This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________

ABR0683
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 29002199
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B49397
035/2: : |a (CaOTULAS)160122010
040: : |a MnU |c MnU |d MiU
050/1:0 : |a QA581 |b .L75
100:1 : |a Loria, Gino.
245:00: |a Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti ...
260: : |a Bologna, |b N. Zanichelli |c [1925]
300/1: : |a 2 v. |b diagrs. |c 24 cm.
500/1: : |a Preface dated 1921.
500/2: : |a At end: Finito di stampare in Firenze nella tipografia "Enrico Ariani" ... MCMXXV.
504/3: : |a Bibliographical foot-notes.
505/4:0 : |a v. 1. Curve algebriche.--v. 2. Curve sferich. Curve definite da una relazione fra flessione e torsione. Curve particolari situate sopra superficie assegnate.
650/1: 0: |a Curves, Algebraic
650/2: 0: |a Curves, Transcendental
998: : |c RSH |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ____________

Hosted by Google

Hosted by Google

Hosted by Google

LEÇONS

SUR LES

COORDONNÉES TANGENTIELLES

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Hosted by Google

Hosted by Google

LEÇONS

SUR LES

COORDONNÉES TANGENTIELLES

PAR

G. PAPELIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

SECONDE PARTIE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1895
(Tous droits réservés)

Hosted by Google

Hosted by Google

LEÇONS

SUR LES

COORDONNÉES TANGENTIELLES

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

CHAPITRE PREMIER

LE POINT, LE PLAN ET LA DROITE

1. L'équation d'un plan en coordonnées rectilignes homogènes peut s'écrire

$$ux + vy + wz + rt = 0\,;$$

elle renferme quatre coefficients, u, v, w, r ; mais comme le plan ne change pas quand ces coefficients varient proportionnellement, on peut dire que l'équation du plan contient *trois* paramètres ; un plan sera donc déterminé si l'on connaît *trois* relations entre les quatre coefficients qui figurent dans son équation.

Ces relations sont généralement obtenues en assujettissant le plan à certaines conditions géométriques.

Exemples. I. Écrivons que le plan passe par un point ayant pour coordonnées a, b, c ; on a

$$ua + vb + wc + r = 0.$$

II. Assujettissons le plan à être à une distance donnée d

Hosted by Google

d'un point qui a pour coordonnées a, b, c; il vient

$$\frac{ua + vb + wc + r}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = d,$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, ou

$$(ua + vb + wc + r)^2 - d^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

III. Soit un cône ayant pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0\,;$$

cherchons à quelles relations doivent satisfaire les coefficients de l'équation du plan

$$ux + vy + wz + r = 0$$

pour que ce plan soit tangent au cône.

Il faut d'abord que ce plan passe par l'origine, c'est-à-dire qu'on ait

$$r = 0\,; \tag{1}$$

en outre le plan doit rencontrer le cône suivant deux génératrices confondues. Or les projections de ces génératrices sur le plan des xy sont déterminées par l'équation

$$w^2(Ax^2 + By^2) + C(ux + vy)^2 = 0,$$

et pour que cette équation ait une racine double, on doit avoir

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 0. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) expriment analytiquement la condition géométrique imposée.

2. On peut remarquer que les relations obtenues sont homogènes par rapport à u, v, w, r. Nous allons démontrer qu'il en est toujours ainsi, c'est-à-dire que *toute relation qui est la traduction analytique d'une condition géométrique, est nécessairement homogène en* u, v, w, r.

En effet, le plan ne change pas si on remplace dans son équation u, v, w, r respectivement par λu, λv, λw, λr, λ désignant un nombre quelconque ; par conséquent, comme la droite satisfait à la condition géométrique quelle que soit la

Hosted by Google

forme sous laquelle on écrit son équation, toute solution u, v, w, r de la relation correspondante entraîne la solution $\lambda u, \lambda v, \lambda w, \lambda r$, quel que soit λ ; la relation considérée est donc homogène.

3. Un plan sera donc bien déterminé analytiquement par trois relations homogènes entre ses coefficients. Si ces relations sont algébriques, entières, de degrés m, n et p respectivement, le nombre des solutions sera mnp, d'après le théorème de Bezout.

4. Si maintenant on donne une seule relation, toujours homogène en u, v, w, r,

$$f(u, v, w, r) = 0, \tag{3}$$

il y aura une infinité de plans dont les coefficients vérifieront l'équation (3) ; nous démontrerons plus tard qu'en général tous ces plans sont tangents à une même surface.

On dira que l'équation (3) est *l'équation tangentielle* de la surface, et pour éviter toute confusion, la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un point pour que ce point soit sur la surface sera appelée *l'équation ponctuelle* de la surface.

Il existera aussi une infinité de plans dont les coefficients vérifieront deux équations en u, v, w, r ; nous établirons que tous ces plans enveloppent en général une surface d'une nature particulière, et les équations données seront dites les *équations tangentielles* de cette surface.

Nous dirons également que les coefficients u, v, w, r de l'équation d'un plan sont les *coordonnées tangentielles* de ce plan, tandis que les coordonnées d'un point seront appelées *coordonnées ponctuelles*.

Ainsi le plan qui a pour équation ponctuelle

$$3x - 2y + z - 4 = 0$$

a pour coordonnées tangentielles $3, -2, 1, -4$; le plan des xy a pour coordonnées $0, 0, 1, 0$; celui des zx, $0, 1, 0, 0$; le plan de l'infini, $0, 0, 0, 1$.

Hosted by Google

Nous remarquerons aussi qu'étant donné un plan, ses coordonnées tangentielles sont déterminées à un facteur constant près.

Nous allons maintenant interpréter géométriquement la relation linéaire et homogène entre u, v, w, r.

5. Équation du point. — Théorème. — *Toute équation homogène et du premier degré par rapport à u, v, w, r représente un point.*

Soit l'équation

$$au + bv + cw + dr = 0. \tag{4}$$

On voit immédiatement que tous les plans dont les coordonnées vérifient cette équation passent par le point qui a pour coordonnées homogènes a, b, c, d.

Cette équation est dite *l'équation tangentielle* du point.

Réciproquement, tout point peut être représenté par une équation du premier degré ; autrement dit, en écrivant qu'un plan passe par un point, on a une relation homogène et du premier degré entre les coordonnées tangentielles du plan.

On peut donc dire que :

L'équation tangentielle d'un point est la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un plan pour que ce plan passe par le point.

De même que :

L'équation ponctuelle d'un plan est la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un point pour que ce point soit dans le plan.

Exemples. — L'origine des coordonnées a pour équation

$$r = 0 ;$$

un point sur l'axe Ox, ayant pour abscisse a, sera représenté par l'équation

$$ua + r = 0.$$

6. Le point représenté par l'équation (4) n'existe que si le coefficient de r, d, est différent de zéro ; les coordonnées cartésiennes de ce point sont $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ et $\frac{c}{d}$.

Hosted by Google

Si $d = 0$, on voit que tous les plans dont les coordonnées satisfont à l'équation (4) sont parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées cartésiennes sont a, b, c; on peut donc dire que tous ces plans passent par le point à l'infini dont les coordonnées homogènes sont $a, b, c, 0$. Par conséquent, si le coefficient de r dans l'équation (4) est nul, cette équation représente un point à l'infini dans la direction qui a pour paramètres directeurs les coefficients de u, v, w.

Ainsi, $u = 0$ est l'équation du point à l'infini dans la direction de Ox; $v = 0$, $w = 0$ sont les équations des points à l'infini dans les directions de Oy et de Oz.

7. Reconnaître si un plan variable passe par un point fixe. — Dans un grand nombre de cas on peut simplement résoudre la question en se donnant les coordonnées du plan u, v, w, r, puis écrivant les conditions auxquelles est assujetti ce plan. On arrive alors à une relation entre u, v, w, r et certaines quantités constantes, et il suffit de reconnaître que la relation obtenue est du premier degré en u, v, w, r.

8. Exercices. — 1° *Étant donnés trois axes de coordonnées, on prend sur* Ox, Oy, Oz *respectivement des points* A, B, C *tels que*

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} + \frac{1}{\overline{OC}} = \frac{1}{a},$$

a *étant une constante ; démontrer que le plan* ABC *passe par un point fixe.*

Soit
$$ux + vy + wz + r = 0$$
l'équation du plan ABC.

On aura
$$\overline{OA} = -\frac{r}{u}, \qquad \overline{OB} = -\frac{r}{v}, \qquad \overline{OC} = -\frac{r}{w},$$
et par suite
$$-\frac{u + v + w}{r} = \frac{1}{a},$$
d'où
$$a(u + v + w) + r = 0;$$
ce qui montre que le plan passe par le point qui a pour coordonnées a, a, a.

Hosted by Google

2° *Un trièdre trirectangle tourne autour de son sommet supposé fixe et situé sur une quadrique. Démontrer que le plan qui contient les points de rencontre de la quadrique et des arêtes passe par un point fixe.*

Prenons pour origine le point fixe, pour axe des z la normale à la quadrique en ce point, les deux autres axes étant rectangulaires et situés dans le plan tangent à l'origine.

L'équation de la quadrique est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C''z = 0.$$

Soit un plan

$$ux + vy + wz + r = 0 ;$$

le cône qui a pour sommet l'origine et qui s'appuie sur l'intersection de la quadrique et du plan a pour équation

$$r(Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy)-2C''z(ux+vy+wz)=0,$$

et il suffit d'écrire que ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, ce qui donne

$$r(A + A' + A'') - 2C''w = 0,$$

équation tangentielle d'un point situé sur Oz et dont la cote est égale à $-\dfrac{2C''}{A + A' + A''}$.

9. De même si l'on veut reconnaître qu'un plan passe par une droite fixe, il suffira de montrer que ses coordonnées vérifient deux équations linéaires et homogènes; le plan passera alors par les deux points représentés par ces équations.

10. Équation du point d'intersection de trois plans. — Étant donnés trois plans, $P_1(u_1, v_1, w_1, r_1)$, $P_2(u_2, v_2, w_2, r_2)$, $P_3(u_3, v_3, w_3, r_3)$, ces plans auront un seul point commun à distance finie si le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

est différent de zéro. On aura l'équation de ce point en écrivant la condition pour qu'un plan (u, v, w, r) passe par l'intersection des trois premiers. Cette condition est

Hosted by Google

$$\begin{vmatrix} u & v & w & r \\ u_1 & v_1 & w_1 & r_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & r_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0\,; \tag{6}$$

en développant ce déterminant par rapport aux éléments de la première ligne, les coefficients de u, v, w, r seront les coordonnées homogènes du point d'intersection.

Si l'on suppose que le déterminant (5) soit nul, mais qu'un des déterminants à neuf éléments qu'on peut déduire du tableau

$$\begin{Vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & r_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & r_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & r_3 \end{Vmatrix}$$

soit différent de zéro, les trois plans donnés sont alors parallèles à une même droite, on peut les considérer comme ayant un point unique d'intersection à l'infini, et l'équation (6), dans laquelle le coefficient de r est nul, est toujours l'équation de ce point.

Si tous les déterminants à neuf éléments qu'on peut déduire du tableau qui précède sont nuls, les trois plans donnés passent par une même droite, et l'équation (6) est identiquement satisfaite.

11. Étant donnés deux plans non parallèles ayant pour équations

$$P_1 = u_1x + v_1y + w_1z + r_1 = 0,$$
$$P_2 = u_2x + v_2y + w_2z + r_2 = 0,$$

on sait que l'équation générale des plans qui passent par leur intersection est

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 0\,;$$

il en résulte que les coordonnées de ces plans sont de la forme $\lambda u_1 + \mu u_2$, $\lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda w_1 + \mu w_2$, $\lambda r_1 + \mu r_2$.

A toute valeur de $\dfrac{\lambda}{\mu}$ correspond un plan P passant par la droite intersection des deux plans P_1 et P_2 ; l'interprétation géométrique du signe et de la grandeur de ce rapport s'obtient aisément de la même manière qu'en géométrie plane. [Voir Première Partie (*Géom. plane*), numéros 12 et 13.]

On verra en particulier que la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans P et P′ soient conjugués harmoniques par rapport aux plans P_1 et P_2 est que les rapports $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$ relatifs à ces deux plans soient égaux et de signes contraires.

12. Représentation de la droite. — Supposons que l'on ait deux équations linéaires et homogènes en u, v, w, r,

$$au + bv + cw + dr = 0,$$
$$a'u + b'v + c'w + d'r = 0\,;$$

tous les plans dont les coordonnées vérifient ces équations passent par les deux points qu'elles représentent; il en résulte que ces plans contiennent une droite fixe.

Nous dirons que ces équations sont les *équations tangentielles* de cette droite.

Ainsi, une droite est représentée en coordonnées tangentielles par *deux* équations, qui, prises séparément, représentent deux points situés sur la droite, de même que, en coordonnées ponctuelles, une droite est représentée par *deux* équations, qui sont les équations de deux plans contenant la droite.

13. Équation générale des points situés sur une droite. — Soient

$$P = au + bv + cw + dr = 0,$$
$$P' = a'u + b'v + c'w + d'r = 0$$

les équations de deux points A et A′ situés sur la droite; nous allons montrer que l'équation générale des points situés sur cette droite est

$$\lambda P + \mu P' = 0, \tag{7}$$

λ et μ désignant des nombres arbitraires.

Remarquons d'abord que quels que soient λ et μ, l'équation (7) représente un point situé sur la droite AA′, car cette équation est vérifiée par les systèmes de valeurs de u, v, w, r qui annulent P et P′, c'est-à-dire par les coordonnées de tous les plans qui passent par la droite AA′ ; le point représenté par l'équation (7) étant situé dans tous ces plans se trouve sur la droite.

Il nous faut maintenant établir que l'on peut déterminer λ et μ en sorte que l'équation (7) représente un point M, choisi arbitrairement sur la droite AA′.

Menons par le point M un plan quelconque ne contenant pas la droite AA′ et ayant pour coordonnées u_1, v_1, w_1, r_1, et déterminons λ et μ de telle manière que l'équation (7) soit vérifiée par ces coordonnées ; on aura

$$\lambda P_1 + \mu P'_1 = 0,$$

P_1 et P'_1 désignant respectivement ce que deviennent P et P′ quand on y remplace u, v, w, r par u_1, v_1, w_1, r_1. On déduit de cette relation

$$\lambda = P'_1, \qquad \mu = -P_1,$$

et en transportant dans l'équation (7), on a

$$P'_1 P - P_1 P' = 0,$$

équation qui représente un point situé sur la droite AA′ et dans le plan (u_1, v_1, w_1, r_1). Ce point est donc le point M, et la proposition est établie.

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{P}{P_1} = \frac{P'}{P'_1};$$

elle représente un point situé à l'intersection du plan (u_1, v_1, w_1, r_1) et de la droite qui joint les deux points qui ont pour équations

$$P = 0, \qquad P' = 0.$$

Ce résultat est souvent utilisé.

14. Condition pour que trois points soient en ligne droite. — Désignons par

$$P_1 = a_1u + b_1v + c_1w + d_1r = 0,$$
$$P_2 = a_2u + b_2v + c_2w + d_2r = 0,$$
$$P_3 = a_3u + b_3v + c_3w + d_3r = 0$$

les équations des trois points A_1, A_2, A_3.

Si le point A_3 est sur la droite A_1A_2, son équation peut s'écrire

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 0;$$

cette équation représentant le même point que l'équation $P_3 = 0$, leurs coefficients devront être proportionnels, et on aura

$$\lambda P_1 + \mu P_2 \equiv -\nu P_3$$

ou

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 \equiv 0.$$

Réciproquement, s'il existe trois nombres λ, μ, ν tels que cette identité ait lieu, les trois points A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite.

On tire en effet de cette identité

$$-\nu P_3 \equiv \lambda P_1 + \mu P_2,$$

ce qui prouve que le point A_3 est sur la droite A_1A_2.

On peut donc dire que *la condition nécessaire et suffisante pour que les trois points soient en ligne droite est qu'il existe trois nombres λ, μ, ν différents de zéro en sorte qu'on ait l'identité*

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 \equiv 0.$$

Développons cette identité, c'est-à-dire écrivons que les coefficients de u, v, w, r sont nuls ; on a

$$\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = 0,$$
$$\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = 0,$$
$$\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = 0,$$
$$\lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3 = 0.$$

Pour qu'on puisse trouver des valeurs de λ, μ, ν non toutes nulles vérifiant ces équations, il faut et il suffit que les quatre déterminants à neuf éléments qu'on peut déduire du tableau

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}$$

soient nuls.

Cela ne fait en réalité que deux conditions distinctes ; il suffit d'annuler deux de ces déterminants, pourvu qu'ils contiennent un même mineur différent de zéro.

Ainsi, par exemple, si l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

les deux conditions seront

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

15. Exercice. — *On donne un triangle* ABC *et un point* O *quelconque dans l'espace. Le plan passant par le point* O *et perpendiculaire à* OA *rencontre le côté* BC *en* A′ ; *le plan passant par* O *et perpendiculaire à* OB *rencontre* CA *en* B′ ; *enfin le plan passant par* O *et perpendiculaire à* OC *rencontre* AB *en* C′. *Démontrer que les points* A′, B′, C′ *sont en ligne droite.*

Prenons trois axes rectangulaires quelconques passant par le point O et désignons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des trois sommets A, B, C du triangle ; alors les équations de ces points sont

$$P_1 = ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0,$$
$$P_2 = ux_2 + vy_2 + wz_2 + r = 0,$$
$$P_3 = ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = 0.$$

Le plan passant par l'origine et perpendiculaire à OA a pour coordonnées x_1, y_1, z_1, 0 ; il résulte de la remarque faite à la fin du numéro 13 que l'équation du point A′ est

$$\frac{ux_2 + vy_2 + wz_2 + r}{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2} = \frac{ux_3 + vy_3 + wz_3 + r}{x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3},$$

qu'on peut écrire en posant, pour simplifier,

$$x_px_q + y_py_q + z_pz_q = (pq) = (qp),$$
$$P_2(31) - P_3(12) = 0.$$

En faisant une permutation circulaire des indices, on obtient les équations des autres points B′ et C′,

$$P_3(12) - P_1(23) = 0,$$
$$P_1(23) - P_2(31) = 0.$$

Hosted by Google

En ajoutant membre à membre ces trois équations, on obtient une identité, donc les points A′, B′, C′ sont en ligne droite.

16. Plan passant par trois points. — Considérons maintenant trois points non en ligne droite,

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= a_1u + b_1v + c_1w + d_1r = 0, \\ P_2 &= a_2u + b_2v + c_2w + d_2r = 0, \\ P_3 &= a_3u + b_3v + c_3w + d_3r = 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

cela revient à supposer que les déterminants à neuf éléments qu'on peut déduire du tableau

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls.

Dans ces conditions, si l'on résout les équations (8) par rapport à u, v, w, r, on obtient un système de valeurs déterminées à un facteur constant près, et ces valeurs sont les coordonnées du plan passant par les trois points.

On trouve ainsi

$$u = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \qquad v = -\lambda \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$w = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \qquad r = -\lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

l'équation de ce plan peut alors s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

résultat bien connu.

Hosted by Google

17. Équation générale des points situés dans un plan. — Nous allons montrer que l'équation générale des points situés dans le plan des trois points A_1, A_2, A_3 représentés par les équations (8) est

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0, \tag{9}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des nombres quelconques.

Nous désignerons par Q le plan de ces trois points. Remarquons d'abord que quelles que soient les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, l'équation (9) représente un point situé dans le plan Q, car les coordonnées de ce plan annulent P_1, P_2, P_3 et par suite vérifient l'équation (9).

Il faut démontrer en outre qu'on peut disposer de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de manière que l'équation représente un point M choisi arbitrairement dans le plan Q.

Pour cela, par le point M menons deux plans quelconques $Q'(u', v', w', r')$ et $Q''(u'', v'', w'', r'')$, et écrivons que l'équation (9) est vérifiée par les coordonnées de ces plans ; on a

$$\lambda_1 P'_1 + \lambda_2 P'_2 + \lambda_3 P'_3 = 0,$$
$$\lambda_1 P''_1 + \lambda_2 P''_2 + \lambda_3 P''_3 = 0 ;$$

ces équations déterminent $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ à un facteur près, et en portant les valeurs trouvées dans l'équation (9), on obtient

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P'_1 & P'_2 & P'_3 \\ P''_1 & P''_2 & P''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente un point situé à la fois dans les plans Q, Q' et Q'' ; ce point est donc le point M, et le théorème est établi.

Il résulte de là que les coordonnées homogènes d'un point quelconque situé dans le plan des trois points sont $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$, $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$, $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$, $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3$.

Si l'on désigne par x_i, y_i, z_i les coordonnées cartésiennes du point A_i $(i = 1, 2, 3)$, les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque M du plan $A_1A_2A_3$ seront

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

Nous obtenons ainsi une interprétation géométrique des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; ce sont les nombres qu'il faut faire correspondre aux points A_1, A_2, A_3 pour que le point M soit le centre des distances proportionnelles de ces trois points, ou, si l'on veut, ces nombres sont les intensités des trois forces parallèles qu'il faut appliquer aux trois points A_1, A_2, A_3 pour que leur résultante passe par le point M.

18. Condition pour que quatre points soient dans un même plan. — Soient

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 u + b_1 v + c_1 w + d_1 r = 0, \\ P_2 &= a_2 u + b_2 v + c_2 w + d_2 r = 0, \\ P_3 &= a_3 u + b_3 v + c_3 w + d_3 r = 0, \\ P_4 &= a_4 u + b_4 v + c_4 w + d_4 r = 0 \end{aligned}$$

les équations de quatre points.

Pour que ces points soient dans un même plan, il faut et il suffit que ces quatre équations aient un système de solutions non toutes nulles en u, v, w, r. La condition cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi raisonner de la manière suivante :

Pour que le point $P_4 = 0$ soit dans le plan qui contient les trois premiers, il faut et il suffit que son équation puisse s'écrire

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0;$$

cette équation devant représenter le même point que l'équation $P_4 = 0$, leurs coefficients seront proportionnels, et on aura

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv -\lambda_4 P_4$$

Hosted by Google

ou

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \equiv 0.$$

Donc, *pour que quatre points soient dans un même plan, il faut et il suffit qu'il existe quatre nombres non nuls* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *de façon qu'on ait l'identité qui précède.*

En développant cette identité, c'est-à-dire en écrivant que les coefficients de u, v, w, r sont nuls, on a quatre équations linéaires et homogènes par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, dont le déterminant doit être nul ; on retrouve la condition écrite plus haut.

19. Exercice. — *Une droite rencontre les faces d'un tétraèdre* ABCD *en des points* A′, B′, C′, D′, A′ *étant dans la face opposée à* A, B′ *dans la face opposée à* B, *etc. Démontrer que les milieux des droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *sont dans un même plan.*

Soient u_i, v_i, w_i, r_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées des faces du tétraèdre ; considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & r_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & r_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & r_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & r_4 \end{vmatrix}$$

et désignons par U_i, V_i, W_i, R_i les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement de Δ.

Les coordonnées cartésiennes du point A sont alors $\frac{U_1}{R_1}, \frac{V_1}{R_1}, \frac{W_1}{R_1}$, et si l'on prend la droite donnée pour axe des x, celles du point A′ sont $-\frac{r_1}{u_1}$, 0, 0.

Les coordonnées du milieu de AA′ sont alors $\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{r_1}{u_1}\right)$, $\frac{V_1}{2R_1}$, $\frac{W_1}{2R_1}$, et l'équation de ce point s'écrit

$$\frac{u}{2}\left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{r_1}{u_1}\right) + \frac{v}{2} \cdot \frac{V_1}{R_1} + \frac{w}{2} \cdot \frac{W_1}{R_1} + r = 0$$

ou

$$u(U_1 u_1 - R_1 r_1) + v V_1 u_1 + w W_1 u_1 + 2r R_1 u_1 = 0.$$

Les équations des trois autres points seront

$$u(U_2 u_2 - R_2 r_2) + v V_2 u_2 + w W_2 u_2 + 2r R_2 u_2 = 0,$$
$$u(U_3 u_3 - R_3 r_3) + v V_3 u_3 + w W_3 u_3 + 2r R_3 u_3 = 0,$$
$$u(U_4 u_4 - R_4 r_4) + v V_4 u_4 + w W_4 u_4 + 2r R_4 u_4 = 0.$$

Hosted by Google

Ajoutons ces quatre équations, nous obtenons une identité, car $\Sigma U_i u_i$ est le développement de Δ par rapport aux éléments de la première colonne, de même $\Sigma R_i r_i = \Delta$; enfin $\Sigma V_i u_i$ est égal au déterminant Δ dans lequel on remplace les éléments de la deuxième colonne par ceux de la première; c'est un déterminant qui a deux colonnes identiques, il est nul.

On voit ainsi que les quatre points sont dans un même plan.

20. Étant donnés quatre points non situés dans un même plan et ayant pour équations

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad P_4 = 0,$$

l'équation d'un point quelconque de l'espace peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0.$$

Ce résultat a déjà été établi dans le cas particulier où le point est situé dans l'une des faces du tétraèdre déterminé par les quatre points donnés, car nous avons vu que l'équation générale des points situés dans le plan des trois premiers points était

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Soit un point M quelconque; la droite MP_1 rencontre le plan $P_2P_3P_4$ en un point N, lequel a une équation de la forme

$$\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0.$$

Le point M étant alors sur la droite NP_1, son équation pourra s'écrire (13)

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0.$$

Ce théorème peut être établi d'une manière différente, comme on le verra plus loin dans l'étude des coordonnées tétraédriques.

21. De la droite. — Nous avons vu précédemment (12) qu'une droite était représentée en coordonnées tangentielles par les équations de deux de ses points,

$$P = au + bv + cw + dr = 0,$$
$$P' = a'u + b'v + c'w + d'r = 0.$$

Hosted by Google

Si on élimine u entre ces deux équations, on a

$$aP' - a'P = (ab' - ba')v + (ac' - ca')w + (ad' - da')r = 0.$$

Cette équation représente un point situé sur la droite et dans le plan des yz ; c'est donc le point de rencontre de ce plan et de la droite.

On obtiendrait de la même manière les équations des points de rencontre de cette droite avec les deux autres plans de coordonnées en éliminant v et w entre les équations données ; mais si on élimine r, on obtient l'équation du point à l'infini de la droite

$$(ad' - da')u + (bd' - db')v + (cd' - dc')w = 0 ;$$

il en résulte que les paramètres directeurs de cette droite sont $ad' - da'$, $bd' - db'$, $cd' - dc'$.

On peut ainsi représenter la droite par deux équations tangentielles ne renfermant chacune que trois variables.

Si l'on suppose $ab' - ba' \neq 0$, la droite ne rencontre pas l'axe des z ; on peut résoudre les équations

$$P = 0, \qquad P' = 0$$

par rapport à u et v, on a des expressions de la forme

$$u = lw + pr,$$
$$v = mw + qr,$$

et ces équations représentent les points de rencontre de la droite avec les plans des zx et des yz.

Si $ab' - ba' = 0$, la droite rencontre Oz, et on peut prendre pour l'une de ses équations l'équation du point de rencontre de cette droite avec Oz, l'autre étant, par exemple, l'équation du point de rencontre avec le plan des xy, ou encore le point à l'infini.

22. Coordonnées d'une droite. — Les coordonnées d'une droite doivent être des nombres fixant la position de cette droite dans l'espace, et ces nombres doivent être choisis de telle manière qu'étant donnée la droite, les valeurs correspondantes de ces nombres soient bien déterminées.

Hosted by Google

Si une droite est définie par les équations de deux de ses points,

$$P = au + bv + cw + dr = 0,$$
$$P' = a'u + b'v + c'w + d'r = 0,$$

il ne faut pas songer à prendre pour coordonnées de cette droite les coefficients qui figurent dans ces équations ; ces nombres fixent bien la droite dans l'espace, mais, réciproquement, étant donnée la droite, ces nombres ne sont pas déterminés, puisque ce sont les coordonnées de deux points quelconques pris sur la droite.

On pourrait choisir par exemple les coordonnées des points de rencontre de la droite avec deux plans fixes, deux plans de coordonnées si l'on veut, mais cette représentation serait illusoire dans le cas où la droite rencontrerait l'intersection des deux plans fixes.

Ainsi pour les droites qui ne rencontrent pas l'axe Oz et qui sont représentées par des équations de la forme

$$u = lw + pr,$$
$$v = mw + qr,$$

les nombres l, m, p, q pourraient être pris comme coordonnées, mais il faudrait un nouveau système pour les droites rencontrant Oz.

Ces remarques s'appliquent aussi bien dans la représentation de la droite en coordonnées ponctuelles. On sait en effet qu'une droite non parallèle au plan des xy peut être définie par les équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q;$$

les nombres a, b, p, q peuvent être pris comme coordonnées de la droite ; mais ce mode de représentation ne s'applique plus aux droites parallèles au plan des xy.

C'est pour ces raisons que Plücker a indiqué un système de coordonnées de droites, universellement adopté aujourd'hui, et qui a le grand avantage de se déduire aussi aisément des représentations ponctuelle et tangentielle de la droite.

Hosted by Google

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point d'une droite et par α, β, γ ses paramètres directeurs (*), les équations ponctuelles de cette droite peuvent s'écrire

$$\frac{x-x'}{\alpha}=\frac{y-y'}{\beta}=\frac{z-z'}{\gamma};$$

il en résulte que les projections de cette droite sur les plans de coordonnées ont pour équations

$$\begin{aligned}\beta z-\gamma y&=\beta z'-\gamma y',\\ \gamma x-\alpha z&=\gamma x'-\alpha z',\\ \alpha y-\beta x&=\alpha y'-\beta x'.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}\beta z'-\gamma y'&=l,\\ \gamma x'-\alpha z'&=m,\\ \alpha y'-\beta x'&=n\,;\end{aligned}$$

les six quantités α, β, γ, l, m, n sont dites les coordonnées de la droite.

Remarquons tout de suite qu'elles vérifient la relation

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0, \tag{1}$$

et qu'elles ne sont définies qu'à un facteur près ; elles ne dépendent donc que de quatre paramètres.

Les projections de la droite sur les plans de coordonnées ont alors pour équations

$$\left.\begin{aligned}\beta z-\gamma y&=l,\\ \gamma x-\alpha z&=m,\\ \alpha y-\beta x&=n,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ce qui montre qu'étant donnée la droite, les six coordonnées sont déterminées à un facteur près.

En multipliant ces équations respectivement par x, y, z, puis ajoutant, on a

$$lx+my+nz=0,$$

équation du plan passant par l'origine et par la droite.

(*) C'est-à-dire les coordonnées d'un point quelconque de la parallèle à cette droite menée par l'origine.

Hosted by Google

Supposons maintenant qu'une droite soit définie par les coordonnées homogènes de deux de ses points, x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2.

Les projections de cette droite sur les plans de coordonnées ont pour équations

$$\begin{vmatrix} y & z & t \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix} = y(z_1t_2 - t_1z_2) + z(t_1y_2 - y_1t_2) + t(y_1z_2 - z_1y_2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & z & t \\ x_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix} = x(z_1t_2 - t_1z_2) + z(t_1x_2 - x_1t_2) + t(x_1z_2 - z_1x_2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = x(y_1t_2 - t_1y_2) + y(t_1x_2 - x_1t_2) + t(x_1y_2 - y_1x_2) = 0.$$

En comparant ces équations aux équations (2), on obtient des quantités proportionnelles aux coordonnées de la droite ; on a ainsi

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \lambda(x_1t_2 - t_1x_2), & l &= \lambda(y_1z_2 - z_1y_2), \\ \beta &= \lambda(y_1t_2 - t_1y_2), & m &= \lambda(z_1x_2 - x_1z_2), \\ \gamma &= \lambda(z_1t_2 - t_1z_2), & n &= \lambda(x_1y_2 - y_1x_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si l'on remplace dans les seconds membres x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 par les coordonnées de deux autres points quelconques pris sur la droite, les quantités α, β, γ, l, m, n varient proportionnellement ; on peut le vérifier directement, mais cela résulte du calcul précédent.

Supposons enfin que la droite soit définie par l'intersection de deux plans ayant pour équations

$$u_1x + v_1y + w_1z + r_1t = 0,$$
$$u_2x + v_2y + w_2z + r_2t = 0.$$

Formons les équations des projections de cette droite en éliminant successivement x, y, z entre les deux équations ; on a

$$(u_1v_2 - v_1u_2)y + (u_1w_2 - w_1u_2)z + (u_1r_2 - r_1u_2)t = 0,$$

$$(v_1u_2 - u_1v_2)x + (v_1w_2 - w_1v_2)z + (v_1r_2 - r_1v_2)t = 0,$$

$$(w_1u_2 - u_1w_2)x + (w_1v_2 - v_1w_2)y + (w_1r_2 - r_1w_2)t = 0 ;$$

comparons encore ces équations avec les équations (2) ; on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu(v_1w_2 - w_1v_2), & l &= \mu(u_1r_2 - r_1u_2), \\ \beta &= \mu(w_1u_2 - u_1w_2), & m &= \mu(v_1r_2 - r_1v_2), \\ \gamma &= \mu(u_1v_2 - v_1u_2), & n &= \mu(w_1r_2 - r_1w_2). \end{aligned}$$

Si l'on remplace dans les seconds membres u_1, v_1, w_1, r_1 et u_2, v_2, w_2, r_2 par les coordonnées de deux autres plans contenant la droite, les quantités α, β, γ, l, m, n varient proportionnellement ; on peut le vérifier directement, mais cela résulte du calcul précédent.

A l'aide de ces coordonnées de la droite on peut écrire les équations tangentielles de la droite analogues aux équations ponctuelles (2). Cherchons en effet les équations tangentielles des points de rencontre de la droite avec les plans de coordonnées et le plan de l'infini ; pour cela, éliminons successivement u, v, w, r entre les équations tangentielles de la droite

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1 = 0,$$

$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + rt_2 = 0.$$

On obtient aisément, en tenant compte des formules (3),

$$\begin{aligned} mw - nv &= \alpha r, \\ nu - lw &= \beta r, \\ lv - mu &= \gamma r, \\ \alpha u + \beta v + \gamma w &= 0. \end{aligned}$$

En résumé, les coordonnées d'une droite sont six nombres α, β, γ, l, m, n qu'on peut définir par les formules

Hosted by Google

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \lambda(x_1t_2 - t_1x_2) = \mu(v_1w_2 - w_1v_2),\\
\beta &= \lambda(y_1t_2 - t_1y_2) = \mu(w_1u_2 - u_1w_2),\\
\gamma &= \lambda(z_1t_2 - t_1z_2) = \mu(u_1v_2 - v_1u_2),\\
l &= \lambda(y_1z_2 - z_1y_2) = \mu(u_1r_2 - r_1u_2),\\
m &= \lambda(z_1x_2 - x_1z_2) = \mu(v_1r_2 - r_1v_2),\\
n &= \lambda(x_1y_2 - y_1x_2) = \mu(w_1r_2 - r_1w_2),
\end{aligned}
$$

où x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 désignent les coordonnées homogènes de deux points quelconques pris sur la droite, et u_1, v_1, w_1, r_1 et u_2, v_2, w_2, r_2 les coordonnées de deux plans quelconques contenant la droite.

Ces coordonnées vérifient la relation

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

En outre, on peut définir *ponctuellement* la droite par deux quelconques des équations

$$
\begin{aligned}
\beta z - \gamma y &= lt,\\
\gamma x - \alpha z &= mt,\\
\alpha y - \beta x &= nt,\\
lx + my + nz &= 0,
\end{aligned}
$$

ou, *tangentiellement*, par deux quelconques des équations

$$
\begin{aligned}
mw - nv &= \alpha r,\\
nu - lw &= \beta r,\\
lv - mu &= \gamma r,\\
\alpha u + \beta v + \gamma w &= 0.
\end{aligned}
$$

Ces six coordonnées ne peuvent être nulles en même temps.

Si les trois coordonnées l, m, n sont nulles, on voit que la droite passe par l'origine ; si α, β, γ sont nulles, la droite est à l'infini, elle est déterminée alors par les équations

$$
\begin{aligned}
lx + my + nz &= 0,\\
t &= 0.
\end{aligned}
$$

Hosted by Google

23. On démontrera comme au numéro 2 que les conditions géométriques imposées à une droite s'exprimeront par des relations homogènes entre ses six coordonnées.

Exemples. I. *Écrire qu'une droite* Δ *rencontre une autre droite* Δ'.

Soient α, β, γ, l, m, n et α', β', γ', l', m', n' les coordonnées des deux droites; si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées cartésiennes de deux points appartenant chacun aux droites Δ et Δ', on sait que la condition pour que ces droites se rencontrent est

$$\begin{vmatrix} x_1 - x'_1 & y_1 - y'_1 & z_1 - z'_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte des formules

$$l = \beta z_1 - \gamma y_1,$$
$$l' = \beta' z'_1 - \gamma' y'_1,$$
$$\ldots \text{ etc.},$$
$$\alpha l' + \beta m' + \gamma n' + l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = 0,$$

relation homogène et linéaire par rapport aux coordonnées de la droite Δ.

II. *Écrire qu'une droite* Δ *est normale à une quadrique.*

Supposons que la quadrique soit un ellipsoïde rapporté à ses axes et ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Les équations d'une normale en un point (x, y, z) de cette surface sont

$$\frac{X - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z - z}{\frac{z}{c^2}},$$

x, y, z vérifiant l'équation de l'ellipsoïde.

Or ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{y}{b^2} Z - \frac{z}{c^2} Y = yz\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$
$$\frac{z}{c^2} X - \frac{x}{a^2} Z = zx\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$
$$\frac{x}{a^2} Y - \frac{y}{b^2} X = xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$

en désignant par α, β, γ, l, m, n les coordonnées de cette normale,

Hosted by Google

on aura

$$\alpha = \lambda \frac{x}{a^2}, \qquad l = \lambda yz\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$

$$\beta = \lambda \frac{y}{b^2}, \qquad m = \lambda zx\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

$$\gamma = \lambda \frac{z}{c^2}, \qquad n = \lambda xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

Les trois équations de gauche donnent

$$x = \frac{a^2\alpha}{\lambda}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{\lambda}, \qquad z = \frac{c^2\gamma}{\lambda};$$

remplaçons ces valeurs de x, y, z dans les équations de droite et dans l'équation de l'ellipsoïde ; on a

$$\frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{\lambda^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{\beta\gamma(c^2 - b^2)}{l} = \frac{\gamma\alpha(a^2 - c^2)}{m} = \frac{\alpha\beta(b^2 - a^2)}{n} = \lambda,$$

ou, en éliminant λ,

$$\frac{\beta\gamma(b^2 - c^2)}{l} = \frac{\gamma\alpha(c^2 - a^2)}{m} = \frac{\alpha\beta(a^2 - b^2)}{n} = \pm\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2};$$

telles sont les conditions cherchées.

Il n'y a en réalité que deux relations, car si les deux premiers rapports sont égaux, ils sont égaux au troisième en vertu de la relation (1).

24. Pour déterminer une droite, il sera nécessaire d'avoir quatre relations entre ses coordonnées ; on y joindra l'équation (1) et on aura ainsi cinq équations qui détermineront les coordonnées à un facteur près.

Ainsi, pour obtenir les droites qui rencontrent quatre droites données ayant pour coordonnées α_i, β_i, γ_i, l_i, m_i, n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, il faudra résoudre les équations

$$\alpha l_1 + \beta m_1 + \gamma n_1 + \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = 0,$$
$$\alpha l_2 + \beta m_2 + \gamma n_2 + \alpha_2 l + \beta_2 m + \gamma_2 n = 0,$$
$$\alpha l_3 + \beta m_3 + \gamma n_3 + \alpha_3 l + \beta_3 m + \gamma_3 n = 0,$$
$$\alpha l_4 + \beta m_4 + \gamma n_4 + \alpha_4 l + \beta_4 m + \gamma_4 n = 0,$$
$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

Hosted by Google

25. Si l'on donne une seule relation entre les coordonnées d'une droite, il existera une infinité de droites dont les coordonnées vérifieront cette relation ; l'ensemble de ces droites constitue ce qu'on appelle un *complexe*, dont le degré est par définition le degré de la relation donnée, supposée algébrique, entière et homogène.

L'équation générale du complexe du premier degré ou linéaire est

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Dl + Em + Fn = 0. \tag{4}$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$AD + BE + CF = 0,$$

on peut considérer les quantités A, B, C, D, E, F comme les coordonnées d'une droite Δ ; la condition (4) exprime que les droites du complexe rencontrent la droite Δ, et que, réciproquement, toute droite qui rencontre Δ appartient au complexe.

On dit alors que le complexe est *spécial*, et l'on peut considérer la relation (4) comme l'équation de la droite en *coordonnées de droites*. D'une manière générale on appellera équation d'une surface ou d'une courbe en coordonnées de droites, la condition pour qu'une droite soit tangente à une surface ou rencontre la courbe.

On verra aisément que les équations en coordonnées de droites de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

ou de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad z = 0,$$

sont respectivement

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - \left(\frac{l^2}{b^2c^2} + \frac{m^2}{c^2a^2} + \frac{n^2}{a^2b^2}\right) = 0,$$

$$\gamma^2 - \left(\frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}\right) = 0,$$

Hosted by Google

la seconde pouvant d'ailleurs se déduire de la première en faisant $c = 0$.

Mais il est essentiel d'observer que ces équations représentent des complexes particuliers ou *spéciaux*; en d'autres termes, toutes les droites d'un complexe ne sont pas en général tangentes à une surface ou ne rencontrent pas une ligne, et par conséquent toute équation homogène entre les coordonnées d'une droite n'est pas l'équation d'une surface ou d'une ligne.

Ainsi l'équation (4) ne représente une droite que si

$$AD + BE + CF = 0.$$

26. THÉORÈME. — *Par un point de l'espace il passe une infinité de droites appartenant à un complexe linéaire ; toutes ces droites sont situées dans un même plan.*

Soit $$A\alpha + B\beta + C\gamma + Dl + Em + Fn = 0$$

l'équation du complexe, et $P(x', y', z', t')$ le point donné.

Par ce point menons une droite quelconque sur laquelle nous prenons un point $M(x, y, z, t)$; les coordonnées de cette droite sont alors, à un facteur près,

$$\alpha = xt' - tx', \qquad l = yz' - zy',$$
$$\beta = yt' - ty', \qquad m = zx' - xz',$$
$$\gamma = zt' - tz', \qquad n = xy' - yx',$$

et pour que cette droite appartienne au complexe, il faut qu'on ait

$$A(xt' - tx') + B(yt' - ty') + C(zt' - tz') + D(yz' - zy') \\ + E(zx' - xz') + F(xy' - yx') = 0 ;$$

cette équation représente un plan qui est le lieu que doit décrire le point M pour que la droite PM appartienne au complexe. Or ce plan passe par le point P, il est donc le lieu des droites du complexe qui passent par le point P.

27. THÉORÈME. — *Dans un plan quelconque il existe une infinité de droites appartenant à un complexe linéaire ; toutes ces droites passent par un même point.*

Soit $P(u', v', w', r')$ le plan donné. Un plan quelconque $Q(u, v, w, r)$ coupe le plan P suivant une droite ayant pour coordonnées

$$\alpha = vw' - wv', \qquad l = ur' - ru',$$
$$\beta = wu' - uw', \qquad m = vr' - rv',$$
$$\gamma = uv' - vu', \qquad n = wr' - rw'.$$

Pour que cette droite appartienne au complexe, il faut qu'on ait

$$\mathrm{A}(vw' - wv') + \mathrm{B}(wu' - uw') + \mathrm{C}(uv' - vu') + \mathrm{D}(ur' - ru') + \mathrm{E}(vr' - rv') + \mathrm{F}(wr' - rw') = 0.$$

Cette équation représente un point, par lequel doit passer le plan Q pour que la droite intersection des deux plans P et Q appartienne au complexe. Or ce point est dans le plan P, donc toutes les droites du plan P qui appartiennent au complexe passent par un point fixe.

28. Si l'on donne maintenant deux relations entre les coordonnées d'une droite, il existe encore une infinité de droites dont les coordonnées vérifient cette équation ; l'ensemble de ces droites constitue une *congruence*. En somme on peut dire qu'une congruence se compose des droites communes à deux complexes.

Les droites d'une congruence dépendent de *deux* paramètres variables, tandis que celles d'un complexe dépendent de *trois* paramètres.

Ainsi les tangentes à une surface forment un complexe, tandis que les normales constituent une congruence.

Enfin, toutes les droites dont les coordonnées vérifient trois relations appartiennent à une surface réglée.

29. Pour traiter les questions d'angles et de distances en coordonnées tangentielles, on peut utiliser les formules connues, dont l'application n'offre aucune difficulté.

Si l'on veut obtenir, par exemple, la distance du point qui a pour équation

$$au + bv + cw + dr = 0$$

au plan qui a pour coordonnées u_1, v_1, w_1, r_1, il suffit de remarquer que les coordonnées cartésiennes du point sont $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$, de sorte que la distance cherchée est, si les axes

Hosted by Google

sont rectangulaires,

$$\frac{u_1\dfrac{a}{d}+v_1\dfrac{b}{d}+w_1\dfrac{c}{d}+r_1}{\pm\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}}$$

ou

$$\frac{au_1+bv_1+cw_1+dr_1}{\pm d\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}}.$$

30. Distance d'un point à une droite. — Supposons que la droite soit définie par les deux équations

$$a_1u+b_1v+c_1w+d_1r=0,$$
$$a_2u+b_2v+c_2w+d_2r=0,$$

et désignons par x', y', z' les coordonnées du point.

Les équations ponctuelles de la droite peuvent alors s'écrire

$$\frac{x-\dfrac{a_1}{d_1}}{\dfrac{a_1}{d_1}-\dfrac{a_2}{d_2}}=\frac{y-\dfrac{b_1}{d_1}}{\dfrac{b_1}{d_1}-\dfrac{b_2}{d_2}}=\frac{z-\dfrac{c_1}{d_1}}{\dfrac{c_1}{d_1}-\dfrac{c_2}{d_2}},$$

et, d'après une formule connue, la distance cherchée δ est donnée par la relation

$$\delta^2=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\left(\dfrac{a_1}{d_1}-\dfrac{a_2}{d_2}\right)^2+\left(\dfrac{b_1}{d_1}-\dfrac{b_2}{d_2}\right)^2+\left(\dfrac{c_1}{d_1}-\dfrac{c_2}{d_2}\right)^2},$$

où l'on pose

$$X=\left(z'-\frac{c_1}{d_1}\right)\left(\frac{b_1}{d_1}-\frac{b_2}{d_2}\right)-\left(y'-\frac{b_1}{d_1}\right)\left(\frac{c_1}{d_1}-\frac{c_2}{d_2}\right),$$

$$Y=\left(x'-\frac{a_1}{d_1}\right)\left(\frac{c_1}{d_1}-\frac{c_2}{d_2}\right)-\left(z'-\frac{c_1}{d_1}\right)\left(\frac{a_1}{d_1}-\frac{a_2}{d_2}\right),$$

$$Z=\left(y'-\frac{b_1}{d_1}\right)\left(\frac{a_1}{d_1}-\frac{a_2}{d_2}\right)-\left(x'-\frac{a_1}{d_1}\right)\left(\frac{b_1}{d_1}-\frac{b_2}{d_2}\right).$$

Si l'on introduit les coordonnées α, β, γ, l, m, n de la droite, on obtient

$$\delta^2=\frac{(\beta z'-\gamma y'-l)^2+(\gamma x'-\alpha z'-m)^2+(\alpha y'-\beta x'-n)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Hosted by Google

31. Plus courte distance de deux droites. — Supposons les deux droites déterminées par leurs coordonnées

$$\Delta(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ l,\ m,\ n) \qquad \text{et} \qquad \Delta'(\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ l',\ m',\ n').$$

On sait que la plus courte distance des droites qui sont définies par les équations

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma},$$

$$\frac{x-x_1}{\alpha'}=\frac{y-y'_1}{\beta'}=\frac{z-z'_1}{\gamma'}$$

est

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1-x'_1 & \alpha & \alpha' \\ y_1-y_1 & \beta & \beta' \\ z_1-z'_1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}};$$

en développant le numérateur comme au numéro 23, cette distance devient

$$\frac{\alpha l'+\beta m'+\gamma n'+\alpha' l+\beta' m+\gamma' n}{\pm\sqrt{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}}.$$

EXERCICES ET NOTES

1. *Lorsque dans un tétraèdre deux arêtes sont respectivement perpendiculaires aux arêtes opposées, les deux autres arêtes sont également perpendiculaires entre elles.*

Soient u_i, v_i, w_i, r_i les coordonnées d'une face P_i $(i=1, 2, 3, 4)$. Pour que les arêtes, intersections de P_1, P_2 et de P_3, P_4, soient perpendiculaires, il faut qu'on ait la relation

$$(v_1w_2-w_1v_2)(v_3w_4-w_3v_4)+(w_1u_2-u_1w_2)(w_3u_4-u_3w_4)$$
$$+(u_1v_2-v_1u_2)(u_3v_4-v_3u_4)=0,$$

qu'on peut écrire, en désignant par (ij) la somme $u_iu_j+v_iv_j+w_iw_j$,

$$(13)(24)-(14)(23)=0.$$

De même, pour que les arêtes, intersections de P_1, P_3 et de P_2, P_4, soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$(12)(34) - (14)(23) = 0.$$

On en déduit

$$(13)(24) - (12)(34) = 0,$$

ce qui prouve que les arêtes P_1, P_4 et P_2, P_3 sont perpendiculaires.

2. *Lorsque dans un tétraèdre les arêtes opposées sont perpendiculaires, les quatre hauteurs se rencontrent en un même point.*

En désignant par P_i l'expression $u_i x + v_i y + w_i z + r_i$, on voit aisément que la hauteur perpendiculaire à la face P_1 a pour équations ponctuelles

$$\frac{P_2}{(12)} = \frac{P_3}{(13)} = \frac{P_4}{(14)}.$$

On forme de même les équations des autres hauteurs, et en tenant compte des *conditions de l'exercice précédent*, on voit que ces droites passent par le point qui est défini par les équations

$$\frac{P_1}{\frac{(12)(13)}{(23)}} = \frac{P_2}{(12)} = \frac{P_3}{(13)} = \frac{P_4}{(14)}.$$

La réciproque est vraie.

Un tétraèdre dans lequel les hauteurs passent par un même point est appelé *tétraèdre orthocentrique*, et le point de rencontre des hauteurs s'appelle l'*orthocentre*.

3. *Dans un tétraèdre orthocentrique, les perpendiculaires communes aux arêtes opposées passent par l'orthocentre.*

4. Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre fonctions linéaires, homogènes et indépendantes par rapport à u, v, w, r ; en égalant ces fonctions à zéro, on a les équations de quatre points non situés dans un même plan.

Considérons les quatre droites représentées par les équations

$$\frac{P_2}{a_{12}} = \frac{P_3}{a_{13}} = \frac{P_4}{a_{14}}, \qquad (\Delta_1)$$

$$\frac{P_1}{a_{21}} = \frac{P_3}{a_{23}} = \frac{P_4}{a_{24}}, \qquad (\Delta_2)$$

$$\frac{P_1}{a_{31}} = \frac{P_2}{a_{32}} = \frac{P_4}{a_{34}}, \qquad (\Delta_3)$$

$$\frac{P_1}{a_{41}} = \frac{P_2}{a_{42}} = \frac{P_3}{a_{43}}. \qquad (\Delta_4)$$

Hosted by Google

Nous nous proposons de démontrer que ces quatre droites sont sur un hyperboloïde si l'on a

$$a_{ij} = a_{ji},$$

quels que soient i et j.

La droite Δ_1 est située dans le plan des trois points P_2, P_3, P_4 ; une droite quelconque rencontrant Δ_1 a pour équations tangentielles

$$\lambda_2 P_2 = \lambda_3 P_3 = \lambda_4 P_4.$$

Cherchons à déterminer λ_2, λ_3, λ_4 de manière que cette droite rencontre Δ_2, Δ_3 et Δ_4.

De ces dernières équations on tire

$$P_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} P_2, \qquad P_4 = \frac{\lambda_2}{\lambda_4} P_2,$$

et, en remplaçant dans les équations de Δ_2, Δ_3, Δ_4, on trouve aisément les conditions suivantes :

$$\frac{\lambda_3}{a_{24}} = \frac{\lambda_4}{a_{23}}, \qquad \frac{\lambda_2}{a_{34}} = \frac{\lambda_4}{a_{32}}, \qquad \frac{\lambda_2}{a_{43}} = \frac{\lambda_3}{a_{42}}.$$

Si l'on a

$$a_{23} = a_{32}, \qquad a_{24} = a_{42}, \qquad a_{34} = a_{43},$$

on pourra prendre

$$\frac{\lambda_2}{a_{34}} = \frac{\lambda_3}{a_{42}} = \frac{\lambda_4}{a_{23}},$$

et les quatre droites données seront rencontrées par la droite

$$a_{34} P_2 = a_{42} P_3 = a_{23} P_4. \tag{D$_1$}$$

On verrait de même que ces quatre droites sont rencontrées par les droites

$$a_{41} P_3 = a_{13} P_4 = a_{34} P_1, \tag{D$_2$}$$

$$a_{12} P_4 = a_{24} P_1 = a_{41} P_2, \tag{D$_3$}$$

$$a_{23} P_1 = a_{31} P_2 = a_{12} P_3. \tag{D$_4$}$$

Il en résulte que les quatre droites Δ constituent quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde, et l'on voit de plus que les quatre droites D sont quatre génératrices de système différent de la même surface.

Un raisonnement analogue montrerait que le résultat subsiste dans le cas où P_1, P_2, P_3, P_4 désignent des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z, t ; les droites sont alors représentées par des équations ponctuelles.

On voit, en particulier, en se reportant à l'exercice 2, que les quatre hauteurs d'un tétraèdre quelconque sont sur un hyperboloïde.

Hosted by Google

5. *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* O *dans l'espace, on mène par le point* O *le plan conjugué de* OA *par rapport à un cône* Γ *de sommet* O, *ce plan rencontre* BC *en* A′ ; *on mène ensuite par le point* O *le plan conjugué de* OB *qui rencontre* CA *en* B′, *enfin le plan conjugué de* OC *qui rencontre* AB *en* C′. *Démontrer que les points* A′, B′, C′ *sont en ligne droite.*

On emploiera la même méthode que dans l'exercice résolu au nº 15.

En désignant par

$$\varphi(x,\ y,\ z) = 0$$

l'équation du cône Γ, le plan conjugué de OA a pour équation

$$x\varphi'_{x_1} + y\varphi'_{y_1} + z\varphi'_{z_1} = 0.$$

6. *On coupe une pyramide triangulaire* SABC *par un plan qui rencontre les arêtes* SA, SB, SC *respectivement en* A′, B′, C′. *Démontrer que les trois droites, intersections des couples de plans* (BCA′, B′C′A), (CAB′, C′A′B), (ABC′, A′B′C), *sont dans un même plan.*

7. *Si deux tétraèdres ont leurs sommets deux à deux sur quatre droites concourantes, les faces correspondantes se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan, et réciproquement.*

8. *On donne un trièdre* $Oxyz$, *un triangle* ABC *dont le plan passe par le sommet* O *du trièdre et un plan* P. *On prend un point* M *quelconque dans le plan* P ; *le plan* MBC *coupe* Ox *en* α, *le plan* MCA *coupe* Oy *en* β, *le plan* MAB *coupe* Oz *en* γ ; *démontrer que le plan* $\alpha\beta\gamma$ *passe par un point fixe.*

Prenons les arêtes du trièdre $Oxyz$ comme axes de coordonnées ; nous supposons que les côtés du triangle ABC sont à l'intersection du plan du triangle

$$Q = ax + by + cz = 0$$

et de trois autres plans,

$$P_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$P_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$P_3 = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0,$$

qui passent respectivement par les côtés BC, CA, AB.

Soit
$$ux + vy + wz + r = 0$$

l'équation du plan $\alpha\beta\gamma$; le point α a pour abscisse $-\dfrac{r}{u}$, le plan

αBC a pour équation

$$\frac{Q}{-ar} = \frac{P_1}{-a_1r + d_1u};$$

de même les plans βCA et γAB ont respectivement pour équations

$$\frac{Q}{-br} = \frac{P_2}{-b_2r + d_2v},$$

$$\frac{Q}{-cr} = \frac{P_3}{-c_3r + d_3w}.$$

Tout revient à écrire que ces trois plans se coupent en un point situé dans un plan donné P.

Les coordonnées du point de rencontre vérifient les équations

$$\frac{Q}{r} = \frac{aP_1}{a_1r - d_1u} = \frac{bP_2}{b_2r - d_2v} = \frac{cP_3}{c_3r - d_3w};$$

or l'équation d'un plan quelconque peut s'écrire

$$hQ + lP_1 + mP_2 + nP_3 = 0;$$

on aura donc la condition

$$hr + \frac{l}{a}(a_1r - d_1u) + \frac{m}{b}(b_2r - d_2v) + \frac{n}{c}(c_3r - d_3w) = 0,$$

ce qui montre que le plan $\alpha\beta\gamma$ passe par un point fixe.

9. *On donne un plan* P *et une oblique* OA ; *par cette oblique et par une droite quelconque* OB *du plan* P, *on fait passer un plan, et l'on mène dans ce plan la perpendiculaire* OC *à la droite* OB ; *puis on fait, dans le plan* P, *l'angle* BOD *égal à un angle donné. Démontrer que le plan* COD *passe par une droite fixe.*

10. *On donne une sphère* S, *un plan* P *et un point* A. *Par le point* A *on mène une droite quelconque, qui rencontre le plan* P *au point* B. *Sur* AB *comme diamètre on décrit une sphère. Démontrer que le plan radical des deux sphères passe par un point fixe.*

Soit
$$ux + vy + wz + r = 0$$
l'équation du plan radical ; si $S = 0$ désigne l'équation de la sphère donnée, la sphère variable aura une équation de la forme

$$S + \lambda(ux + vy + wz + r) = 0;$$

on écrira que cette sphère passe par le point A, et que si l'on joint le centre au point A, la droite obtenue rencontre le plan P en un point symétrique de A par rapport au centre.

On aura deux relations entre lesquelles on éliminera λ, et il restera une équation du premier degré par rapport à u, v, w, r.

Hosted by Google

11. *On donne une sphère et un plan; si l'on décrit une sphère quelconque touchant le plan en un point donné, le plan radical des deux sphères passe par une droite fixe.*

12. *Si un cône ayant pour sommet le centre d'un ellipsoïde et pour base une section plane, coupe suivant un cercle le plan tangent à l'une des extrémités du grand axe, le plan de la section passe par l'une ou l'autre de deux droites fixes situées dans le plan de l'axe moyen et du petit axe.*

13. *Si d'un point on abaisse des perpendiculaires sur trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, le plan mené par les pieds de ces perpendiculaires passe par un point fixe.*

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipsoïde, et soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de cette surface.

Soit
$$ux + vy + wz + r = 0$$

l'équation d'un plan Q passant par les pieds des perpendiculaires menées du point donné $P(x_0, y_0, z_0)$ sur trois diamètres conjugués.

Ces trois points sont situés sur la sphère de diamètre OP,

$$x^2 + y^2 + z^2 - xx_0 - yy_0 - zz_0 = 0.$$

Il nous suffira d'écrire que le cône ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur le cercle section de la sphère par le plan Q contient trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

L'équation de ce cône est

$$r(x^2 + y^2 + z^2) + (xx_0 + yy_0 + zz_0)(ux + vy + wz) = 0.$$

Pour qu'il contienne trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, il faut qu'on ait

$$(r + ux_0)a^2 + (r + vy_0)b^2 + (r + wz_0)c^2 = 0$$

ou

$$ua^2x_0 + vb^2y_0 + wc^2z_0 + r(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Le plan Q passe donc par le point qui a pour coordonnées

$$\frac{a^2x_0}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad \frac{b^2y_0}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad \frac{c^2z_0}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

14. *Si d'un point on abaisse des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués quelconques d'un ellipsoïde, le plan mené par les pieds de ces perpendiculaires passe par un point fixe.*

Hosted by Google

15. *On donne une surface du second ordre* S, *un point fixe* A *sur cette surface et une conique* C *située dans un plan* P. *Les trois droites qui joignent le point* A *aux sommets* A_1, A_2, A_3 *d'un triangle* T *situé dans le plan* P *rencontrent respectivement la surface en des points* a_1, a_2, a_3 *autres que* A. *Démontrer que le plan* $a_1a_2a_3$ *passe par un point fixe* M *quand le triangle* T *se déplace dans le plan* P *en restant conjugué par rapport à la conique* C.

16. *Interpréter géométriquement le signe du premier membre de l'équation tangentielle d'un point.*

Voir première partie (*Géom. plane*), n° 20.

17. Note sur le complexe linéaire. — Le théorème établi au n° 26 nous montre que toutes les droites du complexe qui passent par un point M sont situées dans un plan P qui contient le point M ; d'après le théorème du n° 27, les droites du complexe situées dans le plan P devant passer par un point de ce plan, passeront par le point M.

On dit que le point M est le pôle (ou le foyer) du plan P, et que le plan P est le plan polaire (ou le plan focal) du point M.

Si le point M a pour coordonnées x', y', z', t', l'équation du plan P est (26)

$$A(xt' - tx') + B(yt' - ty') + C(zt' - tz') + D(yz' - zy') + E(zx' - xz') + F(xy' - yx') = 0 ;$$

les coordonnées de ce plan sont donc

$$\left.\begin{aligned} u' &= Fy' - Ez' + At', \\ v' &= -Fx' + Dz' + Bt', \\ w' &= Ex' - Dy' + Ct', \\ r' &= -Ax' - By' - Cz'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Si l'on se donne les coordonnées u', v', w', r' du plan P, l'équation de son pôle est (27)

$$A(vw' - wv') + B(wu' - uw') + C(uv' - vu') + D(ur' - ru') + E(vr' - rv') + F(wr' - rw') = 0 ;$$

les coordonnées de ce point seront alors

$$\left.\begin{aligned} x' &= Cv' - Bw' + Dr', \\ y' &= -Cu' + Aw' + Er', \\ z' &= Bu' - Av' + Fr', \\ t' &= -Du' - Ev' - Fw'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Hosted by Google

On peut d'ailleurs vérifier analytiquement que si $AD + BE + CF$ n'est pas nul, les systèmes (1) et (2) sont équivalents.

Si le point M décrit une droite Δ, le plan polaire P tourne autour d'une droite Δ_1 ; cette propriété résulte immédiatement des équations (1), mais on peut l'établir géométriquement de la façon suivante.

Prenons deux points M et M′ sur une droite Δ ; les plans polaires P et P′ se coupent suivant une droite Δ_1. Prenons un point quelconque N sur Δ_1 ; les droites NM et NM′ appartiennent au complexe ; par suite, N est le pôle du plan NMM′. Il en résulte que si l'on joint le point N à un point quelconque M″ de la droite Δ, la droite NM″ appartient au complexe, donc le plan polaire de M″ passe par le point N ; le point N étant choisi arbitrairement sur Δ_1, on voit que le plan polaire de M″ contient la droite Δ_1.

Mais ce raisonnement prouve de plus que les plans polaires des points de Δ_1 tournent autour de Δ ; *on en conclut* le théorème suivant :

Si un point décrit une droite Δ, son plan polaire décrit une droite Δ_1, et, réciproquement, si un point décrit Δ_1, son plan polaire tourne autour de Δ.

Les droites Δ et Δ_1 sont appelées *droites conjuguées* par rapport au complexe ; elles jouissent de propriétés fort remarquables.

On démontre aisément, par exemple, que toute droite rencontrant deux droites conjuguées appartient au complexe ; que toute droite du complexe qui rencontre une droite rencontre sa conjuguée ; que toute droite qui coïncide avec sa conjuguée appartient au complexe, etc.

Si un plan se déplace parallèlement à lui-même, le lieu de ses pôles est une droite.

En effet, on peut supposer que le plan passe par une droite fixe située à l'infini ; son pôle décrit la conjuguée de cette droite.

On appelle *diamètre* du complexe toute droite conjuguée d'une droite à l'infini ; tous les diamètres sont parallèles, car ils passent par le pôle du plan de l'infini et ce pôle est à l'infini.

On appelle *axe* du complexe un diamètre perpendiculaire à la direction de ses plans conjugués, c'est-à-dire des plans dont il est le lieu des pôles.

Cherchons les équations de l'axe du complexe.

Considérons pour cela un plan qui se déplace parallèlement à lui-même,

$$ux + vy + wz + \lambda = 0 ;$$

les coordonnées cartésiennes de son pôle se déduisent aisément des formules (2) ; on a

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{Cv - Bw + D\lambda}{Du + Ev + Fw}, \\ y &= -\frac{-Cu + Aw + E\lambda}{Du + Ev + Fw}, \\ z &= -\frac{Bu - Av + F\lambda}{Du + Ev + Fw}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

On voit que si λ varie, ce point décrit une droite dont les paramètres directeurs sont D, E, F.

On aura les équations de l'axe en remplaçant dans les équations (3) u, v, w respectivement par D, E, F ; on obtient

$$x = -\frac{CE - BF + D\lambda}{D^2 + E^2 + F^2},$$

$$y = -\frac{-CD + AF + E\lambda}{D^2 + E^2 + F^2},$$

$$z = -\frac{BD - AE + F\lambda}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Supposons qu'on prenne cette droite pour axe Oz ; on devra avoir

$$CE - BF = 0, \qquad CD - AF = 0, \qquad D = 0, \qquad E = 0;$$

et comme F doit être différent de zéro, on aura

$$A = 0, \qquad B = 0;$$

par suite l'équation du complexe aura la forme simple

$$C\gamma + Fn = 0$$

ou

$$\frac{n}{\gamma} = k,$$

k désignant une constante.

A l'aide de cette équation on peut se rendre compte de la position des droites du complexe par rapport à l'axe.

Pour que la droite joignant deux points (x, y, z) et (x', y', z') appartienne au complexe, on doit avoir

$$xy' - yx' = k(z - z').$$

On voit immédiatement que si une droite appartient au complexe, elle ne cessera pas d'y appartenir si on augmente de la même quantité les z de tous ses points, c'est-à-dire si on la déplace parallèlement à elle-même dans un plan parallèle à Oz.

De même, si une droite appartient au complexe, il en sera de même de toutes les droites obtenues en faisant tourner cette droite autour de Oz.

Hosted by Google

Il suffira alors d'étudier la position des droites du complexe qui rencontrent une droite quelconque perpendiculaire à l'axe, droite que l'on peut prendre pour axe des x. Le plan polaire d'un point $(x', 0, 0)$ de cet axe a pour équation

$$yx' + kz = 0\,;$$

ce plan passe par l'axe des x et fait avec le plan $x\mathrm{O}y$ un angle φ déterminé par la relation

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x'}{k}\,;$$

on en déduit immédiatement la variation de φ.

Hosted by Google

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES

32. On sait que la condition pour qu'un plan

$$ux + vy + wz + rt = 0$$

soit tangent à une surface

$$f(x, y, z, t) = 0$$

est en général exprimée par une relation homogène entre les coordonnées u, v, w, r du plan ; cette relation s'obtient en éliminant x, y, z, t entre les équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{r},$$

$$ux + vy + wz + rt = 0.$$

L'équation qui en résulte,

$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$

est ce qu'on appelle l'équation tangentielle de la surface.

Nous verrons plus loin qu'il existe des surfaces qui sont telles que la condition pour qu'un plan soit tangent à l'une d'elles s'exprime par *deux* relations entre les coordonnées du plan ; les surfaces coniques et cylindriques, par exemple, sont des cas particuliers de ces surfaces. Il est clair en effet que pour qu'un plan soit tangent à un cône, il faut d'abord qu'il passe par le sommet du cône et en outre qu'il rencontre le cône suivant deux génératrices confondues.

Nous appellerons *surfaces développables* les surfaces qui

Hosted by Google

jouissent de cette propriété, c'est-à-dire qui ont deux équations tangentielles.

33. On dit qu'un plan est tangent à une ligne, quand il passe par une tangente à cette ligne.

Il est aisé de voir que la condition pour qu'un plan soit tangent à une ligne s'exprime par une relation entre les coordonnées du plan.

Si l'on suppose en effet que les coordonnées x, y, z d'un point de la ligne soient fonctions d'une variable ω, on devra avoir

$$ux + vy + wz + r = 0,$$
$$u\frac{dx}{d\omega} + v\frac{dy}{d\omega} + w\frac{dz}{d\omega} = 0,$$

et en éliminant ω entre ces deux équations, on aura la relation cherchée.

Si la ligne est définie par l'intersection de deux surfaces,

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0,$$
$$\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0,$$

on écrira que le plan (u, v, w, r) passe par l'intersection des plans tangents aux deux surfaces au point (x, y, z) ; on aura ainsi deux relations obtenues en annulant deux déterminants à neuf éléments tirés du tableau

$$\left\| \begin{matrix} f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \\ u & v & w & r \end{matrix} \right\|;$$

on y joindra les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

et, en éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on aura la condition cherchée. On dira que cette condition est l'équation tangentielle de la ligne.

34. Dans le cas particulier où la ligne est plane et est située dans le plan des xy par exemple, son équation tangentielle, c'est-à-dire la condition pour qu'un plan

$$ux + vy + wz + r = 0$$

soit tangent à cette ligne, est la même que la condition pour que la droite

$$ux + vy + r = 0$$

du plan des xy soit tangente à la ligne.

Ainsi l'équation tangentielle de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad z = 0$$

est

$$a^2u^2 + b^2v^2 - r^2 = 0.$$

On a un résultat analogue si la courbe est située dans un autre plan de coordonnées ; par exemple, l'équation tangentielle de la parabole

$$z^2 - 2px = 0, \qquad y = 0$$

est

$$pw^2 - 2ur = 0\ ;$$

c'est la condition pour que la droite

$$ux + wz + r = 0$$

située dans le plan des zx soit tangente à la parabole donnée dans ce même plan. [Voir Première Partie (*Géom. plane*), n° 40.]

35. *Réciproquement,* étant donnée une équation homogène par rapport à u, v, w, r, nous allons chercher à quelles conditions géométriques sont assujettis les plans dont les coordonnées vérifient cette équation.

Nous examinerons d'abord quelques cas particuliers. Supposons en premier lieu que l'équation ne renferme que deux variables, u et r, par exemple,

$$f(u, r) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est décomposable en un produit de facteurs linéaires de la forme $ua + rb$; en égalant un de ces facteurs à zéro, on obtient l'équation d'un

Hosted by Google

point situé sur l'axe des x, d'abscisse $\frac{a}{b}$ si $b \neq 0$, à l'infini sur cet axe si $b = 0$.

Il en résulte que l'équation proposée représente un ensemble de points situés sur Ox, réels ou imaginaires, à distance finie ou infinie.

De même, toute équation de la forme

$$f(v, r) = 0$$

représente un ensemble de points situés sur Oy, ..., etc.

Si l'équation ne contient pas la variable r et renferme seulement u et v, elle représentera un certain nombre de points à l'infini dans le plan des xy.

On peut dire d'une manière générale que si P et Q désignent des fonctions linéaires, toute équation de la forme

$$f(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0,$$

homogène par rapport à P et Q, représente un ensemble de points situés sur la droite joignant les deux points

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0,$$

car le premier membre de l'équation précédente est décomposable en un produit de facteurs de la forme $a\mathrm{P} + b\mathrm{Q}$.

36. Examinons maintenant le cas où l'équation renferme seulement trois variables, u, v, r, par exemple.

Pour que les coordonnées d'un plan vérifient l'équation

$$f(u, v, r) = 0,$$

il faut et il suffit que la trace de ce plan sur le plan des xy soit tangente à une certaine courbe, qui aurait pour équation tangentielle dans ce plan l'équation donnée, et dont l'équation ponctuelle s'obtiendrait en éliminant u, v, r entre les équations

$$\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_r}{t},$$

$$ux + vy + rt = 0.$$

Il en résulte que l'équation donnée est l'équation tangentielle d'une courbe située dans le plan des xy.

Hosted by Google

On verrait de la même manière que les équations

$$\varphi(u, w, r) = 0, \qquad \psi(v, w, r) = 0$$

sont les équations tangentielles de courbes situées dans les plans des zx et des yz.

Enfin, considérons une équation ne renfermant que les variables u, v, w,

$$f(u, v, w) = 0. \tag{1}$$

Si les coordonnées d'un plan vérifient cette équation, il en sera de même pour tout plan parallèle ; on en conclut que pour étudier géométriquement l'ensemble de ces plans, on peut considérer seulement ceux qui passent par un point fixe, l'origine des coordonnées, par exemple.

Nous allons démontrer que ces plans sont tangents à un cône, et pour cela, nous chercherons l'enveloppe de leurs traces sur un plan parallèle au plan des xy,

$$z - h = 0.$$

Considérons une droite de ce plan,

$$ux + vy + r = 0, \qquad z - h = 0.$$

Le plan passant par cette droite et par l'origine a pour équation

$$ux + vy + r + \frac{r}{h}(z - h) = 0;$$

pour que ses coordonnées vérifient l'équation (1), on doit avoir

$$f\left(u, v, \frac{r}{h}\right) = 0. \tag{2}$$

On voit que les traces de tous les plans considérés sur le plan $z - h = 0$ enveloppent une courbe de ce plan ayant pour équation tangentielle l'équation (2).

Tous ces plans sont donc tangents à un cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice cette courbe.

On en conclut que l'ensemble des plans définis par la relation (1) se compose de tous les plans tangents à ce cône et de tous les plans parallèles à ces plans tangents.

On peut donc considérer tous ces plans comme passant par

Hosted by Google

les tangentes de la courbe, intersection du cône et du plan de l'infini ; ces plans seront tangents à une courbe située dans le plan de l'infini, et l'équation (1) sera l'équation tangentielle de cette courbe.

37. Plus généralement, si l'on désigne par P, Q, R trois fonctions linéaires et homogènes de u, v, w, r et telles que les points représentés par les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

ne soient pas en ligne droite, toute équation de la forme

$$f(P, Q, R) = 0, \tag{3}$$

homogène par rapport à P, Q, R, représente une courbe située dans le plan des trois points.

