^{(r-p-2)}$ serait alors complètement intégrable. On peut donc prendre ce coefficient H pour une des nouvelles variables y_{p+4}, et le système $S^{(r-p-2)}$ est ainsi ramené à la forme

$$(24) \qquad dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_p = 0,$$
$$dy_{p+2} = y_{p+3} dy_{p+1}, \qquad dy_{p+3} = y_{p+4} dy_{p+1}.$$

On peut répéter le même raisonnement pour trouver la nouvelle équation $\omega_{p+3} = 0$ qui, jointe aux équations (24), forme le système $S^{(r-p-3)}$, et ainsi de suite. En continuant de la sorte, on voit que *tout système spécial* S *de* r *équations à* $r+2$ *variables peut être mis sous la forme canonique* (¹)

$$(25) \qquad dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_p = 0,$$
$$dy_{p+2} = y_{p+3} dy_{p+1}, \ \ldots, \ dy_{r+1} = y_{r+2} dy_{p+1}.$$

Les seuls *invariants* d'un système spécial S, relativement à un changement de variables, sont donc l'ordre r de ce système, et le nombre p des combinaisons intégrables distinctes des équations de ce système.

(¹) E. von Weber, *Berichte Ges. Leipzig*, t. L (*1898*), p. 207-229.

Tout système de deux équations à quatre variables, n'admettant aucune combinaison intégrable, est, comme on l'a vu directement (n° **75**), un système spécial pour lequel $p = 0$.

Exemple. — Considérons un système de r équations de la forme

$$S \begin{cases} \omega_1 = dx_1 + f_1(x_{r+2})dx_{r+1} = 0, \\ \omega_2 = dx_2 + f_2(x_{r+2})dx_{r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_r = dx_r + f_r(x_{r+2})dx_{r+1} = 0, \end{cases}$$

les coefficients de dx_{r+1} ne dépendant que de la dernière variable x_{r+2}. Ecartons le cas banal où tous ces coefficients seraient constants ; nous pouvons supposer, par exemple, que $f_1(x_{r+2})$ n'est pas constant, et nous ne diminuons pas la généralité en supposant $f_1(x_{r+2}) = x_{r+2}$.

Le système dérivé S' est formé des $r - 1$ équations

$$\Omega_i = \omega_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_{r+2}}\omega_1 = dx_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_{r+2}}dx_1 + \left(f_i - x_{r+2}\frac{\partial f_i}{\partial x_{r+2}}\right)dx_{r+1} = 0$$
$$(i = 2, 3, \ldots, r).$$

Si l'on pose

$$X_i = x_i + x_{r+1}f_i, \qquad X_{r+1} = x_1 + x_{r+1}x_{r+2},$$
$$(i = 2, 3, \ldots, r),$$

l'équation $\Omega_i = 0$ peut s'écrire

$$\Omega_i = dX_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_{r+2}}dX_{r+1} = 0.$$

Le système S' est donc un système de même forme que S, à $(r + 1)$ variables $X_2, \ldots, X_{r+1}, x_{r+2}$. Pour la même raison, si S' n'est pas complètement intégrable, S'' sera un système de même forme à r variables, et ainsi de suite. Le système S est donc un système spécial.

78. Systèmes intégrables explicitement. — Un système S de r équations à $r + 2$ variables, non complètement intégrable, ne peut admettre d'intégrales à deux dimensions M_2 passant par un point quelconque de l'espace. On a vu (*Leçons*, p. **27**) comment on peut déterminer de telles intégrales s'il en existe ; nous n'y reviendrons pas.

Les intégrales M_1 du système dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable ; en effet, supposons les équations de S résolues par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$ par exemple. Si l'on se donne $x_{r+2} = \varphi(x_{r+1})$, on est conduit à un système de r équations différentielles ordinaires pour déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_r$ en fonction de x_{r+1}.

Remarquons encore que l'on peut, sans diminuer la généralité, supposer que dx_{r+2} ne figure pas dans les équations de S. Il suffit de choisir les variables x_i de façon que les équations $x_1 = C_1, \ldots, x_{r+1} = C_{r+1}$ représentent une famille de courbes intégrales, ce qui, comme on l'a déjà remarqué à plusieurs reprises, est possible d'une infinité de manières. Les équations étant résolues par rapport à $dx_1, \ldots, dx_r$, l'un au moins des coefficients de dx_{r+1} dépend de x_{r+2}, et en prenant ce coefficient pour la variable x_{r+2} elle-même, le système S prend la forme

$$(26)\qquad dx_1 = x_{r+2}dx_{r+1}, \qquad dx_2 = A_2 dx_{r+1}, \ldots, dx_r = A_r dx_{r+1}.$$

Nous dirons que le système S est *intégrable explicitement* lorsque toutes les intégrales M_1 peuvent être représentées par un ou plusieurs systèmes de formules exprimant les variables x_i par des *fonctions déterminées d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées jusqu'à celle d'un certain ordre, pouvant contenir aussi un nombre fini de constantes arbitraires*

$$(27)\qquad x_i = \varphi_i(C_1, C_2, \ldots, C_p, \alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(q)}(\alpha)), \\ (i = 1, 2, \ldots, r+2).$$

Dans ces formules, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+2}$ désignent des fonctions déterminées de leurs arguments, $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sont des constantes arbitraires, α est un paramètre variable et $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre.

Il est évident que les systèmes spéciaux définis au paragraphe précédent sont intégrables explicitement. On peut alors, en effet, par un changement de variables

$$(28)\qquad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{r+2}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+2)$$

ramener un système spécial S à la forme canonique (25) pour laquelle la propriété est évidente. Si y_{p+1} ne se réduit pas à une constante pour une intégrale M_1 du système (25), on peut poser

$y_{p+1}=x$, $y_{p+2}=f(x)$, et on en déduit successivement $y_{p+3}=f'(x)$, $\ldots$, $y_{r+2}=f^{(r-p)}(x)$. On a donc une famille d'intégrales M_1 dépendant de la fonction arbitraire $f(x)$ et de p constantes arbitraires,

$$(29) \quad \begin{gathered} y_1=C_1, \ldots, y_p=C_p, \quad y_{p+1}=x, \quad y_{p+2}=f(x), \\ y_{p+3}=f'(x), \ldots, y_{r+2}=f^{(r-p)}(x); \end{gathered}$$

il existe une autre famille de multiplicités intégrales M_1 dépendant de $r+1$ constantes arbitraires,

$$(30) \quad y_1=C_1, \ldots, y_p=C_p, \quad y_{p+1}=C_{p+1}, \ldots, y_{r+1}=C_{r+1}.$$

En remplaçant $y_1, \ldots, y_{r+2}$ par les valeurs (29) dans les formules (28), on obtient bien une intégrale générale explicite pour S.

Inversement, *les systèmes spéciaux sont les seuls qui admettent une intégrale générale explicite de la forme* (27). Il suffit de prouver qu'un système normal, ou tout système obtenu par le prolongement d'un système normal, ne peut admettre une intégrale générale explicite de cette forme [1]. On peut même se borner à démontrer cette propriété pour un système normal, car si un système S obtenu par le prolongement d'un système normal admet une intégrale générale de cette forme, il est évident qu'il en sera de même du système normal dont S est le prolongement.

Remarquons encore que les $r+2$ fonctions φ_i des formules (27) doivent être distinctes ; dans le cas contraire, on en déduirait, en effet, une relation au moins entre les variables x_i, et les formules (27) ne pourraient représenter une intégrale passant par un point quelconque de l'espace. On a donc forcément $p+q \geqslant r$. Si $p+q=r$, on voit immédiatement que le système S est un système spécial, et dans ce cas les formules (28) définissent un changement de variables qui conduit du système S à un système admettant l'intégrale générale

$$\begin{gathered} y_1=C_1, \ldots, y_p=C_p, \quad y_{p+1}=x, \quad y_{p+2}=f(x), \\ y_{p+3}=f'(x), \ldots, y_{r+2}=f^{(q)}(x), \end{gathered}$$

c'est-à-dire au système canonique (25).

[1] Ce beau résultat est dû à M. Cartan, dont nous avons reproduit la démonstration (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XLII, 1914, p. 12-48).

Il ne reste qu'à examiner le cas où l'on a $p+q=m>r$, cas que nous ne pouvons écarter *a priori*. Nous supposerons que la dérivée $f^{(q)}(\alpha)$ figure dans l'une au moins des fonctions φ_i ; autrement on remplacerait q par un nombre inférieur. Si, dans les premiers membres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ des équations de S, on fait la substitution

$$(31)\qquad x_i=\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_{m+2}), \qquad m=p+q,$$

la forme ω_i se change en une forme linéaire par rapport à $dy_1, dy_2, \ldots, dy_{m+2}$, que l'on peut écrire

$$(32)\quad \omega_i=a_{i1}\Omega_1+a_{i2}\Omega_2+\ldots+a_{im}\Omega_m+a_{i,m+1}dy_{p+1}+a_{i,m+2}dy_{m+2},$$

en posant

$$(33)\qquad \Omega_1=dy_1, \ldots, \Omega_p=dy_p,$$
$$\Omega_{p+1}=dy_{p+2}-y_{p+3}dy_{p+1}, \ldots, \Omega_m=dy_{m+1}-y_{m+2}dy_{p+1}.$$

Par hypothèse, les formules (31) définissent une intégrale du système (S) quand on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_{m+2}$ par un système d'intégrales du système auxiliaire Σ

$$(\Sigma)\qquad \Omega_1=0, \ldots, \Omega_p=0, \quad \Omega_{p+1}=0, \ldots, \Omega_m=0.$$

Il faut donc que l'on ait $a_{i,m+1}=0$, $a_{i,m+2}=0$, et par suite on a des identités de la forme

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1&=a_{11}\Omega_1+a_{12}\Omega_2+\ldots+a_{1m}\Omega_m,\\ \omega_2&=a_{21}\Omega_1+a_{22}\Omega_2+\ldots+a_{2m}\Omega_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \omega_r&=a_{r1}\Omega_1+a_{r2}\Omega_2+\ldots+a_{rm}\Omega_m,\end{aligned}\right.$$

quand on fait dans les formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ la substitution (31). Les coefficients $a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{rm}$ ne peuvent être nuls à la fois. En effet, si tous ces coefficients étaient nuls en même temps, à toute solution du système (Σ')

$$(\Sigma')\qquad \Omega_1=0, \ldots, \Omega_{m-1}=0,$$

les formules (31) feraient correspondre une intégrale de S, quand on y remplacerait y_{m+2} par une constante quelconque, et on serait ramené à des formules analogues pour représenter l'intégrale générale de S, où le nombre des constantes serait augmenté d'une unité et où q serait diminué d'une unité [1].

On peut toujours supposer que le système S' dérivé de S est formé des $r - 1$ équations

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \omega_{r-1} = 0.$$

On a alors

$$\omega'_1 \equiv 0, \quad \omega'_2 \equiv 0, \quad \ldots, \omega'_{r-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r),$$

et *a fortiori*

$$\omega'_1 \equiv 0, \quad \omega'_2 \equiv 0, \ldots, \omega'_{r-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m).$$

Mais ω'_1 se réduit à $a_{1m}\Omega'_m = a_{1m}(\delta y_{p+1} dy_{m+2} - \delta y_{m+2} dy_{p+1})$, en tenant compte des équations $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_m = 0$, et ne peut être nul que si l'on a $a_{1m} = 0$. On verrait de même que l'on a $a_{2m} = 0, \ldots, a_{r-1,m} = 0$, mais a_{rm} ne peut être nul, puisque Ω_m doit figurer dans les identités (34).

Le système S étant supposé écrit comme plus haut, on a, d'après la formule (19),

$$(35') \quad \omega'_i \equiv \mathrm{L}_i[\omega_r, dx_{r+1}] + \mathrm{M}_i[\omega_r, dx_{r+2}] \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1})$$
$$i = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Après la substitution (31), dx_{r+1} et dx_{r+2} se changent en deux formes linéaires que l'on peut écrire

$$dx_{r+1} = b_1\Omega_1 + \ldots + b_m\Omega_m + b_{m+1}dy_{p+1} + b_{m+2}dy_{m+2},$$
$$dx_{r+2} = c_1\Omega_1 + \ldots + c_m\Omega_m + c_{m+1}dy_{p+1} + c_{m+2}dy_{m+2},$$

[1] On pourrait encore raisonner comme il suit. Si les seconds membres des formules (34) ne contenaient pas Ω_m, les formules

$$x_i = \varphi_i(C_1, C_2, \ldots, C_p, \alpha, f(\alpha), \ldots, f^{(q-1)}(\alpha), \beta),$$

où α et β sont deux paramètres variables, représenteraient une famille d'intégrales de S, à deux dimensions, et il passerait évidemment une de ces intégrales par un point arbitraire de l'espace, puisque les fonctions φ_i sont des fonctions distinctes de leurs arguments. Le système S serait donc complètement intégrable.

Le même raisonnement prouve que les fonctions φ_i renferment l'une au moins des dérivées de $f(\alpha)$: car si elles ne renfermaient que α et $f(\alpha)$, les formules

$$x_i = \varphi_i(C_1, \ldots, C_r, \alpha, \beta)$$

représenteraient des intégrales à deux dimensions du système S dépendant de r constantes arbitraires.

et les relations (19) entraînent les nouvelles relations

$$(36)\quad \omega'_i \equiv \mathrm{L}_i[a_{rm}\Omega_m, b_{m+1}dy_{p+1} + b_{m+2}dy_{m+2}] \\ + \mathrm{M}_i[a_{rm}\Omega_m, c_{m+1}dy_{p+1} + c_{m+2}dy_{m+2}], \\ (\text{mod. } \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{m-1}),$$

ou, en développant,

$$\omega'_i \equiv a_{rm}(\mathrm{L}_i b_{m+1} + \mathrm{M}_i c_{m+1})[dy_{p+1}, dy_{m+1}] \\ + a_{rm}(\mathrm{L}_i b_{m+2} + \mathrm{M}_i c_{m+2})\{[dy_{m+2}, dy_{m+1}] + y_{m+2}[dy_{m+1}, dy_{p+1}]\}, \\ (\text{mod. } \Omega_1, \ldots, \Omega_{m-1}).$$

D'un autre côté, on a immédiatement, d'après les relations (34)

$$\omega'_i \equiv a_{i,m-1}\Omega'_{m-1} \equiv a_{i,m-1}[dy_{m+1}, dy_{p+1}], \quad (\text{mod. } \Omega_1, \ldots, \Omega_{m-1}).$$

La comparaison de ces deux expressions de ω'_i montre que l'on doit avoir

$$\mathrm{L}_i b_{m+2} + \mathrm{M}_i c_{m+2} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Si les deux coefficients b_{m+2}, c_{m+2} ne sont pas nuls à la fois, le rapport $\frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{M}_i}$ est indépendant de i, et par suite (n° **77**), le système S″ dérivé de S′ contient $r-2$ équations au moins. *Le système* S *n'est donc pas un système normal.*

On ne peut supposer que les coefficients b_{m+2}, c_{m+2} sont nuls à la fois, car les expressions de dx_{r+1}, dx_{r+2} tirées des formules de transformations (31) ne contiendraient pas dy_{m+2}. Il en serait donc de même de $dx_1, \ldots, dx_r$ d'après les équations du système S et les identités (34), et par suite les fonctions φ_i ne dépendraient pas de la dérivée $f^q(\alpha)$.

