



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

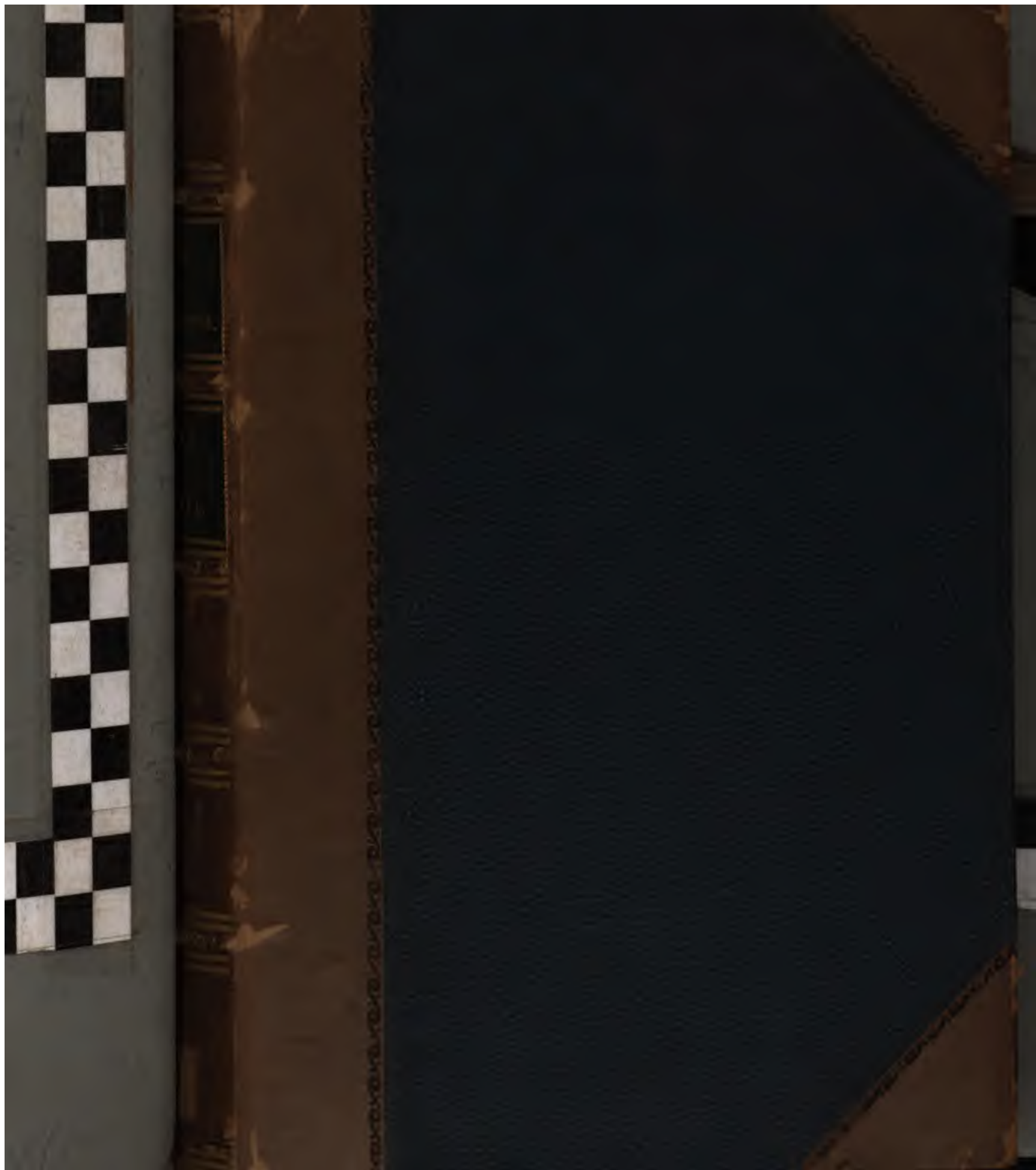
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>





600026751R

B.10. 7. 5.



E. BIBL. RADEL

~~50 M. H.~~ C

1922

d.

22

OXFORD MUSEUM.  
LIBRARY AND READING-ROOM.