En effet, une droite quelconque Δ du plan PQR rencontre la droite PR en un point A et la droite QR en un point B, ces deux points ayant respectivement pour équations

$$A = P - \lambda R = 0, \qquad B = Q - \mu R = 0\,;$$

pour qu'il existe des plans appartenant à l'ensemble défini par l'équation (3), et passant par les points A et B, il faut que les trois équations

$$f(P, Q, R) = 0,$$
$$P - \lambda R = 0,$$
$$Q - \mu R = 0$$

aient un système de solutions communes, ce qui donne la condition

$$f(\lambda, \mu, 1) = 0,$$

en écartant la solution évidente fournie par le plan des trois points.

On voit ainsi que les traces sur le plan PQR des plans de l'ensemble (3) doivent satisfaire à une condition ; ces droites enveloppent donc en général une certaine courbe située dans le plan PQR, et tous les plans de l'ensemble doivent passer par les tangentes de cette courbe.

Il en résulte que l'équation (3) est la condition pour qu'un

Hosted by Google

plan soit tangent à une courbe du plan PQR, c'est donc l'équation tangentielle de cette courbe.

38. Il nous reste maintenant à examiner le cas général où l'équation donnée renferme les quatre variables u, v, w, r. Nous commencerons pour cela par rappeler la théorie des enveloppes des surfaces.

Enveloppes des surfaces. — Considérons un ensemble de surfaces définies par l'équation

$$f(x, y, z, \lambda) = 0, \tag{1}$$

où λ désigne une variable arbitraire.

Soit S une surface particulière de l'ensemble, relative à la valeur λ_0 du paramètre et ayant pour équation

$$f(x, y, z, \lambda_0) = 0. \tag{S}$$

Donnons à λ_0 un accroissement infiniment petit h, et considérons la surface S',

$$f(x, y, z, \lambda_0 + h) = 0. \tag{S'}$$

Les surfaces S et S' se coupent suivant une certaine courbe C'; si h tend vers zéro, la courbe C' a en général une position limite C sur la surface S qu'on appelle la *caractéristique* de cette surface.

Le lieu engendré par cette caractéristique quand λ_0 varie est ce qu'on appelle l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (1).

Pour obtenir l'équation de l'enveloppe, remarquons que la courbe C' peut être définie par les équations

$$f(x, y, z, \lambda_0) = 0,$$
$$\frac{f(x, y, z, \lambda_0 + h) - f(x, y, z, \lambda_0)}{h} = 0;$$

quand h tend vers zéro, le premier membre de la seconde équation a pour limite $f'_\lambda(x, y, z, \lambda_0)$; il en résulte que la courbe C a pour équations

$$f(x, y, z, \lambda_0) = 0,$$
$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda_0) = 0.$$

Hosted by Google

On aura donc l'équation de l'enveloppe en éliminant λ_0 entre ces deux équations, ou, ce qui revient au même, en éliminant λ entre les deux équations

$$f(x, y, z, \lambda) = 0,$$
$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Les surfaces représentées par l'équation (1) sont appelées surfaces enveloppées.

39. Théorème. — *L'enveloppe est tangente à chaque surface enveloppée en tous les points de la caractéristique.*

Soit
$$f(x, y, z, \lambda_0) = 0$$
l'équation d'une surface enveloppée, et désignons par x', y', z' les coordonnées d'un point M de la caractéristique ; on aura alors

$$\left.\begin{aligned} f(x', y', z', \lambda_0) = 0, \\ f'_\lambda(x', y', z', \lambda_0) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et le plan tangent à la surface enveloppée au point x', y', z' a pour équation

$$\begin{aligned}(x - x')f'_x(x', y', z', \lambda_0) + (y - y')f'_y(x', y', z', \lambda_0) \\ + (z - z')f'_z(x', y', z', \lambda_0) = 0.\end{aligned}$$

Cherchons maintenant le plan tangent à l'enveloppe en ce même point.

Pour cela, on peut dire que l'enveloppe a pour équation

$$f(x, y, z, \lambda) = 0,$$

où λ représente une fonction de x, y, z définie par la relation

$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0. \qquad (3)$$

Le plan tangent en un point quelconque (x, y, z) de cette surface a pour équation

$$\begin{aligned}(\mathrm{X} - x)\left[f'_x(x, y, z, \lambda) + f'_\lambda(x, y, z, \lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right] \\ + (\mathrm{Y} - y)\left[f'_y(x, y, z, \lambda) + f'_\lambda(x, y, z, \lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right] \\ + (\mathrm{Z} - z)\left[f'_z(x, y, z, \lambda) + f'_\lambda(x, y, z, \lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right] = 0,\end{aligned}$$

Hosted by Google

qui peut s'écrire, en tenant compte de la relation (3),

$$(X-x)f'_x(x, y, z, \lambda) + (Y-y)f'_y(x, y, z, \lambda) + (Z-z)f'_z(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Remplaçons dans cette équation x, y, z par les coordonnées x', y', z' du point M de la caractéristique ; λ prend une valeur déterminée, solution commune des deux équations

$$f(x', y', z', \lambda) = 0,$$
$$f'_\lambda(x', y', z', \lambda) = 0;$$

cette solution n'est autre que λ_0, d'après les équations (2).

On voit ainsi que le plan tangent à l'enveloppe au point M coïncide avec le plan tangent à la surface enveloppée.

40. Supposons que les surfaces enveloppées aient une équation,

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \tag{4}$$

renfermant deux paramètres variables λ et μ, liés par une relation

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0. \tag{5}$$

L'équation (4) renferme en réalité une seule variable indépendante, car on peut y considérer μ comme une fonction de λ, définie par la relation (5).

On aura l'enveloppe en éliminant λ et μ entre les équations (4), (5) et la suivante :

$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) + f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu)\frac{d\mu}{d\lambda} = 0,$$

$\dfrac{d\mu}{d\lambda}$ étant donné par

$$\varphi'_\lambda + \varphi'_\mu \frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

On déduit de ces deux dernières équations

$$\frac{f'_\lambda}{\varphi'_\lambda} = \frac{f'_\mu}{\varphi'_\mu}. \tag{6}$$

On aura donc l'équation de l'enveloppe en éliminant λ et μ entre (4), (5) et (6).

Hosted by Google

On verrait de la même manière que si l'équation des surfaces enveloppées renferme trois paramètres λ, μ, ν liés par deux relations

$$f(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$\psi(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

on aurait l'équation de l'enveloppe en éliminant λ, μ, ν entre ces trois équations et la suivante :

$$\begin{vmatrix} f'_\lambda & f'_\mu & f'_\nu \\ \varphi'_\lambda & \varphi'_\mu & \varphi'_\nu \\ \psi'_\lambda & \psi'_\mu & \psi'_\nu \end{vmatrix} = 0.$$

On généraliserait aisément.

41. Les surfaces dont nous venons de déterminer l'enveloppe ont une équation générale qui dépend d'*une seule variable indépendante* ; elles touchent leur enveloppe en tous les points d'une courbe.

Il existe une deuxième espèce d'enveloppes relatives aux surfaces dont l'équation générale renferme *deux variables indépendantes*.

Soit
$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \tag{7}$$
l'équation donnée, et supposons pour un instant que μ soit fonction de λ, comme au début du numéro précédent ; la caractéristique de la surface représentée par l'équation (7) sera définie par les équations

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,$$
$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) + f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu)\frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Quelle que soit la valeur de $\frac{d\mu}{d\lambda}$, cette courbe passe par les points communs aux trois surfaces

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \\ f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \\ f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hosted by Google

Ces points sont appelés les *points limites* de la surface (7). Le lieu de ces points quand λ et μ varient de toutes les manières possibles est ce qu'on appelle l'enveloppe des surfaces (7).

On aura l'équation de cette enveloppe en éliminant λ et μ entre les équations (8).

On démontrera comme plus haut (39) que *l'enveloppe touche chaque surface enveloppée aux points limites.*

On voit qu'il y a une différence essentielle entre l'enveloppe des surfaces à une seule variable indépendante et celle des surfaces à deux variables indépendantes.

Dans le premier cas, chaque surface enveloppée touche l'enveloppe suivant une courbe.

Dans le second, chaque surface enveloppée ne touche l'enveloppe qu'en un nombre limité de points.

42. Il peut arriver que les surfaces enveloppées aient une équation

$$f(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) = 0, \tag{9}$$

renfermant trois paramètres variables, λ, μ, ν, liés par une relation

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0. \tag{10}$$

L'équation (9) ne renferme que deux variables indépendantes, car on peut y considérer ν comme une fonction de λ et de μ, définie par la relation (10).

Les points limites seront déterminés par l'équation (9) et les équations obtenues en différentiant cette équation par rapport à λ et par rapport à μ.

On obtient

$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) + f'_\nu(x, y, z, \lambda, \mu, \nu)\frac{\partial\nu}{\partial\lambda} = 0,$$

$$f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) + f'_\nu(x, y, z, \lambda, \mu, \nu)\frac{\partial\nu}{\partial\mu} = 0;$$

$\dfrac{\partial\nu}{\partial\lambda}$ et $\dfrac{\partial\nu}{\partial\mu}$ sont donnés en différentiant la relation (10) successivement par rapport à λ et par rapport à μ,

Hosted by Google

$$\varphi'_\lambda + \varphi'_\nu \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\varphi'_\mu + \varphi'_\nu \frac{\partial \nu}{\partial \mu} = 0.$$

En éliminant $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \nu}{\partial \mu}$ entre ces quatre équations, on a

$$\frac{f'_\lambda}{\varphi'_\lambda} = \frac{f'_\mu}{\varphi'_\mu} = \frac{f'_\nu}{\varphi'_\nu}. \tag{11}$$

On aura alors l'équation de l'enveloppe en éliminant λ, μ et ν entre les équations (9), (10) et (11).

43. Enveloppe d'un plan. — Il nous est facile maintenant de répondre complètement à la question posée au numéro 35, à savoir d'indiquer à quelles conditions géométriques sont assujettis les plans dont les coordonnées vérifient une équation homogène en u, v, w, r,

$$f(u, v, w, r) = 0. \tag{12}$$

L'équation d'un plan,

$$ux + vy + wz + rt = 0, \tag{13}$$

renferme trois paramètres variables ; si on assujettit ce plan à vérifier la relation (12), le plan ne dépend plus que de deux variables indépendantes ; il admettra une enveloppe de la seconde espèce ; il touchera cette enveloppe en général en un seul point.

Le plan dont nous allons chercher le point limite ne peut à la fois passer par l'origine et être parallèle aux trois axes ; nous pouvons donc supposer que l'un des coefficients u, v, w, r est différent de zéro, par exemple $r \neq 0$, ce coefficient peut alors être considéré comme constant, il ne reste plus que les trois paramètres u, v, w liés par la relation (12).

Nous sommes dans le cas étudié au numéro 42, le point limite sera déterminé par les équations

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w};$$

Hosted by Google

ces trois rapports sont égaux au rapport

$$\frac{ux + vy + wz}{uf'_u + vf'_v + wf'_w} \qquad \text{ou} \qquad \frac{-rt}{-rf'_r},$$

en vertu des relations (12) et (13); il en résulte que pour avoir l'enveloppe, il suffira d'éliminer u, v, w, r entre les équations

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w} = \frac{t}{f'_r},$$
$$ux + vy + wz + rt = 0.$$

On obtiendra ainsi une équation homogène en x, y, z, t, qui sera l'équation d'une surface, et tous les plans dont les coordonnées vérifient l'équation (12) seront tangents à cette surface.

44. En résumé, nous avons vu que la condition pour qu'un plan soit tangent à une surface

$$f(x, y, z, t) = 0$$

s'obtient en éliminant x, y, z, t entre les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{r}, \\ ux + vy + wz + rt = 0; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

on obtient une équation résultante homogène en u, v, w, r qu'on appelle l'équation tangentielle de la surface.

Réciproquement, étant donnée une équation

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

tous les plans dont les coordonnées vérifient cette équation sont en général tangents à une surface dont l'équation ponctuelle s'obtient en éliminant u, v, w, r entre les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_w}{z} = \frac{f'_r}{t}, \\ ux + vy + wz + rt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

L'équation donnée,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

sera dite l'équation tangentielle de la surface.

Hosted by Google

Nous appellerons donc *équation tangentielle* d'une surface la *condition* que doivent vérifier les coordonnées d'un plan pour que ce plan soit tangent à la surface, et pour éviter toute confusion, nous appellerons *équation ponctuelle* la *condition* que doivent vérifier les coordonnées d'un point pour que ce point soit sur la surface.

L'une de ces équations se déduit de l'autre par des calculs complètement analogues, comme on le voit en comparant les systèmes (14) et (15).

Une surface sera donc aussi bien définie par son équation tangentielle que par son équation ponctuelle.

45. Considérons maintenant tous les plans dont les coordonnées vérifient deux équations homogènes par rapport à u, v, w, r,

$$\left.\begin{aligned} f(u, v, w, r) &= 0, \\ \varphi(u, v, w, r) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ces plans seront tangents à deux surfaces ayant pour équations tangentielles respectivement les équations (16).

Mais il est aisé de voir qu'en outre ces plans enveloppent une surface d'une nature particulière qui touche les deux surfaces représentées par les équations (16) en tous les points d'une courbe.

En effet, si un plan

$$ux + vy + wz + rt = 0 \tag{17}$$

vérifie les équations (16), ses coordonnées sont fonctions d'une seule variable indépendante ; nous sommes dans le premier cas de la théorie des enveloppes ; nous pourrons considérer r comme constant, u, v, w comme des paramètres variables liés par les relations (16).

En se reportant au numéro 40, on voit que ce plan enveloppe une surface dont l'équation ponctuelle s'obtiendra en éliminant u, v, w, r entre les équations (16), (17) et la suivante :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_u & f'_v & f'_w \\ \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \end{vmatrix} = 0.$$

L'enveloppe obtenue est une surface qui a *une seule* équation ponctuelle et *deux* équations tangentielles.

Nous dirons que ces surfaces sont développables et nous étudierons plus loin leurs principales propriétés.

On peut observer tout de suite que ces surfaces sont réglées et que le plan tangent est le même en tous les points d'une génératrice.

En effet le plan mobile qui enveloppe la surface coupe le plan infiniment voisin suivant une droite, caractéristique du plan, et le plan touche son enveloppe en tous les points de cette droite; on peut donc considérer la surface comme le lieu de ces caractéristiques.

46. Ainsi au point de vue tangentiel, les surfaces se subdivisent en deux grandes catégories :

1° Celles qui n'ont qu'*une seule* équation tangentielle. Les coordonnées d'un plan tangent quelconque dépendent de *deux* paramètres arbitraires, et chaque plan tangent touche la surface en un seul point ;

2° Celles qui ont *deux* équations tangentielles, ce sont les *surfaces développables*. Les coordonnées d'un plan tangent dépendent d'*un seul* paramètre arbitraire, et chacun de ces plans touche la surface en tous les points d'une droite.

Dans tout ce qui suivra, quand nous parlerons d'une surface, sans ajouter d'épithète, nous entendrons toujours une surface non développable, c'est-à-dire une surface ayant une seule équation tangentielle.

Nous commencerons par l'étude de ces surfaces, de leurs plans tangents, remettant au chapitre suivant l'étude des surfaces développables.

47. Condition pour qu'une équation tangentielle représente une courbe. — Nous avons vu au numéro 33 que la condition

Hosted by Google

pour qu'un plan soit tangent à une courbe s'exprimait par une relation entre les coordonnées du plan.

Réciproquement, étant donnée une équation

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

il est intéressant de chercher dans quel cas cette équation représente une courbe, c'est-à-dire dans quel cas les points limites des plans dont les coordonnées vérifient l'équation donnée décrivent une courbe.

Nous nous appuierons pour cela sur un théorème bien connu, dont nous allons rappeler la démonstration.

Théorème. — *Étant données deux fonctions* α *et* β *de deux variables* x *et* y,

$$\alpha = f(x, y), \qquad \beta = \varphi(x, y),$$

la condition nécessaire et suffisante pour que α *soit fonction de* β *est que le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial\beta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} & \dfrac{\partial\beta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul.

Ce déterminant est appelé le *déterminant fonctionnel* des deux fonctions α et β.

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons que α soit fonction de β, c'est-à-dire que l'on ait

$$\alpha = g(\beta);$$

en différentiant cette relation par rapport à x et par rapport à y, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = g'(\beta)\,\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = g'(\beta)\,\frac{\partial\beta}{\partial y};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0.$$

Hosted by Google

2° *La condition est suffisante.* — Supposons cette condition remplie, je dis que α est fonction de β.

Pour le démontrer, tirons y de la relation

$$\beta = \varphi(x, y) \tag{1}$$

et remplaçons dans la valeur de α,

$$\alpha = f(x, y);$$

α devient alors en général une fonction de deux quantités β et x; nous allons montrer que dans le cas où le déterminant fonctionnel est nul, α ne renferme que z, c'est-à-dire que la dérivée de α par rapport à x, après la substitution, est nulle.

Cette dérivée est en effet

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x};$$

d'autre part $\frac{\partial y}{\partial x}$ s'obtient en différentiant la relation (1) qui définit y comme fonction de x et de β; on a donc

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

La dérivée de α devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

et cette dérivée est nulle en même temps que le déterminant fonctionnel.

Ce théorème étant établi, considérons un plan

$$ux + vy + wz + r = 0$$

dont les coordonnées vérifient une relation; ces coordonnées sont alors fonctions de deux paramètres arbitraires.

Faisons $r = 1$; on peut supposer que w soit fonction des deux variables indépendantes u et v; le point limite du plan sera déterminé par les équations

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

Hosted by Google

$$x + z\frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$y + z\frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-\dfrac{\partial w}{\partial u}}{u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} - w},$$

$$y = \frac{-\dfrac{\partial w}{\partial v}}{u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} - w},$$

$$z = \frac{1}{u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v} - w}.$$

Pour que ce point décrive une courbe, il faut et il suffit que x et y soient tous deux fonctions de z, ce qui revient à dire que $\frac{\partial w}{\partial u}$ et $\frac{\partial w}{\partial v}$ soient fonctions de $u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w$.

Or le déterminant fonctionnel des deux fonctions $\frac{\partial w}{\partial u}$ et $u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w$ est

$$\begin{vmatrix} u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} & u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + v\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}$$

ou

$$v\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

De même le déterminant fonctionnel de $\frac{\partial w}{\partial v}$ et de $u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w$ est

$$u\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right);$$

on devra donc avoir

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0. \tag{2}$$

Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la fonction w pour que le point limite du plan décrive une courbe.

Or la fonction w est définie par la relation donnée

$$f(u, v, w, 1) = 0.$$

On en déduit, en différentiant par rapport à u et v,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Différentions de nouveau la première de ces relations par rapport à u et v, et la seconde par rapport à v ; on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

En remplaçant dans ces équations $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ par leurs valeurs tirées de (3), on obtient $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ et $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$, et en portant ces expressions dans la condition (2) on obtient une relation qui peut se mettre aisément sous la forme

Hosted by Google

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Rendons homogène la fonction $f(u, v, w, 1)$ en replaçant la variable r ; on aura les relations

$$u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} + w \frac{\partial f}{\partial w} + r \frac{\partial f}{\partial r} = mf(u, v, w, r),$$
$$u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + v \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + w \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} + r \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial r} = (m-1) \frac{\partial f}{\partial u},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.},$$

m désignant le degré de la fonction $f(u, v, w, r)$.

Multiplions les éléments de la dernière colonne par $m-1$, et ajoutons-y les éléments des trois premières multipliés respectivement par $-u$, $-v$ et $-w$; les éléments de la quatrième colonne deviennent alors, après suppression du facteur r, $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial r}$, en remarquant que $f(u, v, w, r)$ est nul.

Multiplions enfin les éléments de la dernière ligne par $m-1$, et ajoutons-y les éléments des trois premières multipliés respectivement par $-u$, $-v$ et $-w$; la condition devient

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Hosted by Google

Le premier membre de cette relation est ce qu'on appelle le Hessien de la fonction $f(u, v, w, r)$; et nous sommes conduits au résultat fondamental qui suit :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe est que le Hessien du premier membre s'annule pour tous les systèmes de valeurs des variables qui vérifient l'équation considérée.

Cela revient à dire que le Hessien qui est de degré $4(m-2)$ est divisible par la fonction, supposée de degré m.

48. Cas particulier. — Supposons que la courbe soit plane ; alors le premier membre de son équation tangentielle (37) est une fonction homogène de trois fonctions linéaires P, Q, R.

Or il est aisé de voir que le Hessien d'une pareille fonction est identiquement nul. On sait en effet que le Hessien est un covariant, c'est-à-dire que si l'on effectue une substitution linéaire quelconque, le Hessien de la nouvelle fonction est égal au Hessien primitif multiplié par une puissance du module de la substitution.

Or si la fonction donnée est homogène par rapport à trois fonctions linéaires, on pourra trouver une substitution telle que la fonction ne renferme plus que trois variables, u, v, w par exemple, et dans ces conditions on voit immédiatement que le Hessien est identiquement nul.

Par conséquent, si une équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe *plane,* le Hessien du premier membre est *identiquement* nul.

On démontre que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que si le Hessien de la fonction $f(u, v, w, r)$ est identiquement nul, l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe plane (*).

(*) Voir dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XIII (1854), p. 398, une démonstration de M. Faure, et p. 402 une démonstration de M. Brioschi.

49. Parmi tous les plans tangents à une courbe, il y en a une infinité qui passent par une même tangente à la courbe, et tous ces plans ont le même point limite, c'est le point de contact de la tangente.

Ce résultat, presque évident, peut s'établir de la manière suivante.

Le point limite d'un plan est déterminé par les équations

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

$$x + z\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$y + z\,\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Si l'on suppose remplie la condition

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0,$$

on a

$$\frac{\partial w}{\partial u} = f\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

$$u\,\frac{\partial w}{\partial u} + v\,\frac{\partial w}{\partial v} - w = \varphi\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

ou, en posant, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = p, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = q,$$

$$p = f(q),$$

$$up + vq - w = \varphi(q). \tag{1}$$

Les coordonnées du point limite peuvent s'écrire

$$x = -\frac{f(q)}{\varphi(q)}, \qquad y = -\frac{q}{\varphi(q)}, \qquad z = \frac{1}{\varphi(q)},$$

ces coordonnées étant fonctions d'un seul paramètre, ce point décrit une courbe.

Considérons un point de cette courbe défini par la valeur q_0 du paramètre q ; nous allons voir qu'il existe une infinité de plans admettant ce point pour point limite, et que tous ces plans passent par la tangente à la courbe au point considéré.

En effet, u et v sont des variables entièrement indépendantes ; supposons-les pour un instant liées par une relation

$$F(u, v) = 0 ;$$

alors u, v, w, p, q sont fonctions d'un seul paramètre.

Différentions la relation (1) ; on a

$$udp + vdq + pdu + qdv - dw = \varphi'(q)dq,$$

ou, en remarquant que $dw = pdu + qdv$,

$$udp + vdq = \varphi'(q)dq,$$

$$uf'(q) + v = \varphi'(q).$$

Si l'on suppose que u et v soient assujetties à la condition

$$q = q_0,$$

on voit que u, v, w vérifieront les deux relations

$$uf(q_0) + vq_0 - w = \varphi(q_0),$$

$$uf'(q_0) + v = \varphi'(q_0) ;$$

ces équations montrent que le plan

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

contient la tangente à la courbe au point q_0.

50. Classe d'une surface (ou d'une courbe). — Supposons que l'équation tangentielle d'une surface (ou d'une courbe) soit algébrique ; on dit que la surface (ou la courbe) est algébrique.

Nous allons montrer que l'équation tangentielle a toujours le même degré, quels que soient les axes de coordonnées auxquels on rapporte la surface (ou la courbe).

Nous établirons pour cela les formules très importantes de transformation de coordonnées qui nous seront très utiles dans la suite.

Soit

$$ux + vy + wz + r = 0$$

l'équation d'un plan P rapporté à trois axes quelconques Ox, Oy, Oz.

Hosted by Google

Considérons un deuxième système d'axes, $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ définis par les coordonnées x_0, y_0, z_0 de l'origine O' et par les coordonnées des points directeurs des directions des nouveaux axes ; le point directeur de $O'x'$ par exemple étant, par définition, un point situé à l'unité de distance de l'origine O sur la parallèle menée par le point O à la direction $O'x'$.

Nous désignerons par (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les coordonnées des points directeurs de $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$.

L'équation du plan P dans ce nouveau système sera de la forme

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = 0 ;$$

nous allons calculer u, v, w, r en fonction de u', v', w', r'.

Entre les coordonnées x, y, z et x', y', z' d'un même point, on a les formules connues

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y &= y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z &= z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

de telle sorte que l'équation du plan P par rapport au deuxième système est

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z') + v(y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z') \\ + w(z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z') + r = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (u\alpha + v\beta + w\gamma)x' + (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')y' + (u\alpha'' + v\beta'' + w\gamma'')z' \\ + ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0. \end{aligned}$$

Mais comme cette équation s'écrit aussi

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = 0,$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} u\alpha + v\beta + w\gamma &= \lambda u', \\ u\alpha' + v\beta' + w\gamma' &= \lambda v', \\ u\alpha'' + v\beta'' + w\gamma'' &= \lambda w', \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + r &= \lambda r', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

λ étant un nombre arbitraire différent de zéro.

Résolvons par rapport à u, v, w, r, en désignant par

A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″ les coefficients de α, α', α'', β, β' β'', γ, γ', γ'' dans le développement du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix};$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} \mu u &= \mathrm{A}u' + \mathrm{A}'v' + \mathrm{A}''w', \\ \mu v &= \mathrm{B}u' + \mathrm{B}'v' + \mathrm{B}''w', \\ \mu w &= \mathrm{C}u' + \mathrm{C}'v' + \mathrm{C}''w', \\ \mu r &= \Delta r' - x_0(\mathrm{A}u' + \mathrm{A}'v' + \mathrm{A}''w') - y_0(\mathrm{B}u' + \mathrm{B}'v' + \mathrm{B}''w') \\ &\qquad - z_0(\mathrm{C}u' + \mathrm{C}'v' + \mathrm{C}''w'), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

en posant

$$\mu = \frac{\Delta}{\lambda}.$$

En conséquence, étant donnée l'équation tangentielle d'une surface (ou d'une courbe) par rapport aux axes Ox, Oy, Oz,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

on aura l'équation de cette surface (ou de cette courbe) par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ en remplaçant u, v, w, r par leurs valeurs (2) en fonction de u', v', w', r'.

Comme u, v, w, r sont des fonctions linéaires de u', v', w', r', le premier membre de l'équation donnée conservera le même degré.

C'est ce nombre qu'on appelle la *classe* de la surface (ou de la courbe).

Dans le cas particulier où les nouveaux axes sont parallèles aux premiers et ont le même sens, les formules deviennent

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda u', \\ v &= \lambda v', \\ w &= \lambda w', \\ r &= \lambda(-u'x_0 - v'y_0 - w'z_0 + r'). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

51. *La classe d'une surface (ou d'une courbe) est égale au nom-*

Hosted by Google

bre de plans tangents qu'on peut mener à la surface (ou à la courbe) par une droite quelconque de l'espace.

Soit $$f(u, v, w, r) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface (ou de la courbe).

Prenons deux points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sur la droite donnée; les plans tangents passant par cette droite seront déterminés par les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0,$$
$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0;$$

le nombre des solutions est égal au degré de la fonction $f(u, v, w, r)$.

Le nombre de plans tangents qu'on peut mener à une courbe plane par une droite non située dans son plan est précisément égal au nombre de tangentes qu'on peut mener à cette courbe par le point où la droite perce le plan de la courbe.

La définition que nous venons de donner de la classe d'une courbe plane est donc identique à la définition donnée en géométrie plane. [Voir Première Partie (*Géom. plane*), n° 35.]

52. Cas particuliers. — Comme application de ces théories générales, considérons le cas où l'équation donnée est du deuxième degré,

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Le Hessien du premier membre est indépendant des variables; c'est le discriminant de la forme quadratique,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix}.$$

Hosted by Google

Si $\Delta = 0$, l'équation représente une courbe de deuxième classe, c'est-à-dire une conique.

On sait d'ailleurs que dans ce cas le premier membre de l'équation est décomposable en une somme de trois carrés,

$$f(u,\ v,\ w,\ r) \equiv \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2\ ;$$

l'équation représente donc une courbe plane, et les coordonnées de son plan sont déterminées par les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

Nous discuterons plus tard la nature de la conique obtenue.

Supposons $\Delta \neq 0$; l'équation représente une surface dont l'équation ponctuelle s'obtiendra en éliminant $u,\ v,\ w,\ r$ entre les équations

$$\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_w}{z} = \frac{f'_r}{t},$$

$$ux + vy + wz + rt = 0$$

ou

$$\left.\begin{aligned} au + b''v + b'w + cr - \lambda x &= 0, \\ b''u + a'v + bw + c'r - \lambda y &= 0, \\ b'u + bv + a''w + c''r - \lambda z &= 0, \\ cu + c'v + c''w + dr - \lambda t &= 0, \\ ux + vy + wz + rt \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & x \\ b'' & a' & b & c' & y \\ b' & b & a'' & c'' & z \\ c & c' & c'' & d & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du deuxième degré. Il en résulte que les surfaces de deuxième classe sont du deuxième degré.

En développant le déterminant qui figure dans le premier membre, on obtient un résultat fort remarquable, qu'on peut faire apparaître de la façon suivante.

Hosted by Google

Résolvons les quatre premières équations du système (1) par rapport à u, v, w, r, en appliquant la règle de Cramer et en désignant par A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″, D les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement du discriminant Δ.

On obtient

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \lambda(Ax + B''y + B'z + Ct),\\
\Delta v &= \lambda(B''x + A'y + Bz + C't),\\
\Delta w &= \lambda(B'x + By + A''z + C''t),\\
\Delta r &= \lambda(Cx + C'y + C''z + Dt)\,;
\end{aligned}$$

transportons ces valeurs de u, v, w, r dans la dernière équation du système (1) ; on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy\\
+ 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0, \quad (2)
\end{aligned}$$

c'est l'équation ponctuelle de la surface.

On vérifiera aisément que

$$\varphi(x, y, z, t) \equiv - \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & x \\ b'' & a' & b & c' & y \\ b' & b & a'' & c'' & z \\ c & c' & c'' & d & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par Δ' le discriminant de la fonction $\varphi(x, y, z, t)$,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix},$$

on sait que

$$\Delta' = \Delta^3\,;$$

on en conclut que $\Delta' \neq 0$; par suite l'équation (2) représente une surface du deuxième degré qui ne peut être ni un cône, ni un cylindre. D'ailleurs le cône et le cylindre sont des

Hosted by Google

surfaces développables qui ne peuvent être représentées par une seule équation tangentielle.

En résumé, toute équation du deuxième degré

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots = 0$$

représente une quadrique (ellipsoïde, hyperboloïde, paraboloïde) si $\Delta \neq 0$, et une conique si $\Delta = 0$.

53. Réciproquement, si l'on donne l'équation ponctuelle d'une quadrique, qui ne soit pas un cône

$$\varphi(x, y, z, t) = Ax^2 + A'y^2 + \cdots = 0,$$

on obtiendra l'équation tangentielle par un calcul identique ; on aura

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire, développée, en changeant le signe du premier membre,

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv + 2\gamma ur + 2\gamma' vr + 2\gamma'' wr + \delta r^2 = 0,$$

α, α', α'', ... désignant les coefficients de A, A', A'', ... dans le développement du discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Il résulte de là que α, α', α'', ... sont proportionnels à a, a', a'', ... ; nous le démontrerons plus loin directement dès le début de l'étude des quadriques (voir numéro **116**).

En résumé, pour déduire les équations tangentielle et ponctuelle d'une quadrique l'une de l'autre, il suffit de remplacer

Hosted by Google

dans l'une des équations les coefficients par les mineurs correspondants du discriminant et les coordonnées de plans par des coordonnées de points, ou inversement.

Mais il est essentiel d'observer que le discriminant du premier membre de l'équation dont on part doit être différent de zéro.

On remarquera l'identité absolue de ces résultats avec ceux de la géométrie plane (Première Partie, numéros 37 et 38).

54. On établira sans peine les résultats contenus dans le tableau qui suit :

ÉQUATIONS PONCTUELLES	ÉQUATIONS TANGENTIELLES
$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + a'''t^2 = 0$	$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{a'} + \frac{w^2}{a''} + \frac{r^2}{a'''} = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0$
$ax^2 + a'y^2 + 2bzt = 0$	$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{a'} + \frac{2wr}{b} = 0$
$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$	$pv^2 + qw^2 - 2ur = 0$
$ax^m + by^m + cz^m + dt^m = 0$	$\frac{u^{\frac{m}{m-1}}}{a^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{v^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{w^{\frac{m}{m-1}}}{c^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{r^{\frac{m}{m-1}}}{d^{\frac{1}{m-1}}} = 0$

On peut évidemment permuter les colonnes des tableaux précédents (sans permuter les titres) en échangeant les variables x, y, z, t et u, v, w, r.

55. Point de contact d'un plan tangent. — Étant donnée une surface (ou une courbe) définie par son équation tangentielle,

$$f(U, V, W, R) = 0,$$

désignons par u, v, w, r les coordonnées d'un plan tangent P à cette surface ou à cette courbe, satisfaisant à la relation

$$f(u, v, w, r) = 0.$$

Le point de contact de ce plan sera déterminé par les relations

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w} = \frac{t}{f'_r},$$

établies au numéro 43 en nous appuyant sur la théorie des enveloppes.

Il en résulte que l'équation du point de contact sera

$$\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w + \mathrm{R}f'_r = 0;$$

cette équation a, comme on le voit, la plus grande analogie avec l'équation du plan tangent en un point d'une surface définie par son équation ponctuelle.

56. Le raisonnement n'est plus applicable si les coordonnées du plan tangent annulent les quatre dérivées f'_u, f'_v, f'_w, f'_r ; la détermination du point de contact présente alors plus de difficulté.

Nous nous laisserons guider dans ce qui va suivre par le problème corrélatif de la géométrie ponctuelle.

Soit un plan tangent $\mathrm{P}(u, v, w, r)$; prenons dans ce plan une droite quelconque D, définie par l'intersection du plan P et d'un autre plan $\mathrm{P}'(u', v', w', r')$, et considérons les plans tangents qu'on peut mener à la surface par la droite D.

Un plan quelconque passant par cette droite a pour coordonnées $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$, $w + \lambda w'$, $r + \lambda r'$; il sera tangent à la surface si l'on a

$$f(u + \lambda u',\ v + \lambda v',\ w + \lambda w',\ r + \lambda r') = 0,$$

ou, en développant par la formule de Taylor et en remarquant que le terme indépendant de λ, $f(u, v, w, r)$, est nul,

$$\lambda(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w + r'f'_r) \\ + \frac{\lambda^2}{2}(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w + r'f'_r)_2 + \cdots = 0, \quad (1)$$

en désignant selon l'usage par $(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w + r'f'_r)_k$

Hosted by Google

l'expression obtenue en formant la puissance k de

$$u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w + r'f'_r$$

et en y remplaçant le produit de k dérivées partielles du premier ordre par une dérivée partielle du k^e ordre.

Parmi les plans tangents issus de la droite D, il y en aura autant de confondus avec le plan P que l'équation (1) aura de racines nulles en λ.

Supposons d'abord que f'_u, f'_v, f'_w, f'_r ne soient pas nulles en même temps ; alors, quelles que soient les valeurs de u', v', w', r', l'équation n'admet qu'une seule racine nulle, et par toute droite du plan P, on ne peut mener à la surface qu'*un seul* plan tangent confondu avec le plan P.

Nous dirons que dans ce cas le plan P est un plan tangent *simple*.

Mais il existe certaines positions du plan P', c'est-à-dire de la droite D, pour lesquelles l'équation (1) a plus d'une racine nulle.

Si l'on a

$$u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w + r'f'_r = 0,$$

l'équation (1) a deux racines nulles.

Or cette condition exprime précisément que le plan P', c'est-à-dire la droite D, passe par le point de contact du plan tangent.

On peut donc dire que si les quatre dérivées partielles de la fonction $f(u, v, w, r)$ ne sont pas nulles en même temps pour les coordonnées d'un plan tangent P, par toute droite de ce plan on peut mener *un seul* plan tangent à la surface confondu avec le plan P ; il y a exception pour les droites qui passent par le point de contact : par ces droites on peut mener deux plans tangents au moins confondus avec le plan P.

Nous disons au moins, car il peut arriver que le coefficient de λ^2 soit nul pour toutes les valeurs de u', v', w', r' qui annulent le coefficient de λ.

57. Supposons maintenant que l'on ait

$$f'_u = f'_v = f'_w = f'_r = 0.$$

Hosted by Google

Dans ce cas, l'équation (1) admet deux racines nulles quelles que soient les valeurs de u', v', w', r' ; donc par toute droite du plan P, on peut mener *deux* plans tangents confondus avec le plan P.

On dira alors que ce plan est un plan tangent *double*.

Il existe encore certaines positions du plan P', c'est-à-dire de la droite D, pour lesquelles l'équation (1) a trois racines nulles.

Il faut qu'on ait pour cela

$$(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w + r'f'_r)_2 = 0\,;$$

cette condition exprime que le plan P' doit être tangent à une surface ayant pour équation tangentielle

$$(\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w + \mathrm{R}f'_r)_2 = 0$$

ou

$$\mathrm{U}^2 f''_{u^2} + \mathrm{V}^2 f''_{v^2} + \mathrm{W}^2 f''_{w^2} + \mathrm{R}^2 f''_{r^2} + 2\mathrm{UV}f''_{uv} + \cdots = 0. \quad (2)$$

A priori, cette équation ne peut représenter qu'une courbe située dans le plan P.

En effet, si elle représentait une surface, par une droite quelconque du plan P, on pourrait mener un plan tangent P' à cette surface ; et alors par toute droite du plan P passeraient trois plans tangents confondus avec le plan P, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

On peut d'ailleurs le voir directement, car on a, en désignant par m la classe de la surface,

$$\begin{aligned}
(m-1)f'_u &= uf''_{u^2} + vf''_{uv} + wf''_{uw} + rf''_{ur} = 0,\\
(m-1)f'_v &= uf''_{vu} + vf''_{v^2} + wf''_{vw} + rf''_{vr} = 0,\\
(m-1)f'_w &= uf''_{wu} + vf''_{wv} + wf''_{w^2} + rf''_{wr} = 0,\\
(m-1)f'_r &= uf''_{ru} + vf''_{rv} + wf''_{rw} + rf''_{r^2} = 0\,;
\end{aligned}$$

on en déduit que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
f''_{u^2} & f''_{uv} & f''_{uw} & f''_{ur}\\
f''_{vu} & f''_{v^2} & f''_{vw} & f''_{vr}\\
f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{w^2} & f''_{wr}\\
f''_{ru} & f''_{rv} & f''_{rw} & f''_{r^2}
\end{vmatrix}$$

Hosted by Google

est nul. Mais ce déterminant est le discriminant du premier membre de l'équation (2), donc cette équation représente une conique.

Cette conique est d'ailleurs située dans le plan P, puisque les coordonnées de ce plan annulent les quatre dérivées partielles du premier membre de l'équation (2).

On voit alors que pour que l'équation (1) ait trois racines nulles, il faut que la droite D soit tangente à la conique (2) du plan P.

En résumé, si les coordonnées d'un plan tangent P annulent les quatre dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, par toute droite du plan tangent on peut mener *deux* plans tangents confondus avec le plan P ; il y a exception pour toutes les droites tangentes à une certaine conique du plan P, par lesquelles on peut mener au moins trois plans tangents confondus avec le plan P.

58. Nous nous proposons d'établir que cette conique est située sur la surface et que le plan P touche la surface en tous les points de cette conique.

A cet effet, nous prendrons pour plan des xy le plan de la conique, et nous allons chercher quelle doit être la forme de l'équation de la surface pour que le plan des xy soit un plan tangent double.

Ordonnons l'équation par rapport à w ; on aura

$$f(u, v, w, r) \equiv w^m \varphi_0 + w^{m-1}\varphi_1(u, v, r) + w^{m-2}\varphi_2(u, v, r) + \cdots = 0,$$

les lettres φ désignant des fonctions homogènes par rapport à u, v, r et de degré indiqué par l'indice.

Considérons une droite située dans le plan des xy et ayant pour équation

$$u'x + v'y + r' = 0 ;$$

par cette droite menons un plan quelconque

$$\lambda(u'x + v'y + r') + z = 0$$

et écrivons qu'il est tangent à la surface ; on a

$$\varphi_0 + \lambda\varphi_1(u', v', r') + \lambda^2\varphi_2(u', v', r') + \cdots = 0.$$

Pour que cette équation ait deux racines nulles quels que soient u', v', w', r', il faut que φ_0 soit nul et que $\varphi_1(u', v', r')$ soit identiquement nul.

Cette condition étant remplie, le plan des xy est plan tangent double ; et pour que par la droite choisie dans ce plan, on puisse mener trois plans tangents confondus avec le plan des xy, il faut qu'on ait

$$\varphi_2(u', v', r') = 0,$$

c'est-à-dire que la droite soit tangente à la conique qui a pour équation

$$\varphi_2(u, v, r) = 0.$$

L'équation de la surface pourra s'écrire, en y faisant $w = 1$,

$$\varphi_2(u, v, r) + \varphi_3(u, v, r) + \cdots = 0.$$

Considérons un plan tangent infiniment voisin du plan des xy, u, v, r étant infiniment petits et w toujours égal à **1**.

Le point de contact de ce plan a pour équation

$$\begin{aligned}&\mathrm{U}(\varphi'_{2u} + \varphi'_{3u} + \ldots) + \mathrm{V}(\varphi'_{2v} + \varphi'_{3v} + \cdots)\\ &\quad + \mathrm{W}[(m-2)\varphi_2 + (m-3)\varphi_3 + \ldots] + \mathrm{R}(\varphi'_{2r} + \varphi'_{3r} + \ldots) = 0.\end{aligned}$$

Posons $u = \lambda r$, $v = \mu r$; les équations précédentes deviennent après avoir divisé la première par r^2 et la deuxième par r,

$$\varphi_2(\lambda, \mu, 1) + r\varphi_3(\lambda, \mu, 1) + \ldots = 0,$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{U}(\varphi'_{2\lambda} + r\varphi'_{3\lambda} + \ldots) + \mathrm{V}(\varphi'_{2\mu} + r\varphi'_{3\mu} + \ldots) + \mathrm{W}[(m-2)r\varphi_2 + \cdots\\ &\qquad + \mathrm{R}(\varphi'_{2\nu} + r\varphi'_{3\nu} + \ldots) = 0,\end{aligned}$$

ν désignant une variable d'homogénéité, supposée égale à 1.

On peut supposer que quand r tend vers zéro, λ et μ ont des limites a et b assujetties seulement à la condition

$$\varphi_2(a, b, 1) = 0. \quad (*)$$

(*) Cette hypothèse peut s'expliquer aisément de la manière suivante. Les quantités u, v, r sont simplement assujetties à la condition

$$\varphi_2(u, v, r) + \varphi_3(u, v, r) + \cdots = 0.$$

Considérons u, v, r comme les coordonnées cartésiennes d'un point M ; ce point décrit une surface ayant pour équation l'équation qui précède et admettant un point conique à l'origine. Si u, v, r tendent vers zéro, le

Dans ces conditions, le point de contact du plan tangent a pour limite un point qui a pour équation

$$U\varphi'_{2a} + V\varphi'_{2b} + R\varphi'_{2c} = 0.$$

Or ce point est précisément le point de contact de la conique et de la tangente

$$ax + by + 1 = 0.$$

Il résulte de là que cette conique appartient à la surface et que le plan des xy touche la surface en tous les points de la conique (*).

59. Il peut se faire que le discriminant de la fonction $\varphi_2(u, v, r)$ soit nul, c'est-à-dire que la conique se réduise à deux points ; dans ce cas le plan tangent double touchera la surface en ces deux points.

60. On généralise aisément tous ces résultats. On dit qu'un plan P est un plan tangent multiple d'ordre p à une surface, lorsque par toute droite du plan on peut mener à la surface p plans tangents confondus avec le plan P.

Si cette condition est remplie, le plan P touche la surface suivant une courbe de degré p ; et par toutes les tangentes à cette courbe, on peut mener au moins $p+1$ plans tangents confondus avec le plan P.

Pour qu'un plan tangent (u, v, w, r) à une surface ayant pour équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

soit multiple d'ordre p, il faut et il suffit que toutes les dérivées partielles d'ordre $p-1$ de la fonction $f(u, v, w, r)$ soient nulles pour les coordonnées du plan (cette condition

---

point M se rapproche de l'origine, et on peut supposer qu'il décrive une courbe tracée sur la surface, ayant pour tangente à l'origine une génératrice du cône des tangentes, ce qui revient à admettre que $\frac{u}{r}$ et $\frac{v}{r}$ ont des limites a et b vérifiant la condition $\varphi_2(a, b, 1) = 0$.

(*) Cette démonstration m'a été communiquée par M. Appell.

Hosted by Google

entraîne la nullité de toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur).

La courbe de contact a pour équation tangentielle

$$(Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w + Rf'_r)_p = 0.$$

61. Application. — Plans tangents multiples du tore. — Cherchons d'abord l'équation tangentielle du tore engendré par un cercle

$$(x - a)^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad y = 0,$$

tournant autour de l'axe des z.

Un plan (u, v, w, r) sera tangent à ce tore, si en faisant tourner ce plan autour de Oz, de manière à le rendre perpendiculaire au plan xOz, le plan est tangent au cercle.

Dans la rotation le point de rencontre du plan avec Oz ne change pas ; l'abscisse du point de rencontre avec Ox après la rotation est égale, au signe près, à la distance de l'origine à la trace du plan sur le plan des xy ; il en résulte que l'équation du plan est, après la rotation,

$$\frac{z}{-\frac{r}{w}} + \frac{x}{\frac{r}{\sqrt{u^2+v^2}}} = 1$$

ou

$$-wz + x\sqrt{u^2+v^2} - r = 0.$$

Ce plan sera tangent au cercle si l'on a

$$\frac{a\sqrt{u^2+v^2} - r}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm R ;$$

d'où l'on déduit

$$f(u, v, w, r) = [(a^2 - R^2)(u^2+v^2) - R^2w^2 + r^2]^2 - 4a^2r^2(u^2+v^2) =$$

telle est l'équation tangentielle du tore.

Pour obtenir les coordonnées des plans tangents multiples, j'égal à zéro les dérivées partielles du premier ordre de la fonctio $f(u, v, w, r)$.

On a, en posant $(a^2 - R^2)(u^2+v^2) - R^2w^2 + r^2 = P$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4}f'_u &= u[P(a^2 - R^2) - 2a^2r^2] = 0,\\
\frac{1}{4}f'_v &= v[P(a^2 - R^2) - 2a^2r^2] = 0,\\
\frac{1}{4}f'_w &= -R^2Pw = 0,\\
\frac{1}{4}f'_r &= r[P - 2a^2r(u^2+v^2)] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (\;$$

On déduit de là les solutions suivantes :

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad P = 0;$$

ce qui donne

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 1, \qquad r = \pm R;$$

on obtient les deux plans

$$z \pm R = 0.$$

Si l'on forme l'équation de la conique de contact

$$U^2 f''_{u^2} + V^2 f''_{v^2} + \cdots = 0$$

relative au plan $z - R = 0$, on obtient l'équation

$$a^2(u^2 + v^2) - (wR + r)^2 = 0,$$

qui représente un cercle de rayon a ayant son centre sur Oz, car si on transporte l'origine au point de l'axe des z qui a pour cote R, l'équation devient

$$a^2(u^2 + v^2) - r^2 = 0.$$

Pour le plan $z + R = 0$, on trouve

$$a^2(u^2 + v^2) - (-wR + r)^2 = 0,$$

qui représente également un cercle.

Les deux plans $z \pm R = 0$ sont des plans tangents doubles qui touchent la surface suivant des cercles.

Les équations (1) admettent encore la solution

$$P = 0, \qquad r = 0.$$

On en déduit

$$r = 0,$$

$$(a^2 - R^2)(u^2 + v^2) - R^2 w^2 = 0;$$

nous obtenons une infinité de plans passant par l'origine et tangents à un cône de révolution.

Deux de ces plans sont perpendiculaires au plan des zx, les coordonnées de l'un d'eux sont

$$u = R, \qquad v = 0, \qquad w = -\sqrt{a^2 - R^2}, \qquad r = 0.$$

L'équation de la conique de contact peut s'écrire

$$\left[u(a^2 - R^2) + wR\sqrt{a^2 - R^2}\right]^2 - a^2 r^2 = 0;$$

elle se réduit à deux points situés dans le plan des zx et symétriques par rapport à l'origine.

Ces deux points sont les points de contact d'une tangente commune intérieure aux deux cercles qui constituent l'intersection du tore par le plan des zx.

On sait d'ailleurs que le plan tangent double considéré coupe le tore suivant deux cercles ; les points de rencontre de ces deux cercles sont les points de contact.

Hosted by Google

EXERCICES ET NOTES

1. Pour obtenir l'équation tangentielle de l'enveloppe d'un plan, on peut, dans un grand nombre de cas, se donner les coordonnées u, v, w, r du plan et écrire les conditions auxquelles est assujetti ce plan. On obtient une relation entre ces coordonnées qui est l'équation cherchée ; quelquefois on peut avoir à éliminer certains paramètres avant d'obtenir l'équation de l'enveloppe.

2. *D'un point* M *d'une surface on abaisse des perpendiculaires sur les plans de coordonnées supposés rectangulaires ; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les pieds de ces perpendiculaires.*

Soit
$$ux + vy + wz + r = 0$$
l'équation du plan dont on cherche l'enveloppe ; ce plan coupe les plans de coordonnées suivant trois droites ; nous menons par ces trois droites des plans perpendiculaires aux plans de coordonnées correspondants, ces plans ont pour équations
$$vy + wz + r = 0,$$
$$ux + wz + r = 0,$$
$$ux + vy + r = 0,$$
et il suffit d'écrire que le point de rencontre de ces trois plans est sur la surface donnée.

Ce point a pour coordonnées $-\frac{r}{2u}$, $-\frac{r}{2v}$, $-\frac{r}{2w}$; en écrivant qu'il est sur la surface
$$f(x, y, z) = 0,$$
on a l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée,
$$f\left(-\frac{r}{2u}, \ -\frac{r}{2v}, \ -\frac{r}{2w}\right) = 0.$$

Si la surface donnée est un ellipsoïde
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
l'équation de l'enveloppe est
$$\frac{r^2}{4a^2u^2} + \frac{r^2}{4b^2v^2} + \frac{r^2}{4c^2w^2} - 1 = 0$$

Hosted by Google

ou

$$\frac{1}{4a^2}u^{-2}+\frac{1}{4b^2}v^{-2}+\frac{1}{4c^2}w^{-2}-r^{-2}=0.$$

Son équation ponctuelle est alors (54)

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{2c}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0.$$

3. *On joint un point* M *quelconque d'une surface à un point fixe* O ; *par le point* M *on mène un plan perpendiculaire à* MO ; *trouver l'enveloppe de ce plan.*

4. *On donne un plan* P *et un point* A ; *par le point* A *on mène un plan quelconque* Q ; *on demande l'enveloppe des plans bissecteurs des plans* P *et* Q.

Soit
$$ux+vy+wz+r=0 \tag{1}$$
l'équation d'un des plans dont on cherche l'enveloppe. Par l'intersection de ce plan et du plan P on mène un plan passant par le point A, et il suffit d'écrire que le plan ainsi obtenu est symétrique du plan P par rapport au plan représenté par l'équation (1).

5. Surface de l'onde. — La surface de l'onde étudiée en optique par Fresnel peut se définir géométriquement de la manière suivante :

Si, par le centre d'un ellipsoïde, on élève une perpendiculaire à chaque plan diamétral, et qu'on porte sur cette perpendiculaire, à partir du centre, des longueurs égales aux demi-axes de la section diamétrale considérée, le lieu des extrémités de ces longueurs est la surface de l'onde.

Soit
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$
l'équation de l'ellipsoïde ; on sait que les demi-axes de la section de cet ellipsoïde par le plan diamétral

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

sont racines de l'équation

$$\frac{\alpha^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{\beta^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{\gamma^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}}=0.$$

On en conclut que l'équation ponctuelle de la surface de l'onde est

Hosted by Google

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}}=0, \tag{S}$$

où l'on suppose $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$.

Pour obtenir l'équation tangentielle de cette surface, nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Si deux ellipsoïdes concentriques sont polaires réciproques par rapport à une sphère de même centre, les surfaces de l'onde correspondantes sont polaires réciproques par rapport à la même sphère (*).

La polaire réciproque de l'ellipsoïde E par rapport à la sphère

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

a pour équation

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-R^4=0,$$

et la surface de l'onde relative à cet ellipsoïde a pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{R^4}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{R^4}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{R^4}-\frac{1}{\rho^2}}=0. \tag{S'}$$

Cherchons l'équation tangentielle de la polaire réciproque de cette surface par rapport à la sphère.

Un plan

$$ux+vy+wz+r=0$$

sera tangent à cette polaire réciproque si le pôle de ce plan par rapport à la sphère est situé sur la surface (S').

Le pôle du plan a pour coordonnées $-\frac{R^2u}{r}$, $-\frac{R^2v}{r}$, $-\frac{R^2w}{r}$; on aura donc, en posant $h^2=u^2+v^2+w^2$,

$$\frac{u^2}{a^2-\frac{r^2}{h^2}}+\frac{v^2}{b^2-\frac{r^2}{h^2}}+\frac{w^2}{c^2-\frac{r^2}{h^2}}=0$$

ou

$$\frac{u^2}{a^2h^2-r^2}+\frac{v^2}{b^2h^2-r^2}+\frac{w^2}{c^2h^2-r^2}=0;$$

c'est l'équation tangentielle de la surface S.

En chassant les dénominateurs, l'équation ponctuelle s'écrit, après suppression du facteur $x^2+y^2+z^2$,

(*) Voir pour la démonstration de ce théorème, le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, où l'on trouvera une étude géométrique très simple de la surface de l'onde.

Hosted by Google

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-[a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2]+a^2b^2c^2=0,$$

et l'équation tangentielle, après suppression du facteur $u^2+v^2+w^2$, devient

$$f(u,\,v,\,w,\,r)=(b^2c^2u^2+c^2a^2v^2+a^2b^2w^2)(u^2+v^2+w^2)$$
$$-r^2[(b^2+c^2)u^2+(c^2+a^2)v^2+(a^2+b^2)w^2]+r^4=0.$$

On voit ainsi que la surface de l'onde est du quatrième degré et de la quatrième classe.

Nous nous proposons d'étudier les plans tangents multiples de cette surface.

Les coordonnées de ces plans doivent vérifier les équations

$$\frac{1}{2}f'_u=u[b^2c^2u^2+c^2a^2v^2+a^2b^2w^2+b^2c^2(u^2+v^2+w^2)-r^2(b^2+c^2)]=0,$$

$$\frac{1}{2}f'_v=v[b^2c^2u^2+c^2a^2v^2+a^2b^2w^2+c^2a^2(u^2+v^2+w^2)-r^2(c^2+a^2)]=0,$$

$$\frac{1}{2}f'_w=w[b^2c^2u^2+c^2a^2v^2+a^2b^2w^2+a^2b^2(u^2+v^2+w^2)-r^2(a^2+b^2)]=0,$$

$$\frac{1}{2}f'_r=-r[(b^2+c^2)u^2+(c^2+a^2)v^2+(a^2+b^2)w^2-2r^2]=0.$$

On voit tout de suite qu'on ne peut avoir $r=0$, car on en conclurait $u=v=w=0$.

De la dernière équation nous tirons

$$r^2=\frac{(b^2+c^2)u^2+(c^2+a^2)v^2+(a^2+b^2)w^2}{2}; \tag{1}$$

et en remplaçant dans les trois premières, divisant la première par b^2-c^2, la seconde par c^2-a^2 et la troisième par a^2-b^2, on a

$$u[(b^2-c^2)u^2-(c^2-a^2)v^2-(a^2-b^2)w^2]=0,$$
$$v[-(b^2-c^2)u^2+(c^2-a^2)v^2-(a^2-b^2)w^2]=0,$$
$$w[-(b^2-c^2)u^2-(c^2-a^2)v^2+(a^2-b^2)w^2]=0.$$

Les trois quantités entre crochets ne peuvent être nulles que pour $u=v=w=0$; on en conclut que l'une des inconnues u, v, w doit être nulle.

Supposons $u=0$; on en déduit

$$(c^2-a^2)v^2-(a^2-b^2)w^2=0,$$

qui ne nous donne pour v et w que des valeurs imaginaires.

Il en est de même si l'on suppose $w=0$; on a

$$(b^2-c^2)u^2-(c^2-a^2)v^2=0.$$

Hosted by Google

Il nous reste donc à supposer

$$v = 0;$$

on a

$$(b^2 - c^2)u^2 - (a^2 - b^2)w^2 = 0,$$

nous pouvons prendre

$$u^2 = a^2 - b^2,$$
$$w^2 = b^2 - c^2,$$

et on en conclut, à l'aide de la relation (1),

$$r^2 = b^2(a^2 - c^2).$$

Nous obtenons quatre plans tangents doubles réels, dont les équations sont

$$x\sqrt{a^2 - b^2} \pm z\sqrt{b^2 - c^2} \pm b\sqrt{a^2 - c^2} = 0;$$

ils sont perpendiculaires au plan des zx, et on peut reconnaitre que leurs traces sur ce plan sont les tangentes communes au cercle

$$x^2 + z^2 - b^2 = 0$$

et à l'ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Considérons l'un d'eux,

$$x\sqrt{a^2 - b^2} + z\sqrt{b^2 - c^2} + b\sqrt{a^2 - c^2} = 0,$$

et proposons-nous de chercher la conique suivant laquelle ce plan touche la surface.

L'équation de cette conique sera

$$\mathrm{U}^2 f''_{u^2} + \mathrm{V}^2 f''_{v^2} + \mathrm{W}^2 f''_{w^2} + \mathrm{R}^2 f''_{r^2} + 2\mathrm{UV} f''_{uv} + 2\mathrm{UW} f''_{uw}$$
$$+ 2\mathrm{UR} f''_{ur} + 2\mathrm{VW} f''_{vw} + 2\mathrm{VR} f''_{vr} + 2\mathrm{WR} f''_{wr} = 0,$$

où l'on fait

$$u = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad v = 0, \qquad w = \sqrt{b^2 - c^2}, \qquad r = b\sqrt{a^2 - c^2}.$$

On obtient ainsi l'équation

$$4b^2c^2(a^2 - b^2)\mathrm{U}^2 - (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)\mathrm{V}^2 + 4a^2b^2(b^2 - c^2)\mathrm{W}^2$$
$$+ 4b^2(a^2 - c^2)\mathrm{R}^2 + 4b^2(a^2 + c^2)\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}\,\mathrm{UW}$$
$$-4b(b^2+c^2)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{UR} - 4b(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}\,\mathrm{WR} = 0,$$

qu'on peut encore écrire

$$[2b\sqrt{a^2 - c^2}\,\mathrm{R} - (b^2 + c^2)\sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{U} - (a^2 + b^2)\sqrt{b^2 - c^2}\,\mathrm{W}]^2$$
$$- (b^2 - c^2)(a^2 - b^2)[\sqrt{b^2 - c^2}\,\mathrm{U} - \sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{W}]^2$$
$$- (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\mathrm{V}^2 = 0.$$

Sous cette forme on reconnaîtra aisément l'équation d'un cercle en se reportant au chapitre V.

Hosted by Google

6. Surfaces podaires. — Étant donnée une surface S et un point O, on appelle surface podaire de cette surface par rapport au point O le lieu des projections du point O sur les plans tangents à la surface S.

Étant donnée l'équation tangentielle de la surface S, on aura aisément l'équation ponctuelle de la surface podaire.

Démontrer que la normale en un point de la surface podaire passe par le milieu de la droite qui joint le point O *au point de contact du plan tangent correspondant de la surface* S.

7. Surfaces parallèles. — Étant donnée une surface S, en un point A de cette surface on mène la normale sur laquelle on prend de part et d'autre des longueurs AM et AM′ égales à une longueur donnée. Le lieu des points M et M′ est une surface qu'on appelle surface parallèle relative à la surface S.

Démontrer que le plan tangent en M *à la surface parallèle est parallèle au plan tangent en* A *à la surface* S ; *déduire l'équation tangentielle de la surface parallèle de l'équation tangentielle de la surface* S.

8. *Trouver l'enveloppe des plans coupant trois droites données en trois points qui soient les sommets d'un triangle isocèle ou rectangle.*

9. *Trouver l'équation tangentielle du cercle intersection de la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

et du plan

$$ax + by + cz + d = 0.$$

10. *Trouver l'équation tangentielle de la parabole section du cylindre*

$$y^2 - 2px = 0$$

et du plan

$$ax + by + cz + d = 0.$$

11. Nous avons étudié le complexe linéaire aux numéros 26, 27 et dans la note 17 à la fin du chapitre I.

Supposons que l'on ait une relation homogène et de degré p entre les coordonnées pluckériennes d'une droite

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, l, m, n) = 0;$$

cette équation représente un complexe du p^e ordre.

Il est aisé de voir que les droites de ce complexe qui passent par

Hosted by Google

un point donné $P(x', y', z', t')$ forment un cône du p^e degré ayant pour sommet ce point.

Menons, en effet, par le point P une droite quelconque sur laquelle nous prenons un point arbitraire $M(x, y, z, t)$; pour que cette droite appartienne au complexe, on doit avoir

$$\varphi(xt'-tx', \quad yt'-ty', \quad zt'-tz', \quad yz'-zy', \quad zx'-xz', \quad xy'-yx')=0,$$

équation qui représente un cône du p^e degré et de sommet P ; ce cône est appelé le cône du complexe.

De même, les droites du complexe qui sont situées dans un plan $Q(u', v', w', r')$ enveloppent une courbe de p^e classe.

En effet, un plan quelconque $R(u, v, w, r)$ coupe le plan Q suivant une droite Δ dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned} \alpha &= vw' - wv', & l &= ur' - ru', \\ \beta &= wu' - uw', & m &= vr' - rv', \\ \gamma &= uv' - vu', & n &= wr' - rw'. \end{aligned}$$

Pour que cette droite appartienne au complexe, il faut qu'on ait

$$\varphi(vw'-wv', \quad wu'-uw', \quad uv'-vu', \quad ur'-ru', \quad vr'-rv', \quad wr'-rw')=0.$$

Cette équation est l'équation tangentielle d'une courbe de p^e classe située dans le plan Q et qui est l'enveloppe des droites Δ.

Cette courbe est appelée la courbe du complexe.

CHAPITRE III

SURFACES DÉVELOPPABLES ET PRINCIPE DE DUALITÉ

---

62. Nous avons appelé *surface développable* une surface qui a *deux* équations tangentielles, c'est-à-dire dont les coordonnées des plans tangents satisfont à deux équations, ou sont fonctions d'un seul paramètre indépendant (46).

Nous avons vu également que ces surfaces sont réglées et que le plan tangent est le même en tous les points d'une génératrice.

Il est clair que, réciproquement, si une surface réglée est telle que le plan tangent soit le même en tous les points d'une génératrice quelconque, le plan tangent ne dépendra que d'un seul paramètre, et la surface sera développable.

Considérons une surface réglée engendrée par la droite

$$X = aZ + p,$$
$$Y = bZ + q,$$

a, b, p, q étant fonctions d'un paramètre ω, et proposons-nous de trouver la condition pour que cette droite engendre une surface développable.

Donnons au paramètre ω une valeur particulière, désignons par G la génératrice correspondante, prenons sur cette génératrice un point arbitraire M de cote z, et cherchons l'équation du plan tangent au point M.

Nous remarquerons pour cela que les coordonnées d'un

Hosted by Google

point quelconque de la surface peuvent être considérées comme fonctions de deux paramètres ω et z ; on a

$$X = az + p,$$
$$Y = bz + q,$$
$$Z = z\,;$$

le plan tangent en un point (x, y, z) de cette surface a, comme on sait, pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \dfrac{\partial x}{\partial \omega} & \dfrac{\partial y}{\partial \omega} & \dfrac{\partial z}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne ici

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ a'z + p' & b'z + q' & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

les accents désignant des différentiations par rapport à ω.

Ajoutons aux éléments de la première colonne ceux de la troisième multipliés par $-a$, puis aux éléments de la deuxième colonne ajoutons ceux de la troisième multipliés par $-b$; on obtient, en observant que $az + p = x$ et $bz + q = y$,

$$\begin{vmatrix} X - aZ - p & Y - bZ - q & Z - z \\ a'z + p' & b'z + q' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(X - aZ - p)(b'z + q') - (Y - bZ - q)(a'z + p') = 0.$$

On voit ainsi que le plan tangent contient la génératrice G, et qu'en général le plan tangent tourne autour de cette droite quand z varie, c'est-à-dire quand le point M décrit la génératrice.

Pour que la surface soit développable, il faut que ce plan

Hosted by Google

tangent reste fixe quand le point M décrit la génératrice, c'est-à-dire que la fraction

$$\frac{a'z + p'}{b'z + q'}$$

soit indépendante de z; on doit donc avoir

$$\frac{a'}{b'} = \frac{p'}{q'}$$

ou

$$a'q' - b'p' = 0; \tag{1}$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée soit développable.

On voit d'ailleurs que si cette condition est remplie, l'équation du plan tangent ne contient que le paramètre ω.

63. Exemples. — Il est aisé de voir que le cône et le cylindre sont des surfaces développables ; en effet, si la droite engendre un cylindre, a et b sont des constantes, a' et b' sont nuls et la condition (1) est vérifiée.

Si la droite engendre un cône, elle passe par un point fixe (x_0, y_0, z_0) ; on a donc

$$x_0 = az_0 + p,$$

$$y_0 = bz_0 + q;$$

on en déduit, en différentiant par rapport à ω,

$$0 = a'z_0 + p',$$

$$0 = b'z_0 + q',$$

et en éliminant z_0 on trouve la condition (1).

64. Les surfaces développables jouissent encore d'une propriété fort importante, comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface réglée soit développable est que la génératrice soit, dans toutes ses positions, tangente à une courbe fixe.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soit une droite G engen-

Hosted by Google

drant une surface développable

$$\left.\begin{aligned} X &= aZ + p, \\ Y &= bZ + q, \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

a, b, p, q étant fonctions du paramètre ω, et vérifiant la relation

$$a'q' - b'p' = 0.$$

Je vais montrer que cette droite est tangente à une courbe fixe.

A chaque génératrice G je fais correspondre un point M situé sur la génératrice ; il suffit pour cela de considérer la cote z du point M comme une fonction de ω, $\varphi(\omega)$.

Le lieu des points M est alors une courbe ; nous allons montrer qu'on peut déterminer la fonction $\varphi(\omega)$ en sorte que la génératrice G soit tangente à cette courbe au point correspondant M.

Les coordonnées du point M sont

$$\begin{aligned} X &= az + p, \\ Y &= bz + q, \\ Z &= z, \end{aligned}$$

où l'on suppose $z = \varphi(\omega)$.

Nous allons écrire que les paramètres directeurs de la tangente à la courbe lieu de M sont proportionnels à a, b, 1.

On a

$$\frac{a'z + p' + az'}{a} = \frac{b'z + q' + bz'}{b} = \frac{z'}{1}$$

ou

$$a'z + p' = b'z + q' = 0.$$

Ces deux relations ne définissent qu'une seule valeur de z, puisque l'on a $a'q' - b'p' = 0$.

On voit ainsi que la génératrice touche la courbe fixe en un point qui a pour cote $-\dfrac{p'}{a'}$ ou $-\dfrac{q'}{b'}$.

2° *La condition est suffisante.* — La tangente en un point (x, y, z) d'une courbe a pour équations

Hosted by Google

$$X - x = x'(Z - z),$$
$$Y - y = y'(Z - z)$$

ou

$$X = x'Z + x - x'z,$$
$$Y = y'Z + y - y'z,$$

les accents désignant des différentiations par rapport à z, on voit alors immédiatement que l'on a

$$\frac{x''}{y''} = \frac{(x - x'z)'}{(y - y'z)'},$$

ce qui prouve que la tangente enveloppe une surface développable. Le théorème est démontré.

Cherchons le plan tangent à la surface en tous les points d'une tangente. Nous supposerons pour cela que les coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont fonctions d'un paramètre ω.

Les équations d'une tangente sont

$$X = x + x'\rho,$$
$$Y = y + y'\rho,$$
$$Z = z + z'\rho.$$

Quand ω varie, cette tangente engendre une surface réglée, et le plan tangent en un point de cette surface a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x - x'\rho & Y - y - y'\rho & Z - z - z'\rho \\ x' + x''\rho & y' + y''\rho & z' + z''\rho \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0;$$

on le voit en considérant un point de la surface comme fonction des deux paramètres ω et ρ.

Cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0;$$

elle représente l'équation du plan osculateur à la courbe au

Hosted by Google

point de contact de la tangente sur laquelle on a choisi le point de la surface.

On reconnaît ainsi de nouveau que le plan tangent est indépendant de ρ, c'est-à-dire qu'il est le même en tous les points de la génératrice, ce qui prouve que la surface est développable.

65. La courbe à laquelle sont tangentes les génératrices d'une surface développable s'appelle l'*arête de rebroussement* de la surface.

La raison de cette dénomination consiste en ce fait que toute section plane de la surface présente un point de rebroussement au point de rencontre de l'arête de rebroussement et du plan.

Pour le démontrer, prenons ce point pour origine, pour axe Oz la tangente à la courbe en ce point, et pour plan des xy le plan sécant.

Nous supposerons que les coordonnées x et y d'un point de la courbe sont fonctions de z; alors, puisque Oz est la tangente à l'origine, $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont nulles pour $z = 0$.

La tangente en un point quelconque de la courbe a pour équations

$$\mathrm{X} - x = \frac{dx}{dz}(\mathrm{Z} - z),$$

$$\mathrm{Y} - y = \frac{dy}{dz}(\mathrm{Z} - z);$$

en coupant par le plan $\mathrm{Z} = 0$, on a les coordonnées d'un point quelconque de la section en fonction de z :

$$\mathrm{X} = x - z\,\frac{dx}{dz},$$

$$\mathrm{Y} = y - z\,\frac{dy}{dz}.$$

Les paramètres directeurs de la tangente en un point de cette section sont

$$\frac{d\mathrm{X}}{dz} = -z\,\frac{d^2x}{dz^2},$$

Hosted by Google

$$\frac{dY}{dz} = -z\,\frac{d^2y}{dz^2}\,;$$

ces deux quantités sont nulles pour $z = 0$, ce qui montre que l'origine est un point de rebroussement de la section par le plan des xy.

D'après ce qui a été dit plus haut, les plans osculateurs de l'arête de rebroussement sont tangents à la surface.

66. Si la surface développable est définie par deux équations tangentielles,

$$\left.\begin{aligned} f(u, v, w, r) = 0, \\ \varphi(u, v, w, r) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

nous avons vu au numéro 45 que son équation ponctuelle s'obtenait en éliminant u, v, w, r entre les équations (2) et les suivantes :

$$ux + vy + wz + rt = 0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_u & f'_v & f'_w \\ \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Or, l'équation (4) a été obtenue en supposant r constant ; on pourrait faire la même hypothèse pour l'une quelconque des variables ; on aurait ainsi l'équation

$$\left\|\begin{matrix} x & y & z & t \\ f'_u & f'_v & f'_w & f'_r \\ \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w & \varphi'_r \end{matrix}\right\| = 0, \tag{5}$$

qui exprime que tous les déterminants à neuf éléments tirés du tableau qui figure dans le premier membre sont nuls ; cela ne donne, en réalité, que deux conditions, et ces conditions entraînent la condition (3).

On peut donc dire que l'équation ponctuelle de la surface est obtenue en éliminant u, v, w, r entre les équations (2) et (5).

Les deux équations (5) sont alors les équations de la génératrice suivant laquelle le plan (u, v, w, r) touche la surface ;

cette droite joint les deux points qui ont pour coordonnées homogènes f'_u, f'_v, f'_w, f'_r et φ'_u, φ'_v, φ'_w, φ'_r, c'est-à-dire les points de contact du plan avec les deux surfaces représentées par les équations (2).

Ainsi, quand une surface développable est définie par les plans tangents communs à deux surfaces, les génératrices de cette développable sont les droites qui joignent les points de contact sur les deux surfaces de chaque plan tangent commun.

On dit que cette surface développable est la développable commune aux deux surfaces représentées par les équations (2) ; et, d'après ce qui précède, cette développable est circonscrite aux deux surfaces ; elle touche chaque surface suivant une courbe, lieu géométrique sur cette surface des points de contact des plans tangents communs.

Il peut arriver que l'une des équations (2) représente une courbe, il peut même se faire que toutes deux représentent des courbes ; on dit alors que la développable est commune à une surface et à une courbe, ou à deux courbes.

Il résulte des considérations précédentes que si un plan (u, v, w, r) est tangent à la développable définie par les équations (2), la génératrice de contact est représentée par les équations

$$\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w + \mathrm{R}f'_r = 0,$$

$$\mathrm{U}\varphi'_u + \mathrm{V}\varphi'_v + \mathrm{W}\varphi'_w + \mathrm{R}\varphi'_r = 0.$$

67. Classe d'une surface développable. — On appelle *classe* d'une surface développable le nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par un point arbitraire de l'espace.

Si la surface est définie analytiquement par deux équations tangentielles, algébriques et entières, la classe de la surface est égale au produit des degrés de ses deux équations.

En effet, les plans tangents menés à la surface par un point (x_0, y_0, z_0) seront déterminés par les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

Hosted by Google

$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$
$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0;$$

le nombre des solutions est égal au produit des degrés des fonctions f et φ.

68. Étant donnée une surface, il existe une infinité de surfaces développables qui lui sont circonscrites ; on peut, en effet, imaginer une ligne quelconque tracée sur la surface et l'ensemble des plans tangents à la surface en tous les points de la ligne ; ces plans tangents enveloppent une surface développable (car ils ne dépendent que d'un seul paramètre), qui est circonscrite à la surface donnée en tous les points de la ligne, car la caractéristique de chaque plan tangent passe par le point de contact.