79. Remarques diverses. — 1° Soit S un système de Pfaff à un nombre quelconque de variables, ne renfermant aucune équation de classe un. Si ce système contient un système spécial σ de p équations ($p > 1$), il est évident que le système dérivé S′ contiendra le système spécial σ' dérivé de σ. Inversement, si le système dérivé S′ contient un système spécial σ' de q équations ($q > 0$), S contient un système spécial σ de $q+1$ équations, dont σ' est le système dérivé. Dans cet énoncé, une équation de classe trois est regardée comme formant un système spécial. Supposons que q équations de S' puissent être mises sous la forme

$$(\sigma') \qquad dy_2 = y_3 dy_1, \quad dy_3 = y_4 dy_1, \quad \ldots, \quad dy_{q+1} = y_{q+2} dy_1,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{q+2}$ étant des variables indépendantes ; la relation $dy_{q+2}\delta y_1 - dy_1 \delta y_{q+2} = 0$ doit être une conséquence des équations de S qu'il faut joindre aux équations du système σ' pour avoir S. L'une au moins de ces relations doit contenir dy_{q+2}, et l'on peut supposer que dy_{q+2} n'entre que dans l'une d'elles, qui sera de la forme

$$dy_{q+2} = A dy_1 + \Omega,$$

Ω étant une forme de Pfaff *qui ne contient aucune des différentielles* $dy_1, dy_2, \ldots, dy_{q+2}$. Il faudra donc que l'on ait

$$\Omega(d)\delta y_1 - \Omega(\delta) dy_1 = 0$$

identiquement, et comme dy_1 ne figure pas dans Ω, cette forme Ω doit être identiquement nulle. Si le coefficient A ne dépendait que des variables $y_1, \ldots, y_{q+2}$, le système S contiendrait un système de $q+1$ équations à $q+2$ variables, c'est-à-dire un système complètement intégrable, cas que nous avons écarté. Le coefficient A est donc indépendant de $y_1, \ldots, y_{q+2}$, et l'on peut le prendre pour une nouvelle variable y_{q+3}, de sorte que S contient le système spécial de $q+1$ équations

$$dy_2 = y_3 dy_1, \quad \ldots, \quad dy_{q+2} = y_{q+3} dy_1.$$

2° Le raisonnement peut évidemment être généralisé. Si le $p^{\text{ième}}$ dérivé de S contient un système spécial de q équations, en remontant de proche en proche, on en conclut que S contient lui-même un système spécial de $p+q$ équations.

3° Soit S un système *normal* de r équations à $r+2$ variables, n'admettant aucune combinaison intégrable, et dont le second système dérivé S'' est un système spécial de $r-3$ équations. D'après la propriété générale qui vient d'être établie, le système S contient lui-même un système spécial de $r-1$ équations

$$dy_2 = y_3 dy_1, \quad \ldots, \quad dy_r = y_{r+1} dy_1,$$

et la dernière équation peut être supposée de la forme

$$A dy_{r+1} + B dy_{r+2} + C dy_1 = 0.$$

Le coefficient B doit être différent de zéro, car le système S serait lui-même un système spécial. On peut simplifier cette dernière équation en remplaçant la dernière variable y_{r+2} par une intégrale U de l'équation aux dérivées partielles

$$B\frac{\partial U}{\partial y_{r+1}} - A\frac{\partial U}{\partial y_{r+2}} = 0,$$

et finalement le système S peut être ramené à une forme réduite

$$(X) \qquad dy_2 = y_3 dy_1, \quad \ldots, \quad dy_r = y_{r+1} dy_1, \qquad dy_{r+2} = F dy_1,$$

où figure seulement une fonction arbitraire F des $r+2$ variables y_i, et qui est analogue à la forme réduite (IX′) des systèmes de trois équations à cinq variables.

Inversement, pour tout système S de cette forme, il est évident que le second système dérivé S″ contient le système spécial formé par les $r-3$ premières équations de S. Pour que S soit un système normal, il faut en outre que S′ soit de classe $r+2$. Or S′ se compose des $r-1$ équations

$$dy_2 = y_3 dy_1, \ldots, dy_{r-1} = y_r dy_1,$$
$$dy_{r+2} = \frac{\partial F}{\partial y_{r+1}} dy_r + \left(F - y_{r+1}\frac{\partial F}{\partial y_{r+1}}\right) dy_1.$$

Il est évident que ce système est de classe $r+2$, à moins que la dernière équation ne renferme pas la variable y_{r+1}, ce qui ne peut avoir lieu que si F est une fonction linéaire de y_{r+1}. *Le système* (X) *est donc un système normal lorsque* F *n'est pas une fonction linéaire de* y_{r+1}.

Les systèmes de cette espèce sont les plus simples après les systèmes spéciaux. On peut obtenir toutes les intégrales M_1 par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre où figurent une fonction arbitraire de la variable indépendante et ses dérivées jusqu'à un ordre fini. En effet, si on pose, dans les équations (X), $y_1 = \alpha$, $y_2 = f(\alpha)$, on en tire successivement $y_3 = f'(\alpha), \ldots, y_{r+1} = f^{(r-1)}(\alpha)$, et y_{r+2} est donné par l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre

$$dy_{r+2} = F(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(r-1)}(\alpha), y_{r+2})\, d\alpha.$$

4° Lorsque F est une fonction linéaire de y_{r+1}, $F = ay_{r+1} + b$, le système dérivé S′ se compose des $r-1$ équations

$$dy_2 = y_3 dy_1, \ldots, dy_{r-1} = y_r dy_1, \qquad dy_{r+2} = a\, dy_r + b\, dy_1,$$

et ce système est évidemment de classe $r+1$, puisque y_{r+1} n'y figure pas. D'ailleurs S est le prolongement de S′, puisqu'on obtient S en joignant à S′ l'équation $dy_r = y_{r+1} dy_1$. Ce système S′ ne peut donc être un système spécial. Si r est supérieur à quatre, son second dérivé est encore un système spécial de $r-4$ équations : ce système S′ peut donc être ramené à la forme réduite (X), où r est remplacé par $r-1$.

En continuant ainsi, on finira par être ramené à un système normal de la forme (X), dont le système S est le prolongement.

5° Considérons, en particulier, un système normal de trois équations à cinq variables,

$$\text{(XI)}\qquad dy_2 = y_3 dy_1,\qquad dy_3 = y_4 dy_1,\qquad dy_5 = F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)\,dy_1.$$

Si la fonction F ne renferme pas y_5, on obtient toutes les solutions au moyen des formules

$$y_1 = \alpha,\quad y_2 = f(\alpha),\quad y_3 = f'(\alpha),\quad y_4 = f''(\alpha),\quad y_5 = \int F(\alpha, f, f', f'')\,d\alpha,$$

$f(\alpha)$ étant une fonction arbitraire.

Il est aisé de trouver une condition nécessaire pour qu'un système de trois équations de Pfaff à cinq variables puisse être ramené à la forme (XI) où F ne contient pas y_5. En effet, ce système ne change pas quand on change y_5 en $y_5 + C$, quelle que soit la constante C. *Ce système admet donc un groupe de transformations à un paramètre.* Il en est évidemment de même de tout système de Pfaff qui peut être ramené à la forme (XI) par un changement de variables.

Inversement, soit S un système de trois équations de Pfaff à cinq variables admettant un groupe de transformations à un paramètre. Si l'on fait un changement de variables, de façon que les équations finies du groupe soient

$$x'_1 = x_1,\quad x'_2 = x_2,\quad x'_3 = x_3,\quad x'_4 = x_4,\quad x'_5 = x_5 + a,$$

la variable x_5 ne devra figurer dans les équations du système que par sa différentielle dx_5. On peut donc écrire les équations de ce système sous la forme

$$\omega_1 = 0,\qquad \omega_2 = 0,\qquad dx_5 + \omega_3 = 0,$$

ω_1, ω_2, ω_3 étant des formes de Pfaff ne renfermant que les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 et leurs différentielles. Dans le cas général, les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ forment un système de quatrième classe qui peut être ramené à la forme canonique (I) par un changement de variables, et le système proposé peut lui-même être ramené à la forme

$$\text{(XII)}\qquad dy_2 = y_3 dy_1,\qquad dy_3 = y_4 dy_1,\qquad dy_5 = f(y_1, y_2, y_3, y_4)\,dy_1 + \varphi\, dy_4,$$

un peu plus générale que la forme (XI), et dont la solution s'obtient aussi par des quadratures.

Nous citerons comme exemple un système signalé par M. Cartan,

$$dy_2 = y_3 dy_1,\qquad dy_3 = y_4 dy_1,\qquad dy_5 = y_4^2 dy_1,$$

qui admet un groupe de transformations à *quatorze* paramètres.

80. Problème de Monge ([1]). — Considérons un système de $n-1$ relations entre $n+1$ fonctions d'une variable $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, et leurs différentielles,

$$(37) \qquad \mathrm{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

les fonctions F_i étant homogènes en $dx_1, \ldots, dx_{n+1}$. Ces équations admettent une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire, car on peut se donner arbitrairement $x_{n+1} = f(x_1)$ par exemple, et il reste un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires pour déterminer $x_2, \ldots, x_n$ en fonction de x_1. On peut remplacer ce système (37) par un système équivalent de n équations de Pfaff à $n+2$ variables. Supposons, en effet, le système résolu par rapport à $\dfrac{dx_3}{dx_1}, \ldots, \dfrac{dx_{n+1}}{dx_1}$:

$$(37') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_3}{dx_1} = f_1\left(x_1, \ldots, x_{n+1}, \dfrac{dx_2}{dx_1}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dx_1} = f_{n-1}\left(x_1, \ldots, x_{n+1}, \dfrac{dx_2}{dx_1}\right); \end{cases}$$

en introduisant une nouvelle variable $u = \dfrac{dx_2}{dx_1}$, on est ramené à un système de Pfaff S de n équations à $n+2$ variables,

$$(38) \qquad dx_2 - u\,dx_1 = 0,$$
$$dx_3 - f_1(x_1, \ldots, x_{n+1}, u)\,dx_1 = 0, \quad \ldots, \quad dx_{n+1} - f_{n-1}\,dx_1 = 0,$$

qui peut être considéré comme le plus général de son espèce. Il y a donc équivalence complète entre le problème de Monge généralisé et l'intégration d'un système de Pfaff de l'espèce que nous venons d'étudier. *Le problème de Monge admet une solution*

([1]) Les systèmes les plus généraux d'équations de Monge ont été l'objet d'un assez grand nombre de travaux. Voir J.-A. SERRET, *Journal de Math.*, *1re série, tome XIII, p. 353, 1848* ; G. DARBOUX, *Id.*, *2e série, tome XVIII, p. 236, 1873, et 4e série, tome III, p. 305, 1887* ; J. HADAMARD, *Annales de l'École Normale, série 3, tome XVIII, p. 337, 1901* ; E. GOURSAT, *Bulletin de la Société Mathématique, tome XXXIII, p. 201, 1905* ; P. ZERVOS, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, tome CXL, p. 1013, tome CXLVI, p. 1080, Journal de Crelle, tome CXLIII, p. 300* ; D. HILBERT, *Festschrift Heinrich Weber, pp. 130-146*.

explicite lorsque le système de Pfaff correspondant est un système spécial, et dans ce cas seulement.

On peut aussi considérer des systèmes de $n-1$ équations où figurent les dérivées jusqu'à un ordre quelconque de n des fonctions inconnues x_i par rapport à la dernière, car il suffit de prendre pour nouvelles inconnues un certain nombre de ces dérivées pour être ramené à un système de la forme (37).

Considérons par exemple une équation

$$\frac{dz}{dx} = f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right), \tag{39}$$

où y et z sont deux fonctions inconnues de x. Posons $\frac{dy}{dx} = u$, $\frac{d^2y}{dx^2} = v$; l'équation (39) est remplacée par le système de Pfaff S de trois équations à cinq variables

$$\begin{gathered} \omega_1 = dy - u\,dx = 0, \qquad \omega_2 = du - v\,dx = 0, \\ \omega_3 = dz - f(x, y, z, u, v)\,dx = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

On a ici

$$\omega'_1 \equiv 0, \qquad \omega'_2 \equiv dv\delta x - dx\delta v,$$

$$\omega'_3 \equiv \frac{\partial f}{\partial v}(dv\delta x - dx\delta v), \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Le système dérivé S' est donc formé des deux équations

$$\omega_1 = dy - u\,dx = 0,$$

$$\omega_4 = \frac{\partial f}{\partial v}\omega_2 - \omega_3 = \frac{\partial f}{\partial v}du + \left(f - v\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx - dz = 0.$$

Pour que S soit un système spécial, les deux équations

$$\omega'_1 \equiv 0, \qquad \omega'_4 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_4)$$

doivent se réduire à une seule. Il faut pour cela que ω'_4 ne dépende pas de $du\delta v - dv\delta u$, c'est-à-dire que $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ soit nul. Il faut donc que f soit linéaire par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, et nous retrouvons une équation considérée plus haut (nº **75**),

$$\frac{dz}{dx} = \text{A}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \text{B}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right).$$

En particulier, nous voyons que l'équation de M. Hilbert $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ ne peut admettre de solution explicite de la forme (27).

Exemples. — I. — Lorsque les équations (37) ne renferment pas les variables elles-mêmes x_i, mais seulement leurs différentielles, le système équivalent (38) est de la forme

$$(38') \qquad dx_2 = u\,dx_1, \qquad dx_3 = f_1(u)dx_1, \;\ldots,\; dx_{n+1} = f_{n-1}(u)dx_1,$$

$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ ne dépendant que de la variable u. Nous avons remarqué plus haut (n° **77**) que ce système est toujours un système spécial. On peut donc dans ce cas obtenir sous forme explicite tous les systèmes de fonctions d'une variable, qui satisfont aux équations (37). Ce résultat peut être généralisé Considérons un système de q équations $(q < n - 1)$,

$$(41) \qquad F_i(dx_1, \ldots, dx_n, dx_{n+1}) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Si l'on adjoint à ce système $n - q - 1$ équations de même forme

$$F_{q+1}(dx_1, \ldots, dx_{q+1}) = 0, \;\ldots,\; F_{n-1} = 0,$$

le système obtenu, quelles que soient les fonctions $F_{q+1}, \ldots, F_{n-1}$, est de la forme que nous venons d'étudier. On peut donc aussi trouver l'intégrale générale du système (41) sous forme explicite, avec plusieurs fonctions arbitraires.

II. — Les formules générales qui donnent les coordonnées d'un point d'une courbe gauche à torsion constante peuvent s'écrire [1]

$$x = \int \frac{du}{1 + u^2 + v^2},$$

$$y = \int \frac{dv}{1 + u^2 + v^2},$$

$$z = \int \frac{v\,du - u\,dv}{1 + u^2 + v^2},$$

u et v étant des fonctions arbitraires d'un paramètre t. Pour que x, y, z puissent s'exprimer explicitement en fonction d'une variable auxiliaire, d'une fonction arbitraire de cette variable, et de ses dérivées

(1) Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, tome I, 2e édition, 1914, page 61.*

jusqu'à un ordre fini, il faudrait (¹) que le système de Pfaff équivalent de trois équations à cinq variables

$$S \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= (1 + u^2 + v^2)\,dx - du = 0, \\ \omega_2 &= (1 + u^2 + v^2)\,dy - dv = 0, \\ \omega_3 &= (1 + u^2 + v^2)\,dz - v\,du + u\,dv = 0 \end{aligned} \right.$$

fût un système spécial, ou que son système dérivé fût de classe inférieure à cinq. Or on a

$$\omega'_1 \equiv \frac{2v(dv\delta u - du\delta v)}{1 + u^2 + v^2},$$

$$\omega'_2 \equiv -\frac{2u(dv\delta u - du\delta v)}{1 + u^2 + v^2},$$

$$\omega'_3 \equiv \frac{2(du\delta v - \delta u dv)}{1 + u^2 + v^2},$$

$$(\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Le système dérivé est donc formé des deux équations

$$\Omega_1 = \omega_1 + v\omega_3 = 0, \qquad \Omega_2 = \omega_2 - u\omega_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$dx = -v\,dz + B\,du + C\,dv,$$
$$dy = u\,dz + B_1\,du + C_1\,dv,$$

B, C, B_1, C_1 ne dépendant que des variables u et v. Ainsi qu'on l'a remarqué plus haut (page 272), ce système est de cinquième classe, et par suite le système S est un système normal, non intégrable explicitement.