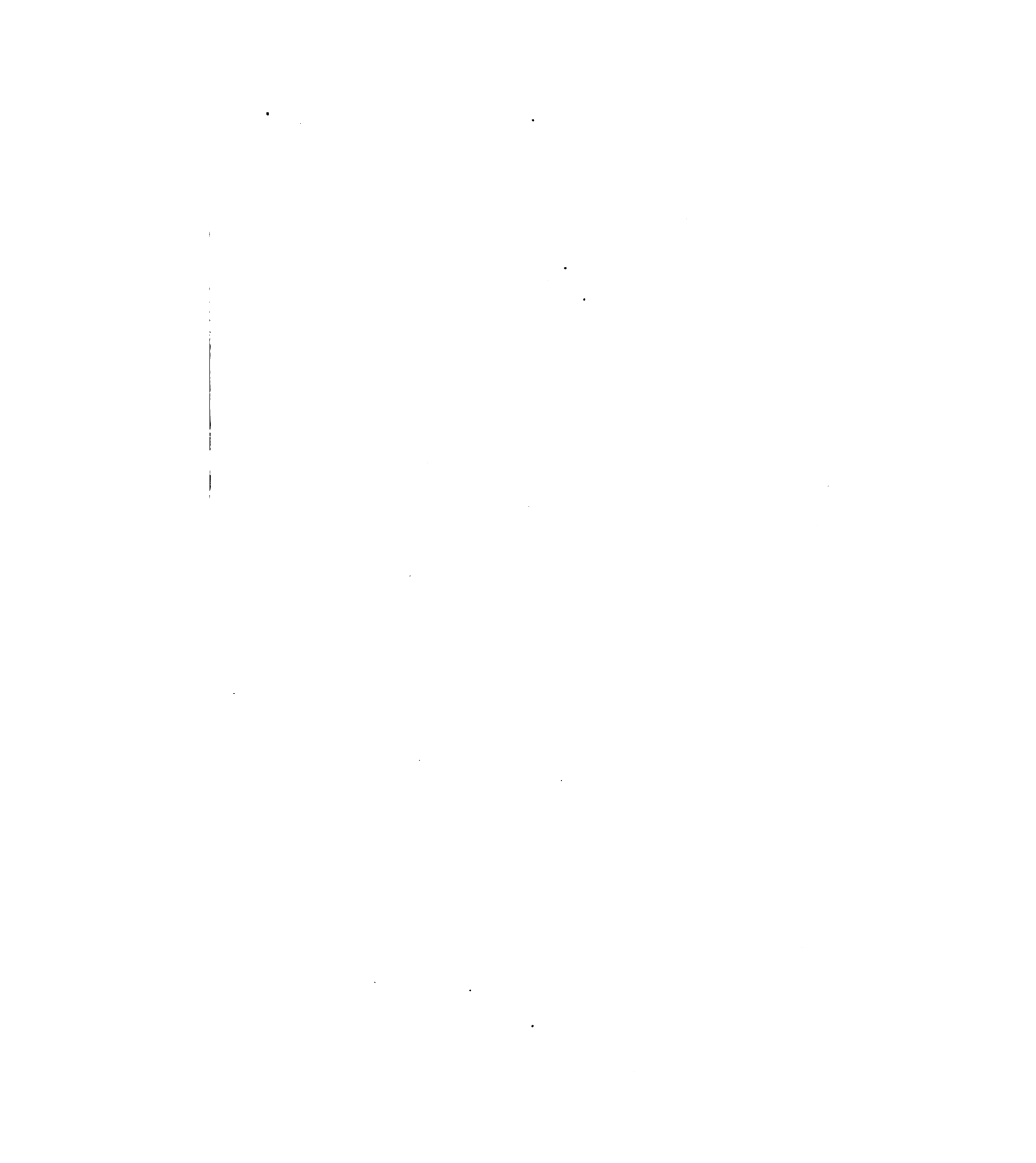
---

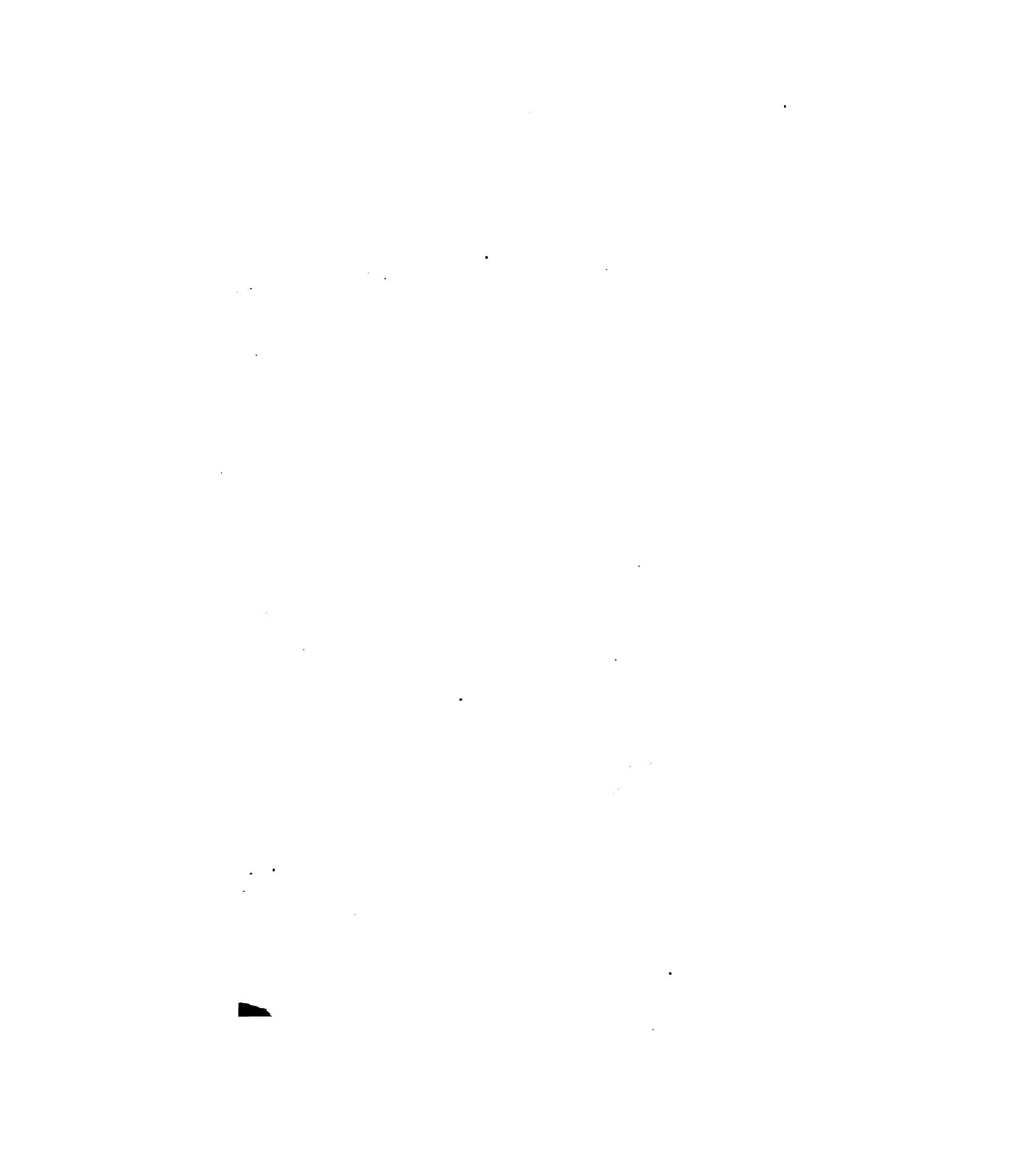
THIS Book belongs to the "Student's  
Library."

It may not be removed from the  
Reading Room without permission  
of the Librarian.

*IV. A 26*







LEHRBUCH  
DER  
EXPERIMENTALPHYSIK

BEARBEITET VON

DR. ADOLPH WÜLLNER,  
PROFESSOR DER PHYSIK AM KÖNIGL. POLYTECHNICUM ZU AACHEN.

ERSTER BAND.

MECHANIK UND AKUSTIK.



DRITTE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1874.





**Verfasser und Verleger behalten sich das Recht der Uebersetzung in alle  
modernen Sprachen vor.**

# INHALTSVERZEICHNISS

ZUM ERSTEN BANDE.

MECHANIK UND AKUSTIK.

	Seite
Einleitung.	
Aufgabe der Physik . . . . .	1
Methode der Physik . . . . .	2
Ableitung physikalischer Gesetze aus Messungen . . . . .	9
Die in der Physik gebräuchlichen Maasse . . . . .	11
Einige Messinstrumente. Der Comparator . . . . .	13
Die Theilmaschine . . . . .	15
Der Nonius . . . . .	20
Das Sphärometer . . . . .	21
Das Kathetometer . . . . .	23
Der Theodolith . . . . .	27

## Erster Theil.

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

### Erster Abschnitt.

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper  
als solcher.