D'ailleurs, ces développables peuvent être définies analytiquement en adjoignant à l'équation tangentielle de la surface donnée une seconde équation choisie arbitrairement.

Comme exemple, considérons une surface S,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

et un plan $P(u_0, v_0, w_0, r_0)$; imaginons la développable circonscrite à la surface S en tous les points de la section par le plan P.

Un plan tangent à la surface S sera tangent à la développable si son point de contact est dans le plan P, c'est-à-dire si l'on a

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w + r_0 f'_r = 0.$$

Il en résulte que la développable circonscrite cherchée est définie par les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w + r_0 f'_r = 0;$$

elle est de classe $m(m-1)$ si la surface est de classe m.

Si le plan P est le plan de l'infini, la surface développable circonscrite à la surface S est ce qu'on appelle la *développable asymptote ;* elle est définie par les deux équations

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0,$$
$$f'_r = 0.$$

Nous reviendrons sur ces notions dans la suite.

69. Soit une surface développable définie par les équations

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0,$$
$$\varphi(u,\ v,\ w,\ r) = 0;$$

il est clair que si l'on combine ces équations d'une manière quelconque, on obtient l'équation d'une nouvelle surface circonscrite à la développable.

Si l'équation obtenue représente une courbe, cette courbe rencontrant toutes les génératrices de la surface sera située sur la surface développable.

Par exemple, si on élimine w entre les équations précédentes, on obtient une équation

$$\mathrm{R}(u,\ v,\ r) = 0,$$

qui représente une courbe dans le plan des xy, section de la surface par ce plan.

On aurait, d'une manière analogue, les sections de la surface par les autres plans de coordonnées.

Enfin, si l'on élimine r entre les deux équations, on aura l'équation de l'intersection de la surface par le plan de l'infini.

70. Si l'une des équations qui définissent une surface développable est du premier degré, tous les plans tangents à la surface passent par un point fixe; cette surface est alors un cône ou un cylindre selon que le point est à distance finie ou infinie.

Étant donnée l'équation d'une surface non développable,

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0,$$

le cône circonscrit à la surface et ayant pour sommet le point $(x,\ y,\ z,\ t)$ aura pour équations tangentielles

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0,$$
$$ux + vy + wz + rt = 0.$$

Hosted by Google

71. Si le sommet est à l'origine, ses équations deviennent

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0,$$
$$r = 0\,;$$

en faisant $r = 0$ dans la première équation, elle se transforme en une équation homogène en $u,\ v,\ w,$

$$\varphi(u,\ v,\ w) = 0,$$

qui représente une courbe à l'infini, trace du cône sur le plan de l'infini.

On aura l'équation ponctuelle de ce cône en appliquant la méthode générale indiquée plus haut (66), c'est-à-dire en cherchant le lieu engendré par les génératrices.

On éliminera pour cela $u,\ v,\ w$ entre les équations

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w},$$
$$ux + vy + wz = 0.$$

On remarquera que les calculs sont les mêmes que si l'on voulait obtenir, en géométrie plane, l'équation ponctuelle d'une courbe dont on aurait l'équation tangentielle (voir Première Partie, n° 31).

Ainsi, étant donné le cône de seconde classe défini par les équations

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$
$$r = 0,$$

son équation ponctuelle est

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(a'a'' - b^2)x^2 + (a''a - b'^2)y^2 + (aa' - b''^2)z^2 + 2(b'b'' - ab)yz$$
$$+ 2(b''b - a'b')zx + 2(bb' - a''b'')xy = 0.$$

Réciproquement, étant donnée l'équation ponctuelle d'un

Hosted by Google

cône ayant pour sommet l'origine,

$$f(x,\ y,\ z) = 0,$$

la condition pour qu'un plan soit tangent à ce cône, s'obtient en éliminant x, y, z entre les équations

$$\frac{u}{f'_x} = \frac{v}{f'_y} = \frac{w}{f'_z},$$

$$ux + vy + wz = 0,$$

et en joignant au résultat de l'élimination la condition

$$r = 0.$$

Les équations tangentielles du cône

$$\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 0$$

sont

$$(\alpha'\alpha'' - \beta^2)u^2 + (\alpha''\alpha - \beta'^2)v^2 + (\alpha\alpha' - \beta''^2)w^2 + 2(\beta'\beta'' - \alpha\beta)vw$$
$$+ 2(\beta''\beta - \alpha'\beta')wu + 2(\beta\beta' - \alpha''\beta'')uv = 0,$$

$$r = 0.$$

Il y a, comme on le voit, la plus grande analogie entre la théorie des coniques et celle des cônes du deuxième degré.

72. Si dans les équations du n° 70 on suppose $t = 0$, les équations

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0,$$

$$ux + vy + wz = 0$$

définissent le cylindre circonscrit à la surface

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0$$

et dont les génératrices ont pour paramètres directeurs

$$x,\ y,\ z.$$

Ainsi les équations

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0, \qquad u = 0$$

représentent le cylindre circonscrit à la surface parallèlement à Ox, et par suite, l'équation

$$f(0,\ v,\ w,\ r) = 0$$

est l'équation tangentielle de la trace de ce cylindre sur le

Hosted by Google

plan des yz, c'est-à-dire du contour apparent de la surface sur ce plan.

Si l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe, l'équation

$$f(0, v, w, r) = 0$$

est l'équation tangentielle de la projection de cette courbe sur le plan des yz, la projection étant faite parallèlement à Ox.

73. Exercice. — *Étant donnés une quadrique, un plan* P, *et un point* A *dans ce plan, trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à la quadrique et tels que la section de chacun de ces cônes par le plan* P *admette pour foyer le point* A.

(*Concours général, 1875.*)

Je prends pour axes des x et des y deux droites rectangulaires quelconques passant par le point A et situées dans le plan P, l'axe des z étant arbitraire.

L'équation tangentielle de la quadrique est

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Soit (α, β, γ) un point du lieu; le cône circonscrit ayant pour sommet ce point a pour équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$u\alpha + v\beta + w\gamma + r = 0.$$

En éliminant w entre ces deux équations, on aura l'équation tangentielle de la section de ce cône par le plan des xy; on obtient

$$f\left(u,\ v,\ -\frac{u\alpha + v\beta + r}{\gamma},\ r\right) = 0.$$

On aura le lieu en exprimant que cette conique a pour foyer l'origine, et il suffit pour cela d'écrire (voir Première Partie, n° 147) que le coefficient de u^2 est égal au coefficient de v^2 et que le coefficient de uv est nul.

On obtient sans difficulté les équations suivantes :

$$a''(\alpha^2 - \beta^2) - 2b'\alpha\gamma + 2b\beta\gamma + (a - a')\gamma^2 = 0,$$
$$a''\alpha\beta - b\alpha\gamma - b'\beta\gamma + b''\gamma^2 = 0,$$

de telle sorte que les équations du lieu sont

Hosted by Google

$$a''(x^2 - y^2) - 2b'xz + 2byz + (a - a')z^2 = 0,$$
$$a''xy - bxz - b'yz + b''z^2 = 0.$$

Ces deux équations représentent deux cônes du deuxième degré ayant pour sommet l'origine ; il en résulte que le lieu se compose de quatre droites passant par le point A.

Deux de ces droites seulement sont réelles; car si on coupe les cônes par le plan $z = h$, on obtient deux hyperboles équilatères concentriques et telles que les asymptotes de l'une soient bissectrices des asymptotes de l'autre, et ces deux courbes n'ont que deux points réels communs.

74. Principe de dualité. — De même qu'en géométrie plane, on aperçoit toute l'analogie qui existe entre les formules relatives aux coordonnées tangentielles et celles de la géométrie ponctuelle. On peut répéter presque textuellement ce que nous avons dit au numéro 50 de la Première Partie de cet ouvrage.

Imaginons une propriété quelconque relative à une figure de l'espace composée de points, de droites, de plans, de lignes et de surfaces quelconques ; cette propriété s'exprime par une ou plusieurs relations entre des coordonnées de points (x, y, z, t) et des coordonnées de plans (u, v, w, r).

Changeons la signification de ces quantités dans les mêmes relations, c'est-à-dire supposons que les lettres x, y, z, t représentent des coordonnées de plans, et que les lettres u, v, w, r représentent des coordonnées de points ; aux équations ainsi modifiées correspondra une nouvelle propriété qui se rapportera à une autre figure, et l'on dira que cette propriété est corrélative de la première.

Cette simple remarque nous permet de *doubler* chaque théorème de géométrie de l'espace, et le principe qui permet ce dédoublement, est ce qu'on appelle le *principe de dualité*.

75. Il est évident que la première propriété se déduit de la seconde par le même procédé, c'est pour cette raison que l'on dit que les deux propriétés sont corrélatives, ainsi que les deux figures auxquelles se rapportent ces propriétés.

Hosted by Google

D'après cela, à un point ayant pour coordonnées a, b, c, d appartenant à l'une des figures correspond dans l'autre figure un plan qui a pour coordonnées a, b, c, d, c'est-à-dire dont l'équation est

$$ax + by + cz + dt = 0.$$

Théorème. — *A des points situés dans un plan correspondent des plans passant par un même point.*

Considérons en effet l'équation

$$ux + vy + wz + rt = 0$$

qui exprime que le point (x, y, z, t) est dans le plan (u, v, w, r).

Si l'on suppose que u, v, w, r restent fixes et qu'on fasse varier x, y, z, t d'une manière quelconque, on aura une infinité de points situés dans un plan.

Changeons la signification de ces coordonnées ; l'équation qui précède exprimera que tous les plans qui ont pour coordonnées x, y, z, t passent par le point fixe (u, v, w, r).

On voit en même temps que le plan dans lequel sont les points correspond au point par lequel passent les plans correspondants.

Théorème. — *A des points situés en ligne droite correspondent des plans passant par une droite.*

Soient deux points $A(x, y, z, t)$ et $A'(x', y', z', t')$; tout point de la droite AA' a pour coordonnées $x + \lambda x'$, $y + \lambda y'$, $z + \lambda z'$ et $t + \lambda t'$.

Changeons la signification des coordonnées ; aux deux points A et A' correspondent des plans P et P', et tout plan dont les coordonnées sont $x + \lambda x'$, $y + \lambda y'$, $z + \lambda z'$ et $t + \lambda t'$ passe par l'intersection de P et de P'.

Le théorème est démontré.

D'après ce théorème nous pourrons dire qu'à une droite correspond une droite, mais il faut entendre par là qu'à tous les points de l'une correspondent tous les plans qui passent par l'autre.

A un point quelconque de l'une des droites correspond un plan et un seul passant par l'autre; il y a donc entre les points de la première droite et les plans de la deuxième une relation homographique ; par suite quatre points quelconques de la première droite ont un rapport anharmonique égal à celui des quatre plans correspondants qui passent par la seconde.

76. Au plan de l'infini correspond l'origine des coordonnées ; à une droite située dans le plan de l'infini correspond une droite passant par l'origine, etc.

Il en résulte qu'à des plans parallèles correspondent des points en ligne droite avec l'origine ; à des droites parallèles correspondent des droites situées dans un même plan avec l'origine, etc.

77. On peut enfin remarquer qu'un point et un plan correspondants sont pôle et plan polaire par rapport à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

car le plan polaire d'un point (x, y, z, t) par rapport à cette quadrique a pour équation

$$Xx + Yy + Zz + Tt = 0,$$

et par conséquent les coordonnées de ce plan sont égales aux coordonnées de son pôle.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, cette quadrique est une sphère imaginaire dont le carré du rayon est égal à -1 ; le plan polaire d'un point A est perpendiculaire à la droite OA, il rencontre cette droite en un point B situé par rapport au point O du côté opposé au point A, et le produit des longueurs OA et OB est égal à 1.

Il en résulte que si deux plans font un certain angle, les deux points correspondants sont vus de l'origine sous un angle égal ou supplémentaire.

Les considérations qui précèdent nous permettent de transformer les propriétés des figures rectilignes, composées uniquement de points, de droites et de plans.

Hosted by Google

78. Exercice. — Proposons-nous de transformer la propriété bien connue qui suit :

Dans tout trièdre les plans passant par chaque arête et perpendiculaires à la face opposée passent par une même droite.

Aux trois faces P_1, P_2, P_3 du trièdre correspondent trois points A_1, A_2, A_3 ; aux arêtes du trièdre correspondent les trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$.

A un plan quelconque P passant par l'arête, intersection de P_2 et P_3, correspond un point A situé sur le côté A_2A_3. Si le plan P est perpendiculaire au plan P_1, les droites joignant l'origine O des coordonnées aux points A et A_1 seront perpendiculaires ; il en résulte que le point A sera à l'intersection du côté A_2A_3 et du plan mené par le point O perpendiculairement à OA_1.

Les trois points analogues au point A seront en ligne droite et on pourra énoncer le théorème suivant :

Etant donnés un triangle et un point O dans l'espace, si l'on considère les trois points obtenus en prenant l'intersection de chaque côté du triangle avec le plan passant par le point O et perpendiculaire à la droite joignant le point O au sommet opposé du triangle, ces trois points sont en ligne droite.

79. Étant donnée maintenant une surface appartenant à la première figure et ayant pour équation ponctuelle

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad (\Sigma)$$

il lui correspond dans la seconde figure une autre surface ayant pour équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0. \qquad (S)$$

Aux points de la surface Σ correspondent les plans tangents de la surface S.

Le degré d'une surface est égal à la classe de la surface correspondante.

Il y a réciprocité, c'est-à-dire qu'aux plans tangents de la surface Σ doivent correspondre les points de la surface S.

En effet, le plan tangent en un point $A(x, y, z, t)$ de la surface Σ a pour équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0 ;$$

à ce plan correspond le point qui a pour équation tangentielle

Hosted by Google

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w + Rf'_r = 0,$$

en supposant $u = x, \quad v = y, \quad w = z, \quad r = t.$

Or ce point est le point de contact du plan tangent (u, v, w, r) à la surface S.

80. Cas particulier. — Supposons que la surface Σ soit du deuxième degré, la surface S est de deuxième classe, ces deux surfaces sont des quadriques.

Si d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) on mène des plans tangents à la quadrique Σ, on sait que les points de contact de ces plans sont situés dans le plan

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0.$$

Corrélativement, si l'on prend l'intersection de la quadrique S avec un plan (u_0, v_0, w_0, r_0), les plans tangents aux points de rencontre passeront par un même point ayant pour équation

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} = 0.$$

De même, si les coordonnées (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) de deux points A_1 et A_2 vérifient la relation

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} + t_1 f'_{t_2} = 0,$$

on sait que la droite joignant ces deux points rencontre la quadrique en deux points conjugués harmoniques par rapport à A_1 et A_2.

Corrélativement, la relation

$$u_1 f'_{u_2} + v_1 f'_{v_2} + w_1 f'_{w_2} + r_1 f'_{r_2} = 0$$

exprime que les plans tangents menés à la quadrique S par l'intersection des deux plans $P_1(u_1, v_1, w_1, r_1)$ et $P_2(u_2, v_2, w_2, r_2)$ sont conjugués harmoniques par rapport à P_1 et P_2.

81. Supposons que la surface Σ soit un cône ; alors tous les

Hosted by Google

plans tangents à ce cône passent par un même point, qui est le sommet du cône.

Il en résulte que tous les points de la surface corrélative S sont dans un même plan, et par suite l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe plane.

Ce résultat peut encore être établi en remarquant que si l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0$$

représente un cône, le premier membre $f(x, y, z, t)$ est fonction de trois fonctions linéaires ; il en sera de même de $f(u, v, w, r)$, ce qui montre (37) que l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe plane.

82. Plus généralement, supposons que la surface Σ soit une surface développable ; alors les coordonnées de ses plans tangents sont fonctions d'un seul paramètre. A tous ces plans correspondent des points dont les coordonnées sont fonctions d'un seul paramètre ; donc tous ces points sont situés sur une courbe, et l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

est l'équation tangentielle de cette courbe.

On peut d'ailleurs trouver la condition analytique pour qu'une surface soit développable.

L'équation du plan tangent en un point d'une surface est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

en posant

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Pour que le plan tangent ne dépende que d'un seul paramètre, il faut et il suffit que les trois quantités

$$p, \qquad q, \qquad z - px - qy$$

Hosted by Google

soient fonctions de l'une d'entre elles, c'est-à-dire que l'on ait

$$z - px - qy = f(p),$$
$$q = \varphi(p).$$

On en déduit, en appliquant le théorème du numéro 47, la condition bien connue

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Si cette condition est remplie, et si l'on considère l'équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0$$

qui définit w comme fonction de u et de v (en supposant r constant), on aura

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0,$$

et par suite l'équation tangentielle représentera une courbe (47).

83. Nous obtenons ainsi un résultat fondamental. A une surface développable correspond dualistiquement une courbe gauche si la surface n'est pas un cône, et une courbe plane si la surface est un cône.

Aux plans tangents à la surface correspondent les points de la courbe; à toute génératrice de la surface, intersection de deux plans tangents infiniment voisins, correspond une tangente à la courbe joignant deux points infiniment voisins; aux points de la surface correspondent les plans tangents à la courbe.

A l'arête de rebroussement de la surface correspond la surface développable engendrée par les tangentes à la courbe gauche ; aux points de l'arête de rebroussement correspondent les plans osculateurs de la courbe.

84. On peut encore remarquer qu'étant donnée une courbe définie par deux équations ponctuelles

Hosted by Google

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z, t) = 0, \\ \varphi(x, y, z, t) = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

il lui correspond la surface développable définie par les deux équations tangentielles

$$\left.\begin{array}{l} f(u, v, w, r) = 0, \\ \varphi(u, v, w, r) = 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

On a l'équation tangentielle de la courbe (33) en éliminant x, y, z, t entre les équations

$$f(x, y, z, t) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$
$$\left\| \begin{array}{cccc} u & v & w & r \\ f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \end{array} \right\| = 0;$$

et l'on a l'équation ponctuelle de la surface (66) en éliminant u, v, w, r entre les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$
$$\left\| \begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ f'_u & f'_v & f'_w & f'_r \\ \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w & \varphi'_r \end{array} \right\| = 0;$$

il y a, comme on le voit, analogie complète.

Si l'une des deux équations (1) est du premier degré, la courbe est plane ; l'une des équations (2) est aussi du premier degré et la surface développable est un cône, dont le sommet correspond au plan de la courbe.

85. Dans le tableau qui suit et que nous empruntons à Clebsch*, on a mis en face les uns des autres les noms des figures qui se correspondent dualistiquement.

---

* *Vorlesungen über Geometrie, Zweiten Bandes erster Theil*, Leipzig, 1891.

Hosted by Google

Point.	Plan.
Droite.	Droite.
Ensemble de points en ligne droite.	Ensemble de plans passant par une même droite.
Ensemble de points situés dans un plan.	Ensemble de plans passant par un même point.
Ensemble de droites situées dans un plan et passant par un point.	Ensemble de droites passant par un point et situées dans un plan.
Ensemble de droites passant par un point.	Ensemble de droites situées dans un plan.
Cône.	Courbe plane.
Génératrice du cône.	Tangente de la courbe plane.
Plan tangent du cône.	Point de la courbe plane.
Point du cône.	Plan tangent de la courbe plane.
Surface non développable.	Surface non développable.
Tangente à la surface.	Tangente à la surface.
Plan tangent à la surface.	Point de la surface.
Courbe gauche.	Surface développable.
Plan tangent d'une courbe gauche.	Point d'une surface développable.
Tangente d'une courbe gauche.	Génératrice d'une surface développable.
Point d'une courbe gauche.	Plan tangent d'une surface développable.
Droite rencontrant une courbe gauche.	Tangente à une surface développable.
Courbe gauche tracée sur une surface.	Surface développable circonscrite à la surface correspondante.
Courbe plane tracée sur une surface.	Cône circonscrit à la surface.

86. Application. — Étant donnée une quadrique

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

on sait que l'équation du cône circonscrit à cette quadrique et ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0, t_0) est

$$(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0})^2 - 4f(x, y, z, t)f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0.$$

Corrélativement, étant donnée la quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0$$

et le plan (u_0, v_0, w_0, r_0), l'équation

$$(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2 - 4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0$$

est l'équation de la conique, section de la quadrique par le plan.

On pourrait obtenir par un procédé analogue bien d'autres formules relatives aux coordonnées tangentielles ; nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet, et dans les chapitres suivants nous établirons directement toutes les formules au moyen des coordonnées tangentielles.

EXERCICES ET NOTES

1. *Trouver les équations tangentielles d'un cône de révolution tangent à trois plans* (u_1, v_1, w_1, r_1), (u_2, v_2, w_2, r_2) et (u_3, v_3, w_3, r_3).

Pour qu'un plan

$$ux + vy + wz + r = 0$$

soit tangent à ce cône, il faut d'abord qu'il passe par le sommet, c'est-à-dire par le point de rencontre des trois plans, ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} u & v & w & r \\ u_1 & v_1 & w_1 & r_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & r_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

En outre, nous écrirons qu'il existe une droite faisant le même angle θ avec les quatre plans ; si l, m, n désignent les paramètres directeurs de cette droite, on aura

$$\begin{aligned} ul + vm + wn &= \sin\theta\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}, \\ u_1 l + v_1 m + w_1 n &= \sin\theta\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}, \\ u_2 l + v_2 m + w_2 n &= \sin\theta\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}, \\ u_3 l + v_3 m + w_3 n &= \sin\theta\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2+v^2+w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont les équations tangentielles cherchées. Dans l'équation (2) les radicaux peuvent avoir un signe quelconque ; on en conclut qu'il y a quatre solutions.

Hosted by Google

2. *Trouver l'enveloppe d'un plan mené perpendiculairement à l'extrémité d'une droite passant par un point fixe, lorsque cette extrémité décrit une circonférence.*

On écrit que la projection du point fixe sur un plan quelconque est sur la circonférence.

3. *La surface développable qui a pour arête de rebroussement une courbe gauche unicursale d'ordre n est elle-même d'ordre* $2n-2$. *Sa classe est égale à* $3(n-2)$.

4. *Trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à une quadrique et qui sont coupés par un plan suivant des cercles; trouver aussi l'enveloppe des plans de contact des cônes et de la quadrique.*

Supposons que la quadrique soit un ellipsoïde ; menons par le centre un plan parallèle au plan donné, et prenons pour axes des x et des y les axes de la section du plan et de l'ellipsoïde ; enfin pour axe des z prenons le diamètre conjugué de ce plan par rapport à la surface.

L'équation ponctuelle de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et son équation tangentielle

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-r^2=0.$$

Le cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet un point M (x, y, z) a pour équations tangentielles

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-r^2=0,$$

$$ux+vy+wz+r=0,$$

et sa trace sur le plan xOy a pour équation tangentielle (69)

$$(a^2u^2+b^2v^2-r^2)z^2+c^2(ux+vy+r)^2=0.$$

Les axes Ox et Oy étant rectangulaires, pour que cette équation représente un cercle il faut qu'on ait (Première Partie, *Géom. plane*, n° 101)

$$(b^2z^2+c^2y^2)(c^2-z^2)-c^4y^2=(a^2z^2+c^2x^2)(c^2-z^2)-c^4x^2,$$

$$c^4xy-(c^2-z^2)c^2xy=0,$$

ou, comme z ne peut être nul,

$$\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$xy=0.$$

Hosted by Google

Le lieu se compose d'une ellipse et d'une hyperbole dont les équations sont

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad -\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$
$$y=0, \qquad\qquad x=0.$$

Soit $ux+vy+wz+r=0$ le plan de contact du cône et de l'ellipsoïde ; nous allons écrire que le pôle du plan par rapport à la surface est sur l'une des courbes trouvées plus haut.

Les coordonnées du pôle sont déterminées par les équations

$$\frac{x}{a^2u}=\frac{y}{b^2v}=\frac{z}{c^2w}=-\frac{1}{r};$$

on obtient donc

$$\frac{a^4u^2}{a^2-b^2}+c^2w^2-r^2=0,$$
$$v=0$$

et

$$-\frac{b^4v^2}{a^2-b^2}+c^2w^2-r^2=0,$$
$$u=0.$$

Ces deux systèmes représentent deux cylindres dont les génératrices sont parallèles aux axes des y et des x ; le premier a pour directrice une ellipse et le second une hyperbole.

5. *Lieu des sommets des cônes circonscrits à une quadrique et qui coupent un plan donné suivant une ellipse d'aire donnée. Enveloppe de la courbe de contact, et lieu des centres des ellipses.*

6. *Démontrer qu'étant donnée la droite*

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c},$$

où x, y, z, a, b, c sont fonctions d'un paramètre, la condition nécessaire et suffisante pour que cette droite engendre une surface développable est

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}=0.$$

7. Étant donnée une courbe gauche, on peut déterminer la surface développable dont cette courbe est l'arête de rebroussement.

Si l'on veut l'équation ponctuelle de cette surface, on cherchera le lieu engendré par la tangente ; si l'on veut au contraire les équa-

Hosted by Google

tions tangentielles, on identifiera l'équation du plan osculateur à la courbe avec l'équation

$$ux + vy + wz + r = 0,$$

et on éliminera le paramètre entre les relations obtenues.

8. *Trouver les équations tangentielles de l'hélicoïde développable, c'est-à-dire de la surface engendrée par les tangentes menées à une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit.*

Les coordonnées d'un point de cette hélice peuvent s'exprimer en fonction d'une variable t de la manière suivante :

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad z = bt\,;$$

on en déduira aisément l'équation du plan osculateur et les équations tangentielles demandées.

9. *Étant données trois droites dans l'espace, il n'est pas, en général, possible de construire un triangle ayant ses sommets respectivement sur les droites données et tel que chacun de ses côtés soit orthogonal à la droite passant par le sommet opposé. Faire voir que dans le cas où le problème est possible, il est indéterminé, et trouver l'enveloppe du plan du triangle.*

Si l'on désigne par

$$\frac{x - a_i}{\alpha_i} = \frac{y - b_i}{\beta_i} = \frac{z - c_i}{\gamma_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les équations d'une des droites, le point de rencontre de cette droite avec le plan

$$ux + vy + wz + r = 0$$

a pour coordonnées

$$a_i + \alpha_i\rho_i, \qquad b_i + \beta_i\rho_i, \qquad c_i + \gamma_i\rho_i,$$

où l'on pose

$$\rho_i = -\frac{ua_i + vb_i + wc_i + r}{u\alpha_i + v\beta_i + w\gamma_i}.$$

En écrivant que chaque côté du triangle déterminé par le plan est perpendiculaire à la droite qui passe par le sommet opposé, on obtient les trois équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\rho_2}{(13)} - \frac{\rho_3}{(12)} + \frac{\Sigma\alpha_1(a_2 - a_3)}{(13)(12)} = 0,\\
\frac{\rho_3}{(21)} - \frac{\rho_1}{(23)} + \frac{\Sigma\alpha_2(a_3 - a_1)}{(21)(23)} = 0,\\
\frac{\rho_1}{(32)} - \frac{\rho_2}{(31)} + \frac{\Sigma\alpha_3(a_1 - a_2)}{(32)(31)} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Hosted by Google

où l'on pose

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = (ij) = (ji)$$

et, par exemple,

$$\Sigma\alpha_1(a_2 - a_3) = \alpha_1(a_2 - a_3) + \beta_1(b_2 - b_3) + \gamma_1(c_2 - c_3).$$

En additionnant les trois équations obtenues, on a

$$\frac{\Sigma\alpha_1(a_2 - a_3)}{(13)(12)} + \frac{\Sigma\alpha_2(a_3 - a_1)}{(21)(23)} + \frac{\Sigma\alpha_3(a_1 - a_2)}{(32)(31)} = 0\,;$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit possible.

Si cette condition est remplie, le système (1) se réduit à deux équations ; il en résulte que le plan du triangle enveloppe une surface développable.

10. *Etant données trois droites parallèles à un même plan, on considère tous les triangles dont les sommets sont situés sur ces droites et qui ont même centre de gravité* G. *Démontrer que les plans de ces triangles enveloppent un cône du second ordre.*

11. *Démontrer que les plans normaux à une courbe gauche engendrent une surface développable et que les génératrices de la surface passent par les centres de courbure de la courbe.*

12. Nous nous proposons d'expliquer dans cette note pourquoi on a appelé surfaces développables les surfaces qui ont deux équations tangentielles.

On dit que deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre lorsqu'on peut établir entre les points de ces deux surfaces une correspondance telle que deux arcs correspondants quelconques aient même longueur.

Les coordonnées x, y, z d'un point M d'une surface S sont fonctions de deux variables indépendantes u et v ; si le point M décrit une courbe sur la surface, v est fonction de u,

$$v = f(u),$$

et si s désigne la longueur de l'arc de la courbe décrite, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Or

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\,,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv, \qquad [dv = f'(u)du]$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv,$$

d'où

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2,$$

en posant

$$\mathrm{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$\mathrm{F} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\mathrm{G} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Considérons une seconde surface S_1 et désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point M_1 de cette surface.

S'il existe une correspondance quelconque entre les points des deux surfaces, telle qu'étant donnés x, y, z, x_1, y_1, z_1 soient déterminés, on pourra supposer que les coordonnées du point M_1 soient fonctions des mêmes paramètres u, v que les coordonnées du point M; et cela de façon que deux points correspondants des surfaces soient définis par un même système de valeurs de u et v.

A une courbe décrite par le point M correspondra une courbe décrite par le point M_1; l'arc s_1 de cette dernière sera déterminé par

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$$

ou

$$ds_1^2 = \mathrm{E}_1du^2 + 2\mathrm{F}_1dudv + \mathrm{G}_1dv^2,$$

en posant

$$\mathrm{E}_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$\mathrm{F}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial v},$$

$$\mathrm{G}_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2.$$

Pour que les surfaces soient applicables l'une sur l'autre, on devra avoir, quelles que soient les courbes correspondantes,

$$ds^2 = ds_1^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2 = \mathrm{E}_1du^2 + 2\mathrm{F}_1dudv + \mathrm{G}_1dv^2;$$

et comme cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la fonction $f(u)$, et par suite quel que soit $\frac{dv}{du}$, on aura

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1, \qquad \mathrm{F} = \mathrm{F}_1, \qquad \mathrm{G} = \mathrm{G}_1.$$

Hosted by Google

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S et S_1 soient applicables l'une sur l'autre.

En particulier, pour que la surface S soit applicable sur un plan, il faudra qu'on puisse déterminer deux fonctions de u et de v, α et β, qui seront les coordonnées d'un point du plan, et telles que l'on ait

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

quelle que soit la valeur de $\frac{dv}{du}$.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit applicable sur un plan est que cette surface soit développable.*

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons que la surface S soit applicable sur un plan ; on aura alors

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 ;$$

on peut substituer aux variables u et v les variables α et β; et comme l'on a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta,$$

il vient

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0.$$

Différentions ces trois relations par rapport à α et par rapport à β; on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = 0.$$

Les deux premières équations déterminent $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}$ à un facteur près en fonction des dérivées du premier ordre de x, y, z ; il en est de même pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}$ et pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$; on en conclut

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}}$$

et

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}}.$$

On voit ainsi que le déterminant fonctionnel de deux quelconques des fonctions $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ est nul, donc ces trois fonctions sont fonctions l'une de l'autre ; il en est de même pour $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial z}{\partial \beta}$.

Comme l'on a

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

on voit que ces six dérivées dépendent d'un seul paramètre.

Or on a

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = p \frac{\partial x}{\partial \alpha} + q \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = p \frac{\partial x}{\partial \beta} + q \frac{\partial y}{\partial \beta},$$

en posant

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il en résulte que p et q sont fonctions de ce même paramètre ; on a

$$p = \varphi(q),$$

et la surface est développable.

2° *La condition est suffisante.* — Considérons une surface développable ; prenons un point $P(x, y, z)$ sur l'arête de rebroussement, menons la tangente en ce point à cette courbe ; soit $M(x_1, y_1, z_1)$ un point quelconque de cette tangente défini par la valeur l du segment $\overline{PM}$. Nous supposerons que x, y, z sont exprimés en fonction de l'arc s de l'arête de rebroussement ; nous désignerons par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente PM, en rappelant que l'on a

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2},$$

R étant le rayon de courbure au point P de l'arête de rebroussement.

Les coordonnées du point M de la surface sont fonctions des deux paramètres s et l ; ce point décrira une courbe sur la surface si l est fonction de s,

$$l = f(s).$$

Cherchons la différentielle de l'arc de cette courbe.

On a

$$x_1 = x + l\alpha,$$
$$y_1 = y + l\beta,$$
$$z_1 = z + l\gamma,$$

d'où

$$dx_1 = dx + \alpha dl + l d\alpha,$$
$$dy_1 = dy + \beta dl + l d\beta,$$
$$dz_1 = dz + \gamma dl + l d\gamma.$$

Faisons la somme des carrés; on a

$$ds_1^2 = ds^2 + dl^2 + 2ds dl + l^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2),$$

en remarquant que

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = ds,$$
$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$
$$d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz = 0.$$

On peut encore écrire

$$ds_1^2 = (ds + dl)^2 + \frac{l^2 ds^2}{R^2}.$$

Posons

$$\sigma = \int_0^s \frac{ds}{R},$$

Hosted by Google

et considérons les deux fonctions

$$A = l \cos \sigma + \int_0^s \cos \sigma \, ds,$$

$$B = l \sin \sigma + \int_0^s \sin \sigma \, ds\,;$$

on aura

$$dA = -l \sin\sigma \, d\sigma + \cos \sigma \, dl + \cos \sigma \, ds = \cos \sigma (ds + dl) - l \sin \sigma \frac{ds}{R},$$

$$dB = l \cos \sigma \, d\sigma + \sin \sigma \, dl + \sin \sigma \, ds = \sin \sigma (ds + dl) + l \cos \sigma \frac{ds}{R}\,;$$

en faisant la somme des carrés, il vient

$$dA^2 + dB^2 = (ds + dl)^2 + l^2 \frac{ds^2}{R^2},$$

c'est-à-dire

$$ds_1^2 = dA^2 + dB^2\,;$$

le théorème est démontré ; A et B désignent les coordonnées du point du plan qui correspond au point (x_1, y_1, z_1) de la surface.

On voit ainsi qu'une surface développable peut s'appliquer ou se *développer* sur un plan ; le mot de développable est entièrement justifié (*).

(*) Nous avons emprunté cette démonstration au *Cours d'Analyse* de M. E. Picard (tome I, p. 425).

Hosted by Google

CHAPITRE IV

PLANS TANGENTS ET NORMALES

87. Plans tangents par un point extérieur. — Considérons d'abord une surface non développable ayant pour équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0.$$

Les plans tangents menés à cette surface par un point $A(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ seront déterminés par les équations

$$\left.\begin{array}{r} f(u, v, w, r) = 0, \\ \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = 0\,; \end{array}\right\} \qquad (1)$$

il y aura une infinité de solutions ; tous les plans obtenus seront d'ailleurs les plans tangents au cône circonscrit à la surface et ayant pour sommet le point A.

Les équations qui précèdent sont les équations tangentielles de ce cône.

Si on élimine w entre les deux équations (1), on obtient l'équation tangentielle de la section du cône par le plan des xy (69) ; de même si on élimine r, on obtient l'équation

$$f\left(u, v, w, \quad -\frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\delta}\right) = 0, \qquad (2)$$

qui représente l'équation de la section du cône par le plan de l'infini.

Il en résulte qu'en adjoignant à l'équation (2) une équation

Hosted by Google

linéaire quelconque,

$$u\alpha' + v\beta' + w\gamma' + r\delta' = 0,$$

on obtiendra les équations tangentielles d'un cône parallèle au cône donné et ayant pour sommet le point $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$.

88. D'une manière générale, on peut obtenir aisément l'équation tangentielle de la section du cône par un plan quelconque P_0 (u_0, v_0, w_0, r_0).

Pour qu'un plan P (u, v, w, r) soit tangent à la section, il faut que l'intersection des deux plans P et P_0 soit tangente à cette section, et pour cela il faut que par cette intersection on puisse faire passer un plan tangent au cône.

Les coordonnées d'un plan passant par l'intersection de P et de P_0 sont $u + \lambda u_0$, $v + \lambda v_0$, $w + \lambda w_0$, $r + \lambda r_0$; il doit donc exister une valeur de λ, telle que ces nombres vérifient les équations (1), c'est-à-dire telle que l'on ait

$$f(u + \lambda u_0,\ v + \lambda v_0,\ w + \lambda w_0,\ r + \lambda r_0) = 0,$$

$$\alpha(u + \lambda u_0) + \beta(v + \lambda v_0) + \gamma(w + \lambda w_0) + \delta(r + \lambda r_0) = 0\,;$$

de la deuxième on tire

$$\lambda = -\frac{\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r}{\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta r_0}$$

ou

$$\lambda = -\frac{A}{A_0},$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$A = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r, \qquad A_0 = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta r_0.$$

En transportant cette valeur de λ dans la première équation, on a

$$f\left(u - \frac{Au_0}{A_0},\ v - \frac{Av_0}{A_0},\ w - \frac{Aw_0}{A_0},\ r - \frac{Ar_0}{A_0}\right) = 0,$$

équation tangentielle de la section du cône par le plan P_0.

89. **Équation ponctuelle du cône circonscrit.** — Considérons un plan tangent au cône dont les coordonnées vérifient les équations (1); ce plan touche la surface donnée en un point dont les coordonnées homogènes sont f'_u, f'_v, f'_w, f'_r. En joignant ce point au sommet A, on a la génératrice de contact du plan et du cône.

Les coordonnées x, y, z, t d'un point quelconque de cette génératrice seront données par les relations

$$\left.\begin{aligned} \rho x &= f'_u + \lambda\alpha, \\ \rho y &= f_v + \lambda\beta, \\ \rho z &= f'_w + \lambda\gamma, \\ \rho t &= f'_r + \lambda\delta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

En éliminant $u, v, w, r, \lambda, \rho$ entre les équations (1) et (3), on aura l'équation ponctuelle du cône circonscrit.

En multipliant les équations (3) respectivement par u, v, w, r, on reconnaît que l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

peut se remplacer par l'équation

$$ux + vy + wz + rt = 0.$$

90. Examinons le cas particulier où la surface donnée est de deuxième classe, son équation étant

$$\begin{aligned} f(u, v, w, r) \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv \\ + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0; \end{aligned}$$

on doit éliminer $u, v, w, r, \lambda, \rho$ entre les équations

$$\begin{aligned} au + b''v + b'w + cr + \lambda\alpha - \rho x &= 0, \\ b''u + a'v + bw + c'r + \lambda\beta - \rho y &= 0, \\ b'u + bv + a''w + c''r + \lambda\gamma - \rho z &= 0, \\ cu + c'v + c''w + dr + \lambda\delta - \rho t &= 0, \\ \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r &= 0, \\ xu + yv + zw + tr &= 0. \end{aligned}$$

On obtient immédiatement comme résultat de l'élimination

Hosted by Google

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & \alpha & x \\ b'' & a' & b & c' & \beta & y \\ b' & b & a'' & c'' & \gamma & z \\ c & c' & c'' & d & \delta & t \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 & 0 \\ x & y & z & t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du deuxième degré en x, y, z, t qui est l'équation ponctuelle du cône circonscrit.

Cette équation est la condition pour que la droite qui joint les deux points $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et (x, y, z, t) soit tangente à la quadrique donnée.

Tous ces résultats sont visiblement applicables au cas où l'équation donnée,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

représente une ligne au lieu d'une surface.

91. Équation de la courbe de contact. — Le cône circonscrit à la surface S et ayant pour sommet le point A touche cette surface en tous les points d'une courbe ; nous nous proposons d'obtenir l'équation tangentielle de cette courbe.

Soient u, v, w, r les coordonnées d'un plan tangent au cône ; ces nombres vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned} f(u, v, w, r) = 0, \\ \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = 0 ; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

le point de la courbe de contact situé dans ce plan a pour coordonnées f'_u, f'_v, f'_w, f'_r.

Soit $P_0(u_0, v_0, w_0, r_0)$ un plan tangent à la courbe de contact en ce point ; on aura d'abord

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w + r_0 f'_r = 0 ; \qquad (4)$$

en outre il faut écrire que ce plan contient la tangente à la courbe de contact, ou, ce qui revient au même, qu'il contient le point de la courbe infiniment voisin.

On peut considérer u, v, w comme fonctions d'un paramètre et r comme constant ; on différentiera la relation (4) par rapport au paramètre ; en désignant par u', v', w' les dérivées de u, v, w, on a

$$\begin{aligned} u'(u_0 f''_{u^2} + v_0 f''_{vu} + w_0 f''_{wu} + r_0 f''_{ru}) + v'(u_0 f''_{uv} + v_0 f''_{v^2} + w_0 f''_{wv} + r_0 f''_{rv}) \\ + w'(u_0 f''_{uw} + v_0 f''_{vw} + w_0 f''_{w^2} + r_0 f''_{rw}) = 0 ; \quad (5) \end{aligned}$$

Hosted by Google

u', v', w' vérifient d'ailleurs les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w = 0, \\ \alpha u' + \beta v' + \gamma w' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

obtenues en différentiant les relations (1).

On peut tout d'abord éliminer u', v', w' entre (5) et (6) ; on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} u_0 f''_{u^2} + \cdots & u_0 f''_{uv} + \cdots & u_0 f''_{uw} + \cdots \\ f'_u & f'_v & f'_w \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

On aura alors l'équation de la courbe de contact (u_0, v_0, w_0, r_0 désignant les coordonnées courantes) en éliminant u, v, w, r entre les équations (1), (4) et (7).

Dans le cas où $f(u, v, w, r)$ est du deuxième degré, la relation (4) peut s'écrire

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} = 0\,;$$

(5) devient alors

$$u'f'_{u_0} + v'f'_{v_0} + w'f'_{w_0} + r'f'_{r_0} = 0,$$

et on doit éliminer u, v, w, r entre (1), (4) et la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ f'_{u_0} & f'_{v_0} & f'_{w_0} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

L'élimination est relativement simple, car on a trois relations linéaires entre u, v, w, r.

92. Si l'on donne une surface développable définie par deux équations tangentielles

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$

on ne pourra mener à cette surface par un point $A(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ qu'un nombre limité de plans tangents dont les coordonnées seront données par les équations précédentes et la suivante :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = 0.$$

Le nombre des plans tangents qu'on peut mener à une surface développable par un point est, comme nous l'avons déjà dit, la *classe* de la surface.

On peut obtenir l'équation ponctuelle de l'ensemble de ces plans.

Hosted by Google

Soit $M(x, y, z, t)$ un point appartenant à l'un de ces plans tangents ; écrivons que par la droite AM on peut mener un plan tangent à la surface ; il faut et il suffit que les quatre équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$
$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = 0,$$
$$xu + yv + zw + tr = 0$$

aient un système de solutions communes en u, v, w, r. En éliminant ces inconnues entre ces quatre équations, on aura l'équation de l'ensemble des plans tangents.

93. Application. — *Trouver l'équation de l'ensemble des plans tangents menés par un point* (α, β, γ) *à un cône ayant pour équation ponctuelle*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Les équations tangentielles du cône sont

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0,$$
$$r = 0.$$

Écrivons les équations

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + r = 0,$$
$$ux + vy + wz + r = 0,$$

et éliminons u, v, w entre ces quatre équations.

Les deux dernières donnent, en y faisant $r = 0$,

$$\frac{u}{\beta z - \gamma y} = \frac{v}{\gamma x - \alpha z} = \frac{w}{\alpha y - \beta x},$$

et en remplaçant dans la première, on a

$$a^2(\beta z - \gamma y)^2 + b^2(\gamma x - \alpha z)^2 - c^2(\alpha y - \beta x)^2 = 0.$$

Il est aisé de vérifier que cette équation représente deux plans.

94. Plans tangents parallèles à une direction de droite donnée. — Désignons par α, β, γ les paramètres directeurs de la direction donnée ; on peut considérer les plans parallèles à cette direction comme passant par le point à l'infini qui a pour coordonnées α, β, γ, 0.

Nous sommes donc ramenés au problème résolu plus haut : il suffit, dans les calculs qui précèdent, de faire $\delta = 0$.

Si la surface n'est pas développable, c'est-à-dire n'a qu'une seule équation tangentielle,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

on pourra lui mener une infinité de plans tangents parallèles à la direction donnée; ces plans seront tangents à un cylindre dont les équations tangentielles seront

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

On aura comme on l'a vu plus haut l'équation tangentielle de la trace de ce cylindre sur un plan quelconque, l'équation ponctuelle du cylindre lui-même, l'équation tangentielle de la courbe de contact, etc.

95. Ces résultats s'appliquent au cas où l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe.

Ainsi le cylindre projetant cette courbe sur le plan des xy aura pour équations tangentielles

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$w = 0.$$

Sa trace sur le plan des xy aura pour équation

$$f(u, v, 0, r) = 0.$$

On voit donc que pour obtenir l'équation de la projection d'une courbe sur le plan des xy, il suffit de faire $w = 0$ dans l'équation tangentielle de la courbe.

96. Si la surface donnée est développable, on pourra lui mener un nombre limité de plans tangents parallèles à la direction donnée ; il sera aisé de former l'équation ponctuelle de l'ensemble de ces plans tangents.

Hosted by Google

97. Plans tangents par une droite. — Le problème n'est possible que si la surface n'est pas développable.

Soit S une telle surface, ayant pour équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

et soit une droite Δ définie par les équations de deux de ses points,

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + r = 0.$$

Ces trois équations déterminent les coordonnées des plans tangents menés par la droite à la surface.

Le point de contact d'un plan tangent a pour coordonnées f'_u, f'_v, f'_w, f'_r; en écrivant qu'un plan contient ce point

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w + r_0 f'_r = 0,$$

et en éliminant u, v, w, r entre les quatre équations écrites, on aura la condition pour que le plan $(u_0, v_0\ w_0, r_0)$ passe par l'un des points de contact, c'est-à-dire l'équation tangentielle de l'ensemble de ces points.

On peut aussi avoir l'équation ponctuelle de l'ensemble de ces plans en éliminant u, v, w, r entre les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1 = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + rt_2 = 0,$$
$$ux + vy + wz + rt = 0.$$

Des trois dernières on peut tirer des quantités proportionnelles à u, v, w, r en fonction des coordonnées pluckériennes $(\alpha, \beta, \gamma, l, m, n)$ de la droite (22)

$$u = \lambda \begin{vmatrix} t & y & z \\ t_1 & y_1 & z_1 \\ t_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\lambda(\beta z - \gamma y - lt),$$

$$v = \lambda \begin{vmatrix} x & t & z \\ x_1 & t_1 & z_1 \\ x_2 & t_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\lambda(\gamma x - \alpha z - mt),$$

$$w = \lambda \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = -\lambda(\alpha y - \beta x - nt),$$

$$r = -\lambda \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\lambda(lx + my + nz).$$

En remplaçant u, v, w, r par leurs valeurs dans l'équation de la surface, on obtient

$$f(\beta z - \gamma y - lt,\ \gamma x - \alpha z - mt,\ \alpha y - \beta x - nt,\ lx + my + nz) = 0.$$

98. **Exercice.** — *Trouver l'équation du complexe des droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents perpendiculaires à un ellipsoïde.*

Soit $$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0$$
l'équation tangentielle de l'ellipsoïde rapporté à ses axes.

L'équation de l'ensemble des plans tangents menés à cette surface par une droite $\Delta(\alpha, \beta, \gamma, l, m, n)$ est

$$a^2(\beta z - \gamma y - lt)^2 + b^2(\gamma x - \alpha z - mt)^2 + c^2(\alpha y - \beta x - nt)^2 - (lx + my + nz)^2 = 0.$$

Pour que ces deux plans soient perpendiculaires, il faut que la somme des coefficients de x^2, y^2 et z^2 soit nulle, ce qui donne

$$a^2(\beta^2 + \gamma^2) + b^2(\gamma^2 + \alpha^2) + c^2(\alpha^2 + \beta^2) - (l^2 + m^2 + n^2) = 0;$$
c'est l'équation cherchée.

99. Il est utile de rappeler ici que le nombre de plans tangents qu'on peut mener à une surface par une droite est égal au degré de l'équation tangentielle, et que ce nombre s'appelle la *classe* de la courbe.

100. Plans tangents parallèles à une direction de plan donnée. — C'est un cas particulier de l'étude précédente ; il suffit de supposer que la droite donnée est à l'infini. Nous traiterons néanmoins la question directement.

Soit $$f(u, v, w, r) = 0$$

Hosted by Google

l'équation tangentielle de la surface, et

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0$$

l'équation de la direction de plan.

Un plan tangent à la surface parallèle au plan donné aura une équation de la forme

$$u_0x + v_0y + w_0z + \lambda = 0,$$

où λ sera déterminé par l'équation

$$f(u_0,\ v_0,\ w_0,\ \lambda) = 0.$$

Supposons que la surface soit un ellipsoïde

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0.$$

On pourra mener deux plans tangents parallèles au plan

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0\ ;$$

ces deux plans auront pour équations

$$u_0x + v_0y + w_0z \pm \sqrt{a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2} = 0.$$

Dans le cas où la surface est un paraboloïde,

$$pv^2 + qw^2 - 2ur = 0,$$

on pourra lui mener un seul plan tangent parallèle au plan donné, et son équation sera

$$u_0x + v_0y + w_0z + \frac{pv_0^2 + qw_0^2}{2u_0} = 0.$$

101. On peut obtenir l'équation tangentielle de l'ensemble des points de contact de la manière suivante.

Écrivons qu'un plan $(u,\ v,\ w,\ r)$ passe par le point de contact du plan tangent $(u_0,\ v_0,\ w_0,\ \lambda)$; on aura

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{\lambda} = 0,$$

avec la condition

$$f(u_0,\ v_0,\ w_0,\ \lambda) = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation de l'ensemble des points de contact.

Si la surface est de deuxième classe, la première équation peut s'écrire

$$u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w + \lambda f'_r = 0,$$

Hosted by Google

et le résultat de l'élimination est

$$f\left(u_0,\ v_0,\ w_0,\quad -\frac{u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w}{f'_r}\right) = 0$$

ou

$$f[u_0 f'_r,\ v_0 f'_r,\ w_0 f'_r,\quad -(u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_r)] = 0,$$

équation qui représente les deux points de contact ; le premier membre est alors décomposable en un produit de deux facteurs.

Si le coefficient de w^2 est nul, l'un des points est à l'infini ; par conséquent, en écrivant que dans l'équation précédente le coefficient de w^2 est nul, on a une relation entre u_0, v_0, w_0 qui exprime que ces quantités sont les coefficients directeurs des plans asymptotes. Cette relation est donc l'équation tangentielle de la section de la surface par le plan de l'infini.

En y joignant l'équation d'un point quelconque, on a les équations tangentielles du cône des directions asymptotiques ayant pour sommet ce point.

102. Intersection d'une surface et d'un plan. — Soit

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface et u_0, v_0, w_0, r_0 les coordonnées du plan donné P_0.

Cherchons d'abord l'équation tangentielle de la section plane, c'est-à-dire la condition pour qu'un plan $P(u, v, w, r)$ soit tangent à cette section. Il faudra pour cela que la droite intersection des deux plans P et P_0 soit tangente à la surface, ou que par cette droite on puisse mener à la surface deux plans tangents confondus.

Un plan quelconque passant par l'intersection de P_0 et de P a pour coordonnées $u + \lambda u_0$, $v + \lambda v_0$, $w + \lambda w_0$, $r + \lambda r_0$; ce plan sera tangent si l'on a

$$f(u + \lambda u_0,\ v + \lambda v_0,\ w + \lambda w_0,\ r + \lambda r_0) = 0.$$

A chaque valeur de λ, racine de cette équation, correspond un plan tangent passant par l'intersection de P et de P_0 ; pour que P soit tangent à la section de la surface par le plan P_0, il faudra que cette équation en λ ait une racine double ; on annu-

Hosted by Google

lera donc le discriminant du premier membre, et on aura l'équation cherchée.

Si la surface donnée est une quadrique, l'équation précédente s'écrit

$$f(u, v, w, r)+\lambda(u_0f'_u+v_0f'_v+w_0f'_w+r_0f'_r)+\lambda^2 f(u_0, v_0, w_0, r_0)=0,$$

et pour que cette équation ait une racine double, on doit avoir

$$(u_0f'_u+v_0f'_v+w_0f'_w+r_0f'_r)^2-4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0)=0,$$

comme on l'a d'ailleurs déjà obtenu au numéro 86.

Cette équation représente une conique, dont on discutera plus loin la nature.

On peut remarquer tout de suite que si le plan donné est tangent, c'est-à-dire si $f(u_0, v_0, w_0, r_0)=0$, l'équation se réduit à

$$(u_0f'_u+v_0f'_v+w_0f'_w+r_0f'_r)^2=0\,;$$

elle représente un point double, qui est le point de contact du plan tangent.

Ce résultat était à prévoir, car le plan coupe la surface suivant deux droites, et l'équation tangentielle d'une pareille section est la même que l'équation du point de rencontre de ces deux droites, ce point étant compté deux fois.

Si $f(u, v, w, r)=0$ représente une conique, l'équation précédente représente les deux points de rencontre du plan et de la conique.

103. La condition

$$(u_0f'_u+v_0f'_v+w_0f'_w+r_0f'_r)^2-4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0)=0$$

exprime que la droite intersection des deux plans $P(u, v, w, r)$ et $P_0(u_0, v_0, w_0, r_0)$ est tangente à la quadrique.

Cette relation peut se mettre sous une autre forme en fonction des coefficients de l'équation ponctuelle de la surface,

$$\varphi(x, y, z, t)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cxt$$
$$+2C'yt+2C''zt+Dt^2=0.$$

Nous écrirons simplement que le plan tangent à la surface en un point commun aux deux plans contient la droite intersection de ces deux plans.

Si x, y, z, t désignent les coordonnées d'un point commun aux deux plans, on a

$$X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z + T\varphi'_t \equiv 2\lambda(uX + vY + wZ + rT) + 2\lambda'(u_0X + v_0Y + w_0Z + r_0T),$$

d'où l'on tire, en égalant les coefficients de X, Y, Z, T,

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + Ct - \lambda u - \lambda' u_0 &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C't - \lambda v - \lambda' v_0 &= 0, \\ B'x + By + A''z + C''t - \lambda w - \lambda' w_0 &= 0, \\ Cx + C'y + C''z + Dt - \lambda r - \lambda' r_0 &= 0. \end{aligned}$$

On a aussi les conditions

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + rt &= 0, \\ u_0x + v_0y + w_0z + r_0t &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant x, y, z, t, λ, λ' entre ces équations, on a

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u & u_0 \\ B'' & A' & B & C' & v & v_0 \\ B' & B & A'' & C'' & w & w_0 \\ C & C' & C'' & D & r & r_0 \\ u & v & w & r & 0 & 0 \\ u_0 & v_0 & w_0 & r_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour établir l'identité des deux conditions, multiplions les éléments des quatre premières colonnes du déterminant respectivement par $\frac{1}{2}f'_u$, $\frac{1}{2}f'_v$, $\frac{1}{2}f'_w$, $\frac{1}{2}f'_r$, et ajoutons ces produits aux éléments de la cinquième colonne, après avoir multiplié ces derniers par $-\Delta$, Δ désignant le discriminant de la fonction $f(u, v, w, r)$.

Les quatre premiers éléments de la cinquième colonne sont alors nuls, car on a visiblement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Af'_u + B''f'_v + B'f'_w + Cf'_r) &= \Delta u, \\ \frac{1}{2}(B''f'_u + A'f'_v + Bf'_w + C'f'_r) &= \Delta v, \\ \frac{1}{2}(B'f'_u + Bf'_v + A''f'_w + C''f'_r) &= \Delta w, \\ \frac{1}{2}(Cf'_u + C'f'_v + C''f'_w + Df'_r) &= \Delta r. \end{aligned}$$

De même, multiplions les éléments des quatre premières colonnes respectivement par $\frac{1}{2}f'_{u_0}$, $\frac{1}{2}f'_{v_0}$, $\frac{1}{2}f'_{w_0}$, $\frac{1}{2}f'_{r_0}$ et ajoutons

Hosted by Google

ces produits aux éléments de la sixième colonne multipliés par $-\Delta$.

Si l'on pose

$$H = uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} = u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w + r_0 f'_r,$$

la relation s'écrit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & 0 & 0 \\ B'' & A' & B & C' & 0 & 0 \\ B' & B & A'' & C'' & 0 & 0 \\ C & C' & C'' & D & 0 & 0 \\ u & v & w & r & f(u, v, w, r) & \frac{1}{2}H \\ u_0 & v_0 & w_0 & r_0 & \frac{1}{2}H & f(u_0, v_0, w_0, r_0) \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f(u, v, w, r) & \frac{1}{2}H \\ \frac{1}{2}H & f(u_0, v_0, w_0, r_0) \end{vmatrix} = 0,$$

et en supprimant le premier déterminant, qui est égal à Δ^3, on obtient précisément la condition

$$(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2 - 4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0.$$

Corrélativement, la condition pour que les deux points (x, y, z, t), (x_0, y_0, z_0, t_0) soient situés sur une tangente à la quadrique, ou encore l'équation du cône circonscrit de sommet (x_0, y_0, z_0, t_0) peut s'écrire indifféremment

$$(x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0} + t\varphi'_{t_0})^2 - 4\varphi(x, y, z, t)\varphi(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & x & x_0 \\ b'' & a' & b & c' & y & y_0 \\ b' & b & a'' & c'' & z & z_0 \\ c & c' & c'' & d & t & t_0 \\ x & y & z & t & 0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & t_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation a été obtenue directement au numéro 90.

104. Plans tangents en tous les points d'une section plane. — Il suffira d'écrire que le point de contact d'un plan tangent est situé dans le plan sécant donné.

Hosted by Google

On aura donc pour déterminer ces plans tangents les deux équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w + r_0 f'_r = 0\,;$$

elles admettent une infinité de solutions.

Si l'on y considère u, v, w, r comme des coordonnées courantes, ces équations représentent une surface développable qu'on appelle la *développable circonscrite* en tous les points de la section plane.

Si la surface donnée est de m^e classe, les équations écrites plus haut sont de degrés m et $m - 1$, la développable circonscrite est de classe $m(m - 1)$.

Dans le cas particulier où le plan est à l'infini, la développable circonscrite correspondante est la *développable asymptote* ; ses équations sont

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$f'_r = 0.$$

Si la surface est de deuxième classe, la développable circonscrite est un cône qui a pour sommet le point

$$(f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}, f'_{r_0}),$$

car la deuxième équation peut s'écrire

$$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} + r f'_{r_0} = 0.$$

On retrouve ainsi une propriété bien connue des quadriques : Les plans tangents en tous les points d'une section plane passent par un même point ; ce point est appelé le pôle du plan ; c'est le sommet du cône circonscrit à la surface le long de la section plane considérée.

Si le plan est à l'infini, le cône circonscrit est le cône asymptote ; ses équations sont

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$f'_r = 0.$$

Cette seconde équation, $f'_r = 0$, est l'équation du pôle du plan de l'infini, c'est-à-dire l'équation du centre.

Il est utile de bien retenir le résultat qui suit : Si un plan

Hosted by Google

(u_0, v_0, w_0, r_0) est tangent à une *quadrique* ayant pour équation

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

l'équation du point de contact est

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} = 0.$$

Si le plan n'est pas tangent, cette dernière équation représente le pôle du plan. Les coordonnées de ce point sont $f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}, f'_{r_0}$, et son équation peut aussi s'écrire

$$u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w + r_0f'_r = 0.$$

105. Dans le cas où l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une courbe, un plan quelconque la coupe en un nombre limité de points ; les deux équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w + r_0f'_r = 0$$

admettent comme solutions les cordonnées de tous les plans qui passent par les tangentes à la courbe aux points considérés ; on peut dire alors que ces deux équations représentent un certain nombre de droites.

Si l'équation de la courbe est du deuxième degré, les équations

$$f(u, v, w, r) = 0, \qquad f'_r = 0$$

représentent les asymptotes de la conique.

106. Supposons maintenant que l'on ait à déterminer l'intersection d'un plan $P_0(u_0, v_0, w_0, r_0)$ avec une surface développable définie par les équations tangentielles

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$\varphi(u, v, w, r) = 0.$$

Pour qu'un plan $P(u, v, w, r)$ soit tangent à la section plane, il suffit que la droite intersection de P et de P_0 soit tangente à la surface, autrement dit que par cette droite on puisse mener un plan tangent à la surface. La droite touchera alors la sur-

Hosted by Google

face au point de rencontre de cette droite et de la génératrice de contact du plan tangent.

Un plan passant par l'intersection de P et de P_0 a pour coordonnées $u + \lambda u_0$, $v + \lambda v_0$, $w + \lambda w_0$, $r + \lambda r_0$; le plan sera tangent à la surface si l'on a

$$f(u + \lambda u_0, \quad v + \lambda v_0, \quad w + \lambda w_0, \quad r + \lambda r_0) = 0,$$
$$\varphi(u + \lambda u_0, \quad v + \lambda v_0, \quad w + \lambda w_0, \quad r + \lambda r_0) = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation cherchée.

Cette méthode a déjà été exposée au numéro 88 dans le cas particulier où la surface développable est un cône.

Si le plan donné est le plan des xy, on aura

$$u_0 = v_0 = r_0 = 0,$$

et on devra éliminer λ entre les équations

$$f(u, \quad v, \quad w + \lambda w_0, \quad r) = 0,$$
$$\varphi(u, \quad v, \quad w + \lambda w_0, \quad r) = 0;$$

cela revient à éliminer w entre les deux équations de la surface, comme nous l'avons vu au numéro 69.

Tout plan tangent touche la surface en tous les points d'une génératrice ; on peut donc considérer ce plan comme ayant son point de contact dans le plan sécant donné au point de rencontre avec la génératrice.

107. Intersection d'une surface et d'une droite.— Soit la surface

$$f(u, v, w, r) = 0$$

et une droite Δ définie par l'intersection de deux plans

$$P_1(u_1, v_1, w_1, r_1) \quad \text{et} \quad P_2(u_2, v_2, w_2, r_2).$$

Cherchons les plans tangents aux points de rencontre de la droite et de la surface.

Si u, v, w, r sont les coordonnées d'un de ces plans, on aura les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$u_1 f'_u + v_1 f'_v + w_1 f'_w + r_1 f'_r = 0,$$
$$u_2 f'_u + v_2 f'_v + w_2 f'_w + r_2 f'_r = 0,$$

Hosted by Google

ces deux dernières étant obtenues en écrivant que le point de contact du plan tangent est situé dans le plan P_1 et dans le plan P_2.

Les trois équations précédentes déterminent les plans tangents. Si la surface donnée est de classe m, les deux dernières équations sont de degré $m-1$, par suite le nombre des solutions sera $m(m-1)^2$.

Il résulte de là qu'une droite rencontre une surface non développable de classe m en $m(m-1)^2$ points, c'est-à-dire qu'en général le degré d'une surface de classe m est $m(m-1)^2$.

Ce nombre peut évidemment s'abaisser si la surface présente des plans tangents multiples, car les coordonnées de ces plans annulent f'_u, f'_v, f'_w, f'_r et par suite vérifient les trois équations précédentes, quelles que soient les coordonnées des plans P_1 et P_2. Ces solutions ne doivent pas être comptées dans l'évaluation du nombre de plans tangents aux points de rencontre de la surface et de la droite.

Si la surface est de deuxième classe, on aura deux solutions.

On peut obtenir aisément dans ce cas soit l'équation tangentielle de l'ensemble des points de rencontre, soit l'équation ponctuelle de l'ensemble des plans tangents.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ces questions dans l'étude particulière des quadriques.

108. Le problème est évidemment impossible si l'équation donnée,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

représente une courbe ; les trois équations du numéro précédent n'ont en général aucune solution.

109. Supposons maintenant que la surface donnée soit développable et admette pour équations tangentielles

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w, r) = 0.$$

Pour déterminer les plans tangents aux points de rencontre de la surface et d'une droite Δ, il suffira d'écrire que la génératrice d'un plan tangent rencontre la droite Δ.

Supposons la droite définie par deux de ses points,

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad \text{et} \quad (x_2, y_2, z_2, t_2).$$

La génératrice de contact d'un plan tangent (u, v, w, r) joint les deux points (f'_u, f'_v, f'_w, f'_r) et $(\varphi'_u, \varphi'_v, \varphi'_w, \varphi'_r)$. Ces quatre points devront être dans un même plan, ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w & f'_r \\ \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w & \varphi'_r \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En y joignant les deux équations de la surface, on a trois équations qui déterminent les plans tangents cherchés.

Si les deux équations de la surface sont de degrés m et n, la troisième est de degré $(m-1)(n-1)$; par conséquent le nombre des solutions est $mn(m-1)(n-1)$, c'est le degré de la surface.

110. Normales. — Nous supposerons les axes de coordonnées rectangulaires.

Soient u_0, v_0, w_0, r_0 les coordonnées d'un plan tangent à une surface ayant pour équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0;$$

la normale correspondante passera par le point de contact $(f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}, f'_{r_0})$ et aura pour paramètres directeurs u_0, v_0, w_0.

Il en résulte que ses coordonnées plückériennes seront

$$\lambda\alpha = u_0, \qquad \lambda l = \frac{v_0 f'_{w_0} - w_0 f'_{v_0}}{f'_{r_0}},$$

$$\lambda\beta = v_0, \qquad \lambda m = \frac{w_0 f'_{u_0} - u_0 f'_{w_0}}{f'_{r_0}},$$

$$\lambda\gamma = w_0, \qquad \lambda n = \frac{u_0 f'_{v_0} - v_0 f'_{u_0}}{f'_{r_0}},$$

Hosted by Google

avec la condition

$$f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0.$$

On voit ainsi que α, β, γ, l, m, n sont fonctions de deux paramètres indépendants ; il en résulte (28) que les normales constituent une congruence.

On aura deux équations pour définir cette congruence en éliminant u_0, v_0, w_0, r_0, λ entre les équations qui précèdent.

Le raisonnement subsiste dans le cas où l'équation donnée représente une courbe.

111. Supposons maintenant que la surface soit développable et ait pour équations tangentielles

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w, r) = 0 ;$$

un plan tangent (u_0, v_0, w_0, r_0) la touche suivant une génératrice ; il y aura une infinité de normales correspondantes, dont les pieds auront pour coordonnées

$$f'_{u_0} + \mu\varphi'_{u_0}, \qquad f'_{v_0} + \mu\varphi'_{v_0}, \qquad f'_{w_0} + \mu\varphi'_{w_0}, \qquad f'_{r_0} + \mu\varphi'_{r_0},$$

et les coordonnées plückériennes d'une de ces normales seront

$$\lambda\alpha = u_0, \qquad \lambda l = \frac{v_0(f'_{w_0} + \mu\varphi'_{w_0}) - w_0(f'_{v_0} + \mu\varphi'_{v_0})}{f'_{r_0} + \mu\varphi'_{r_0}},$$

$$\lambda\beta = v_0, \qquad \lambda m = \frac{w_0(f'_{u_0} + \mu\varphi'_{u_0}) - u_0(f'_{w_0} + \mu\varphi'_{w_0})}{f'_{r_0} + \mu\varphi'_{r_0}},$$

$$\lambda\gamma = w_0, \qquad \lambda n = \frac{u_0(f'_{v_0} + \mu\varphi'_{v_0}) - v_0(f'_{u_0} + \mu\varphi'_{u_0})}{f'_{r_0} + \mu\varphi'_{r_0}},$$

avec les conditions

$$f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0,$$
$$\varphi(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0.$$

Ces coordonnées de la normale sont encore fonctions de deux paramètres.

112. Exemple. — *Trouver les équations de la congruence formée par les normales à un cône de révolution.*

Hosted by Google

Supposons que le sommet du cône soit à l'origine, que son axe soit l'axe Oz, et désignons par θ le demi-angle au sommet.

Pour qu'un plan soit tangent au cône, il faut qu'il passe par l'origine et qu'il fasse un angle θ avec l'axe des z ; les équations tangentielles du cône seront donc

$$r = 0,$$
$$u^2 + v^2 - w^2 \operatorname{cotg}^2 \theta = 0.$$

Soient $u, v, w, 0$ les coordonnées d'un plan tangent ; les coordonnées d'un point de la génératrice correspondante sont u, v, $-w \operatorname{cotg}^2 \theta$, μ ; par suite les coordonnées de la normale en ce point sont

$$\lambda\alpha = u, \qquad \lambda l = \frac{-vw(1+\operatorname{cotg}^2\theta)}{\mu},$$
$$\lambda\beta = v, \qquad \lambda m = \frac{uw(1+\operatorname{cotg}^2\theta)}{\mu},$$
$$\lambda\gamma = w, \qquad \lambda n = 0,$$

avec les conditions

$$r = 0,$$
$$u^2 + v^2 - w^2 \operatorname{cotg}^2 \theta = 0.$$

En éliminant u, v, w, r, λ, μ entre ces équations, on obtient

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \theta = 0,$$
$$n = 0.$$

Toutes les autres relations qu'on peut obtenir se déduisent de celles-là en tenant compte de la condition $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$.

Ces relations sont faciles à interpréter géométriquement ; la première exprime que toutes les normales sont parallèles aux génératrices du cône supplémentaire du cône donné ; la deuxième exprime que toutes les normales rencontrent l'axe.

EXERCICES ET NOTES

1. *Trouver le lieu des points tels que les plans tangents menés de ces points à un cône de deuxième classe fassent un angle donné.*

Supposons que le cône ait pour sommet l'origine et soit rapporté à ses axes ; ses équations tangentielles seront

$$\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2 = 0, \qquad r = 0.$$

Si x, y, z désignent les coordonnées d'un point du lieu, les plans

Hosted by Google

tangents menés de ce point au cône seront déterminés en direction par les équations

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 0, \qquad (1)$$
$$ux + vy + wz = 0\,;$$

on devra avoir

$$\frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}} = \cos\theta,$$

u, v, w et u', v', w' désignant les solutions des équations (1).

2. *Trouver l'équation générale des surfaces de deuxième classe dont le contour apparent sur le plan des xy est un cercle.*

Cette équation est

$$(u\alpha + v\beta + r)^2 - R^2(u^2 + v^2) + w(Au + Bv + Cw + Dr) = 0,$$

car il faut qu'en faisant $w = 0$ dans cette équation, on obtienne l'équation tangentielle d'un cercle.

Si le discriminant du premier membre de l'équation est nul, l'équation représente les coniques qui se projettent sur le plan des xy suivant un cercle.

3. *Étant donnée une surface ou une courbe définie par son équation tangentielle, trouver l'équation de la figure symétrique par rapport à un point ou par rapport à un plan.*

4. *Étant données les équations tangentielles d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Ox,*

$$f(u, v, w, r) = 0, \qquad u = 0,$$

on demande de trouver l'équation de l'ensemble des plans tangents qu'on peut mener à ce cylindre parallèlement à une direction donnée.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'un de ces plans tangents, et α, β, γ les paramètres directeurs de la direction donnée.

Les quatre équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$u = 0,$$
$$ux + vy + wz + r = 0,$$
$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

doivent avoir un système de solutions communes ; des trois dernières on tire

$$\frac{v}{\gamma} = \frac{w}{-\beta} = \frac{r}{\beta z - \gamma y}, \qquad u = 0,$$

et en portant ces valeurs dans la première, on a l'équation cherchée,

$$f(0,\ \gamma,\ -\beta,\ \beta z - \gamma y) = 0.$$

Hosted by Google

5. *Trouver l'équation tangentielle de la courbe de contact du cône circonscrit de sommet (x, y, z) à l'ellipsoïde*

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0.$$

En faisant $c = 0$ *dans l'équation obtenue, on doit retrouver l'ellipse*

$$a^2u^2 + b^2v^2 - r^2 = 0.$$

6. Soit l'équation d'une quadrique

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + \cdots + dr^2 = 0\,;$$

nous allons démontrer que la relation

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & x_1 & x_2 & x_3 \\ b'' & a' & b & c' & y_1 & y_2 & y_3 \\ b' & b & a'' & c'' & z_1 & z_2 & z_3 \\ c & c' & c'' & d & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

exprime que le plan des trois points

$$A_1(x_1, y_1, z_1, t_1), \qquad A_2(x_2, y_2, z_2, t_2), \qquad A_3(x_3, y_3, z_3, t_3)$$

est tangent à la quadrique.

En effet, soient u, v, w, r les coordonnées du plan de ces trois points ; on devra avoir les conditions

$$\begin{gathered} ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1 = 0, \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + rt_2 = 0, \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + rt_3 = 0, \\ f(u, v, w, r) = 0. \end{gathered}$$

Le point de contact de ce plan a pour équation

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w + Rf'_r = 0,$$

et comme ce point est dans le plan $A_1A_2A_3$, on a

$$\begin{aligned} Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w + Rf'_r \equiv {} & 2\lambda_1(Ux_1 + Vy_1 + Wz_1 + Rt_1) \\ & + 2\lambda_2(Ux_2 + Vy_2 + Wz_2 + Rt_2) + 2\lambda_3(Ux_3 + Vy_3 + Wz_3 + Rt_3). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} au + b''v + b'w + cr - \lambda_1x_1 - \lambda_2x_2 - \lambda_3x_3 &= 0, \\ b''u + a'v + bw + c'r - \lambda_1y_1 - \lambda_2y_2 - \lambda_3y_3 &= 0, \\ b'u + bv + a''w + c''r - \lambda_1z_1 - \lambda_2z_2 - \lambda_3z_3 &= 0, \\ cu + c'v + c''w + dr - \lambda_1t_1 - \lambda_2t_2 - \lambda_3t_3 &= 0, \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1 &= 0, \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + rt_2 &= 0, \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + rt_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Hosted by Google

Il est inutile d'écrire la relation

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

qui se déduit des précédentes.

En éliminant u, v, w, r, λ_1, λ_2, λ_3 entre les équations (2), on a la relation (1).

Si on y considère x_1, y_1, z_1, t_1 comme coordonnées courantes, cette relation est l'équation de l'ensemble des plans tangents menés à la quadrique par la droite A_2A_3.