Pour ramener le système S à une forme simple (IX'), on peut modifier la méthode générale en observant que les deux premières équations du système forment un autre système de classe quatre, dont l'équation dérivée est

$$(1 + u^2 + v^2)(u\,dx + v\,dy) = u\,du + v\,dv.$$

En posant

$$(42) \qquad u = \operatorname{tg}\beta\cos\alpha, \qquad v = \operatorname{tg}\beta\sin\alpha.$$

(¹) En effet, les cosinus directeurs de la binormale sont respectivement

$$\frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}};$$

si x, y, z, s'exprimaient explicitement par des formules de la forme (27), u et v s'exprimeraient aussi explicitement.

cette équation devient

$$d\beta = \cos\alpha dx + \sin\alpha dy,$$

ce qu'on peut écrire

$$dY = X d\alpha,$$

en posant

$$(43) \qquad \begin{cases} X = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \\ Y = \beta - x\cos\alpha - y\sin\alpha. \end{cases}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} dX &= \sin\alpha dx - \cos\alpha dy + (x\cos\alpha + y\sin\alpha)d\alpha \\ &= (\beta - Y)d\alpha + \sin\alpha dx - \cos\alpha dy, \end{aligned}$$

et, en remplaçant dx et dy par leurs expressions tirées des équations du système,

$$dX = [\beta - \sin\beta\cos\beta - Y]d\alpha.$$

Enfin, la dernière équation du système S devient, après ce changement de variables,

$$dz = \sin^2\beta d\alpha.$$

Le système donné S est donc ramené à la forme

$$dY = X d\alpha, \qquad dX = [\beta - \sin\beta\cos\beta - Y]d\alpha, \qquad dz = \sin^2\beta d\alpha,$$

au moyen du changement de variables défini par les formules (42) et (43). On obtient l'intégrale générale de ce système en prenant α pour variable auxiliaire et en posant

$$(44) \qquad Y = f(\alpha), \qquad X = f'(\alpha), \qquad \beta - \sin\beta\cos\beta = f(\alpha) + f''(\alpha),$$

et z est donné par une quadrature,

$$z = \int \sin^2\beta d\alpha,$$

β étant une fonction de α définie par la troisième équation (44), où $f(\alpha)$ est une fonction arbitraire (¹).

(¹) C. Cartan, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e *série, t. XXVII*, 1910, *page* 179.

CHAPITRE VIII

MULTIPLICITÉS INTÉGRALES. — GENRE D'UN SYSTÈME DE PFAFF [1]

81. Eléments linéaires d'ordre quelconque. — Nous allons d'abord définir certaines multiplicités formées d'éléments linéaires issus d'un même point $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions. Considérons l'ensemble des éléments linéaires issus du point A dont les coordonnées $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ vérifient $n-p$ relations linéaires et homogènes distinctes ; nous dirons, en continuant à employer le langage de la géométrie, que cet ensemble d'éléments linéaires est un élément plan P à p dimensions. Par exemple, les éléments linéaires intégraux d'un système de Pfaff de r équations forment un élément plan à $n-r$ dimensions [2]. D'après les résultats classiques de la théorie des systèmes linéaires et homogènes à n indéterminées, tous les éléments linéaires contenus dans un élément plan à p dimensions peuvent se déduire de p éléments linéaires de cet ensemble. Désignons, pour abréger, par $e_1, e_2, \ldots, e_p$, les p éléments linéaires

$$(dx_1^{(1)}, dx_2^{(1)}, \ldots, dx_n^{(1)}),$$
$$(dx_1^{(2)}, dx_2^{(2)}, \ldots, dx_n^{(2)}), \ldots, (dx_1^{(p)}, dx_2^{(p)}, \ldots, dx_n^{(p)}),$$

et par $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p$ l'élément linéaire dont les n coordonnées sont

$$\lambda_1 dx_i^{(1)} + \lambda_2 dx_i^{(2)} + \ldots + \lambda_p dx_i^{(p)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous dirons que les p éléments linéaires $e_1, e_2, \ldots, e_p$ sont *distincts* s'il est impossible de trouver des valeurs des λ_i non toutes nulles, telles que les n coordonnées de l'élément $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$

(1) Le fond de ce Chapitre est l'œuvre de M. Cartan. J'ai seulement modifié quelques démonstrations, en particulier celles qui font l'objet du n° 83.

(2) Pour la commodité des notations et des raisonnements, nous regardons un élément linéaire $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ comme une multiplicité ponctuelle à *une* dimension. Un élément plan à p dimensions est le lieu de ∞^{p-1} éléments linéaires.

soient nulles à la fois. Pour que p éléments linéaires soient distincts, il faut et il suffit qu'ils n'appartiennent pas à un élément plan à moins de p dimensions. Lorsqu'il en est ainsi, ces p éléments $e_1, e_2, \ldots, e_p$ déterminent un élément plan P à p dimensions qui est le lieu de l'élément linéaire e, quand on donne aux paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tous les systèmes de valeurs possibles. Il est évident que tout élément plan P à p dimensions peut être représenté de cette façon d'une infinité de manières; il suffit de prendre dans cet élément p éléments linéaires quelconques $e_1, e_2, \ldots, e_p$, n'appartenant pas à un élément plan à moins de p dimensions; nous représenterons par $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ l'élément plan défini par ces p éléments linéaires distincts.

Si les p éléments linéaires $e_1, e_2, \ldots, e_p$ appartiennent à une multiplicité plane à q dimensions $(q < p)$, définie par les q éléments $e_1, e_2, \ldots, e_q$, l'élément $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$ appartient lui-même à cette multiplicité.

Nous dirons qu'un élément plan Q à q dimensions est contenu dans un autre élément plan P à p dimensions $(p > q)$, si tous les éléments linéaires de Q appartiennent à P. Pour que l'élément Q soit contenu dans l'élément P, il faut et il suffit que q éléments linéaires distincts de Q appartiennent à P. Inversement, si l'on prend dans un élément plan P à p dimensions un certain nombre $q \leqslant p$ d'éléments linéaires, distincts ou non, ces éléments linéaires déterminent un élément plan contenu dans P, et qui sera à q dimensions si les q éléments linéaires choisis sont distincts.

Soient P et Q deux éléments plans de même origine ayant respectivement p et q dimensions. Ces éléments plans peuvent avoir des éléments linéaires communs; nous supposerons qu'ils aient r éléments linéaires distincts communs et r seulement $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$. L'élément plan R déterminé par ces r éléments est contenu à la fois dans P et dans Q, et tous les éléments linéaires communs à P et à Q font partie de R; car si P et Q avaient un élément linéaire commun e_{r+1} non compris dans R, P et Q auraient $r+1$ éléments linéaires communs distincts $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}$.

L'ensemble des éléments linéaires qui appartiennent à un des deux éléments P et Q ne forme pas un élément plan, mais on peut définir, au moyen de ces deux éléments, un nouvel élément plan qui renferme tous les éléments linéaires de P et tous les éléments linéaires de Q, et qui est contenu dans tout autre élément plan jouissant de la même propriété.

Supposons P défini par les p éléments linéaires distincts $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, et Q défini par les q éléments linéaires distincts $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_q)$; l'élément linéaire

$$e = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda'_1 e'_1 + \ldots + \lambda'_q e'_q,$$

lorsqu'on donne aux coefficients λ_i, λ'_i tous les systèmes de valeurs possibles, décrit un élément plan P + Q, qui est au plus à $p+q$ dimensions. Il est à $p+q$ dimensions si les $p+q$ éléments e_i, e'_i sont distincts, c'est-à-dire si les deux éléments P et Q n'ont aucun élément linéaire commun. Lorsque P et Q ont r éléments linéaires distincts communs et r seulement, on peut supposer P et Q définis respectivement par les deux systèmes d'éléments linéaires

P $\qquad (e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$,

Q $\qquad (e_1, e_2, \ldots, e_r, e'_{r+1}, \ldots, e'_q)$.

Les $p+q-r$ éléments linéaires $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_p, e'_{r+1}, \ldots, e'_q$, sont distincts, sans quoi les éléments plans P et Q auraient plus de r éléments linéaires distincts comumns. L'élément e écrit plus haut peut aussi être représenté par

$$e = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r + \mu_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \mu_p e_p + \mu'_1 e'_{r+1} + \ldots + \mu'_q e'_q$$

et par conséquent décrit un élément à $p+q-r$ dimensions. Tel est, dans le cas général, le nombre de dimensions de l'élément plan P + Q qui vient d'être défini.

Si les deux éléments plans P et Q sont contenus dans un autre élément plan $\mathfrak{P}$ à ϖ dimensions, il est clair que l'élément P + Q est aussi contenu dans $\mathfrak{P}$, et par conséquent on a, entre les dimensions de ces divers éléments, la relation $p+q-r \leqslant \varpi$, ou

$$p + q \leqslant \varpi + r. \tag{1}$$

On déduit de là que, si deux éléments plans P et Q, d'ordres p et q respectivement, appartiennent à un élément plan d'ordre N, tel que $p+q > N$, les deux éléments P et Q ont en commun un élément plan dont l'ordre est au moins égal à $p+q-N$.

On démontrera de même, par voie de récurrence, que, si k éléments plans $P_1, \ldots, P_k$, de dimensions $p_1, \ldots, p_k$, ont en commun un élément plan d'ordre r, et sont contenus dans un élément plan à ϖ dimensions, on a l'inégalité

$$(1') \qquad \Sigma p_i \leqslant (k-1)\varpi + r.$$

Toutes les fois que la somme Σp_i est supérieure à $(k-1)\varpi$, on peut donc affirmer que les k éléments P_i ont en commun un élément d'ordre $\Sigma p_i - (k-1)\varpi$ au moins.

Remarque I. — Si les équations d'un élément plan à p dimensions ont été résolues par rapport à $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$, par exemple, il figure dans ces équations $p(n-p)$ coefficients arbitraires, et deux éléments correspondant à des systèmes différents de valeurs de ces coefficients sont distincts. Un élément plan à p dimensions de l'espace à n dimensions dépend donc de $p(n-p)$ paramètres arbitraires.

Plus généralement, soit P un élément à p dimensions; il renferme une infinité d'éléments Q à $q<p$ dimensions. Pour savoir de combien de paramètres dépendent ces éléments Q, supposons, comme tout à l'heure, les équations de l'élément P résolues par rapport à $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$. Pour avoir un élément Q à q dimensions contenu dans P, il suffit d'établir $p-q$ relations linéaires et homogènes entre $dx_1, \ldots, dx_p$. On introduit ainsi $q(p-q)$ coefficients arbitraires, en supposant, par exemple, ces équations résolues par rapport à $dx_{q+1}, \ldots, dx_p$. *Les éléments plans à q dimensions contenus dans un élément plan à p dimensions dépendent donc de $q(p-q)$ paramètres.*

Par exemple, un élément plan à $p-1$ dimensions, contenu dans un élément à p dimensions, dépend de $p-1$ paramètres.

Remarque II. — Soit P un élément plan à p dimensions, représenté par un système d'équations

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{n-p} = 0,$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-p}$ sont $n-p$ formes de Pfaff distinctes. On peut, d'une infinité de manières, trouver p nouvelles formes de Pfaff $\pi_1, \ldots, \pi_p$ formant avec $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-p}$, un système de n formes linéairement distinctes, et toute forme de Pfaff est une combinaison linéaire de ces n formes. Tout élément plan Q à q dimensions est donc représenté par un système de $n - q$ relations linéaires entre les n formes ω_i, ϖ_k, dont les coefficients peuvent être des fonctions quelconques des variables x_i. Pour que cet élément à q dimensions renferme l'élément à p dimensions représenté par les $n-p$ équations $\omega_i = 0$, il faut et il suffit que les $n-q$ relations qui définissent l'élément Q soient vérifiées identiquement quand on y fait $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_{n-p} = 0$, quelles que soient les valeurs de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_p$. Il faut donc que les formes $\omega_1, \ldots, \omega_{n-p}$ figurent seules dans ces relations. Donc, *tout élément plan Q à q dimensions, renfermant l'élément plan P à p dimensions défini par les $n-p$ équations $\omega_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-p)$, est défini par un système de $n-q$ relations linéaires distinctes entre les formes $\omega_1, \ldots, \omega_{n-p}$.*

La réciproque est évidente. En particulier, tout élément à $p+1$ dimensions renfermant P est défini par un système d'équations de la forme

$$\frac{\omega_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\omega_{n-p}}{\lambda_{n-p}},$$

et dépend de $n-p-1$ paramètres.

On verrait comme tout-à-l'heure que tout élément à q dimensions renfermant un élément à $p < q$ dimensions dépend en général de $(q-p)(n-q)$ paramètres.

82. Eléments intégraux d'ordre quelconque. — Un élément intégral à p dimensions d'un système de Pfaff est un élément plan à p dimensions, dont tous les éléments linéaires sont des éléments intégraux de ce système, et dont deux éléments linéaires quelconques sont en involution relativement au même système. Un élément de cette espèce sera représenté par E_p, l'indice p représentant le nombre de dimensions. Un élément du premier ordre sera représenté par E_1, ou par la lettre e, qui peut être affectée d'un indice quelconque.

Il résulte immédiatement de cette définition que tout élément plan à un nombre quelconque de dimensions contenu dans un élément intégral E_p est aussi un élément intégral. Ces éléments intégraux s'introduisent naturellement dans la recherche des multiplicités intégrales du système de Pfaff. Supposons, en effet, que par le point $A(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions il passe une intégrale M_p définie par les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, f_{n-p} = 0.$$

Tous les éléments linéaires issus de A et appartenant à M_p vérifient les $n-p$ relations $df_1 = 0, \ldots, df_{n-p} = 0$, et forment un élément plan P à p dimensions. Nous savons d'ailleurs que tous ces éléments linéaires sont deux à deux en involution (nº **3**). L'élément plan P est donc un élément intégral E_p. Pour qu'il passe par le point A une intégrale à p dimensions du système de Pfaff, *il est donc nécessaire qu'il existe au moins un élément intégral* E_p *issu du point* A. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Pour trouver une limite supérieure de l'ordre des intégrales d'un système de Pfaff, on est donc conduit à chercher l'ordre maximum des éléments intégraux issus d'un point quelconque de l'espace.

Soit e_1 ou E_1 un élément linéaire intégral; pour déterminer un élément intégral E_2 passant par E_1, il suffit de lui adjoindre un autre élément linéaire intégral e_2, en involution avec e_1. Il est clair en effet que tous les éléments linéaires $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ sont intégraux, et que deux éléments linéaires quelconques $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ sont en involution, car les covariants bilinéaires formés avec ces deux éléments sont égaux, à un facteur près, aux covariants bilinéaires formés avec les deux éléments e_1, e_2. Soit $E_2 = (e_1, e_2)$ l'élément intégral ainsi obtenu.

Pour avoir un élément intégral E_3 passant par E_2, il suffira de lui adjoindre un élément linéaire intégral e_3, *n'appartenant pas à* E_2, et en involution avec e_1 et e_2. Il est clair, en effet, que tous les éléments linéaires $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ sont intégraux, et on montre comme tout à l'heure que deux quelconques de ces éléments sont en involution. L'élément intégral E_3 ainsi obtenu sera représenté par (e_1, e_2, e_3) ou par (E_2, e_3). La méthode est générale. Soit $E_p = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ un élément intégral d'ordre p, déterminé par p éléments linéaires intégraux distincts, $e_1, e_2, \ldots, e_p$, deux à deux en involution. Pour obtenir un élément intégral E_{p+1} renfermant E_p, il faut lui adjoindre un nouvel élément linéaire intégral e_{p+1}, *n'appartenant pas à* E_p, qui soit en involution avec les p éléments $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

S'il n'existe pas d'élément linéaire intégral satisfaisant à ces conditions, E_p n'appartient à aucun élément intégral d'ordre supérieur à p.