### Erstes Kapitel.

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§. 1. Bewegung, ihre verschiedenen Arten. Definition der Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	33
§. 2. Trägheit der Materie, Definition der Kraft, Maass derselben . . . . .	35
§. 3. Dasein und Richtung der Schwere . . . . .	37
§. 4. Atwoods Fallmaschine . . . . .	37
§. 5. Abhängigkeit der Bewegung von der Dauer der Kraftwirkung . . . . .	40
§. 6. Abhängigkeit der Bewegung von der Grösse der Kraft und der zu bewegenden Gewichte . . . . .	42
§. 7. Unabhängigkeit der Wirkung von Kräften von der Bewegung, welche ein Körper bereits besitzt . . . . .	44
§. 8. Unabhängigkeit gleichzeitig wirkender Kräfte . . . . .	45
§. 9. Das Kräfteparallelogramm . . . . .	46

	Seite
§. 10. Bedingungen des Gleichgewichts eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte einwirken. . . . .	48
§. 11. Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung; Wurfbewegung . . . . .	50
§. 12. Bewegung auf der schiefen Ebene . . . . .	54
§. 13. Masse . . . . .	56
§. 14. Verschiedene Arten die Kraft zu messen; Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung; Princip der Erhaltung der Kraft . . . . .	58
§. 15. Bewegung in Folge inconstanter Kräfte und Maass solcher Kräfte . . . . .	61

## Zweites Kapitel.

### Von den drehenden Bewegungen.

§. 16. Entstehung der drehenden Bewegung; Winkelgeschwindigkeit . . . . .	63
§. 17. Die statischen Momente; Princip der virtuellen Geschwindigkeiten . . . . .	64
§. 18. Mittelpunkt paralleler Kräfte . . . . .	68
§. 19. Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen . . . . .	71
§. 20. Schwerpunkt; Stabilität . . . . .	74
§. 21. Von den Trägheitsmomenten . . . . .	77
Trägheitsmoment eines Cylinders und einer Kugel . . . . .	80
§. 22. Die Wage; Bedingungen der Brauchbarkeit und Empfindlichkeit; Einrichtung und Aufstellung der Wage . . . . .	85
§. 23. Methode der Wägungen . . . . .	92
§. 24. Specifisches Gewicht und Dichtigkeit . . . . .	95
§. 25. Das Pendel . . . . .	97
§. 26. Isochronismus kleiner Oscillationen; Gesetz der Längen . . . . .	98
§. 27. Angenäherte Formel für die Schwingungsdauer des einfachen Pendels . . . . .	99
§. 28. Das physische Pendel . . . . .	101
§. 29. Experimenteller Beweis des vierten Gesetzes . . . . .	104
§. 30. Correction wegen der Amplitude . . . . .	106
§. 31. Bestimmung von $g$ ; Methode von Borda . . . . .	106
§. 32. Bestimmung von $g$ mittels des Reversionspendels . . . . .	113
§. 33. Anwendung des Pendels bei Uhren . . . . .	117
§. 34. Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze; experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente . . . . .	118
§. 35. Centripetalkraft und Centrifugalkraft . . . . .	121
§. 36. Erhaltung der Rotationsebene . . . . .	123
§. 37. Foucaults Pendelversuch . . . . .	127

## Drittes Kapitel.

### Von der allgemeinen Gravitation.

§. 38. Allgemeine Anziehung; Keplers Gesetze . . . . .	130
§. 39. Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet . . . . .	131
§. 40. Entwicklung des Anziehungsgesetzes . . . . .	132
§. 41. Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung . . . . .	134
Anziehung einer Kugel auf ausser ihr befindliche Massen . . . . .	136
§. 42. Verschiedenheit von $g$ in verschiedenen Breiten; Abplattung der Erde . . . . .	140
§. 43. Dichtigkeit der Erde, Versuche von Cavendish, Baily und Reich . . . . .	142
§. 44. Versuche von Maskelyne . . . . .	147
§. 45. Methode von Airy; Anziehung der Masseneinheiten . . . . .	149
§. 46. Ebbe und Fluth . . . . .	152
Litteratur des ersten Abschnittes . . . . .	154

## Zweiter Abschnitt.

## Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen.

## Erstes Kapitel.

## Von den festen Körpern.

	Seite
§. 47. Beschaffenheit der Materie. Atomistische Theorie . . . . .	158
§. 48. Die Aggregatzustände . . . . .	169
§. 49. Elasticität . . . . .	171
§. 50. Elasticität beim Zuge; Elasticitätscoefficient . . . . .	172
§. 51. Volumveränderung während des Zuges; Quercontraction . . . . .	176
§. 52. Kubische Zusammendrückbarkeit der festen Körper. Hohlkugel, Hohlcylinder . . . . .	183
§. 53. Torsionselasticität; Methoden von Wertheim und Coulomb . . . . .	192
§. 54. Beziehung zwischen dem Torsions- und Elasticitäts-Coefficienten . . . . .	199
§. 55. Biegungselasticität . . . . .	204
§. 56. Grenze der Elasticität . . . . .	209
§. 57. Festigkeit . . . . .	210
§. 58. Stoss der Körper . . . . .	212
§. 59. Adhäsion . . . . .	216
§. 60. Reibung . . . . .	216

## Zweites Kapitel.

## Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§. 61. Constitution der Flüssigkeiten. Gleichmässige Fortpflanzung des Druckes . . . . .	218
§. 62. Compressibilität der Flüssigkeiten . . . . .	221
§. 63. Hydrostatischer Druck, Seitendruck, Auftrieb . . . . .	232
§. 64. Communicirende Röhren; hydraulische Presse; Manometer von Desgoffe . . . . .	238
§. 65. Gleichgewicht der Flüssigkeiten, auf welche beliebige Kräfte wirken . . . . .	243
§. 66. Archimedisches Princip . . . . .	246
§. 67. Schwimmende Körper . . . . .	248
§. 68. Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper . . . . .	250
§. 69. Bestimmung des specifischen Gewichtes flüssiger Körper . . . . .	254
Aräometer für besondere Flüssigkeiten, Alkoholometer . . . . .	258
§. 70. Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern . . . . .	260
§. 71. Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten; Oberflächen- spannung . . . . .	262
§. 72. Einfluss der Wände . . . . .	267
§. 73. Niveauveränderungen in capillaren Röhren . . . . .	270
§. 74. Steighöhen in verschiedenen Räumen, in Röhren, zwischen Platten, an verticaler Wand . . . . .	274
§. 75. Bildung von Tropfen auf horizontaler Unterlage; von Luftblasen . . . . .	282
§. 76. Capillaritätsconstanten . . . . .	287
§. 77. Grösse der Wirkungssphäre der Molekularkräfte . . . . .	296
§. 78. Bewegungen in Folge von Capillarwirkung . . . . .	300
§. 79. Auflösung . . . . .	303
§. 80. Mischung und Schichtung der Flüssigkeiten; Plateau's Versuche . . . . .	304
§. 81. Diffusion . . . . .	308
§. 82. Endosmose . . . . .	309
§. 83. Ausfluss der Flüssigkeiten; Toricelli's Theorem; hydraulischer Druck . . . . .	314