Corrélativement, étant donnée l'équation ponctuelle d'une quadrique, on pourrait obtenir sous une forme analogue la condition pour que le point de rencontre de trois plans soit sur la quadrique.

On en déduirait l'équation tangentielle des points de rencontre d'une droite et de cette quadrique.

Hosted by Google

CHAPITRE V

CLASSIFICATION DES QUADRIQUES

113. L'équation générale des surfaces de deuxième classe est

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv$$
$$+ 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Le discriminant du premier membre est

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par des grandes lettres A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″, D les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement de Δ.

On a par exemple

$$A = \begin{vmatrix} a' & b & c' \\ b & a'' & c'' \\ c' & c'' & d \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} a & b'' & c \\ b' & b & c'' \\ c & c' & d \end{vmatrix} \ldots \text{ etc,}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix};$$

Hosted by Google

D est le discriminant de la forme

$$g(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv.$$

On peut développer aisément le déterminant Δ, soit en appliquant la règle de Laplace, ce qui sera surtout commode quand il y aura des éléments nuls, soit en écrivant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & 0 \\ b'' & a' & b & 0 \\ b' & b & a'' & 0 \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & 0 \end{vmatrix}.$$

Le premier des déterminants du second membre est égal à Dd; quant au second, sa valeur a été donnée en géométrie plane; si on y considère c, c', c'' comme les coordonnées homogènes d'un point d'un plan, ce déterminant est égal au premier membre de l'équation ponctuelle de la conique qui aurait pour équation tangentielle $g(u, v, w) = 0$.

On aura donc

$$\Delta = Dd - (a'a'' - b^2)c^2 - (a''a - b'^2)c'^2 - (aa' - b''^2)c''^2 \\ - 2(b'b'' - ab)c'c'' - 2(b''b - a'b')c''c - 2(bb' - a''b'')cc'.$$

Rappelons encore que si $\Delta \neq 0$, l'équation ponctuelle de la quadrique est

$$\varphi(x, y, z, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0,$$

et l'on a

$$\varphi(x, y, z, t) \equiv - \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & x \\ b'' & a' & b & c' & y \\ b' & b & a'' & c'' & z \\ c & c' & c'' & d & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix}.$$

114. Le discriminant de la fonction $\varphi(x, y, z, t)$ est le déterminant adjoint de Δ, nous le désignerons par Δ'; on a

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Si l'on multiplie Δ par Δ', le produit s'écrit

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^4,$$

d'où

$$\Delta' = \Delta^3.$$

Cette démonstration suppose $\Delta \neq 0$; le résultat subsiste évidemment si Δ est nul.

115. Entre les mineurs des déterminants Δ et Δ' il existe des relations fort importantes, bien connues, et que nous allons rappeler en considérant un déterminant quelconque

$$H = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

et son déterminant adjoint

$$H' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Soit h' un mineur quelconque de degré p du déterminant H'; considérons le mineur h de degré $n-p$ du déterminant H obtenu en supprimant dans H les lignes et les colonnes de même rang que celles qui ont été conservées dans H' pour former h'; nous dirons que h et h' sont des mineurs complémentaires.

Nous allons montrer que l'on a

$$h' = \pm hH^{p-1}.$$

Supposons d'abord que l'on ait

$$h' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^p \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_p^1 & A_p^2 & \dots & A_p^p \end{vmatrix};$$

on peut l'écrire

$$h' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^p & A_1^{p+1} & A_1^{p+2} & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^p & A_2^{p+1} & A_2^{p+2} & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_p^1 & A_p^2 & \dots & A_p^p & A_p^{p+1} & A_p^{p+2} & \dots & A_p^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions ce déterminant par H ; on aura

$$Hh' = \begin{vmatrix} H & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^{p+1} & a_2^{p+1} & \dots & a_p^{p+1} & a_{p+1}^{p+1} & a_{p+2}^{p+1} & \dots & a_n^{p+1} \\ a_1^{p+2} & a_2^{p+2} & \dots & a_p^{p+2} & a_{p+1}^{p+2} & a_{p+2}^{p+2} & \dots & a_n^{p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_p^n & a_{p+1}^n & a_{p+2}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

ce qui peut s'écrire

$$Hh' = \begin{vmatrix} H & 0 & . & . & 0 \\ 0 & H & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & & H \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{p+1}^{p+1} & a_{p+2}^{p+1} & \dots & a_n^{p+1} \\ a_{p+1}^{p+2} & a_{p+2}^{p+2} & \dots & a_n^{p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1}^n & a_{p+2}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Hosted by Google

Or le premier déterminant est égal à H^p, le second est précisément le mineur complémentaire de h' ; on aura donc

$$Hh' = H^p h,$$

c'est-à-dire

$$h' = hH^{p-1}.$$

Supposons maintenant que le mineur h' soit obtenu en prenant p lignes et p colonnes quelconques dans le déterminant H' ; on pourra amener les éléments de ce mineur à occuper les p premières lignes et les p premières colonnes.

On transformera ce mineur comme plus haut en un déterminant de degré n, lequel sera multiplié par le déterminant H, où l'on aura déplacé d'une façon semblable les éléments des lignes et des colonnes, et on aura la relation

$$h' = \pm hH^{p-1},$$

en prenant le signe + ou le signe —, selon que pour amener les éléments de h' à occuper les p premières lignes et les p premières colonnes on a fait un nombre pair ou un nombre impair d'échanges de deux lignes ou de deux colonnes.

116. Appliquons ce théorème au déterminant Δ. Prenons d'abord les mineurs du troisième degré du déterminant Δ'.

On aura

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = \Delta^2 d, \qquad \begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D \end{vmatrix} = \Delta^2 a,$$

$$\begin{vmatrix} B'' & B & C' \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & D \end{vmatrix} = -\Delta^2 b'' \quad \ldots \quad \text{etc.};$$

on voit ainsi que les coefficients des éléments dans le déterminant Δ' sont proportionnels aux éléments correspondants du déterminant Δ ; c'est ce que nous avions déjà établi au numéro 53.

Prenons maintenant les mineurs du deuxième degré de Δ'. En appliquant le théorème qui précède, on obtient vingt et une relations correspondantes aux vingt et un mineurs de Δ' :

$$A'A'' - B^2 = \Delta(ad - c^2), \qquad AD - C^2 = \Delta(a'a'' - b^2),$$
$$A''A - B'^2 = \Delta(a'd - c'^2), \qquad A'D - C'^2 = \Delta(a''a - b'^2),$$
$$AA' - B''^2 = \Delta(a''d - c''^2), \qquad A''D - C''^2 = \Delta(aa' - b''^2),$$

$$B'B'' - AB = \Delta(bd - c'c''), \qquad BD - C'C'' = \Delta(b'b'' - ab),$$
$$B''B - A'B' = \Delta(b'd - c''c), \qquad B'D - C''C = \Delta(b''b - a'b'),$$
$$BB' - A''B'' = \Delta(b''d - cc'), \qquad B''D - CC' = \Delta(bb' - a''b''),$$

$$A'C'' - BC' = -\Delta(ac'' - b'c), \qquad AC'' - B'C = -\Delta(a'c'' - bc'),$$
$$A''C - B'C'' = -\Delta(a'c - b''c'), \qquad A'C - B''C' = -\Delta(a''c - b'c''),$$
$$AC' - B''C = -\Delta(a''c' - bc''), \qquad A''C' - BC'' = -\Delta(ac' - b''c),$$

$$B'C' - B''C'' = \Delta(b'c' - b''c''),$$
$$B''C'' - BC = \Delta(b''c'' - bc),$$
$$BC - B'C' = \Delta(bc - b'c').$$

117. Pour établir la nature de la quadrique représentée par l'équation générale écrite plus haut, nous décomposerons le premier membre de l'équation en carrés, et nous changerons les axes de coordonnées en nous servant des formules de transformation (1) établies au numéro 50.

Nous rappellerons que le carré de la distance d'un point (x, y, z) à l'origine est

$$\psi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos yOz + 2zx\cos zOx + 2xy\cos xOy,$$

et que par suite les coordonnées du point directeur d'une direction joignant l'origine à un point (α, β, γ) sont

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}}, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}}, \qquad \frac{\gamma}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}}.$$

118. Premier cas. $d \neq 0$.

La quadrique n'est pas tangente au plan de l'infini.

On peut écrire

$$f(u, v, w, r) = \frac{1}{d}(dr + cu + c'v + c''w)^2 + \varphi(u, v, w),$$

$\varphi(u, v, w)$ étant une fonction du deuxième degré par rapport à u, v, w.

1° Supposons $\Delta \neq 0$.

$f(u, v, w, r)$ doit être décomposé en une somme de quatre carrés indépendants ; il en résulte que $\varphi(u, v, w)$ sera égal à une somme de trois carrés. On pourra écrire

$$f(u, v, w, r) = \frac{1}{d}(dr + cu + c'v + c''w) + h(\alpha u + \beta v + \gamma w)^2 \\ + h'(\alpha' u + \beta' v + \gamma' w)^2 + h''(\alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w)^2,$$

aucun des nombres h, h', h'' n'étant nul.

Faisons alors la transformation de coordonnées indiquée par les formules suivantes :

$$u' = \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}},$$

$$v' = \frac{\alpha' u + \beta' v + \gamma' w}{\sqrt{\psi(\alpha', \beta', \gamma')}},$$

$$w' = \frac{\alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w}{\sqrt{\psi(\alpha'', \beta'', \gamma'')}},$$

$$r' = \frac{1}{d}(dr + cu + c'v + c''w);$$

cette transformation consiste à prendre pour origine le point qui a pour coordonnées cartésiennes $\frac{c}{d}$, $\frac{c'}{d}$, $\frac{c''}{d}$, et pour directions d'axes les directions qui ont pour paramètres directeurs (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

L'équation de la quadrique devient

$$dr'^2 + hm^2u'^2 + h'm'^2v'^2 + h''m''^2w'^2 = 0,$$

en posant $m^2 = \psi(\alpha, \beta, \gamma)$, $m'^2 = \psi(\alpha', \beta', \gamma') \ldots$ etc.

L'équation ponctuelle correspondante sera (54)

$$\frac{x'^2}{hm^2} + \frac{y'^2}{h'm'^2} + \frac{z'^2}{h''m''^2} + \frac{1}{d} = 0;$$

et cette équation représente une quadrique à centre, un ellipsoïde ou un hyperboloïde rapporté à trois diamètres conjugués.

Hosted by Google

La nature de la quadrique sera nettement indiquée par les signes des nombres h, h', h'' et d.

2° Supposons $\Delta = 0$, et un mineur du premier ordre différent de zéro.

Dans ce cas $f(u, v, w, r)$ est décomposable en une somme de trois carrés indépendants ; il en résulte que $\varphi(u, v, w)$ sera égal à une somme de deux carrés ; on aura alors

$$f(u, v, w, r) = \frac{1}{d}(dr + cu + c'v + c''w)^2 + h(\alpha u + \beta v + \gamma w)^2 + h'(\alpha' u + \beta' v + \gamma' w)^2.$$

On fera la même transformation que celle indiquée plus haut, à cette différence près que α'', β'', γ'' pourront être arbitrairement choisis.

L'équation de la surface devient

$$dr'^2 + hm^2u'^2 + h'm'^2v'^2 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une courbe située dans le plan des $x'y'$, et dont les équations ponctuelles sont

$$\frac{x'^2}{hm^2} + \frac{y'^2}{h'm'^2} + \frac{1}{d} = 0,$$
$$z' = 0.$$

Cette courbe est une ellipse ou une hyperbole.

3° Supposons $\Delta = 0$, tous les mineurs du premier ordre nuls, et un mineur du deuxième ordre différent de zéro.

Dans ce cas, $\varphi(u, v, w)$ sera carré parfait, $f(u, v, w, r)$ se décomposera en un produit de deux facteurs ; il en résulte que l'équation représente un ensemble de deux points situés tous deux à distance finie.

4° Si $\Delta = 0$ et si tous les mineurs du premier et du second ordre sont nuls, $f(u, v, w, r)$ est carré parfait et l'équation donnée représente un point double à distance finie.

119. Deuxième cas. $d = 0$.

La quadrique est tangente au plan de l'infini.

Nous supposerons d'abord que les trois nombres c, c' et c'' ne sont pas nuls en même temps.

Hosted by Google

On a
$$f(u, v, w, r) \equiv g(u, v, w) + 2r(cu + c'v + c''w),$$
en posant
$$g(u, v, w) \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv.$$

Si $c \neq 0$, on peut diviser $g(u, v, w)$ par $cu + c'v + c''w$ en ordonnant par rapport à u ; on obtiendra une identité de la forme
$$g(u, v, w) \equiv (cu + c'v + c''w)(\alpha u + \beta v + \gamma w) + \varphi(v, w),$$

$\varphi(v, w)$ étant une fonction homogène du deuxième degré ne renfermant plus que v et w.

On aura alors
$$f(u, v, w, r) \equiv (cu + c'v + c''w)(\alpha u + \beta v + \gamma w + 2r) + \varphi(v, w).$$

1° Supposons $\Delta \neq 0$.

$f(u, v, w, r)$ doit être décomposé en une somme de quatre carrés ; le premier produit donnant deux carrés, le terme suivant $\varphi(v, w)$ sera décomposable en une somme de deux carrés, et on pourra écrire
$$f(u, v, w, r) \equiv (cu + c'v + c''w)(\alpha u + \beta v + \gamma w + 2r) \\ + h(pv + qw)^2 + h'(p'v + q'w)^2.$$

Faisons la transformation de coordonnées indiquée par les formules suivantes :
$$u' = \frac{cu + c'v + c''w}{\sqrt{\psi(c, c', c'')}},$$
$$v' = \frac{pv + qw}{\sqrt{\psi(0, p, q)}},$$
$$w' = \frac{p'v + q'w}{\sqrt{\psi(0, p', q')}},$$
$$r' = \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w + 2r}{2};$$

l'équation devient
$$hm^2v'^2 + h'm'^2w'^2 + 2ku'r' = 0,$$
en posant

$m^2 = \psi(0, p, q), \quad m'^2 = \psi(0, p', q')$ et $k = \sqrt{\psi(c, c', c'')}$.

L'équation ponctuelle correspondante est

$$\frac{y'^2}{hm^2} + \frac{z'^2}{h'm'^2} + \frac{2x'}{k} = 0.$$

Elle représente un paraboloïde elliptique ou hyperbolique selon que h et h' sont de même signe ou de signes contraires. L'axe est parallèle à $O'x'$.

2° Supposons $\Delta = 0$, et un mineur du premier ordre différent de zéro.

$\varphi(v, w)$ est alors carré parfait, et l'on a

$$f(u, v, w, r) \equiv (cu + c'v + c''w)(\alpha u + \beta v + \gamma w + 2r) + h(pv + qw)^2.$$

On fera la même transformation que plus haut, en choisissant p' et q' arbitrairement ; on obtiendra l'équation

$$hm^2v'^2 + 2ku'r' = 0.$$

Cette équation représente une conique dans le plan des $x'y'$; ses équations ponctuelles sont

$$\frac{y'^2}{hm^2} + \frac{2x'}{k} = 0,$$

$$z' = 0 ;$$

c'est une parabole dont l'axe est parallèle à $O'x'$.

3° Supposons $\Delta = 0$, tous les mineurs du premier ordre nuls et un mineur du deuxième ordre différent de zéro.

$\varphi(v, w)$ est identiquement nul, et l'équation représente deux points dont l'un est à l'infini.

On ne peut supposer ici que tous les mineurs du deuxième ordre soient nuls, car alors $f(u, v, w, r)$ serait carré parfait, ce qui est impossible.

120. Troisième cas. $c = c' = c'' = d = 0$.

L'équation se réduit à

$$g(u, v, w) \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

Le discriminant du premier membre est

$$D = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}.$$

1° $D \neq 0$.

L'équation représente une conique à l'infini ; en adjoignant à son équation une équation linéaire représentant un point, on obtient les équations tangentielles d'un véritable cône, ayant son sommet au point choisi.

2° $D = 0$ et un mineur du premier membre différent de zéro.

$g(u, v, w)$ est décomposable en une somme de deux carrés, et par suite en un produit de deux facteurs.

L'équation représente deux points distincts, tous deux à l'infini.

3° $D = 0$ et tous les mineurs du premier ordre nuls.

$g(u, v, w)$ est carré parfait.

L'équation représente alors un point double à l'infini.

121. On peut remarquer que dans le cas où l'équation représente une quadrique ou une conique à centre, ou deux points à distance finie, le centre de la figure a pour coordonnées homogènes c, c', c'', d.

Dans le cas du paraboloïde ou de la parabole, les paramètres directeurs de l'axe sont c, c', c''.

Ces résultats seront établis d'une autre manière dans le chapitre suivant.

122. On peut résumer toute cette discussion de la manière suivante.

$$\left.\begin{array}{c} \Delta \neq 0, \\ \text{véritable quadrique} \end{array}\right\} \begin{array}{ll} d \neq 0 & \text{ellipsoïde ou hyperboloïde.} \\ d = 0 & \text{paraboloïde.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Delta = 0, \\ \text{un mineur du 1}^{\text{er}}\text{ ordre} \neq 0 \\ \text{véritable conique} \end{array}\right\} \begin{array}{ll} d \neq 0 & \text{ellipse ou hyperbole.} \\ d = 0 & \text{parabole.} \\ d = c = c' = c'' = 0 & \text{conique à l'infini.} \end{array}$$

Hosted by Google

$\Delta = 0$, tous les mineurs du 1er ordre nuls, un mineur du 2e ordre $\neq 0$ — deux points distincts	$d \neq 0$ deux points à distance finie. $d = 0$ deux points dont l'un à l'infini. $d = c = c' = c'' = 0$ deux points à l'infini.
$\Delta = 0$, tous les mineurs du 2e ordre nuls — un point double	$d \neq 0$ point double à distance finie. $d = 0$ point double à l'infini.

Mais, dans la pratique, il est inutile d'avoir recours à ce tableau, il suffit de faire la décomposition en carrés comme il a été indiqué plus haut.

123. Exemples.

1° *Reconnaître la nature de la surface*

$$2u^2 - 3v^2 + w^2 + 2vw - 2uw - 2uv - 2ur + 4wr + r^2 = 0.$$

Comme le coefficient de r^2 est différent de zéro, je place dans un premier carré tous les termes renfermant r; l'équation peut s'écrire

$$(r - u + 2w)^2 - (u - 2w)^2 + 2u^2 - 3v^2 + w^2 + 2vw - 2uw - 2uv = 0$$

ou

$$(r - u + 2w)^2 + u^2 - 2uv + 2uw - 3v^2 - 3w^2 + 2vw = 0.$$

On a ensuite

$$(r - u + 2w)^2 + (u - v + w)^2 - (v - w)^2 - 3v^2 - 3w^2 + 2vw = 0,$$

$$(r - u + 2w)^2 + (u - v + w)^2 - 4v^2 + 4vw - 4w^2 = 0$$

ou enfin

$$(r - u + 2w)^2 + (u - v + w)^2 - (2v - w)^2 - 3w^2 = 0.$$

On reconnait alors que cette équation représente un hyperboloïde à une nappe.

Le centre a pour coordonnées $-1, 0, 2$, et on a en évidence trois directions conjuguées.

2° *Reconnaître la nature de la surface*

$$2u^2 - 4v^2 - 5w^2 - uw - uv + ur + vr - wr = 0.$$

Comme il n'y a pas de terme en r^2, je divise l'ensemble des termes du deuxième degré en u, v, w par $u + v - w$, en ordonnant par rapport à u; on obtient immédiatement

$$2u^2 - u(w + v) - 4v^2 - 5w^2 \equiv (2u - 3v + w)(u + v - w) - (v + 2w)^2,$$

Hosted by Google

et l'équation s'écrit

$$(2u - 3v + w + r)(u + v - w) - (v + 2w)^2 = 0.$$

Faisons la transformation de coordonnées suivante :

$$u' = \frac{u + v - w}{m}, \qquad m = \sqrt{\psi(1, 1, -1)},$$

$$v' = \frac{v + 2w}{m'}, \qquad m' = \sqrt{\psi(0, 1, 2)},$$

$$w' = \frac{\lambda v + \mu w}{m''}, \qquad m'' = \sqrt{\psi(0, \lambda, \mu)},$$

$$r' = 2u - 3v + w + r.$$

L'équation devient

$$mu'r' - m'^2 v'^2 = 0;$$

elle représente une parabole dans le plan des $x'y'$.

124. Exercice. — *On donne deux sphères* S *et* S' *et un point* A. *On mène une sphère quelconque* Σ *ayant son centre sur* S' *et passant par le point* A ; *on demande l'enveloppe du plan radical des deux sphères* S *et* Σ. *Cette enveloppe est une quadrique dont on discutera la nature.*

Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$(x - d)^2 + y^2 + z^2 - R'^2 = 0$$

les équations des sphères S et S', et α, β, γ les coordonnées du point A.

Si

$$ux + vy + wz + r = 0$$

désigne l'équation du plan radical de la sphère S et de la sphère Σ, cette dernière aura une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - \lambda(ux + vy + wz + r) = 0.$$

Écrivons qu'elle passe par le point A, et que son centre est sur la sphère S' ; on aura les deux équations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 - \lambda(u\alpha + v\beta + w\gamma + r) = 0,$$

$$(\lambda u - 2d)^2 + \lambda^2 v^2 + \lambda^2 w^2 - 4R'^2 = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe demandée.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = H, \qquad u\alpha + v\beta + w\gamma + r = P;$$

on obtient

$$(u^2 + v^2 + w^2)H^2 - 4du HP + 4P^2(d^2 - R'^2) = 0.$$

Premier cas. $d^2 - R'^2 \neq 0$.

L'équation peut s'écrire

$$4P^2 - \frac{4duHP}{d^2 - R'^2} + \frac{(u^2+v^2+w^2)H^2}{d^2 - R'^2} = 0$$

ou

$$\left(2P - \frac{dHu}{d^2 - R'^2}\right)^2 - \frac{d^2H^2u^2}{(d^2 - R'^2)^2} + \frac{(u^2+v^2+w^2)H^2}{d^2 - R'^2} = 0$$

ou enfin

$$\left(2P - \frac{dHu}{d^2 - R'^2}\right)^2 - \frac{u^2H^2R'^2}{(d^2 - R'^2)^2} + \frac{(v^2+w^2)H^2}{d^2 - R'^2} = 0.$$

L'enveloppe est alors une quadrique à centre, dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Le centre a pour équation

$$2P - \frac{dHu}{d^2 - R'^2} = 0,$$

c'est-à-dire pour coordonnées $\alpha - \frac{dH}{2(d^2 - R'^2)}$, β, γ. Si on transporte l'origine au centre, l'équation devient

$$4r^2 - \frac{u^2H^2R'^2}{(d^2 - R'^2)^2} + \frac{(v^2+w^2)H^2}{d^2 - R'^2} = 0.$$

Si $d^2 - R'^2 < 0$, la surface est un ellipsoïde réel. Si $d^2 - R'^2 > 0$, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Deuxième cas. $d^2 - R'^2 = 0$.

L'équation de l'enveloppe s'écrit

$$(u^2+v^2+w^2)H - 4duP = 0$$

ou encore

$$(v^2+w^2)H - 4du\left(u\alpha + v\beta + w\gamma + r - \frac{uH}{4d}\right) = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît l'équation d'un paraboloïde elliptique.

En résumé :

$d^2 - R'^2 < 0$, Ellipsoïde réel.

$d^2 - R'^2 = 0$, Paraboloïde elliptique.

$d^2 - R'^2 > 0$, Hyperboloïde à deux nappes.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que H était différent de zéro.

Si $H = 0$, l'enveloppe se réduit au point A, ce qui est évident *a priori*.

125. Cas où l'équation représente une conique. — Suppo-

Hosted by Google

sons que le déterminant Δ soit nul, et qu'un mineur du premier ordre soit différent de zéro.

Appliquons la méthode générale pour déterminer les équations ponctuelles correspondantes.

On doit éliminer u, v, w, r, λ entre les équations

$$\left.\begin{aligned} au + b''v + b'w + cr - \lambda x &= 0, \\ b''u + a'v + bw + c'r - \lambda y &= 0, \\ b'u + bv + a''w + c''r - \lambda z &= 0, \\ cu + c'v + c''w + dr - \lambda t &= 0, \\ ux + vy + wz + rt \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Multiplions les quatre premières équations respectivement par les coefficients des éléments de la première colonne de Δ ; on obtient, en remarquant que λ n'est pas nul,

$$Ax + B''y + B'z + Ct = 0 ;$$

on a de même

$$B''x + A'y + Bz + C't = 0,$$

$$B'x + By + A''z + C''t = 0,$$

$$Cx + C'y + C''z + Dt = 0.$$

Ces quatre équations représentent le plan de la conique ; elles ont donc leurs coefficients proportionnels ; il en résulte que tous les mineurs du second ordre du déterminant adjoint Δ' sont nuls, par suite la forme adjointe $\varphi(x, y, z, t)$ est carré parfait, et sa racine égalée à zéro donne l'équation du plan de la conique.

On voit également que les coordonnées du plan de la conique constituent l'unique système de solutions des équations

$$f'_u = 0, \qquad f'_v = 0, \qquad f'_w = 0, \qquad f'_r = 0.$$

On peut d'ailleurs déterminer ponctuellement cette conique en joignant à l'équation de son plan l'équation ponctuelle d'une quadrique qui la contient.

Supposons en effet que le mineur

$$D = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Résolvons les trois premières équations du système (1) par rapport à u, v, w et remplaçons dans les deux dernières ; on obtient les équations

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & cr - \lambda x \\ b'' & a' & b & c'r - \lambda y \\ b' & b & a'' & c''r - \lambda z \\ c & c' & c'' & dr - \lambda t \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & cr - \lambda x \\ b'' & a' & b & c'r - \lambda y \\ b' & b & a'' & c''r - \lambda z \\ x & y & z & rt \end{vmatrix} = 0.$$

On peut les écrire

$$- \lambda(Cx + C'y + C''z + Dt) = 0,$$

$$r(Cx + C'y + C''z + Dt) - \lambda \begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$Cx + C'y + C''z + Dt = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La première équation représente un plan, la deuxième représente un cône ayant pour sommet l'origine.

La conique est à l'intersection du plan et du cône.

Remarquons d'ailleurs que ce cône a pour équations tangen-

Hosted by Google

tielles (71)

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

$$r = 0\,;$$

Les plans tangents à ce cône sont les plans passant par l'origine et dont les coordonnées vérifient l'équation donnée

$$f(u, v, w, r) = 0.$$

126. Cas où l'équation représente deux points distincts. — Pour qu'il en soit ainsi, il faut que Δ soit nul ainsi que tous les mineurs du premier ordre.

On a alors

$$f(u, v, w, r) \equiv \mathrm{PP}',$$

$$\mathrm{P} = u\alpha + v\beta + w\gamma + r\delta, \qquad \mathrm{P}' = u\alpha' + v\beta' + w\gamma' + r\delta'.$$

On en déduit

$$f'_u = \alpha\mathrm{P}' + \alpha'\mathrm{P},$$

$$f'_v = \beta\mathrm{P}' + \beta'\mathrm{P},$$

$$f'_w = \gamma\mathrm{P}' + \gamma'\mathrm{P},$$

$$f'_r = \delta\mathrm{P}' + \delta'\mathrm{P}.$$

Il en résulte que les équations

$$f'_u = 0, \qquad f'_v = 0, \qquad f'_w = 0, \qquad f'_r = 0$$

ont une infinité de systèmes de solutions, qui sont les coordonnées des plans passant par les deux points.

On peut déterminer ces deux points en éliminant u, v, w, r, λ entre les équations (1) du numéro précédent.

Supposons pour cela que le mineur

$$\begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro ; on peut résoudre les deux premières équations par rapport à u et v, et en remplaçant dans les trois autres, on obtient

$$\begin{vmatrix} a & b'' & x \\ b'' & a' & y \\ b' & b & z \end{vmatrix} = 0,$$

Hosted by Google

$$\begin{vmatrix} a & b'' & x \\ b'' & a' & y \\ c & c' & t \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b'' & x \\ b'' & a' & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces trois équations déterminent les coordonnées des deux points.

127. Enfin dans le cas où l'équation représente un point double, $f(u, v, w, r)$ est carré parfait, les dérivées partielles sont proportionnelles, et chacune d'elles égalée à zéro est l'équation du point double.

128. Application. — Considérons l'équation

$$F(u, v, w, r) = (uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2$$
$$- 4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0, \quad (1)$$

qui représente l'intersection de la surface

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots = 0 \qquad (2)$$

et du plan (u_0, v_0, w_0, r_0).

Nous nous proposons de démontrer analytiquement que si l'équation (2) représente une véritable quadrique, l'équation (1) représente une conique ; si l'équation (2) représente une conique, (1) représente deux points distincts ; si (2) représente deux points distincts, (1) représente un point double ; enfin si (2) représente un point double, le premier membre de l'équation (1) est identiquement nul.

Nous excluons, bien entendu, le cas où $f(u_0, v_0, w_0, r_0)$ est nul, car dans ce cas le plan est tangent, et l'équation (1) représente un point double qui est le point de contact.

On a

$$\frac{1}{2} F'_u = f'_{u_0}(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0}) - 2f'_u f(u_0, v_0, w_0, r_0),$$

$$\frac{1}{2} F'_v = f'_{v_0}(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0}) - 2f'_v f(u_0, v_0, w_0, r_0),$$

$$\frac{1}{2} F'_w = f'_{w_0}(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0}) - 2f'_w f(u_0, v_0, w_0, r_0),$$

$$\frac{1}{2}\,F'_r = f'_{r_0}(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0}) - 2f'_r f(u_0, v_0, w_0, r_0).$$

Si on égale ces quantités à zéro, on a des équations qui sont équivalentes aux suivantes :

$$\frac{f'_u}{f'_{u_0}} = \frac{f'_v}{f'_{v_0}} = \frac{f'_w}{f'_{w_0}} = \frac{f'_r}{f'_{r_0}} = -\lambda$$

ou

$$f'_u + \lambda f'_{u_0} = 0, \quad f'_v + \lambda f'_{v_0} = 0, \quad f'_w + \lambda f'_{w_0} = 0, \quad f'_r + \lambda f'_{r_0} = 0$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} &f'_u(u+\lambda u_0, \quad v+\lambda v_0, \quad w+\lambda w_0, \quad r+\lambda r_0) = 0,\\ &f'_v(\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ ) = 0,\\ &f'_w(\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ ) = 0,\\ &f'_r(\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ ) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Cela revient à dire que $u+\lambda u_0$, $v+\lambda v_0$, $w+\lambda w_0$, $r+\lambda r_0$ sont les coordonnées d'un plan tangent double de la surface (2).

1° Supposons que l'équation (2) représente une véritable quadrique.

Les dérivées partielles f'_u, f'_v, etc. ne peuvent être nulles que pour des valeurs toutes nulles de u, v, w, r.

Les équations (3) ne seront vérifiées que pour

$$u+\lambda u_0 = 0, \qquad v+\lambda v_0 = 0, \qquad w+\lambda w_0 = 0, \qquad r+\lambda r_0 = 0.$$

Il n'y a donc que les valeurs $-\lambda u_0$, $-\lambda v_0$, $-\lambda w_0$, $-\lambda r_0$ qui annulent F'_u, F'_v, F'_w, F'_r; on en conclut que l'équation (1) représente une conique située dans le plan (u_0, v_0, w_0, r_0).

2° Supposons que l'équation (2) représente une conique située dans un plan $P_1(u_1, v_1, w_1, r_1)$.

Les dérivées f'_u, f'_v, etc. ne s'annulent que pour des valeurs de u, v, etc. proportionnelles à u_1, v_1, etc.

Il en résulte que les solutions du système (3) sont

$$u+\lambda u_0 = \mu u_1, \quad v+\lambda v_0 = \mu v_1, \quad w+\lambda w_0 = \mu w_1, \quad r+\lambda r_0 = \mu r_1$$

ou

$$\begin{aligned} u &= -\lambda u_0 + \mu u_1,\\ v &= -\lambda v_0 + \mu v_1,\\ w &= -\lambda w_0 + \mu w_1,\\ r &= -\lambda r_0 + \mu r_1. \end{aligned}$$

Nous avons là les coordonnées des plans qui passent par l'intersection des deux plans P_0 et P_1.

Ces quantités annulant les dérivées F'_u, F'_v, etc., on en conclut

Hosted by Google

que l'équation (1) représente deux points situés sur l'intersection des plans P_0 et P_1.

3° Si l'équation (2) représente deux points distincts situés sur une droite intersection de deux plans $P_1(u_1, v_1, w_1, r_1)$ et $P_2(u_2, v_2, w_2, r_2)$, les dérivées f'_u, f'_v, etc. s'annuleront pour les valeurs

$$u = \mu u_1 + \nu u_2,$$
$$v = \mu v_1 + \nu v_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots ;$$

on en conclut que les solutions du système (3) seront

$$u + \lambda u_0 = \mu u_1 + \nu u_2,$$
$$v + \lambda v_0 = \mu v_1 + \nu v_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou

$$u = -\lambda u_0 + \mu u_1 + \nu u_2,$$
$$v = -\lambda v_0 + \mu v_1 + \nu v_2,$$
$$w = -\lambda w_0 + \mu w_1 + \nu w_2,$$
$$r = -\lambda r_0 + \mu r_1 + \nu r_2 ;$$

il en résulte que l'équation (1) représente un point double qui est à l'intersection des trois plans P_0, P_1, P_2.

4° Enfin, il est aisé de vérifier que si $f(u, v, w, r)$ est carré parfait, $F(u, v, w, r)$ est identiquement nul.

129. Plans tangents menés par l'origine. — On aura les coordonnées des plans tangents menés à une quadrique par l'origine en résolvant les deux équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$r = 0,$$

ou

$$g(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$
$$r = 0.$$

1° Supposons que le discriminant de $g(u, v, w)$ ne soit pas nul. Dans ce cas les plans tangents forment un cône, c'est le cône circonscrit à la surface ayant pour sommet l'origine. Suivant la réalité du cône et la nature de la surface, on peut déduire la position de l'origine par rapport à la surface.

Si l'équation représente une conique, c'est le cône s'appuyant sur cette conique et ayant pour sommet l'origine.

Hosted by Google

L'équation ne peut dans ce cas représenter deux points.

2° Supposons que le discriminant de $g(u, v, w)$ soit nul, c'est-à-dire que $g(u, v, w)$ soit décomposable en un produit de deux facteurs,

$$g(u, v, w) \equiv (u\alpha + v\beta + w\gamma)(u\alpha' + v\beta' + w\gamma').$$

Soient D et D′ les deux droites qui passent par l'origine et qui ont pour paramètres directeurs (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$.

On voit alors que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan passant par l'origine soit tangent est qu'il contienne l'une des droites D ou D′.

Dès lors, si la surface est une véritable quadrique, l'origine est sur la surface, et les droites D et D′ sont les génératrices qui passent en ce point. Si ces droites sont réelles, la surface est réglée (hyperboloïde à une nappe, ou paraboloïde hyperbolique) ; si les droites sont imaginaires, la surface est un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique.

Si l'équation représente une conique, l'origine sera dans le plan de cette conique, et les droites D et D′ seront les tangentes menées à la conique par l'origine.

Enfin l'équation peut représenter deux points distincts, les droites D et D′ passent par ces points.

3° Supposons que $g(u, v, w)$ soit carré parfait,

$$g(u, v, w) \equiv (u\alpha + v\beta + w\gamma)^2,$$

et désignons par D la droite qui passe par l'origine et qui a pour paramètres directeurs (α, β, γ).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan soit tangent est qu'il contienne la droite D.

Dans ce cas, l'équation ne peut représenter une véritable quadrique.

Si elle représente une conique, l'origine est sur la conique, et la droite D est la tangente à la conique en ce point.

Si l'équation représente deux points, l'origine doit être sur la droite qui joint ces deux points, et la droite D coïncide avec cette droite.

Hosted by Google

Enfin, si l'équation représente un point double, la droite D joint l'origine au point double.

On voit ainsi, qu'étant donnée l'équation d'une surface de deuxième classe, on peut avoir certains renseignements sur la nature de la surface représentée en examinant la fonction $g(u, v, w)$.

130. Pour avoir l'équation générale des quadriques contenant deux droites qui se coupent, on transportera l'origine des coordonnées au point de rencontre, puis en désignant par α, β, γ et α', β', γ' les paramètres directeurs des deux droites, on aura pour l'équation générale

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Ainsi l'équation générale des quadriques contenant Ox et Oy est

$$2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

L'équation générale des quadriques tangentes au plan des xy à l'origine est

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0\,;$$

en effet la fonction $g(u, v, w)$ doit être décomposable en un produit de facteurs qui, égalés séparément à zéro, représentent des points à l'infini dans le plan des xy.

Si le trinome

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv$$

a ses racines réelles, la surface est réglée ; sinon elle n'a pas de génératrices réelles.

131. Condition pour que l'équation tangentielle générale du deuxième degré représente une sphère.

Nous nous bornerons à examiner le cas où les axes de coordonnées sont rectangulaires.

L'équation tangentielle d'une sphère de centre (α, β, γ) et de rayon R s'obtient en écrivant que la distance du centre à un plan tangent est égale au rayon.

On a ainsi

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2 - \mathrm{R}^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Pour que l'équation générale du deuxième degré

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + \cdots = 0 \qquad (1)$$

représente une sphère, il faut que ces deux équations aient leurs coefficients proportionnels, c'est-à-dire qu'on ait l'identité

$$f(u, v, w, r) \equiv S\left[u^2 + v^2 + w^2 - \frac{(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2}{R^2}\right],$$

S désignant un nombre différent de zéro.

On peut encore écrire

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2) \equiv -\frac{S}{R^2}(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2.$$

On en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) représente une sphère est que l'expression

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2)$$

soit le carré d'une fonction linéaire de u, v, w, r.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que tous les mineurs du deuxième ordre du discriminant de cette forme soient nuls pour une même valeur de S. Mais on sait que ces conditions rentrent les unes dans les autres ; pour obtenir le nombre de conditions strictement indispensables, nous remarquerons que le coefficient de r^2, d, est différent de zéro, et nous ordonnerons la forme par rapport à r ; on a

$$dr^2 + 2r(cu + c'v + c''w) + (a - S)u^2 + (a' - S)v^2 + (a'' - S)w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv.$$

En écrivant que cette fonction est carré parfait, quelles que soient les valeurs de u, v, w, on obtient

$$(cu+c'v+c''w)^2 - d[(a-S)u^2+(a'-S)v^2+(a''-S)w^2+2bvw+2b'wu+2b''uv] \equiv 0,$$

ce qui donne

$$\begin{gathered}
c^2 - d(a - S) = 0,\\
c'^2 - d(a' - S) = 0,\\
c''^2 - d(a'' - S) = 0,\\
c'c'' - bd = 0,\\
c''c - b'd = 0,\\
cc' - b''d = 0.
\end{gathered}$$

Hosted by Google

En éliminant S, on a les cinq conditions suivantes :

$$ad - c^2 = a'd - c'^2 = a''d - c''^2 \neq 0,$$
$$c'c'' - bd = 0,$$
$$c''c - b'd = 0,$$
$$cc' - b''d = 0.$$

Supposons ces conditions remplies ; il est aisé d'obtenir le centre et le rayon de la sphère.

En effet, on doit avoir

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2) \equiv -\frac{S}{R^2}(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2,$$

α, β, γ désignant les coordonnées du centre et R le rayon.

Or on a, puisque le trinome précédent est carré parfait,

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2) \equiv d\left(r + \frac{c}{d}u + \frac{c'}{d}v + \frac{c''}{d}w\right)^2.$$

On en conclut

$$\alpha = \frac{c}{d}, \qquad \beta = \frac{c'}{d}, \qquad \gamma = \frac{c''}{d},$$
$$R^2 = -\frac{S}{d} = -\frac{ad - c^2}{d^2}.$$

132. Il est aisé de voir que les conditions obtenues sont équivalentes aux conditions

$$A = A' = A'' \neq 0,$$
$$B = 0, \qquad B' = 0, \qquad B'' = 0,$$

que donne la géométrie ponctuelle.

Si l'on se reporte en effet aux formules du numéro **116**, on voit que les conditions trouvées sont équivalentes aux conditions

$$A'A'' - B^2 = A''A - B'^2 = AA' - B''^2 \neq 0,$$
$$B'B'' - AB = 0, \qquad B''B - A'B' = 0, \qquad BB' - A''B'' = 0.$$

Supposons qu'aucun des trois nombres B, B', B'' ne soit nul ; on pourra tirer des trois dernières égalités les valeurs de A, A′, A″ et en portant dans les premières, on verra que $A'A'' - B^2$ est nul, ce qui est impossible.

On doit donc admettre par exemple que $B = 0$; on en conclut $B'B'' = 0$, ce qui donne $B' = 0$ ou $B'' = 0$. Supposons $B' = 0$; la dernière équation donne

$$A''B'' = 0.$$

On ne peut avoir $A'' = 0$, sans quoi $A'A'' - B^2$ serait nul ; donc on a $B'' = 0$, et on en conclut

$$A = A' = A'' \neq 0,$$
$$B = 0, \qquad B' = 0, \qquad B'' = 0.$$

133. Intersection d'une quadrique et du plan de l'infini. — Étant donnée l'équation tangentielle d'une quadrique,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

les plans tangents dont les points de contact sont à l'infini sont déterminés par les deux équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$
$$f'_r = 0.$$

En éliminant r entre ces deux équations, on aura l'équation tangentielle de la section de la surface par le plan de l'infini.

On obtient sans difficulté

$$d(au^2+a'v^2+a''w^2+2bvw+2b'wu+2b''uv)-(cu+c'v+c''w)^2 = 0.$$

On peut encore obtenir cette équation en partant de l'équation de l'intersection d'une quadrique et d'un plan (u_0, v_0, w_0, r_0)

$$(u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w + r_0f'_r)^2 - 4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0$$

et en y faisant $u_0 = v_0 = w_0 = 0$.

L'équation de la conique de l'infini peut s'écrire

$$(ad - c^2)u^2 + (a'd - c'^2)v^2 + (a''d - c''^2)w^2 + 2(bd - c'c'')vw$$
$$+ 2(b'd - c''c)wu + 2(b''d - cc')uv = 0.$$

Le discriminant du premier membre est égal à $d^2\Delta$, Δ désignant comme plus haut le discriminant de $f(u, v, w, r)$.

Il en résulte que cette équation ne représente une véritable

Hosted by Google

conique que si la surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde.

Dans le cas du paraboloïde, elle représente un point double,

$$(cu + c'v + c''w)^2 = 0\,;$$

c'est le point de rencontre des deux génératrices de la surface qui se trouvent dans le plan de l'infini.

Si l'équation donnée représente une conique, cette courbe rencontre le plan de l'infini en deux points distincts, si c'est une ellipse ou une hyperbole, et en un point double, si c'est une parabole.

Enfin si l'équation représente deux points distincts, la conique de l'infini se réduit à un point double.

Tous ces résultats, évidents *a priori*, s'obtiennent analytiquement en remarquant que les mineurs du premier ordre du discriminant de la fonction

$$(ad - c^2)u^2 + (a'd - c'^2)v^2 + (a''d - c''^2)w^2 + 2(bd - c'c'')vw \\ + 2(b'd - c''c)wu + 2(b''d - cc')uv$$

sont proportionnels à A, A′, A″, B, B′, B″.

On a, par exemple,

$$(a'd - c'^2)(a''d - c''^2) - (bd - c'c'')^2 = d\mathrm{A},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(b'd - c''c)(b''d - cc') - (ad - c^2)(bd - c'c'') = d\mathrm{B},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela nous montre aussi que les équations ponctuelles de cette conique sont

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy = 0,$$
$$t = 0.$$

134. Cercle de l'infini. — Il résulte de ce qu'on a vu dans les numéros précédents que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une sphère est que l'intersection de cette surface par le plan de l'infini ait pour équation tangentielle

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

Hosted by Google

ou pour équations ponctuelles

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$t = 0,$$

en supposant toujours les axes de coordonnées rectangulaires.

Cette conique est appelée le *cercle de l'infini*, et l'on peut dire que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique soit une sphère est qu'elle contienne le cercle de l'infini.

Un cône quelconque ayant pour directrice le cercle de l'infini est appelé *cône isotrope* ; on peut aussi l'envisager comme une sphère de rayon nul.

Ainsi le cône isotrope qui a pour sommet le point (α, β, γ) a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0.$$

Un plan quelconque rencontre le cercle de l'infini en deux points qui sont les points cycliques de ce plan.

135. Le cercle de l'infini joue, en géométrie de l'espace, un rôle très important, comme les points cycliques en géométrie plane.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient perpendiculaires est que leurs traces sur le plan de l'infini soient conjuguées par rapport au cercle de l'infini.*

Soient deux droites ayant pour paramètres directeurs (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$. La condition

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

exprime à la fois que ces droites sont perpendiculaires et que des parallèles passant par l'origine sont conjuguées par rapport au cône isotrope

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0\ ;$$

dans ce cas, leurs traces sur un plan quelconque sont conjuguées par rapport à la conique section du cône par ce plan, et en particulier leurs traces sur le plan de l'infini sont conjuguées par rapport au cercle de l'infini.

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que*

Hosted by Google

deux plans soient perpendiculaires est que leurs traces sur le plan de l'infini soient conjuguées par rapport au cercle de l'infini.

Démonstration analogue.

THÉORÈME III. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est que la trace de la droite sur le plan de l'infini ait pour polaire par rapport au cercle de l'infini la trace du plan sur le plan de l'infini.*

Pour qu'une droite (α, β, γ) soit perpendiculaire à un plan

$$Ax + By + Cz = 0,$$

il faut qu'on ait

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

Or ces conditions expriment que la droite est conjuguée du plan par rapport au cône isotrope qui a pour sommet l'origine.

Ces théorèmes sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux concernant les angles de droites et de plans (voir, à la fin du chapitre, Note n° 16).

136. Conditions pour que l'équation tangentielle générale du deuxième degré représente une hyperbole équilatère.

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots = 0.$$

On doit avoir d'abord

$$\Delta = 0\,; \tag{1}$$

en outre il suffit d'écrire que les points de rencontre avec le plan de l'infini sont conjugués par rapport au cercle de l'infini.

L'équation des points à l'infini est

$$(ad - c^2)u^2 + (a'd - c'^2)v^2 + (a''d - c''^2)w^2 + 2(bd - c'c'')vw \\ + 2(b'd - c''c)wu + 2(b''d - cc')uv = 0.$$

Le premier membre est décomposable en un produit de deux facteurs,

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') = 0,$$

et l'on doit avoir

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

ce qui donne la condition

$$ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 = 0. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) sont les conditions cherchées.

Hosted by Google

137. Équation tangentielle du cercle. — Soit un cercle ayant pour centre le point (α, β, γ), pour rayon R, et dont le plan P a pour équation

$$l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)=0.$$

Pour qu'un plan $Q(u, v, w, r)$ soit tangent au cercle, il faut qu'il rencontre le plan du cercle suivant une droite dont la distance au centre soit égale à R.

Abaissons du centre une perpendiculaire sur le plan Q, soit δ sa longueur, et θ l'angle des deux plans P et Q, on aura

$$\delta = \mathrm{R}\sin\theta$$

ou

$$\delta^2 = \mathrm{R}^2(1-\cos^2\theta).$$

Or on a

$$\delta^2 = \frac{(u\alpha+v\beta+w\gamma+r)^2}{u^2+v^2+w^2},$$

$$\cos^2\theta = \frac{(lu+mv+nw)^2}{(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2)}.$$

L'équation tangentielle du cercle sera donc

$$\frac{(u\alpha+v\beta+w\gamma+r)^2}{u^2+v^2+w^2} = \mathrm{R}^2\left[1-\frac{(lu+mv+nw)^2}{(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2)}\right]$$

ou bien

$$(u\alpha+v\beta+w\gamma+r)^2(l^2+m^2+n^2)$$
$$-\mathrm{R}^2[(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2)-(lu+mv+nw)^2]=0.$$

Nous avons en évidence l'équation des points à l'infini de ce cercle, car en éliminant r entre cette équation et sa dérivée par rapport à r (133), on obtient

$$(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2)-(lu+mv+nw)^2=0,$$

équation qui représente précisément l'équation des points de rencontre du cercle de l'infini avec le plan du cercle considéré ; c'est en effet un cas particulier de la formule

$$(uf'_{u_0}+vf'_{v_0}+wf'_{w_0}+rf'_{r_0})^2-4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0)=0.$$

L'équation tangentielle du cercle peut aussi s'écrire

$$(u\alpha+v\beta+w\gamma+r)^2(l^2+m^2+n^2)$$
$$-\mathrm{R}^2[(mw-nv)^2+(nu-lw)^2+(lv-mu)^2]=0.$$

138. Conditions pour que l'équation tangentielle générale du second degré représente un cercle. — En comparant l'équation précédente avec l'équation générale

$$f(u, v, w, r) = au^2+a'v^2+a''w^2+2bvw+2b'wu+2b''uv$$
$$+2cur+2c'vr+2c''wr+dr^2=0,$$

Hosted by Google

on voit que la condition cherchée est que l'expression

$$f(u, v, w, r) + \lambda[(mw - nv)^2 + (nu - lw)^2 + (lv - mu)^2]$$

soit carré parfait.

Ordonnons cette expression par rapport à r ; on a un trinome du second degré de la forme

$$Mr^2 + 2Nr + P = 0\,;$$

on devra avoir

$$N^2 - MP \equiv 0,$$

et cela quelles que soient les valeurs de u, v, w ; on obtient les conditions suivantes, en posant $\mu = -\lambda d$:

$$\left.\begin{aligned} ad - c^2 &= \mu(m^2 + n^2), \\ a'd - c'^2 &= \mu(n^2 + l^2), \\ a''d - c''^2 &= \mu(l^2 + m^2), \\ bd - c'c'' &= -\mu mn, \\ b'd - c''c &= -\mu nl, \\ b''d - cc' &= -\mu lm. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On voit que cela revient à écrire que la conique de l'infini de la surface donnée,

$$(ad - c^2)u^2 + (a'd - c'^2)v^2 + (a''d - c''^2)w^2 + 2(bd - c'c'')vw \\ + 2(b'd - c''c)wu + 2(b''d - cc')uv = 0,$$

se réduit aux deux points cycliques

$$(mw - nv)^2 + (nu - lw)^2 + (lv - mu)^2 = 0.$$

Le calcul sera particulièrement simple si l'on sait à l'avance que l'équation donnée représente une courbe, et si l'on connaît le plan de cette courbe ; on aura les valeurs de l, m, n, et μ sera la seule inconnue du système (1).

Nous nous proposons de chercher d'une manière générale les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation donnée pour que cette équation représente un cercle ; il faudra éliminer μ, l, m, n entre les équations (1).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$ad - c^2 = \alpha, \qquad a'd - c'^2 = \alpha', \qquad a''d - c''^2 = \alpha'',$$
$$bd - c'c'' = \beta, \qquad b'd - c''c = \beta', \qquad b''d - cc' = \beta''\,;$$

les équations (1) s'écrivent

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \mu(m^2 + n^2), & \alpha' = \mu(n^2 + l^2), & \alpha'' = \mu(l^2 + m^2), \\ \beta = -\mu mn, & \beta' = -\mu nl, & \beta'' = -\mu lm. \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Premier cas. — Supposons qu'aucun des trois nombres β, β', β'' ne soit nul.

Les trois dernières équations donnent

$$-\mu l^2 = \frac{\beta'\beta''}{\beta}, \qquad -\mu m^2 = \frac{\beta''\beta}{\beta'}, \qquad -\mu n^2 = \frac{\beta\beta'}{\beta''}.$$

En transportant ces valeurs dans les trois premières équations du système (2), on a les conditions

$$\alpha + \frac{\beta(\beta'^2 + \beta''^2)}{\beta'\beta''} = 0,$$

$$\alpha' + \frac{\beta'(\beta''^2 + \beta^2)}{\beta''\beta} = 0,$$

$$\alpha'' + \frac{\beta''(\beta^2 + \beta'^2)}{\beta\beta'} = 0.$$

Deuxième cas. — Supposons qu'on ait $\beta = 0$.

En se reportant au système (2), on doit avoir

$$\mu mn = 0\,;$$

on en conclut soit $m = 0$, soit $n = 0$.

Supposons $n = 0$; on aura alors

$$\alpha = \mu m^2, \qquad \alpha' = \mu l^2, \qquad \alpha'' = \mu(l^2 + m^2),$$
$$\beta' = 0, \qquad \beta'' = -\mu lm.$$

On en déduit les conditions

$$\beta' = 0,$$
$$\alpha + \alpha' = \alpha'',$$
$$\alpha\alpha' - \beta''^2 = 0.$$

Troisième cas. — Supposons que les trois quantités β, β', β'' soient nulles ; il faudra que deux des quantités l, m, n soient nulles, par exemple $m = 0$, $n = 0$.

On aura les conditions

$$\alpha = 0, \qquad \alpha' = \alpha''.$$

EXERCICES ET NOTES

1. *Étudier la nature des quadriques représentées par les équations*

$$u^2 - v^2 + 2uw - 4ur + r^2 = 0,$$
$$vw + uv - 3wr + 2r^2 = 0,$$
$$u^2 - 3w^2 + 4vw - uv + 3vr = 0,$$
$$(v-w)^2 + (w-u)^2 + (u-v)^2 - r^2 = 0,$$
$$(u+v+w)^2 - ur = 0,$$
$$u^2 - v^2 + vw - uw + 2ur - rw + r^2 = 0.$$

Hosted by Google

2. *On donne une sphère, un point* A *et un plan* P ; *par le point* A *on mène un plan quelconque* Q *qui rencontre le plan* P *suivant une droite* Δ ; *trouver l'enveloppe du plan qui passe par la droite* Δ *et par le pôle du plan* Q *par rapport à la sphère.*

Cette enveloppe est une quadrique ; discuter sa nature quand le point A *se déplace dans l'espace.*

Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$
$$z - h = 0$$

les équations de la sphère et du plan P, et α, β, γ les coordonnées du point A.

Un des plans dont on cherche l'enveloppe,

$$ux + vy + wz + r = 0, \tag{1}$$

rencontre le plan P suivant une droite Δ, et le plan passant par Δ et le point A a pour équation

$$\frac{ux + vy + wz + r}{u\alpha + v\beta + w\gamma + r} = \frac{z - h}{\gamma - h}.$$

Il suffira d'écrire que le pôle de ce plan par rapport à la sphère est situé dans le plan (1).

On obtient ainsi l'équation tangentielle de l'enveloppe,

$$-R^2u^2(\gamma - h) - R^2v^2(\gamma - h) + R^2hw^2 + R^2w(u\alpha + v\beta) + h\alpha ur + h\beta vr + (h\gamma + R^2)wr + r^2\gamma = 0.$$

Pour discuter la nature de cette quadrique nous appliquerons la méthode générale, en remarquant que l'on peut supposer le point A dans le plan des xz, à cause de la symétrie de la figure autour de l'axe Oz.

Faisons $\beta = 0$ dans l'équation qui précède ; elle devient

$$-R^2u^2(\gamma - h) - R^2v^2(\gamma - h) + R^2hw^2 + R^2\alpha uw + h\alpha ur + (h\gamma + R^2)wr + r^2\gamma = 0.$$

Supposons d'abord $\gamma \neq 0$; décomposons en carrés en faisant entrer dans un premier carré tous les termes qui contiennent r ; on obtient

$$\frac{1}{\gamma}\left[\gamma r + \frac{h\alpha u + (h\gamma + R^2)w}{2}\right]^2 - \frac{[h\alpha u + (h\gamma + R^2)w]^2}{4\gamma} - R^2u^2(\gamma - h) - R^2v^2(\gamma - h) + R^2hw^2 + R^2\alpha uw = 0$$

ou, en multipliant par 4γ,

$$[2\gamma r + h\alpha u + (h\gamma + R^2)w]^2 - 4\gamma R^2(\gamma - h)v^2 - w^2(h\gamma - R^2)^2 - u^2[h^2\alpha^2 + 4R^2\gamma(\gamma - h)] + 2\alpha uw[2R^2(\gamma - h) - h(h\gamma - R^2)] = 0.$$

Nous avons ainsi deux carrés en évidence ; il reste ensuite un

Hosted by Google

trinome du deuxième degré par rapport à w et à u ; la nature des carrés que donne ce trinome dépend de la quantité

$$\alpha^2[2R^2(\gamma - h) - h(h\gamma - R^2)]^2 - (h\gamma - R^2)^2[h^2\alpha^2 + 4R^2\gamma(\gamma - h)].$$

Si elle est positive, on aura deux carrés de signes contraires ; si elle est négative, on aura deux carrés négatifs, car le coefficient de w^2 est négatif.

Or cette expression s'écrit

$$4R^2\gamma(\gamma - h)[\alpha^2(R^2 - h^2) - (R^2 - h\gamma)^2].$$

Si l'on y considère α et γ comme coordonnées courantes, l'équation

$$\alpha^2(R^2 - h^2) - (R^2 - h\gamma)^2 = 0$$

représente l'ensemble des tangentes menées au cercle

$$\alpha^2 + \gamma^2 - R^2 = 0$$

aux points de rencontre avec la droite $\gamma - h = 0$.

Il est alors aisé de discuter la nature de la quadrique suivant la position du point A dans le plan des xz.

Dans le cas particulier où γ est nul, l'équation s'écrit

$$R^2hu^2 + R^2hv^2 + R^2hw^2 + R^2\alpha uw + h\alpha ur + R^2wr = 0.$$

Nous diviserons alors $R^2hw^2 + R^2\alpha uw + R^2hu^2 + R^2hv^2$ par $R^2w + h\alpha u$; on obtient pour quotient $hw + \frac{R^2 - h^2}{R^2}\alpha u$ et pour reste $\frac{h[R^4 - \alpha^2(R^2 - h^2)]}{R^2}u^2 + R^2hv^2$, de telle sorte que l'équation de la quadrique devient

$$(R^2w + h\alpha u)\left[r + hw + \frac{R^2 - h^2}{R^2}\alpha u\right] + \frac{h[R^4 - \alpha^2(R^2 - h^2)]}{R^2}u^2 + R^2hv^2 = 0.$$

La nature de la quadrique dépend du signe de

$$R^4 - \alpha^2(R^2 - h^2).$$

Si cette quantité est positive, la surface est un paraboloïde elliptique ; si cette quantité est négative, la surface est un paraboloïde hyperbolique ; enfin si elle est nulle, l'enveloppe se réduit à une parabole.

3. *Trouver l'enveloppe du plan qui coupe deux sphères données suivant des cercles égaux.*

L'enveloppe est un paraboloïde de révolution qui a pour axe la ligne des centres des deux sphères et pour plan tangent au sommet leur plan radical.

4. *Trouver l'enveloppe des plans passant par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.*

Hosted by Google

On se donne l'équation d'un plan et on forme l'équation ponctuelle du cône qui a pour sommet le centre de l'ellipsoïde et qui s'appuie sur la section du plan et de la surface.

Il suffit alors d'écrire que ce cône contient trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, c'est-à-dire que l'on a

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 = 0,$$

A, A', A'' désignant les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans l'équation du cône.

On trouvera comme enveloppe un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde donné; on démontrera que le point où le plan variable touche son enveloppe est le centre de la section que ce plan détermine dans la surface.

5. *Trouver l'enveloppe des plans qui coupent un cône du second ordre suivant deux droites rectangulaires.*

Soit le cône

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0;$$

considérons un plan passant par l'origine,

$$ux + vy + wz = 0,$$

et cherchons la condition pour que ce plan coupe le cône suivant deux droites perpendiculaires.

Nous allons considérer un cône passant par ces deux génératrices et contenant la normale au plan passant par le sommet, et il suffira d'écrire que ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit.

L'équation de ce cône sera de la forme

$$\varphi(x, y, z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z)(ux + vy + wz) = 0,$$

avec la condition

$$\varphi(u, v, w) + (\alpha u + \beta v + \gamma w)(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

et on devra avoir

$$A + A' + A'' + \alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

En éliminant $\alpha u + \beta v + \gamma w$, on obtient

$$\varphi(u, v, w) - (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

En joignant à cette équation la condition $r = 0$, on a les équations tangentielles du cône enveloppé par les plans qui coupent le cône donné suivant deux droites rectangulaires.

6. *On donne un plan* P *et un point* O; *on joint le point* O *à un point quelconque* A *du plan, puis par le point* A *on élève un plan perpendiculaire à* OA. *Trouver l'enveloppe de ce plan.*

7. *On donne un plan* P *et un point* O ; *par le point* O *on mène un plan quelconque* Q *qui coupe le plan* P *suivant une droite* Δ ; *par la droite* Δ *on mène un plan perpendiculaire au plan* Q. *Trouver l'enveloppe de ce plan.*

8. *Par une courbe plane fermée on fait passer un cylindre que l'on termine à une section droite telle que le volume du cylindre compris entre cette section et la première courbe ait un volume donné. Trouver l'enveloppe du plan de la section droite.*

On sait que le volume d'un cylindre tronqué est égal au produit de l'une des bases par la distance à celle-ci du centre de gravité de l'autre.

(Voir ANTOMARI, *Leçons de Cinématique et de Dynamique*, p. 209.)

Prenons pour plan des xy le plan de la courbe plane donnée, pour origine le centre de gravité, les axes de coordonnées étant rectangulaires.

Soit

$$ux + vy + wz + r = 0 \qquad \text{(P)}$$

le plan de la section droite ; l'aire de cette section est égale à l'aire de la courbe donnée multipliée par le cosinus de l'angle du plan P avec le plan des xy ; on aura donc

$$\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = k$$

ou

$$k(u^2+v^2+w^2) - wr = 0,$$

k désignant le rapport du volume donné à l'aire de la courbe plane.

On reconnaît l'équation tangentielle d'un paraboloïde elliptique. Si on transporte l'origine au point $(0, 0, -k)$, l'équation devient

$$k(u^2+v^2) - wr = 0,$$

et en remontant à l'équation ponctuelle, on voit que le paraboloïde est de révolution autour de Oz.

9. *Trouver l'enveloppe d'un plan qui détache d'un cône de révolution un cône oblique de volume constant.*

L'enveloppe est un hyperboloïde de révolution à deux nappes qui admet le cône donné pour cône asymptote.

10. *Trouver l'enveloppe d'un plan qui coupe un ellipsoïde suivant une courbe telle que le cône s'appuyant sur cette courbe et ayant pour sommet le centre de l'ellipsoïde soit de révolution.*

L'enveloppe se compose de trois cylindres du deuxième degré dont les génératrices sont respectivement parallèles aux axes de l'ellipsoïde.

11. *On donne une quadrique* S *et un point fixe* O *par lequel on mène trois droites parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\,; \tag{E}$$

trouver l'enveloppe du plan mené par les intersections de la surface S *avec ces droites.*

L'enveloppe est une quadrique dont il sera intéressant de discuter la nature. Examiner le cas où le point O est sur la quadrique S.

Supposer ensuite que l'ellipsoïde E soit une sphère, c'est-à-dire que les trois droites menées par le point O forment un trièdre trirectangle.

12. Pour qu'une droite soit située sur une quadrique, il faut et il suffit que tout plan passant par la droite soit tangent à la quadrique.

Soit une quadrique définie par son équation tangentielle

$$f(u,\ v,\ w,\ r)=0$$

et une droite

$$\mathrm{P}=\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta r=0,$$
$$\mathrm{P}'=\alpha' u+\beta' v+\gamma' w+\delta' r=0\,;$$

pour que cette droite soit sur la surface, il faut et il suffit que toute solution de ces deux dernières équations vérifie l'équation de la surface.

On résoudra les équations de la droite, par rapport à u et v par exemple, et en transportant dans l'équation de la surface les valeurs obtenues, on aura un trinome en w et r qui devra être identiquement nul.

Ainsi pour que la quadrique contienne l'axe des x, dont les équations sont

$$u=0, \qquad r=0,$$

il faut que $f(0,\ v,\ w,\ 0)$ soit identiquement nul ; et par conséquent l'équation se réduit à

$$au^2+2b'wu+2b''uv+2cur+2c'vr+2c''wr+dr^2=0.$$

De même, comme nous l'avons déjà trouvé (n° 130), l'équation générale des quadriques contenant Ox et Oy est

$$2b''uv+2cur+2c'vr+2c''wr+dr^2=0.$$

On peut obtenir, comme en géométrie ponctuelle, les équations des génératrices des quadriques.

Hosted by Google

Supposons qu'on ait décomposé en carrés le premier membre de l'équation tangentielle de la quadrique et qu'on ait une équation de la forme

$$A^2 + B^2 - C^2 - D^2 = 0,$$

A, B, C, D désignant des fonctions linéaires et homogènes par rapport à u, v, w, r ; on écrira

$$A^2 - C^2 = D^2 - B^2,$$

et on aura les deux systèmes de génératrices

$$\left.\begin{aligned} A + C &= \lambda(D + B), \\ A - C &= \frac{1}{\lambda}(D - B), \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} A + C &= \mu(D - B), \\ A - C &= \frac{1}{\mu}(D + B). \end{aligned}\right\}$$

On démontrera aisément qu'étant données deux droites non situées dans le même plan, et définies par leurs équations tangentielles

$$\left.\begin{aligned} P &= 0, \\ Q &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} P' &= 0, \\ Q' &= 0, \end{aligned}\right\}$$

l'équation tangentielle générale des quadriques passant par ces deux droites est

$$P(\alpha P' + \beta Q') + Q(\gamma P' + \delta Q') = 0,$$

α, β, γ, δ étant des paramètres variables.

Si dans une question on a besoin d'introduire symétriquement deux droites non situées dans un même plan, on peut prendre comme axe des x la perpendiculaire commune à ces deux droites, comme origine le milieu de cette perpendiculaire, et comme axes des y et des z les bissectrices des parallèles aux deux droites menées par l'origine.

On déterminera ces deux droites par les équations tangentielles des points de rencontre avec Ox et des points à l'infini ; on aura ainsi

$$\left.\begin{aligned} ua + r &= 0, \\ vm + w &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} ua - r &= 0, \\ vm - w &= 0. \end{aligned}\right\}$$

L'équation générale des quadriques contenant ces deux droites sera

$$(ua+r)[\alpha(ua-r)+\beta(vm-w)]+(vm+w)[\gamma(ua-r)+\delta(vm-w)] = 0$$

ou

$$\alpha(u^2a^2-r^2)+(\beta+\gamma)(amuv-wr)+(\beta-\gamma)(mvr-auw)+\delta(v^2m^2-w^2) = 0$$

ou

$$A(u^2a^2-r^2)+B(amuv-wr)+C(mvr-auw)+D(v^2m^2-w^2) = 0. \quad (1)$$

S'il n'est pas nécessaire que les axes de coordonnées soient rectangulaires, on peut choisir une infinité de systèmes d'axes par rapport auxquels les équations des droites auront les mêmes formes.

Hosted by Google

Il suffira de prendre pour axe des x une droite quelconque rencontrant les deux droites données, pour origine le milieu de cette droite, enfin pour axes des y et des z deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux parallèles aux deux droites menées par l'origine.

13. *Étant données deux droites non situées dans un même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique auquel on mène un plan tangent parallèle à un plan fixe. Trouver le lieu du point de contact.*

L'équation du paraboloïde peut être mise sous la forme (1) de la note précédente, le plan fixe donné étant parallèle au plan des xy. Pour que l'équation représente un paraboloïde, on doit avoir $A=0$; on peut ensuite diviser par D, et on a l'équation

$$\lambda(amuv - wr) + \mu(mvr - auw) + v^2m^2 - w^2 = 0.$$

Soit un plan tangent parallèle au plan des xy,

$$z + h = 0\,;$$

on aura

$$\lambda h + 1 = 0, \tag{1}$$

et les coordonnées du point de contact seront données par

$$\frac{x}{-\mu a} = \frac{y}{\mu m h} = \frac{z}{-\lambda h - 2} = \frac{1}{-\lambda}. \tag{2}$$

En éliminant λ, μ et h entre les équations (1) et (2), on aura l'équation du lieu,

$$mzx - ay = 0,$$

qui représente un paraboloïde hyperbolique.

14. *Trouver l'enveloppe des plans bissecteurs des dièdres circonscrits à une quadrique, les arêtes de ces dièdres étant dans un plan fixe.*

15. *Démontrer qu'il existe un cône du deuxième degré tangent aux six faces de deux trièdres trirectangles qui ont même sommet.*

16. Propriétés du cercle de l'infini. — Nous nous proposons de généraliser dans cette note les théorèmes établis au nº 135.

Théorème I. — *L'angle de deux droites est égal au produit de* $\frac{1}{2i}$ *par le logarithme népérien du rapport anharmonique formé par les traces des droites sur le plan de l'infini et par les points de rencontre du cercle de l'infini avec la droite joignant les deux traces.*

Soient α, β, γ et α', β', γ' les paramètres directeurs des deux droites ; l'angle V de ces droites est donné par la relation

$$\cos V = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}.$$

Les traces des droites sur le plan de l'infini ont pour coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, 0$ et $\alpha', \beta', \gamma', 0$; un point quelconque de la droite joignant ces traces a pour coordonnées $\alpha + \lambda\alpha', \beta + \lambda\beta', \gamma + \lambda\gamma', 0$, et les valeurs de λ relatives aux points de rencontre de cette droite et du cercle de l'infini sont racines de l'équation

$$(\alpha + \lambda\alpha')^2 + (\beta + \lambda\beta')^2 + (\gamma + \lambda\gamma')^2 = 0$$

ou

$$\lambda^2(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + 2\lambda(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Or, un des rapports anharmoniques des quatre points considérés est égal au quotient des racines de cette équation. On aura donc, en désignant le rapport par ρ,

$$\rho = \frac{-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma') - \sqrt{(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)}}{-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma') + \sqrt{(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)}}$$

ou

$$\rho = \frac{-\cos V - i \sin V}{-\cos V + i \sin V} = \frac{e^{iV}}{e^{-iV}} = e^{2iV}.$$

On en tire

$$V = \frac{1}{2i} L\rho,$$

et le théorème est démontré.

Dans le cas particulier où les quatre points forment une division harmonique, on a

$$\rho = -1,$$
$$L\rho = \pi i,$$

à un multiple près de $2\pi i$, et par suite

$$V = \frac{\pi}{2}.$$

Théorème II. — *L'angle de deux plans est égal au produit de* $\frac{1}{2i}$ *par le logarithme népérien du rapport anharmonique formé par les deux plans et par les plans tangents menés au cercle de l'infini par l'intersection des deux plans donnés.*

Soient les deux plans

$$Ax + By + Cz + Dt = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D't = 0 ;$$

leur angle V est donné par

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Hosted by Google

Pour qu'un plan passant par l'intersection

$$(A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C')z + (D + \lambda D')t = 0$$

soit tangent au cercle de l'infini, il faut qu'on ait

$$(A + \lambda A')^2 + (B + \lambda B')^2 + (C + \lambda C')^2 = 0.$$

On verra comme plus haut que le rapport anharmonique ρ de ces quatre plans est égal à e^{2iV}, ce qui démontre le théorème.

Si les quatre plans forment un faisceau harmonique, les deux plans donnés sont perpendiculaires.

Pour déterminer par un procédé semblable l'angle d'une droite et d'un plan, on prendra l'angle complémentaire de l'angle de la droite et d'une normale au plan, en remarquant que cette normale rencontre le plan de l'infini au pôle du plan donné par rapport au cercle de l'infini.

17. *Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère les cordes* D *de cette surface qui sont vues de son centre sous un angle droit, et l'on demande :*

1° *L'équation du cône, lieu géométrique des cordes* D *qui passent par un point donné* S, *ainsi que les positions du point* S *pour lesquelles ce cône est de révolution ;*

2° *La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes* D *situées dans un plan donné* P, *ainsi que les positions du plan* P *pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.*

(*Concours général, 1885.*)

La question revient à étudier le complexe formé par les droites D.

Cherchons d'abord l'équation de ce complexe.

Soit la droite

$$\frac{x - x'}{\alpha} = \frac{y - y'}{\beta} = \frac{z - z'}{\gamma} = \rho ;$$

elle rencontre la surface donnée,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$

en deux points, et les valeurs de ρ relatives à ces points sont racines de l'équation

$$A(x' + \alpha\rho)^2 + B(y' + \beta\rho)^2 + C(z' + \gamma\rho)^2 - 1 = 0$$

ou

$$\rho^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) + 2\rho(A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z') + Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - 1 = 0.$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation ; pour que la corde soit vue du centre sous un angle droit, on doit avoir

$$(x' + \alpha\rho_1)(x' + \alpha\rho_2) + (y' + \beta\rho_1)(y' + \beta\rho_2) + (z' + \gamma\rho_1)(z' + \gamma\rho_2) = 0$$

ou

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\rho_1\rho_2 + (\rho_1 + \rho_2)(\alpha x' + \beta y' + \gamma z') + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

Hosted by Google

ou encore, en remplaçant $\rho_1\rho_2$ et $\rho_1 + \rho_2$ par leurs valeurs,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(Ax'^2+By'^2+Cz'^2-1)-2(A\alpha x'+B\beta y'+C\gamma z')(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')$$
$$+(x'^2+y'^2+z'^2)(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$A[(\gamma x'-\alpha z')^2+(\alpha y'-\beta x')^2]+B[(\alpha y'-\beta x')^2+(\beta z'-\gamma y')^2]$$
$$+C[(\beta z'-\gamma y')^2+(\gamma x'-\alpha z')]^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$$

ou encore, en adoptant les notations du n° 22,

$$(B+C)l^2+(C+A)m^2+(A+B)n^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0.$$

Telle est l'équation du complexe.

Nous obtiendrons les équations du cône et de la conique du complexe en opérant comme on l'a indiqué dans la note 11 du chapitre II.

1° L'équation du cône du complexe de sommet (x', y', z') sera

$$(B+C)(yz'-zy')^2+(C+A)(zx'-xz')^2+(A+B)(xy'-yx')^2$$
$$-[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]=0;$$

on trouvera aisément les conditions pour que ce cône soit de révolution.