D'une façon générale, un élément intégral E_p est déterminé par p éléments linéaires intégraux distincts, et deux à deux en involution, $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Un élément linéaire intégral $\mathcal{E}$, qui est en involution avec les p éléments linéaires $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est en involution avec tous les éléments linéaires de l'élément E_p qu'ils déterminent; nous dirons que $\mathcal{E}$ est *en involution avec* E_p. L'ensemble des éléments $\mathcal{E}$ en involution avec un élément E_p est aussi un élément plan $H(E_p)$, que l'on appelle *l'élément polaire de* E_p. Soient, en effet, $e_1, e_2, \ldots, e_p$ un système de p éléments linéaires distincts de E_p. Les éléments polaires $H(e_1), \ldots, H(e_p)$ de ces divers éléments linéaires sont évidemment des éléments plans, et $H(E_p)$ se compose des éléments linéaires qui appartiennent à la fois à ces p éléments plans $H(e_i)$: c'est donc aussi un élément plan. L'élément polaire $H(E_p)$ de l'élément intégral E_p contient évidemment l'élément E_p lui-même : il a donc au moins p dimensions, et s'il n'a que p dimensions, il se confond avec l'élément E_p lui-même. Il est important de remarquer que $H(E_p)$ n'est pas nécessairement un élément intégral ; le cas où il en est ainsi sera examiné plus loin (n° **87**).

83. Détermination des éléments intégraux. — Soit E_{p-1} un élément intégral d'ordre $p-1$, déterminé par $p-1$ éléments linéaires distincts $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$. Pour obtenir un élément intégral E_p renfermant E_{p-1}, il faut joindre à E_{p-1} un élément intégral e_p, non contenu dans E_{p-1}, et en involution avec E_{p-1}. Cet élément e_p doit donc appartenir à l'élément polaire $H(E_{p-1})$, et inversement, en adjoignant aux éléments $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$ un élément e_p appartenant à $H(E_{p-1})$ et non contenu dans E_{p-1}, on détermine un élément E_p renfermant E_{p-1}. Si l'élément polaire $H(E_{p-1})$ se confond avec E_{p-1}, il n'y a pas d'élément intégral E_p contenant E_{p-1}. Si $H(E_{p-1})$ est un élément à p dimensions, il forme lui-même un élément E_p renfermant E_{p-1}, et c'est le seul élément E_p contenant E_{p-1}. Prenons enfin le cas où l'élément polaire $H(E_{p-1})$ est à $p-1+r_p$ dimensions [1] $(r_p > 1)$. Cet élément $H(E_{p-1})$ est alors déterminé par les $p-1$ éléments $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$, et par r_p éléments $e'_1, \ldots, e'_{r_p}$ n'appartenant pas à E_{p-1}, les $p-1+r_p$ éléments

$$e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}, \qquad e'_1, e'_2, \ldots, e'_{r_p}$$

étant distincts, et tout élément $\mathcal{E}$ de $H(E_{p-1})$ est de la forme

$$\mathcal{E} = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{p-1} e_{p-1} + \mu_1 e'_1 + \ldots + \mu_{r_p} e'_{r_p}.$$

Soit Q l'élément plan à r_p dimensions déterminé par les r_p éléments $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{r_p}$; cet élément Q n'est pas nécessairement un élément intégral, et n'a aucun élément linéaire commun avec E_{p-1}. Tout élément E_p contenant E_{p-1} est déterminé par E_{p-1} et un élément $\mathcal{E}$ de $H(E_{p-1})$ n'appartenant pas à E_{p-1}, ou, ce qui revient au même, par E_{p-1} et un élément e' de Q. En effet, l'élément à p dimensions $(E_{p-1}, \mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ a l'expression écrite ci-dessus, est évidemment identique à l'élément (E_{p-1}, e'), où

$$e' = \mu_1 e'_1 + \ldots + \mu_{r_p} e'_{r_p}.$$

Tout élément E_p contenant E_{p-1} a donc un élément linéaire commun avec l'élément Q. Il ne peut avoir plus d'un élément linéaire commun avec Q. Si, par exemple, un élément E_p avait en commun avec Q les deux éléments e'_1, e'_2, les $p+1$ éléments $e_1, \ldots, e_{p-1}, e'_1, e'_2$ ne seraient pas distincts, contrairement à l'hypothèse. Les éléments E_p contenant E_{p-1} correspondent donc d'une façon univoque aux éléments linéaires de l'élément Q à r_p dimensions; *ces éléments* E_p *dépendent donc de* $r_p - 1$ *paramètres.*

Lorsque r_p est nul, l'application de la règle conduirait à une valeur négative pour le nombre des paramètres dont dépend l'élément E_p renfermant E_{p-1}; nous avons vu que dans ce cas il n'existe pas d'élément de cette espèce. Si $r_p = 1$, nous avons vu qu'il y a un seul élément E_p contenant E_{p-1}.

[1] M. Cartan désigne par $r_p + 1$ le nombre que je désigne par r_p.

La proposition s'applique aussi pour $p = 1$. Un élément d'ordre zéro E_0 est constitué par un point $(x_1, \ldots, x_n)$; l'élément polaire $H(E_0)$ se compose de l'ensemble des éléments linéaires intégraux issus de ce point. Ces éléments linéaires forment une multiplicité ponctuelle à $r_1 = n - r$ dimensions, et les éléments linéaires intégraux qui renferment E_0 dépendent bien de $r_1 - 1$ paramètres.

Prenons encore $p = 2$. Les coordonnées d'un élément linéaire intégral en involution avec un élément linéaire intégral e_1 doivent vérifier les $2r$ relations

$$\omega_i = 0, \qquad \omega'_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'élément e_1 n'est pas un élément singulier, les r équations $\omega'_i = 0$ se réduisent à s relations distinctes, s étant le caractère du système (n° **71**).

Les éléments linéaires intégraux en involution avec e_1 forment donc une multiplicité ponctuelle à $n - r - s$ dimensions, et l'on a $n - r - s = 1 + r_2$, ou

$$r_2 = n - r - s - 1.$$

Les éléments intégraux E_2 qui renferment e_1 dépendent donc de $n - r - s - 2$ paramètres. Si $n = r + s + 2$, il y a un seul élément intégral E_2 passant par e_1 ; c'est, par exemple, le cas pour le système le plus général de deux équations à 6 variables ($n = 6$, $r = s = 2$). On le vérifie facilement au moyen de l'interprétation géométrique du n° **70**.

Si l'on a $n < r + s + 2$, un élément e_1 non singulier n'appartient à aucun élément intégral E_2. Tel est le cas d'un système de deux équations à cinq variables et de classe cinq (n° **76**) ; on a

$$n = 5, \qquad r = 2, \qquad s = 2.$$

Les nombres r_p vont en diminuant quand l'indice p croît.

Soit E_p un élément intégral à p dimensions et E_{p-1} un élément intégral à $(p - 1)$ dimensions contenu dans E_p. L'élément polaire $H(E_p)$ à $p + r_{p+1}$ dimensions est évidemment contenu dans l'élément polaire $H(E_{p-1})$ à $p-1+r_p$ dimensions, car tout élément linéaire intégral en involution avec E_p est aussi en involution avec E_{p-1}. On a donc, entre les dimensions de ces deux éléments, l'inégalité $p + r_{p+1} \leqslant p - 1 + r_p$, ou

$$r_p \geqslant r_{p+1} + 1. \tag{2}$$

Cette inégalité subsiste évidemment si $r_{p+1} = 0$; elle s'applique aussi pour $p = 1$.

La différence $r_p - r_{p+1}$ est au plus égale à $r + 1$.

Considérons, en effet, un élément E_{p-1} et l'élément polaire $H(E_{p-1})$, qui est déterminé par E_{p-1} et par r_p éléments linéaires, que nous représenterons par

$$\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_p - 1},$$

n'appartenant pas à E_{p-1}. Un élément E_{p+1} renfermant l'élément $E_p = (E_{p-1}, \varepsilon)$ s'obtient en adjoignant à E_p un élément $\varepsilon' = \lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_{r_p - 1} \varepsilon_{r_p - 1}$, en involution avec ε. Les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_p - 1}$ doivent vérifier r relations linéaires qui ne sont distinctes que si le caractère s du système est égal à r, et, comme ces paramètres y figurent d'une façon homogène, l'élément E_{p+1} qui contient E_p dépend au moins de $r_p - 2 - r$ paramètres distincts. On a donc

$$r_p - 2 - r \leqslant r_{p+1} - 1,$$

c'est-à-dire

$$r_p - r_{p+1} \leqslant r + 1. \tag{3}$$

Il est à remarquer que l'inégalité est évidente si $r_p - r - 2$ est négatif ou nul. Elle s'applique aussi pour $r_{p+1} = 0$.

Si les coefficients du système S sont quelconques, il est clair que les r relations, qui expriment que les éléments ε, ε' sont en involution, sont distinctes, et l'on a $r_p - r_{p+1} = r + 1$. Dans ce cas, le caractère s est égal à r, et l'on a bien $r_1 - r_2 = r + 1$.

Remarquons, une fois pour toutes, que les nombres r_p allant en diminuant, on finira par en trouver un $r_{g+1} = 0$ (voir n° **85**). Les nombres r_p d'indice supérieur à $g + 1$ n'existent pas. On suppose toujours dans les raisonnements que l'indice p est inférieur ou au plus égal à g.

Il existe une relation d'inégalité très simple entre trois nombres consécutifs r_p, r_{p+1}, r_{p+2}. Soit E_{p-1} un élément intégral contenu dans un élément intégral $E_{p+1} = (E_{p-1}, \varepsilon, \varepsilon')$. Les deux éléments $E_p = (E_{p-1}, \varepsilon)$ et $E'_p = (E_{p-1}, \varepsilon')$ sont distincts et contenus dans E_{p+1}. Soient $H(E_{p-1})$, $H(E_p)$, $H(E'_p)$, $H(E_{p+1})$ les éléments polaires correspondants de ces quatre éléments intégraux ; le premier a $p-1+r_p$ dimensions, le second et le troisième ont $p+r_{p+1}$ dimensions, et le dernier a $p+1+r_{p+2}$ dimensions. Tout élément e de $H(E_{p+1})$ appartient aux deux éléments $H(E_p)$ et $H(E'_p)$, et inversement tout élément commun à $H(E_p)$ et $H(E'_p)$ appartient à $H(E_{p+1})$. D'autre part, les deux éléments $H(E_p)$, $H(E'_p)$ font partie de $H(E_{p-1})$. On a donc, en vertu de la relation générale (1), entre les dimensions de ces quatre éléments,

$$2p + 2r_{p+1} \leqslant p + 1 + r_{p+2} + p - 1 + r_p,$$

inégalité que l'on peut encore écrire

$$(4) \qquad r_p - r_{p+1} \geqslant r_{p+1} - r_{p+2}.$$

La démonstration s'applique quel que soit p, pourvu que les nombres r_p, r_{p+1}, r_{p+2} existent. *La différence $r_p - r_{p+1}$ ne peut donc augmenter avec p.*

La relation (3) est elle-même une conséquence de l'inégalité (4). On a en effet $r_1 - r_2 = s + 1 \leqslant r + 1$, et par suite $r_p - r_{p+1} \leqslant r + 1$, quel que soit p.

Remarque I. — Dans la définition du nombre r_p relatif à un élément intégral E_{p-1}, nous supposons que cet élément E_{p-1} est un élément arbitraire de cette espèce. Pour certains éléments E_{p-1} choisis d'une façon particulière, il peut se faire que les éléments linéaires en involution avec E_{p-1} forment une multiplicité à plus de $p-1+r_p$ dimensions. De tels éléments sont appelés *éléments singuliers*. Un élément $E_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ peut lui-même être singulier, si, pour les coordonnées de ce point, tous les déterminants d'ordre r déduits du tableau des coefficients du système de

Pfaff sont nuls. Les éléments linéaires intégraux issus de ce point forment alors un élément plan à plus de $n-r$ dimensions.

Remarque II. — Soit I_p^q le nombre de paramètres dont dépendent les éléments E_{p+q} qui renferment un élément non singulier E_p, en supposant bien entendu qu'il existe de tels éléments, c'est-à-dire que $p+q$ est au plus égal à g (voir n° **85**). Les éléments E_{p+q-1} qui renferment l'élément E_p dépendent par hypothèse de I_p^{q-1} paramètres. Chaque élément non singulier de cette espèce appartient à son tour à $\infty^{r_{p+q-1}}$ éléments E_{p+q}. Le nombre I_p^q est donc au plus égal à $I_p^{q-1}+r_{p+q}-1$; mais, pour avoir la valeur de I_p^q, il faut diminuer le nombre précédent du nombre des paramètres dont dépendent les éléments E_{p+q-1} qui renferment l'élément E_p et appartiennent à un même élément E_{p+q}. Pour évaluer ce dernier nombre, il suffit de raisonner comme plus haut (page 350). L'élément E_{p+q} est déterminé par les p éléments $e_1, e_2, \ldots, e_p$ qui déterminent E_p et par q éléments $e'_1, \ldots, e'_q$ distincts des premiers. Soit Q l'élément plan à q dimensions déterminé par les q éléments linéaires $e'_1, \ldots, e'_q$. Un élément E_{p+q-1} contenant E_p et contenu dans E_{p+q} est déterminé d'une façon univoque par un élément à $q-1$ dimensions contenu dans Q. Ces éléments E_{p+q-1} dépendent donc de $q-1$ paramètres et l'on a

$$I_p^q = I_p^{q-1} + r_{p+q} - 1 - (q-1) = I_p^{q-1} + r_{p+q} - q.$$

De la formule $I_p^{p+1} = r_{p+1} - 1$, on déduit donc par récurrence la formule générale

$$(5)\qquad \begin{aligned} I_p^q &= r_{p+1} + \ldots + r_{p+q} - [1+2+\ldots+q] \\ &= r_{p+1} + \ldots + r_{p+q} - \frac{q(q+1)}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, les éléments E_p qui contiennent l'élément E_0 dépendent de

$$(6)\qquad r_1 + \ldots + r_p - \frac{p(p+1)}{2}$$

paramètres.

De ce qui précède résulte la possibilité, au moins théorique, de déterminer les nombres r_p par des calculs linéaires, et de former les équations des éléments intégraux des divers ordres. Nous allons indiquer, au paragraphe suivant, comment les calculs peuvent être effectués.

84. Calcul des nombres r_p. — Tout élément intégral E_p est représenté par un système de $n-p$ relations

$$(E_p)\qquad \varpi_1=0,\quad \varpi_2=0,\quad \ldots,\quad \varpi_{n-p}=0,$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-p}$ étant $n-p$ formes de Pfaff distinctes ; les r formes $\omega_1, \ldots, \omega_r$ qui figurent dans les équations du système S font partie des précédentes, ou en sont des combinaisons linéaires.