	Seite
§. 84. Ausflussmenge, Contractio venae . . . . .	320
§. 85. Reibung der Flüssigkeiten; Ausfluss durch capillare Röhren, Reibungscoefficienten . . . . .	324
§. 86. Constitution des ausfliessenden Strahles . . . . .	333

### Drittes Kapitel.

#### Von den gasförmigen Körpern.

§. 87. Allgemeine Beschaffenheit der Gase . . . . .	339
§. 88. Eigenschaften der Gase, die sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam haben . . . . .	341
§. 89. Das Barometer . . . . .	344
§. 90. Construction des Barometers . . . . .	346
§. 91. Verschiedene Formen des Barometers; Gefässbarometer . . . . .	348
§. 92. Correction wegen der Capillarität . . . . .	351
§. 93. Heberbarometer . . . . .	352
§. 94. Aneroidbarometer . . . . .	356
§. 95. Anwendung des Barometers in der Meteorologie . . . . .	357
§. 96. GröÙe des Luftdrucks . . . . .	360
§. 97. Mariotte'sches Gesetz . . . . .	360
Versuche von Despretz, Dulong und Arago, Pouillet . . . . .	364
Versuche von Regnault . . . . .	368
Versuche von Natterer und Cailletet . . . . .	375
§. 98. Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes zur Bestimmung der Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe; barometrische Höhenmessungen . . . . .	378
§. 99. Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes auf Manometer; Manometer von Regnault . . . . .	384
§. 100. Volumenometer von Regnault und Kopp . . . . .	389
§. 101. Die Luftpumpe . . . . .	394
§. 102. Fall der Körper im luftleeren Raum . . . . .	403
§. 103. Quecksilberluftpumpen von Geissler, Poggendorff und Sprengel . . . . .	404
§. 104. Die Compressionsmaschine . . . . .	409
§. 105. Flüssigmachen der Gase . . . . .	413
§. 106. Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern . . . . .	414
§. 107. Moser'sche Bilder . . . . .	416
§. 108. Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten; Absorption der Gase . . . . .	419
§. 109. Ausströmen der Gase; Aerodynamischer Druck . . . . .	425
Reibung der Gase; Ausfliessen durch capillare Röhren . . . . .	432
§. 110. Diffusion der Gase . . . . .	436
§. 111. Stoss und Widerstand der Luft . . . . .	439

### Dritter Abschnitt.

#### Von der Wellenbewegung.

##### Erstes Kapitel.

###### Theoretische Principien der Wellenbewegung.

§. 112. Schwingende Bewegung eines Punktes . . . . .	442
§. 113. Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes . . . . .	443
§. 114. Geometrische Darstellung der Schwingungen eines Punktes . . . . .	450
§. 115. Schwingende Bewegung eines Punktes unter Annahme eines andern Kraftgesetzes; logarithmisches Decrement . . . . .	450

	Seite
§. 116. Schwingung von Punktreihen; Entstehung der Wellen . . . . .	454
§. 117. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe . . . . .	458
§. 118. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen; Interferenz . . . . .	460
§. 119. Interferenz sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzender Wellenbewegungen; Bildung stehender Wellen . . . . .	464
§. 120. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung . . . . .	469
§. 121. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen . . . . .	475
§. 122. Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge . . . . .	482
§. 123. Schwingungen eines Systems von Punkten . . . . .	492
§. 124. Huyghens'sches Princip . . . . .	495
§. 125. Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen . . . . .	501
§. 126. Brechung der Wellen . . . . .	507

## Zweites Kapitel.

### Von der Wellenbewegung fester Körper.

§. 127. Schwingende Bewegung einzelner Theile fester Körper in Folge der Elasticität . . . . .	510
§. 128. Longitudinale Schwingung der Stäbe . . . . .	512
§. 129. Schwingungsdauer von Stäben . . . . .	514
§. 130. Theilung der schwingenden Stäbe; Knotenpunkte . . . . .	519
§. 131. Transversale Schwingungen der Saiten . . . . .	522
§. 132. Stehende Schwingungen fadenförmiger durch Spannung elastischer Körper; Theilung der Saiten . . . . .	526
§. 133. Einfluss der Steifigkeit der Saiten . . . . .	533
§. 134. Transversalschwingungen von Stäben . . . . .	535
§. 135. Transversalschwingungen von Platten; Chladni's Klangfiguren . . . . .	542
§. 136. Drehende Schwingungen von Stäben . . . . .	549
§. 137. Zusammengesetzte Schwingungen . . . . .	554

## Drittes Kapitel.

### Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

§. 138. Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen . . . . .	568
§. 139. Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindern . . . . .	574
§. 140. Transversale Wellen in Flüssigkeiten . . . . .	576
§. 141. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen . . . . .	579
§. 142. Die Ursachen der Flüssigkeitswellen . . . . .	582
§. 143. Durchkreuzung und Reflexion der Wellen . . . . .	585

## Vierter Abschnitt.

### Vom Schalle.

#### Erstes Kapitel.

##### Die Erregung des Schalles.

§. 144. Von der Ursache des Schalles . . . . .	589
§. 145. Qualität des Schalles . . . . .	591
§. 146. Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen . . . . .	593
§. 147. Von dem Verhältniss der Töne und den Intervallen . . . . .	597

	Seite
§. 148. Von den mehrfachen Accorden . . . . .	599
§. 149. Die Tonleiter . . . . .	601
§. 150. Die musikalische Temperatur . . . . .	611
§. 151. Absolute Schwingungszahl der Töne . . . . .	615
§. 152. Analyse des Klanges . . . . .	618
§. 153. Klänge durch Schwingungen fester Körper . . . . .	629
§. 154. Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper; gedeckte und offene Pfeifen, kubische Pfeifen . . . . .	639
§. 155. Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen . . . . .	652
§. 156. Zungenpfeifen; Theorie von W. Weber; weiche Zungen; Theorie von Helmholtz . . . . .	656
§. 157. Die Blaseinstrumente . . . . .	666
§. 158. Die menschliche Stimme . . . . .	668
§. 159. Die menschliche Sprache . . . . .	673

## Zweites Kapitel.

### Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§. 160. Ausbreitung des Schalles in der Luft. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles nach den Messungen der französischen Akademie, Moll und van Beek, Bravais und Martins, Le Roux, Regnault . . . . .	680
§. 161. Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit, Wertheim, Kundt, Dulong . . . . .	690
§. 162. Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern . . . . .	697
§. 163. Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern . . . . .	704
§. 164. Reflexion des Schalles; Sprachrohr . . . . .	706
§. 165. Uebergang des Schalles in andere Mittel; Brechung; Resonanz . . . . .	709
§. 166. Das menschliche Ohr . . . . .	714
§. 167. Einfluss der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones . . . . .	719
§. 168. Interferenz des Schalles; Wellen gleicher Länge . . . . .	721
§. 169. Interferenz von Wellen ungleicher Länge; Stösse . . . . .	726
§. 170. Combinationstöne, Theorie von Helmholtz . . . . .	730
§. 171. Ursachen der Consonanz und Dissonanz . . . . .	734