2° L'équation tangentielle de la conique du complexe qui est située dans le plan $P(u', v', w', r')$ est

$$(B+C)(ur'-ru')^2+(C+A)(vr'-rv')^2+(A+B)(wr'-rw')^2$$
$$-[(vw'-wv')^2+(wu'-uw')^2+(uv'-vu')^2]=0.$$

Pour que cette conique représente une parabole, il faut que le coefficient de r^2 soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$(B+C)u'^2+(C+A)v'^2+(A+B)w'^2=0;$$

ce qui montre que le plan P doit être tangent à la conique de l'infini du cône

$$\frac{x^2}{B+C}+\frac{y^2}{C+A}+\frac{z^2}{A+B}=0.$$

Cherchons maintenant les conditions pour que la conique du complexe soit un cercle.

On voit tout d'abord que si $r'=0$, l'équation s'écrit

$$r^2[(B+C)u'^2+(C+A)v'^2+(A+B)w'^2]$$
$$-[(vw'-wv')^2+(wu'-uw')^2+(uv'-vu')^2]=0;$$

elle représente un cercle ayant pour centre l'origine.

D'une manière générale, pour que l'équation (1) représente un cercle, il faut que l'expression

$$(B+C)(ur'-ru')^2+(C+A)(vr'-rv')^2+(A+B)(wr'-rw')^2$$
$$+\lambda[(vw'-wv')^2+(wu'-uw')^2+(uv'-vu')^2]$$

soit carré parfait (138).

On peut l'écrire

$$\begin{aligned}
& r^2[(B+C)u'^2+(C+A)v'^2+(A+B)w'^2] \\
& \quad -2r[uu'r'(B+C)+vv'r'(C+A)+ww'r'(A+B)] \\
& \quad +u^2[(B+C)r'^2+\lambda(v'^2+w'^2)]+v^2[(C+A)r'^2+\lambda(w'^2+u'^2)] \\
& \quad +w^2[(A+B)r'^2+\lambda(u'^2+v'^2)]-2\lambda v'w'vw-2\lambda w'u'wu-2\lambda u'v'uv.
\end{aligned}$$

Considérons cette expression comme un trinome en r,

$$Mr^2+2Nr+P\,;$$

formons la condition

$$N^2-MP=0,$$

et écrivons que le premier membre, qui est fonction de u, v, w, est identiquement nul.

On a les relations, où l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$\alpha=B+C, \qquad \beta=C+A, \qquad \gamma=A+B,$$

$$\lambda(v'^2+w'^2)(\alpha u'^2+\beta v'^2+\gamma w'^2)+\alpha r'^2(\beta v'^2+\gamma w'^2)=0,$$
$$\lambda(w'^2+u'^2)(\alpha u'^2+\beta v'^2+\gamma w'^2)+\beta r'^2(\alpha u'^2+\gamma w'^2)=0,$$
$$\lambda(u'^2+v'^2)(\alpha u'^2+\beta v'^2+\gamma w'^2)+\gamma r'^2(\alpha u'^2+\beta v'^2)=0,$$
$$v'w'[\lambda(\alpha u'^2+\beta v'^2+\gamma w'^2)+\beta\gamma r'^2]=0,$$
$$w'u'[\lambda(\alpha u'^2+\beta v'^2+\gamma w'^2)+\gamma\alpha r'^2]=0,$$
$$u'r'[\lambda(\alpha u'^2+\beta v'^2+\gamma w'^2)+\alpha\beta r'^2]=0.$$

Si l'on suppose $u'v'w'\neq 0$, les trois dernières équations donnent $r'=0$, $\lambda=0$; on a le cas étudié plus haut. Soit maintenant

$$u'=0\,;$$

les équations qui précèdent se réduisent à deux,

$$\lambda(v'^2+w'^2)+\alpha r'^2=0,$$
$$\lambda(\beta v'^2+\gamma w'^2)+\beta\gamma r'^2=0\,;$$

on en tire, en éliminant λ,

$$\beta\gamma(v'^2+w'^2)-\alpha(\beta v'^2+\gamma w'^2)=0,$$

ou, en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs,

$$(A^2-C^2)v'^2+(A^2-B^2)w'^2=0.$$

On en déduit

$$\frac{v'}{\sqrt{A^2-B^2}}=\frac{w'}{\pm\sqrt{-(A^2-C^2)}},$$

et comme l'on a $u'=0$, on voit que les plans qui contiennent les cercles du complexe sont parallèles au plan

$$y\sqrt{A^2-B^2}\pm z\sqrt{-(A^2-C^2)}=0.$$

Hosted by Google

En supposant ensuite que v' et w' sont nuls, on obtient les plans parallèles aux plans

$$x\sqrt{B^2 - A^2} \pm z\sqrt{-(B^2 - C^2)} = 0$$

et

$$x\sqrt{C^2 - A^2} \pm y\sqrt{-(C^2 - B^2)} = 0.$$

En résumé, pour que la conique du complexe située dans un plan P soit un cercle, il faut que ce plan passe par l'origine ou bien soit parallèle à l'un des six plans représentés par les équations précédentes.

18. *Étudier le complexe des droites telles que, par chacune d'elles, on puisse mener deux plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde donné.*

Consulter sur ce sujet la note IV dans la géométrie analytique à trois dimensions de M. E. Pruvost.

19. *Étant donné un ellipsoïde, de centre* O, *et un cône du second ordre* Q, *de sommet* S, *on considère un trièdre* $O\alpha\beta\gamma$, *dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde et on prend le point d'intersection de chaque arête de ce trièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône* Q. *On obtient ainsi trois points* A, B, C *qui déterminent un plan* P.

1° *Démontrer que le plan* P *passe par un point fixe* F *quand le trièdre* $O\alpha\beta\gamma$ *varie.*

2° *Les points* S *et* F *déterminent une droite* D*; trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* ω, *lorsque le cône* Q *se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe.*

3° *Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe* G *des droites* D *qui sont situées dans un plan donné* H.

4° *Trouver le lieu des foyers des courbes* G *lorsque le plan* H *se déplace en restant parallèle à une droite donnée.*

(*Agrégation, 1892.*)

On lira avec intérêt une remarquable solution de M. E. Borel, dans le tome II de la *Revue de mathématiques spéciales*, p. 17.

CHAPITRE VI

POLES ET PLANS POLAIRES

139. Plans conjugués. — On dit que deux plans sont conjugués par rapport à une surface de deuxième classe lorsqu'ils divisent harmoniquement les plans tangents menés à la surface par leur intersection.

Soit l'équation de la surface

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots = 0; \qquad (1)$$

désignons par (u_0, v_0, w_0, r_0) et (u_1, v_1, w_1, r_1) les coordonnées de deux plans.

Un plan quelconque passant par l'intersection I de ces deux plans a pour coordonnées $u_0 + \lambda u_1$, $v_0 + \lambda v_1$, $w_0 + \lambda w_1$, $r_0 + \lambda r_1$; les valeurs de λ correspondant aux plans tangents menés par la droite I à la surface sont déterminées par l'équation

$$f(u_0 + \lambda u_1, \quad v_0 + \lambda v_1, \quad w_0 + \lambda w_1, \quad r_0 + \lambda r_1) = 0$$

ou, en développant,

$$f(u_0, v_0, w_0, r_0) + \lambda[u_1 f'_{u_0} + v_1 f'_{v_0} + w_1 f'_{w_0} + r_1 f'_{r_0}) \\ + \lambda^2 f(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0.$$

Pour que ces deux plans tangents soient conjugués harmoniques par rapport aux deux plans donnés, il faut que les valeurs de λ déterminées par l'équation qui précède soient égales et de signes contraires ; on doit donc avoir

$$u_1 f'_{u_0} + v_1 f'_{v_0} + w_1 f'_{w_0} + r_1 f'_{r_0} = 0$$

Hosted by Google

ou

$$u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} + r_0 f'_{r_1} = 0.$$

Ce raisonnement s'applique au cas où l'équation (1) représente une conique ou deux points.

Si l'équation représente une conique, deux plans seront conjugués par rapport à cette conique si leurs traces sur le plan de la courbe sont conjuguées par rapport à cette conique.

Si l'équation représente deux points, deux plans seront conjugués par rapport à ces deux points si leurs points de rencontre avec la droite joignant les deux points donnés sont conjugués harmoniques par rapport à ces deux points.

140. Pôle d'un plan. — THÉORÈME. — *Les plans conjugués d'un plan fixe passent par un point fixe qu'on appelle le pôle du plan.*

Soient u_0, v_0, w_0, r_0 les coordonnées du plan fixe P, et u, v, w, r celles d'un plan conjugué quelconque. On a la condition

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} = 0, \tag{2}$$

qui exprime que le plan (u, v, w, r) passe par le point qui a pour coordonnées f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}, f'_{r_0}.

Ce point est le pôle du plan P, et l'équation (2) est l'équation de ce pôle.

D'après ce qu'on a vu plus haut (104), ce point est le sommet du cône circonscrit à la surface le long de la courbe section par le plan P.

141. Pour que ce plan existe, il faut que les quatre dérivées ne soient pas nulles en même temps.

Si l'équation (1) représente une véritable quadrique, un plan quelconque admet un pôle bien déterminé.

Si l'équation (1) représente une conique, les quatre dérivées partielles f'_{u_0}, f'_{v_0}, etc. ne sont nulles que pour les coordonnées du plan de la conique ; il en résulte qu'un plan quelconque aura un pôle, à l'exception du plan de la conique, dont le pôle est indéterminé.

Hosted by Google

Il est clair que le pôle d'un plan sera le pôle par rapport à la conique de la trace du plan sur le plan de la conique.

Enfin si l'équation représente deux points, tout plan ne contenant pas la droite joignant les deux points a un pôle bien déterminé, qui est le conjugué harmonique, par rapport aux deux points, du point de rencontre du plan et de la droite joignant les deux points; tout plan passant par la droite joignant les deux points a un pôle indéterminé.

142. Proposons-nous maintenant de chercher si deux plans (u_0, v_0, w_0, r_0) et (u_1, v_1, w_1, r_1) peuvent avoir le même pôle par rapport à une surface.

On doit avoir

$$\frac{f'_{u_0}}{f'_{u_1}} = \frac{f'_{v_0}}{f'_{v_1}} = \frac{f'_{w_0}}{f'_{w_1}} = \frac{f'_{r_0}}{f'_{r_1}} = -\lambda$$

ou

$$f'_{u_0} + \lambda f'_{u_1} = 0,$$
$$f'_{v_0} + \lambda f'_{v_1} = 0,$$
$$f'_{w_0} + \lambda f'_{w_1} = 0,$$
$$f'_{r_0} + \lambda f'_{r_1} = 0.$$

Or les premiers membres de ces équations peuvent s'obtenir en remplaçant dans les fonctions f'_u, f'_v, f'_w, f'_r les variables u, v, w, r respectivement par $u_0 + \lambda u_1$, $v_0 + \lambda v_1$, $w_0 + \lambda w_1$, $r_0 + \lambda r_1$.

On doit donc avoir pour une valeur déterminée de λ,

$$\begin{array}{llllll} f'_u(u_0 + \lambda u_1, & v_0 + \lambda v_1, & w_0 + \lambda w_1, & r_0 + \lambda r_1) & = 0, \\ f'_v(\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ ) & = 0, \\ f'_w(\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ ) & = 0, \\ f'_r(\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ ) & = 0. \end{array}$$

Ces égalités sont impossibles si le discriminant de la fonction $f(u, v, w, r)$ est différent de zéro.

On en conclut que si l'équation (1) représente une véritable quadrique, deux plans différents ont des pôles différents.

Si l'équation représente une conique, deux plans auront le même pôle s'ils ont même trace sur le plan de la conique.

Enfin si l'équation représente deux points, deux plans auront le même pôle s'ils rencontrent au même point la droite qui joint les deux points.

143. Plan polaire d'un point. — On appelle plan polaire d'un point le plan qui a ce point pour pôle.

Soit le point (x_0, y_0, z_0, t_0) ; si u_0, v_0, w_0, r_0 désignent les coordonnées du plan polaire de ce point, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} f'_{u_0} &= au_0 + b''v_0 + b'w_0 + cr_0 = \lambda x_0,\\
\frac{1}{2} f'_{v_0} &= b''u_0 + a'v_0 + bw_0 + c'r_0 = \lambda y_0,\\
\frac{1}{2} f'_{w_0} &= b'u_0 + bv_0 + a''w_0 + c''r_0 = \lambda z_0,\\
\frac{1}{2} f'_{r_0} &= cu_0 + c'v_0 + c''w_0 + dr_0 = \lambda t_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Tout revient à résoudre ce système par rapport à u_0, v_0, w_0, r_0.

Premier cas. — Supposons qu'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (1) représente une véritable quadrique.

On peut alors résoudre le système (3) d'après la règle de Cramer ; on a

$$\begin{aligned}
\Delta u_0 &= \lambda(Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + Ct_0),\\
\Delta v_0 &= \lambda(B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C't_0),\\
\Delta w_0 &= \lambda(B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C''t_0),\\
\Delta r_0 &= \lambda(Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + Dt_0),
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$u_0 = \mu\varphi'_{x_0}, \qquad v_0 = \mu\varphi'_{y_0}, \qquad w_0 = \mu\varphi'_{z_0}, \qquad r_0 = \mu\varphi'_{t_0},$$

en désignant par

$$\varphi(x, y, z, t) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0$$

l'équation ponctuelle de la surface.

L'équation du plan polaire sera donc

$$x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0} + t\varphi'_{t_0} = 0,$$

résultat bien connu.

Rappelons que deux points sont conjugués quand la droite qui les joint rencontre la surface en deux points conjugués harmoniques par rapport à ces deux points ; chacun d'eux est alors situé sur le plan polaire de l'autre, et la relation qui lie les cordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 et x_1, y_1, z_1, t_1 de ces deux points est

$$x_1\varphi'_{x_0} + y_1\varphi'_{y_0} + z_1\varphi'_{z_0} + t_1\varphi'_{t_0} = 0.$$

Deuxième cas. — Supposons $\Delta = 0$, et l'un au moins de ses mineurs du premier ordre différent de zéro, par exemple

$$D = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} \neq 0 \ (*).$$

L'équation représente une conique.

On peut résoudre les trois premières équations du système (3) par rapport à u_0, v_0, w_0, et, en transportant ces valeurs dans la quatrième équation, on obtient

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & cr_0 - \lambda x_0 \\ b'' & a' & b & c'r_0 - \lambda y_0 \\ b' & b & a'' & c''r_0 - \lambda z_0 \\ c & c' & c'' & dr_0 - \lambda t_0 \end{vmatrix} = 0$$

ou, comme $\Delta = 0$,

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & b' & x_0 \\ b'' & a' & b & y_0 \\ b' & b & a'' & z_0 \\ c & c' & c'' & t_0 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Cela revient à supposer que l'origine n'est pas dans le plan de la conique (129).

Le coefficient de λ peut s'écrire

$$Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + Dt_0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\varphi'_{t_0};$$

égalé à zéro, il exprime la condition pour que le point (x_0, y_0, z_0, t_0) soit dans le plan de la conique.

Le système (3) est alors équivalent au système suivant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}f'_{u_0} - \lambda x_0 &= 0, \\ \frac{1}{2}f'_{v_0} - \lambda y_0 &= 0, \\ \frac{1}{2}f'_{w_0} - \lambda z_0 &= 0, \\ \lambda\varphi'_{t_0} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Nous aurons deux cas à distinguer.

1° *Le point* (x_0, y_0, z_0, t_0) *n'est pas dans le plan de la conique.*

Le coefficient de λ étant différent de zéro, pour que la quatrième équation soit satisfaite, il faut qu'on ait

$$\lambda = 0;$$

les trois premières équations se réduisent alors à

$$f'_{u_0} = 0, \qquad f'_{v_0} = 0, \qquad f'_{w_0} = 0;$$

elles déterminent le plan de la conique.

Ainsi, tout point en dehors du plan de la conique a pour plan polaire ce plan.

2° *Le point* (x_0, y_0, z_0, t_0) *est dans le plan de la conique.*

Le coefficient de λ est nul, et le système (4) se réduit aux trois premières équations.

On en conclut que les coordonnées du plan polaire vérifient les équations

$$\frac{f'_{u_0}}{x_0} = \frac{f'_{v_0}}{y_0} = \frac{f'_{w_0}}{z_0}.$$

Si l'on y considère u_0, v_0, w_0, r_0 comme coordonnées courantes, ces équations représentent une droite, et tout plan passant par cette droite est plan polaire du point (x_0, y_0, z_0, t_0).

Cette droite est dans le plan de la conique, elle est par rapport à cette conique la polaire du point donné.

Troisième cas. — Supposons $\Delta = 0$, et tous les mineurs du premier ordre nuls.

Dans ce cas, l'équation (2) représente deux points distincts P et Q. Supposons, par exemple, que le mineur

$$\begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro ; on peut alors résoudre les deux premières équations du système (3) par rapport à u_0 et v_0, et en remplaçant dans les deux autres on a

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b'w_0 + cr_0 - \lambda x_0 \\ b'' & a' & bw_0 + c'r_0 - \lambda y_0 \\ b' & b & a''w_0 + c''r_0 - \lambda z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b'w_0 + cr_0 - \lambda x_0 \\ b'' & a' & bw_0 + c'r_0 - \lambda y_0 \\ c & c' & c''w_0 + dr_0 - \lambda t_0 \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut écrire, puisque tous les mineurs du premier ordre de Δ sont nuls,

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ b' & b & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ c & c' & t_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si on se reporte au numéro 126, on voit qu'en égalant les coefficients de λ à zéro, on obtient les conditions pour que le point (x_0, y_0, z_0, t_0) soit sur la droite PQ.

Le système (3) est équivalent au système suivant :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 = 0, \\ &\frac{1}{2} f'_{v_0} - \lambda y_0 = 0, \\ &\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ b' & b & z_0 \end{vmatrix} = 0, \\ &\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ c & c' & t_0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

1° *Le point* (x_0, y_0, z_0, t_0) *n'est pas sur la droite* PQ.

Les deux dernières équations donnent alors

$$\lambda = 0 ;$$

le système se réduit aux deux équations

$$f'_{u_0} = 0, \qquad f'_{v_0} = 0,$$

qui admet pour solutions les coordonnées de tous les plans passant par la droite PQ.

On en conclut que tout point en dehors de la droite PQ admet comme plans polaires tous les plans passant par cette droite.

2° *Le point* (x_0, y_0, z_0, t_0) *est sur la droite* PQ.

Les deux dernières équations du système (5) sont vérifiées quel que soit λ, le système se réduit aux deux premières équations ; on voit que les coordonnées du plan polaire satisfont à l'équation

$$\frac{f'_{u_0}}{x_0} = \frac{f'_{v_0}}{y_0}.$$

Si l'on y considère u_0, v_0, w_0, r_0 comme coordonnées courantes, cette équation représente un point situé sur la droite PQ, et tout plan passant par ce point est plan polaire du point (x_0, y_0, z_0, t_0). Ce point et le point donné divisent harmoniquement les points P et Q.

Quatrième cas. Supposons que Δ soit nul, ainsi que tous ses mineurs du premier et du second ordre.

L'équation (1) représente un point double.

Supposons $a \neq 0$; on peut tirer u_0 de la première équation du système (3), et en remplaçant dans les trois autres, on obtient le système équivalent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 = 0\,,\\
&\lambda \begin{vmatrix} a & x_0 \\ b'' & y_0 \end{vmatrix} = 0\,,\\
&\lambda \begin{vmatrix} a & x_0 \\ b' & z_0 \end{vmatrix} = 0\,,\\
&\lambda \begin{vmatrix} a & x_0 \\ c & t_0 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Si on annule les coefficients de λ dans ces trois dernières équations, on a

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b''} = \frac{z_0}{b'} = \frac{t_0}{c}\,;$$

elles expriment que le point donné coïncide avec le point double, car $f(u, v, w, r)$ étant carré parfait, sa racine est proportionnelle à une dérivée partielle, f'_u, puisque $a \neq 0$.

1° *Supposons que le point* (x_0, y_0, z_0, t_0) *ne coïncide pas avec le point double.*

Les coefficients de λ dans les trois dernières équations du système (6) n'étant pas tous nuls, on doit avoir $\lambda = 0$, et il reste

$$f'_{u_0} = 0.$$

Cette condition exprime que le plan polaire passe par le point double.

2° *Le point* (x_0, y_0, z_0, t_0) *coïncide avec le point double.*

Les trois dernières équations du système (6) sont vérifiées quel que soit λ ; il reste l'équation

$$\frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 = 0,$$

qui est vérifiée par les coordonnées d'un plan quelconque, puisque λ est arbitraire ; le plan polaire du point double est entièrement indéterminé.

144. On peut résumer tous ces résultats de la manière suivante :

1° Si l'équation (1) représente une véritable quadrique, un plan quelconque a un pôle bien déterminé, et un point quelconque a un plan polaire également bien déterminé.

2° Si l'équation (1) représente une conique C, située dans un plan P, tout plan autre que le plan P admet un pôle bien déterminé qui coïncide avec le pole par rapport à la conique C de la trace du plan sur le plan P. Le plan P a pour pôle un point arbitraire de l'espace.

Tout point en dehors du plan P a pour plan polaire le plan P, tout point situé dans le plan P a pour plans polaires tous les plans passant par la polaire du point par rapport à la conique C.

3° Si l'équation (1) représente deux points distincts, A et B, tout plan ne passant pas par la droite AB a un pôle bien déterminé, qui est le conjugué harmonique, par rapport à A et B, du point de rencontre du plan avec la droite AB. Tout plan passant par la droite AB admet pour pôles tous les points de l'espace.

Un point quelconque non situé sur la droite AB a pour plans polaires tous les plans passant par AB ; un point quelconque de la droite AB admet pour plans polaires tous les plans passant par le conjugué harmonique du point par rapport à A et B.

4° Si l'équation (1) représente un point double, tout plan ne passant pas par le point double a pour pôle ce point double, et tout plan passant par le point double a pour pôle un point quelconque de l'espace.

Tout point autre que le point double a pour plan polaire un plan quelconque passant par le point double, et le point double a pour plan polaire un plan quelconque de l'espace.

145. Droites conjuguées. — *Soit une droite quelconque* D. *Si un plan tourne autour de cette droite, le pôle de ce plan décrit une autre droite* D'.

Soient, en effet, $P_1(u_1, v_1, w_1, r_1)$ et $P_2(u_2, v_2, w_2, r_2)$ deux plans passant par la droite D ; un plan quelconque passant par cette droite a pour coordonnées

$$u_1 + \lambda u_2, \qquad v_1 + \lambda v_2, \qquad w_1 + \lambda w_2, \qquad r_1 + \lambda r_2 ;$$

les coordonnées du pôle de ce plan sont alors

$$f'_{u_1} + \lambda f'_{u_2}, \qquad f'_{v_1} + \lambda f'_{v_2}, \qquad f'_{w_1} + \lambda f'_{w_2}, \qquad f'_{r_1} + \lambda f'_{r_2}.$$

Par conséquent quand λ varie, ce point décrit la droite D qui joint les pôles A_1 et A_2 des plans P_1 et P_2.

Réciproquement, tout plan passant par D' *a son pôle sur* D.

Soit un plan $P'(u', v', w', r')$ passant par la droite D' ; ce plan contient alors les points A_1 et A_2, et on a

$$u' f'_{u_1} + v' f'_{v_1} + w' f'_{w_1} + r' f'_{r_1} = 0,$$
$$u' f'_{u_2} + v' f'_{v_2} + w' f'_{w_2} + r' f'_{r_2} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$u_1 f'_{u'} + v_1 f'_{v'} + w_1 f'_{w'} + r_1 f'_{r'} = 0,$$
$$u_2 f'_{u'} + v_2 f'_{v'} + w_2 f'_{w'} + r_2 f'_{r'} = 0,$$

ce qui montre que les plans P_1 et P_2 passent par le pôle du plan P', autrement dit que ce pôle est situé sur la droite D.

On appelle *droites conjuguées* deux droites qui jouissent des propriétés des droites D et D', c'est-à-dire qui sont telles que le plan polaire d'un point quelconque de l'une passe par l'autre.

146. Si par une droite on mène des plans tangents à une quadrique, la droite qui joint les points de contact est la droite conjuguée de la droite donnée.

Cela résulte de ce que le pôle d'un plan tangent est le point de contact.

De même, si on mène les plans tangents aux points de rencontre d'une droite et d'une quadrique, l'intersection de ces plans est la droite conjuguée de la droite donnée.

147. Si par une droite D on mène un plan qui coupe une quadrique suivant une conique, le pôle A de la droite D par rapport à cette conique est sur la droite conjuguée.

Hosted by Google

En effet, le plan polaire du point A contient la droite D, donc le point A appartient à la droite conjuguée de la droite D.

On en conclut que si le plan sécant tourne autour de la droite D, le point A décrit la droite conjuguée de cette droite.

148. Supposons qu'une droite D soit tangente à une quadrique en un point A, tous les plans passant par la droite D auront leurs pôles dans le plan tangent à la quadrique au point A ; il en résulte que la droite D′, conjuguée de la droite D, est située dans le plan tangent en A et passe par le point A.

De plus, les deux droites D et D′ doivent former un faisceau harmonique avec les génératrices de la surface passant au point A, car il est visible que toute droite qui rencontre deux droites conjuguées doit couper la surface en deux points conjugués harmoniques des points de rencontre avec les droites conjuguées.

Si la droite D est une des génératrices de la surface passant par le point A, la droite conjuguée D′ se confond avec la droite D.

149. Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'équation (1) représentait une véritable quadrique.

Supposons maintenant qu'elle représente une conique.

Une droite D rencontrant le plan de cette conique en un point A aura pour conjuguée la polaire du point A par rapport à la conique.

Toute droite située dans le plan de la conique aura pour droite conjuguée une droite quelconque passant par le pôle de la droite donnée par rapport à la conique.

150. **Tétraèdres conjugués.** — On dit qu'un tétraèdre est conjugué par rapport à une quadrique (que nous ne supposerons pas réduite à une conique) lorsque chaque face a pour pôle le sommet opposé.

Hosted by Google

Il existe une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique.

En effet, soit P_1 le plan polaire d'un point arbitraire A_1. Prenons dans le plan P_1 un point quelconque A_2 ; le plan polaire P_2 de A_2 contient A_1.

Les deux plans P_1 et P_2 se coupent suivant une droite ; si l'on choisit sur cette droite deux points A_3 et A_4 conjugués par rapport à la quadrique, les quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 seront les sommets d'un tétraèdre conjugué.

Les éléments d'un tétraèdre conjugué dépendent de *six* paramètres indépendants, car le point A_1 est arbitraire (trois paramètres), le point A_2 est arbitraire dans le plan P_1 (deux paramètres), enfin le point A_3 est arbitraire sur la droite intersection de P_1 et de P_2 (un paramètre).

Remarquons que si un tétraèdre est conjugué par rapport à une quadrique, deux sommets quelconques, deux faces quelconques et deux arêtes opposées quelconques sont conjugués par rapport à la quadrique.

151. Quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre. — On dit qu'une quadrique est conjuguée par rapport à un tétraèdre, lorsque le tétraèdre est conjugué par rapport à la quadrique.

Nous allons chercher l'équation générale des quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre.

Supposons d'abord que l'on prenne pour axes de coordonnées trois arêtes aboutissant à un même sommet, OA, OB, OC ; OA étant l'axe des x, OB l'axe des y et OC l'axe des z.

Posons en outre

$$\overline{OA} = \alpha, \qquad \overline{OB} = \beta, \qquad \overline{OC} = \gamma.$$

L'équation générale des quadriques est

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + \cdots dr^2 = 0.$$

Écrivons que le pôle du plan yOz est le point A. L'équation du pôle de ce plan est

$$\frac{1}{2} f'_u = au + b''v + b'w + cr = 0 ;$$

on doit avoir

$$b'' = 0, \qquad b' = 0, \qquad \frac{a}{c} = \alpha.$$

En écrivant que le plan zOx a pour pôle le point B, on a

$$b'' = 0, \qquad b = 0, \qquad \frac{a'}{c'} = \beta.$$

En écrivant que le plan xOy a pour pôle le point C, on a

$$b = 0, \qquad b' = 0, \qquad \frac{a''}{c''} = \gamma.$$

On trouve donc déjà les conditions, au nombre de six,

$$a = c\alpha, \qquad a' = c'\beta, \qquad a'' = c''\gamma,$$
$$b = b' = b'' = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, O sera le pôle du plan ABC.

L'équation de la quadrique devient alors

$$c\alpha u^2 + c'\beta v^2 + c''\gamma w^2 + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0$$

ou encore

$$\frac{c}{\alpha}(u\alpha + r)^2 + \frac{c'}{\beta}(v\beta + r)^2 + \frac{c''}{\gamma}(w\gamma + r)^2 + r^2\left(d - \frac{c}{\alpha} - \frac{c'}{\beta} - \frac{c''}{\gamma}\right) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$A(u\alpha + r)^2 + B(v\beta + r)^2 + C(w\gamma + r)^2 + Dr^2 = 0,$$

A, B, C, D désignant des nombres arbitraires.

Supposons maintenant que le tétraèdre soit rapporté à des axes quelconques, et désignons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) les coordonnées des sommets A_1, A_2, A_3, A_4.

Si nous prenons pour axes de coordonnées les directions A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3, l'équation générale des quadriques conjuguées par rapport au tétraèdre sera

$$A(u'\alpha + r')^2 + B(v'\beta + r')^2 + C(w'\gamma + r')^2 + Dr'^2 = 0,$$

α, β, γ désignant les longueurs des arêtes qui aboutissent au sommet A_4.

Hosted by Google

Revenons aux premiers axes, en utilisant les formules de transformation (1) du numéro 50 et en remarquant que les coordonnées du point directeur de A_4A_1 sont $\frac{x_1 - x_4}{\alpha}$, $\frac{y_1 - y_4}{\alpha}$, $\frac{z_1 - z_4}{\alpha}$; pour la direction A_4A_2 ces quantités sont $\frac{x_2 - x_4}{\beta}$, $\frac{y_2 - y_4}{\beta}$, $\frac{z_2 - z_4}{\beta}$, etc.; on aura donc

$$u' = \frac{u(x_1 - x_4)}{\alpha} + \frac{v(y_1 - y_4)}{\alpha} + \frac{w(z_1 - z_4)}{\alpha},$$

$$v' = \frac{u(x_2 - x_4)}{\beta} + \frac{v(y_2 - y_4)}{\beta} + \frac{w(z_2 - z_4)}{\beta},$$

$$w' = \frac{u(x_3 - x_4)}{\gamma} + \frac{v(y_3 - y_4)}{\gamma} + \frac{w(z_3 - z_4)}{\gamma},$$

$$r' = ux_4 + vy_4 + wz_4 + r.$$

On tire aisément de ces équations

$$u'\alpha + r' = ux_1 + vy_1 + wz_1 + r,$$

$$v'\beta + r' = ux_2 + vy_2 + wz_2 + r,$$

$$w'\gamma + r' = ux_3 + vy_3 + wz_3 + r,$$

$$r' = ux_4 + vy_4 + wz_4 + r.$$

L'équation de la quadrique devient donc

$$A(ux_1 + vy_1 + wz_1 + r)^2 + B(ux_2 + vy_2 + wz_2 + r)^2$$
$$+ C(ux_3 + vy_3 + wz_3 + r)^2 + D(ux_4 + vy_4 + wz_4 + r)^2 = 0;$$

en conséquence, si l'on désigne par P_1, P_2, P_3, P_4 les premiers membres des équations des sommets du tétraèdre, on voit que l'équation tangentielle générale des quadriques conjuguées par rapport à ce tétraèdre est

$$AP_1^2 + BP_2^2 + CP_3^2 + DP_4^2 = 0.$$

152. Théorème de Hesse. — *Si deux tétraèdres sont conjugués par rapport à une quadrique, toute quadrique passant par sept des sommets de ces tétraèdres passe par le huitième.*

Soient x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) les coordonnées des huit sommets des tétraèdres.

L'équation tangentielle d'une quadrique conjuguée par rapport au tétraèdre qui a pour sommets les quatre premiers points est

$$\sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i(ux_i + vy_i + wz_i + r)^2 = 0\ ;$$

de même l'équation tangentielle d'une quadrique conjuguée par rapport au tétraèdre formé par les quatre autres points est

$$\sum_{i=5}^{i=8} \lambda_i(ux_i + vy_i + wz_i + r)^2 = 0.$$

Écrivons que ces deux équations représentent la même quadrique ; on obtient une identité de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=8} \mu_i(ux_i + vy_i + wz_i + r)^2 \equiv 0.$$

On en déduit

$$\Sigma\mu_i x_i^2 = 0, \qquad \Sigma\mu_i y_i^2 = 0, \qquad \Sigma\mu_i z_i^2 = 0, \qquad \Sigma\mu_i y_i z_i = 0,$$
$$\Sigma\mu_i z_i x_i = 0,\ \ \Sigma\mu_i x_i y_i = 0,\ \ \Sigma\mu_i x_i = 0,\ \ \Sigma\mu_i y_i = 0,\ \ \Sigma\mu_i z_i = 0,\ \ \Sigma\mu_i = 0.$$

Considérons le premier membre de l'équation ponctuelle d'une quadrique quelconque

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0\ ;$$

on aura, quelles que soient les valeurs des coefficients,

$$\sum_{i=1}^{i=8} \mu_i\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0.$$

Cette égalité prouve que si la quadrique

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

passe par sept des huit points considérés, elle passera par le huitième.

En transformant par le principe de dualité, on obtient le théorème suivant :

Si deux tétraèdres sont conjugués par rapport à une quadrique, toute quadrique tangente à sept des faces de ces tétraèdres est tangente à la huitième.

Hosted by Google

EXERCICES ET NOTES

1. Tétraèdres polaires réciproques. — On dit que deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une quadrique lorsque les sommets de l'un sont les pôles des faces de l'autre.

Théorème. — *Les droites qui joignent les sommets correspondants de deux tétraèdres polaires réciproques sont des génératrices d'un même hyperboloïde.*

Soient

$$\begin{aligned} \alpha &= ax + a'y + a''z + a'''t = 0, \\ \beta &= bx + b'y + b''z + b'''t = 0, \\ \gamma &= cx + c'y + c''z + c'''t = 0, \\ \delta &= dx + d'y + d''z + d'''t = 0 \end{aligned}$$

les équations des faces d'un tétraèdre ABCD; nous allons démontrer que si l'on joint chaque sommet au pôle de la face opposée par rapport à une quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

les quatre droites obtenues sont génératrices d'un hyperboloïde.

Une droite passant par le sommet A a pour équations

$$\frac{\beta}{\lambda} = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\delta}{\nu};$$

écrivons que cette droite passe par le pôle $(f'_a, f'_{a'}, f'_{a''}, f'_{a'''})$ de la face BCD; on aura les conditions

$$\frac{\lambda}{(ab)} = \frac{\mu}{(ac)} = \frac{\nu}{(ad)},$$

en posant

$$(ab) = b\frac{\partial f}{\partial a} + b'\frac{\partial f}{\partial a'} + b''\frac{\partial f}{\partial a''} + b'''\frac{\partial f}{\partial a'''} = a\frac{\partial f}{\partial b} + a'\frac{\partial f}{\partial b'} + a''\frac{\partial f}{\partial b''} + a'''\frac{\partial f}{\partial b'''},$$

(ac) désignant une expression analogue... etc.

On en conclut que les droites joignant les sommets aux pôles des faces opposées sont déterminées par les équations

$$\frac{\beta}{(ab)} = \frac{\gamma}{(ac)} = \frac{\delta}{(ad)},$$

$$\frac{\alpha}{(ba)} = \frac{\gamma}{(bc)} = \frac{\delta}{(bd)},$$

Hosted by Google

$$\frac{\alpha}{(ca)} = \frac{\beta}{(cb)} = \frac{\delta}{(cd)},$$
$$\frac{\alpha}{(da)} = \frac{\beta}{(db)} = \frac{\gamma}{(dc)}.$$

On en conclut (chapitre I, Exercice 4) que ces quatre droites sont sur un hyperboloïde.

Corrélativement, les droites intersections des faces correspondantes deux à deux de deux tétraèdres polaires réciproques sont quatre génératrices d'un hyperboloïde.

2. *Étant donnés les plans polaires de deux points par rapport à une quadrique, si l'on mène par chacun de ces points un plan parallèle au plan polaire de l'autre, le plan mené par l'intersection de ces deux plans et par l'intersection des deux premiers passe par le centre de la quadrique.*

3. *Étant donnés les plans polaires de deux points fixes par rapport à une quadrique, démontrer que le rapport des distances de ces points à un plan quelconque est dans un rapport constant avec le rapport des distances du pôle de ce plan aux deux plans polaires.*

4. *On considère les quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre et qui sont tangentes à un plan fixe. Démontrer que les plans polaires d'un point fixe enveloppent une surface de troisième classe passant par les arêtes du tétraèdre.*

Désignons par

$$\alpha = au + a'v + a''w + a'''r = 0,$$
$$\beta = bu + b'v + b''w + b'''r = 0,$$
$$\gamma = cu + c'v + c''w + c'''r = 0,$$
$$\delta = du + d'v + d''w + d'''r = 0$$

les équations des sommets du tétraèdre. L'équation générale des quadriques conjuguées par rapport à ce tétraèdre est

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0,$$

avec la condition

$$A\alpha_0^2 + B\beta_0^2 + C\gamma_0^2 + D\delta_0^2 = 0, \tag{1}$$

qui exprime que le plan (u_0, v_0, w_0, r_0) touche ces quadriques.

Or le pôle d'un plan (u', v', w', r') a pour équation

$$A\alpha\alpha' + B\beta\beta' + C\gamma\gamma' + D\delta\delta' = 0;$$

pour écrire que ce pôle est fixe, il suffit d'observer que l'équation d'un point peut toujours se mettre sous la forme (20)

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0;$$

on aura donc

$$\frac{A\alpha'}{l} = \frac{B\beta'}{m} = \frac{C\gamma'}{n} = \frac{D\delta'}{p}. \qquad (2)$$

En éliminant A, B, C, D entre (1) et (2), on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan (u', v', w', r'),

$$\frac{l\alpha_0^2}{\alpha'} + \frac{m\beta_0^2}{\beta'} + \frac{n\gamma_0^2}{\gamma'} + \frac{p\delta_0^2}{\delta'} = 0.$$

Cette équation étant vérifiée par les coordonnées de tous les plans passant par une arête quelconque du tétraèdre, on en conclut que cette arête est sur la surface.

5. *On considère toutes les quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre et qui sont telles que le plan polaire d'un point donné* A *passe par un point également donné* B. *Démontrer que le plan polaire d'un point fixe passe par un autre point fixe.*

Démonstration analogue à la précédente.

6. *Étant donné un tétraèdre, on considère tous les paraboloïdes conjugués par rapport à ce tétraèdre; on demande l'enveloppe du plan polaire d'un point fixe, le lieu des pôles d'un plan fixe, et le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à un plan fixe.*

Si l'on prend pour axes de coordonnées trois arêtes du tétraèdre, l'équation du paraboloïde pourra s'écrire

$$Au(u\alpha + 2r) + Bv(v\beta + 2r) + Cw(w\gamma + 2r) = 0.$$

7. *Lorsque deux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique ont un sommet commun, les droites joignant le sommet commun aux six autres sommets appartiennent à un même cône du deuxième degré.*

Prenons le sommet commun à l'origine, et désignons par x_i, y_i, z $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ les coordonnées des six autres sommets des deux tétraèdres; posons en outre

$$P_i = ux_i + vy_i + wz_i + r.$$

L'équation de la surface peut s'écrire indifféremment sous les deux formes

$$r^2 + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i P_i^2 = 0,$$

$$r^2 + \sum_{i=4}^{i=6} \lambda_i P_i^2 = 0;$$

on en conclut une identité de la forme

$$r^2 + \sum_{i=1}^{i=6} \mu_i P_i^2 \equiv 0.$$

Écrivons que les coefficients de u^2, v^2, w^2, vw, wu, uv sont nuls ; on aura

$$\Sigma\mu_i x_i^2 = 0, \qquad \Sigma\mu_i y_i^2 = 0, \qquad \Sigma\mu_i z_i^2 = 0,$$
$$\Sigma\mu_i y_i z_i = 0, \qquad \Sigma\mu_i z_i x_i = 0, \qquad \Sigma\mu_i x_i y_i = 0 ;$$

ces égalités démontrent la propriété énoncée.

Corrélativement, si deux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique ont deux faces situées dans un même plan, les plans des six autres faces sont tangents à un cône de deuxième degré.

8. *Connaissant les coordonnées plückériennes d'une droite, trouver celles de la droite conjuguée par rapport à une quadrique.*

Soit une droite D définie par l'intersection de deux plans

$$u_1x + v_1y + w_1z + r_1t = 0,$$
$$u_2x + v_2y + w_2z + r_2t = 0 ;$$

ses coordonnées plückériennes sont (22)

$$\alpha = v_1w_2 - w_1v_2, \qquad l = u_1r_2 - r_1u_2, \ldots\ldots, \text{ etc.}$$

La droite conjuguée de cette droite par rapport à une quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0$$

joint les deux points $(f'_{u_1}, f'_{v_1}, f'_{w_1}, f'_{r_1})$ et $(f'_{u_2}, f'_{v_2}, f'_{w_2}, f'_{r_2})$; ses coordonnées plückériennes α', β', γ', l', m', n' sont proportionnelles aux quantités

$$f'_{u_1}f'_{r_2} - f'_{r_1}f'_{u_2}, \ldots, f'_{v_1}f'_{w_2} - f'_{w_1}f'_{v_2}, \ldots, \text{ etc.}$$

On en déduit aisément les formules suivantes :

$$\alpha' = \alpha(b''c'' - b'c') + \beta(b'c - ac'') + \gamma(ac' - b''c) + l(ad - c^2)$$
$$+ m(b''d - cc') + n(b'd - c''c),$$

$$\beta' = \alpha(a'c'' - bc') + \beta(bc - b''c'') + \gamma(b''c' - a'c) + l(b''d - cc')$$
$$+ m(a'd - c'^2) + n(bd - c'c''),$$

$$\gamma' = \alpha(bc'' - a''c') + \beta(a''c - b'c'') + \gamma(b'c' - bc) + l(b'd - c''c)$$
$$+ m(bd - c'c'') + n(a''d - c''^2),$$

$$l' = \alpha(a'a'' - b^2) + \beta(bb' - a''b'') + \gamma(b''b - a'b') + l(b''c'' - b'c')$$
$$+ m(a'c'' - bc') + n(bc'' - a''c'),$$

$$m' = \alpha(bb' - a''b'') + \beta(a''a - b'^2) + \gamma(b'b'' - ab) + l(b'c - ac'')$$
$$+ m(bc - b''c'') + n(a''c - b'c''),$$

$$n' = \alpha(b''b - a'b') + \beta(b'b'' - ab) + \gamma(aa' - b''^2) + l(ac' - b''c)$$
$$+ m(b''c' - a'c) + n(b'c' - bc).$$

Hosted by Google

On voit ainsi que les coordonnées de la droite D' sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées de la droite D, les coefficients étant les mineurs du second ordre du discriminant Δ de la fonction $f(u, v, w, r)$.

On peut déduire de là la condition pour que la droite D touche la quadrique, c'est-à-dire l'équation de cette quadrique en coordonnées de droites. Il suffira d'écrire que les deux droites D et D' se rencontrent, c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha' l + \beta' m + \gamma' n + \alpha l' + \beta m' + \gamma n' = 0,$$

ce qui donne une relation du deuxième degré entre les coordonnées de la droite D.

Mais n'oublions pas que, réciproquement, toute relation du deuxième degré entre les coordonnées d'une droite n'est pas en général l'équation d'une quadrique ; cette relation représente un complexe du second ordre.

9. *Étant donnés deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques, les plans polaires des points de l'un d'eux par rapport à l'autre enveloppent un ellipsoïde homothétique et concentrique aux deux ellipsoïdes donnés.*

Hosted by Google

CHAPITRE VII

CENTRE, PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES PLANS PRINCIPAUX ET AXES

153. On appelle centre d'une quadrique un point tel que toute droite passant par ce point rencontre la surface en deux points symétriques par rapport à ce point.

Il résulte de cette définition que le centre est le pôle du plan de l'infini, et que, réciproquement, si le pôle du plan de l'infini est à distance finie, ce point est un centre.

Soit

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0 \quad (1)$$

l'équation tangentielle de la surface.

L'équation du pôle d'un plan quelconque $(u_0,\ v_0,\ w_0,\ r_0)$ est

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} = 0$$

ou encore

$$u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w + r_0f'_r = 0.$$

Si le plan est à l'infini, u_0, v_0, w_0 sont nuls, et l'équation devient

$$\frac{1}{2}f'_r = cu + c'v + c''w + dr = 0.$$

Premier cas. — $d \neq 0$.

Le pôle est à distance finie. La surface a un centre qui a pour coordonnées cartésiennes $\frac{c}{d}$, $\frac{c'}{d}$, $\frac{c''}{d}$, ou encore pour coordonnées homogènes c, c', c'', d.

Si l'équation (1) représente une conique, le pôle du plan de l'infini coïncide avec le pôle par rapport à cette conique de la droite de l'infini de son plan (141) ; ce point est donc bien aussi le centre de la conique.

Enfin si l'équation représente deux points, le pôle du plan de l'infini est le milieu de ces deux points.

DEUXIÈME CAS. — $d = 0$.

Le pôle du plan de l'infini est à l'infini, ce qu'on pouvait prévoir, puisque la surface est tangente à ce plan ; il n'y a donc pas de centre.

Le point où la surface (ou la courbe) touche le plan de l'infini a pour coordonnées c, c', c'' et 0 ; la direction dans laquelle se trouve ce point est, comme nous le verrons plus loin, la direction de l'axe du paraboloïde (ou de la parabole) représenté par l'équation (1).

154. L'équation tangentielle générale des quadriques qui ont pour centre le point (x, y, z) est

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2xur + 2yvr + 2zwr + r^2 = 0.$$

155. Application. — *Le lieu des centres des quadriques tangentes à sept plans est un plan.*

Soient $u_i, v_i, w_i, r_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ les coordonnées des sept plans.

L'équation d'une quadrique ayant pour centre le point (x, y, z) est écrite plus haut ; cette quadrique étant tangente aux sept plans, on aura sept équations de la forme

$$au_i^2 + a'v_i^2 + \cdots 2xu_ir_i + 2yv_ir_i + 2zw_ir_i + r_i^2 = 0.$$

En éliminant a, a', a'', b, b', b'' entre ces sept équations, on aura l'équation du lieu.

Le premier membre de cette équation est un déterminant dont les éléments d'une ligne quelconque sont

$$u_i^2,\quad v_i^2,\quad w_i^2,\quad v_iw_i,\quad w_iu_i,\quad u_iv_i,\quad 2xu_ir_i + 2yv_ir_i + 2zw_ir_i + r_i^2.$$

Les variables figurent seulement dans la dernière colonne et au premier degré; le lieu est donc un plan.

On peut encore obtenir ce résultat de la manière suivante. On cherche l'équation générale des quadriques tangentes à sept plans; on écrit que l'équation

$$au^2 + a'v^2 + \cdots + 2c''wr + dr^2 = 0$$

est vérifiée par les coordonnées des plans donnés.

On a sept équations entre dix coefficients, on peut résoudre par rapport à sept inconnues en fonction des trois autres que nous désignerons par λ_1, λ_2, λ_3. Ces sept inconnues sont des fonctions linéaires et homogènes de λ_1, λ_2, λ_3, de la forme

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3.$$

Il en résulte que l'équation générale des surfaces tangentes aux sept plans est

$$\lambda_1 f_1(u, v, w, r) + \lambda_2 f_2(u, v, w, r) + \lambda_3 f_3(u, v, w, r) = 0,$$

en posant

$$f_1(u, v, w, r) \equiv a_1u^2 + a_1'v^2 + \cdots 2c_1''wr + d_1r^2,$$
$$f_2(u, v, w, r) \equiv a_2u^2 + \cdots + d_2r^2,$$
$$f_3(u, v, w, r) \equiv a_3u^2 + \cdots + d_3r^2.$$

Le centre de la quadrique a pour coordonnées

$$x = \frac{c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3}{d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + d_3\lambda_3},$$
$$y = \frac{c_1'\lambda_1 + c_2'\lambda_2 + c_3'\lambda_3}{d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + d_3\lambda_3},$$
$$z = \frac{c_1''\lambda_1 + c_2''\lambda_2 + c_3''\lambda_3}{d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + d_3\lambda_3}.$$

Quand λ_1, λ_2 et λ_3 varient, il est visible que ce point décrit le plan qui est déterminé par les trois points $\left(\frac{c_1}{d_1}, \frac{c_1'}{d_1}, \frac{c_1''}{d_1}\right)$, $\left(\frac{c_2}{d_2}, \frac{c_2'}{d_2}, \frac{c_2''}{d_2}\right)$ et $\left(\frac{c_3}{d_3}, \frac{c_3'}{d_3}, \frac{c_3''}{d_3}\right)$.

156. *Le lieu des centres des quadriques tangentes à huit plans est une droite.*

L'équation générale des quadriques tangentes à huit plans est

$$\lambda_1 f_1(u, v, w, r) + \lambda_2 f_2(u, v, w, r) = 0.$$

Le centre a pour coordonnées

$$x = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2}{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2}, \qquad y = \frac{\lambda_1 c_1' + \lambda_2 c_2'}{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2}, \qquad z = \frac{\lambda_1 c_1'' + \lambda_2 c_2''}{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2};$$

on voit ainsi que ce point décrit une droite.

Hosted by Google

D'ailleurs ce résultat est une conséquence directe du théorème qui précède.

157. Ces théorèmes sont des cas particuliers du théorème plus général suivant :

Le lieu du pôle d'un plan fixe par rapport aux quadriques tangentes à sept plans (ou tangentes à huit plans) est un plan (ou une droite).

158. Plans diamétraux. — Le lieu des milieux des cordes d'une quadrique parallèles à une direction de droite est un plan qu'on appelle le plan diamétral conjugué de la direction donnée.

Ce lieu est en effet le plan polaire du point à l'infini dans la direction donnée.

Soient α, β, γ les paramètres directeurs de la direction donnée ; le point à l'infini dans cette direction a pour coordonnées homogènes α, β, γ, 0 ; les coordonnées u, v, w, r de son plan polaire seront déterminées par les équations

$$\frac{f'_u}{\alpha} = \frac{f'_v}{\beta} = \frac{f'_w}{\gamma},$$
$$f'_r = 0.$$

On a trois équations du premier degré que l'on peut résoudre comme au numéro 143 ; on a en général un seul plan diamétral correspondant à une direction.

159. Les plans diamétraux étant des plans polaires de points situés dans le plan de l'infini doivent passer par le pôle de ce plan ; c'est ce que montre d'ailleurs l'équation $f'_r = 0$.

Il en résulte que dans les surfaces à centre les plans diamétraux passent par le centre, tandis que dans les paraboloïdes, ils sont parallèles à la direction de l'axe.

160. Le plan polaire d'un point à l'infini n'est un véritable plan diamétral que si ce point n'est pas situé sur la surface.

Dans le cas contraire, si ce point est sur la surface, le plan

Hosted by Google

polaire correspondant est le plan tangent à la surface en ce point. Si la surface est une surface à centre, ce plan est tangent au cône asymptote ; si la surface est un paraboloïde, ce plan passe par l'une des droites, intersection de la surface et du plan de l'infini, à moins que la direction donnée ne soit précisément la direction de l'axe (ce qui revient à dire que le point à l'infini est le point de rencontre des deux droites dont nous venons de parler) ; dans ce cas le plan polaire coïncide avec le plan de l'infini.

161. Examinons le cas où l'équation (1) représente une conique ; il suffira de se reporter à la théorie des pôles et plans polaires (144).

Si la direction donnée n'est pas parallèle au plan de la conique, le point à l'infini correspondant n'est pas dans le plan de cette conique, le plan polaire de ce point est le plan de la conique.

Si la direction donnée est parallèle au plan de la conique, le point à l'infini correspondant est dans le plan de la conique, le plan polaire est un plan quelconque passant par la polaire de ce point par rapport à la conique ; on peut donc dire que dans ce cas le plan diamétral conjugué de la direction donnée est un plan quelconque passant par le diamètre conjugué de la direction dans la conique.

Si le point à l'infini est sur la conique, son plan polaire passera par une asymptote si la conique est une hyperbole, ou sera parallèle au plan de cette conique si c'est une parabole.

162. Plans diamétraux conjugués. — On dit que deux plans diamétraux sont conjugués lorsque chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Chacun de ces plans passe par le pôle de l'autre ; on peut les considérer comme deux plans conjugués par rapport à la quadrique.

Soient les deux directions (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$; nous allons chercher la condition pour que les plans diamétraux conju-

Hosted by Google

gués de ces directions soient conjugués par rapport à la quadrique.

J'écris pour cela que le plan diamétral conjugué de la direction (α, β, γ) est parallèle à la direction $(\alpha', \beta', \gamma')$; il suffit d'éliminer u, v, w, r entre les équations

$$\begin{gathered} f'_u - \lambda\alpha = 0, \\ f'_v - \lambda\beta = 0, \\ f'_w - \lambda\gamma = 0, \\ f'_r = 0, \\ u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0. \end{gathered}$$

On obtient la condition

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & \alpha \\ b'' & a' & b & c' & \beta \\ b' & b & a'' & c'' & \gamma \\ c & c' & c'' & d & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut remarquer que cela revient à écrire que les deux points à l'infini $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ et $(\alpha', \beta', \gamma', 0)$ sont conjugués par rapport à la quadrique.

163. Diamètres. — Le lieu des centres des sections d'une quadrique par des plans parallèles à un plan donné est une droite qu'on appelle le diamètre conjugué de la direction de plan.

En effet, les centres des sections sont les pôles par rapport à ces sections de la droite de l'infini par où passent les plans parallèles ; il en résulte (147) que le lieu de ces centres est la droite conjuguée de cette droite de l'infini.

Le diamètre conjugué d'une direction de plan est donc la droite conjuguée de la droite de l'infini par laquelle passe la direction de plan donnée.

Nous pouvons à l'aide de cette remarque déterminer analytiquement le diamètre.

Hosted by Google

Soit la direction de plan

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0.$$

Nous allons chercher la droite conjuguée de la droite de l'infini située dans ce plan.

Un plan quelconque passant par cette droite a pour coordonnées u_0, v_0, w_0, λ ; l'équation de son pôle est alors

$$u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w + \lambda f'_r = 0;$$

ce pôle est situé, quel que soit λ, sur la droite représentée par les deux équations

$$u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w = 0,$$
$$f'_r = 0 ;$$

ce sont les équations du diamètre cherché.

On voit que ce diamètre passe par le centre si la surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde, ou bien est parallèle à la direction de l'axe, si la surface est un paraboloïde.

164. Pour que la droite conjuguée d'une droite située à l'infini soit un diamètre, il est nécessaire que la droite de l'infini ne soit pas tangente à la surface ou ne soit pas située sur la surface.

Si la surface est à centre, elle rencontre le plan de l'infini suivant une véritable conique ; si une droite est tangente à cette conique, la droite conjuguée sera dans le plan tangent à la surface en ce point et sera la conjuguée harmonique de la droite donnée par rapport aux génératrices situées dans le plan tangent ; on en conclut que la droite conjuguée est génératrice du cône asymptote.

Si la surface est un paraboloïde, elle rencontre le plan de l'infini suivant deux droites Δ et Δ' qui se coupent en un point O. Toute droite du plan de l'infini passant par le point O aura pour droite conjuguée la conjuguée harmonique de cette droite par rapport à Δ et Δ' ; la droite Δ sera à elle-même sa droite conjuguée, ainsi que la droite Δ'.

Hosted by Google

165. On peut montrer directement que le lieu des centres des sections planes parallèles à un plan fixe est une droite.

En effet, l'équation de la conique intersection de la surface par un plan (u_0, v_0, w_0, r_0) est

$$(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2 - 4f(u, v, w, r)f_0 = 0,$$

f_0 désignant $f(u_0, v_0, w_0, r_0)$.

Les coordonnées du centre de cette conique sont

$$x = \frac{f'_{u_0}f'_{r_0} - 4cf_0}{f'^2_{r_0} - 4df_0}, \qquad y = \frac{f'_{v_0}f'_{r_0} - 4c'f_0}{f'^2_{r_0} - 4df_0}, \qquad z = \frac{f'_{w_0}f'_{r_0} - 4c''f_0}{f'^2_{r_0} - 4df_0}.$$

Si r_0 varie, ce point décrit une droite, car les termes de ces trois fractions sont du premier degré par rapport à r_0.

166. Si l'équation (1) représente une conique, deux cas peuvent se présenter : ou bien la droite donnée à l'infini n'est pas dans le plan de la conique, dans ce cas la droite conjuguée est le diamètre conjugué par rapport à la conique de la trace de la direction de plan sur le plan de la conique ; ou bien la droite à l'infini est dans le plan de la conique, la droite conjuguée est une droite quelconque passant par le pôle de la droite de l'infini par rapport à la conique.

167. La théorie des pôles et polaires nous donne immédiatement les théorèmes bien connus qui suivent.

Les plans diamétraux conjugués de toutes les directions de droites d'un plan passent par le diamètre conjugué du plan.

Les diamètres conjugués de toutes les directions de plans parallèles à une droite sont situés dans le plan diamétral conjugué de la droite.

Le diamètre conjugué de la direction d'un plan diamétral est parallèle aux cordes que divise le plan en deux parties égales.

168. Système de trois diamètres conjugués. — L'intersection de deux plans diamétraux est le diamètre conjugué de la direction de plan parallèle aux cordes conjuguées des plans diamétraux.

Considérons alors deux plans diamétraux conjugués (162) ;

leur intersection est parallèle à l'axe dans le cas où la surface est un paraboloïde ; mais, si la surface a un centre, cette intersection passe par le centre ; le plan diamétral conjugué de cette direction est conjugué des deux premiers, l'ensemble de ces plans constitue un système de trois plans diamétraux conjugués deux à deux, et les arêtes de ce trièdre forment trois diamètres conjugués.

Chacun de ces diamètres est le diamètre conjugué du plan formé par les deux autres.

Trois plans diamétraux conjugués forment avec le plan de l'infini un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique.

169. Formes réduites des équations des quadriques. — 1° Si la quadrique a un centre, nous prendrons comme axes trois diamètres conjugués ; les plans de coordonnées forment avec le plan de l'infini un tétraèdre conjugué, dont les équations des sommets sont

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0 ;$$

l'équation de la quadrique est donc de la forme

$$\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2 + \mathrm{D}r^2 = 0.$$

2° Si la quadrique est un paraboloïde, nous prendrons comme plans des zx et des xy deux plans diamétraux conjugués ; leur intersection sera alors parallèle à l'axe ; nous prendrons pour origine le point où cette droite rencontre la surface et pour plan des yz le plan tangent à la surface en ce point.

Soit l'équation

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots + 2c''wr = 0. \qquad (1)$$

J'écris que le pôle du plan des zx est à l'infini dans le plan des xy ; l'équation de ce pôle est

$$\frac{1}{2} f'_v = b''u + a'v + bw + c'r = 0 ;$$

on a

$$b = 0, \qquad c' = 0.$$

En écrivant de même que le pôle du plan des xy est à l'infini

Hosted by Google

dans le plan des zx, on obtient

$$b = 0, \qquad c'' = 0.$$

J'écris ensuite que le plan des yz est tangent et que son point de contact est à l'origine ; on a

$$a = 0, \qquad b'' = 0, \qquad b' = 0.$$

L'équation de la surface devient alors

$$a'v^2 + a''w^2 + 2cur = 0.$$

Nous avons obtenu (54) les équations ponctuelles correspondantes. Elles sont très aisées à retenir; il suffit de changer les variables u, v, w, r en x, y, z, t et de remplacer chaque coefficient par son inverse, sauf pour le coefficient de ur que l'on remplace par quatre fois son inverse. On a ainsi les équations

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \frac{t^2}{D} = 0,$$

$$\frac{y^2}{a'} + \frac{z^2}{a''} + \frac{2xt}{c} = 0.$$

170. Plans principaux et axes. — On appelle plan principal d'une quadrique un plan diamétral perpendiculaire à ses cordes conjuguées ; ces cordes sont également appelées cordes principales.

On appelle axe d'une quadrique un diamètre perpendiculaire à sa direction de plan conjuguée.

Il est aisé de voir qu'un axe est l'intersection de deux plans principaux ; en effet, soit P un plan quelconque perpendiculaire à l'axe, les plans diamétraux conjugués des directions du plan P passent par l'axe ; parmi ces plans il en est deux perpendiculaires à leurs directions conjuguées, ce sont ceux qui passent par les axes de la conique, intersection de la surface et du plan P.

Réciproquement, l'intersection de deux plans principaux est un axe, car c'est le diamètre conjugué de la direction du plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans principaux.

Hosted by Google

La détermination des axes revient donc à celle des plans principaux.

On peut considérer un plan principal comme un plan dont le pôle est à l'infini dans la direction perpendiculaire.

Soient u, v, w, r les coordonnées d'un plan; son pôle a pour coordonnées f'_u, f'_v, f'_w, f'_r; pour que ce pôle soit à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan, on doit avoir

$$\frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v} = \frac{f'_w}{w},$$

$$f'_r = 0,$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

171. Pour résoudre et discuter ces équations, on peut introduire une nouvelle inconnue S et écrire

$$\frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v} = \frac{f'_w}{w} = 2\mathrm{S}$$

ou

$$f'_u = 2\mathrm{S}u,$$
$$f'_v = 2\mathrm{S}v,$$
$$f'_w = 2\mathrm{S}w,$$

ce qui donne, en développant,

$$\left.\begin{aligned} (a-\mathrm{S})u + b''v + b'w + cr &= 0,\\ b''u + (a'-\mathrm{S})v + bw + c'r &= 0,\\ b'u + bv + (a''-\mathrm{S})w + c''r &= 0,\\ cu + c'v + c''w + dr &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ces équations sont homogènes par rapport à u, v, w, r; pour qu'elles aient des solutions non toutes nulles, il faut que le déterminant du système soit nul. On doit donc avoir

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) = \begin{vmatrix} a-\mathrm{S} & b'' & b' & c \\ b'' & a'-\mathrm{S} & b & c' \\ b' & b & a''-\mathrm{S} & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} = 0;$$

le premier membre peut se décomposer en la somme sui-

Hosted by Google

vante :

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -S & b'' & b' & c \\ 0 & a' & b & c' \\ 0 & b & a'' & c'' \\ 0 & c' & c'' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & b' & c \\ b'' & -S & b & c' \\ b' & 0 & a'' & c'' \\ c & 0 & c'' & d \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b'' & 0 & c \\ b'' & a' & 0 & c' \\ b' & b & -S & c'' \\ c & c' & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -S & 0 & b' & c \\ 0 & -S & b & c' \\ 0 & 0 & a'' & c'' \\ 0 & 0 & c'' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -S & b'' & 0 & c \\ 0 & a' & 0 & c' \\ 0 & b & -S & c'' \\ 0 & c' & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & c \\ b'' & -S & 0 & c' \\ b' & 0 & -S & c'' \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -S & 0 & 0 & c \\ 0 & -S & 0 & c' \\ 0 & 0 & -S & c'' \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$$

les valeurs respectives de ces déterminants sont

$$\Delta - AS - A'S - A''S + S^2(a''d - c''^2) + S^2(a'd - c'^2) + S^2(ad - c^2) - dS^3.$$

L'équation peut donc s'écrire

$$dS^3 - S^2[ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2] + S(A + A' + A'') - \Delta = 0.$$

Soit S_1 une racine de cette équation ; si on remplace S par S_1 dans les équations (2), elles admettront un système de solutions qui seront les coordonnées d'un plan principal.

172. Étude algébrique de l'équation en S.

THÉORÈME. — *L'équation en* S *a toujours ses racines réelles.*

Nous écartons le cas où l'on aurait à la fois $c = c' = c'' = d = 0$; car dans ce cas l'équation en S est identiquement satisfaite ; l'équation de la surface représente une conique à l'infini ; il n'y a pas lieu de chercher ses plans principaux.

Le premier membre de l'équation en S est le discriminant de la fonction

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2) ;$$

si on y remplace S par une racine de l'équation en S, cette expression est décomposable en une somme de trois carrés au plus.

Si l'équation avait une racine imaginaire, on aurait une identité de la forme

$$f(u, v, w, r) - (\alpha + \beta i)(u^2 + v^2 + w^2) \equiv (P + iP')^2 + (Q + iQ')^2 + (R + iR')^2,$$

P, P', ..., R' désignant des fonctions linéaires et homogènes de u, v, w, r à coefficients réels, dont l'une au moins renferme la variable r.

On en déduit

$$-\beta(u^2 + v^2 + w^2) \equiv 2PP' + 2QQ' + 2RR'.$$

Supposons que l'une des expressions P, Q, R contienne r et cherchons à résoudre le système

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

On a trois équations linéaires et homogènes à quatre inconnues ; on pourra trouver des solutions non toutes nulles ; mais on ne peut avoir $u = v = w = 0$, $r \neq 0$, puisque l'une des équations renferme r ; donc l'une des inconnues u, v, w doit être différente de zéro.

Pour ces solutions le second membre de la dernière identité est nul, il doit en être de même du premier ; mais ce premier membre ne peut être nul que pour $u = v = w = 0$; l'identité est donc impossible, et l'équation en S ne peut avoir de racines imaginaires.

173. Racines nulles. — Nous rappellerons d'abord qu'étant donnée une forme quadratique à trois variables, si le discriminant est nul, ainsi que la somme des mineurs principaux, tous les mineurs sont nuls et la forme est carré parfait.

De plus, si tous les mineurs sont nuls et si la somme des

Hosted by Google

coefficients des carrés des variables est aussi nulle, tous les coefficients de la forme sont nuls (*).

Cela posé, nous allons établir les théorèmes suivants.

1° *Pour que l'équation en* S *ait* une *racine nulle, il faut et il suffit que le discriminant* Δ *de la forme* $f(u, v, w, r)$ *soit nul, c'est-à-dire que cette forme soit réductible à une somme de trois carrés.*

2° *Pour que l'équation en* S *ait* deux *racines nulles, il faut et il suffit que tous les mineurs du premier ordre de* Δ *soient nuls, c'est-à-dire que* $f(u, v, w, r)$ *soit réductible à une somme de deux carrés.*

3° *Pour que l'équation en* S *ait* trois *racines nulles, il faut et il suffit que tous les mineurs du deuxième ordre de* Δ *soient nuls, c'est-à-dire que* $f(u, v, w, r)$ *soit carré parfait.*

Pour que l'équation en S ait une racine nulle, on doit avoir

$$\Delta = 0\ ;$$

pour qu'elle ait deux racines nulles,

$$\Delta = 0, \qquad A + A' + A'' = 0\ ;$$

(*) Voici la démonstration de ces théorèmes.

Soit la forme

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy\ ;$$

désignons par Δ le discriminant et par A, A', etc..., B'' les mineurs ; les mineurs principaux sont A, A' et A''.

On a les formules

$$A'A'' - B^2 = a\Delta,$$
$$A''A - B'^2 = a'\Delta,$$
$$AA' - B''^2 = a''\Delta.$$

Supposons qu'on ait

$$\Delta = 0, \qquad A + A' + A'' = 0\ ;$$

on aura

$$2[A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2] - (A + A' + A'')^2 = 0$$

ou

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0,$$

ce qui donne

$$A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0.$$

En second lieu, si tous les mineurs sont nuls, et si $a + a' + a'' = 0$, on aura

$$2(a'a'' - b^2 + a''a - b'^2 + aa' - b''^2) - (a + a' + a'')^2 = 0$$

ou

$$a^2 + a'^2 + a''^2 + 2b^2 + 2b'^2 + 2b''^2 = 0,$$

ce qui donne

$$a = a' = a'' = b = b' = b'' = 0.$$

Hosted by Google

et enfin pour qu'elle ait trois racines nulles,

$$\Delta = 0, \quad A + A' + A'' = 0, \quad ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 = 0.$$

Le premier théorème est donc démontré.

Pour établir les deux autres, supposons d'abord $d \neq 0$, et décomposons en carrés la fonction $f(u, v, w, r)$ en commençant par le terme dr^2.

On aura

$$df(u, v, w, r) \equiv (dr + cu + c'v + c''w)^2 + \psi(u, v, w),$$

en posant

$$\psi(u, v, w) \equiv (ad - c^2)u^2 + (a'd - c'^2)v^2 + (a''d - c''^2)w^2 + 2(bd - c'c'')vw + 2(b'd - c''c)wu + 2(b''d - cc')uv.$$

En égalant cette fonction à zéro, on a l'équation de la section de la surface par le plan de l'infini.

Nous avons montré au numéro 133 que le discriminant de cette forme est $d^2\Delta$, et que ses mineurs principaux sont dA, dA', dA''.

Si l'équation en S a deux racines nulles, on a

$$\Delta = 0, \qquad A + A' + A'' = 0;$$

le discriminant et la somme des mineurs principaux pour la fonction $\psi(u, v, w)$ sont nuls ; il en résulte, d'après le théorème rappelé au début, que cette forme est carré parfait.

Par suite $f(u, v, w, r)$ est égal à une somme de deux carrés, tous les mineurs du premier ordre de Δ sont nuls.

La réciproque est immédiate : si tous les mineurs de Δ sont nuls, l'équation en S a deux racines nulles.

Si cette équation a trois racines nulles, on a

$$\Delta = 0, \quad A + A' + A'' = 0, \quad ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 = 0;$$

on en conclut que $\psi(u, v, w)$ est identiquement nul, $f(u, v, w, r)$ est carré parfait, tous les mineurs du deuxième ordre de Δ sont nuls ; la réciproque est évidente.

Nos trois théorèmes sont donc démontrés dans le cas où $d \neq 0$.

Hosted by Google

Je suppose maintenant $d = 0$, le coefficient de S^3 est nul, l'équation ne peut avoir trois racines nulles, il n'y a lieu de démontrer que le deuxième théorème.

On a

$$f(u, v, w, r) = 2r(cu + c'v + c''w) + g(u, v, w),$$

en posant

$$g(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + \cdots + 2b''uv.$$

Divisons $g(u, v, w)$ par $cu + c'v + c''w$, en supposant $c \neq 0$; on a un quotient $\alpha u + \beta v + \gamma w$ et un reste qui s'obtient en remplaçant, dans $g(u, v, w)$, u par $-\dfrac{c'v + c''w}{c}$.

On aura donc

$$f(u, v, w, r) = (2r + \alpha u + \beta v + \gamma w)(cu + c'v + c''w) + g\left(-\frac{c'v + c''w}{c}, \ v, \ w\right).$$

Le discriminant du dernier terme est nul en même temps que Δ. On verra aisément que la somme des coefficients de v^2 et de w^2 est égale à $A + A' + A''$; il en résulte que si l'on a

$$\Delta = 0, \qquad A + A' + A'' = 0,$$

cette fonction est identiquement nulle, $f(u, v, w, r)$ se réduit à un produit de deux facteurs, tous les mineurs du premier ordre de Δ sont nuls.

174. Racines multiples. — Pour que l'équation en S ait une racine double, il faut et il suffit que les équations

$$F(S) = 0, \qquad F'(S) = 0$$

aient une racine commune.

On a

$$F'(S) = \begin{vmatrix} -1 & b'' & b' & c \\ 0 & a'-S & b & c' \\ 0 & b & a''-S & c'' \\ 0 & c' & c'' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-S & 0 & b' & c \\ b'' & -1 & b & c' \\ b' & 0 & a''-S & c'' \\ c & 0 & c'' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-S & b'' & 0 & c \\ b'' & a'-S & 0 & c' \\ b' & b & -1 & c'' \\ c & c' & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par A_s, A'_s, A''_s, B_s, $\ldots$, D_s les coefficients de $a - S$, $a' - S$, ..., d dans le développement du déterminant F(S) ; on aura

$$F'(S) = -(A_s + A'_s + A''_s).$$

Or nous venons de voir qu'étant donnée la forme $f(u, v, w, r)$, si l'on a

$$\Delta = 0, \qquad A + A' + A'' = 0,$$

tous les mineurs du premier ordre de Δ sont nuls.

En appliquant ce résultat à la forme

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2),$$

dont F(S) est le discriminant, on voit que pour que les deux équations

$$F(S) = 0, \qquad F'(S) = 0$$

aient une solution commune, il faut et il suffit que tous les mineurs du premier ordre de F(S) soient nuls pour une même valeur de S, qui sera alors la racine double.

De même, pour que l'équation en S ait une racine triple, il faut que les trois équations

$$F(S) = 0, \qquad F'(S) = 0, \qquad F''(S) = 0$$

aient une solution commune.

Or on voit aisément que

$$F''(S) = -2[(a - S)d - c^2 + (a' - S)d' - c'^2 + (a'' - S)d'' - c''^2].$$

Il en résulte que pour que l'équation ait une racine triple il faut et il suffit que tous les mineurs du deuxième ordre de F(S) soient nuls.

En définitive, F(S) est le discriminant de la forme

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2).$$

Une racine simple de l'équation en S n'annule pas tous les mineurs de F(S), et pour cette racine la forme est décomposable en une somme de trois carrés.

Une racine double annule tous les mineurs du premier ordre, et, pour cette racine, la forme qui précède est décomposable en une somme de deux carrés.

Enfin une racine triple annule tous les mineurs du second ordre de F(S) et pour cette racine

$$f(u,\ v,\ w,\ r) - S(u^2+v^2+w^2)$$

est carré parfait.

175. De cette discussion de l'équation en S nous allons déduire les propriétés des plans principaux des quadriques.

THÉORÈME I. — *A une racine simple non nulle de l'équation en* S *correspond un plan principal déterminé.*

En effet, si l'on revient aux équations

$$\left.\begin{aligned}(a-S)u+b''v+b'w+cr&=0,\\ b''u+(a'-S)v+bw+c'r&=0,\\ b'u+bv+(a''-S)w+c''r&=0,\\ cu+c'v+c''w+dr&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et si l'on remplace S par une racine simple de l'équation en S, on a quatre équations homogènes à quatre inconnues dont le déterminant est nul et dont tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls.