Pour qu'un élément linéaire intégral $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ soit en involution avec l'élément E_p, il faut que les r équations

$$\omega'_1=0,\quad \ldots,\quad \omega'_r=0$$

soient vérifiées par tous les éléments linéaires $(dx_1, \ldots, dx_n)$ qui satisfont aux équations de E_p. Si on ordonne l'équation $\omega'_i=0$ par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$, elle prend la forme

$$\omega'_i=\Omega_{i1}(\delta)dx_1+\Omega_{i2}(\delta)dx_2+\ldots+\Omega_{in}(\delta)dx_n=0,$$

$\Omega_{i1}, \ldots \Omega_{in}$ étant de nouvelles formes linéaires en $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$. Pour que cette équation $\omega'_i=0$ soit une conséquence des équations de E_p, il faut et il suffit que tous les déterminants d'ordre $n-p+1$ déduits de la matrice formée par les coefficients de $dx_1, \ldots, dx_n$ dans les $n-p+1$ équations

$$\varpi_1=0,\quad \ldots,\quad \varpi_{n-p}=0,\qquad \omega'_i=0$$

soient nuls. En prenant successivement $i=1, 2, \ldots, r$, et en adjoignant les r relations $\omega_i(\delta)=0$, on obtient N équations de Pfaff distinctes que doivent vérifier les δx_i pour que l'élément correspondant soit en involution avec E_p. Il suffira de remplacer dans ces équations δx_i par dx_i pour avoir les équations de l'élément polaire $H(E_p)$. Cet élément ayant au moins p dimensions, puisqu'il contient E_p, le nombre N est au plus égal à $n-p$; si l'élément E_p n'est pas un élément singulier, on a, d'après la définition du nombre r_{p+1}, $n-N=p+r_{p+1}$, et par suite $r_{p+1}=n-p-N$.

Lorsque les équations de E_p sont résolues par rapport à $n-p$ des différentielles, on peut opérer plus simplement. Si, par exemple, on a résolu ces équations par rapport à dx_{p+1}, ..., dx_n, en remplaçant dx_{p+1}, ..., dx_n par leurs expressions au moyen de dx_1, ..., dx_p dans les équations $\omega'_i = 0$, on aura les équations de $H(E_p)$ en égalant à zéro les coefficients de dx_1, ..., dx_p dans les résultats de cette substitution, et en adjoignant les équations $\omega_i = 0$.

Puisque l'élément polaire $H(E_p)$ contient l'élément E_p, les $N = n - p - r_{p+1}$ équations de cet élément sont de la forme (n° **81**)

$$A_{i1}\varpi_1 + A_{i2}\varpi_2 + \ldots + A_{i,n-p}\varpi_{n-p} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Tout élément E_{p+1} renfermant E_p est lui-même représenté par un système d'équations de la forme

$$\frac{\varpi_1}{\lambda_1} = \frac{\varpi_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\varpi_{n-p}}{\lambda_{n-p}}.$$

Pour que l'élément plan à $p + 1$ dimensions représenté par ces équations soit un élément intégral E_{p+1}, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans l'élément $H(E_p)$, c'est-à-dire que les $n - p$ paramètres λ_i vérifient les N relations linéaires distinctes

$$A_{i1}\lambda_1 + A_{i2}\lambda_2 + \ldots + A_{i,n-p}\lambda_{n-p} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Il y a donc $n - p - N = r_{p+1}$ de ces paramètres qui restent arbitraires et, comme ils figurent d'une façon homogène dans les équations de E_{p+1}, on voit bien que ces éléments E_{p+1} dépendent bien de $r_{p+1} - 1$ paramètres arbitraires, comme on l'a reconnu directement.

L'emploi des formes symboliques de différentielles permet de former d'une façon très symétrique les équations de $H(E_p)$. Puisque E_p est un élément intégral, on a les r congruences

$$\omega'_i = 0, \qquad (\text{mod. } \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-p}),$$

que l'on peut écrire

$$\omega'_i = \sum_{h,k} A_{ihk}\varpi_h\varpi_k + \Omega_{i1}\pi_1 + \ldots + \Omega_{ip}\pi_p, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$ étant des formes de Pfaff qui forment avec $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-p}$ un système de n formes distinctes, et les formes Ω_{ik} étant des combinaisons linéaires des formes $\varpi_1, \ldots, \varpi_{n-p}$. Les éléments linéaires intégraux en involution avec E_p vérifient les relations

$$\omega_i(\delta) = 0, \qquad \Omega_{ik}(\delta) = 0,$$

et inversement. Il suffit de remplacer δ par d pour avoir les équations de l'élément polaire $H(E_p)$. On vérifie bien que les premiers membres sont des combinaisons linéaires de $\varpi_1, \ldots, \varpi_{n-p}$. Les conditions qui expriment que les $n-p$ équations $\varpi_i = 0$ représentent un élément intégral de S expriment aussi que *le système* S *fait partie du système dérivé du système de Pfaff* S_1 *des* $n-p$ *équations* $\varpi_i = 0$. La recherche d'un système S_1 jouissant de cette propriété revient donc à la détermination des éléments intégraux de S.

L'application de cette méthode permet de déterminer de proche en proche tous les éléments intégraux d'un ordre quelconque d'un système de Pfaff. Supposons, pour fixer les idées, que le système donné puisse être résolu par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$. On aura les équations générales d'un élément intégral du premier ordre E_1 en adjoignant aux équations de S les $n-r-1$ équations

$$\frac{dx_{r+1}}{\lambda_1} = \frac{dx_{r+2}}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda_{n-r}},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ sont arbitraires ; pour des valeurs quelconques de ces paramètres, on aura un élément non singulier.

On peut ensuite, en appliquant la méthode générale, former les équations d'un élément E_2 contenant E_1, et cet élément E_2 dépendra de $r_2 - 1$ nouveaux paramètres. En continuant ainsi, on obtiendra de proche en proche tous les éléments intégraux à un nombre quelconque de dimensions. On n'est arrêté dans l'application de la méthode que si l'on arrive à un élément E_p qui est identique à son élément polaire. Il est clair que ce procédé permet de former les équations de *tous* les éléments intégraux, singuliers ou non singuliers.

Si les paramètres dont dépend un élément E_p ne satisfont à aucune relation d'égalité, cet élément n'est pas singulier ; si ces paramètres sont tels que l'élément polaire $H(E_p)$ ait un nombre de dimensions supérieur au nombre normal pour un élément quelconque d'ordre p, cet élément est un élément singulier.

Il est évident que l'on n'a que des calculs linéaires à effectuer, et les coefficients des différentielles dx_i dans les équations de l'élément E_p le plus général à p dimensions sont des fonctions rationnelles de certains paramètres. Le nombre des paramètres distincts dont dépend l'élément E_p a été calculé plus haut (n° **83**).

85. Genre d'un système. — Considérons la suite des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ qui ont été définis plus haut, et qui vont en diminuant avec l'indice, et soit r_g le dernier de ces nombres qui soit différent de zéro. Le nombre g correspondant s'appelle le *genre* du système; pour un système de genre g, la suite des nombres r_p s'arrête donc à r_g et l'on a la suite d'inégalités

$$(7) \qquad r_1 > r_2 > \ldots r_{g-1} > r_g > 0.$$

Le nombre suivant r_{g+1} serait nul; l'élément polaire d'un élément E_g est à g dimensions seulement et se confond avec E_g lui-même, si cet élément ne satisfait à aucune condition particulière.

Il est facile d'avoir une limite supérieure du nombre g; en effet, puisque les nombres r_p vont en diminuant d'une unité au moins quand on passe d'un nombre au suivant, on a $r_g \leqslant r_1 - (g-1)$, ou $r_g \leqslant n+1-r-g$, et, comme r_g est au moins égal à un, on a $g \leqslant n-r$, résultat évident *a priori*, car il ne peut y avoir d'éléments intégraux à plus de $n-r$ dimensions. Dans le cas où $g=n-r$, il passe un élément E_{n-r} par chaque point de l'espace et un seul, et le système est complètement intégrable. On peut confirmer ce résultat en observant que g ne peut être égal à $n-r$ que si toutes les différences $r_p - r_{p+1}$ sont égales à l'unité. En particulier, on doit avoir $r_1 = r_2 + 1$, et le caractère s doit être nul. Inversement, si le système S est complètement intégrable, deux éléments linéaires intégraux quelconques sont en involution et l'élément polaire d'un élément intégral d'ordre quelconque $H(E_{p-1})$ se compose de l'ensemble des éléments linéaires intégraux issus de E_0. On a donc $p-1+r_p=n-r$, ou $r_p=n-r-p+1$. Les nombres $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vont donc en diminuant constamment d'une unité jusqu'au dernier r_g, où $g=n-r$, qui est égal à l'unité.

On verra un peu plus loin (p. 362) une limite inférieure du nombre g.

En résumé, *pour un système de Pfaff quelconque, il existe une suite de g nombres entiers positifs décroissants, tels que :*

Par un point arbitraire E_0 *de l'espace, il passe* ∞^{r_1-1} *éléments* E_1 ;

Tout élément E_1 *non singulier appartient à* ∞^{r_2-1} *éléments* E_2 ;

Tout élément E_2 *non singulier appartient à* ∞^{r_3-1} *éléments* E_3 ;

. . . . ;

Tout élément E_{g-1} *non singulier appartient à* ∞^{r_g-1} *éléments* E_g, *si* $r_g > 1$, *et à un seul élément* E_g, *si* $r_g = 1$;

Un élément E_g *non singulier n'appartient à aucun élément* E_{g+1}.

Cela ne signifie pas qu'il ne peut exister d'éléments intégraux E_m à plus de g dimensions ; mais, s'il existe de tels éléments, tous les éléments E_g qui y sont contenus sont des éléments singuliers. Nous dirons aussi qu'un élément E_m, dont l'ordre m dépasse le genre du système, est un élément singulier.

Considérons, par exemple, le système de deux équations (n° **76**)

$$\omega_1 = dx_2 - x_3 dx_1 = 0, \qquad \omega_2 = dx_4 - x_5 dx_1 = 0 ;$$

on a, pour deux éléments en involution,

$$\omega'_1 = dx_3 \delta x_1 - dx_1 \delta x_3 = 0,$$
$$\omega'_2 = dx_5 \delta x_1 - dx_1 \delta x_5 = 0.$$

Ces deux équations, où l'on regarde δx_1, δx_3, δx_5 comme les indéterminées, n'admettent pas d'autre solution que

$$\frac{\delta x_1}{dx_1} = \frac{\delta x_3}{dx_3} = \frac{\delta x_5}{dx_5},$$

si dx_1 n'est pas nul. Ce système est donc de genre *un*, et un élément intégral arbitraire E_1 n'appartient à aucun élément E_2. Mais si l'on a $dx_1 = 0$, les deux équations $\omega'_1 = 0$, $\omega'_2 = 0$ se réduisent à une seule $\delta x_1 = 0$. Par chaque point de l'espace il passe donc un élément du second ordre E_2, défini par les équations $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, $dx_4 = 0$, quoique le système soit de genre un.

D'une façon générale, supposons que par un point *quelconque* de l'espace il passe un élément intégral E_m *et un seul ;* le genre g du système est au plus égal à m et, *s'il lui est égal, le système est* *complètement intégrable.* D'abord, il est évident que le genre g ne peut être supérieur à m, car, si l'on avait $g > m$, chaque point de l'espace appartiendrait à une infinité d'éléments E_m. Si l'on a $g = m$, l'élément E_g, qui passe par un point de l'espace, doit contenir tous les éléments linéaires intégraux issus de ce point. On a donc $g = n - r$, et nous venons de remarquer que, dans ce cas, le système est complètement intégrable.

Ceci conduit à généraliser la définition donnée plus haut (n° **83**) des éléments singuliers. M. Cartan dit qu'un élément E_g est singulier s'il appartient à un élément E_{g+1}, qu'un élément E_{g-1} est singulier s'il appartient à plus de $\infty^{r_g - 1}$ éléments E_g, ou si tous les éléments E_g auxquels il appartient sont singuliers, ... qu'un élément E_0 est singulier si par ce point passe plus de $\infty^{r_1 - 1}$ éléments E_1, ou si tous ces éléments linéaires sont singuliers.

Les conditions auxquelles doit satisfaire un élément intégral singulier étant des conditions d'*égalité*, il est clair que l'on peut toujours, et d'une infinité de manières, trouver une suite d'éléments intégraux

$$E_0, E_1, \ldots, E_g$$

tels que chaque élément appartienne au suivant, et qu'aucun d'eux ne soit singulier. Si tous les éléments d'une multiplicité intégrale M_p ($p \leqslant g$) sont des éléments non singuliers, on peut affirmer que par M_p il ne passe aucune intégrale à plus de g dimensions. Nous verrons un peu plus loin que par M_p il passe au moins une intégrale M_g.

86. Caractères d'un système. — Soit S un système de genre g. De l'inégalité (4) on déduit que les nombres $r_1 - r_2 - 1$, $r_2 - r_3 - 1$, ..., $r_{g-1} - r_g - 1$, $r_g - 1$, dont aucun ne peut être négatif, forment une suite décroissante

$$(8) \qquad r_1 - r_2 - 1 \geqslant r_2 - r_3 - 1 \geqslant \ldots \geqslant r_{g-1} - r_g - 1 \geqslant r_g - 1;$$

la dernière inégalité s'obtient en faisant $p = g - 1$, $r_{g+1} = 0$ dans la relation (4).

Les nombres de cette suite ont été appelés par M. Cartan les *caractères* successifs du système S, et on les désigne par la lettre s.

$$(9)\quad \begin{cases} s_1 = r_1 - r_2 - 1, \\ s_2 = r_2 - r_3 - 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ s_{g-1} = r_{g-1} - r_g - 1, \\ s_g = r_g - 1, \end{cases}$$

et les inégalités (8) peuvent s'écrire d'une façon abrégée

$$(8')\quad s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \dots \geqslant s_{g-1} \geqslant s_g\,;$$

s_1, le premier caractère, est identique au caractère s défini plus haut, s_2 est le second caractère, ... Il y a g caractères pour un système de genre g. Quelques-uns de ces caractères peuvent être nuls ; mais si s_ν est nul ($\nu < g$), tous les caractères suivants $s_{\nu+1}, \dots$ jusqu'à s_g sont nuls aussi.

En ajoutant les formules (9) membre à membre, il vient

$$s_1 + s_2 + \dots + s_g = r_1 - g = n - r - g,$$

et l'on en tire

$$(10)\quad g = n - r - (s_1 + s_2 + \dots + s_g).$$

Si on pose $r = s_0$, cette formule devient

$$(10')\quad g = n - (s_0 + s_1 + \dots + s_g).$$

Prenons, par exemple, un système de deux équations à 6 variables sans élément caractéristique. On a $n = 6$, $r = 2$, $s_1 = 2$, $r_1 = n - r = 4$, $r_2 = r_1 - 1 - s_1 = 1$, et par suite $g = 2$, $s_2 = 0$. Le système est de genre deux, comme on devait s'y attendre d'après ce qui a été dit antérieurement (nos **70, 83**).

Lorsqu'un système est complètement intégrable, tous les caractères sont nuls, et inversement. Il suffit d'ailleurs que le premier caractère soit nul pour que tous les autres soient nuls aussi.

D'après l'inégalité (3), tous les caractères successifs sont au plus égaux à r, et l'on a les inégalités

$$r_1 - r_2 \leqslant r + 1, \quad r_2 - r_3 \leqslant r + 1, \; \dots, \; r_{g-1} - r_g \leqslant r + 1,$$

et par suite $r_1 - r_q \leqslant (r+1)(q-1)$, ou, en remplaçant r_1 par $n-r$,

$$(11) \qquad r_q - 1 \geqslant n - q(r+1).$$

Si le nombre q ne dépasse pas le quotient entier de n par $r+1$, $r_q - 1$ est positif, et par suite le système est au moins de genre q. Donc, *le genre d'un système de Pfaff est au moins égal au quotient, à une unité près, du nombre des variables par le nombre des équations augmenté d'une unité.*

Si les coefficients du système S sont quelconques, les inégalités précédentes doivent être remplacées par des égalités. Soient q le quotient de la division de n par $(r+1)$, k le reste; on a $g = q$,

$$r_1 = n - r,$$
$$r_2 = n + 1 - 2(r+1), \ldots, n_q = n + 1 - q(r+1) = k + 1,$$
$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{q-1} = r, \qquad s_q = k.$$

En particulier, s'il y a une seule équation $\omega = 0$, le genre est le quotient du nombre des variables par 2; il est égal à p s'il y a $2p$ ou $2p+1$ variables, en supposant bien entendu que les coefficients de ω ne satisfont à aucune relation d'égalité particulière (Cf. n° **6**).