## Einleitung.

### Aufgabe der Physik.

Die uns umgebende Körperwelt, die Natur, können wir nach einer doppelten Richtung zum Gegenstande unseres Studiums machen. Einmal können wir suchen, die Körper selbst in der Form und dem Zustande, in welchem wir sie vorfinden, kennen zu lernen, zu beschreiben und zu classificiren; diese Aufgabe verfolgen die beschreibenden Naturwissenschaften oder die Naturgeschichte. Andererseits nehmen wir an den Körpern eine Reihe von Veränderungen wahr, die man unter dem Namen Naturerscheinungen zusammenfasst, welche zum Theil ohne, zum Theil mit unserm Zuthun verlaufen, und welche den augenblicklichen Zustand der Körper bleibend oder nur vorübergehend ändern. Das Studium dieser Erscheinungen in ihrem Verlaufe, der Folgen, welche sie für die Körper haben, an denen sie stattfinden, und der Ursachen, aus denen sie hervorgehen, ist der zweite Zweig der Naturwissenschaften, es ist der Inhalt der Physik und der Chemie.

Die an den Körpern wahrnehmbaren Veränderungen können sich entweder auf deren Form oder auf deren Inhalt beziehen; was eigentlich dieser Inhalt der Körper ist, das wissen wir nicht, da wir niemals diesen Inhalt direkt kennen lernen können. Wir nehmen die Körper selbst nur wahr durch den Eindruck, den sie auf unsere Sinne machen, indem wir sie sehen oder auch bei der Berührung fühlen, das heisst, indem wir durch den Gesichtssinn oder Gefühlssinn erkennen, dass ein gewisser Theil des uns umgebenden Raumes andere Eigenschaften hat als der übrige Raum. Was das nun ist, was in diesem Raume sich befindet und bewirkt, dass derselbe sich von seiner Umgebung unterscheidet, das wissen wir nicht; um diesen Inhalt aber allgemein bezeichnen zu können, hat man ihm den Namen Materie beigelegt. Die Materie ist also die Trägerin der Eigenschaften, welche die Körper besitzen, sie ist die Ursache der Eindrücke, welche sie auf unsere Sinne machen.

Die Erscheinungen, welche die Körper verändern, und deren Studium den Inhalt der Chemie und Physik ausmacht, können wir also genauer dahin definiren, dass es Veränderungen sind, welche an und in der Materie stattfinden.

Wir erkennen die Materie nur durch ihre Eigenschaften; da wir an den verschiedenen Körpern verschiedene Eigenschaften vorfinden, so müssen wir schliessen, dass es auch verschiedene Materien gibt. Es gibt nun eine Reihe von Erscheinungen, welche die Eigenschaften der Materien,



an denen sie stattfinden, bleibend verändern; es sind das vorzugsweise solche, bei welchen mehrere Materien sich zu einer neuen vereinigen, oder aus einer Materie andere abgeschieden werden. Das Studium dieser Erscheinungen und ihrer Folgen für die einzelnen Materien ist die Aufgabe der Chemie. Sie hat demnach zunächst die verschiedenen Materien kennen zu lernen und zu classificiren; sie hat dabei gefunden, dass es eine gewisse Anzahl Materien gibt, aus denen sich nicht mehr andere abscheiden lassen, und dass aus diesen einfachen Materien sich alle in der Natur befindlichen Körper herstellen, indem zwei oder mehr dieser einfachen Materien zu einer dritten neuen zusammentreten. Sie hat dann ferner die zusammengesetzten Körper in ihre einfachen Bestandtheile zu zerlegen und aus den einfachen Materien die zusammengesetzten herzustellen. Die Aufgabe der Chemie ist daher fest bestimmt und begrenzt, sie hat die jeder Materie eigenthümlichen, ihr besonders zukommenden und sie von den andern unterscheidenden Eigenschaften zu untersuchen und sich mit allen den Erscheinungen zu befassen, welche die innere Zusammensetzung der Körper verändern.

Die Physik lässt alle Erscheinungen, welche die Zusammensetzung der Körper verändern, ausser Acht, sie beschäftigt sich mit denen, welche die Eigenschaften der Materie, an denen sie stattfinden, nicht bleibend, welche also die innere Zusammensetzung der Körper nicht wesentlich verändern. Sie hat daher zunächst die Eigenschaften der Körper zu untersuchen, welche allen den verschiedenen Materien gemeinschaftlich zukommen, dieselben verfolgend in den drei Zuständen, in welchen wir sie vorfinden, in dem festen, flüssigen und luftförmigen. Sie hat die festen, die flüssigen und gasförmigen Körper in ihren Eigenschaften und den uns an ihnen gebotenen Erscheinungen zu untersuchen, die ihnen als solche und unabhängig davon zukommen, welche von den durch die Chemie erkannten Materien gerade den Körper bilden. Die Erscheinungen dieser Art, welche uns die Natur an der Materie zeigt, können wir, wie sich später zeigen wird, in fünf grosse Gruppen ordnen, in die Bewegungserscheinungen, die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität. Alle Erscheinungen, die wir kennen, lassen sich in eine dieser Gruppen einordnen, die Betrachtung und Untersuchung dieser fünf Erscheinungsgruppen ist daher die Aufgabe der Physik.

### Methode der Physik.

Aus der im vorigen definirten Aufgabe der Naturwissenschaften, Untersuchung der Naturerscheinungen nach ihrem Verlaufe, ihren Folgen und ihren Ursachen, ergibt sich, dass die Grundlage und der Ausgangspunkt dieser Wissenschaft die Erfahrung sein muss von dem, was in der Natur vorgeht. Zu dieser Erfahrung gelangen wir aber lediglich durch die Beobachtung, und zwar durch eine systematische, vorsichtige, genaue und ins einzelne gehende Beobachtung der Naturerscheinungen selbst.

Dieser Grundsatz der naturwissenschaftlichen Methode scheint uns jetzt so selbstverständlich, so unmittelbar aus der Aufgabe dieser Wissenschaft, etwas ausser uns existirendes zu erforschen, sich zu ergeben, dass seine Richtigkeit keines besondern Beweises mehr bedarf. Es war indess nicht immer so; Jahrhunderte lang glaubte man auf rein speculativem Wege die Naturgesetze, den Mechanismus der ganzen Natur auffinden zu können.