Il en résulte qu'on peut choisir arbitrairement une seule inconnue, de telle sorte que les équations précédentes admettront un seul système de valeurs pour u, v, w, r, à un facteur près.

THÉORÈME II. — *A une racine double non nulle de l'équation en* S *correspondent une infinité de plans principaux passant tous par une même droite.*

Pour une racine double tous les mineurs du premier ordre de F(S) sont nuls ; on peut donc choisir arbitrairement deux inconnues, par exemple w et r, et on aura, en résolvant par rapport à u et v,

$$u = \alpha w + \beta r,$$
$$v = \alpha' w + \beta' r\ ;$$

on en déduit pour équation du plan correspondant

$$(\alpha w + \beta r)x + (\alpha' w + \beta' r)y + wz + r = 0$$

ou

$$w(\alpha x + \alpha' y + z) + r(\beta x + \beta' y + 1) = 0.$$

Puisque w et r sont arbitraires, on a une infinité de plans principaux passant par une droite.

On sait que dans ce cas la surface est de révolution.

THÉORÈME III. — *A une racine triple non nulle de l'équation en* S *correspondent une infinité de plans principaux passant tous par un même point.*

Pour une racine triple tous les mineurs du deuxième ordre de F(S) sont nuls, les équations (2) ont leurs coefficients proportionnels, le système se réduit à une seule équation ; ce qui montre que les plans principaux sont assujettis à passer par un point.

Dans ce cas $f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2)$ est carré parfait, la surface est une sphère (131).

176. THÉORÈME. — *Les plans principaux correspondant à deux racines différentes de l'équation en* S *sont perpendiculaires.*

Soient, en effet, u_1, v_1, w_1, r_1 et u_2, v_2, w_2, r_2 les coordonnées des plans principaux correspondant à deux racines S_1 et S_2. On a

$$\begin{aligned} f'_{u_1} &= 2S_1u_1, & f'_{u_2} &= 2S_2u_2,\\ f'_{v_1} &= 2S_1v_1, & f'_{v_2} &= 2S_2v_2,\\ f'_{w_1} &= 2S_1w_1, & f'_{w_2} &= 2S_2w_2,\\ f'_{r_1} &= 0, & f'_{r_2} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions les quatre équations de gauche respectivement par u_2, v_2, w_2, r_2, puis ajoutons ; multiplions de même les quatre équations de droite respectivement par $u_1, v_1, w_1, r_1,$ puis ajoutons ; on a

$$\begin{aligned} u_2f'_{u_1} + v_2f'_{v_1} + w_2f'_{w_1} + r_2f'_{r_1} &= 2S_1(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2),\\ u_1f'_{u_2} + v_1f'_{v_2} + w_1f'_{w_2} + r_1f'_{r_2} &= 2S_2(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2). \end{aligned}$$

Retranchons, il vient

$$0 = 2(S_1 - S_2)(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2),$$

et comme $S_1 - S_2$ n'est pas nul, on doit avoir

$$u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0,$$

ce qui montre que les deux plans principaux sont perpendiculaires.

On a aussi

$$u_1 f'_{u_2} + v_1 f'_{v_2} + w_1 f'_{w_2} + r_1 f'_{r_2} = 0\,;$$

ces deux plans sont donc conjugués ; ce sont deux plans diamétraux conjugués rectangulaires.

Si l'une des racines, S_1 par exemple, est racine double, le théorème prouve que le plan principal relatif à S_2 est perpendiculaire à tous les plans principaux relatifs à S_1.

177. Si l'équation en S a une racine nulle, on ne peut dire qu'à cette racine correspond un plan principal ; car en introduisant cette variable S au numéro 171, nous avons sous-entendu que cette quantité ne pouvait être nulle.

Pour abréger le langage, nous appellerons plans principaux singuliers les plans qui correspondent aux racines nulles de l'équation en S, c'est-à-dire les plans dont les coordonnées vérifient les équations

$$\begin{aligned} f'_u - 2Su &= 0, \\ f'_v - 2Sv &= 0, \\ f'_w - 2Sw &= 0, \\ f'_r &= 0, \end{aligned}$$

où l'on fait $S = 0$, c'est-à-dire les équations

$$f'_u = 0, \qquad f'_v = 0, \qquad f'_w = 0, \qquad f'_r = 0.$$

178. Il nous est facile maintenant d'indiquer le nombre de plans principaux de chaque surface.

Premier cas. $d \neq 0$.

I. $\Delta \neq 0$. *La surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde.*

L'équation en S a trois racines non nulles, la surface a donc trois plans principaux formant trièdre trirectangle ; les arêtes de ce trièdre constituent trois axes, qui sont en même temps trois diamètres conjugués rectangulaires.

Si l'équation en S a une racine double, la surface est de révolution.

Hosted by Google

Si l'équation en S a une racine triple, la surface est une sphère.

II. $\Delta = 0$, $A + A' + A'' \neq 0$. *L'équation* (1) *représente une ellipse ou une hyperbole.*

L'équation en S a deux racines non nulles, à chacune desquelles correspond un plan principal.

A la racine nulle correspond le plan de la conique, qui est perpendiculaire aux deux plans principaux, car le théorème du nº 176 a lieu quand bien même l'une des racines S_1 ou S^2 est nulle.

Il est clair que les deux plans principaux contiennent les axes de la conique.

Si les deux racines non nulles sont égales, la conique est un cercle.

III. $\Delta = 0$, $A + A' + A'' = 0$, $ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 \neq 0$. *L'équation* (1) *représente deux points à distance finie.*

L'équation en S a une racine non nulle à laquelle correspond un plan principal, c'est le plan passant par le milieu des deux points et perpendiculaire à la droite qui les joint.

Elle admet deux racines nulles auxquelles correspondent tous les plans passant par les deux points.

IV. $\Delta = 0$, $A + A' + A'' = 0$, $ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 = 0$. *L'équation* (1) *représente un point double.*

L'équation en S a trois racines nulles, auxquelles correspondent tous les plans passant par le point double.

Deuxième cas. $d = 0$.

On suppose aussi que les trois nombres c, c', c'' ne sont pas nuls en même temps.

I. $\Delta \neq 0$. *L'équation* (1) *représente un paraboloïde.*

L'équation en S admet deux racines non nulles, à chacune desquelles correspond un plan principal ; ces deux plans sont rectangulaires et se coupent suivant une droite qui est l'axe unique de la surface.

Hosted by Google

Si les deux racines sont égales, la surface est un paraboloïde de révolution.

II. $\Delta = 0$, $A + A' + A'' \neq 0$. *L'équation* (1) *représente une parabole.*

L'équation en S admet une racine non nulle à laquelle correspond un plan principal, et une racine nulle à laquelle correspond le plan de la courbe.

Le plan principal est perpendiculaire au plan de la courbe et contient l'axe de la parabole.

III. $\Delta = 0$, $A + A' + A'' = 0$. *L'équation* (1) *représente deux points dont l'un est à l'infini.*

L'équation en S a une racine double nulle à laquelle correspondent tous les plans qui passent par les deux points.

179. Pour qu'un plan (u, v, w, r) soit plan principal d'une quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

il faut qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v} = \frac{f'_w}{w}, \\ f'_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

On aura l'équation de l'ensemble des plans principaux en éliminant u, v, w, r entre ces équations et la suivante :

$$ux + vy + wz + r = 0.$$

Si l'on veut avoir l'enveloppe des plans principaux d'une quadrique variable, on éliminera les paramètres entre les équations (3) ; on aura une relation entre u, v, w, r, qui sera l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée.

180. Conditions pour qu'une droite soit axe d'une quadrique. — Soit la droite ayant pour équations

$$\frac{x - x'}{\alpha} = \frac{y - y'}{\beta} = \frac{z - z'}{\gamma};$$

pour que cette droite soit axe d'une quadrique définie par

Hosted by Google

l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

il faut et il suffit qu'elle coïncide avec le diamètre conjugué de la direction de plan qui lui est perpendiculaire.

Un plan perpendiculaire à la droite a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\,;$$

le diamètre conjugué de cette direction de plan est déterminé par les deux équations

$$\alpha f'_u + \beta f'_v + \gamma f'_w = 0,$$
$$f'_r = 0$$

ou

$$u(a\alpha + b''\beta + b'\gamma) + v(b''\alpha + a'\beta + b\gamma) + w(b'\alpha + b\beta + a''\gamma) + r(c\alpha + c'\beta + c''\gamma) = 0,$$
$$cu + c'v + c''w + dr = 0.$$

Ces deux équations représentent deux points qui sont sur le diamètre ; en écrivant que ces deux points sont sur la droite donnée, on aura les conditions cherchées.

On a ainsi

$$\frac{c - dx'}{\alpha} = \frac{c' - dy'}{\beta} = \frac{c'' - dz'}{\gamma},$$

$$\frac{a\alpha+b''\beta+b'\gamma-x'(c\alpha+c'\beta+c''\gamma)}{\alpha} = \frac{b''\alpha+a'\beta+b\gamma-y'(c\alpha+c'\beta+c''\gamma)}{\beta} = \frac{b'\alpha+b\beta+a''\gamma-z'(c\alpha+c'\beta+c''\gamma)}{\gamma}.$$

En éliminant α, β, γ entre ces équations, on aura les équations ponctuelles de l'ensemble des axes, x', y', z' étant les coordonnées courantes. L'élimination est fort simple, il suffit de remplacer dans les deux dernières équations α, β, γ respectivement par $c - dx'$, $c' - dy'$, $c'' - dz'$.

181. Dans le cas où la surface est un paraboloïde, on peut avoir aisément l'axe de la surface.

Il suffit de prendre le diamètre conjugué de la direction de plan perpendiculaire à la direction de l'axe, laquelle a comme paramètres directeurs c, c', c''.

Hosted by Google

L'axe sera donc défini par les deux équations

$$cf'_u + c'f'_v + c''f'_w = 0,$$
$$f'_r = 0.$$

Si l'équation représente une parabole, ces équations définissent également l'axe de cette courbe.

182. Plans tangents aux sommets. — On déterminera les plans tangents aux sommets en écrivant qu'ils sont tangents à la surface et parallèles aux plans principaux.

Si la surface est un paraboloïde, le plan tangent au sommet est perpendiculaire à l'axe ; son équation est de la forme

$$cx + c'y + c''z + \lambda = 0\,;$$

on détermine λ en écrivant que ce plan est tangent, ce qui donne la condition

$$f(c,\ c',\ c'',\ \lambda) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = -\frac{ac^2 + a'c'^2 + a''c''^2 + 2bc'c'' + 2b'c''c + 2b''cc'}{2\ c^2 + c'^2 + c''^2)}.$$

Le sommet s'obtiendra aisément en prenant l'intersection de ce plan et de l'axe.

183. Surfaces de révolution de deuxième classe. — Nous avons vu plus haut que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de deuxième classe soit de révolution est que l'équation en S ait une racine double non nulle. Nous nous proposons d'obtenir ce résultat directement en cherchant l'équation générale des quadriques de révolution.

Une quadrique de révolution est engendrée par la rotation d'une conique autour d'un de ses axes ; or, le produit des distances des foyers de la conique situés sur cet axe à une tangente quelconque étant constant, on en conclut que le produit des distances de ces foyers à un plan tangent quelconque de la quadrique engendrée est constant.

L'équation générale des quadriques de révolution sera donc

$$u^2 + v^2 + w^2 + \lambda \mathrm{PQ} = 0,$$

Hosted by Google

P, Q désignant des fonctions linéaires qui, égalées à zéro, sont les équations des foyers P et Q situés sur l'axe de révolution.

Si ces deux points sont réels, la quadrique est un ellipsoïde allongé ou un hyperboloïde à deux nappes ; si les deux points sont imaginaires conjugués, la surface est un ellipsoïde aplati ou un hyperboloïde à une nappe.

Enfin si l'un des points P ou Q est à l'infini, la surface est un paraboloïde de révolution.

On peut d'ailleurs obtenir aisément l'équation du paraboloïde de révolution ayant pour foyer un point (α, β, γ) et pour plan tangent au sommet le plan

$$H_0 = u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0.$$

Un plan $H(u, v, w, r)$ sera tangent au paraboloïde, si ce plan est perpendiculaire au plan passant par le foyer et l'intersection des plans H et H_0.

Ce plan a pour équation

$$\frac{ux + vy + wz + r}{u\alpha + v\beta + w\gamma + r} - \frac{u_0x + v_0y + w_0z + r_0}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0} = 0.$$

Pour qu'il soit perpendiculaire au plan H, on doit avoir

$$u\left(\frac{u}{u\alpha + v\beta + w\gamma + r} - \frac{u_0}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0}\right)$$
$$+ v\left(\frac{v}{u\alpha + v\beta + w\gamma + r} - \frac{v_0}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0}\right)$$
$$+ w\left(\frac{w}{u\alpha + v\beta + w\gamma + r} - \frac{w_0}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0}\right) = 0$$

ou

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{u\alpha + v\beta + w\gamma + r} - \frac{uu_0 + vv_0 + ww_0}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0} = 0$$

ou

$$u^2 + v^2 + w^2 - \frac{(uu_0 + vv_0 + ww_0)(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0} = 0;$$

cette équation est bien de la forme

$$u^2 + v^2 + w^2 + \lambda PQ = 0,$$

l'un des points P et Q étant à l'infini, l'autre étant le foyer.

Hosted by Google

Dès lors pour qu'une quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0$$

soit de révolution, il faut qu'il existe un nombre S différent de zéro tel que l'on ait

$$f(u, v, w, r) \equiv S[u^2 + v^2 + w^2 + \lambda PQ]$$

ou

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2) \equiv \lambda SPQ.$$

Or pour que la forme du premier membre soit décomposable en un produit de deux facteurs, c'est-à-dire réductible à une somme de deux carrés, il faut que S soit racine double de l'équation en S.

L'axe de la surface sera la droite joignant les deux points P et Q.

EXERCICES ET NOTES

1. *L'enveloppe d'un plan dont la somme des carrés des distances à n points fixes est constante est un ellipsoïde dont le centre est le centre des moyennes distances des n points.*

Soit, en effet, le plan variable

$$ux + vy + wz + r = 0 \,;$$

on aura une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(ux_i + vy_i + wz_i + r)^2}{u^2 + v^2 + w^2} = a^2,$$

et l'on voit que les coordonnées du centre sont

$$\frac{\Sigma x_i}{n}, \quad \frac{\Sigma y_i}{n}, \quad \frac{\Sigma z_i}{n}.$$

2. *Étant donnés trois points et leurs plans polaires par rapport à une quadrique variable, le lieu du centre de cette surface est une droite.*

3. *On donne deux plans fixes* P *et* Q, *un point fixe* O *dans le plan* P *et un point* A *dans l'espace ; trouver le lieu des centres des qua-*

driques tangentes au plan Q, passant par A et tangentes au plan P en O, de telle sorte que ce point O soit un ombilic.

On prendra le plan P pour plan des xy, le point O pour origine ; pour écrire que ce point est un ombilic, il suffit d'écrire que le plan P coupe la surface suivant deux droites isotropes, c'est-à-dire que l'ensemble des termes du deuxième degré en u et v se réduit à $u^2 + v^2$.

4. *On considère toutes les quadriques tangentes à deux plans en des points donnés. On propose de trouver :*

1° *Le lieu géométrique des centres de ces surfaces ;*

2° *Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné ;*

3° *Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.*

(*Concours général, 1873.*)

5. *Étant donnés cinq points, les cinq quadriques qui ont pour centre l'un de ces points et qui sont conjuguées par rapport au tétraèdre formé par les quatre autres points sont homothétiques.*

Il suffit d'établir que ces quadriques rencontrent le plan de l'infini suivant la même conique.

Soient $x_i,\ y_i,\ z_i\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ les coordonnées des cinq points; une quadrique conjuguée par rapport au tétraèdre des quatre premiers points a pour équation tangentielle

$$\sum_1^4 \lambda_i(ux_i + vy_i + wz_i + r)^2 = 0.$$

Pour que son centre soit le cinquième point, on doit avoir

$$\sum_1^4 \lambda_i x_i = x_5 \sum_1^4 \lambda_i,$$

$$\sum_1^4 \lambda_i y_i = y_5 \sum_1^4 \lambda_i,$$

$$\sum_1^4 \lambda_i z_i = z_5 \sum_1^4 \lambda .$$

Posons

$$\sum_1^4 \lambda_i = -\lambda_5\,;$$

les conditions deviennent

$$\sum_1^5 \lambda_i x_i = 0, \qquad \sum_1^5 \lambda_i y_i = 0, \qquad \sum_1^5 \lambda_i z_i = 0, \qquad \sum_1^5 \lambda_i = 0.$$

Il est aisé d'établir maintenant que l'équation tangentielle de la conique de l'infini est symétrique par rapport aux indices 1, 2, 3, 4, 5.

En effet, le coefficient de u^2 dans cette équation est

$$\sum_1^4 \lambda_i x_i^2 \sum_1^4 \lambda_i - \left[\sum_1^4 \lambda_i x_i\right]^2$$

ou

$$-\sum_1^4 \lambda_i x_i^2 . \lambda_5 - \lambda_5^2 x_5^2$$

ou

$$-\lambda_5 \sum_1^5 \lambda_i x_i^2\,;$$

on aura des expressions analogues pour les autres coefficients, et l'on voit que l'équation de la conique de l'infini est

$$u^2\sum_1^5 \lambda_i x_i^2 + v^2\sum_1^5 \lambda_i y_i^2 + w^2 \sum_1^5 \lambda_i z_i^2 + 2vw\sum_1^5 \lambda_i y_i z_i$$
$$+ 2wu\sum_1^5 \lambda_i z_i x_i + 2uv\sum_1^5 \lambda_i x_i y_i = 0.$$

Cette conique est la même pour les cinq quadriques, le théorème est démontré.

6. *Étant donnés un ellipsoïde rapporté à ses axes et une quadrique* S, *trouver l'équation du lieu des centres des sections faites dans la surface* S *par les plans tangents à l'ellipsoïde.*

Trouver les sections du lieu par les plans de coordonnées lorsque la surface S *a ses axes parallèles à ceux de l'ellipsoïde.*

Chercher l'intersection de ce lieu avec une quadrique concentrique

Hosted by Google

et homothétique à S, *et en déduire un mode de génération du lieu en faisant varier le rapport d'homothétie.*

(*Concours académique, Aix et Montpellier, 1877.*)

7. *Lieu des centres des quadriques de révolution passant par deux droites.*

8. *Trouver l'enveloppe des plans principaux des paraboloïdes qui sont conjugués par rapport à un tétraèdre dont l'un des angles trièdres est trirectangle.*

En prenant cet angle trièdre pour trièdre de coordonnées, l'équation de la surface est

$$Au(u\alpha + 2r) + Bv(v\beta + 2r) + Cw(w\gamma + 2r) = 0.$$

Les coordonnées des plans principaux vérifient les équations

$$\frac{A(u\alpha + r)}{u} = \frac{B(v\beta + r)}{v} = \frac{C(w\gamma + r)}{w},$$

$$Au + Bv + Cw = 0.$$

En éliminant A, B, C entre ces équations, on a

$$\frac{u^2}{u\alpha + r} + \frac{v^2}{v\beta + r} + \frac{w^2}{w\gamma + r} = 0,$$

qui est l'équation de l'enveloppe.

9. *L'enveloppe des plans principaux des paraboloïdes qui sont tangents en deux points donnés à deux plans rectangulaires fixes est une surface de troisième classe.*

10. Quand on cherche les plans principaux d'une quadrique définie par son équation ponctuelle,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0,$$

on est conduit à une équation du troisième degré,

$$\begin{vmatrix} A - \sigma & B'' & B' \\ B'' & A' - \sigma & B \\ B' & B & A'' - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\sigma^3 - (A + A' + A'')\sigma^2 + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)\sigma - \Delta_1 = 0,$$

en posant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Hosted by Google

Il est aisé de voir que les racines de cette équation sont liées d'une manière fort simple aux racines de l'équation en S que nous avons étudiée précédemment,

$$dS^3 - (ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2)S^2 + (A + A' + A'')S - \Delta = 0.$$

On a en effet (116)

$$ad - c^2 = \frac{1}{\Delta}(A'A'' - B^2),$$

$$a'd - c'^2 = \frac{1}{\Delta}(A''A - B'^2),$$

$$a''d - c''^2 = \frac{1}{\Delta}(AA' - B''^2),$$

$$d = \frac{1}{\Delta^2}\cdot\Delta_1.$$

L'équation en S devient donc

$$\Delta_1 S^3 - (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)\Delta S^2 + (A + A' + A'')\Delta^2 S - \Delta^3 = 0$$

ou

$$\left(\frac{\Delta}{S}\right)^3 - (A + A' + A'')\left(\frac{\Delta}{S}\right)^2 + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)\frac{\Delta}{S} - \Delta_1 = 0.$$

On en conclut que les racines des deux équations sont liées par la relation

$$\sigma = \frac{\Delta}{S}$$

ou

$$S\sigma = \Delta.$$

11. Surfaces de révolution en général. — Nous avons obtenu au numéro 183 l'équation tangentielle générale des quadriques de révolution. Nous nous proposons de montrer comment on pourrait obtenir l'équation tangentielle d'une surface de révolution quelconque.

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de l'axe ; les équations de cette droite sont

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho.$$

Considérons un plan tangent quelconque à la surface de révolution

$$ux + vy + wz + r = 0 ;$$

ce plan rencontre l'axe en un point M, et la valeur de ρ relative à ce point est

$$\rho = -\frac{ux_0 + vy_0 + wz_0 + r}{\alpha u + \beta v + \gamma w}. \tag{1}$$

D'autre part la distance du point A à ce plan tangent est

$$\delta = \frac{ux_0 + vy_0 + wz_0 + r}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}. \tag{2}$$

Pour toute surface de révolution δ est fonction de ρ, puisque les plans tangents en tous les points d'un parallèle (plans qui sont à la même distance d'un point quelconque de l'axe) rencontrent l'axe au même point.

On aura donc une relation de la forme

$$f\left(\frac{1}{\delta}, -\frac{1}{\rho}\right) = 0; \tag{3}$$

en y remplaçant δ et ρ par leurs valeurs, on aura l'équation tangentielle générale des surfaces de révolution

$$f\left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{ux_0 + vy_0 + wz_0 + r}, \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{ux_0 + vy_0 + wz_0 + r}\right) = 0.$$

On voit ainsi que pour obtenir l'équation d'une surface de révolution particulière, il faudra trouver la relation (3) entre δ et ρ.

Supposons que cette surface soit définie par son axe et une courbe quelconque tournant autour de cet axe, et ayant pour équation tangentielle

$$\varphi(u, v, w, r) = 0. \tag{4}$$

En un point M de cette courbe, on peut lui mener une infinité de plans tangents, parmi lesquels un seul sera tangent à la surface de révolution ; ce plan sera déterminé en écrivant que la normale en M à ce plan rencontre l'axe.

Les coordonnées du point de contact du plan (u, v, w, r) sont $\varphi'_u, \varphi'_v, \varphi'_w, \varphi'_r$; l'équation de la normale est alors

$$\frac{x - \dfrac{\varphi'_u}{\varphi'_r}}{u} = \frac{y - \dfrac{\varphi'_v}{\varphi'_r}}{v} = \frac{z - \dfrac{\varphi'_w}{\varphi'_r}}{w},$$

et pour que cette droite rencontre l'axe, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} x_0\varphi'_r - \varphi'_u & y_0\varphi'_r - \varphi'_v & z_0\varphi'_r - \varphi'_w \\ u & v & w \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

On aura la relation cherchée entre δ et ρ en éliminant u, v, w, r entre les équations (1), (2), (4) et (5).

Si l'équation (4) représente une surface Σ, en faisant le même calcul, on obtiendra l'équation d'une surface de révolution circonscrite à Σ.

On opérerait d'une manière analogue si la courbe qui engendre la surface de révolution était définie par ses équations ponctuelles.

L'équation tangentielle générale des surfaces de révolution est donc

$$f\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{ux_0+vy_0+wz_0+r},\ \frac{\alpha u+\beta v+\gamma w}{ux_0+vy_0+wz_0+r}\right)=0.$$

Si la surface est de deuxième classe, cette équation aura la forme

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{\mathrm{P}^2}+a\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}^2}+b\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}+c=0,$$

en posant

$$\mathrm{P}=ux_0+vy_0+wz_0+r,\qquad \mathrm{Q}=\alpha u+\beta v+\gamma w.$$

Cette équation peut s'écrire

$$u^2+v^2+w^2+a\mathrm{Q}^2+b\mathrm{PQ}+c\mathrm{P}^2=0$$

ou

$$u^2+v^2+w^2+(l\mathrm{Q}+m\mathrm{P})(l'\mathrm{Q}+m'\mathrm{P})=0;$$

c'est l'équation générale trouvée au n° 183.

Cas particulier. — Supposons que l'axe de révolution soit l'axe des z; on aura

$$x_0=y_0=z_0=0,\qquad \alpha=\beta=0,\qquad \gamma=1,$$

$$\rho=-\frac{r}{w},\qquad \delta=\frac{r}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \tag{6}$$

L'équation générale devient

$$f\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{r},\ \frac{w}{r}\right)=0,$$

ou en supposant $r=1$,

$$w=\varphi(u^2+v^2).$$

Si l'on connaît l'équation tangentielle de la méridienne dans le plan des zx,

$$\varphi(u,w,r)=0,$$

on aura aisément l'équation tangentielle de la surface de révolution.

En effet, pour qu'un plan tangent à cette courbe soit tangent à la surface, il faut et il suffit que ce plan soit perpendiculaire au plan de la courbe, c'est-à-dire qu'on ait

$$v=0.\ (*)$$

(*) On voit d'ailleurs que dans ce cas particulier le premier membre de la condition (5) se réduit à $-v\varphi'_u$; et φ'_u n'est nul que pour les plans tangents particuliers dont le point de contact est sur Oz.

Hosted by Google

On éliminera donc u, w, r entre les équations

$$\varphi(u, w, r) = 0,$$

$$\rho = -\frac{r}{w}, \qquad \delta = \frac{r}{\sqrt{u^2 + w^2}}.$$

On obtient

$$\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\rho^2}}, -\frac{1}{\rho}, 1\right) = 0,$$

et en remplaçant dans cette équation ρ et δ par leurs valeurs (6), on a

$$\varphi(\sqrt{u^2 + v^2}, w, r) = 0,$$

qui est l'équation de la surface de révolution cherchée.

Il suffit de remplacer dans l'équation de la méridienne u par $\sqrt{u^2 + v^2}$, ce qu'il serait facile d'établir directement.

En appliquant cette formule au tore engendré par le cercle

$$(u^2 + w^2)R^2 - (ua + r)^2 = 0$$

tournant autour de Oz, on trouve l'équation

$$[(u^2 + v^2)(R^2 - a^2) + w^2R^2 - r^2]^2 - 4a^2(u^2 + v^2)r^2 = 0,$$

que nous avons obtenue au n° 61.

CHAPITRE VIII

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ

184. Étant donnée l'équation tangentielle d'une quadrique rapportée à des axes rectangulaires

$$f(u, v, w, r) = 0, \tag{1}$$

nous nous proposons de trouver l'équation de cette quadrique rapportée à ses trois plans principaux si cette quadrique est un ellipsoïde ou un hyperboloïde, à ses deux plans principaux et à son plan tangent au sommet si c'est un paraboloïde.

Dans le cas où l'équation (1) représente une conique, l'un des nouveaux plans de coordonnées sera le plan de cette conique ; les deux autres seront deux plans perpendiculaires passant par les axes, si la conique est une ellipse ou une hyperbole, passant par l'axe et la tangente au sommet si la conique est une parabole.

Premier cas. $d \neq 0$.

La surface admet trois plans principaux,

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0,$$
$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 = 0,$$
$$u_3 x + v_3 y + w_3 z + r_3 = 0.$$

Les coefficients de ces plans étant déterminés à un facteur

Hosted by Google

près, on peut les assujettir aux conditions

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1,$$
$$u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 1,$$
$$u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = 1.$$

Nous prenons ces plans respectivement pour plans des $y'z'$, des $z'x'$ et des $x'y'$.

On aura alors, au signe près,

$$x' = u_1x + v_1y + w_1z + r_1,$$
$$y' = u_2x + v_2y + w_2z + r_2,$$
$$z' = u_3x + v_3y + w_3z + r_3.$$

Soit

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = 0$$

l'équation d'un plan par rapport aux axes $O'x'y'z'$; ce même plan aura pour équation par rapport au premier système

$$u'(u_1x + v_1y + w_1z + r_1) + v'(u_2x + v_2y + w_2z + r_2)$$
$$+ w'(u_3x + v_3y + w_3z + r_3) + r' = 0$$

ou

$$x(u_1u' + u_2v' + u_3w') + y(v_1u' + v_2v' + v_3w')$$
$$+ z(w_1u' + w_2v' + w_3w') + r_1u' + r_2v' + r_3w' + r' = 0.$$

Si l'on désigne par u, v, w, r les coordonnées de ce plan dans le premier système d'axes, on aura, à un facteur près,

$$u = u_1u' + u_2v' + u_3w',$$
$$v = v_1u' + v_2v' + v_3w',$$
$$w = w_1u' + w_2v' + w_3w',$$
$$r = r_1u' + r_2v' + r_3w' + r';$$

l'équation de la surface sera donc

$$f(u_1u' + u_2v' + u_3w', \quad v_1u' + v_2v' + v_3w', \quad w_1u' + w_2v' + w_3w',$$
$$r_1u' + r_2v' + r_3w' + r') = 0.$$

On peut l'écrire

$$f(u_1u' + u_2v' + u_3w', \quad v_1u' + v_2v' + v_3w', \quad w_1u' + w_2v' + w_3w',$$
$$r_1u'+r_2v'+r_3w') + r'f'_r(u_1u'+u_2v'+u_3w', \quad v_1u'+v_2v'+v_3w',$$
$$w_1u'+w_2v'+w_3w', \quad r_1u'+r_2v'+r_3w') + f(0, 0, 0, r') = 0,$$

Hosted by Google

ou, en développant,

$$\begin{aligned}
&u'^2 f(u_1, v_1, w_1, r_1) + v'^2 f(u_2, v_2, w_2, r_2) + w'^2 f(u_3, v_3, w_3, r_3) \\
&\quad + 2v'w'(u_2 f'_{u_3} + v_2 f'_{v_3} + w_2 f'_{w_3} + r_2 f'_{r_3}) + 2w'u'(u_3 f'_{u_1} + \cdots) \\
&\quad + 2u'v'(u_1 f'_{u_2} + \cdots) + u'r' f'_r(u_1, v_1, w_1, r_1) + v'r' f'_r(u_2, v_2, w_2, r_2) \\
&\quad + w'r' f'_r(u_3, v_3, w_3, r_3) + dr'^2 = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Or, en désignant par S_1 la racine de l'équation en S à laquelle correspond le plan principal (u_1, v_1, w_1, r_1), on a

$$\begin{aligned}
f'_{u_1} &= 2S_1 u_1, \\
f'_{v_1} &= 2S_1 v_1, \\
f'_{w_1} &= 2S_1 w_1, \\
f'_{r_1} &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplions ces quatre équations respectivement par u_1, v_1, w_1, r_1 et ajoutons-les membre à membre; il vient

$$2f(u_1, v_1, w_1, r_1) = 2S_1(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$$

ou

$$f(u_1, v_1, w_1, r_1) = S_1.$$

On a de même

$$f(u_2, v_2, w_2, r_2) = S_2,$$

$$f(u_3, v_3, w_3, r_3) = S_3.$$

En outre, les coefficients de $v'w'$, $w'u'$, $u'v'$ sont nuls puisque les trois plans principaux sont conjugués deux à deux ; les coefficients de $u'r'$, $v'r'$, $w'r'$ sont également nuls, puisque les coordonnées des plans principaux vérifient la relation

$$f' = 0.$$

On en conclut que l'équation de la surface rapportée à ses plans principaux est

$$S_1 u'^2 + S_2 v'^2 + S_3 w'^2 + dr'^2 = 0 ;$$

on en déduit immédiatement l'équation ponctuelle

$$\frac{x'^2}{S_1} + \frac{y'^2}{S_2} + \frac{z'^2}{S_3} + \frac{1}{d} = 0.$$

185. Les signes des quantités S_1, S_2, S_3 et d indiquent la nature de la surface. On pourra toujours avoir les signes des

Hosted by Google

racines de l'équation en S, à l'aide de la règle de Descartes, puisque cette équation a toutes ses racines réelles.

186. Les carrés des demi-longueurs des axes sont $-\frac{S_1}{d}$, $-\frac{S_2}{d}$, $-\frac{S_3}{d}$.

Si ρ désigne la demi-longueur d'un axe et S la racine correspondante de l'équation en S, on aura

$$\rho^2 = -\frac{S}{d},$$

d'où

$$S = -d\rho^2.$$

On obtient donc l'équation aux demi-longueurs des axes en remplaçant S par cette valeur dans l'équation en S.

187. Supposons maintenant que l'équation (1) représente une conique, ellipse ou hyperbole.

L'équation en S a une racine nulle $S_3 = 0$, et deux autres racines non nulles S_1 et S_2.

A la racine nulle correspond le plan de la conique, et aux deux autres racines correspondent les plans principaux de la conique, c'est-à-dire les plans passant par les axes et perpendiculaires au plan de la courbe.

En faisant le même calcul que plus haut, on voit que l'équation réduite de la courbe est

$$S_1 u'^2 + S_2 v'^2 + d r'^2 = 0\,;$$

les équations ponctuelles sont

$$\frac{x'^2}{S_1} + \frac{y'^2}{S_2} + \frac{1}{d} = 0,$$

$$z' = 0.$$

La nature de cette conique dépend des signes de S_1, S_2 et d.

En particulier si $S_1 = S_2$, la conique est un cercle.

188. Enfin, si l'équation (1) représente deux points, l'équation en S a deux racines nulles $S_2 = S_3 = 0$, et une racine S_1 différente de zéro.

A cette racine correspond le plan passant par le milieu des deux points et qui est perpendiculaire à la droite qui les joint. En prenant ce plan pour plan des $y'z'$, et pour plans des $x'y'$ et $x'z'$ deux plans perpendiculaires quelconques passant par la droite joignant les deux points, l'équation de l'ensemble de ces points devient

$$S_1 u'^2 + d r'^2 = 0.$$

189. Deuxième cas. $d = 0$.

Supposons en premier lieu que la surface soit un paraboloïde, c'est-à-dire que Δ soit différent de zéro.

L'équation en S a deux racines non nulles que nous désignerons par S_2 et S_3.

Soient

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 = 0,$$
$$u_3 x + v_3 y + w_3 z + r_3 = 0$$

les équations des plans principaux correspondants, et

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0$$

celle du plan tangent au sommet.

Nous prenons ces trois plans pour plans de coordonnées, et nous obtenons l'équation (2) du n° 184.

On a cette fois

$$f(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0,$$
$$f(u_2, v_2, w_2, r_2) = S_2,$$
$$f(u_3, v_3, w_3, r_3) = S_3.$$

Le coefficient de $v'w'$ est nul puisque les deux plans principaux sont conjugués; les coefficients de $w'u'$ et $u'v'$ sont nuls puisque le sommet qui a pour coordonnées homogènes f'_{u_1}, f'_{v_1}, f'_{w_1}, f'_{r_1} est dans les plans principaux.

Enfin les coefficients de $v'r'$ et $w'r'$ sont aussi nuls.

L'équation devient alors

$$S_2 v'^2 + S_3 w'^2 + u'r' f'_r(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0$$

Hosted by Google

ou

$$S_2 v'^2 + S_3 w'^2 + 2u'r'(cu_1 + c'v_1 + c''w_1) = 0.$$

Les coefficients u_1, v_1, w_1 du plan tangent au sommet seront déterminés par les équations

$$\frac{u_1}{c} = \frac{v_1}{c'} = \frac{w_1}{c''},$$

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1.$$

On en déduit sans difficulté

$$cu_1 + c'v_1 + c''w_1 = \pm \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

L'équation réduite est donc

$$S_2 v'^2 + S_3 w'^2 \pm 2u'r'\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = 0.$$

L'équation ponctuelle est alors

$$\frac{y'^2}{S_2} + \frac{z'^2}{S_3} \pm \frac{2x'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}} = 0.$$

190. Les paramètres des sections principales sont

$$\frac{|S_2|}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}} \quad \text{et} \quad \frac{|S_3|}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}.$$

Si S_2 et S_3 sont de même signe, le paraboloïde est elliptique, et de révolution si $S_2 = S_3$.

Si S_2 et S_3 sont de signes contraires, le paraboloïde est hyperbolique ; il est équilatère si $S_2 + S_3 = 0$.

191. Supposons que l'équation (1) représente une parabole, c'est-à-dire qu'on ait $\Delta = 0$; dans ce cas l'équation en S a une racine nulle $S_3 = 0$, et une racine non nulle, S_2.

A la racine nulle S_3 correspond le plan de la conique,

$$u_3 x + v_3 y + w_3 z + r_3 = 0,$$

pour les coefficients duquel on a

$$f'_{u_3} = 0, \qquad f'_{v_3} = 0, \qquad f'_{w_3} = 0, \qquad f'_{r_3} = 0.$$

A la racine S_2 correspond un plan principal

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 = 0.$$

Hosted by Google

Enfin nous prendrons pour plan des $y'z'$ le plan perpendiculaire au plan de la parabole et passant par la tangente au sommet.

On obtiendra pour équation de la courbe l'équation (2) du n° 184.

Mais on a

$$f(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0, \quad f(u_2, v_2, w_2, r_2) = S_2, \quad f(u_3, v_3, w_3, r_3) = 0.$$

On voit aisément que tous les autres coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de $u'r'$.

L'équation devient

$$S_2 v'^2 + 2u'r'(cu_1 + c'v_1 + c''w_1) = 0.$$

Or, on a aussi

$$\frac{u_1}{c} = \frac{v_1}{c'} = \frac{w_1}{c''},$$

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1.$$

L'équation réduite de la parabole est donc

$$S_2 v'^2 \pm 2u'r'\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = 0.$$

Les équations ponctuelles sont

$$\frac{y'^2}{S_2} \pm \frac{2x'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}} = 0,$$

$$z' = 0.$$

Le paramètre de cette parabole est $\dfrac{|\, S_2 \,|}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}$.

En se reportant à l'équation en S (n° 171), on voit que la racine non nulle est

$$-\frac{A + A' + A''}{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

192. On voit par cette discussion que si l'on connaît les signes des racines de l'équation en S, on connaîtra la nature de la surface (ou de la courbe) représentée par l'équation donnée.

Si de plus on peut résoudre l'équation en S, on aura l'équation réduite de la surface (ou de la courbe).

Hosted by Google

Il ne sera pas inutile de résumer ici tous les résultats obtenus.

PREMIER CAS. $d \neq 0$. **L'équation en S est du troisième degré.**

I. *L'équation en* S *a trois racines non nulles.*

La surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde, dont l'équation réduite est

$$S_1 u'^2 + S_2 v'^2 + S_3 w'^2 + d r'^2 = 0.$$

1° S_1, S_2, S_3 sont de même signe. Genre Ellipsoïde.	$S_1 d < 0$	Ellipsoïde réel.
	$S_1 d > 0$	Ellipsoïde imaginaire.
2° S_1, S_2, S_3 ne sont pas de même signe. Genre Hyperboloïde.	$S_1 S_2 S_3 d > 0$	Hyperboloïde à une nappe.
	$S_1 S_2 S_3 d < 0$	Hyperboloïde à deux nappes.

II. *L'équation en* S *a une racine nulle et deux racines non nulles.*

L'équation (1) représente une ellipse ou une hyperbole dont l'équation réduite est

$$S_1 u'^2 + S_2 v'^2 + d r'^2 = 0.$$

1° S_1 et S_2 sont de même signe. Genre Ellipse.	$S_1 d < 0$	Ellipse réelle.
	$S_1 d > 0$	Ellipse imaginaire.

2° S_1 et S_2 sont de signes contraires. — Hyperbole.

III. *L'équation en* S *a deux racines nulles et une racine non nulle.*

L'équation (1) représente deux points à distance finie ; l'équation réduite est

$$S_1 u'^2 + d r'^2 = 0.$$

$S_1 d < 0$ Deux points réels.

$S_1 d > 0$ Deux points imaginaires.

Hosted by Google

IV. *L'équation en* S *a trois racines nulles.*

L'équation (1) représente un point double à distance finie.

DEUXIÈME CAS. $d = 0$. **L'équation en S est du deuxième degré.**

I. *L'équation en* S *a deux racines non nulles.*

La surface est un paraboloïde, dont l'équation réduite est

$$S_2 v'^2 + S_3 w'^2 \pm 2u'r'\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = 0.$$

$S_2S_3 > 0$ Paraboloïde elliptique.

$S_2S_3 < 0$ Paraboloïde hyperbolique.

II. *L'équation en* S *a une racine nulle et une racine non nulle.*

L'équation (1) représente une parabole dont l'équation réduite est

$$S_2 v'^2 \pm 2u'r'\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = 0.$$

III. *L'équation en* S *a deux racines nulles.*

L'équation (1) représente deux points distincts dont l'un est à l'infini.

TROISIÈME CAS. **L'équation en S a tous ses coefficients nuls.**

L'équation représente une conique à l'infini pouvant se réduire à deux points ou à un point double.

193. On peut appliquer cette méthode à reconnaître la nature d'une surface, quand bien même la surface ne serait pas rapportée à des axes rectangulaires, car il est clair qu'étant donnée l'équation d'une surface, la nature de cette surface est indépendante des axes de coordonnées ; les éléments seuls de la surface changent de grandeur si on fait varier les axes de coordonnées, l'équation restant la même ; cela résulte de la décomposition en carrés.

194. Applications.

1° *Nature de la surface*

$$2u^2 - 3v^2 + w^2 + 2vw - 2uw - 2uv - 2ur + 4wr + r^2 = 0.$$

L'équation en S correspondante est

$$\begin{vmatrix} 2-S & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3-S & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1-S & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour développer ce déterminant, on peut retrancher la quatrième colonne de la deuxième et de la troisième ; puis retrancher la quatrième ligne de la deuxième et de la troisième ; on a alors l'équation

$$\begin{vmatrix} 2-S & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2-S & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2-S & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrit, développée,

$$(2-S)[(2+S)^2+2(2+S)]-(2+S)^2=0$$

ou

$$(S+2)(S^2+3S-6)=0.$$

Cette équation admet une racine positive et deux racines négatives, la surface est donc du genre hyperboloïde ; comme le coefficient de r^2 est positif, la surface est un hyperboloïde à une nappe, comme nous l'avons reconnu au numéro 123.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation réduite de la surface sera

$$-2u'^2+\frac{\sqrt{33}-3}{2}v'^2-\frac{\sqrt{33}+3}{2}w'^2+r'^2=0.$$

2° *Nature de la surface*

$$2u^2-4v^2-5w^2-uw-uv+ur+vr-wr=0.$$

L'équation en S est

$$\begin{vmatrix} 2-S & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -4-S & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -5-S & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on obtient

$$3S^2+14S=0 ;$$

on voit ainsi que l'équation représente une parabole.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation réduite est

$$-\frac{14}{3}v'^2 \pm u'r'\sqrt{3} = 0.$$

3° Nous avons trouvé au numéro 137 l'équation tangentielle du cercle ; on peut l'écrire, en supposant

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2 - R^2[u^2 + v^2 + w^2 - (lu + mv + nw)^2] = 0.$$

Pour former l'équation en S relative à ce cercle, on peut remarquer que $\Delta = 0$.

On calcule aisément

$$A = R^4 l^2, \qquad A' = R^4 m^2, \qquad A'' = R^4 n^2,$$

d'où l'on conclut

$$A + A' + A'' = R^4.$$

On trouve de même

$$ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 = -2R^2,$$

de sorte que l'équation en S s'écrit

$$S^3 + 2R^2S^2 + R^4S = 0$$

ou

$$S(S + R^2)^2 = 0.$$

L'équation réduite est donc

$$-R^2(u'^2 + v'^2) + r'^2 = 0.$$

4° *Déterminer suivant les valeurs du paramètre* λ *la nature des surfaces représentées par l'équation*

$$\lambda u^2 + v^2 + 2w^2 + 2(\lambda + 1)vw + 4wr + (\lambda - 2)r^2 = 0.$$

L'équation en S est

$$\begin{vmatrix} \lambda - S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - S & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 - S & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0;$$

elle peut s'écrire

$$(\lambda - S)\begin{vmatrix} 1 - S & \lambda + 1 & 0 \\ \lambda + 1 & 2 - S & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(S - \lambda)[S^2(\lambda - 2) - S(3\lambda - 10) - (\lambda^3 - 5\lambda + 6)] = 0.$$

Remarquons que l'équation

$$\lambda^3 - 5\lambda + 6 = 0$$

n'a qu'une racine réelle négative comprise entre -3 et -2 ; nous la désignerons par λ'.

Hosted by Google

Les valeurs remarquables de λ, rangées par ordre de grandeur, sont λ', 0 et 2.

L'équation en S admet d'abord la racine λ, puis les racines de l'équation du deuxième degré

$$S^2(\lambda-2)-S(3\lambda-10)-(\lambda^3-5\lambda+6)=0.$$

Enfin le coefficient de r^2 est égal à $\lambda-2$.

Si l'on a :	L'équation représente :
$-\infty<\lambda<\lambda'$	un hyperboloïde à deux nappes,
$\lambda=\lambda'$	une hyperbole,
$\lambda'<\lambda<0$	un hyperboloïde à une nappe,
$\lambda=0$	une ellipse réelle,
$0<\lambda<2$	un ellipsoïde réel,
$\lambda=2$	un paraboloïde elliptique,
$2<\lambda<+\infty$	un hyperboloïde à deux nappes.

195. Théorème. — *Le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une quadrique à centre est une sphère concentrique à la quadrique et dont le carré du rayon est égal à la somme des carrés des demi-axes.*

Soit $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un point du lieu ; considérons le cône circonscrit à la quadrique

$$f(u, v, w, r)=au^2+a'v^2+\cdots=0,$$

et ayant pour sommet le point M, et écrivons que ce cône peut être inscrit dans un trièdre trirectangle.

Les équations tangentielles de ce cône sont

$$f(u, v, w, r)=0,$$
$$u\alpha+v\beta+w\gamma+r=0;$$

l'équation de la conique de l'infini de ce cône est

$$f[u, v, w, -(u\alpha+v\beta+w\gamma)]=0.$$

Pour que ce cône puisse être inscrit dans un trièdre trirectangle, il faut et il suffit que la somme des coefficients de u^2, v^2, w^2 dans cette équation soit nulle ; on obtient

$$d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2c\alpha-2c'\beta-2c''\gamma+a+a'+a''=0.$$

On reconnaît l'équation d'une sphère ayant pour centre le point $\left(\frac{c}{d}, \frac{c'}{d}, \frac{c''}{d}\right)$, c'est-à-dire le centre de la quadrique.

Hosted by Google

Le carré du rayon est égal

$$-\frac{ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2}{d^2}$$

ou

$$-\frac{S_1 + S_2 + S_3}{d},$$

S_1, S_2, S_3 désignant les racines de l'équation en S ; or cette quantité est égale à la somme des carrés des demi-longueurs d'axes.

Le raisonnement s'applique à une ellipse ou à une hyperbole.

Si $d = 0$, c'est-à-dire si la surface est un paraboloïde, le lieu cherché se réduit à un plan perpendiculaire à l'axe,

$$2(cx + c'y + c''z) - (a + a' + a'') = 0.$$

Il est aisé d'établir que la distance de ce plan au sommet est égale à la demi-somme des paramètres des sections principales dans le cas du paraboloïde elliptique, et à la demi-différence des mêmes quantités dans le cas du paraboloïde hyperbolique ; d'une manière générale cette distance est égale à

$$\frac{| S_2 + S_3 |}{2\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}$$

ou

$$\frac{| A + A' + A'' |}{2(c^2 + c'^2 + c''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En effet, le plan tangent au sommet s'obtient en écrivant que le plan

$$cx + c'y + c''z + \lambda = 0$$

est tangent, ce qui donne

$$ac^2 + a'c'^2 + a''c''^2 + 2bc'c'' + 2b'c''c + 2b''cc' + 2\lambda(c^2 + c'^2 + c''^2) = 0.$$

La distance de ces deux plans est alors

$$\frac{| -2\lambda - (a + a' + a'') |}{2\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}$$

ou, en remplaçant 2λ par sa valeur,

Hosted by Google

$$\frac{|A + A' + A''|}{2(c^2 + c'^2 + c''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on a une parabole, le lieu cherché est le plan perpendiculaire au plan de la courbe et passant par la directrice.

196. Autre méthode de réduction. — Invariants. — Étant donnée l'équation d'une quadrique rapportée à des axes rectangulaires,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

nous allons établir qu'il existe certaines fonctions des coefficients qui conservent la même valeur quand on fait une transformation de coordonnées quelconques, de façon que les nouveaux axes soient rectangulaires comme les premiers. Ces fonctions s'appellent des invariants.

Désignons par Ox, Oy, Oz les premiers axes, par $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ les nouveaux axes, et soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les coordonnées des points directeurs de Ox, Oy, Oz par rapport à $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point O par rapport à ce même système ; nous aurons, en appliquant les formules (1) du n° 50 (dans lesquelles il faut permuter u, v, w, r et u', v', w', r'), et en y faisant $\lambda = 1$,

$$\left.\begin{aligned} u &= u'\alpha + v'\beta + w'\gamma, \\ v &= u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma', \\ w &= u'\alpha'' + v'\beta'' + w'\gamma'', \\ r &= u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + r'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Comme les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, α, β, γ sont les cosinus directeurs de Ox par rapport à $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$; de même pour α', β', γ', ... ; il existe donc entre ces neuf cosinus douze relations bien connues.

On a d'abord

$$u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 ;$$

en outre, le déterminant de la substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire à ± 1.

Cela posé, il est aisé d'établir le théorème qui suit :

THÉORÈME. — *Les racines de l'équation en* S *sont des invariants.*

Remplaçons dans le premier membre de l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

u, v, w, r par leur valeur (1) ; $f(u, v, w, r)$ devient une nouvelle forme quadratique,

$$f_1(u', v', w', r') = a_1 u'^2 + a'_1 v'^2 + \cdots + d_1 r'^2.$$

On a donc, en tenant compte des formules de transformation,

$$f(u, v, w, r) = f_1(u', v', w', r')$$

et, comme on l'a vu plus haut,

$$u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2.$$

On en déduit, quel que soit S,

$$f(u, v, w, r) - \mathrm{S}(u^2 + v^2 + w^2) = f_1(u', v', w', r') - \mathrm{S}(u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

Ainsi le second membre se déduit du premier par la transformation (1).

Si l'on désigne par F(S) et $\mathrm{F}_1(\mathrm{S})$ les discriminants des formes quadratiques qui figurent dans les deux membres, on aura, quel que soit S,

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{S}) \equiv \mathrm{F}(\mathrm{S}),$$

car le carré du module de la transformation est égal à 1.

On voit ainsi que les premiers membres des équations en S sont identiques, ce qui donne les relations

$$\Delta_1 = \Delta,$$

$$A_1 + A_1' + A_1'' = A + A' + A'',$$

$$a_1 d_1 - c_1^2 + a_1' d_1 - c_1'^2 + a_1'' d_1 - c_1''^2 = ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2,$$

$$d_1 = d.$$

Les racines elles-mêmes de l'équation en S sont également des invariants.

197. Nous allons déduire de ce théorème les équations réduites des surfaces (et des courbes) de deuxième classe.

Premier cas. $d \neq 0$.

L'équation réduite de la surface est

$$a_1 u'^2 + a_1' v'^2 + a_1'' w'^2 + d_1 r'^2 = 0,$$

en la supposant rapportée à ses plans principaux, car ces plans forment avec le plan de l'infini un tétraèdre conjugué.

L'équation en S relative à cette équation est

$$(a_1 - S)(a_1' - S)(a_1'' - S) d_1 = 0;$$

on en conclut que a_1, a_1', a_1'' sont les racines de cette équation ; par conséquent ces nombres seront aussi les racines de l'équation en S relative à l'équation donnée

$$f(u, v, w, r) = 0;$$

on aura de plus

$$d_1 = d;$$

par suite l'équation réduite sera

$$S_1 u'^2 + S_2 v'^2 + S_3 w'^2 + d r'^2 = 0.$$

Le raisonnement s'applique au cas où l'équation représente une conique ; il suffit de supposer par exemple $a_1'' = 0$.

Deuxième cas. $d = 0$.

Rapportons le paraboloïde à ses deux plans principaux et au plan tangent au sommet.

L'équation a la forme (169)

$$a_1' v'^2 + a_1'' w'^2 + 2 c_1 u r = 0.$$

Hosted by Google

On voit tout d'abord que a'_1 et a^1_{ll} sont les deux racines de l'équation en S ; en outre, en appliquant l'une des formules du numéro précédent, on a

$$c_1^2 = c^2 + c'^2 + c''^2,$$

ce qui donne l'équation réduite

$$S_2 v'^2 + S_3 w'^2 \pm 2u'r'\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = 0.$$

La méthode s'applique à la parabole.

198. On établira, comme en géométrie plane, qu'il n'existe pas d'autres invariants que les quatre fonctions trouvées plus haut, à savoir :

$$\Delta, \quad A + A' + A'', \quad ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2, \quad d.$$

199. L'interprétation géométrique de ces invariants est fort simple.

La condition

$$\Delta = 0$$

exprime que l'équation représente une conique.

La condition

$$d = 0$$

exprime que l'équation représente un paraboloïde.

La condition

$$A + A' + A'' = 0$$

exprime que le cône asymptote de la surface contient une infinité de systèmes de trois génératrices rectangulaires.

Enfin la condition

$$ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2 = 0$$

exprime que le cône asymptote de la surface est inscrit dans une infinité de trièdres trirectangles.

Il suffit de remarquer que l'équation de l'intersection de la surface par le plan de l'infini est

$$(ad - c^2)u^2 + (a'd - c'^2)v^2 + (a''d - c''^2)w^2 + 2(bd - c'c'')vw$$
$$+ 2(b'd - c''c)wu + 2(b''d - cc')uv = 0,$$

et que cette équation exprime que le plan

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangent au cône des directions asymptotiques ayant pour sommet l'origine.

EXERCICES ET NOTES

1. *Le lieu des centres des quadriques tangentes à six plans et dont la somme des carrés des axes est constante est une sphère.*

Soit

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2xur + 2yvr + 2zwr + r^2 = 0$$

l'équation d'une quadrique ayant pour centre le point (x, y, z).

En écrivant que cette quadrique est tangente à six plans, on aura six équations de la forme

$$f(u_i, v_i, w_i, r_i) = au_i^2 + a'v_i^2 + \cdots 2zw_ir_i + r_i^2 = 0.$$

D'autre part, l'équation réduite de cette quadrique est

$$S_1u'^2 + S_2v'^2 + S_3w'^2 + r'^2 = 0,$$

S_1, S_2, S_3 désignant les racines de l'équation

$$S^3 - S^2(a + a' + a'' - x^2 - y^2 - z^2) + S(A + A' + A'') - \Delta = 0.$$

La somme des carrés des demi-axes est

$$-(S_1 + S_2 + S_3);$$

on aura donc

$$a + a' + a'' + k^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0;$$

en éliminant a, a', a'', b, b', b'' entre cette équation et les six équations

$$f(u_i, v_i, w_i, r_i) = 0,$$

on aura l'équation du lieu.

On obtient un déterminant dont les six premières lignes sont de la forme

$$u_i^2 \quad v_i^2 \quad w_i^2 \quad v_iw_i \quad w_iu_i \quad u_iv_i \quad 2xu_ir_i + 2yv_ir_i + 2zw_ir_i + r_i^2$$

et dont la septième est

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad k^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

En développant ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on voit que le lieu est une sphère.

2. *On donne deux droites fixes Δ et Δ' qui ne se rencontrent pas; par ces deux droites on fait passer des surfaces* (S) *du second ordre, pour lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes ainsi que le produit de ces mêmes longueurs sont des quantités constantes et données.*

1° *Trouver le lieu des centres des surfaces* (S).

2° *Considérant une quelconque des surfaces* (S) *et le centre* I *de cette surface, on mène par le point* I *une droite rencontrant les deux droites fixes en* D *et* D'; *calculer la distance* DD'.

3° *Par les points* D *et* D', *on mène des plans respectivement perpendiculaires aux droites Δ et Δ'; trouver le lieu des intersections de ces plans.*

(*Agrégation, 1872.*)

On pourra prendre pour équation générale de ces surfaces l'équation obtenue dans la note 12 du chapitre V.

3. *Lieu des pôles d'un plan fixe* P *par rapport à un ellipsoïde de grandeur constante qui tourne autour de son centre et qui est assujetti en outre à toucher un plan donné* Q.

Prenons pour origine le centre de l'ellipsoïde, pour axe Oz une perpendiculaire au plan P, et pour axe des y une parallèle à l'intersection des plans P et Q; les équations de ces plans seront alors

$$z + h = 0, \tag{P}$$

$$u_0 x + w_0 z + 1 = 0. \tag{Q}$$

D'autre part, l'équation tangentielle de l'ellipsoïde sera

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + r^2 = 0,$$

avec la condition

$$au_0^2 + a''w_0^2 + 2b'w_0u_0 + 1 = 0. \tag{1}$$

Les coordonnées x, y, z du pôle du plan P sont données par les équations

$$\frac{b'}{x} = \frac{b}{y} = \frac{a''}{z} = h. \tag{2}$$

Pour exprimer que la surface est de grandeur constante, on écrira que les racines de l'équation en S sont égales aux carrés des demi-longueurs des axes changés de signe; on aura donc

$$\left.\begin{aligned} a + a' + a'' &= -\Sigma\alpha^2, \\ a'a'' - b^2 + a''a - b'^2 + aa' - b''^2 &= \Sigma\alpha^2\beta^2, \\ aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 &= -\alpha^2\beta^2\gamma^2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

On aura l'équation du lieu en éliminant a, a', a'', b, b', b'' entre les équations (1), (2) et (3).

4. *Trouver l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe par rapport aux paraboloïdes de grandeur constante qui contiennent deux droites rectangulaires concourantes.*

En prenant ces deux droites pour axes des x et des y, l'équation du paraboloïde sera de la forme

$$2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr = 0.$$

5. A l'aide de la relation

$$S\sigma = \Delta,$$

établie dans la note 10 du chapitre précédent, on peut déduire les équations tangentielles réduites des équations ponctuelles réduites.

On sait en effet que l'équation ponctuelle réduite d'une quadrique à centre est

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 + \frac{\Delta'}{\Delta_1} = 0,$$

où l'on pose

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

σ_1, σ_2, σ_3 désignant les racines de l'équation en σ.

Or on a

$$\sigma_1 S_1 = \sigma_2 S_2 = \sigma_3 S_3 = \Delta,$$
$$\Delta' = \Delta^3$$

et

$$\Delta_1 = \Delta^2 d\,;$$

l'équation réduite devient donc

$$\frac{x^2}{S_1} + \frac{y^2}{S_2} + \frac{z^2}{S_3} + \frac{1}{d} = 0,$$

et par suite l'équation tangentielle correspondante est

$$S_1 u^2 + S_2 v^2 + S_3 w^2 + dr^2 = 0.$$

6. Longueur des axes d'une section plane d'une quadrique.

Soit la quadrique représentée par l'équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv$$
$$+ 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0\,;$$

l'intersection de cette quadrique et d'un plan P a pour équation

$$f(u,\ v,\ w,\ r)f_0 - (uf_1 + vf_2 + wf_3 + rf_4)^2 = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$f_0 = f(u_0,\ v_0,\ w_0,\ r_0),$$

$$f_1 = \frac{1}{2} f'_{u_0},$$

$$f_2 = \frac{1}{2} f'_{v_0},$$

$$f_3 = \frac{1}{2} f'_{w_0},$$

$$f_4 = \frac{1}{2} f'_{r_0}.$$

Cette équation peut s'écrire, en développant,

$$\begin{aligned} u^2(af_0 - f_1^2) &+ v^2(a'f_0 - f_2^2) + w^2(a''f_0 - f_3^2) + 2vw(bf_0 - f_2f_3) \\ &+ 2wu(b'f_0 - f_3f_1) + 2uv(b''f_0 - f_1f_2) + 2ur(cf_0 - f_1f_4) \\ &+ 2vr(c'f_0 - f_2f_4) + 2wr(c''f_0 - f_3f_4) + r^2(df_0 - f_4^2) = 0. \end{aligned}$$

On aura les éléments de cette conique en formant l'équation en S

$$\begin{vmatrix} af_0 - f_1^2 - S & b''f_0 - f_1f_2 & b'f_0 - f_3f_1 & cf_0 - f_1f_4 \\ b''f_0 - f_1f_2 & a'f_0 - f_2^2 - S & bf_0 - f_2f_3 & c'f_0 - f_2f_4 \\ b'f_0 - f_3f_1 & bf_0 - f_2f_3 & a''f_0 - f_3^2 - S & c''f_0 - f_3f_4 \\ cf_0 - f_1f_4 & c'f_0 - f_2f_4 & c''f_0 - f_3f_4 & df_0 - f_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de S^3 est $-(df_0 - f_4^2)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} -[(ad - c^2)u_0^2 + (a'd - c'^2)v_0^2 + (a''d - c''^2)w_0^2 + 2(bd - c'c'')v_0w_0 \\ + 2(b'd - c''c)w_0u_0 + 2(b''d - cc')u_0v_0], \end{aligned}$$

que nous désignons par

$$-g(u_0,\ v_0,\ w_0),$$

en remarquant que l'équation

$$g(u_0,\ v_0,\ w_0) = 0$$

exprime que le plan est tangent à la conique de l'infini de la quadrique donnée (133).

Le coefficient de S^2 est

$$\begin{aligned} (af_0 - f_1^2)(df_0 - f_4^2) - (cf_0 - f_1f_4)^2 + (a'f_0 - f_2^2)(df_0 - f_4^2) \\ - (c'f_0 - f_2f_4)^2 + (a''f_0 - f_3^2)(df_0 - f_4^2) - (c''f_0 - f_3f_4)^2\ ; \end{aligned}$$

on peut l'écrire

$$\begin{aligned} f_0[(ad - c^2 + a'd - c'^2 + a''d - c''^2)f_0 - d(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \\ - (a + a' + a'')f_4^2 + 2cf_1f_4 + 2c'f_2f_4 + 2c''f_3f_4] \end{aligned}$$

Hosted by Google

ou, en développant,

$$f_0[(A'+A'')u_0^2+(A''+A)v_0^2+(A+A')w_0^2-2Bv_0w_0-2B'w_0u_0-2B''u_0v_0]$$

ou enfin

$$f_0[(A+A'+A'')(u_0^2+v_0^2+w_0^2) \\ -(Au_0^2+A'v_0^2+A''w_0^2+2Bv_0w_0+2B'w_0u_0+2B''u_0v_0)].$$

Nous désignerons par $\psi(u_0, v_0, w_0)$ la quantité entre crochets en remarquant que la condition

$$\psi(u_0, v_0, w_0) = 0$$

exprime que le plan

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0$$

coupe le cône

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

suivant deux génératrices rectangulaires (Chapitre V, Ex. 5.)

Le coefficient de $-S$ est la somme de trois déterminants, dont l'un d'eux est

$$\begin{vmatrix} a'f_0 - f_2^2 & bf_0 - f_2f_3 & c'f_0 - f_2f_4 \\ bf_0 - f_2f_3 & a''f_0 - f_3^2 & c''f_0 - f_3f_4 \\ c'f_0 - f_2f_4 & c''f_0 - f_3f_4 & df_0 - f_4^2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Ce déterminant peut se décomposer en une somme de huit déterminants dont les colonnes s'obtiennent en prenant une file verticale de termes dans chaque colonne du déterminant considéré.

Le premier d'entre eux est Af_0^3, obtenu en prenant les trois premières files ; en prenant ensuite la première file dans deux colonnes et la seconde dans la colonne restante, on obtient les trois déterminants

$$-f_0^2f_2\begin{vmatrix} f_2 & b & c' \\ f_3 & a'' & c'' \\ f_4 & c'' & d \end{vmatrix} - f_0^2f_3\begin{vmatrix} a' & f_2 & c' \\ b & f_3 & c'' \\ c' & f_4 & d \end{vmatrix} - f_0^2f_4\begin{vmatrix} a' & b & f_2 \\ b & a'' & f_3 \\ c' & c'' & f_4 \end{vmatrix},$$

qui peuvent s'écrire, en remplaçant les dérivées partielles par leurs valeurs développées, et décomposant chacun des trois déterminants en quatre nouveaux déterminants,

$$-f_0^2f_2(-B''u_0+Av_0)-f_0^2f_3(-B'u_0+Aw_0)-f_0^2f_4(-Cu_0+Ar_0).$$

Enfin les autres déterminants sont nuls comme ayant deux colonnes proportionnelles.

Il en résulte que le déterminant (1) est égal à

$$f_0^2[A(f_0-v_0f_2-w_0f_3-r_0f_4)+u_0(B''f_2+B'f_3+Cf_4)]$$

ou, en remarquant que $f_0 = u_0f_1+v_0f_2+w_0f_3+r_0f_4$,

$$u_0f_0^2(Af_1+B''f_2+B'f_3+Cf_4)$$

Hosted by Google

ou enfin

$$u_0^2 f_0^2 \Delta.$$

Les deux autres déterminants qui, avec le déterminant (1), forment le coefficient de $-S$ ont de même pour valeurs

$$v_0^2 f_0^2 \Delta \quad \text{et} \quad w_0^2 f_0^2 \Delta;$$

il en résulte que le coefficient de $-S$ est

$$f_0^2 \Delta(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2),$$

Δ désignant comme toujours le discriminant de la fonction

$$f(u, v, w, r).$$

Enfin le terme indépendant de l'équation en S est évidemment nul ; on voit donc que cette équation peut s'écrire

$$S^3 g(u_0, v_0, w_0) - S^2 f_0 \psi(u_0, v_0, w_0) + S f_0^2 \Delta(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0.$$

Premier cas. $g(u_0, v_0, w_0) \neq 0$.

Le plan donné n'est pas tangent à la conique de l'infini, la section est une ellipse ou une hyperbole.

L'équation en S a deux racines non nulles, S_1 et S_2 ; le coefficient de r^2 dans l'équation réduite de la conique est $g(u_0, v_0, w_0)$; en remplaçant dans l'équation en S, S par $-\rho^2 g(u_0, v_0, w_0)$, on aura l'équation aux carrés des demi-longueurs des axes.

On obtient ainsi

$$\rho^4[g(u_0, v_0, w_0)]^3 + \rho^2 g(u_0, v_0, w_0) f_0 \psi(u_0, v_0, w_0) + f_0^2 \Delta(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0.$$

On déduit de là sans peine la nature de la conique.

Deuxième cas. $g(u_0, v_0, w_0) = 0$.

Le plan donné est tangent à la conique de l'infini, la section est une parabole.

L'équation en S a une seule racine différente de zéro ; on calculera aisément (191) le paramètre de la parabole.

7. *Démontrer que les demi-longueurs d'axes de la section de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

par le plan

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0$$

sont racines de l'équation

$$\frac{u_0^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}} + \frac{v_0^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\rho^2}} + \frac{w_0^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\rho^2}} = 0.$$

Il suffit d'appliquer la méthode indiquée au numéro précédent.

Hosted by Google

8. *Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est égale à une constante donnée.*

(*Concours général, 1861.*)

9. Sections circulaires d'une quadrique. — Supposons que la quadrique soit déterminée par son équation tangentielle,

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots = 0.$$

Pour qu'un plan

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z + r_0 = 0$$

coupe cette quadrique suivant un cercle, il faut que l'équation de la conique section,

$$4f(u, v, w, r)f(u_0, v_0, w_0, r_0) - (uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2 = 0,$$

représente un cercle.

On pourrait obtenir cette condition en appliquant les formules du n° 138; il est plus simple d'écrire que l'équation en S de l'exercice 6 a ses racines égales, c'est-à-dire qu'on a

$$[\psi(u_0, v_0, w_0)]^2 - 4\Delta g(u_0, v_0, w_0)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0.$$

Remplaçons $\psi(u_0, v_0, w_0)$ et $g(u_0, v_0, w_0)$ par leurs valeurs, et en tenant compte des relations (116)

$$\begin{aligned}
\Delta(ad - c^2) &= A'A'' - B^2,\\
\Delta(a'd - c'^2) &= A''A - B'^2,\\
\Delta(a''d - c''^2) &= AA' - B''^2,\\
\Delta(bd - c'c'') &= B'B'' - AB,\\
\Delta(b'd - c''c) &= B''B - A'B',\\
\Delta(b''d - cc') &= BB' - A''B'',
\end{aligned}$$

la condition devient

$$\begin{aligned}
&[(A + A' + A'')(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\\
&\quad - (Au_0^2 + A'v_0^2 + A''w_0^2 + 2Bv_0w_0 + 2B'w_0u_0 + 2B''u_0v_0)]^2\\
&\quad - 4(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)[(A'A'' - B^2)u_0^2 + (A''A - B'^2)v_0^2 + (AA' - B''^2)w_0^2\\
&\quad + 2(B'B''-AB)v_0w_0 + 2(B''B-A'B')w_0u_0 + 2(BB'-A''B'')u_0v_0] = 0. \quad (1)
\end{aligned}$$

Cette condition exprime que le plan passe par l'un des points de rencontre du cercle de l'infini et de la conique de l'infini de la quadrique donnée.

Pour le démontrer, considérons les deux cônes ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur ces deux coniques; ils ont pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

L'équation ponctuelle générale des cônes passant par leur intersection est

$$(A + \lambda)x^2 + (A' + \lambda)y^2 + (A'' + \lambda)z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

et les équations tangentielles d'un de ces cônes sont

$$\begin{vmatrix} A+\lambda & B'' & B' & u \\ B'' & A'+\lambda & B & v \\ B' & B & A''+\lambda & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

$$r = 0.$$

L'équation (2) est l'équation tangentielle de la trace de ce cône sur le plan de l'infini.

Elle est du deuxième degré en λ ; cela montre qu'il existe deux coniques passant par les quatre points d'intersection du cercle de l'infini et de la conique de l'infini de la quadrique donnée et tangentes à un plan ; ces deux coniques se confondent si le plan passe par l'un des points d'intersection dont on vient de parler.

On en conclut que l'équation de ces quatre points s'obtiendra en écrivant que l'équation (2) a deux racines égales en λ.

On obtient précisément la condition (1) où u_0, v_0, w_0 sont remplacés respectivement par u, v, w (*).

Or les quatre points de rencontre sont deux à deux imaginaires conjugués, le plan donné est réel; il en résulte que si ce plan passe par l'un des quatre points, il passe par le point imaginaire conjugué.

Par suite, les plans qui coupent la quadrique suivant des cercles doivent passer par les sécantes communes au cercle de l'infini et à la conique de l'infini de la quadrique ; on les obtiendra en écrivant que l'équation

$$(A + \lambda)x^2 + (A' + \lambda)y^2 + (A'' + \lambda)z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

représente deux plans.

C'est le résultat bien connu que donne la géométrie ponctuelle.

10. *Trouver le lieu des pôles des plans qui coupent un ellipsoïde suivant des ellipses dont la somme des carrés des axes est constante.*

(*) Ce raisonnement est analogue au raisonnement déjà fait dans la Première Partie (*Géom. plane*), n° 256.

Hosted by Google

11. On pourra, en se servant de l'équation en S, déterminer la nature des quadriques considérées dans les exercices 1 et 2 du chapitre V, et comparer les résultats obtenus.

12. *Étant donnés trois plans rectangulaires, une quadrique touche un de ces plans et coupe les deux autres suivant des cercles de centres variables, mais de rayons donnés. Trouver le lieu des centres de ces quadriques et la relation qui existe entre les longueurs de leurs axes.*

Hosted by Google

CHAPITRE IX

COORDONNÉES TÉTRAÉDRIQUES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE QUADRIQUES

200. Considérons quatre plans formant un tétraèdre et ayant pour équations

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ Y &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0, \\ Z &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0, \\ T &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

avec la condition

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous allons montrer que l'équation ponctuelle d'une surface quelconque peut s'exprimer en égalant à zéro une fonction homogène de X, Y, Z, T.

Désignons en effet par A_1, A_2, ..., B_1, ..., D_4 les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement du déterminant D ; des équations (1) on tire

Hosted by Google

$$\left.\begin{aligned} Dx &= A_1X + A_2Y + A_3Z + A_4T, \\ Dy &= B_1X + B_2Y + B_3Z + B_4T, \\ Dz &= C_1X + C_2Y + C_3Z + C_4T, \\ Dt &= D_1X + D_2Y + D_3Z + D_4T. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Dès lors, si l'équation d'une surface est

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

en remplaçant dans cette équation x, y, z, t par leurs valeurs (2), l'équation prend la forme

$$\varphi(X, Y, Z, T) = 0,$$

les fonctions $f(x, y, z, t)$ et $\varphi(X, Y, Z, T)$ ayant le même degré.

Réciproquement, toute équation homogène par rapport à X, Y, Z, T peut se remplacer par une équation de même degré et homogène par rapport à x, y, z, t ; il suffit de substituer à X, Y, Z, T leurs valeurs (1).

On en conclut que l'équation d'un plan pourra s'écrire

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T = 0 ;$$

l'équation d'une quadrique,

$$\alpha X^2 + \alpha' Y^2 + \alpha'' Z^2 + 2\beta YZ + 2\beta' ZX + 2\beta'' XY$$
$$+ 2\gamma XT + 2\gamma' YT + 2\gamma'' ZT + \delta T^2 = 0,$$

X, Y, Z, T désignant simplement des fonctions linéaires indépendantes de x, y, z, t.

201. Supposons que dans les relations (1) on remplace x, y, z, t par les coordonnées homogènes d'un point M de l'espace ; X, Y, Z, T prennent alors des valeurs déterminées qu'on appelle les coordonnées tétraédriques du point M.

On voit ainsi que tout point de l'espace a des coordonnées tétraédriques définies à un facteur près.