87. Systèmes de première espèce. — M. Cartan appelle *systèmes de première espèce* les systèmes pour lesquels le $g^{\text{ième}}$ caractère s_g est nul. Supposons, d'une façon plus générale, que tous les caractères à partir de s_ν ($\nu \leqslant g$) soient nuls, le caractère $s_{\nu-1}$ n'étant pas nul :

$$s_{\nu-1} > 0, \qquad s_\nu = s_{\nu+1} = \ldots = s_g = 0.$$

Les nombres r_ν, $r_{\nu+1}$, ... allant en diminuant d'une unité, on a

$$r_{\nu+1} = r_\nu - 1, \qquad r_{\nu+2} = r_\nu - 2, \ldots, r_g = r_\nu - (g - \nu),$$

et puisque $r_g = 1$, on a

$$g = r_\nu + \nu - 1.$$

Le plus petit nombre entier ν tel que le caractère correspondant soit nul est le *genre vrai* du système.

Soit $E_{\nu-1}$ un élément intégral non singulier; l'élément polaire $H(E_{\nu-1})$ est à $r_\nu + \nu - 1 = g$ dimensions. Cet élément $H(E_{\nu-1})$ est un élément intégral E_g. Soient, en effet, ε, ε' deux éléments linéaires quelconques de $H(E_{\nu-1})$ n'appartenant pas à $E_{\nu-1}$, E_ν et E'_ν les deux éléments $E_\nu = (E_{\nu-1}, \varepsilon)$, $E'_\nu = (E_{\nu-1}, \varepsilon')$, les éléments polaires $H(E_\nu)$, $H(E'_\nu)$ sont à $\nu + r_{\nu+1} = \nu - 1 + r_\nu = g$ dimensions, et sont contenus dans $H(E_{\nu-1})$ qui a le même nombre de dimensions. Ils se confondent donc avec $H(E_{\nu-1})$ et par suite sont identiques, de sorte que deux éléments quelconques ε, ε' de $H(E_{\nu-1})$ sont en involution. *Par tout élément intégral* $E_{\nu-1}$ *non singulier, il passe donc un seul élément intégral* E_g, *qui se confond avec l'élément polaire* $H(E_{\nu-1})$: il ne peut y avoir un autre élément E'_g contenant $E_{\nu-1}$, car tous les éléments linéaires de E'_g doivent faire partie de $H(E_{\nu-1})$.

Inversement, supposons que l'élément polaire d'un élément intégral $E_{\nu-1}$ non singulier soit un élément intégral E_g $(g > \nu)$. En ajoutant à $E_{\nu-1}$ un élément ε de E_g n'appartenant pas à $E_{\nu-1}$, on obtient un élément intégral $E_\nu = (E_{\nu-1}, \varepsilon)$, dont l'élément polaire $H(E_\nu)$ se confond avec E_g. On a donc aussi

$$\nu - 1 + r_\nu = \nu + r_{\nu+1},$$

et par suite $s_\nu = 0$; on démontrerait directement de la même façon que tous les caractères suivants sont nuls. Le genre du système est g puisque tout élément linéaire en involution avec E_g appartient à cet élément. Le genre vrai est au plus égal à ν, car $s_{\nu-1}$, $s_{\nu-2}$, ..., peuvent aussi être nuls.

Les systèmes de Pfaff pour lesquels il existe des caractéristiques sont de première espèce. Supposons que chaque point de l'espace soit l'origine de γ éléments linéaires caractéristiques distincts, c'est-à-dire en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux de même origine (n° **66**). L'ensemble de ces éléments caractéristiques forme un élément plan à γ dimensions, qui est évidemment un élément intégral E_γ. Soit g le genre du système ; tout élément E_g non singulier contient l'élément E_γ de même origine. En effet, si ε était un élément caractéristique n'appartenant pas à E_g, l'élément $E_{g+1} = (E_g, \varepsilon)$ contiendrait E_g. Si E_g se confondait avec E_γ, tous les éléments linéaires intégraux seraient caractéristiques, et le système serait complètement intégrable. Soit $g = \gamma + g'$; un élément E_g non singulier est déterminé par E_γ et par g' éléments linéaires non caractéristiques $e_1, e_2, \ldots, e_{g'}$. L'élément $E_{g'} = (e_1, e_2, \ldots, e_{g'})$ est un élément intégral contenu dans E_g, et son élément polaire $H(E_{g'})$ se confond avec E_g, car, s'il contenait un élément ε n'appartenant pas à E_g, l'élément (E_g, ε) serait un élément intégral E_{g+1} renfermant E_g, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous venons de voir que le caractère $s_{g'+1}$ sera nul, et par suite *le genre vrai d'un système de genre g est au plus égal à $g' + 1 = g - \gamma + 1$, si ce système admet des multiplicités caractéristiques à γ dimensions.*

On a vu plus haut que tout système de Pfaff à n variables et de classe $n - \gamma = n'$ peut être écrit de telle façon qu'il n'y figure que n' variables et leurs différentielles. Pour ne pas multiplier les notations, nous supposerons ce changement de variables effectué, de telle sorte que les n' variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n'}$ figurent seules dans les r équations du système S

$$\omega_1, = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_r = 0.$$

Ce système S peut être envisagé de deux façons, suivant qu'on le considère comme définissant une famille d'éléments linéaires E_1 dans l'espace à n dimensions $(x_1, \ldots, x_n)$ ou comme définissant un système d'éléments dans l'espace à n' dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_{n'})$. Quand le système sera envisagé à ce point de vue, nous le désignerons par S'.

A tout élément intégral E_1 de S correspond un élément E'_1 et un seul de S', sauf si l'on avait, pour cet élément E_1, $dx_1 = 0, \ldots, dx_{n'} = 0$. Inversement tout élément intégral E'_1 de S' est la projection dans l'espace à n' dimensions de ∞^γ éléments intégraux E_1 de S, car on peut choisir arbitrairement les valeurs de $dx_{n+1}, \ldots, dx_n$. Plus généralement à tout élément intégral E_p de S correspond un élément intégral E'_p de S' si les coordonnées de cet élément E_p ne vérifient aucune relation d'égalité. Soient

$$\delta x_1, \ldots, \delta x_{n'}, \quad \delta x_{n'+1}, \ldots, \delta x_n$$

les coordonnées d'un élément intégral e du système S en involution avec E_p ; l'élément correspondant e' du système S' ($\delta x_1, \ldots, \delta x_{n'}$) est en involution avec E'_p.

Le lieu de l'élément e est un élément plan $H(E_p)$ à $p+r_p$ dimensions dans l'espace à n dimensions ; le lieu de l'élément e' est un élément plan $H(E'_p)$ à $p+r'_p$ dimensions dans l'espace à n' dimensions. Mais la différence $r_p - r'_p$ doit être égale à $n-n'=\gamma$, car les relations qui expriment que l'élément e est en involution avec E_p ne renferment que $\delta x_1, \ldots, \delta x_{n'}$, tandis que $\delta x_{n'+1}, \ldots, \delta x_n$ restent arbitraires.

On a donc, pour le système S',

$$r'_1 = r_1 - \gamma, \quad r'_2 = r_2 - \gamma, \quad \ldots, \quad r'_p = r_p - \gamma$$
$$s'_1 = s_1, \quad s'_2 = s_2, \quad \ldots, \quad s'_p = s_p.$$

Le genre du système S' est diminué de γ unités, mais les caractères $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{g-\gamma}$ sont égaux respectivement à $s_1, s_2, \ldots, s_{g-\gamma}$.

Considérons, en particulier, un système formé d'une seule équation à $2p+1$ variables et à coefficients quelconques. Il suffit de faire, dans les formules générales du n° **86**, $n=2p+1$, $r=1$; le genre g est égal à p, et l'on a

$$r_1 = 2p, \quad r_2 = 2p-2, \quad \ldots, \quad r_p = 2,$$
$$s_1 = s_2 = \ldots = s_p = 1.$$

Une équation de Pfaff à n variables et de classe $2p+1<n$ forme un système de première espèce pour lequel on a

$$g = n-p+1.$$

Les p premiers caractères sont égaux à l'unité, et les suivants sont nuls.

88. Théorème d'existence. — Après avoir étudié la composition des éléments intégraux d'ordre quelconque, il nous reste à examiner la question essentielle. Etant donné un système de

Pfaff S de genre g, peut-on assembler les éléments intégraux d'ordre p ($p \leqslant g$) de façon à obtenir une multiplicité intégrale M_p, et quel est le degré d'indétermination du problème ? Nous ne nous occuperons que des intégrales M_p *non singulières*, c'est-à-dire dont tous les éléments E_p ne sont pas des éléments *singuliers*.

Il est évident, ainsi qu'on l'a déjà remarqué à plusieurs reprises, que le système S admet une infinité d'intégrales à une dimension M_1, dépendant de fonctions arbitraires d'une variable, qui s'obtiennent par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, quand on a choisi ces fonctions arbitaires. Comme toute intégrale M_{p+1} renferme une infinité d'intégrales M_p, on est conduit à se poser le problème inverse, c'est-à-dire à rechercher les intégrales M_{p+1} passant par une intégrale M_p, le nombre p étant supposé inférieur à g. Le théorème suivant, dû à M. Cartan, est fondamental.

Par toute intégrale non singulière M_p, il passe au moins une intégrale M_{p+1}, si le genre du système est supérieur à p. Il en passe une et une seule, si chaque élément intégral E_p non singulier appartient à un élément intégral E_{p+1} et à un seul. Il en passe une infinité dépendant de ρ fonctions arbitraires de $p+1$ arguments, si chaque élément intégral non singulier E_p appartient à ∞^ρ éléments intégraux E_{p+1}.

Le nombre ρ est identique à $r_{p+1} - 1$, r_{p+1} étant le nombre défini plus haut (n° **83**).

Soient E_p^0 un élément particulier non singulier de M_p, et $x_1^0, \ldots, x_n^0$ les coordonnées du point de l'espace à n dimensions d'où est issu cet élément. Comme nous ne considérons que des multiplicités analytiques, nous pouvons supposer que, dans le voisinage de ce point, $n-p$ des coordonnées d'un point de M_p sont des fonctions holomorphes des p autres coordonnées, que nous appellerons $x_1, x_2, \ldots, x_p$, de sorte que la multiplicité M_p est représentée par le système d'équations

$$(12) \qquad \begin{gathered} x_{p+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_p), \\ x_{p+2} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \quad \ldots, x_n = \varphi_{n-p-1}(x_1, \ldots, x_p). \end{gathered}$$

Toute multiplicité M_{p+1} passant par M_p peut être définie en se donnant $x_{p+1}, \ldots, x_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_p$, et d'une autre variable x', ces fonctions étant telles qu'elles se réduisent aux précédentes $\varphi, \varphi_1, \ldots$; quand on prend pour x' une fonction convenable de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Il est évidemment permis de supposer que cette variable x' est une des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que c'est x_{p+1} et, pour plus de clarté dans les notations, nous remplacerons x_{p+1} par $\varphi(x_1, \ldots, x_p) + x$, et nous désignerons les variables $x_{p+2}, \ldots, x_n$ par $z_1, z_2, \ldots, z_m$, le nombre m étant égal à $n - p - 1$. Avec ces notations, les variables qui figurent dans le système S sont

$$x_1, x_2, \ldots, x_p, \quad x, z_1, z_2, \ldots, z_m;$$

la multiplicité intégrale M_p connue est représentée par le système d'équations

$$(13) \qquad x = 0, \quad z_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad z_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_p).$$

et toute multiplicité M_{p+1} renfermant M_p est à son tour représentée par les m équations

$$(14) \qquad z_1 = \Phi_1(x, x_1, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad z_m = \Phi_m(x, x_1, \ldots, x_p),$$

les m fonctions $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ devant se réduire à $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ respectivement pour $x = 0$, et étant holomorphes dans le domaine du point $x = 0, x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$.

Pour exprimer que les équations (14) représentent une intégrale M_{p+1}, on peut écrire que tout élément E_{p+1} de cette multiplicité est un élément intégral du système. Or tout élément E_{p+1} de M_{p+1} est défini par les $p+1$ éléments linéaires distincts

$$e \qquad \frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x}} = \ldots = \frac{dz_m}{\frac{\partial z_m}{\partial x}},$$

$$e_1 \qquad \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{0} = \frac{dx}{0} = \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dz_m}{\frac{\partial z_m}{\partial x_1}},$$

. . . .

$$e_p \qquad \frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x_p}} = \ldots = \frac{dz_m}{\frac{\partial z_m}{\partial x_p}}.$$

Ces $p+1$ éléments linéaires doivent être intégraux et deux à deux en involution.

Soient

$$\omega^{(k)} = a_k dx + a_{k1} dx_1 + \ldots + a_{kp} dx_p + b_{k1} dz_1 + \ldots + b_{km} dz_m = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r)$$

les r équations du système S. Nous poserons

$$\Omega_0^{(k)} = a_k + b_{k1}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + b_{km}\frac{\partial z_m}{\partial x},$$
$$\Omega_i^{(k)} = a_{ki} + b_{k1}\frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \ldots + b_{km}\frac{\partial z_m}{\partial x_i};$$

les $k(p+1)$ équations $\Omega_0^{(k)} = 0$, $\Omega_i^{(k)} = 0$ suffisent pour exprimer que M_{p+1} est une multiplicité intégrale du système. Mais on peut leur adjoindre immédiatement celles qui expriment que les $p+1$ éléments $e, e_1, \ldots, e_p$ sont deux à deux en involution, et qui se déduisent des premières. Ces relations peuvent s'écrire sous forme abrégée

$$\Omega_{0i}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_0^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\Omega_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Omega_j^{(k)}}{\partial x_i} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

le symbole $\frac{\partial}{\partial x_i}$ indiquant une dérivation par rapport à x_i, quand on y regarde $z_1, z_2, \ldots, z_m$ comme des fonctions des $p+1$ variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_p$. Nous partagerons ces équations en deux groupes, le premier ne renfermant pas les $\Omega_0^{(k)}$,

$$\text{(I)} \qquad \Omega_i^{(k)} = 0, \quad \Omega_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Omega_j^{(k)}}{\partial x_i} = 0, \quad (i, j, = 1, 2, \ldots, p);$$

les équations de ce groupe expriment que les p éléments e_1, e_2, $\ldots$, e_p sont intégraux et deux à deux en involution.

Les équations du second groupe

$$\text{(II)} \qquad \Omega_0^{(k)} = 0, \quad \Omega_{0i}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_0^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x} = 0,$$

expriment que e est un élément intégral en involution avec les p éléments linéaires $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

Si les relations du groupe (I) sont vérifiées, l'élément à p dimensions défini par les p éléments linéaires $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est un élément intégral E_p du système S. Les équations (II) que doit vérifier l'élément e pour former avec E_p un élément intégral E_{p+1} sont donc compatibles si les équations (I) sont vérifiées et se réduisent à $m-\rho$ équations distinctes, puisque l'élément e doit dépendre par hypothèse des ρ paramètres arbitraires. Ces équations (II) peuvent donc être résolues par rapport à $m-\rho$ des dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_{m-\rho}}{\partial x}$,

$$
\text{(II')}\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial z_1}{\partial x} &= F_1\left(x, x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_{m-\rho+1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_p}\right),\\
\frac{\partial z_2}{\partial x} &= F_2(\ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial z_{m-\rho}}{\partial x} &= F_{m-\rho}(\ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

les seconds membres dépendant des variables $x, x_1, \ldots, x_p$, des fonctions $z_1, \ldots, z_m$, et de leurs dérivées par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_p$, et enfin des dérivées $\frac{\partial z_{m-\rho+1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x}$, et ces seconds membres sont linéaires par rapport à ces dérivées.