Die Folge dieses Irrthums war der absolute Stillstand in der Erkenntniss der Natur; selbst die einfachsten Erscheinungen, deren Gesetze jetzt jeder kennt, wurden missverstanden, weil man es verschmähte die Natur selbst zu befragen. Bis an das Ende des Mittelalters, bis zu den Zeiten Galilei's glaubte man, dass Körper von verschiedenem Gewichte mit verschiedener Geschwindigkeit zu Boden fallen, dass der schwerere in demselben Verhältnisse schneller falle als der leichtere, in welchem er schwerer ist als dieser; man glaubte es auf die Autorität des Aristoteles, der an einer Stelle seiner Schrift über den Himmel den Satz aufgestellt hatte, dass derjenige Körper der schwerere ist, welcher bei gleichem Rauminhalte schneller abwärts geht. Dieser letztere Satz ist nicht unrichtig; denn in der That wird die Fallgeschwindigkeit der Körper etwas durch den Widerstand der Luft modificirt, und die Geschwindigkeit des leichtern Körpers wird bei gleichem Rauminhalt etwas stärker vermindert als die des schwereren. Völlig unrichtig war aber die obige aus diesem Satze gefolgerte Ansicht über den Fall der Körper, und die einfachste Beobachtung zweier verschiedener fallender Körper hätte ihre Unrichtigkeit bewiesen; man hätte gesehen, dass sich bei Körpern selbst des verschiedensten Gewichtes nur äusserst geringe Unterschiede in der Fallgeschwindigkeit zeigen, man hätte gefunden, dass im luft-leeren Raume auch diese Unterschiede verschwinden.

Damit die Beobachtung die Grundlage der Naturwissenschaften sein kann, muss sie, wie schon erwähnt, eine genaue und systematisch die beobachtete Erscheinung in ihren Einzelheiten verfolgende sein; denn nur eine solche Beobachtung kann uns Aufschluss geben über den Verlauf einer Naturerscheinung und die Umstände, durch welche jener Verlauf bedingt wird. Ein einfaches Anschauen der Naturerscheinung liefert uns über alles das eben so wenig Aufschluss, wie eine Betrachtung der Bewegung des Uhrzeigers uns den Mechanismus der Uhr kennen lehrt. Wollen wir über diesen Aufschluss haben, so müssen wir im Innern des Uhrwerks die Eingriffe der einzelnen Räder verfolgen, bis wir zuletzt in der sich aufwindenden Feder, oder in dem fallenden Gewichte die Triebkraft finden, welche das Werk in Bewegung versetzt.

Ein klassisches Muster für eine naturwissenschaftliche Beobachtung und den Einfluss, welchen dieselbe auf den Fortschritt der Wissenschaft hat, ist die Bestimmung der Bahn des Planeten Mars, durch welche Kepler den Sieg des Copernicanischen Weltsystems entschied. Die Beobachtungen der griechischen Astronomen besonders der alexandrinischen Schule hatten zur Erklärung des Ganges der Gestirne zu dem ptolemäischen Weltsysteme geführt, nach welchem die Erde im Mittelpunkte des Weltsystems steht, und die Planeten sowie die Sonne in den verwickelsten Bahnen um dieselbe sich bewegen. Fast zwei Jahrtausende hielt man an diesem System fest, bis Nicolaus Copernicus im Beginne des 16. Jahrhunderts zunächst auf formelle Gründe gestützt das nach ihm benannte System aufstellte, nach welchem die Sonne den Mittelpunkt unseres Weltsystems bildet, um welche unsere Erde und die übrigen Planeten in nahe kreisförmigen Bahnen kreisen. Zunächst stand dann Theorie gegen Theorie, deren letztere gegen die erstere nur den Vorzug der grösseren Einfachheit hatte. Die Beobachtungen und Messungen Keplers waren es aber, welche den Beweis lieferten, dass die grössere Einfachheit der Wirklichkeit entsprach: Jahrelang bestimmte er

mittels täglicher Messungen die Stellungen des Mars und die Zeiten, welche er brauchte, um von einer zur andern zu gelangen. Die Frucht dieser Beobachtungen und der auf sie gestützten Rechnungen waren die beiden ersten Keppler'schen Gesetze, welche er im Jahre 1609 dahin aussprach, dass die Bahn der Planeten Ellipsen seien, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht, und dass die von den Leitstrahlen derselben in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume gleich seien. Nach weitem neunjährigen Messungen und Rechnungen fügte er dann im Jahre 1618 das dritte Gesetz hinzu, dass die Quadrate der Umlaufzeiten sich verhalten wie die Kuben der mittlern Entfernungen. Diese Gesetze waren es, welche dann 50 Jahre später den Geist Newtons in den Stand setzten den Mechanismus unseres Sonnensystems, die Kräfte, welche es in Bewegung erhalten und die Gesetze, nach welchen dieselben wirken, zu erkennen.

Wenn auch die Beobachtung der Naturerscheinungen das Fundament der Naturwissenschaften ist, so reicht sie allein zur Erkenntniß der Natur nicht aus. Die meisten Naturerscheinungen, die ohne unser Zuthun verlaufen, sind nämlich derartig verwickelt, dass es nicht möglich ist, die Einzelheiten derselben zu erkennen und die verschiedenen Umstände, welche sie beeinflussen, zu trennen. So lange man deshalb nur auf die Beobachtung der sich uns in der Natur darbietenden Erscheinungen beschränkt war, blieb der Fortschritt der Naturwissenschaften nur ein langsamer. Bei dem Wiederaufleben der Naturwissenschaften im 16. Jahrhundert erfand man dann aber die Kunst die Naturerscheinungen selbst hervorzurufen, ihren Verlauf zu regeln und die Umstände, unter denen sie sich zeigen, zu ändern, man erfand die Kunst Versuche anzustellen; diese Kunst ist es, welche im Laufe der letzten zwei Jahrhunderte die Kenntniß der Naturerscheinungen so weit gefördert, durch welche Physik und Chemie jener stolze Bau geworden, den wir jetzt bewundern.

Der Versuch lehrt uns aber nicht allein die Gesetze jener Erscheinungen kennen, die wir auch ohne unser Zuthun beobachten, er führt uns gleichzeitig zu ganz neuen Erscheinungen, deren Existenz man ohne denselben gar nicht ahnen konnte. Man hat zufällig, schon im Alterthume die Beobachtung gemacht, dass geriebener Bernstein die Fähigkeit besitzt leichte ihm nahe gebrachte Körpertheilchen, wie Strohhalme anzuziehen; indem man den Versuch wiederholte und auch andere Körper demselben unterwarf, fand man die Mittel diese Kraft in höhern Maasse hervorzurufen, man construirte Maschinen, welche zeigten, dass die im Bernstein schlummernde Kraft in schmetternden Funken Glas durchbohren und brennbare Körper entzünden kann. Zufällig fand man, dass zwei verschiedene Metalle, wenn sie nach der Berührung wieder getrennt werden, dieselbe Fähigkeit besitzen wie der geriebene Bernstein; eine Wiederholung und Abänderung dieses Versuches lehrte uns in der Berührung verschiedener Körper eine neue noch viel mächtigere Quelle der Elektrizität kennen, deren Ströme jetzt unsere Telegraphendrähte durchlaufend fast momentan die Gedanken der Menschen in die entferntesten Gegenden tragen.