Réciproquement, étant données les coordonnées tétraédriques d'un point, les formules (2) déterminent à un facteur près les coordonnées homogènes de ce point.

Il résulte de là qu'un point est bien défini par ses coordon-

Hosted by Google

nées tétraédriques, et les considérations précédentes montrent que toute relation entre les coordonnées tétraédriques d'un point est la condition pour que ce point soit sur une surface.

Le tétraèdre dont les faces sont représentées par les équations (1) est appelé le tétraèdre de référence.

On peut observer que les coordonnées tétraédriques d'un point sont proportionnelles aux produits par des nombres fixes des distances du point aux faces du tétraèdre de référence, ces distances étant affectées du signe + si le point est par rapport à la face correspondante du même côté que le sommet opposé et du signe — dans le cas contraire.

202. Étant donnée maintenant l'équation d'un plan,

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

on pourra l'écrire, en introduisant les coordonnées tétraédriques,

$$u(A_1X + A_2Y + A_3Z + A_4T) + v(B_1X + B_2Y + B_3Z + B_4T)$$
$$+ w(C_1X + C_2Y + C_3Z + C_4T) + r(D_1X + D_2Y + D_3Z + D_4T) = 0)$$

ou

$$UX + VY + WZ + RT = 0,$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} hU &= A_1u + B_1v + C_1w + D_1r, \\ hV &= A_2u + B_2v + C_2w + D_2r, \\ hW &= A_3u + B_3v + C_3w + D_3r, \\ hR &= A_4u + B_4v + C_4w + D_4r, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

h étant un nombre arbitraire.

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} ku &= a_1U + a_2V + a_3W + a_4R, \\ kv &= b_1U + b_2V + b_3W + b_4R, \\ kw &= c_1U + c_2V + c_3W + c_4R, \\ kr &= d_1U + d_2V + d_3W + d_4R. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Si l'on remplace dans les équations (3) u, v, w, r par les coordonnées d'un plan, U, V, W, R prennent des valeurs déterminées à un facteur près qu'on appelle les coordonnées tétraédriques du plan.

Les formules (3) et (4) permettent de déduire les coordonnées tétraédriques des coordonnées homogènes, et inversement.

On voit ainsi que l'équation tangentielle d'une surface,

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

pourra se remplacer par une équation homogène et de même degré par rapport à U, V, W, R, et réciproquement.

Par exemple, l'équation

$$\alpha U + \beta V + \gamma W + \delta R = 0$$

est l'équation tangentielle d'un point, ce point ayant pour coordonnées tétraédriques α, β, γ, δ.

De même

$$\alpha U^2 + \alpha' V^2 + \alpha'' W^2 + 2\beta VW + 2\beta' WU + 2\beta'' UV + 2\gamma UR + 2\gamma' VR + 2\gamma'' WR + \delta R^2 = 0$$

est l'équation tangentielle d'une quadrique.

Remarquons en outre que les coordonnées tétraédriques d'un plan sont proportionnelles aux produits par des nombres fixes des distances des sommets du tétraèdre de référence à ce plan.

En résumé, les coordonnées tétraédriques d'un point sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées homogènes de ce point, et toute équation homogène de degré m entre les coordonnées tétraédriques d'un point représente une surface de degré m.

De même, les coordonnées tétraédriques d'un plan sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées homogènes de ce plan, et toute équation homogène de degré m entre les coordonnées tétraédriques d'un plan représente une surface (ou une courbe) de classe m.

203. Ainsi qu'on l'a vu plus haut, l'équation du point est

$$\alpha U + \beta V + \gamma W + \delta R = 0.$$

Étant données les équations de deux points,

Hosted by Google

$$P = \alpha U + \beta V + \gamma W + \delta R = 0,$$
$$P' = \alpha' U + \beta' V + \gamma' W + \delta' R = 0,$$

l'équation générale des points situés sur la droite qui joint ces deux points est

$$\lambda P + \mu P' = 0,$$

le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ étant proportionnel au rapport des distances du point aux deux points P et P'.

Désignons par ABCD le tétraèdre de référence ; les sommets A, B, C, D ont respectivement pour équations

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad R = 0,$$

les points d'une arête, AB par exemple, ont pour équation générale

$$\lambda U + \mu V = 0 ;$$

les points d'une face, ABC par exemple, ont pour équation générale

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0.$$

Les faces BCD, CAD, ABD, ABC ont respectivement pour équations ponctuelles

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0.$$

Un plan quelconque passant par l'arête AB sera représenté par l'équation

$$\lambda Z + \mu T = 0.$$

Si U_1, V_1, W_1, R_1 et U_2, V_2, W_2, R_2 sont les coordonnées tétraédriques de deux plans P_1 et P_2, tout plan passant par l'intersection a pour coordonnées

$$U = \lambda U_1 + \mu U_2,$$
$$V = \lambda V_1 + \mu V_2,$$
$$W = \lambda W_1 + \mu W_2,$$
$$R = \lambda R_1 + \mu R_2.$$

Ce plan fait avec P_2 et P_1 des angles dont le rapport des sinus est proportionnel à $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$.

[Voir Première Partie (*Géom. plane*), n° 228].

Hosted by Google

Quand $\frac{\lambda}{\mu}$ conserve un signe constant, le plan P se meut dans un angle déterminé des deux plans P_1 et P_2, mais dès que $\frac{\lambda}{\mu}$ change de signe, le plan passe dans un autre angle.

Enfin, étant donnés deux plans $P(\lambda, \mu)$ et $P'(\lambda', \mu')$ passant par l'intersection de P_1 et de P_2, l'un des rapports anharmoniques de ces quatre plans est $\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'}$, et si l'on a $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\lambda'}{\mu'}$, les plans P et P' sont conjugués harmoniques par rapport à P_1 et P_2.

204. Soit

$$f(U, V, W, R) = 0$$

l'équation tangentielle d'une surface ; son équation ponctuelle en coordonnées tétraédriques s'obtient en éliminant U, V, W, R et λ entre les équations

$$\begin{aligned} f'_U - \lambda X &= 0, \\ f'_V - \lambda Y &= 0, \\ f'_W - \lambda Z &= 0, \\ f'_R - \lambda T &= 0, \\ UX + VY + WZ + RT &= 0. \end{aligned}$$

Si l'équation est du deuxième degré,

$$f(U, V, W, R) = aU^2 + a'V^2 + \cdots dR^2 = 0,$$

l'équation ponctuelle s'écrira

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & X \\ b'' & a' & b & c' & Y \\ b' & b & a'' & c'' & Z \\ c & c' & c'' & d & T \\ X & Y & Z & T & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$AX^2 + A'Y^2 + \cdots + DT^2 = 0,$$

le discriminant de $f(U, V, W, R)$ étant supposé différent de zéro.

Tout ce qui a rapport aux plans tangents, aux pôles et polaires dans les quadriques, à toutes les propriétés descriptives se traite de la même manière en coordonnées homogènes et en coordonnées tétraédriques.

Une surface développable sera représentée également par deux équations tangentielles.

Une équation représentera une courbe si le Hessien est divisible par le premier membre de l'équation, etc., etc.

205. Nous laisserons complètement de côté les coordonnées tétraédriques dans l'étude des propriétés métriques des figures; elles donnent lieu à des calculs trop pénibles, comme on peut s'en rendre compte en lisant les ouvrages de PAINVIN et KŒHLER.

Au contraire, dans l'étude des propriétés descriptives, ces coordonnées peuvent rendre de réels services, comme nous allons le voir par la suite.

Voici tout d'abord un exemple fort simple.

206. **Quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre.**

Prenons le tétraèdre pour tétraèdre de référence, et soit

$$f(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \mathrm{R}) = a\mathrm{U}^2 + a'\mathrm{V}^2 + a''\mathrm{W}^2 + 2b\mathrm{VW} + \cdots d\mathrm{R}^2 = 0$$

l'équation d'une quadrique.

Le pôle d'un plan $(\mathrm{U}_0, \mathrm{V}_0, \mathrm{W}_0, \mathrm{R}_0)$ a pour équation

$$\mathrm{U}_0 f'_{\mathrm{U}} + \mathrm{V}_0 f'_{\mathrm{V}} + \mathrm{W}_0 f'_{\mathrm{W}} + \mathrm{R}_0 f'_{\mathrm{R}} = 0;$$

écrivons que le pôle du plan BCD,

$$\frac{1}{2} f'_{\mathrm{U}} = a\mathrm{U} + b''\mathrm{V} + b'\mathrm{W} + c\mathrm{R} = 0,$$

est le point A, c'est-à-dire a pour équation

$$\mathrm{U} = 0.$$

On en déduit

$$b'' = b' = c = 0.$$

De même, en écrivant que le pôle du plan CAD est le point B, ... etc., on trouve

$$b = b' = b'' = c = c' = c'' = 0,$$

de telle sorte que l'équation générale cherchée est

$$a\mathrm{U}^2 + a'\mathrm{V}^2 + a''\mathrm{W}^2 + d\mathrm{R}^2 = 0,$$

comme nous l'avons trouvé au n° 151.

207. Développable commune à deux quadriques. — Étant données les équations ponctuelles de deux quadriques en coordonnées homogènes ou tétraédriques,

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad f_1(x, y, z, t) = 0,$$

on sait que ces deux quadriques se coupent en général suivant une courbe gauche du quatrième degré, qu'on appelle une quartique gauche, et que l'équation générale des quadriques qui passent par cette quartique est

$$f(x, y, z, t) + \lambda f_1(x, y, z, t) = 0.$$

L'ensemble de ces quadriques forme un faisceau ponctuel.

En transformant par le principe de dualité, on voit qu'étant données les équations tangentielles de deux quadriques,

$$f(u, v, w, r) = 0, \qquad f_1(u, v, w, r) = 0, \tag{1}$$

tous les plans tangents à ces surfaces enveloppent en général une surface développable de quatrième classe dont les deux équations qui précèdent sont les équations tangentielles ; cette développable est ce qu'on appelle la développable commune aux deux quadriques, et l'équation générale des quadriques inscrites dans cette développable est

$$f(u, v, w, r) + \lambda f_1(u, v, w, r) = 0.$$

L'ensemble de ces quadriques forme un faisceau tangentiel.

Il peut arriver que l'une des équations (1) représente une conique ; les plans tangents à la développable s'obtiendront en menant par chaque tangente de la conique des plans tangents à la quadrique. En joignant le point de contact de la tangente à ceux des plans tangents, on aura deux génératrices de la surface développable. On voit ainsi que par tout point de la conique passent deux nappes de la développable ; c'est pour cette raison que l'on dit que la conique est une conique double de la développable.

De même, si les deux équations (1) représentent toutes deux des coniques, ce seront deux coniques doubles de la développable.

Hosted by Google

208. THÉORÈME. — *La développable commune à deux quadriques contient en général quatre coniques doubles dont les plans sont les faces d'un tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques.*

Pour que l'équation

$$f(u, v, w, r) + \lambda f_1(u, v, w, r) = 0$$

représente une conique, il faut qu'il existe un système de valeurs de u, v, w, r annulant les quatre dérivées partielles du premier membre de l'équation, c'est-à-dire vérifiant les équations

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial r} = 0.$$

On a quatre équations homogènes à quatre inconnues ; pour qu'elles soient vérifiées par des valeurs non toutes nulles des inconnues, il faut que le déterminant soit nul, ce qui donne une équation du quatrième degré en λ.

Il y aura donc quatre coniques doubles sur cette développable.

Je dis maintenant que les plans de deux de ces coniques sont conjugués par rapport à toutes les quadriques inscrites dans la développable.

Soient, en effet, λ_1 et λ_2 deux racines de l'équation du quatrième degré, et (u_1, v_1, w_1, r_1), (u_2, v_2, w_2, r_2) les coordonnées des plans des coniques correspondantes ; on aura

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 0,$$

Hosted by Google

$$\frac{\partial f}{\partial w_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial w_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial w_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial r_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial r_2} = 0.$$

Multiplions les quatre équations de gauche respectivement par u_2, v_2, w_2, r_2, puis ajoutons ; multiplions de même les quatre équations de droite respectivement par u_1, v_1, w_1, r_1, et ajoutons.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$H = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + v_1 \frac{\partial f}{\partial v_2} + w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2} + r_1 \frac{\partial f}{\partial r_2},$$

$$K = u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + w_1 \frac{\partial f_1}{\partial w_2} + r_1 \frac{\partial f_1}{\partial r_2};$$

on aura

$$H + \lambda_1 K = 0,$$

$$H + \lambda_2 K = 0,$$

d'où l'on déduit

$$H = 0, \qquad K = 0,$$

et l'on a, quel que soit λ,

$$H + \lambda K = 0.$$

On en conclut que les deux plans sont conjugués par rapport à la quadrique

$$f(u, v, w, r) + \lambda f_1(u, v, w, r) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

209. Ce théorème est le corrélatif du suivant, que l'on établit en géométrie ponctuelle :

Par l'intersection de deux quadriques on peut faire passer quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre conjugué commun par rapport à toutes les quadriques qui passent par la quartique.

Comme il n'existe qu'un seul tétraèdre conjugué commun par rapport à deux quadriques, on en conclut que les sommets des cônes passant par l'intersection de deux quadriques sont situés trois à trois dans les plans des coniques doubles de la

Hosted by Google

développable commune ; les trois points situés dans le plan d'une conique sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport à cette conique.

210. Sans vouloir discuter complètement ici la nature de la développable commune à deux quadriques, nous allons établir un résultat important, qui nous sera prochainement utile.

Si deux quadriques sont tangentes en un point, deux des coniques doubles de la développable commune sont confondues suivant une conique située dans le plan tangent commun, et les deux autres coniques doubles sont tangentes à ce plan tangent.

Considérons deux quadriques tangentes au plan des xy à l'origine et ayant pour équations

$$f(u,v,w,r) = au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0,$$

$$f_1(u,v,w,r) = a_1u^2 + a'_1v^2 + 2b''_1uv + 2c_1ur + 2c'_1vr + 2c''_1wr + d_1r^2 = 0.$$

Écrivons que le discriminant de $f(u, v, w, r) + \lambda f_1(u, v, w, r)$ est nul ; on a

$$\begin{vmatrix} a + \lambda a_1 & b'' + \lambda b''_1 & 0 & c + \lambda c_1 \\ b'' + \lambda b''_1 & a' + \lambda a'_1 & 0 & c' + \lambda c'_1 \\ 0 & 0 & 0 & c'' + \lambda c''_1 \\ c + \lambda c_1 & c' + \lambda c'_1 & c'' + \lambda c''_1 & d + \lambda d_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(c'' + \lambda c''_1)^2[(a + \lambda a_1)(a' + \lambda a'_1) - (b'' + \lambda b_1)^2] = 0.$$

A la racine double $-\dfrac{c''}{c''_1}$ correspond une conique située dans le plan des xy ; on voit de plus que toutes les quadriques du faisceau tangentiel touchent le plan des xy ; il en est de même des deux autres coniques doubles de ce faisceau.

Réciproquement, étant données une quadrique et une conique située dans un plan tangent, la développable commune admet la conique donnée comme conique double comptant deux fois, elle a en outre deux autres coniques doubles qui touchent le plan tangent.

La démonstration est la même ; on considérera la quadrique tangente au plan des xy,

$$f(u,v,w,r) = au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0,$$

et la conique

$$f_1(u,v,r) = a_1u^2 + a'_1v^2 + 2b''_1uv + 2c_1ur + 2c'_1vr + d_1r^2 = 0.$$

Hosted by Google

211. De même que huit points déterminent une quartique gauche, huit plans tangents déterminent une surface développable de quatrième classe.

On établit aisément les théorèmes qui suivent :

Il existe une quadrique et une seule tangente à neuf plans qui ne sont pas tangents à une surface développable.

Toutes les quadriques qui ont sept plans tangents communs sont tangentes à un huitième plan.

212. Si l'une des deux quadriques (1) se réduit à un système de deux points, la développable commune se compose de deux cônes ayant pour sommets ces deux points.

Supposons par exemple

$$f_1(u,\ v,\ w,\ r) \equiv \mathrm{PQ},$$

P et Q désignant des fonctions linéaires et homogènes ; l'équation

$$f(u,\ v,\ w,\ r) + \lambda \mathrm{PQ} = 0 \tag{2}$$

est l'équation générale des quadriques inscrites dans les deux cônes de sommets P et Q circonscrits à la quadrique S représentée par l'équation

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = 0.$$

Il est aisé de voir que toutes ces quadriques sont tangentes à la quadrique S aux points de contact des plans tangents menés à cette quadrique par la droite PQ.

Soient, en effet, u_1, v_1, w_1, r_1 les coordonnées d'un de ces plans tangents ; on a

$$f(u_1,\ v_1,\ w_1,\ r_1) = 0, \qquad \mathrm{P}_1 = 0, \qquad \mathrm{Q}_1 = 0.$$

Le point de contact de ce plan et de la quadrique (2) a pour équation

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} + rf'_{r_1} + \lambda(\mathrm{PQ}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}) = 0$$

ou

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} + rf'_{r_1} = 0\,,$$

qui représente le point de contact de ce plan et de la quadrique S.

On en conclut que si la développable commune à deux quadriques se réduit à deux cônes, les deux quadriques sont bitangentes.

Réciproquement, je dis que si deux quadriques sont bitangentes, elles sont inscrites dans deux cônes.

Prenons en effet pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant deux de ses sommets A et B aux points de contact des deux quadriques et les deux autres C et D sur la droite intersection des deux plans tangents communs, et désignons par

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0$$

les équations des sommets A, B, C, D.

Soit

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots dr^2 = 0$$

l'équation d'une quadrique.

Écrivons que le pôle du plan ACD (dont les coordonnées sont 0, 1, 0, 0) est le point A.

Le pôle du plan ACD a pour équation

$$\frac{1}{2} f'_v = b''u + a'v + bw + c'r = 0\,;$$

on doit avoir

$$a' = b = c' = 0, \qquad b'' \neq 0.$$

De même le pôle du plan BCD,

$$\frac{1}{2} f'_u = au + b''v + b'w + cr = 0,$$

doit être le point B, donc

$$a = b' = c = 0, \qquad b'' \neq 0.$$

L'équation générale des quadriques tangentes en A et B aux plans ACD et BCD est donc, en faisant $b'' = 1$,

$$a''w^2 + 2uv + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Considérons deux quadriques tangentes en A et B à ces deux plans ; leurs équations seront

$$a''w^2 + 2uv + 2c''wr + dr^2 = 0,$$

$$a''_1w^2 + 2uv + 2c''_1wr + d_1r^2 = 0\,;$$

Hosted by Google

en retranchant ces deux équations, on a

$$(a'' - a''_1)w^2 + 2(c'' - c''_1)wr + (d - d_1)r^2 = 0,$$

équation qui représente deux points situés sur CD, car le premier membre est décomposable en un produit de deux facteurs de la forme $\alpha w + \beta r$.

Il en résulte que la développable commune se réduit à deux cônes ayant pour sommets ces deux points.

On en conclut aussi qu'étant donnée une quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

l'équation générale des quadriques bitangentes à cette quadrique est

$$f(u, v, w, r) + \lambda P^2 + 2\mu PQ + \nu Q^2 = 0,$$

P et Q étant des fonctions linéaires qui, égalées à zéro, représentent deux points situés sur la droite intersection des plans tangents communs, et λ, μ, ν désignant des paramètres arbitraires.

213. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que deux quadriques soient bitangentes est qu'elles se coupent suivant deux courbes planes ; il en résulte que si deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes, leur développable se réduit à deux cônes, et inversement.

214. Quand la développable commune se réduit à deux cônes, ces deux cônes sont bitangents, ils se coupent suivant deux courbes planes qui sont deux coniques doubles de la développable ; les deux autres sont confondues suivant la conique singulière formée par les sommets des deux cônes.

Considérons en effet deux quadriques tangentes en A et B aux faces ACD et BCD du tétraèdre de référence,

$$a''w^2 + 2b''uv + 2c''wr + dr^2 = 0,$$

$$a''_1w^2 + 2b''_1uv + 2c''_1wr + d_1r^2 = 0 ;$$

Hosted by Google

l'équation en λ est

$$\begin{vmatrix} 0 & b'' + \lambda b''_1 & 0 & 0 \\ b'' + \lambda b''_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'' + \lambda a''_1 & c'' + \lambda c''_1 \\ 0 & 0 & c'' + \lambda c''_1 & d + \lambda d_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(b'' + \lambda b''_1)^2[(a'' + \lambda a''_1)(d + \lambda d_1) - (c'' + \lambda c''_1)^2] = 0.$$

Elle admet une racine double, à laquelle correspond une conique qui se réduit aux sommets des deux cônes.

215. Si l'équation

$$f(u, v, w, r) + \lambda PQ = 0$$

représente une conique, cette conique est à l'intersection des deux cônes circonscrits à la quadrique S et ayant pour sommets les points P et Q ; cette conique est bitangente à la quadrique.

Il résulte de là que la condition pour qu'une quadrique soit de révolution est qu'elle soit bitangente au cercle de l'infini, ou, ce qui revient au même, que sa trace sur le plan de l'infini soit bitangente au cercle de l'infini.

En effet, on sait (183) que la condition pour qu'une quadrique soit de révolution est que

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2)$$

soit identique à un produit de deux facteurs linéaires ; on en conclut que la surface

$$f(u, v, w, r) = 0$$

et la courbe

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

sont bitangentes.

216. Nous avons obtenu au n° 212 l'équation générale des quadriques tangentes en A et B aux faces ACD et BCD du tétraèdre de référence ; cette équation est

$$2b''uv + a''w^2 + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Comme $u = 0$, $v = 0$ sont les équations des points A et B et que l'équation

$$a''w^2 + 2c''wr + dr^2 = 0$$

représente deux points sur CD, on peut dire que l'équation générale des quadriques tangentes à deux plans en deux points donnés A et B est

$$AB + PQ = 0,$$

Hosted by Google

A et B désignant les premiers membres des équations des deux points de contact et P, Q désignant les premiers membres des équations de deux points quelconques situés sur l'intersection des deux plans tangents.

On voit de plus que l'équation est vérifiée par toutes les solutions des équations

$$A = 0, \qquad P = 0\,;$$

on en conclut que tous les plans passant par la droite AP sont tangents à la surface, et cela ne peut avoir lieu que si la droite AP est située sur la surface.

L'équation

$$AB + PQ = 0$$

est donc l'équation d'une surface passant par les quatre droites AP, PB, BQ, QA.

Ainsi, étant donnés sur Ox un point A, d'abscisse a, sur Oz un point B de cote b, l'équation générale des quadriques tangentes en A au plan des xy, en B au plan des yz est

$$(ua + r)(wb + r) + \alpha v^2 + \beta vr + \gamma r^2 = 0,$$

α, β, γ désignant des paramètres variables.

Si le trinome

$$\alpha v^2 + \beta vr + \gamma r^2$$

a ses racines réelles, égalé à zéro il représente deux points réels C et D situés sur Oy ; on en conclut que la surface est réglée et circonscrite au quadrilatère gauche ACBD.

Si au contraire ce trinome a ses racines imaginaires, la surface n'est pas réglée.

217. On peut déduire de là l'équation générale des paraboloïdes tangents à un plan P en un point donné A et dont l'axe a une direction donnée.

Il suffit d'écrire l'équation générale des quadriques tangentes au plan P au point A et au plan de l'infini, le point de contact étant dans la direction de l'axe.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A,

$$u_0(x - x_0) + v_0(y - y_0) + w_0(z - z_0) = 0$$

l'équation du plan P et α, β, γ les paramètres directeurs de l'axe.

L'équation du point de contact avec le plan de l'infini est

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Il faut maintenant l'équation de l'ensemble de deux points à l'infini dans le plan P.

Soient l, m, n, 0 les coordonnées d'un point à l'infini dans le

Hosted by Google

plan P ; on aura

$$u_0 l + v_0 m + w_0 n = 0$$

ou, si l'on suppose $w_0 \neq 0$,

$$n = -\frac{u_0 l + v_0 m}{w_0};$$

l'équation de ce point sera

$$ul + vm - w.\frac{u_0 l + v_0 m}{w_0} = 0$$

ou

$$l(uw_0 - wu_0) + m(vw_0 - wv_0) = 0.$$

L'équation générale des paraboloïdes est donc

$$(ux_0 + vy_0 + wz_0 + r)(\alpha u + \beta v + \gamma w) + A(uw_0 - wu_0)^2$$
$$+ B(vw_0 - wv_0)^2 + C(uw_0 - wu_0)(vw_0 - wv_0) = 0.$$

Si le plan P est perpendiculaire à la direction de l'axe, c'est-à-dire si

$$\frac{\alpha}{u_0} = \frac{\beta}{v_0} = \frac{\gamma}{w_0},$$

le point A est le sommet de la courbe.

218. Revenons à l'équation générale

$$f(u, v, w, r) + \lambda PQ = 0. \qquad (2)$$

Si l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une conique C, l'équation (2) est l'équation générale des quadriques inscrites dans les deux cônes ayant pour sommets les points P et Q et pour directrice la conique C. Toutes ces quadriques sont bitangentes en deux points de la conique C; ce sont les deux points de contact des tangentes menées à cette conique par le point où la droite PQ rencontre le plan de la courbe.

219. Enfin si $f(u, v, w, r)$ est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires MN, l'équation

$$MN + \lambda PQ = 0$$

est l'équation générale des quadriques circonscrites au quadrilatère gauche MPNQ; la démonstration résulte de ce que nous avons dit au n° 216, mais on peut le voir encore de la manière suivante :

Hosted by Google

Cherchons l'équation générale des quadriques passant par les arêtes AB, BC, CD, DA du tétraèdre de référence.

Il faut écrire que l'équation est vérifiée pour les coordonnées de tous les plans passant par AB, c'est-à-dire pour $u = 0$, $v = 0$.

L'équation doit de même être vérifiée pour $r = 0$, $w = 0$; puis pour $w = 0$, $r = 0$; et enfin pour $r = 0$, $u = 0$.

En partant de l'équation générale

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots dr^2 = 0,$$

on obtient aisément l'équation

$$2b'wu + 2c'vr = 0;$$

elle est de la forme

$$AC + \lambda BD = 0,$$

$A = 0$, $C = 0$, $B = 0$, $D = 0$ désignant les équations des sommets A, C, B, D.

220. Théorème. — *Le lieu des centres des quadriques passant par les côtés d'un quadrilatère gauche est la droite qui joint les milieux des diagonales.*

Soit, en effet,

$$MN + \lambda PQ = 0$$

l'équation générale des quadriques contenant les droites MP, PN, NQ, QM, et posons

$$M = m_1u + m_2v + m_3w + r,$$
$$N = n_1u + n_2v + n_3w + r,$$
$$P = p_1u + p_2v + p_3w + r,$$
$$Q = q_1u + q_2v + q_3w + r.$$

Le centre de la quadrique a pour coordonnées

$$x = \frac{\dfrac{m_1 + n_1}{2} + \lambda\dfrac{p_1 + q_1}{2}}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{\dfrac{m_2 + n_2}{2} + \lambda\dfrac{p_2 + q_2}{2}}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{\dfrac{m_3 + n_3}{2} + \lambda\dfrac{p_3 + q_3}{2}}{1 + \lambda},$$

Hosted by Google

ce qui montre que ce point est sur la droite qui joint le milieu de MN au milieu de PQ.

221. Surfaces circonscrites. — Supposons que dans l'équation (2) du numéro 218 les deux points P et Q soient confondus ; l'équation devient

$$(fu, v, w, r) + \lambda P^2 = 0. \tag{3}$$

Elle représente des surfaces inscrites dans le cône C circonscrit à la surface S et de sommet P ; de plus, ces surfaces touchent la surface S en tous les points de la courbe de contact de cette surface et du cône C.

En effet, considérons un plan tangent (u_1, v_1, w_1, r_1) au cône C ; on aura

$$f(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0, \qquad P_1 = 0.$$

Ce plan est tangent à toutes les surfaces (3), le point de contact a pour équation

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} + rf'_{r_1} + 2\lambda PP_1 = 0$$

ou

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} + rf'_{r_1} = 0,$$

ce qui donne le point de contact avec la surface S.

Donc toutes les surfaces représentées par l'équation (3) sont circonscrites à la surface S en tous les points de la section par le plan polaire du point P.

Réciproquement, nous allons démontrer que toute surface jouissant de cette propriété est représentée par l'équation (3), où l'on donne à λ une valeur convenable.

Menons à la quadrique S trois plans tangents par le point P ; ces trois plans coupent le plan polaire du point P suivant un triangle ABC. Prenons le tétraèdre PABC comme tétraèdre de référence, et cherchons l'équation générale des quadriques tangentes aux plans PBC, PCA, PAB, les points de contact étant respectivement situés sur BC, CA, AB.

Le pôle du plan PBC $(x = 0)$ a pour équation

$$\frac{1}{2} f'_u = au + b''v + b'w + cr = 0 ;$$

pour que cette équation représente un point de BC, on doit avoir

$$a = 0, \qquad c = 0,$$

et l'équation du point de contact est

$$b''v + b'w = 0.$$

De même, pour que la quadrique soit tangente au plan PCA, le point de contact étant sur CA, il faut qu'on ait

$$a' = 0, \qquad c' = 0,$$

l'équation du point de contact étant

$$b''u + bw = 0.$$

Enfin pour que la quadrique soit tangente au plan PAB, le point de contact étant sur AB, on doit avoir

$$a'' = 0, \qquad c'' = 0,$$

l'équation du point de contact étant

$$b'u + bv = 0.$$

L'équation générale des quadriques cherchées sera

$$f(u, v, w, r) \equiv 2bv + 2b'wu + 2b''uvw + dr^2 = 0.$$

L'équation de la quadrique S sera de cette forme ; une autre quadrique tangente à S en tous les points de la section par le plan ABC sera en particulier tangente à S aux points de contact des plans PBC, PCA, PAB ; elle aura une équation de la même forme, les coefficients b, b', b'' étant les mêmes puisque les points de contact sont les mêmes,

$$f_1(u, v, w, r) \equiv 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + d_1r^2 = 0 ;$$

on tire de là

$$f(u, v, w, r) - f_1(u, v, w, r) \equiv (d - d_1)r^2$$

ou

$$f_1(u, v, w, r) \equiv f(u, v, w, r) - (d - d_1)r^2,$$

ce qui démontre notre théorème.

On peut remarquer que la démonstration qu'on vient de faire établit le théorème suivant :

Si deux quadriques sont tangentes en trois points, elles sont circonscrites le long d'une même conique.

Hosted by Google

222. La développable commune aux deux quadriques

$$f(u, v, w, r) = 0, \qquad P^2 = 0$$

se compose d'un cône double ; les coniques doubles de cette développable sont d'une part la conique section de la surface S par le plan polaire du point P, conique suivant laquelle se raccordent toutes les quadriques du faisceau, d'autre part le sommet du cône compte trois fois comme conique double.

En effet, rapportons la quadrique S à un tétraèdre conjugué ayant pour sommet le point P. L'équation de cette quadrique est

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + dr^2 = 0,$$

le point P ayant pour équation $r = 0$; l'équation générale des quadriques du faisceau tangentiel est

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + dr^2 + \lambda r^2 = 0 ;$$

elle représentera une conique, si l'on a

$$d + \lambda = 0 ;$$

cette équation admet la racine $\lambda = - d$, à laquelle correspond la conique de contact du cône de sommet P, puis elle admet aussi trois racines infinies auxquelles correspond le point P, considéré comme point double.

223. Il résulte de là que si l'équation

$$f(u, v, w, r) + \lambda P^2 = 0$$

représente une conique, cette conique est la section de la surface S par le plan polaire du point P.

224. Si l'on suppose maintenant que l'équation

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une conique C, l'équation

$$f(u, v, w, r) + \lambda P^2 = 0$$

sera l'équation générale des quadriques contenant cette conique C et tangentes en tous les points de cette conique au cône de sommet P qui s'appuie sur la conique.

Hosted by Google

En laissant indéterminés les coefficients de P, on aura l'équation générale des quadriques contenant la conique C.

L'équation tangentielle de la sphère étant

$$R^2(u^2+v^2+w^2)-(u\alpha+v\beta+w\gamma+r)^2=0,$$

on voit que la sphère contient le cercle de l'infini, et que les plans tangents à la sphère en tous les points de ce cercle passent par le centre.

Exemple. — Soit l'ellipse

$$a^2u^2+b^2v^2-r^2=0,$$

située dans le plan des xy; l'équation générale des quadriques contenant cette ellipse est

$$a^2u^2+b^2v^2-r^2+\lambda(\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta r)^2=0,$$

α, β, γ, δ désignant les coordonnées homogènes du pôle du plan des xy.

225. Exercice. — *Lieu des sommets d'un paraboloïde elliptique de grandeur constante passant par une parabole.*

Prenons des axes rectangulaires, l'axe Ox et l'axe Oy étant respectivement l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée.

L'équation de cette parabole sera

$$pv^2-2ur=0,$$

et l'équation générale des paraboloïdes contenant cette parabole est

$$\lambda(pv^2-2ur)+(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2=0.$$

Pour écrire qu'il est de grandeur constante, je forme l'équation en S,

$$\begin{vmatrix} \alpha^2-S & \alpha\beta & \alpha\gamma & -\lambda \\ \alpha\beta & \lambda p+\beta^2-S & \beta\gamma & 0 \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2-S & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

qui peut s'écrire

$$S^2-S(\beta^2+\gamma^2+\lambda p)+\lambda p\gamma^2=0.$$

Comme la surface doit être un paraboloïde elliptique, cette équation a ses racines de même signe, donc λ doit être positif, on peut supposer $\lambda=1$.

L'équation réduite de la surface sera

$$S_2v'^2+S_3w'^2\pm 2u'r'=0,$$

de telle sorte que S_2 et S_3 sont les paramètres des sections principales; désignons par a et b ces paramètres; on aura

$$p\gamma^2 = ab,$$
$$\beta^2 + \gamma^2 + p = a + b,$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{ab}{p}, \\ \beta^2 &= -\frac{(a-p)(b-p)}{p}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nous aurons le sommet en prenant le point de contact du plan tangent perpendiculaire à l'axe.

L'axe est parallèle à Ox, un plan perpendiculaire,

$$x + h = 0,$$

sera tangent si l'on a $h = \frac{\alpha^2}{2}$.

Les coordonnées du point de contact de ce plan sont

$$x = -\frac{\alpha^2}{2}, \qquad y = -\alpha\beta, \qquad z = -\alpha\gamma. \qquad (2)$$

En éliminant α, β, γ entre (1) et (2), on aura les équations du lieu.

Les équations (2) donnent

$$y^2 + 2\beta^2 x = 0,$$
$$z^2 + 2\gamma^2 x = 0,$$

et en remplaçant β^2 et γ^2 par leurs valeurs (1)

$$y^2 - \frac{2(a-p)(b-p)}{p}x = 0,$$
$$z^2 + \frac{2ab}{p}x = 0;$$

ces deux équations représentent deux cylindres paraboliques qui se coupent suivant deux paraboles situées dans des plans passant par Ox. Ces deux paraboles constituent le lieu demandé.

226. En s'appuyant sur ce que nous avons dit au numéro 224, on peut obtenir aisément l'équation de la conique, section d'une quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0$$

par un plan $P_0(u_0, v_0, w_0, r_0)$.

L'équation sera de la forme

$$f(u, v, w, r) + \lambda(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2 = 0,$$

et on déterminera λ en écrivant que l'équation est vérifiée par

Hosted by Google

les coordonnées du plan P_0 ; on trouve

$$\lambda = -\frac{1}{4f(u_0, v_0, w_0, r_0)},$$

et l'équation cherchée est

$$(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0})^2 - 4f(u, v, w, r)\, f(u_0, v_0, w_0, r_0) = 0.$$

227. Si le point P est situé sur la quadrique S, l'équation

$$f(u, v, w, r) + \lambda P^2 = 0$$

est l'équation générale des quadriques contenant les génératrices de la surface S qui passent au point P et ayant mêmes plans tangents que cette surface en tous les points de ces génératrices.

Prenons, en effet, pour axes des x et des y, les génératrices de la surface S au point P ; l'équation de cette surface est

$$f(u, v, w, r) = 2uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0.$$

Considérons ensuite une deuxième surface S_1 passant par les deux axes Ox et Oy ; son équation est

$$f_1(u, v, w, r) = 2uv + 2c_1ur + 2c'_1vr + 2c''_1wr + d_1r^2 = 0.$$

En écrivant que le point de contact d'un plan passant par Ox $(0, v_0, w_0, 0)$ est le même dans les deux quadriques, on a

$$c'v_0 + c''w_0 = c'_1v_0 + c''_1w_0 \;;$$

pour que cette égalité ait lieu quel que soit le plan, on doit avoir

$$c' = c'_1, \qquad c'' = c''_1 \;;$$

de même pour que les deux surfaces se raccordent le long de Oy, on doit avoir

$$c = c_1, \qquad c'' = c''_1 \;;$$

il en résulte que l'équation de la surface S_1 est de la forme

$$f(u, v, w, r) + \lambda r^2 = 0$$

228. Examinons maintenant le cas où les deux équations

$$f(u, v, w, r) = 0, \qquad f_1(u, v, w, r) = 0$$

représentent deux coniques C et C_1 situées dans le même plan.

Il est aisé de voir que l'équation

$$f(u, v, w, r) + \lambda f_1(u, v, w, r) = 0$$

est l'équation générale des coniques tangentes aux tangentes communes à C et à C_1.

Prenons en effet pour plan des xy le plan des deux coniques ; en faisant la transformation de coordonnées, $f(u, v, w, r)$ devient

Hosted by Google

$\varphi(u', v', r')$, $f_1(u, v, w, r)$ devient $\varphi_1(u', v', r')$, et l'équation précédente s'écrit

$$\varphi(u', v', r') + \lambda\varphi_1(u', v', r') = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

De même, si $P = 0$, $Q = 0$ sont les équations de deux points situés dans le plan de la conique C,

$$f(u, v, w, r) + \lambda PQ = 0$$

est l'équation générale des coniques tangentes aux tangentes issues des points P et Q à la conique C;

$$f(u, v, w, r) + \lambda P^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques bitangentes à la conique C aux points de contact des tangentes menées par le point P,... etc.

[Voir Première Partie (*Géom. plane*), Chapitre XI.]

Si les quatre points

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0$$

sont dans un même plan, l'équation

$$PQ + \lambda RS = 0$$

est l'équation générale des coniques tangentes aux droites PR, RQ, QS, SP ; enfin

$$PQ + \lambda R^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques tangentes en P et Q aux droites PR et QR.

229. Quadriques tangentes aux faces d'un tétraèdre. — Si l'on prend le tétraèdre pour tétraèdre de référence, en écrivant que l'équation générale du deuxième degré en u, v, w, r est vérifiée par les coordonnées des faces, on voit que les coefficients de u^2, v^2, w^2, r^2 sont nuls, et l'équation tangentielle générale des quadriques tangentes aux quatre faces est

$$2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr = 0.$$

L'équation ponctuelle est

$$\begin{vmatrix} 0 & b'' & b' & c & x \\ b'' & 0 & b & c' & y \\ b' & b & 0 & c'' & z \\ c & c' & c'' & 0 & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

elle peut s'écrire, développée,

$$bc'c''x^2 + b'c''cy^2 + b''cc'z^2 + bb'b''t^2 - (b'c' + b''c'' - bc)(cyz + bxt)$$
$$- (b''c'' + bc - b'c')(c'zx + b'yt) - (bc + b'c' - b''c'')(c''xy + b''zt) = 0.$$

Hosted by Google

230. Quadriques passant par les sommets d'un tétraèdre. — En prenant le tétraèdre pour tétraèdre de référence, on trouve pour équation ponctuelle de ces quadriques

$$2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt = 0,$$

et pour équation tangentielle

$$BC'C''u^2 + B'C''Cv^2 + B''CC'w^2 + BB'B''r^2 - (B'C' + B''C'' - BC)(Cvw + Bur)$$
$$- (B''C'' + BC - B'C')(C'wu + B'vr)$$
$$- (BC + B'C' - B''C'')(C''uv + B''wr) = 0.$$

231. Quadriques tangentes aux six arêtes d'un tétraèdre. — Prenons le tétraèdre pour tétraèdre de référence, et désignons par

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0$$

les équations des sommets A, B, C, D de ce tétraèdre.

Soit

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \dots dr^2 = 0$$

l'équation d'une quadrique.

Pour qu'elle soit tangente au côté CD par exemple, il faut que les deux plans tangents qu'on peut mener à la quadrique par cette droite soient confondus.

Un plan passant par CD a pour équation

$$x + \lambda y = 0\ ;$$

il sera tangent à la quadrique si l'on a

$$a + a'\lambda^2 + 2b''\lambda = 0\ ;$$

et la droite CD sera tangente si les deux racines de cette équation sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$aa' - b''^2 = 0.$$

On aura de même, en écrivant que les cinq autres arêtes sont tangentes,

$$a'a'' - b^2 = 0,$$
$$a''a - b'^2 = 0,$$
$$ad - c^2 = 0,$$
$$a'd - c'^2 = 0,$$
$$a''d - c''^2 = 0.$$

Ces équations montrent que les coefficients a, a', a'', d doivent être de même signe ; on peut les supposer positifs ; nous poserons donc

$$a = l^2, \qquad a' = m^2, \qquad a'' = n^2, \qquad d = p^2\ ;$$

on aura alors

$$b = \pm mn, \qquad b' = \pm nl, \qquad b'' = \pm lm,$$
$$c = \pm lp, \qquad c' = \pm mp, \qquad c'' = \pm np,$$

Hosted by Google

et l'équation générale devient

$$l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 + p^2r^2 + 2\varepsilon_1 mnvw + 2\varepsilon_2 nlwu + 2\varepsilon_3 lmuv \\ + 2\varepsilon_4 lpur + 2\varepsilon_5 mpvr + 2\varepsilon_6 npwr = 0$$

les quantités ε_i désignant ± 1.

On peut écrire cette équation

$$(lu + \varepsilon_3 mv + \varepsilon_2 nw + \varepsilon_4 pr)^2 + 2mnvw(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_3) + 2mpvr(\varepsilon_5 - \varepsilon_3\varepsilon_4) \\ + 2npwr(\varepsilon_6 - \varepsilon_2\varepsilon_4) = 0.$$

Pour que cette équation représente une véritable quadrique, il faut que le premier membre soit réductible à une somme de quatre carrés ; et pour cela il faut que les différences $\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_5 - \varepsilon_3\varepsilon_4$, $\varepsilon_6 - \varepsilon_2\varepsilon_4$ soient toutes différentes de zéro; on devra donc avoir

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1,$$
$$\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5 = -1,$$
$$\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_6 = -1.$$

On peut donner tout d'abord la valeur -1 à tous les ε_i.

Supposons maintenant que toutes ces quantités ne soient pas négatives, par exemple,

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_2 = 1, \qquad \varepsilon_3 = -1 ;$$

on aura

$$\varepsilon_4\varepsilon_5 = +1,$$
$$\varepsilon_4\varepsilon_6 = -1.$$

On pourra prendre alors soit

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1, \qquad \varepsilon_6 = -1,$$

soit

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = -1, \qquad \varepsilon_6 = +1.$$

Dans le premier cas on aura l'équation

$$l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 + p^2r^2 + 2mnvw + 2nlwu - 2lmuv \\ + 2lpur + 2mpvr - 2npwr = 0 ; \qquad (1)$$

dans le deuxième cas,

$$l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 + p^2r^2 + 2mnvw + 2nlwu - 2lmuv \\ - 2lpur - 2mpvr + 2npwr = 0. \qquad (2)$$

Dans l'équation (1) remplaçons respectivement n et p par $-n$ et $-p$; cela revient à supposer tous les ε_i négatifs.

Dans l'équation (2) remplaçons n par $-n$; cela revient encore à supposer tous les ε_i négatifs; il en résulte que l'équation générale cherchée est

$$f(u, v, w, r) = l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 + p^2r^2 - 2mnvw - 2nlwu \\ - 2lmuv - 2lpur - 2mpvr - 2npwr = 0,$$

l, m, n, p étant des nombres positifs ou négatifs.

232. Les coordonnées du plan tangent passant par l'arête CD vérifient les équations

$$w = 0, \qquad r = 0, \qquad lu - mv = 0\,;$$

l'équation de ce plan est alors

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 0\,;$$

son point de contact aura pour équation

$$\frac{1}{l} f'_u + \frac{1}{m} f'_v = 0,$$

ou

$$nw + pr = 0\,;$$

les coordonnées du point de contact sont donc

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = n, \qquad t = p.$$

233. Théorème I. — *Les plans passant par chaque arête et par le point de contact de l'arête opposée passent par un même point.*

Le plan passant par AB et le point de contact de l'arête CD a pour équation

$$\frac{z}{n} - \frac{t}{p} = 0\,;$$

les cinq plans analogues ont pour équations

$$\frac{x}{l} - \frac{y}{m} = 0, \qquad \frac{x}{l} - \frac{z}{n} = 0, \qquad \frac{x}{l} - \frac{t}{p} = 0,$$

$$\frac{y}{m} - \frac{z}{n} = 0, \qquad \frac{y}{m} - \frac{t}{p} = 0\,;$$

ils passent par le point que définissent les équations

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \frac{t}{p}\cdot$$

Théorème II. — *Les couples de plans tangents passant par deux arêtes opposées se coupent suivant trois droites situées dans un même plan.*

Les plans tangents menés par AB et CD ont pour équations

$$\frac{z}{n} + \frac{t}{p} = 0, \qquad \frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 0\,;$$

leur intersection est dans le plan

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} + \frac{t}{p} = 0,$$

qui contient visiblement les droites analogues.

Il est aisé de voir que ce plan est le plan polaire du point trouvé dans le théorème précédent.

Hosted by Google

THÉORÈME III. — *Les six points de contact avec les arêtes sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de l'arête correspondante de l'intersection de cette arête avec un même plan.*

En effet, le point de contact de l'arête CD a pour équation

$$nw + pr = 0\ ;$$

le conjugué harmonique de ce point par rapport à C et D a pour équation

$$nw - pr = 0.$$

Ce point est à l'intersection de l'arête CD et du plan

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} + \frac{t}{p} = 0\ ;$$

c'est le plan qui renferme les intersections des plans tangents passant par deux arêtes opposées.

Si l'on suppose ce plan à l'infini, on voit qu'il existe une quadrique tangente aux six arêtes d'un tétraèdre en leurs milieux ; de plus, les droites joignant les milieux des arêtes opposées sont des diamètres, puisque les plans tangents en ces points sont parallèles. Il en résulte que le centre de la surface est au centre de gravité du tétraèdre.

234. L'équation ponctuelle de la quadrique que nous venons d'étudier est

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} + \frac{t^2}{p^2} - \frac{2yz}{mn} - \frac{2zx}{nl} - \frac{2xy}{lm} - \frac{2xt}{lp} - \frac{2yt}{mp} - \frac{2zt}{np} = 0\ ;$$

on peut l'obtenir en appliquant la méthode générale, ou en cherchant l'équation ponctuelle générale des quadriques tangentes aux faces d'un tétraèdre, puis en écrivant que le point de contact sur CD a pour équation

$$nw + pr = 0,$$

et ainsi de suite.

EXERCICES ET NOTES

1. *On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires* P *et* Q *et pour chacune desquelles la droite d'intersection des deux plans* P *et* Q *est un axe de symétrie.*

1° *On considère tous les plans* R *tangents à la fois à l'ellipse et à* *l'hyperbole et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre* S *tangentes à la fois à tous les plans* R.

2° *Trouver le lieu des centres des surfaces* S *et déterminer la nature de chacune de ces surfaces, suivant les positions occupées par son centre.*

3° *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces* S *soient homofocales.*

(*Agrégation, 1884.*)

1° Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad z=0,$

$$\frac{(x-h)^2}{A}+\frac{z^2}{B}-1=0, \qquad y=0 \qquad (AB<0)$$

les équations ponctuelles de l'ellipse et de l'hyperbole.

Les équations tangentielles de ces courbes sont

$$a^2u^2+b^2v^2-r^2=0,$$
$$Au^2+Bw^2-(uh+r)^2=0;$$

par suite l'équation tangentielle générale des quadriques tangentes aux plans tangents communs à ces deux courbes est

$$Au^2+Bw^2-(uh+r)^2+\lambda(a^2u^2+b^2v^2-r^2)=0.$$

2° Les coordonnées du centre de cette quadrique sont

$$x=\frac{h}{1+\lambda}, \qquad y=0, \qquad z=0;$$

il en résulte que le lieu du centre est l'axe des x, c'est-à-dire l'intersection des plans P et Q.

De la première équation on tire

$$\lambda=\frac{h-x}{x},$$

et en remplaçant dans l'équation générale des quadriques, cette équation devient

$$[(a^2+h^2-A)x-a^2h]u^2+b^2(x-h)v^2-Bxw^2+2hxur+hr^2=0.$$

Il nous faut étudier la nature de cette quadrique suivant les valeurs de x.

Nous appliquerons la méthode exposée au chapitre V. Remarquons d'abord que si x est infini, l'équation se réduit à

$$(a^2+h^2-A)u^2+b^2v^2-Bw^2+2hur=0$$

ou

$$u[(a^2+h^2-A)u+2hr]+b^2v^2-Bw^2=0.$$

Cette équation représente un paraboloïde elliptique si B est négatif, c'est-à-dire si Ox est l'axe réel de l'hyperbole, un paraboloïde hyperbolique si B est positif, c'est-à-dire si Ox est l'axe imaginaire de l'hyperbole.

Hosted by Google

Dans le cas où x est fini, l'équation générale peut s'écrire

$$h[r + ux]^2 - [hx^2 - (a^2 + h^2 - \mathrm{A})x + a^2h]u^2 + b^2(x - h)v^2 - \mathrm{B}xw^2 = 0.$$

Comme on peut toujours supposer $h > 0$, il suffira d'étudier les signes des coefficients de u^2, v^2, w^2, quand on fera varier x.

Pour que le trinome

$$hx^2 - (a^2 + h^2 - \mathrm{A}) + a^2h$$

ait ses racines réelles, il faut que A ne soit pas compris entre $(a - h)^2$ et $(a + h)^2$. Les racines x' et x'' seront de même signe ; elles seront positives si $\mathrm{A} < (a - h)^2$, et négatives si $\mathrm{A} > (a + h)^2$.

On leur comparera aisément 0 et h.

Nous aurons alors, suivant les cas, l'ordre de grandeur suivant :

$\mathrm{A} > (a + h)^2$	$-\infty$	x'	x''	0	h	$+\infty$
$(a - h)^2 < \mathrm{A} < (a + h)^2$	$-\infty$		0	h		$+\infty$
$0 < \mathrm{A} < (a - h)^2$	$-\infty$	0	h	x'	x''	$+\infty$
$\mathrm{A} < 0$	$-\infty$	0	x'	h	x''	$+\infty$

Nous nous bornerons au premier cas, et nous allons supposer que x varie dans les différents intervalles ; on obtient les résultats suivants, en mettant en évidence les signes des carrés du premier membre de l'équation :

$-\infty$ —— Paraboloïde elliptique
} $+ - - -$ Ellipsoïde réel
x' —— $+ \ 0 - -$ Ellipse réelle
} $+ + - -$ Hyperboloïde à une nappe
x'' —— $+ \ 0 - -$ Ellipse réelle
} $+ - - -$ Ellipsoïde réel
0 —— $+ - - \ 0$ Ellipse réelle (l'ellipse donnée)
} $+ - - +$ Hyperboloïde à une nappe
h —— $+ - \ 0 +$ Hyperbole (l'hyperbole donnée)
} $+ - + +$ Hyperboloïde à deux nappes
$+\infty$ —— Paraboloïde elliptique.

Nous laissons au lecteur le soin d'achever ; il sera utile d'examiner aussi les cas où l'on a $\mathrm{A} = (a + h)^2$ et $\mathrm{A} = (a - h)^2$, ce qui ne présentera aucune difficulté.

3°. La réponse à la question sera immédiate quand on aura lu le chapitre suivant ; il faut que l'ellipse passe par les foyers de l'hyperbole et que l'hyperbole passe par les foyers de l'ellipse.

Hosted by Google

2. *On donne un cône du second degré C et deux quadriques A, A′ inscrites dans ce cône ; on considère une quadrique variable S inscrite dans le même cône et touchant les quadriques données A et A′ en des points variables α et α'.*

1° *Démontrer que la droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.*

2° *Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface S aux points α et α'.*

3° *Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe P par rapport à la surface S se compose de deux quadriques bitangentes.*

4° *Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan P se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône C.*

(*Agrégation, 1889.*)

Le point fixe par lequel passe la droite $\alpha\alpha'$ est le sommet du deuxième cône circonscrit aux quadriques A et A′, et le lieu de la droite $\alpha\alpha'$ se compose des plans des courbes planes communes à A et à A′. La démonstration ne présente aucune difficulté.

Enfin le lieu demandé dans la quatrième partie est un paraboloïde hyperbolique ayant le plan P pour plan directeur.

3. *On donne deux quadriques inscrites dans un même cône. Par le sommet on mène une sécante quelconque et aux points où cette sécante rencontre les deux surfaces on mène les plans tangents ; on demande le lieu géométrique des droites suivant lesquelles les plans tangents à la première quadrique coupent les plans tangents à la seconde.*

4. *Lieu des centres des quadriques circonscrites à une quadrique donnée et touchant un plan fixe en un point donné.*

Prenons le plan tangent pour plan des xy, le point de contact pour origine, et désignons par

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \dots dr^2 = 0$$

l'équation tangentielle de la quadrique donnée.

L'équation générale des quadriques variables sera

$$\lambda f(u, v, w, r) + (u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2 = 0,$$

avec les conditions

$$\lambda a'' + \gamma^2 = 0,$$
$$\lambda b + \beta\gamma = 0,$$
$$\lambda b' + \gamma\alpha = 0,$$

exprimant que la surface touche le plan des xy à l'origine.

Hosted by Google

Les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{\lambda c + \alpha}{\lambda d + 1}, \qquad y = \frac{\lambda c' + \beta}{\lambda d + 1}, \qquad z = \frac{\lambda c'' + \gamma}{\lambda d + 1};$$

en y remplaçant α, β, λ en fonction de γ, on voit que ce point décrit une conique.

5. *Lieu des centres des quadriques contenant une conique donnée et touchant un plan fixe en un point donné. Etant choisi un point sur le lieu trouvé, déterminer la nature de la quadrique dont ce point est le centre.*

6. *Enveloppe des plans principaux des paraboloïdes circonscrits à une quadrique (ou contenant une conique) et touchant un plan fixe.*

7. *Etant donnés un tétraèdre et une quadrique, le pôle d'une face constitue avec les arêtes de cette face trois plans ; les douze plans relatifs aux quatre faces du tétraèdre sont tangents à une quadrique.*

Prenons le tétraèdre pour tétraèdre de référence et pour plus de symétrie écrivons l'équation de la surface de la manière suivante :

$$f(u, v, w, r) = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + a_{44}r^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw \\ + 2a_{14}ur + 2a_{23}vw + 2a_{24}vr + 2a_{34}wr = 0,$$

en supposant

$$a_{pq} = a_{qp}.$$

Les équations des pôles des faces du tétraèdre de référence sont alors

$$\frac{1}{2} f'_u = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + a_{14}r = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_v = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w + a_{24}r = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_w = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w + a_{34}r = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_r = a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w + a_{44}r = 0.$$

Il existe deux des douze plans passant par une arête du tétraèdre ; par exemple par l'arête CD $(w = 0,\ r = 0)$ passent les deux plans qui contiennent les pôles des faces $x = 0$, $y = 0$.

Les coordonnées de ces plans vérifient les équations

$$w = 0, \qquad r = 0, \qquad a_{11}u + a_{12}v = 0, \qquad a_{21}u + a_{22}v = 0.$$

Considérons une quadrique

$$b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + b_{44}r^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}uw + 2b_{14}ur + 2b_{23}vw \\ + 2b_{24}vr + 2b_{34}wr = 0 ;$$

écrivons qu'elle touche ces deux plans ; il faut pour cela que les équations

$$b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + 2b_{12}uv = 0,$$

$$(a_{11}u + a_{12}v)(a_{21}u + a_{22}v) = 0$$

aient mêmes racines ; ce qui donne

$$\frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{b_{22}}{a_{22}} = \frac{2b_{12}}{\frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}} + a_{12}}.$$

On aura des conditions analogues en écrivant que la quadrique touche les autres plans ; ces douze conditions sont visiblement compatibles, et l'équation de la quadrique cherchée est

$$\begin{aligned} a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + a_{44}r^2 + \left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}} + a_{12}\right)uv + \left(\frac{a_{11}a_{33}}{a_{13}} + a_{13}\right)uw \\ + \left(\frac{a_{11}a_{44}}{a_{14}} + a_{14}\right)ur + \left(\frac{a_{22}a_{33}}{a_{23}} + a_{23}\right)vw + \left(\frac{a_{22}a_{44}}{a_{24}} + a_{24}\right)vr \\ + \left(\frac{a_{33}a_{44}}{a_{34}} + a_{34}\right)wr = 0. \end{aligned}$$

8. *Le lieu du pôle d'un plan fixe par rapport aux quadriques qui passent par les côtés d'un quadrilatère gauche est une droite qui s'appuie sur les deux diagonales de ce quadrilatère de telle sorte que chacune d'elles se trouve divisée harmoniquement par cette droite et le plan donné.*

Si le plan donné est à l'infini, on a le théorème établi au n° 220.

9. *Quand les six arêtes d'un tétraèdre sont tangentes à une quadrique, le plan des trois points de contact des arêtes issues d'un même sommet rencontre la face opposée suivant une droite, les quatre droites ainsi déterminées appartiennent à un même hyperboloïde.*

Proposition corrélative.

10. *On sait que si deux quadriques se raccordent en tous les points d'une génératrice, elles ont deux autres génératrices communes qui rencontrent en deux points* A *et* B *la génératrice de contact. Etudier ce que deviennent dans ce cas la développable commune et ses coniques doubles.*

La développable se réduit à deux cônes de sommets A et B, et les coniques doubles se réduisent à l'ensemble des points A et B. L'équation en λ a une racine quadruple.

Hosted by Google

11. De la remarque faite au numéro 209 on peut déduire une relation fort simple entre les racines des équations du quatrième degré qui déterminent, l'une, les coniques doubles de la développable commune à deux quadriques, et l'autre, les cônes passant par l'intersection de ces mêmes quadriques.

Soient

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + \cdots + dr^2 = 0,$$
$$f_1(u, v, w, r) = a_1u^2 + a'_1v^2 + \cdots + d_1r^2 = 0$$

les équations tangentielles des deux quadriques.

Pour que l'équation

$$f + \lambda f_1 = 0$$

représente une conique, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'+\lambda b'_1 & c+\lambda c_1 \\ b''+\lambda b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b+\lambda b_1 & c'+\lambda c'_1 \\ b'+\lambda b'_1 & b+\lambda b_1 & a''+\lambda a''_1 & c''+\lambda c''_1 \\ c+\lambda c_1 & c'+\lambda c'_1 & c''+\lambda c''_1 & d+\lambda d_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Les équations ponctuelles des deux quadriques sont

$$F(x, y, z, t) = Ax^2 + A'y^2 + \cdots + Dt^2 = 0,$$
$$F_1(x, y, z, t) = A_1x^2 + A'_1y^2 + \cdots + D_1t^2 = 0.$$

Pour que l'équation

$$F + \mu F_1 = 0$$

représente un cône, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A+\mu A_1 & B''+\mu B''_1 & B'+\mu B'_1 & C+\mu C_1 \\ B''+\mu B''_1 & A'+\mu A'_1 & B+\mu B_1 & C'+\mu C'_1 \\ B'+\mu B'_1 & B+\mu B_1 & A''+\mu A''_1 & C''+\mu C''_1 \\ C+\mu C_1 & C'+\mu C'_1 & C''+\mu C''_1 & D+\mu D_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Soit μ' une racine de l'équation (2) ; à cette racine correspond un point (x', y', z', t') ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques, et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x'} + \mu' \frac{\partial F_1}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} + \mu' \frac{\partial F_1}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'} + \mu' \frac{\partial F_1}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t'} + \mu' \frac{\partial F_1}{\partial t'} = 0.$$

Il existe donc une racine λ' de l'équation (1) telle que le plan

Hosted by Google

(u', v', w', r') de la conique correspondante coïncide avec le plan polaire du point (x', y', z', t'), c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\frac{u'}{\frac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{v'}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{w'}{\frac{\partial F}{\partial z'}} = \frac{r'}{\frac{\partial F}{\partial t'}},$$

avec les conditions

$$\frac{\partial f}{\partial u'} + \lambda' \frac{\partial f_1}{\partial u'} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v'} + \lambda' \frac{\partial f_1}{\partial v'} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial w'} + \lambda' \frac{\partial f_1}{\partial w'} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial r'} + \lambda' \frac{\partial f_1}{\partial r'} = 0.$$

Or, on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial u'} = \rho\left(a \frac{\partial F}{\partial x'} + b'' \frac{\partial F}{\partial y'} + b' \frac{\partial F}{\partial z'} + c \frac{\partial F}{\partial t'}\right) = 2\rho x' \Delta,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u'} = -\rho\mu'\left(a_1 \frac{\partial F_1}{\partial x'} + b_1'' \frac{\partial F_1}{\partial y'} + b_1' \frac{\partial F_1}{\partial z'} + c_1 \frac{\partial F_1}{\partial t'}\right) = -2\rho\mu' x' \Delta_1.$$

On en conclut

$$x'(\Delta - \lambda'\mu'\Delta_1) = 0;$$

de même

$$y'(\Delta - \lambda'\mu'\Delta_1) = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

et par suite

$$\lambda'\mu' = \frac{\Delta}{\Delta_1}.$$

Telle est la relation fort simple qui existe entre les racines des équations (1) et (2) (*).

12. Nous pourrions répéter presque textuellement ici au sujet des coordonnées tétraédriques de plans et de points ce que nous avons dit dans la Première partie (p. 288, note 17).

Si l'on désigne par p_1, p_2, p_3, p_4 les distances d'un point aux faces du tétraèdre de référence, ces distances étant précédées du signe + ou du signe — selon que le point est, par rapport à une face, situé ou non du même côté que le sommet opposé, les coordonnées tétraédriques du point sont des nombres X, Y, Z, T définis par les

(*) Cette élégante démonstration m'a été communiquée par M. Maluski.

Hosted by Google

relations

$$\rho X = k_1 p_1,$$
$$\rho Y = k_2 p_2,$$
$$\rho Z = k_3 p_3,$$
$$\rho T = k_4 p_4,$$

k_1, k_2, k_3, k_4 étant des nombres fixes, arbitrairement choisis.

De même, désignons par q_1, q_2, q_3, q_4 les distances des sommets du tétraèdre de référence à un plan, deux de ces distances ayant le même signe ou des signes différents, selon que les deux sommets correspondants sont d'un même côté ou non du plan ; nous appellerons coordonnées tétraédriques de la droite les nombres U, V, W, R définis par les relations

$$\sigma U = h_1 q_1,$$
$$\sigma V = h_2 q_2,$$
$$\sigma W = h_3 q_3,$$
$$\sigma R = h_4 q_4,$$

h_1, h_2, h_3, h_4 étant des nombres fixes, arbitrairement choisis.

Si l'on veut que la condition pour que le point soit sur le plan s'exprime par la relation

$$UX + VY + WZ + RT = 0,$$

on devra choisir les nombres k et h de telle manière qu'ils satisfassent à une certaine relation.

On pourra se donner les nombres k arbitrairement ; on en déduira les nombres h, ou inversement.

Le raisonnement est absolument le même qu'en géométrie plane.

Cela posé, considérons l'équation ponctuelle d'une surface

$$f(X, Y, Z, T) = 0,$$

rapportée à un tétraèdre de référence ABCD.

Coupons cette surface par le plan ABC, $T = 0$; on obtient une courbe qui a pour équations

$$f(X, Y, Z, 0) = 0, \qquad T = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut considérer l'équation

$$f(X, Y, Z, 0) = 0$$

comme l'équation de cette courbe rapportée au triangle de référence ABC.

Soit M un point de cette courbe, ayant pour coordonnées tétraédriques X, Y, Z, 0. Abaissons de ce point la perpendiculaire MP sur le plan DBC, et la perpendiculaire MP′ sur la droite BC.

Si l'on pose $MP = p_1$, $MP' = p'_1$, on voit que

$$p_1 = p' \sin \widehat{BC};$$

on aura de même, en abaissant des perpendiculaires du point M sur les faces DCA, DAB et sur les arêtes CA, AB,

$$p_2 = p_2' \sin \widehat{CA},$$

$$p_3 = p_3' \sin \widehat{AB}.$$

Or on a

$$\frac{X}{k_1 p_1} = \frac{Y}{k_2 p_2} = \frac{Z}{k_3 p_3};$$

on en conclut

$$\frac{X}{k_1' p_1'} = \frac{Y}{k_2' p_2'} = \frac{Z}{k_3' p_3'},$$

en posant $k_1' = k_1 \sin \widehat{BC}, \ldots$ etc.

Il en résulte que X, Y, Z peuvent être considérées comme les coordonnées *trilatères* du point M par rapport au triangle de référence ABC.

Soit maintenant l'équation tangentielle d'une surface,

$$\varphi(U, V, W, R) = 0;$$

le cône circonscrit à cette surface ayant pour sommet le point D a pour équations tangentielles

$$\varphi(U, V, W, 0) = 0, \qquad R = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut considérer l'équation

$$\varphi(U, V, W, 0) = 0$$

comme l'équation tangentielle de la section de ce cône par le plan ABC, cette équation étant rapportée au triangle de référence ABC.

Considérons en effet un plan H tangent à ce cône et coupant le plan ABC suivant une droite Δ.

Abaissons du point A les perpendiculaires AQ sur H et AQ′ sur Δ ; si l'on pose $AQ = q_1$, $AQ' = q_1'$, et si l'on désigne par θ l'angle du plan H avec le plan ABC, on aura

$$q_1 = q_1' \sin \theta;$$

de même pour les points B et C,

$$q_2 = q_2' \sin \theta,$$

$$q_3 = q_3' \sin \theta.$$

Or les coordonnées U, V, W du plan H vérifient les relations

$$\frac{U}{h_1 q_1} = \frac{V}{h_2 q_2} = \frac{W}{h_3 q_3};$$

on aura donc

$$\frac{U}{h_1 q_1'} = \frac{V}{h_2 q_2'} = \frac{W}{h_3 q_3'},$$

ce qui montre que U, V, W peuvent être considérés comme les coordonnées *trilatères* de la droite Δ par rapport au triangle de référence ABC.

De plus, la condition pour que le point M du plan ABC soit sur la droite Δ est

$$UX + VY + WZ = 0,$$

puisque cette condition exprime que le point M est dans le plan H.

Hosted by Google

CHAPITRE X

FOYERS ET SURFACES HOMOFOCALES

235. Foyers des quadriques. — On appelle foyer d'une quadrique un point tel que parmi les plans tangents menés de ce point à la quadrique, il y en ait deux qui soient tangents au cercle de l'infini.

La droite qui joint les points de contact de ces deux plans tangents et de la quadrique est appelée la directrice relative au foyer considéré.

Il résulte de cette définition que le cône circonscrit à la quadrique et ayant pour sommet un foyer est bitangent au cône isotrope de même sommet, ce qui revient à dire que le cône circonscrit est de révolution (**215**).

On voit aussi que le cône isotrope ayant pour sommet un foyer est bitangent à la quadrique, ce qui revient à considérer un foyer comme une sphère de rayon nul bitangente à la quadrique, la droite joignant les points de contact étant la directrice correspondante.

La première définition donnée permet d'obtenir aisément les foyers d'une quadrique définie par son équation tangentielle,

$$f(u,\ v,\ w,\ r) = au^2 + a'v^2 + \dots = 0,$$

et rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires.

Soient x, y, z les coordonnées d'un foyer ; les plans tangents menés de ce point à la surface sont déterminés par les équations

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

$$ux + vy + wz + r = 0.$$

Ces plans tangents déterminent un cône dont la trace sur le plan de l'infini a pour équation tangentielle

$$f[u, v, w, -(ux + vy + wz)] = 0;$$

il faut écrire que cette conique est bitangente au cercle de l'infini, c'est-à-dire que

$$f[u, v, w, -(ux + vy + wz)] + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

est carré parfait pour une valeur convenable de λ.

On obtiendra trois conditions en x, y, z et λ; en éliminant λ, on aura deux équations par rapport à x, y, z.

On voit ainsi qu'il existe une infinité de foyers qui sont situés sur une courbe.

Pour étudier la nature de cette courbe, il sera plus simple de rapporter la quadrique à des axes de coordonnées particuliers.

1° Supposons que la quadrique ait un centre; prenons pour axes de coordonnées les axes de la surface; son équation tangentielle est alors

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 = 0.$$

Un point (x, y, z) est foyer si l'expression

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - (ux + vy + wz)^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

est le carré d'une fonction linéaire et homogène de u, v, w.

Cette expression s'écrit

$$u^2(\lambda + A - x^2) + v^2(\lambda + B - y^2) + w^2(\lambda + C - z^2) \\ - 2vwyz - 2wuzx - 2uvxy;$$

pour qu'elle soit carré parfait, il faut et il suffit que tous les mineurs de son discriminant soient nuls.

On obtient

$$(\lambda + B - y^2)(\lambda + C - z^2) - y^2z^2 = 0,$$

$$(\lambda + C - z^2)(\lambda + A - x^2) - z^2x^2 = 0,$$

Hosted by Google

$$(\lambda + A - x^2)(\lambda + B - y^2) - x^2y^2 = 0,$$
$$yz(\lambda + A) = 0,$$
$$zx(\lambda + B) = 0,$$
$$xy(\lambda + C) = 0.$$

On voit immédiatement que le produit xyz ne peut être différent de zéro, car les trois dernières équations donneraient

$$A = B = C = -\lambda,$$

ce qui est impossible.

Supposons donc, par exemple,

$$x = 0\,;$$

la quatrième équation donne

$$\lambda = -A\,;$$

la deuxième et la troisième sont vérifiées et la première devient

$$(B - A - y^2)(C - A - z^2) - y^2z^2 = 0$$

ou

$$\frac{y^2}{B-A} + \frac{z^2}{C-A} - 1 = 0.$$

On trouve ainsi la conique représentée par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{B-A} + \frac{z^2}{C-A} - 1 = 0, \\ x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En supposant successivement $y = 0$ et $z = 0$, on obtient les deux autres coniques

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{A-B} + \frac{z^2}{C-B} - 1 = 0, \\ y = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} - 1 = 0, \\ z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Il en résulte que les foyers de la quadrique sont situés sur

Hosted by Google

ces trois coniques, que l'on appelle pour cette raison les *focales* de la surface.

Elles sont situées dans les plans principaux de la quadrique, elles ont mêmes axes et mêmes foyers que les coniques principales de la surface.

Si l'on suppose $A > B > C$, on voit que la conique (1) est une ellipse imaginaire, la conique (2) est une hyperbole et la conique (3) une ellipse réelle.

Si la surface est un ellipsoïde, ayant pour équations ponctuelle et tangentielle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (a^2 > b^2 > c^2)$$
$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0,$$

l'ellipse réelle est dans le plan des xy, l'hyperbole est dans le plan des zx et l'ellipse imaginaire dans le plan des yz.

Le résultat est le même si la surface est un hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (a^2 > b^2)$$
$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - r^2 = 0.$$

Enfin si la surface est un hyperboloïde à deux nappes ayant pour équations

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (a^2 > b^2)$$
$$-a^2u^2 - b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0,$$

l'ellipse réelle est dans le plan des yz, l'hyperbole dans le plan des zx et l'ellipse imaginaire dans le plan des xy.

D'après ce qu'on a vu au début, ces trois focales constituent le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface.

236. Revenons à la surface qui a pour équation tangentielle

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 = 0$$

et pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

Considérons la focale

$$\frac{x^2}{A - C} + \frac{y^2}{B - C} - 1 = 0,$$

$$z = 0,$$

et prenons un point $F(x', y', 0)$ sur cette courbe ; on aura

$$\frac{x'^2}{A - C} + \frac{y'^2}{B - C} - 1 = 0. \tag{4}$$

Nous nous proposons de déterminer la directrice correspondant à ce foyer.

Le cône circonscrit à la quadrique ayant pour sommet le point F coupe le plan de l'infini suivant la conique

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - (ux' + vy')^2 = 0,$$

et l'expression

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - (ux' + vy')^2 - C(u^2 + v^2 + w^2)$$

est carré parfait ; sa racine égalée à zéro donne l'équation du point de rencontre du plan de l'infini et de l'intersection des deux plans tangents menés à la quadrique par le point F et qui sont tangents au plan de l'infini.

L'équation de ce point est

$$(A - C - x'^2)u - vx'y' = 0 ;$$

il en résulte que l'intersection des deux plans tangents a pour équations

$$\frac{x - x'}{A - C - x'^2} = \frac{y - y'}{-x'y'},$$

$$z = 0 ;$$

la première de ces équations peut s'écrire, en tenant compte de (**4**),

$$\frac{xx'}{A - C} + \frac{yy'}{B - C} - 1 = 0 ;$$

par conséquent cette droite est tangente à la focale au point F.

Hosted by Google

La directrice sera la droite conjuguée de cette tangente par rapport à la quadrique ; pour obtenir cette droite conjuguée, je mène un plan quelconque par la tangente

$$\frac{xx'}{A-C}+\frac{yy'}{B-C}+\lambda z-1=0;$$

son pôle par rapport à la quadrique a pour coordonnées

$$x=\frac{Ax'}{A-C}, \qquad y=\frac{By'}{B-C}, \qquad z=C\lambda;$$

ce pôle décrit la droite

$$x=\frac{Ax'}{A-C}, \qquad y=\frac{By'}{B-C},$$

qui est précisément la directrice cherchée.

On en conclut que la directrice relative à un foyer F est perpendiculaire au plan de la focale qui contient le point F ; de plus le pied D de cette directrice sur ce plan est le pôle de la tangente à la focale au point F par rapport à la conique principale de la quadrique qui se trouve dans le même plan que la focale.