Ce système (II') est un système de forme normale, dont on suppose, bien entendu, les seconds membres holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales des arguments.

Prenons pour $z_{m-\rho+1}, \ldots, z_m$ des fonctions arbitraires

$$\Phi_{m-\rho+1}(x, x_1, \ldots, x_p), \ldots, \Phi_m(x, x_1, \ldots, x_p)$$

des $p+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_p$, se réduisant, pour $x=0$, aux $m-\rho$ fonctions

$$\varphi_{m-\rho+1}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_p),$$

et holomorphes dans le voisinage de $x=0, x_1=x_1^0, \ldots, x_p=x_p^0$. Les équations (II') admettent alors un système d'intégrales holomorphes

$$z_1 = \Phi_1(x, x_1, \ldots, x_p), \ldots, z_{m-\rho} = \Phi_{m-\rho}(x, x_1, \ldots, x_p)$$

se réduisant, pour $x = 0$, aux $m - \rho$ fonctions $\varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_{m-\rho}(x_1, \ldots, x_p)$. Les multiplicités $\mathfrak{M}_{p+1}$ représentées par les formules

$$(15) \qquad z_1 = \Phi_1(x, x_1, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad z_m = \Phi_m(x, x_1, \ldots, x_p)$$

passent bien par la multiplicité M_p, et, d'après la façon dont on a obtenu ces multiplicités $\mathfrak{M}_{p+1}$, il est clair que toute intégrale M_{p+1} du système de Pfaff passant par M_p est comprise dans les multiplicités $\mathfrak{M}_{p+1}$, par un choix convenable des fonctions arbitraires $\Phi_{m-\rho+1}, \ldots, \Phi_m$ des $p + 1$ arguments $x, x_1, \ldots, x_p$.

Nous allons maintenant démontrer, et c'est là le point le plus délicat de la démonstration, que *réciproquement, quelles que soient les fonctions arbitraires* $\Phi_{m-\rho+1}, \ldots, \Phi_m$, *satisfaisant aux conditions spécifiées plus haut, la multiplicité* $\mathfrak{M}_{p+1}$ *est une intégrale du système* S [1].

[1] M. Cartan établit ce point essentiel par un raisonnement intuitif très intéressant, que je reproduis presque textuellement (*Voir Annales de l'Ecole Normale, 3e série, t. XVIII, p. 260*).

« Pour démontrer que les multiplicités $\mathfrak{M}_{p+1}$ satisfont aux équations (I) et (II), nous allons démontrer que *si une multiplicité* $\mathfrak{M}_{p+1}$, *déterminée comme il a été dit, satisfait aux équations* (I) *et* (II) *pour une certaine valeur de* x, *elle y satisfait aussi pour la valeur infiniment voisine* $x + \delta x$.

Si cela est démontré, comme les équations (I) sont vérifiées par la multiplicité $\mathfrak{M}_{p+1}$ pour $x = 0$, puisque $\mathfrak{M}_{p+1}$ se réduit alors à M_p et que les équations (II′) sont supposées vérifiées par la multiplicité $\mathfrak{M}_{p+1}$, et par conséquent aussi les équations (II), il en résultera que les équations (I) et (II) sont vérifiées pour toute valeur de x.

Or, supposons que pour une certaine valeur de x les équations (I) et (II) soient vérifiées. On a alors, en particulier, pour cette valeur de x,

$$\Omega_0^{(k)} = 0, \qquad \Omega_i^{(k)} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_0^{(k)}}{\partial x_i} = 0.$$

Mais si $\Omega_0^{(k)}$ est nul, il en est de même de sa dérivée $\dfrac{\partial \Omega_0^{(k)}}{\partial x_i}$ prise par rapport à la variable x_i, indépendante de x. Donc $\dfrac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x}$ est nul pour la valeur considérée de x. Or, dire que $\Omega_i^{(k)}$ et $\dfrac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x}$ s'annulent pour la valeur x, c'est dire que $\Omega_i^{(k)}$ s'annule pour la valeur infiniment voisine $x + \delta x$. Il en est de même, pour $x + \delta x$, de $\dfrac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x_j}$ et des quantités analogues. Donc, *pour* $x + \delta x$ *les équations* (I) *sont vérifiées*. Il en est de même par hypothèse des équations (II′) et, comme conséquence algébrique, des équations (II) qui sont équivalentes à (II′) en tenant compte de (I). Donc, *pour* $x + \delta x$, *toutes les équations* (I) *sont vérifiées.* »

Nous nous appuierons sur le lemme suivant qui est à peu près évident.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_k$ des fonctions analytiques des $h+p+1$ variables $Z_1, \ldots, Z_h, x, x_1, \ldots, x_p$, holomorphes dans le voisinage des valeurs $Z_1 = 0, \ldots, Z_h = 0, x = 0, x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$ et se réduisant à zéro quand on y fait $Z_1 = 0, \ldots, Z_h = 0$, quelles que soient les valeurs des autres variables $x, x_1, \ldots, x_p$. Les équations

$$(16) \qquad \frac{\partial Z_i}{\partial x} = \mathfrak{F}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

où les seconds membres sont des fonctions linéaires et homogènes, à coefficients holomorphes, des F_i et des dérivées partielles des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_k$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, prises en y regardant $Z_1, \ldots, Z_h$ comme des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_p$, n'admettent pas d'autre système d'intégrales se réduisant à zéro pour $x = 0$ que $Z_1 = 0, \ldots, Z_h = 0$.

Il est clair, en effet que $Z_1 = 0, \ldots, Z_h = 0$ est un système d'intégrales des équations (16) et, d'après le théorème général (*Leçons* n° **1**), il n'existe qu'un seul système d'intégrales satisfaisant à ces conditions initiales.

Cela posé, nous savons que les équations (II) se réduisent à $m - \rho$ équations distinctes, en tenant compte des relations (I). On peut toujours prendre, pour former ces $m - \rho$ équations, les r équations $\Omega_0^{(k)} = 0$, puis $s = m - \rho - r$ autres relations, que nous représenterons par

$$\Omega'_1 = 0, \ \ldots, \ \Omega'_s = 0.$$

Si on résout les $m - \rho$ équations

$$\Omega_0^{(1)} = 0, \ \ldots, \ \Omega_0^{(r)} = 0, \qquad \Omega'_1 = 0, \ \ldots, \ \Omega'_s = 0$$

par rapport à $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial z_{m-\rho}}{\partial x}$ et qu'on porte les valeurs obtenues dans les autres équations $\Omega_{i0}^{(k)} = 0$, elles se réduisent à des identités en tenant compte des relations du groupe (I). Ces relations du groupe (I) ne sont pas non plus en général distinctes, et se réduisent à N équations distinctes.

Considérons le système d'équations

$$\Omega_0^{(1)} = U_0^1, \ldots, \Omega_0^{(r)} = U_0^{(r)}, \quad \Omega'_1 = U'_1, \ldots, \Omega'_s = U'_s,$$
$$\Omega_i^{(k)} = U_i^{(k)}, \quad \Omega_{ij}^{(k)} = U_{ij}^{(k)},$$

où $U_0^{(k)}$, U_i', $U_i^{(k)}$, $U_{ij}^{(k)}$ sont regardées comme de nouvelles variables, et où l'on ne prend pour former les équations de la seconde ligne que celles qui correspondent aux N équations distinctes du groupe (I). De ce nouveau système on peut tirer $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_{m-\rho}}{\partial x}$ et quelques-unes des dérivées de $z_1, \ldots, z_m$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_p$ en fonction de $x, x_1, \ldots, x_p$, $z_1, \ldots, z_m$ et des dérivées restantes, et des variables auxiliaires $U_0^{(k)}$, U'_i, $U_i^{(k)}$, $U_{ij}^{(k)}$; en portant les expressions de ces dérivées dans les fonctions $\Omega_{0i}^{(k)}$, on obtient des fonctions des arguments précédents qui sont identiquement nulles en vertu des hypothèses si l'on suppose que l'on ait

$$U_0^{(k)} = 0, \quad U'_i = 0, \quad U_i^{(k)} = 0, \quad U_{ij}^{(k)} = 0.$$

Supposons que dans les expressions $\Omega_0^{(k)}$, $\Omega_i^{(k)}$, $\Omega_{0i}^{(k)}$, $\Omega_{ij}^{(k)}$, on remplace $z_1, z_2, \ldots, z_m$ par les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$, définies plus haut. Soient $V_0^{(k)}$, $V_i^{(k)}$, $V_{0i}^{(k)}$, $V_{ij}^{(k)}$ les fonctions de x, x_1, $\ldots, x_p$ ainsi obtenues, qui sont évidemment holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales $x = 0$, $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$.

D'après la façon dont on a déterminé ces fonctions $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, les fonctions $V_0^{(k)}$ sont identiquement nulles, ainsi que celles des fonctions $V_{0i}^{(k)}$ qui correspondent aux s équations $\Omega'_i = 0$. Quant aux autres fonctions $V_{0i}^{(k)}$, et aux fonctions $V_i^{(k)}$, $V_{ij}^{(k)}$, nous pouvons affirmer seulement jusqu'ici qu'elles sont nulles pour $x = 0$, quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

La relation

$$\Omega_{0i}^{(k)} = \frac{\partial \Omega_0^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Omega_i^{(k)}}{\partial x}$$

nous donne

$$\frac{\partial V_i^{(k)}}{\partial x} = V_{0i}^{(k)}, \tag{17}$$

puisque la fonction $V_0^{(k)}$ est identiquement nulle.

D'autre part, l'identité

$$\frac{\partial \Omega_{ij}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_{j0}^{(k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Omega_{0i}^{(k)}}{\partial x_j} = 0$$

donne de même

$$\frac{\partial V_{ij}^{(k)}}{\partial x} = \frac{\partial V_{0j}^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{0i}^{(k)}}{\partial x_j}. \tag{18}$$

Or, d'après ce que nous venons de remarquer, les fonctions $V_{0i}^{(k)}$ sont nulles identiquement toutes les fois que les fonctions $V_i^{(k)}$ et $V_{ij}^{(k)}$ sont nulles. Il s'ensuit, d'après le lemme cité plus haut, que les équations (17) et (18) n'admettent pas d'autres intégrales holomorphes s'annulant avec x que $V_i^{(k)} = 0$, $V_{ij}^{(k)} = 0$. Les équations (15) représentent donc bien une intégrale M_{p+1} du système de Pfaff.

89. Problème de Cauchy. — Le théorème précédent est l'analogue du théorème général d'existence pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont il se déduit. Nous allons maintenant indiquer un système de conditions qui déterminent complètement une intégrale M_g admettant un élément E_g voisin d'un élément donné non singulier E_g^0, et telles qu'en faisant varier ces conditions, on obtienne toutes les intégrales analytiques, holomorphes dans le voisinage de cet élément.

Soient E_0 $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un point non singulier de l'espace, E_1^0 un élément intégral non singulier issu de E_0, E_2^0 un élément intégral non singulier passant par E_1^0, ..., E_g^0 un élément intégral non singulier passant par E^0_{g-1}. Les éléments polaires $H(E_0)$, $H(E_1^0)$, ..., $H(E^0_{g-1})$ sont définis par des systèmes d'équations linéaires que l'on peut écrire sous la forme suivante. Les r équations qui définissent $H(E_0)$ sont les équations de Pfaff elles-mêmes où l'on a remplacé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Ces r équations peuvent être résolues par rapport à r des différentielles que nous désignerons, en modifiant un peu les notations, par

$$H(E_0) \qquad dz_1,\ dz_2,\ \ldots,\ dz_r.$$

L'élément polaire $H(E_1)$ est défini en adjoignant aux équations précédentes s_1 équations nouvelles entre les différentielles autres que dz_1, dz_2, ..., dz_r. Nous supposerons ces équations résolues par rapport à s_1 différentielles nouvelles

$$H(E_1^0) \qquad dz_1^{(1)}, \ldots, dz_{s_1}^{(1)}.$$

L'élément polaire $H(E_2^0)$ a s_2 dimensions de moins que $H(E_1^0)$; il est donc défini en adjoignant aux équations qui définissent $H(E_1^0)$ s_2 relations linéaires entre les différentielles autres que dz_1, ..., dz_r, $dz_1^{(1)}$, ..., $dz_{s_1}^{(1)}$. Ces s_2 relations peuvent à leur tour être résolues par rapport à s_2 différentielles nouvelles

$$H(E_2^0) \qquad dz_1^{(2)}, \ldots, dz_{s_2}^{(2)},$$

et ainsi de suite. L'élément $H(E^0_{g-1})$ est défini en adjoignant aux équations qui définissent $H(E^0_{g-2})$ s_{g-1} équations nouvelles résolues par rapport à s_{g-1} différentielles

$$H(E^0_{g-1}) \qquad dz_1^{(g-1)}, \ldots, dz^{(g-1)}_{s_{g-1}}.$$

Enfin E_g^0 s'obtient en adjoignant aux équations précédentes $r_g - 1 = s_g$ équations nouvelles résolues par rapport à s_g différentielles

$$E_g^0 \qquad dz_1^{(g)}, \ldots, dz_{s_g}^{(g)},$$

Toutes les différentielles

$$\begin{array}{c} dz_1, \ldots, dz_r \\ dz_1^{(1)}, \ldots, dz_{s_1}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ dz_1^{(g)}, \ldots, dz_{s_g}^{(g)}, \end{array}$$

dont le nombre est $r + s_1 + \ldots + s_g = n - g$, sont donc exprimées au moyen des g différentielles restantes que nous désignerons par dx_1, ..., dx_g.

Pour avoir E^0_{g-1}, il faudra joindre aux équations qui définissent E_g^0 une relation entre dx_1, ..., dx_g,

$$E^0_{g-1} \qquad dx_g = \alpha_{g,1}dx_1 + \ldots + \alpha_{g,g-1}dx_{g-1} ;$$

pour avoir E^0_{g-2}, il faudra de même joindre une autre relation entre dx_1, ..., dx_{g-1}

$$E^0_{g-2} \qquad dx_{g-1} = \alpha_{g-1,1}dx_1 + \ldots + \alpha_{g-1,g-2}dx_{g-2},$$

et ainsi de suite. Enfin, on obtiendra les équations de définition de E_1^0 en adjoignant aux équations de définition de E_2^0 une dernière relation

$$E_1^0 \qquad\qquad dx_2 = x_{2,1} dx_1.$$

Il est clair que si l'on prend une suite d'éléments intégraux non singuliers $E_1, E_2, \ldots, E_g$, chacun d'eux étant contenu dans le suivant, voisins respectivement des éléments $E_1^0, E_2^0, \ldots, E_g^0$, et leurs éléments polaires $H(E_1), H(E_2), \ldots, H(E_{g-1})$, les équations qui définissent ces divers éléments pourront être résolues par rapport aux mêmes différentielles que les équations précédentes.

Nous désignerons dans la suite par

$$a_1, \ldots, a_g, \quad c_1, \ldots, c_r, \quad c_1^{(1)}, \ldots, c_{s_1}^{(1)}, \ldots, c_1^{(g)}, \ldots, c_{s_g}^{(g)}$$

les coordonnées de l'élément E_0

$$x_1 = a_1, \ldots, x_g = a_g, \ldots, z_{s_g}^{(g)} = c_{s_g}^{(g)}.$$

D'après la forme des équations qui définissent E_g^0, toute intégrale M_g admettant cet élément peut être représentée par un système de $n - g$ équations permettant d'exprimer $z_1, \ldots, z_r$, $z_1^{(1)}, \ldots, z_{s_g}^{(g)}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_g$ qui jouent le rôle de variables indépendantes. Il en sera donc de même de toute intégrale M_g admettant un élément E_g assez voisin de E_g^0.