Die Kunst des Experimentirens förderte die Naturwissenschaften ebenso wie durch die Entdeckung neuer Thatsachen, durch die Erfindung neuer Apparate; jeder derselben vermehrt unsern Einfluss auf die Kräfte der Natur, nicht neue Kräfte schaffend, sondern die vorhandenen nach unserm Willen

regelnd und die ohne dieselben verborgenen unsern Zwecken dienstbar machend; jeder derselben eröffnet daher unserer Forschung ein neues Feld. So hat die Luftpumpe uns den Druck der Luft bewiesen, sie macht uns fähig die Eigenschaften der Gase aufzufinden; vieles hat uns die Elektrisirmaschine, die voltaische Säule offenbart; man vermag nicht zu übersehen, welche Entdeckungen sie der Zukunft vorbehalten.

Neben diesen Apparaten, welche bestimmt sind, unserer Beobachtung neue Erscheinungen vorzuführen, gibt es andere von nicht geringerer Wichtigkeit, deren Aufgabe es ist, die beobachteten Thatsachen zu isoliren und messend zu verfolgen, so das Barometer, das Thermometer, das Fernrohr und die ganze Reihe von feinen Messapparaten, die allein im Stande sind unsern Beobachtungen die erforderliche Genauigkeit zu geben. Beide Arten von Instrumenten haben die gleiche Bedeutung, die erstere, indem sie unsere Kenntniss erbreitert, die letztere, indem sie dieselbe vertieft.

Die Beobachtungen und Versuche liefern uns in einer Menge von Thatsachen das Material, dessen Verwerthung dann die Thätigkeit des menschlichen Geistes, den combinirenden Scharfsinn unseres Verstandes verlangt. Denn einer Kenntniss der Natur können wir uns nur rühmen, wenn wir das Bedingende der einzelnen Naturerscheinungen erkannt haben, wenn wir die Gesetze kennen, welche ihre gegenseitige Abhängigkeit darstellen. Diese Kenntniss erlangen wir erst, wenn wir durch Combination der einzelnen Beobachtungen das ihnen Gemeinsame und ihren Verlauf aufsuchen. Ein Beispiel wird zeigen, in welcher Weise man zu einem solchen Gesetze gelangt. Wenn ein Lichtstrahl in seiner Bahn auf eine glatte Fläche trifft, so wird er von derselben immer zurückgeworfen, und man sieht bald, dass die Richtung, nach welcher der Strahl zurückgeworfen wird, verschieden ist, je nach der Richtung, in welcher der Strahl die Fläche trifft. Die Erscheinung der Zurückwerfung ist uns deshalb erst dann vollständig bekannt, wenn wir für jeden einfallenden Strahl auch die Richtung des zurückgeworfenen kennen, wenn wir also das Gesetz kennen, welches die Richtung dieser beiden Strahlen mit einander verknüpft. Wir erhalten dasselbe, indem wir zunächst in einer Reihe von Versuchen die Richtungen des einfallenden und des zu ihm gehörigen zurückgeworfenen Strahles messend bestimmen und nun die so gefundenen Richtungen mit einander vergleichen. Man findet dann, dass die Winkel, welche beide Strahlen in der Ebene, welche durch den einfallenden Strahl und die an der Stelle, an welcher derselbe die Fläche trifft, errichtete Normale gelegt wird, mit der Normale bilden immer gleich sind. Aus dieser Vergleichung erhält man das Gesetz: „Der Zurückwerfungswinkel ist dem Einfallswinkel gleich.“ Man sieht, dieses Gesetz, und so jedes andere physikalische Gesetz, ist eine mathematische Beziehung zwischen den eine Erscheinung bedingenden veränderlichen Grössen.

Die auf diese Weise erhaltenen physikalischen Gesetze sind der gemeinsame Ausdruck einer Reihe einzelner Thatsachen; ihre Bedeutung ist aber noch eine weitere, sie drücken nicht nur die Thatsachen aus, welche wir zu ihrer Ableitung benutzten, sondern sie enthalten auch alle Erscheinungen in sich, die aus jenen Thatsachen folgen. Man habe z. B. einen Spiegel von beliebiger aber geometrisch bestimmter Gestalt, und es fallen auf ihn Lichtstrahlen, welche von einer in bestimmter Entfernung aufgestellten Flamme herkommen. Das eben erwähnte Reflexionsgesetz setzt uns in den Stand die

Wirkung des Spiegels zu bestimmen, ohne den Versuch zu Hilfe zu nehmen; denn nach jenem Gesetze kann man den Weg jedes Lichtstrahles nach der Reflexion mit Hilfe der analytischen Geometrie ableiten. Wie in diesem, so ist es in allen Fällen; jedes physikalische Gesetz schliesst eine Reihe von Folgesätzen in sich, welche aus jenem sich ableiten lassen; das Mittel diese Sätze abzuleiten ist die Mathematik, man hat die Gesetze mathematisch zu formuliren und, indem man dann dieselben als Ausgangspunkte nimmt, aus ihnen nur durch mathematische Entwicklungen die Folgerungen zu ziehen.

Daraus erhellt die äusserst wichtige Rolle, welche die Mathematik in der Entwicklung der Physik spielt. Sie ist ebenso wichtig als die Versuche; denn sie dient dazu diese zusammenzufassen und zu berechnen, die erhaltenen Gesetze auszudrücken und aus diesen die weiteren Folgen abzuleiten. Die Mathematik ist für den Physiker eine Sprache und ein Instrument. Da man die Mathematik nur anwenden kann, wenn die Wissenschaft von unbestimmten Erfahrungen zu genau gemessenen Beziehungen fortgeschritten ist, wenn sie begonnen hat, die einzelnen Thatsachen in ihrer Gesetzmässigkeit zusammenzufassen, so kann man behaupten, dass der Grad des Fortschrittes in unserer Wissenschaft bestimmt wird nach der Anwendung der Mathematik.