On verra aussi aisément que la droite FD est normale à la focale ; il en est de même du plan qui passe par le foyer et la directrice.

Nous montrerons plus loin que ces résultats sont des conséquences immédiates des définitions du foyer et de la directrice.

237. Supposons maintenant que la surface soit un paraboloïde ; nous prendrons pour plans de coordonnées les plans principaux et le plan tangent au sommet.

L'équation tangentielle de la surface est alors

$$pv^2+qw^2-2ur=0,$$

et le point $(x,\ y,\ z)$ sera foyer si l'expression

$$pv^2+qw^2+2u(ux+vy+wz)+\lambda(u^2+v^2+w^2)$$

est carré parfait.

Cette expression peut s'écrire

$$(2x+\lambda)u^2+(p+\lambda)v^2+(q+\lambda)w^2+2uwz+2uvy.$$

Il n'y a pas de terme en vw ; on en conclut que le coefficient de v^2 ou de w^2 doit être nul.

Supposons d'abord

$$q+\lambda=0\,;$$

le coefficient de uw doit être nul, et le trinome restant en u et v doit être carré parfait ; on aura donc

$$z=0,$$

$$(2x+\lambda)(p+\lambda)-y^2=0,$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur $-q$,

$$(2x-q)(p-q)-y^2=0$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{p-q}-2x+q=0,\\ z=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

En supposant

$$p+\lambda=0,$$

on obtiendrait

$$\left.\begin{aligned}\frac{z^2}{q-p}-2x+p=0,\\ y=0.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

On trouve ainsi deux paraboles ayant mêmes foyers et même axe que les paraboles principales de la surface.

En raisonnant comme plus haut, on verra que la directrice relative à un foyer $(x', y', 0)$ de la parabole (5) a pour équations

$$x=x'-q,$$

$$y=\frac{py'}{p-q};$$

cette directrice jouit d'ailleurs des mêmes propriétés que dans le cas des quadriques à centre.

238. Il peut arriver que l'équation tangentielle donnée repré-

Hosted by Google

sente une conique ; les foyers se définissent de la même manière et se déterminent par un calcul semblable.

Supposons que la conique soit une ellipse ou une hyperbole ayant pour équation tangentielle

$$Au^2 + Bv^2 - r^2 = 0.$$

Un point (x, y, z) sera foyer si l'expression

$$Au^2 + Bv^2 - (ux + vy + wz)^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

est carré parfait.

En raisonnant comme au numéro 235, on obtiendra encore trois focales dont l'une est la conique donnée, c'est une focale singulière ; il est clair en effet que par toute tangente à cette conique on peut mener deux plans tangents au cercle de l'infini.

Il reste les deux focales

$$\frac{x^2}{A - B} - \frac{z^2}{B} - 1 = 0,$$
$$y = 0,$$

et

$$\frac{y^2}{B - A} - \frac{z^2}{A} - 1 = 0,$$
$$x = 0.$$

Si la conique donnée est une ellipse, la première focale est une hyperbole située dans un plan perpendiculaire au plan de l'ellipse et passant par son grand axe ; les foyers de l'hyperbole sont les sommets de l'ellipse et les sommets de l'hyperbole sont les foyers de l'ellipse.

La deuxième focale est une ellipse imaginaire.

Si la conique donnée est une hyperbole, la première focale est une ellipse située dans un plan perpendiculaire au plan de l'hyperbole et passant par son axe réel, les foyers de cette ellipse sont les sommets de l'hyperbole et les sommets de l'ellipse sont les foyers de l'hyperbole.

La deuxième focale est encore une ellipse imaginaire.

239. On voit ainsi que, si une ellipse et une hyperbole, situées

Hosted by Google

dans des plans perpendiculaires, ont même axe focal, et sont telles que les foyers de chacune d'elles soient aux sommets de l'autre, on peut considérer l'une de ces courbes comme la focale réelle de l'autre, ou encore comme le lieu des sommets des cônes de révolution contenant l'autre courbe.

On peut remarquer aussi que les deux focales réelles d'une quadrique à centre sont dans cette situation respective ; l'une d'elles est la focale de l'autre. Ces deux courbes jouissent de propriétés fort curieuses. (Voir note **12** à la fin du chapitre.)

240. Considérons la conique

$$Au^2 + Bv^2 - r^2 = 0$$

et sa focale

$$\frac{x^2}{A - B} - \frac{z^2}{B} - 1 = 0.$$

On démontrera, comme au numéro 236, que la directrice relative à un foyer (x', z') de cette focale a pour équations

$$x = \frac{Ax'}{A - B}, \qquad z = 0.$$

Il en résulte que cette directrice est située dans le plan des xy ; elle est parallèle à Oy et elle rencontre Ox au point où cet axe est coupé par la normale à la focale au foyer correspondant.

241. Enfin si l'on considère une parabole

$$pv^2 - 2ur = 0,$$

on verra aisément qu'elle admet une seule focale proprement dite, ayant pour équations ponctuelles

$$z^2 + 2px - p^2 = 0, \qquad y = 0 ;$$

c'est une parabole ayant même axe que la parabole donnée ; les deux plans de ces deux paraboles sont perpendiculaires et le foyer de chacune d'elles coïncide avec le sommet de l'autre.

On vérifiera sans peine que la directrice relative à un foyer (x', z') a pour équations

Hosted by Google

$$x = x' - p, \qquad y = 0;$$

cette droite est située dans le plan des xy, elle est parallèle à Oy et rencontre Ox au point où cet axe est rencontré par la normale à la focale au foyer considéré.

242. Si deux paraboles, situées dans des plans perpendiculaires, ont même axe, et sont telles que le foyer de chacune d'elles coïncide avec le sommet de l'autre, on peut considérer l'une quelconque de ces courbes comme la focale de l'autre, ou comme le lieu des sommets des cônes de révolution contenant l'autre courbe.

Les deux focales d'un paraboloïde sont dans cette situation respective : l'une d'elles est la focale de l'autre.

243. Autre méthode pour déterminer les foyers. — D'après la définition donnée au début de ce chapitre, on voit qu'un foyer d'une quadrique est un point double de la surface développable circonscrite à la quadrique donnée et au cercle de l'infini.

Or cette développable contient quatre coniques doubles parmi lesquelles se trouve le cercle de l'infini; il ne reste donc que trois coniques, qui constituent le lieu géométrique des foyers et que l'on appelle les focales.

D'un point F d'une de ces focales on peut mener deux plans tangents communs à la quadrique et au cercle de l'infini ; ces deux plans ont comme intersection la tangente en F à la focale, et la droite qui joint les points de contact de ces plans et de la quadrique est la directrice relative au foyer F ; cette directrice sera donc la droite conjuguée de la tangente en F à la focale.

On déduit de là une méthode analytique fort simple pour la détermination des focales.

Soit
$$f(u, v, w, r) = 0$$
l'équation de la quadrique ; on obtiendra les focales en écrivant que l'équation
$$f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

Hosted by Google

représente une conique, c'est-à-dire que le discriminant du premier membre est nul ; on aura une équation du troisième degré en λ, aux racines de laquelle correspondront les trois focales.

Ainsi, reprenons l'équation

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 = 0\,;$$

le discriminant de

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

est

$$(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda).$$

Si l'on prend la racine $\lambda = -C$, on obtient la focale

$$(A - C)u^2 + (B - C)v^2 - r^2 = 0,$$

qui a pour équations ponctuelles

$$\frac{x^2}{A - C} + \frac{y^2}{B - C} - 1 = 0, \qquad z = 0.$$

244. Dans le cas où la surface est un paraboloïde, elle est tangente au plan de l'infini, et comme le cercle de l'infini est dans ce plan, la développable commune n'aura que deux coniques doubles en dehors de ce cercle (210) ; ces deux coniques sont en outre tangentes au plan de l'infini, ce sont des paraboles.

Dans ce cas, le discriminant sera du deuxième degré en λ. On peut dire que l'équation en λ obtenue en égalant ce discriminant à zéro aura une racine double infinie correspondant au cercle de l'infini.

Ainsi supposons que l'équation de la surface soit

$$pv^2 + qw^2 - 2ur = 0\,;$$

le discriminant de la fonction

$$pv^2 + qw^2 - 2ur + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

est

$$(p + \lambda)(q + \lambda)\,;$$

on obtient les deux focales

$$-pu^2 + (q - p)w^2 - 2ur = 0$$

Hosted by Google

et

$$-qu^2 + (p - q)v^2 - 2ur = 0.$$

245. Si la quadrique donnée se réduit à une conique, la développable relative à cette conique et au cercle de l'infini admettra seulement deux coniques doubles en dehors de la conique donnée et du cercle de l'infini ; et dans le cas particulier où cette conique donnée est une parabole, comme elle est tangente au plan de l'infini, l'une des coniques doubles vient se confondre avec le cercle de l'infini et il ne reste qu'une seule focale.

246. Revenons au cas où la quadrique donnée est à centre unique ; les coniques doubles de la développable commune à cette surface et au cercle de l'infini sont situées dans les faces du tétraèdre conjugué commun, qui sont dans ce cas les plans principaux de la quadrique et le plan de l'infini ; de plus chacune de ces coniques est conjuguée par rapport au triangle du tétraèdre qui se trouve dans son plan ; on en conclut que les focales sont dans les plans principaux et ont mêmes axes que les coniques principales.

Il est aisé de voir qu'elles ont mêmes foyers.

En effet, un plan principal P rencontre le cercle de l'infini en deux points I et J qui sont les points cycliques du plan P ; menons du point I les tangentes IA et IB à la focale qui est située dans le plan P. Ces deux droites sont deux génératrices de la développable commune ; elles sont tangentes à la quadrique, et par suite à la section de cette quadrique par le plan P ; cette section a donc mêmes foyers que la focale.

247. **Propriétés des foyers des quadriques.** — Soit F un foyer d'une quadrique ; menons par ce point les deux plans tangents à la quadrique, qui sont aussi tangents au cercle de l'infini ; désignons par A et B leurs points de contact avec la surface et par C et D leurs points de contact avec le cercle de l'infini ; AB est la directrice relative au foyer F.

L'intersection des deux plans tangents, qui est, comme on l'a vu précédemment, la tangente en F à la focale, rencontre le plan de l'infini en un point H, qui est le pôle de la droite CD par rapport au cercle de l'infini.

On voit ainsi que le plan FAB est perpendiculaire à FH, puisque ce plan rencontre le plan de l'infini suivant la polaire CD de H par rapport au cercle de l'infini ; donc *le plan qui contient un foyer et la directrice est normal à la focale.*

De plus, le plan FAB coupe la quadrique suivant une conique tangente en A et B aux droites FA et FB, et comme ces tangentes passent par les points C et D, points cycliques du plan de cette conique, on en conclut que *tout plan passant par le foyer* F *et la directrice* AB *correspondante coupe la surface suivant une conique ayant pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* AB.

Enfin le cône circonscrit à la surface et ayant pour sommet le point F coupe le plan de l'infini suivant une conique bitangente en C et D au cercle de l'infini ; il en résulte que ce cône est de révolution et a pour axe la droite FH.

Donc, *le cône qui a pour sommet un foyer* F *et qui est circonscrit à la quadrique est de révolution et a pour axe la tangente à la focale au point* F.

248. Théorème. — *Si l'on mène un plan quelconque passant par la directrice et qu'on considère le cône ayant pour sommet le foyer* F *et pour base la section du plan et de la quadrique, ce cône est de révolution et a pour axe la tangente à la focale au point* F.

Cela résulte immédiatement de ce que la section de ce cône par le plan de l'infini est une conique bitangente au cercle de l'infini aux points C et D.

249. Théorème. — *La droite qui joint un foyer* F *à un point* M *de la surface est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer au point où le plan tangent en* M *à la surface rencontre la directrice.*

Soit K le point où le plan tangent en M rencontre la directrice AB ; la droite FM est dans le plan polaire du point K, puisque ce plan contient la droite FH. Ce plan polaire rencontre le plan de l'infini suivant une droite qui est la polaire par rapport au cercle de l'infini du point à l'infini de la droite FK ; on en conclut que les droites FK et FM sont perpendiculaires.

L'hypothèse que le point M est sur la surface n'intervient pas dans la démonstration ; on peut généraliser le théorème de la façon suivante :

La droite qui joint un foyer à un point quelconque M *est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer au point où le plan polaire de* M *rencontre la directrice.*

250. Théorème. — *Si un cône a pour base une section plane d'une quadrique et pour sommet un foyer, ce cône a pour l'un de ses axes la droite qui joint le foyer au point où le plan de section coupe la directrice.*

Soit G le point où le plan sécant rencontre la directrice, le plan polaire de G passe par la droite FH ; ce plan coupe le plan sécant suivant la polaire de G par rapport à la conique section ; il en résulte que FG est le diamètre conjugué de ce plan polaire par rapport au cône ; or, ce plan est perpendiculaire à FG, donc FG est axe du cône.

251. Quadriques homofocales. — On appelle quadriques homofocales des quadriques qui ont les mêmes foyers.

Il résulte de cette définition que les quadriques homofocales d'une quadrique Q sont inscrites dans la développable commune à cette quadrique et au cercle de l'infini.

Si Q a pour équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0,$$

l'équation générale des quadriques homofocales est

$$f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0\,;$$

l'ensemble de ces quadriques contient comme cas particulier les trois focales de Q ; on peut considérer ces trois focales comme des surfaces singulières du faisceau.

Supposons que la quadrique Q ait un centre, et rapportons-la à ses axes ; son équation tangentielle est

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 = 0\,;$$

l'équation générale des surfaces homofocales est alors

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

et leur équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} - 1 = 0.$$

Il résulte immédiatement de cette équation que par un point de l'espace on peut faire passer trois quadriques homofocales à une quadrique donnée ; ces trois quadriques sont, l'une un ellipsoïde réel, la deuxième, un hyperboloïde à une nappe, et enfin la troisième, un hyperboloïde à deux nappes. On démontre en outre aisément que ces trois quadriques sont orthogonales au point donné.

Nous allons obtenir ce résultat par une autre méthode.

252. Propriétés des quadriques homofocales. — L'équation tangentielle des surfaces homofocales

$$f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

est du premier degré par rapport à λ ; on en conclut qu'il existe une seule quadrique du faisceau tangente à un plan donné.

Théorème. — *Le lieu du pôle d'un plan* P *par rapport à des quadriques homofocales est une droite perpendiculaire au plan* P *au point où ce plan touche la surface du faisceau qui lui est tangente.*

Considérons d'abord un faisceau tangentiel quelconque de quadriques,

$$f(u, v, w, r) + \lambda\varphi(u, v, w, r) = 0.$$

Le pôle du plan $P(u_0, v_0, w_0, r_0)$ par rapport à l'une de ces quadriques a pour équation

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} + rf'_{r_0} + \lambda(u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi'_{w_0} + r\varphi'_{r_0}) = 0 ;$$

on voit immédiatement que ce point est situé sur la droite qui joint les pôles du plan P par rapport aux deux quadriques

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi = 0.$$

Dans le cas où

$$\varphi(u, v, w, r) \equiv u^2 + v^2 + w^2,$$

c'est-à-dire où les surfaces du faisceau sont homofocales, on peut voir analytiquement que la droite a pour paramètres directeurs u_0, v_0, w_0 ; elle est donc perpendiculaire au plan P.

Mais il est plus simple d'observer que la droite et le plan rencontrent le plan d'une conique quelconque du faisceau (conique double de la développable commune) suivant un point et une droite qui sont pôle et polaire par rapport à la conique ; cette propriété ayant lieu pour le cercle de l'infini, la droite est perpendiculaire au plan.

Il résulte de ce théorème qu'un plan tangent à une quadrique et la normale au point de contact rencontrent un plan principal quelconque suivant une droite et un point qui sont polaire et pôle par rapport à la focale qui se trouve dans le plan principal.

253. Théorème. — *Étant donné un faisceau de quadriques homofocales, il existe deux de ces surfaces tangentes à une droite* Δ, *et les plans tangents correspondants sont perpendiculaires.*

On voit d'abord aisément que les plans tangents menés par la droite aux quadriques homofocales forment une involution.

En effet, si l'on mène un plan quelconque P par la droite, il existe une seule surface du faisceau tangente à ce plan ; on pourra mener à cette surface un autre plan tangent par la droite, soit P′ ce plan. Ainsi à un plan P correspond un seul plan P′ ; on voit de même qu'au plan P′ correspond le plan P, l'ensemble des plans P et P′ forme une involution.

Les plans doubles de cette involution seront les plans tangents aux surfaces qui sont tangentes à la droite Δ ; il existe donc deux surfaces tangentes à cette droite. De plus les plans tangents correspondants divisent harmoniquement les couples de plans tels que P et P′ ; comme parmi les surfaces du faisceau se trouve le cercle de l'infini, les plans doubles de l'involution divisent harmoniquement les plans tangents menés par Δ au cercle de l'infini ; il en résulte que les plans doubles sont rectangulaires.

254. Théorème. — *Par un point* A *on peut faire passer trois*

Hosted by Google

quadriques homofocales à une quadrique Q ; *les plans tangents en* A *à ces trois quadriques sont perpendiculaires et les normales sont les axes du cône de sommet* A *circonscrit à la quadrique* Q *et à toutes les surfaces homofocales.*

Considérons d'abord un faisceau ponctuel de quadriques qui ont en commun une même quartique gauche. Un plan quelconque P les coupe suivant des coniques passant par les quatre points de rencontre du plan P et de la quartique.

Parmi ces coniques se trouvent trois couples de droites ; donc il existe trois quadriques tangentes au plan P, et les points de contact forment un triangle conjugué commun par rapport à toutes les coniques sections des quadriques par le plan P.

Transformons ce résultat par le principe de dualité : étant donné un faisceau tangentiel de quadriques, il passe trois de ces quadriques par un point A, et les plans tangents à ces quadriques en ce point sont conjugués par rapport à tous les cônes de sommet A circonscrits aux quadriques.

Si l'on a des quadriques homofocales, parmi tous les cônes de sommet A se trouve le cône isotrope ; les trois plans tangents sont donc perpendiculaires, et comme ils sont conjugués par rapport à tous les cônes, ils constituent les plans principaux de chacun de ces cônes.

La proposition subsiste pour les focales ; par conséquent les axes de tout cône circonscrit à une quadrique rencontrent le plan d'une focale en trois points conjugués par rapport à cette conique. Ce cône a mêmes axes que le cône de même sommet et qui s'appuierait sur la focale.

255. Foyers des surfaces de révolution. — Toute quadrique de révolution est bitangente au cercle de l'infini ; il en résulte que la développable commune à cette surface et à ce cercle se réduit à deux cônes ; ces deux cônes se coupent suivant deux courbes planes, dont l'une est le cercle de l'infini ; par conséquent ces deux cônes sont isotropes. Une surface de révolution admet donc une seule focale qui est un cercle, puisqu'elle appartient à un cône isotrope ; elle admet en outre deux foyers singuliers qui sont les

Hosted by Google

sommets des deux cônes isotropes circonscrits à la surface. Il n'y a donc pas lieu de chercher les directrices relatives à ces foyers singuliers, puisque tous les plans tangents menés à la surface par ces points sont tangents au cône isotrope.

On peut aisément retrouver ces résultats par le calcul.

Soit
$$Au^2 + B(v^2 + w^2) - r^2 = 0$$
l'équation tangentielle d'une quadrique de révolution ayant pour axe Ox.

On a pour équation de la focale
$$(B - A)(v^2 + w^2) - r^2 = 0,$$
et pour équation des foyers singuliers
$$(A - B)u^2 - r^2 = 0.$$

Ces foyers singuliers ne sont autres que les foyers de la méridienne qui sont situés sur l'axe de révolution ; quant à la focale, elle est engendrée par la rotation des foyers de la méridienne situés sur l'axe de la courbe qui est perpendiculaire à l'axe de révolution.

Si la surface est un ellipsoïde allongé, les foyers singuliers sont réels et la focale est imaginaire ; c'est l'inverse si l'ellipsoïde est aplati.

Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, les foyers singuliers sont imaginaires, la focale est réelle ; c'est l'inverse pour l'hyperboloïde à deux nappes.

256. Lignes focales d'un cône. — On appelle foyer d'un cône du second degré un point F tel que les plans tangents menés du point F à ce cône soient tangents au cercle de l'infini, ou, ce qui revient au même, au cône isotrope qui a même sommet que le cône donné.

Soit un cône de sommet O ; menons les plans tangents communs à ce cône et au cône isotrope de même sommet ; ces plans, au nombre de quatre, se coupent deux à deux suivant six droites passant par le point O. Ces six droites constituent le lieu géométrique des foyers du cône ; on les appelle les lignes focales ou plus simplement les focales du cône.

Il est aisé de voir que deux de ces lignes seulement sont réelles.

En effet, remarquons d'abord que ces lignes s'obtiennent aussi en joignant le point O aux ombilics relatifs au cercle de l'infini et à la conique section du cône donné par le plan de l'infini.

Supposons que le cône donné soit rapporté à ses plans principaux et ait pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0.$$

Sa conique de l'infini a pour équation

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 0,$$

et l'on aura les ombilics relatifs à cette conique et au cercle de l'infini en écrivant que l'équation

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

représente deux points.

On a ainsi les trois couples de points

$$(A - C)u^2 + (B - C)v^2 = 0,$$
$$(A - B)u^2 + (C - B)w^2 = 0,$$
$$(B - A)v^2 + (C - A)w^2 = 0.$$

Si l'on suppose $A > B > C$, on voit que le second couple seulement est réel.

Les lignes focales correspondantes ont pour équations ponctuelles

$$\frac{x^2}{A - B} + \frac{z^2}{C - B} = 0,$$
$$y = 0.$$

257. Les deux plans tangents au cône qui passent par une ligne focale touchent ce cône suivant deux génératrices ; le plan de ces deux génératrices est le plan conjugué de la focale ; on l'appelle quelquefois le plan directeur relatif à tous les foyers situés sur la focale.

Nous allons établir par des considérations géométriques très simples quelques propriétés des focales des cônes ; pour cela nous emploierons les notations suivantes.

Soit O le sommet du cône, S la conique section par le plan de l'infini, C le cercle de l'infini.

Hosted by Google

Menons deux tangentes communes aux coniques C et S ; soient HM et KN ces deux tangentes ; elles touchent C en H et K, et S en M et N. Ces deux tangentes se coupent en un point L, OL est une focale et le plan directeur correspondant est le plan OMN.

258. Théorème. — *Tout plan perpendiculaire à une focale coupe le cône suivant une conique qui a pour foyer le point de rencontre du plan sécant et de la focale et pour directrice correspondante l'intersection du plan sécant et du plan directeur.*

Prenons un point F sur la focale OL ; le plan passant par F et perpendiculaire à OL est le plan HFK ; ce plan coupe le plan directeur OMN suivant une droite AB (A sur OM et B sur ON).

La conique section du cône et du plan est tangente en A et B aux droites FA et FB ; or ces droites passant par les points H et K qui sont les points cycliques du plan FAB, on en conclut que la conique a pour foyer le point F et pour directrice AB.

259. Théorème. — *Les focales d'un cône sont perpendiculaires aux plans de sections circulaires du cône supplémentaire.*

En effet, la trace du cône supplémentaire sur le plan de l'infini est une conique S′ qui est polaire réciproque de S par rapport au cercle de l'infini ; donc cette conique S′ passe par les points H et K, et par suite le plan OHK est un plan de section circulaire du cône supplémentaire. Ce plan étant perpendiculaire à OL, le théorème est démontré.

260. Théorème. — *Deux plans conjugués quelconques passant par une focale sont perpendiculaires.*

En effet, ces deux plans seront également conjugués par rapport au cône isotrope de sommet O.

261. Théorème. — *Tout plan tangent à un cône fait des angles* *égaux avec les plans qui passent par la génératrice de contact et par les focales réelles.*

Soient L et L′ les traces des focales réelles sur le plan de l'infini; ces deux points constituent un couple d'ombilics relatifs aux coniques S et C. Menons un plan tangent quelconque au cône, soit MT sa trace sur le plan de l'infini, M étant le point de contact avec la conique S. Il faut démontrer que le plan tangent fait des angles égaux avec les plans OML et OML′; ou, ce qui revient au même (note **16**, chapitre V), en désignant par MI et MJ les tangentes menées par M au cercle de l'infini, que

$$(\mathrm{M.TLIJ}) = (\mathrm{M.L'TIJ}).$$

Or la droite MT est une droite double de l'involution formée par les tangentes issues du point M à toutes les coniques du faisceau tangentiel défini par C et S; on a donc

$$(\mathrm{M.TLIJ}) = (\mathrm{M.TL'JI}),$$

et par suite

$$(\mathrm{M.TLIJ}) = (\mathrm{M.L'TIJ}).$$

On établirait d'une façon analogue que si par une droite passant par le point O on mène deux plans tangents au cône, ces deux plans sont également inclinés sur les plans qui passent par la droite OL et les focales réelles.

D'ailleurs toutes ces propriétés des focales d'un cône peuvent s'établir sans peine analytiquement.

262. Théorème (Chasles). — *Les focales d'un cône de sommet* O *circonscrit à une quadrique sont les génératrices des quadriques homofocales à la quadrique donnée et passant par le point* O.

En effet, prenons le point O pour origine et soit

$$f(u, v, w, r) = 0$$

l'équation de la quadrique donnée Σ.

L'équation générale des surfaces homofocales est

$$f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Écrivons que cette surface passe par l'origine; il faut pour

Hosted by Google

cela (129) que l'ensemble des termes du second degré par rapport à $u, v, w,$

$$f(u,\ v,\ w,\ 0) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2),$$

soit décomposable en un produit de deux facteurs.

On obtiendra une équation du troisième degré en λ ; soit λ_1 une racine ; on aura

$$f(u,\ v,\ w,\ 0) + \lambda_1(u^2 + v^2 + w^2) \equiv \mathrm{PQ}, \tag{1}$$

P et Q désignant des fonctions linéaires en $u, v, w,$ de telle sorte que les équations

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0$$

représentent deux points P et Q à l'infini, et les droites OP et OQ sont les génératrices de la surface qui passe par l'origine.

Or le cône de sommet O circonscrit à la quadrique Σ coupe le plan de l'infini suivant une conique qui a pour équation

$$f(u, v, w, 0) = 0\,;$$

l'identité (1) prouve que P et Q constituent un couple d'ombilics communs à cette conique et au cercle de l'infini ; donc OP et OQ sont deux focales du cône, et le théorème est démontré.

Il est clair que les focales réelles seront les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe qui passe par le point O et qui est homofocal à la quadrique Σ.

EXERCICES ET NOTES

1. *Soit* Q *une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné* E *et* A *le pôle par rapport à l'ellipsoïde du plan* P *de la courbe de contact des deux surfaces.*

1° *Démontrer qu'il y a en général trois quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *homofocales avec l'ellipsoïde* E *et telles que les plans polaires* P_1, P_2, P_3 *du point* A *par rapport aux quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *passent par le centre de la quadrique* Q.

2° *Les plans* P_1, P_2, P_3 *sont les plans principaux de la quadrique* Q, *et les coniques* C_1, C_2, C_3, *intersections des surfaces* (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), *sont les focales de cette quadrique.*

3° *Les projections orthogonales des coniques* C_1, C_2, C_3 *sur les plans principaux de l'ellipsoïde* E *sont des coniques homofocales.*

On projettera en particulier ces coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit par les foyers des coniques projetées quand la quadrique Q *varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan* P *de la courbe de contact ne changeant pas.*

(*Concours général, 1892.*)

Soit

$$E = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0$$

l'équation tangentielle de l'ellipsoïde E rapporté à ses axes ; si

$$A = \alpha u + \beta v + \gamma w + r = 0$$

est l'équation du point A, l'équation de la quadrique Q sera de la forme

$$Q = hE + A^2 = 0$$

ou

$$Q = h(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2) + (u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2 = 0.$$

1° Une surface homofocale avec E a pour équation

$$E + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \tag{1}$$

et le plan polaire de A par rapport à cette quadrique est

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda} + \frac{\beta y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma z}{c^2+\lambda} - 1 = 0. \tag{2}$$

Écrivons que ce plan passe par le centre de Q, dont les coordonnées sont $\frac{\alpha}{1-h}$, $\frac{\beta}{1-h}$, $\frac{\gamma}{1-h}$; on a

$$\frac{\alpha^2}{(1-h)(a^2+\lambda)} + \frac{\beta^2}{(1-h)(b^2+\lambda)} + \frac{\gamma^2}{(1-h)(c^2+\lambda)} - 1 = 0, \tag{3}$$

équation du troisième degré en λ qui détermine les trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3.

Les trois surfaces seront représentées par l'équation (1), en y remplaçant λ par les racines de (3) ; et en faisant de même pour l'équation (2), on aura les équations des plans P_1, P_2, P_3.

2° Il suffit d'établir que les coordonnées de ces plans vérifient les équations

$$\frac{ha^2u + \alpha A}{u} = \frac{hb^2v + \beta A}{v} = \frac{hc^2w + \gamma A}{w},$$

ce qui ne présente aucune difficulté, en tenant compte de l'équation (3).

Hosted by Google

D'ailleurs quand nous aurons établi que les coniques C_1, C_2, C_3 sont les focales de Q, il en résultera bien que les plans P_1, P_2, P_3 sont les plans principaux de cette quadrique.

L'équation tangentielle d'une de ces coniques est

$$E + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) + \mu(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2 = 0,$$

μ étant déterminé de telle manière que cette équation représente une conique, c'est-à-dire que les quatre équations

$$\begin{aligned} (a^2 + \lambda)u + \mu\alpha A &= 0, \\ (b^2 + \lambda)v + \mu\beta A &= 0, \\ (c^2 + \lambda)w + \mu\gamma A &= 0, \\ -r + \mu A &= 0 \end{aligned}$$

aient des solutions communes en u, v, w, r.

On obtient aisément la condition

$$\mu\left(\frac{\alpha^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2 + \lambda} - 1\right) + 1 = 0,$$

ou, en tenant compte de l'équation (3),

$$\mu = \frac{1}{h}.$$

Il en résulte que l'équation d'une des coniques C_1, C_2, C_3 est

$$hE + A^2 + \lambda h(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

ce qui montre que ces coniques sont les focales de la quadrique Q.

3° La projection de cette conique sur le plan des xy a pour équation tangentielle

$$h(a^2u^2 + b^2v^2 - r^2) + (u\alpha + v\beta + r)^2 + \lambda h(u^2 + v^2) = 0\,;$$

il suffit, en effet, de faire $w = 0$ dans l'équation de la conique elle-même (72).

Si λ varie, cette équation représente des coniques homofocales avec la conique

$$h(a^2u^2 + b^2v^2 - r^2) + (u\alpha + v\beta + r)^2 = 0,$$

et on a aisément le lieu des foyers de cette conique quand h varie.

2. *Etant donné un système de quadriques homofocales et un point* P *dans l'espace, déterminer :*

1° *Le lieu des projetantes du point* P *sur ses plans polaires par rapport aux quadriques du système ;*

2° *Le lieu, relativement à l'une quelconque des quadriques, des droites qui passent en* P *et sont perpendiculaires à leurs droites conjuguées ;*

Hosted by Google

3° *Le lieu des normales menées par* P *à toutes les quadriques données ;*

4° *Le lieu, relativement à l'une quelconque des quadriques, des droites passant en* P *et telles que l'une des sections faites par les plans passant par cette droite ait cette droite pour axe.*

On trouvera pour tous ces lieux un même cône équilatère. Montrer que la section de ce cône par un plan principal des quadriques est l'hyperbole d'Apollonius relative à la focale des quadriques situées dans ce plan et à la projection du point P, *sommet du cône, sur ce plan.*

3. *On considère les coniques* C *suivant lesquelles un plan* P *coupe un système de surfaces homofocales. Trouver le lieu des centres, des foyers et l'enveloppe des axes des coniques* C.

Considérons la surface S du faisceau qui touche le plan P, soit O le point de contact ; nous prenons le plan P pour plan des xy, le point O pour origine, les axes des x et des y étant les bissectrices des génératrices de la surface S situées dans le plan tangent P.

L'équation de la surface S est alors

$$f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0,$$

et l'équation générale des surfaces homofocales est

$$f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

On aura aisément l'équation de l'intersection de cette surface avec le plan des xy, ce qui donnera l'équation des coniques C et on sera ramené à un problème de géométrie plane.

Le lieu des centres est une droite, le lieu des foyers est une strophoïde et l'enveloppe des axes est une parabole.

4. *Un dièdre droit se meut de façon qu'une de ses faces passe par une droite* D *et que son arête décrive un plan* Q. *Démontrer que l'enveloppe du plan de la seconde face est un cône du second degré ayant pour focales la droite* D *et une perpendiculaire au plan* Q.

5. *On donne une surface du second ordre* Q *et une sphère de rayon nul* S, *ayant pour centre le point* P ; *on considère toutes les surfaces* Σ *qui passent par l'intersection des deux premières.*

1° A *étant un point de la surface* Q, R *le plan tangent en ce point, on considère les cônes qui ont pour sommet le point* P *et pour directrices les sections faites dans les surfaces* Σ *par le plan* R. *Démontrer que la droite* PA *est un axe de tous ces cônes.*

2° *Chercher combien il existe de cônes parmi les surfaces* Σ. *Dans*

Hosted by Google

quel cas un des cônes trouvés devient-il un cylindre, un système de deux plans ?

3° *Examiner si le point* P *et la surface* Q *restant fixes, la propriété de l'énoncé subsiste quand on remplace la sphère* S *par une autre surface convenablement choisie.*

(*Concours général*, *1891*.)

On ramène cette question à une étude des surfaces homofocales par une transformation par polaires réciproques.

Si on prend le point S comme origine, l'équation générale des surfaces Σ sera de la forme

$$F(x,\ y,\ z,\ t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0\ ;$$

transformons par le principe de dualité ; on obtient les surfaces homofocales

$$F(u,\ v,\ w,\ r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

C'est ainsi que la question a été résolue par M. Jordan, qui a eu le prix d'honneur.

Voir sa solution dans la *Revue de Mathématiques Spéciales*, Tome I, p. 173.

6. *Lorsque plusieurs surfaces du second ordre* Σ *sont circonscrites à une quadrique* S, *tout plan cyclique de* S *coupe les surfaces* Σ *suivant des courbes dont les focales passent toutes par deux points fixes.*

7. *On prend sur une quadrique une section plane quelconque ; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle passant par l'une des focales de la première.*

Soit
$$f(u,\ v,\ r) = 0 \qquad \text{(C)}$$
l'équation de la section par le plan des xy d'une quadrique S ; l'équation de la quadrique sera de la forme

$$S \equiv f(u,\ v,\ r) + \lambda P^2 = 0,$$

$P = 0$ désignant l'équation du pôle du plan des xy par rapport à la quadrique.

On en déduit

$$f(u,\ v,\ r) + \mu(u^2 + v^2 + w^2) \equiv S + \mu(u^2 + v^2 + w^2) - \lambda P^2. \quad (1)$$

Déterminons μ de telle sorte que $S + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0$ représente une conique, qui sera une focale de S.

L'équation

$$S + \mu(u^2 + v^2 + w^2) - \lambda P^2 = 0$$

représente une quadrique passant par la focale considérée, et l'on voit qu'elle admet pour focale la conique C par suite de l'identité (1).

Hosted by Google

8. *On donne deux quadriques homofocales, et par une droite prise arbitrairement dans l'espace, on mène les plans tangents à ces surfaces, puis l'on joint le point* A *où l'un des plans touche la première surface aux points* B, B′ *où ces plans touchent la seconde surface.*

Démontrer que les droites AB, AB′ *sont également inclinées sur la normale en* A *à la première surface, et sont dans le même plan que cette normale.*

On pourra prendre le point A pour origine et le plan tangent en A à la surface correspondante pour plan des xy.

9. *Quand trois plans rectangulaires sont tangents respectivement à trois quadriques homofocales, le point d'intersection de ces trois plans est sur une sphère.*

10. *Le produit des distances de chaque point d'une focale d'une quadrique à deux plans tangents à la surface, parallèles entre eux et parallèles à la tangente à la focale au point choisi, est constant.*

11. *Si, par une droite donnée, on mène des plans tangents à un système de surfaces homofocales, les normales correspondantes engendrent un paraboloïde hyperbolique.*

Si la droite est normale à l'une des surfaces du faisceau, les normales enveloppent une parabole.

12. Considérons une ellipse et une hyperbole telles que l'une de ces courbes soit la focale de l'autre ; prenons pour axes des x et des y les axes de l'ellipse, l'axe Oz étant perpendiculaire à son plan ; les équations des deux courbes seront

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad z=0,$$
$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{b^2}-1=0, \qquad y=0,$$

en supposant $c^2=a^2-b^2$.

Tous les points de l'hyperbole sont des foyers de l'ellipse ; nous allons démontrer que le rapport des distances d'un point quelconque de l'ellipse à un foyer et à la directrice correspondante est constant.

Soit M un point quelconque de l'hyperbole. La normale en ce point à cette courbe rencontre Ox en un point D ; par ce point je mène la perpendiculaire DD′ à Ox, cette droite est la directrice relative au foyer M (240).

D'un point quelconque P de l'ellipse, j'abaisse PQ perpendiculaire sur DD′ et je dis que le rapport $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PQ}}$ est constant.

Hosted by Google

Soient, en effet, $(x, y, 0)$ et $(\alpha, 0, \gamma)$ les coordonnées des points P et M ; on a

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = (x-\alpha)^2 + y^2 + \gamma^2.$$

Or

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$\gamma^2 = \frac{b^2}{c^2}(\alpha^2 - c^2) ;$$

en remplaçant,

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = \left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c^2}\alpha\right)^2.$$

Mais l'abscisse du point D est $\frac{a^2}{c^2}\alpha$; donc

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PQ}} = \frac{c}{a}.$$

Si l'on abaisse du point P la perpendiculaire PR sur le plan MDQ, le rapport $\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}}$ est constant ; on en conclut que $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PR}}$ est aussi constant ; par suite l'angle de PM avec le plan MDQ, ou avec la tangente MT à l'hyperbole, est constant.

Il en résulte que le cône qui a pour sommet le point M et qui s'appuie sur l'ellipse est de révolution autour de la tangente MT.

Théorème. — 1° *La différence des distances d'un point de l'ellipse à deux points fixes de la même branche d'hyperbole est constante.*

2° *La somme des distances d'un point de l'ellipse à deux points fixes pris sur des branches différentes de l'hyperbole est constante.*

3° *La différence des distances d'un point de l'hyperbole à deux points fixes de l'ellipse est constante.*

Nous avons trouvé

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right)^2.$$

Supposons que le point M soit sur la branche de droite de l'hyperbole, c'est-à-dire que α soit positif.

On a alors

$$\frac{a\alpha}{c} > a, \qquad \frac{c}{a}x < c,$$

donc

$$\mathrm{MP} = -\left(\frac{c}{a}x - \frac{a\alpha}{c}\right).$$

Pour le point M', pris sur la branche de gauche, on aura

$$\mathrm{M'P} = +\left(\frac{c}{a}x - \frac{a\alpha'}{c}\right).$$

1° Soient M et M_1 deux points pris sur la branche de droite de l'hyperbole ; on aura

$$\mathrm{MP} = -\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right),$$

$$\mathrm{M_1P} = -\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha_1\right),$$

d'où

$$\mathrm{MP} - \mathrm{M_1P} = \frac{a}{c}(\alpha - \alpha_1).$$

2° Soient

$$\mathrm{MP} = -\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right),$$

$$\mathrm{M'P} = +\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha'\right),$$

$$\mathrm{MP} + \mathrm{M'P} = \frac{a}{c}(\alpha - \alpha').$$

3° Soient P et P′ deux points de l'ellipse ; on a

$$\mathrm{MP} = -\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right),$$

$$\mathrm{MP'} = -\left(\frac{c}{a}x' - \frac{a}{c}\alpha\right),$$

$$\mathrm{MP} - \mathrm{MP'} = \frac{c}{a}(x' - x).$$

13. Étant donnés deux ellipsoïdes homofocaux,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} - 1 = 0,$$

on dit que deux points (x, y, z) et (X, Y, Z) situés respectivement sur chacune de ces surfaces sont *correspondants* quand on a entre leurs coordonnées les relations

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{Z}{C}.$$

Démontrer que la distance de deux points, situés sur deux ellipsoïdes homofocaux, est égale à la distance de leurs points correspondants.

Ce théorème, dû à Ivory, est utilisé dans la théorie de l'attraction des ellipsoïdes.

14. Coniques sphériques. — Un cône du second ordre rencontre une sphère concentrique suivant deux courbes fermées symétriques

Hosted by Google

par rapport au centre de la sphère ; chacune de ces courbes est appelée une *conique sphérique*, un arc de grand cercle quelconque les rencontre en deux points.

Les focales réelles du cône rencontrent la sphère en deux points situés à l'intérieur de chaque conique ; ces points sont appelés les *foyers* de la conique.

Les plans cycliques du cône supplémentaire coupent la sphère suivant deux grands cercles qui ont pour pôles les foyers (259) ; ces grands cercles sont appelés les *arcs cycliques* de la conique sphérique.

Nous allons montrer que les coniques sphériques jouissent de propriétés fort analogues à celles des coniques planes.

Nous remarquerons pour cela qu'à toute propriété du cône correspond une propriété de la conique sphérique ; en outre nous ferons usage de la transformation par figures polaires ou supplémentaires.

Dans cette transformation, à un point de la sphère correspond le grand cercle dont ce point est le pôle. Si le point décrit une conique sphérique S, section de la sphère et d'un cône C, le grand cercle correspondant enveloppe une conique sphérique S′, section de la sphère et du cône C′ supplémentaire du cône C; il en résulte qu'aux foyers d'une des coniques correspondent les arcs cycliques de l'autre.

Nous remarquerons aussi que l'arc de grand cercle qui joint deux points de la sphère est égal à l'angle des grands cercles correspondants.

Enfin, pour abréger le langage, par distance de deux points de la sphère nous entendrons la longueur de l'arc de grand cercle qui les joint ; par tangente à une conique sphérique, un arc de grand cercle tangent ; par rayons vecteurs d'un point, les arcs de grand cercle joignant ce point aux deux foyers.

Tout d'abord des propriétés du cône établies au numéro 261 nous déduisons les théorèmes suivants :

Théorème I. — *La tangente en un point d'une conique sphérique fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point.*

Théorème II. — *Les tangentes issues d'un point à une conique sphérique font des angles égaux avec les rayons vecteurs du point.*

Transformons ces théorèmes par figures supplémentaires ; on a les nouveaux énoncés qui suivent :

Théorème III. — *La tangente en un point* A *d'une conique sphérique rencontre les arcs cycliques en des points équidistants du point* A.

Théorème IV. — *Si un arc de grand cercle rencontre une conique*

Hosted by Google

sphérique en deux points A *et* A′, *et les arcs cycliques en* B *et* B′, *on a*

$$arc\ \mathrm{AB} = arc\ \mathrm{A'B'}.$$

On voit ainsi que les arcs cycliques d'une conique sphérique jouent un rôle analogue à celui des asymptotes d'une conique plane.

Théorème V. — *Si d'un point d'une conique sphérique on abaisse des arcs de grand cercle perpendiculaires sur les arcs cycliques, le produit des sinus de ces arcs est constant.*

Nous allons établir la propriété correspondante du cône.

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{PQ}$$

l'équation du cône, le sommet étant à l'origine,

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0$$

désignant les équations des plans cycliques.

Soit M un point du cône; abaissons MH et MK perpendiculaires sur les plans cycliques et désignons par α et α' les angles de la droite OM avec les deux plans; on a

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{OM}}, \qquad \sin\alpha' = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{OM}},$$

d'où

$$\sin\alpha . \sin\alpha' = \frac{\mathrm{MH.MK}}{\overline{\mathrm{OM}}^2} = \frac{\lambda.\mathrm{PQ}}{x^2+y^2+z^2},$$

où λ désigne une constante. Le théorème est démontré.

En transformant ce théorème, on a :

Théorème VI. — *Le produit des sinus des arcs de grand cercle perpendiculaires abaissés des foyers sur une tangente est constant.*

Théorème VII. — *La somme des distances d'un point d'une conique sphérique aux deux foyers est constante.*

Soient FP, F′P′ les arcs de grand cercle perpendiculaire menés à la tangente au point M.

Désignons par M l'angle FMF′; dans les triangles sphériques rectangles MPF, MP′F′, on a

$$\sin \mathrm{FP} = \sin \mathrm{FM} \cos\frac{\mathrm{M}}{2},$$

$$\sin \mathrm{F'P'} = \sin \mathrm{F'M} \cos\frac{\mathrm{M}}{2};$$

donc

$$\sin \mathrm{FM}.\sin \mathrm{F'M}.\cos^2\frac{\mathrm{M}}{2} = \sin \mathrm{FP}.\sin \mathrm{F'P'} = \text{constante}.$$

Or de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A},$$

on déduit

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin (p - a)}{\sin b \sin c},$$

$2p$ désignant $a + b + c$.

Appliquant cette formule au triangle FMF′, on voit que

$$\sin \text{FM} . \sin \text{F'M} . \cos^2 \frac{M}{2} = \sin p . \sin (p - \text{FF'}).$$

Il en résulte que

$$\sin p . \sin (p - \text{FF'}) = \text{constante},$$

et par suite p est constant.

Hosted by Google

CHAPITRE XI

PROPRIÉTÉS DE DEUX QUADRIQUES

263. Quadriques harmoniquement inscrites et circonscrites. — Soient deux quadriques déterminées, l'une par son équation ponctuelle et l'autre par son équation tangentielle,

$$f(x, y, z, t) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cxt + 2c'yt + 2c''zt + dt^2 = 0. \quad (S)$$

$$\varphi(u, v, w, r) = \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv + 2\gamma ur + 2\gamma' vr + 2\gamma'' wr + \delta r^2 = 0. \quad (\Sigma)$$

Considérons l'expression

$$\Theta = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + 2b\beta + 2b'\beta' + 2b''\beta'' + 2c\gamma + 2c'\gamma' + 2c''\gamma'' + d\delta\,;$$

si l'on a

$$\Theta = 0, \quad (1)$$

nous dirons que la surface S est harmoniquement circonscrite à Σ, et que la surface Σ est harmoniquement inscrite à S.

Nous verrons plus loin les raisons de cette dénomination. Auparavant nous établirons les théorèmes suivants.

Théorème. — *Dans un faisceau ponctuel de quadriques, il en existe en général une seule qui soit harmoniquement circonscrite à une quadrique donnée ; s'il y en a deux, toutes le sont.*

Si l'on suppose que les coefficients de $f(x, y, z, t)$ soient fonctions linéaires d'un paramètre λ, l'équation (1) est du premier degré en λ, et admet en général une seule solution, à moins qu'elle ne soit identiquement satisfaite.

THÉORÈME CORRÉLATIF. — *Dans un faisceau tangentiel de quadriques, il en existe en général une seule qui soit harmoniquement inscrite à une quadrique donnée ; s'il y en a deux, toutes le sont.*

Même démonstration.

264. Pour interpréter géométriquement la condition (1), nous examinerons d'abord quelques cas particuliers.

1° Si la quadrique Σ se réduit à un point double, la condition (1) exprime que ce point est sur la quadrique S.

2° Si la quadrique Σ se réduit à deux points, la condition (1) exprime que ces deux points sont conjugués par rapport à la quadrique S.

3° Supposons que la quadrique Σ se réduise à une conique Γ, et désignons par C la conique section de la surface S par le plan de la conique Γ.

Menons une tangente quelconque à Γ et soit P le pôle de cette tangente par rapport à C ; par le point P je mène deux tangentes à Γ qui rencontre la tangente précédente aux points Q et R.

Je dis que si l'on a

$$\Theta = 0,$$

le triangle PQR est conjugué par rapport à C, autrement dit que la conique Γ est harmoniquement inscrite à C.

En effet, prenons sur QR un point arbitraire M ; les points P et M sont conjugués par rapport à S ; il existe donc deux quadriques harmoniquement inscrites à S, d'une part Γ et d'autre part l'ensemble des points P et M. Il en résulte que toutes les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par Γ et l'ensemble des points P et M seront harmoniquement inscrites à S.

Or la tangente menée de M à Γ rencontre PQ en un point N ; les deux points R, N font partie du faisceau tangentiel,

Hosted by Google

ils sont conjugués par rapport à S, ce qui montre que PQ est la polaire du point R par rapport à C, ou que le triangle PQR est conjugué par rapport à C.

Réciproquement, si la conique Γ est harmoniquement inscrite à C, la condition (1) est vérifiée.

Soit PQR un triangle circonscrit à Γ et conjugué par rapport à C; menons une tangente à Γ rencontrant PQ en R′ et PR en Q′.

Le faisceau tangentiel de quadriques défini par les deux couples de points Q, Q′ et R, R′ contient deux quadriques harmoniquement inscrites à S ; donc pour toute quadrique du faisceau, en particulier pour la conique Γ, la condition (1) sera vérifiée.

En résumé, si la quadrique Σ se réduit à une conique Γ, la condition (1) exprime que cette conique est harmoniquement inscrite à la conique section de S par le plan de la conique Γ.

4° Si la quadrique S se réduit à un plan double, la condition (1) exprime que ce plan est tangent à Σ.

5° Si la quadrique S se réduit à deux plans, la condition (1) exprime que ces deux plans sont conjugués par rapport à Σ.

6° Enfin si la quadrique S se réduit à un cône, on pourra raisonner comme dans le troisième cas (en se laissant guider par le principe de dualité) et on reconnaîtra que la condition (1) exprime qu'il existe une infinité de trièdres inscrits dans le cône S et conjugués par rapport au cône circonscrit à Σ et de même sommet ; ou encore que si l'on coupe ces deux cônes par un plan, la section du cône S est harmoniquement circonscrite à la section du deuxième cône.

Nous allons maintenant supposer que les quadriques S et Σ sont quelconques.

265. THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* S *soit harmoniquement circonscrite à* Σ *est qu'il existe une infinité de tétraèdres inscrits dans* S *et conjugués par rapport à* Σ.

1° La condition est nécessaire. Supposons que S soit harmoniquement circonscrite à Σ. Soit M un point quelconque de la surface S; prenons son plan polaire par rapport à Σ, ce plan coupe S suivant une conique C et Σ suivant une conique Γ. Je prends un point quelconque P sur la conique C, et le plan polaire de ce point par rapport à Σ coupe la conique C en deux points Q et R.

Nous allons montrer que le tétraèdre $MPQR$ qui est inscrit dans la quadrique S est conjugué par rapport à Σ, et pour cela il sera suffisant d'établir que le triangle PQR est conjugué par rapport à Γ, ou que PQ est la polaire de R par rapport à cette conique.

Le plan tangent en M à S et le plan polaire de ce point forment une quadrique harmoniquement circonscrite à Σ; donc toutes les quadriques passant par l'intersection de ces deux plans et de S sont harmoniquement circonscrites à Σ; en particulier la propriété aura lieu pour le cône de sommet M et de directrice C. Si on se reporte au numéro précédent (6°), on voit que la conique C est harmoniquement circonscrite à Γ, ce qu'il fallait démontrer.

2° La condition est suffisante. Supposons que le tétraèdre $MPQR$ soit inscrit dans S et conjugué par rapport à Σ, je dis que S est harmoniquement circonscrite à Σ.

En effet, la propriété a lieu pour le cône de sommet M et de directrice C, ainsi que pour l'ensemble formé par le plan tangent en M à S et le plan PQR; donc cette propriété subsiste pour toute quadrique appartenant au faisceau ponctuel correspondant, c'est-à-dire pour la quadrique S.

Le théorème est démontré.

On voit ainsi qu'une quadrique harmoniquement circonscrite à une quadrique donnée est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette quadrique.

Corrélativement, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* Σ *soit harmoniquement inscrite à* S *est que* Σ *soit inscrite dans une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à* S.

266. On déduit de là la proposition suivante :

Étant données deux quadriques S *et* Σ, *s'il existe un tétraèdre inscrit dans* S *et conjugué par rapport à* Σ, *il en existe une infinité, et il existe aussi une infinité de tétraèdres circonscrits à* Σ *et conjugués par rapport à* S.

267. Application. — THÉORÈME. — *Les sphères circonscrites aux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique à centre coupent orthogonalement la sphère de Monge.*

Soit une sphère

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

et une quadrique à centre

$$\Sigma = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 = 0.$$

Pour que la sphère soit harmoniquement circonscrite à la surface, il faut qu'on ait

$$A + B + C - \delta = 0,$$

ce qui montre que la puissance du centre de la quadrique par rapport à la sphère est égale à $A + B + C$, carré du rayon de la sphère de Monge; le théorème est démontré.

Si cette condition est remplie, la quadrique est harmoniquement inscrite à la sphère ; on en conclut que *si une quadrique à centre est inscrite dans un tétraèdre conjugué par rapport à une sphère, la puissance de son centre par rapport à la sphère est égale à la somme des carrés des demi-axes.*

268. Remarque. — Étant donné un tétraèdre, il n'existe pas en général de sphère conjuguée par rapport à ce tétraèdre ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en existe une est que les quatre hauteurs du tétraèdre concourent en un même point, et ce point est le centre de la sphère. On dit dans ce cas que le tétraèdre est *orthocentrique*, et le point de concours des hauteurs, c'est-à-dire le centre de la sphère conjuguée, est dit l'*orthocentre* du tétraèdre.

On sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique est que les arêtes opposées soient deux à deux rectangulaires.

269. Le théorème du n° 267 peut alors s'énoncer de la façon suivante :

Le lieu des centres des quadriques inscrites dans un tétraèdre orthocentrique et pour lesquelles la somme des carrés des axes est constante est une sphère qui a pour centre l'orthocentre du tétraèdre.

Hosted by Google

C'est la sphère conjuguée par rapport au tétraèdre qui constitue le lieu dans le cas où la somme des carrés des axes est nulle.

270. La sphère de Monge d'une quadrique a pour limite un plan, dit plan de Monge, si la surface se transforme en un paraboloïde ; les théorèmes du n° 267 peuvent alors s'énoncer :

Les sphères circonscrites aux tétraèdres conjugués par rapport à un paraboloïde ont leurs centres sur le plan de Monge.

L'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique circonscrit à un paraboloïde est sur le plan de Monge.

271. A l'aide des considérations précédentes, on peut établir simplement le théorème du n° 152, à savoir que si deux tétraèdres $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont conjugués par rapport à une même quadrique Σ, toute quadrique qui passe par sept de ces sommets passe par le huitième.

En effet, soit une quadrique S passant par les points a, b, c, d, a', b', c' ; elle est harmoniquement circonscrite à Σ, donc le pôle du plan $a'b'c'$ par rapport à Σ, c'est-à-dire le point d', doit être situé sur S.

272. Pour qu'une quadrique soit harmoniquement circonscrite au cercle de l'infini, il faut que le cône des directions asymptotiques contienne trois génératrices formant un trièdre trirectangle ; on en conclut que cette dernière condition s'exprime analytiquement par la relation

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'' = 0,$$

A, A′, A″ désignant les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans l'équation ponctuelle de la surface.

De même, pour qu'une quadrique soit harmoniquement inscrite à un cône isotrope de même centre, il faut que le cône des directions asymptotiques puisse être inscrit dans un trièdre trirectangle ; on en conclut que cette dernière condition s'exprime analytiquement par la relation

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0,$$

α, α', α'' désignant les coefficients de u^2, v^2, w^2 dans l'équation tangentielle de la section de la surface par le plan de l'infini.

273. Soient deux quadriques déterminées par leurs équations tangentielles,

$$\begin{aligned} f(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv \\ + 2cur + 2c'vr + 2c''wr + dr^2 = 0, \quad (\mathrm{S}) \end{aligned}$$

Hosted by Google

$$f_1(u, v, w, r) = a_1u^2 + a'_1v^2 + a''_1w^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu + 2b''_1uv + 2c_1ur + 2c'_1vr + 2c''_1wr + d_1r^2 = 0. \quad (S_1)$$

L'équation générale des quadriques inscrites dans la développable commune à S et à S_1 est

$$f + \lambda f_1 = 0. \tag{1}$$

L'équation ponctuelle correspondante est

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'+\lambda b'_1 & c+\lambda c_1 & x \\ b''+\lambda b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b+\lambda b_1 & c'+\lambda c'_1 & y \\ b'+\lambda b'_1 & b+\lambda b_1 & a''+\lambda a''_1 & c''+\lambda c''_1 & z \\ c+\lambda c_1 & c'+\lambda c'_1 & c''+\lambda c''_1 & d+\lambda d_1 & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

si on y considère λ comme inconnue, les racines de cette équation transportées dans l'équation (1) donneront les quadriques du faisceau tangentiel qui passent par le point (x, y, z, t).

Cette équation est du troisième degré en λ, on peut l'écrire

$$F(x, y, z, t) + \lambda\Phi(x, y, z, t) + \lambda^2\Phi_1(x, y, z, t) + \lambda^3 F_1(x, y, z, t) = 0.$$

Les équations

$$F(x, y, z, t) = 0, \qquad F_1(x, y, z, t) = 0$$

sont les équations ponctuelles des quadriques S et S_1; les équations

$$\Phi(x, y, z, t) = 0, \qquad \Phi_1(x, y, z, t) = 0$$

sont du deuxième degré par rapport à x, y, z, t; elles représentent des quadriques dont nous allons étudier les propriétés.

274. Désignons par Σ et Σ_1 ces deux quadriques. On peut dire que la quadrique Σ est le lieu d'un point tel que les valeurs de λ relatives aux quadriques du faisceau tangentiel (1) qui passent par ce point vérifient la relation

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0,$$

tandis que la quadrique Σ_1 est le lieu des points pour lesquels on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Or il est clair que si l'on fait un changement de coordonnées quelconque, les valeurs de λ correspondant à un point déterminé conservent la même valeur.

Supposons le point à l'origine, l'équation en λ devient

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'+\lambda b'_1 \\ b''+\lambda b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b+\lambda b_1 \\ b'+\lambda b'_1 & b+\lambda b_1 & a''+\lambda a''_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$D+\lambda\Theta+\lambda^2\Theta_1+\lambda^3 D_1 = 0,$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b'_1 \\ b''_1 & a'_1 & b_1 \\ b'_1 & b_1 & a''_1 \end{vmatrix},$$

$$\Theta = a_1\alpha + a'_1\alpha' + a''_1\alpha'' + 2b_1\beta + 2b'_1\beta' + 2b''_1\beta'',$$

$$\Theta_1 = a\alpha_1 + a'\alpha'_1 + a''\alpha''_1 + 2b\beta_1 + 2b'\beta'_1 + 2b''\beta''_1,$$

$\alpha, \alpha', \ldots, \beta''$ et $\alpha_1, \alpha'_1, \ldots, \beta''_1$ désignant les coefficients de $a, a', \ldots, b''$ et $a_1, a'_1, \ldots, b''_1$ dans les développements des déterminants D et D_1.

Or l'équation

$$\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy = 0$$

est l'équation ponctuelle du cône C qui a pour sommet l'origine et qui est circonscrit à la quadrique S; on en conclut que la condition

$$\Theta = 0$$

ou

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0$$

exprime que le cône C est harmoniquement circonscrit à la quadrique S_1, ou, ce qui revient au même, que le cône C est harmoniquement circonscrit au cône C_1 qui a pour sommet l'origine et qui est circonscrit à la quadrique S_1.

Il résulte de là que la quadrique Σ, qui a pour équation

$$\Phi(x, y, z, t) = 0,$$

est le lieu d'un point tel que le cône circonscrit à S ayant pour sommet ce point soit harmoniquement circonscrit au cône circonscrit à S_1 et ayant même sommet.

On verrait de même que la quadrique Σ_1,

$$\Phi_1(x, y, z, t) = 0,$$

est le lieu d'un point tel que le cône circonscrit à S_1 et ayant pour sommet ce point soit harmoniquement circonscrit au cône circonscrit à S et ayant même sommet.

275. Les deux quadriques Σ et Σ_1 ont même tétraèdre conjugué commun que les quadriques S et S_1.

En effet, rapportons ces deux dernières à leur tétraèdre conjugué commun ; leurs équations tangentielles peuvent s'écrire

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + dr^2 = 0,$$

$$a_1u^2 + a'_1v^2 + a''_1w^2 + d_1r^2 = 0.$$

L'équation ponctuelle des quadriques inscrites dans la développable commune est alors

$$\frac{x^2}{a + \lambda a_1} + \frac{y^2}{a' + \lambda a'_1} + \frac{z^2}{a'' + \lambda a''_1} + \frac{t^2}{d + \lambda d_1} = 0.$$

En annulant les coefficients de λ et de λ^2, on a les équations des surfaces Σ et Σ_1, qui ne renferment que des termes en x^2, y^2, z^2, t^2 ; on en conclut que ces quadriques sont conjuguées par rapport au tétraèdre de référence.

276. Cas particulier. — Supposons que la quadrique S_1 se réduise au cercle de l'infini ; la quadrique Σ sera alors le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à S, et la quadrique Σ_1 sera le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à S ; ce dernier lieu sera la sphère de Monge si la surface S a un centre, ou le plan de Monge si cette surface est un paraboloïde.

On retrouve ainsi l'équation de la sphère de Monge en annulant le coefficient de λ^2 dans l'équation

Hosted by Google

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & b'' & b' & c & x \\ b'' & a'+\lambda & b & c' & y \\ b' & b & a''+\lambda & c'' & z \\ c & c' & c'' & d & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

on obtient, comme on l'a déjà trouvé au n° 195,

$$d(x^2+y^2+z^2) - 2cxt - 2c'yt - 2c''zt + (a+a'+a'')t^2 = 0.$$

277. En écrivant que l'équation en λ considérée au n° 273,

$$F + \lambda\Phi + \lambda^2\Phi_1 + \lambda^3 F_1 = 0,$$

a une racine double, c'est-à-dire en annulant le discriminant du premier membre, on obtient l'équation ponctuelle de la surface développable circonscrite à S et à S_1.

Pour le bien comprendre, il sera plus simple de transformer la propriété par le principe de dualité.

Nous savons qu'il existe trois surfaces d'un faisceau ponctuel tangentes à un plan, et les points de contact sont les centres des couples de sécantes communes qui joignent les quatre points de rencontre du plan et de la quartique gauche commune aux quadriques du faisceau; pour que deux des points de contact soient confondus, il faut que deux des quatre points de rencontre du plan et de la quartique soient confondus, ce qui revient à dire que le plan doit être tangent à la quartique.

Corrélativement, il existe trois quadriques d'un faisceau tangentiel qui passent par un point; deux de ces quadriques seront confondues si le point est situé sur la surface développable circonscrite à toutes les quadriques du faisceau.

L'équation de cette surface développable sera donc

$$(9FF_1 - \Phi\Phi_1)^2 - 4(3F\Phi_1 - \Phi^2)(3F_1\Phi - \Phi_1^2) = 0;$$

cette surface est du huitième degré.

278. On peut recommencer des calculs analogues en partant

Hosted by Google

des équations ponctuelles de deux quadriques, et en cherchant l'équation tangentielle générale des quadriques qui passent par l'intersection des deux quadriques données.

On obtiendra une équation du troisième degré en λ, et en annulant les coefficients de λ et de λ^2, on aura les équations tangentielles de deux quadriques qui seront les enveloppes de plans coupant les deux quadriques données suivant deux coniques telles que l'une soit harmoniquement inscrite à l'autre.

En écrivant que le discriminant de l'équation en λ est nul, on aura l'équation tangentielle de l'intersection des deux quadriques données.

279. Réseaux tangentiels. — Étant données les équations tangentielles de trois quadriques,

$$f_1(u, v, w, r) = 0, \qquad f_2(u, v, w, r) = 0, \qquad f_3(u, v, w, r) = 0,$$

on appelle réseau tangentiel relatif à ces trois surfaces l'ensemble des quadriques définies par l'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

où λ_1, λ_2, λ_3 désignent des nombres arbitraires.

Ces réseaux possèdent des propriétés analogues aux propriétés des réseaux tangentiels de coniques [Voir Première Partie (*Géom. plane*), n° 266].

Parmi les quadriques du réseau, il en est une infinité qui se réduisent à une conique; les plans de ces coniques enveloppent la surface développable définie par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_1}{\partial w} & \dfrac{\partial f_1}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial w} & \dfrac{\partial f_2}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial w} & \dfrac{\partial f_3}{\partial r} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette surface est aussi l'enveloppe des plans dont les pôles par rapport aux quadriques du réseau sont en ligne droite.

Hosted by Google

280. On démontrera comme en géométrie plane que deux faisceaux qui appartiennent à un même réseau ont toujours une quadrique commune,

Considérons le réseau défini par les trois quadriques suivantes :

1° Un point double O,

2° Le cercle de l'infini,

3° Une quadrique quelconque Q.

En combinant ces quadriques deux à deux on a les trois faisceaux suivants :

1° Les sphères de centre O,

2° Les quadriques homofocales à Q,

3° Les quadriques circonscrites à Q le long de la courbe de contact C du cône circonscrit de sommet O.

Étant donné un faisceau quelconque appartenant au réseau, ce faisceau contiendra une quadrique faisant partie des faisceaux que nous venons d'énumérer.

On en déduit, par exemple, qu'il existe une sphère de centre O inscrite dans la développable commune relative à une quadrique Q′ homofocale à Q et à une quadrique Q″ circonscrite à Q en tous les points de la conique C.

Supposons que la quadrique Q soit de révolution et que la quadrique Q′ se compose des deux foyers de Q situés sur l'axe de révolution; on aura le théorème suivant :

Si une quadrique Q″ est circonscrite à une quadrique de révolution Q, le cône circonscrit à Q″ et ayant pour sommet l'un des foyers de Q est de révolution et son axe passe par le pôle du plan de contact de Q et de Q″.

En remplaçant Q″ par une section plane de Q, on a un autre théorème bien connu.

Si l'on substitue au point double O un ensemble de deux points distincts, on obtiendra de nouveaux énoncés.

281. Il n'existe pas en général de quadrique réduite à deux points parmi les quadriques d'un réseau, car en écrivant que le premier membre de l'équation est un produit de deux facteurs, on a trois relations homogènes par rapport à λ_1, λ_2, λ_3, qui n'ont pas de solution en général.

Pour qu'il existe un ensemble de deux points A et B faisant partie du réseau, on devra avoir une identité de la forme

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 \equiv AB,$$

Hosted by Google

en désignant par $A = 0$ et $B = 0$ les équations des deux points.

Cette condition exprime que l'une des trois quadriques est bitangente à une quadrique du faisceau déterminé par les deux autres, et que les sommets des cônes circonscrits (auxquels se réduit la développable relative à deux surfaces bitangentes) sont les points A et B.

Si cette condition est remplie, la même propriété subsistera pour trois quadriques quelconques du réseau n'appartenant pas à un même faisceau, et les sommets des cônes circonscrits seront les mêmes.

282. En considérant le réseau formé par deux quadriques inscrites dans deux cônes de sommets A et B et par le cercle de l'infini, on voit qu'il existe une quadrique de révolution ayant pour foyers A et B et inscrite dans la développable commune à deux surfaces homofocales aux quadriques données.

283. On peut aussi étudier des réseaux d'un autre genre relatifs à quatre quadriques,

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0, \qquad f_4 = 0.$$

L'équation générale des quadriques de ce réseau sera

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0.$$

Les plans des coniques de ce réseau enveloppent la surface qui a pour équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_4}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} & \dfrac{\partial f_4}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial w} & \dfrac{\partial f_2}{\partial w} & \dfrac{\partial f_3}{\partial w} & \dfrac{\partial f_4}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_3}{\partial r} & \dfrac{\partial f_4}{\partial r} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette surface est aussi l'enveloppe des plans dont les pôles

Hosted by Google

par rapport à toutes les quadriques du réseau sont dans un même plan.

284. Il n'existe pas en général de quadrique réduite à un point double faisant partie du réseau

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0.$$

S'il en existe une, on aura une identité de la forme

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + h_4 f_4 \equiv \mathrm{P}^2,$$

$\mathrm{P} = 0$ désignant l'équation du point double.

Cette condition exprime qu'il existe une quadrique circonscrite à f_4 et tangente aux huit plans tangents communs aux quadriques f_1, f_2, f_3.

Si cette condition est remplie, la même propriété subsistera pour quatre quadriques quelconques du réseau, et le sommet du cône circonscrit sera toujours le même point P.

285. Considérons, par exemple, le réseau formé par une quadrique Q, deux coniques A et A′ appartenant à cette quadrique et le cercle de l'infini.

Soit P le sommet du cône circonscrit à la quadrique Q le long de la conique A ; le point double P fait partie du réseau considéré.

Prenons comme quadriques du réseau une quadrique Q′ homofocale à Q, les deux coniques A et A′ et le cercle de l'infini ; on voit qu'il existera une sphère de centre P tangente aux huit plans tangents communs à Q′, A et A′.

En particulier si les deux coniques A et A′ sont tangentes en un point M et si l'on désigne par D la tangente commune en ce point, on voit que le point P sera situé dans le plan tangent en M à la quadrique Q, et sera équidistant des deux plans tangents menés à Q′ par la droite D.

On en conclut le théorème suivant (*) :

Si par une tangente D *en un point* M *d'une quadrique* Q, *on mène les deux plans tangents à une quadrique homofocale* Q′, *ces deux plans tangents sont également inclinés sur le plan tangent en* M *à la quadrique* Q.

(*) Cette démonstration est due à M. Ravier (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e Série, Tome IX, p. 233).

Hosted by Google

On déduit de ce théorème que :

Tout cône circonscrit à une quadrique admet pour plan principal le plan tangent à toute quadrique homofocale qui passe par le sommet du cône.

On a par suite le théorème établi au n° 254.

EXERCICES ET NOTES

1. *Étant donné un ellipsoïde de centre* O *et un point* M, *on considère les sphères qui passent par* M *et qui sont circonscrites à un tétraèdre conjugué par rapport à* E. *On demande :*

1° *Le lieu des centres de ces sphères ; ce lieu est un plan* P ;

2° *L'enveloppe du plan* P *quand* M *décrit une sphère concentrique à l'ellipsoïde* E ;

3° *L'enveloppe du plan* P *quand le point* M *décrit un plan.*

Soit

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0$$

l'équation tangentielle de l'ellipsoïde,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

l'équation ponctuelle de la sphère; on aura les conditions

$$a^2 + b^2 + c^2 - \delta = 0,$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 + \delta = 0,$$

x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées du point M.

1° On en conclut que le centre (α, β, γ) de la sphère décrit le plan

$$2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + 2\gamma z_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0. \qquad \text{(P)}$$

2° Supposons qu'on ait

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

En désignant par u, v, w, r les coordonnées du plan P, on aura

$$\frac{2x_0}{u} = \frac{2y_0}{v} = \frac{2z_0}{w} = \frac{-(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2)}{r}. \qquad (2)$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 entre les équations (1) et (2), on a l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan P.

On trouve aisément

$$(u^2 + v^2 + w^2)(R^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4R^2r^2 = 0,$$

Hosted by Google

équation qui représente une sphère concentrique à l'ellipsoïde et ayant pour rayon $\frac{R^2 + a^2 + b^2 + c^2}{2R}$.

3° Supposons qu'on ait

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{3}$$

Eliminons x_0, y_0, z_0 entre (2) et (3) ; on a

$$D^2(u^2+v^2+w^2)+(Au+Bv+Cw)[(Au+Bv+Cw)(a^2+b^2+c^2)-2Dr] = 0,$$

équation qui représente un paraboloïde de révolution.

2. *Étant donnée une quadrique ayant pour centre le point* O, *il y aura une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette quadrique et en même temps circonscrits à une sphère dont le centre est un point arbitrairement choisi,* C ; *si* R *désigne le rayon de la sphère inscrite, si* I *est le point d'intersection du rayon vecteur* OC *avec le plan polaire du point* C *par rapport à la quadrique, on a la relation*

$$R^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{CI}{OI},$$

$2a$, $2b$, $2c$ *représentant les valeurs algébriques des axes de la surface du second ordre.*

3. *Si la quadrique donnée (énoncé précédent) est un paraboloïde, et* I *le centre de la section de la surface par le plan polaire du point* C, *on a la relation*

$$R^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = CI,$$

$2p$ *et* $2q$ *étant les paramètres des sections principales.*

4. *Étant donnée une quadrique* S *ayant pour centre le point* O, *si l'on imagine une quadrique de révolution autour de l'axe focal, ayant un de ses foyers au point* O *et harmoniquement inscrite à* S, *la longueur de l'axe non focal de la surface de révolution est constante.*

La quadrique S ayant pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

la surface de révolution aura pour équation tangentielle

$$u^2 + v^2 + w^2 + hr(\alpha u + \beta v + \gamma w + r) = 0,$$

avec la condition

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - h = 0;$$

Hosted by Google

et l'on voit aisément que le carré de la demi-longueur de l'axe non focal est égal à $\frac{1}{h}$ au signe près, car cette quantité est égale au produit des distances des foyers à un plan tangent quelconque.

5. *On donne deux ellipsoïdes* A *et* B. *On demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde* A *et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de* B.

(*Concours général, 1860.*)

6. *On considère les quadriques de révolution bitangentes à une quadrique fixe* Q *et telles que l'un des deux foyers communs aux méridiennes soit fixe : lieu de l'autre. Lieu des sommets des cônes circonscrits à la fois à* Q *et à ces quadriques.*

Soient F et F′ les foyers d'une quadrique de révolution Q′ bitangente à Q ; désignons par S et S′ les sommets des cônes circonscrits à ces deux quadriques ; la quadrique Q, les deux couples de points F, F′ et S, S′ déterminent un réseau dont fait partie le cercle de l'infini. Il existera donc une quadrique homofocale à Q et faisant partie du faisceau tangentiel défini par les couples F, F′ et S, S′, c'est-à-dire passant par le quadrilatère gauche FSF′S′.

Il résulte de là que, si F est fixe, le lieu de F′ est composé des trois quadriques homofocales à Q qui passent par F. Quant au lieu des sommets S et S′, il est formé par les génératrices de ces surfaces qui passent par F, droites qui coïncident avec les focales du cône de sommet S circonscrit à Q.

Hosted by Google

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

CHAPITRE II

Hosted by Google

Hosted by Google