Pour déterminer toutes ces intégrales, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Il existe des intégrales M_p ($p \leqslant g$) représentées par des équations de la forme

$$(19) \quad \begin{cases} z_i = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad z_i^{(k)} = \Phi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ x_{p+1} = a_{p+1}, \ldots, x_g = a_g, \end{cases}$$

les fonctions Φ_i et $\Phi_i^{(k)}$ étant des fonctions holomorphes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans le voisinage des valeurs $x_1 = a_1, \ldots, x_p = a_p$, prenant pour $x_1 = a_1, \ldots, x_p = a_p$ des valeurs suffisamment voisines des coordonnées c_i, $c_i^{(k)}$ de l'élément E_0, et satisfaisant aux conditions suivantes :

Les fonctions $\Phi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, où $k > p - 1$, sont arbitraires ;

Les fonctions $\Phi_1^{(p-1)}, \ldots, \Phi_{s_{p-1}}^{(p-1)}$ *se réduisent pour* $x_p = a_p$ *à* s_{p-1} *fonctions arbitraires de* $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$

$$\varphi_1^{(p-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}), \ldots, \varphi_{s_{p-1}}^{(p-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1});$$

Les fonctions $\Phi_1^{(p-2)}, \ldots, \Phi_{s_{p-2}}^{(p-2)}$ *se réduisent pour* $x_p = a_p$, $x_{p-1} = a_{p-1}$ *à* s_{p-2} *fonctions arbitraires de* $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$,

$$\varphi_1^{(p-2)}(x_1, \ldots, x_{p-2}), \ldots, \varphi_{s_{p-2}}^{(p-2)}(x_1, \ldots, x_{p-2});$$

. . . .

Les s_1 *fonctions* $\Phi_1^{(1)}, \ldots, \Phi_{s_1}^{(1)}$ *se réduisent, pour* $x_2 = a_2, \ldots, x_p = a_p$, *à* s_1 *fonctions arbitraires de* x_1,

$$\varphi_1^{(1)}(x_1), \ldots, \varphi_{s_1}^{(1)}(x_1);$$

Enfin, pour $x_1 = a_1, \ldots, x_p = a_p$, $z_1, z_2, \ldots, z_r$ *se réduisent à* r *constantes arbitraires*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r.$$

On suppose bien entendu que toutes les fonctions $\varphi_i^{(k)}$ sont holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales $a_1, \ldots, a_p$, et prennent en ce point des valeurs voisines des coordonnées correspondantes de E_0.

La démonstration est immédiate pour $p = 1$. Il est évident, en effet, qu'il existe des courbes intégrales représentées par les équations

$$\begin{gathered} x_2 = a_2, \ldots, x_g = a_g, \\ z_i^{(k)} = \Phi_i^{(k)}(x_1), \qquad k > 0 \\ z_1 = \Phi_1(x_1), \ldots, z_r = \Phi_r(x_1), \end{gathered}$$

les fonctions $\Phi_i^{(k)}$ étant arbitraires, et les fonctions $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ étant déterminées par un système d'équations différentielles du premier ordre, ce qui permet de choisir arbitrairement les valeurs de ces fonctions pour $x_1 = a_1$.

Pour démontrer que le théorème est général, il suffit donc de prouver que, s'il est vrai pour une valeur de $p < g$, il est encore vrai pour la valeur $p + 1$.

Soit M_p une multiplicité intégrale définie par les conditions précédentes. Une multiplicité intégrale M_{p+1} passant par M_p peut être définie en prenant pour les z_i, $z_i^{(k)}$ et $x_{p+2}, \ldots, x_g$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ se réduisant pour $x_{p+1} = a_{p+1}$ aux fonctions qui définissent M_p. D'après le théorème général du précédent paragraphe, et la forme sous laquelle on a écrit les équations de définition de l'élément $H(E_p)$, le système (II') qu'il faut intégrer pour avoir les multiplicités M_{p+1} peut être résolu par rapport à

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_{p+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z_r}{\partial x_{p+1}}, \qquad \frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial x_{p+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z_{s_p}^{(p)}}{\partial x_{p+1}},$$

et on peut choisir arbitrairement les fonctions $x_{p+2}, \ldots, x_g$, et $z_i^{(k)}$, où $k > p$, de $x_1, \ldots, x_{p+1}$, ainsi que les fonctions de $x_1, \ldots, x_p$ auxquelles doivent se réduire les autres inconnues pour $x_{p+1} = a_{p+1}$. Or si l'on prend pour $x_{p+2}, \ldots, x_g$ les valeurs constantes

$$x_{p+2} = a_{g+2}, \quad \ldots, \quad x_g = a_g,$$

pour les fonctions, qui peuvent être choisies arbitrairement, des fonctions de $x_1, \ldots, x_{p+1}$, se réduisant pour $x_{p+1} = a_{p+1}$ aux fonctions correspondantes relatives à la multiplicité M_p, les valeurs initiales des autres fonctions $z_1, \ldots, z_{s_p}^{(p)}$ étant choisies de la même façon, on voit que le théorème est encore vrai pour la valeur $p + 1$. Donc il est général.

Le théorème est vrai en particulier pour $p = g$. On peut donc énoncer la proposition générale suivante :

Le système de Pfaff S, *de genre g, considéré comme définissant $z_1, z_2, \ldots, z_{s_g}^{(g)}$ en fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_g$ admet un système de solutions et un seul pour lequel les fonctions inconnues sont des fonctions holomorphes de $x_1, x_2, \ldots, x_g$ dans le domaine du point $x_1 = a_1, \ldots, x_g = a_g$, tel que les s_g fonctions $z_1^{(g)}, z_2^{(g)}, \ldots, z_{s_g}^{(g)}$ soient identiques à s_g fonctions arbitraires*

$$\varphi_1^{(g)}(x_1, \ldots, x_g), \quad \ldots, \quad \varphi_{s_g}^{(g)}(x_1, x_2, \ldots, x_g),$$

les s_{g-1} fonctions $z_1^{(g-1)}, \ldots, z_{s_{g-1}}^{(g-1)}$ se réduisant pour $x_g = a_g$ à s_{g-1} fonctions arbitraires

$$\varphi_1^{(g-1)}(x_1, \ldots, x_{g-1}), \quad \ldots, \quad \varphi_{s_{g-1}}^{(g-1)}(x_1, \ldots, x_{g-1}),$$

et ainsi de suite, les s_1 *fonctions* $z_1^{(1)}, \ldots, z_{s_1}^{(1)}$ *se réduisant, pour* $x_2 = a_2, \ldots, x_g = a_g$, *à* s_1 *fonctions arbitraires de* x_1,

$$\varphi_1^{(1)}(x_1), \quad \ldots, \quad \varphi_{s_1}^{(1)}(x_1),$$

et enfin les r *fonctions* $z_1, z_2, \ldots, z_r$ *se réduisant à* r *constantes arbitraires* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, *pour* $x_1 = a_1, \ldots, x_g = a_g$.

Il est clair que tout système d'intégrales holomorphes, admettant un élément voisin d'un élément donné est déterminé par un système de conditions de cette nature. On peut donc dire que *la multiplicité intégrale* M_g *la plus générale dépend de*

s_g	*fonctions arbitraires de*	g *variables,*
s_{g-1}	—	$g - 1$ *variables,*
. . . .	. . . .	. . . .
s_1	—	1 *variable,*
r	*constantes arbitraires.*	

L'énoncé précis qui précède explique bien ce qu'on doit entendre par là. On remarquera que dans cet énoncé ne figurent que les nombres g, r, s_1, s_2, ..., s_g.

Dans le cas d'un système S de r équations à n variables, dont les coefficients sont des fonctions arbitraires, on a remarqué (nº **86**) que le genre g est égal au quotient à une unité près de n par $r+1$, et que les nombres $s_1, s_2, \ldots, s_{g-1}$ sont égaux à r, tandis que s_g est égal au reste k de la division de n par $r+1$. *L'intégrale générale* M_g *d'un système de cette espèce dépend donc de* k *fonctions arbitraires de* g *variables, de* r *fonctions arbitraires de* $g - 1$ *variables, ..., de* r *fonctions arbitraires d'une variable et de* r *constantes arbitraires.*

La démonstration du théorème montre en même temps quelles sont les intégrations à effectuer pour obtenir la multiplicité M_g satisfaisant aux conditions initiales données. On a à déterminer successivement les intégrales M_1, M_2, ..., M_{g-1} situées sur M_g et que l'on obtient comme il suit :

M_1 est l'intersection de M_g avec la multiplicité à $n - g + 1$ dimensions obtenue en faisant

$$x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_g = a_g\,;$$

M_2 est l'intersection de M_g avec la multiplicité à $n-g+2$ dimensions

$$x_3 = a_3, \ldots, x_g = a_g;$$

. . . .

M_{g-1} est l'intersection de M_g avec la multiplicité à $n-1$ dimensions

$$x_1 = a_1.$$

La première multiplicité M_1 s'obtient par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires, tandis que les multiplicités suivantes M_2, ..., M_{g-1}, et la multiplicité M_g elle-même s'obtiennent par l'intégration de $g-1$ systèmes successifs d'équations aux dérivées partielles de forme normale.

En remplaçant les multiplicités précédentes par des multiplicités choisies arbitrairement, on obtient le problème de Cauchy sous sa forme la plus générale (voir Cartan, *loc. cit.*, p. 287 et suivantes).

Dans le cas particulier où les nombres s_ν, $s_{\nu+1}$, ..., s_g sont nuls, l'intégrale M_g ne dépend que de fonctions arbitraires de moins de ν variables. Le problème de l'intégration peut alors être simplifié par une méthode qui généralise la méthode de Mayer pour les systèmes complètement intégrables. Nous renverrons au Mémoire de M. Cartan pour l'exposition de cette méthode.

Remarque. — Un système de genre g peut admettre des intégrales M_k à plus de g dimensions, mais tous les éléments intégraux E_k de ces multiplicités sont des éléments singuliers, et les intégrales elles-mêmes sont dites *intégrales singulières*. Par exemple, le système

$$dx_2 = x_4 dx_1, \qquad dx_3 = x_5 dx_1,$$

qui est de genre *un*, admet une famille d'intégrales singulières M_2, représentées par les équations

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2, \qquad x_3 = C_3.$$

L'étude générale des intégrales singulières d'un système de Pfaff exigerait encore des recherches nouvelles, d'autant plus nécessaires que ces intégrales singulières donnent quelquefois la véritable solution du problème qui a conduit au système de Pfaff.

90. Application aux équations aux dérivées partielles. — Les systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles, à un nombre quelconque de variables indépendantes et de fonctions inconnues, ont été, depuis Cauchy, l'objet d'un grand nombre de travaux. Des résultats définitifs ont été obtenus par M. Riquier (1), dont les recherches ont permis de résoudre complètement le problème suivant : Etant donné un système de m équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, à un nombre quelconque de variables indépendantes et de fonctions inconnues, reconnaître si ce système admet des intégrales et, dans le cas de l'affirmative, préciser les arbitraires (constantes ou fonctions) dont dépendent les intégrales.

Ce problème n'est lui-même qu'un cas particulier de l'intégration d'un système de Pfaff. En effet, on peut toujours supposer qu'un système d'équations aux dérivées partielles ne renferme que les dérivées du premier ordre des fonctions inconnues; il suffit, pour que cette condition soit réalisée, d'adjoindre aux fonctions inconnues quelques-unes de leurs dérivées partielles, et le système ainsi obtenu peut être remplacé par un système de Pfaff. Ce nouveau procédé est évidemment plus symétrique, puisque rien ne distingue les variables indépendantes et les fonctions inconnues. Il est vrai que, pour ce système de Pfaff, on ne cherche que les intégrales M_n qui n'établissent aucune relation entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérées comme variables indépendantes dans le système d'équations aux dérivées partielles d'où l'on est parti. Mais M. Cartan (2) a montré qu'on peut toujours *prolonger* un système de Pfaff de façon que l'intégrale générale du nouveau système n'établisse aucune relation entre n formes données de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Dans une note récente (3), M. Maurice Janet a montré comment l'étude directe d'un système d'équations aux

(1) Voir en particulier son grand ouvrage *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier-Villars, 1910).

(2) *Annales de l'Ecole Normale, série 3, t. XXI* (*1904*), *p. 159*.

(3) *Les caractères des modules de formes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus, t. CLXXIV, 1922, p. 432*).

dérivées partielles conduisait à introduire certains nombres entiers analogues aux caractères successifs d'un système de Pfaff.

Les deux méthodes doivent, sans doute, être équivalentes quand on pousse les calculs jusqu'au bout. Il semble cependant que, dans bien des cas, les méthodes de M. Cartan sont préférables. On peut, en effet, grâce à l'emploi des formes symboliques, présenter les calculs sous une forme abrégée qui permet souvent de les achever sans beaucoup de peine. Il suffit, pour s'en convaincre, de parcourir les Mémoires récents de l'auteur [1].

[1] *Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes* (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXXIX, 1911, pp. 352-443).

La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n *dimensions* (*Ibid.*, t. XLIV, 1916, pp. 65-99).

La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme à $n \geqq 5$ dimensions (*Ibid.*, t. XLV, 1917, pp. 57-121).

Sur certaines hypersurfaces de l'espace conforme réel à cinq dimensions (*Ibid.*, t. XLVI, 1918, pp. 84-105).

Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien (*Ibid.*, t. XLVII, 1919, pp. 125-160 ; t. XLVIII, 1920, pp. 132-208).

Sur la déformation projective des surfaces (*Annales de l'École Normale supérieure*, série 3, t. XXXVII, 1920, pp. 259-356).

Sur le problème général de la déformation (*C. R. du Congrès de Strasbourg*, 1921, pp. 397-406).

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

FORMES CANONIQUES D'UNE EXPRESSION DE PFAFF

CHAPITRE II

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DE PFAFF

CHAPITRE III

FORMES SYMBOLIQUES DE DIFFÉRENTIELLES

CHAPITRE IV

APPLICATION DES FORMES SYMBOLIQUES AU PROBLÈME DE PFAFF

CHAPITRE V

INVARIANTS INTÉGRAUX

CHAPITRE VI

CLASSE D'UN SYSTÈME DE PFAFF. CARACTÉRISTIQUES

CHAPITRE VII

SYSTÈMES DÉRIVÉS. PROBLÈME DE MONGE

CHAPITRE VIII

MULTIPLICITÉS INTÉGRALES. GENRE D'UN SYSTÈME DE PFAFF

ERRATA

Page **121**, les premières lignes de la page doivent être complétées comme il suit :

La forme $\Sigma a_i dx_i$ est de la forme $\alpha_1 df_1 + \ldots + \alpha_{n-1} df_{n-1} + dU$, et le calcul de U par la méthode générale (n^{os} **9** et **12**) est identique à la méthode de Jacobi.

Page **122**, les premières lignes de la page doivent être modifiées de la même façon.

Page **153**, ligne 13, en remontant, *au lieu de* : $\dfrac{Z - z}{c}$, *lire* : $\dfrac{Z - z}{1}$.

Page **164**, lignes 1 et 2, en remontant, *au lieu de* :

$$dp_1 dx_1 \ldots dp_m dx_m,$$

lire :

$$dx_1 dp_1 \ldots dx_m dp_m.$$

Page **229**, formule (24), *au lieu de* : z^k, *lire* : z_k.

Page **345**, ligne 15 en remontant, *au lieu de* : comumns, *lire* : communs.

LAVAL. — IMPRIMERIE BARNÉOUD.