In jedem Zweige der Physik gibt es gewisse Gruppen von Erscheinungen, welche sich alle aus einem fundamentalen Gesetze ableiten lassen. So unter den Lichterscheinungen die Erscheinungen der Reflexion und Brechung, die der Interferenz und Beugung; die Gesetze dieser Erscheinungen sind jetzt vollständig bekannt; und indem man sie als Grundlage nimmt, ist es leicht, nur durch mathematische Entwicklungen die Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes durch eine beliebige Reihe von Mitteln und unter den verschiedensten Umständen zu erhalten. Wären alle Gesetze der Optik oder überhaupt eines Zweiges der empirischen Wissenschaften bekannt, so könnte man den Weg der Erfahrung, welche zu deren Auffinden diene, verlassen und mit geänderter Methode nur durch mathematische Deductionen ihre Folgerungen erhalten. Die Physik hat diesen Punkt noch lange nicht erreicht; aber dahin zu gelangen, ist eine Aufgabe, welche sie sich vorsezen darf, und welche eines Tages zu lösen sie erwarten kann. In einem Zweige derselben wenigstens ist sie dahin gelangt, in der theoretischen Mechanik. Dieselbe war ursprünglich eine empirische Wissenschaft, wie alle Zweige der Naturlehre; denn man kann nicht a priori wissen, in welcher Weise die Körper durch auf sie wirkende Kräfte bewegt werden, und nach welchen Gesetzen die Körper auf einander einwirken; die Beobachtungen Keppler's, die Versuche Galilei's und Huyghen's boten aber schon das Material, aus welchem Newton die fundamentalen Gesetze dieser Erscheinungsgruppe ableitete. Seitdem aber ist die Mechanik ein Zweig der mathematischen Wissenschaften geworden; sie enthält sich der Versuche und entwickelt ihre Sätze an der Hand logischer Folgerungen.

Wie in der Mechanik, so ist dieses Ziel erreicht in der Astronomie, in einem grossen Theile der Optik und in manchen kleinern Zweigen der Physik, man ist bestrebt, es auch in den übrigen zu gewinnen.

Fassen wir das Resultat der bisherigen Betrachtungen zusammen, so können wir in der Entwicklung der physikalischen Wissenschaften drei Epochen unterscheiden; die erste ist die der Empirie, durch Beobachtung

und Versuche werden Thatschen gesammelt und aus diesen durch die combinirende Thätigkeit des Verstandes die Gesetze der einzelnen Erscheinungen aufgestellt; an diese schliesst sich, sobald hinreichendes Material vorhanden ist, die philosophische Thätigkeit der Abstraction, des Aufsuchens der Hauptgesetze für eine Reihe aus gleicher Ursache hervortretender Erscheinungen, und auf diese folgt dann eine Zeit, in welcher man durch Deduction aus jenen Gesetzen neue Folgerungen und Thatsachen ableitet, eine Zeit, in welcher Beobachtung und Versuch nur dazu dienen die theoretisch abgeleiteten Folgerungen zu controliren und nachträglich zu bestätigen. Im allgemeinen ist das auch der geschichtliche Gang in der Entwicklung der Physik, man findet fast stets diese drei Epochen auch zeitlich verschieden.

Die der Naturwissenschaft gestellte Aufgabe ist indess hiermit noch nicht vollständig gelöst, denn eine vollständige Kenntniss der Natur muss uns auch angeben, warum die Naturerscheinungen gerade den beobachteten Verlauf haben und nicht einen andern. Da nun aber der Verlauf einer Erscheinung wesentlich von der Ursache bedingt wird, welche diese Erscheinung bewirkt, so fällt die Frage nach dem Grunde, aus welchem die Erscheinungen gerade den ihnen eigenthümlichen Verlauf haben, zusammen mit der Frage nach der Ursache der Erscheinungen. Die Ursache einer Veränderung in der Natur bezeichnet man allgemein als eine Kraft, wir können daher das Aufsuchen der Ursachen auch bezeichnen als das der Naturkräfte.

Gerade diese letzte Aufgabe der Naturwissenschaften ist aber die schwierigste; denn die Naturkräfte selbst können wir niemals direct beobachten, wir nehmen sie nur wahr in ihren Wirkungen. Um also irgend etwas über die Naturkräfte auszusagen, müssen wir aus den Wirkungen auf die Ursachen zurückschliessen. Diese Art des Schlusses ist aber immer mit einer so grossen Unsicherheit behaftet, dass wir über die wirksamen Naturkräfte niemals eine ähnliche Gewissheit erhalten können wie über die Gesetze, denen die Naturerscheinungen folgen. Denn eine und dieselbe Erscheinung kann aus sehr verschiedenen Ursachen hervorgehen, und von diesen möglichen Ursachen müssen wir bei jener Art des Schliessens eine auswählen; nichts bürgt uns aber dafür, dass wir bei dieser Wahl aus den möglichen Ursachen die richtige treffen. Wenn wir wissen, dass das Wasser unter dem Drucke der Athmosphäre steht, so ist eine nothwendige Folgerung, dass es in einer Pumpe aufsteigen muss, in welcher wir über dem Wasser einen luftleeren Raum hergestellt haben; weiss man aber nicht, dass das Wasser dem Drucke der Athmosphäre ausgesetzt ist, und sieht man dasselbe in einer luftleer gemachten Pumpe aufsteigen, so kann man eine Reihe von Ursachen ersinnen, welche das Aufsteigen bewirken. Will man zwischen diesen wählen, so hat man alle Chancen dafür, dass man eine unrichtige wählt, gegen eine einzige, dass man die richtige wählt. Die Geschichte lehrt uns, wie sich die ältern Physiker in der That täuschten, als sie annahmen, die Natur habe einen Abscheu vor dem leeren Raume. Die Mechanik des Himmels beweist uns, dass zwischen den Gestirnen eine Kraft thätig ist, welche in dem Maasse grösser ist, als die Masse der Gestirne grösser ist, und welche in dem Maasse abnimmt, als das Quadrat der Entfernung der Gestirne zunimmt. Man nimmt an, dass diese Kraft in einer Anziehung der Materien ihren Grund habe. Auch diese Annahme wählt aus einer ganzen Reihe von möglichen Gründen einen aus, und wir haben strenge genommen ebenso wenig

ein Recht diesen Grund für den wahren zu halten, wie aus dem Aufsteigen des Wassers in der Pumpe den horror vacui zu folgern.

Ueber die Naturkräfte selbst können wir demnach nur Annahmen, sogenannte Hypothesen bilden, welche für uns einen geringern oder grössern Grad von Wahrscheinlichkeit haben, je nach der Vorsicht, mit welcher man bei dem Aufstellen der Hypothesen verfuhr, und je nach der Menge von Naturerscheinungen, welche wir bei ihrer Wahl berücksichtigten, und welche sich dann als nothwendige Folgen aus dieser Hypothese ergeben. So lange man nur wenige Erscheinungen aus einem Gebiete in Betracht zieht, findet man stets, dass mehrere Hypothesen dieselben gleich gut erklären, das heisst als nothwendige Folgen aus der supponirten Ursache hervorgehen lassen; je weiter aber unsere Kenntniss der Erscheinungen in einem Gebiete sich ausdehnt, um so geringer wird die Anzahl der möglichen Hypothesen, bis schliesslich nur eine Hypothese übrig bleibt, aus welcher man sämtliche experimentell gefundenen Thatsachen mathematisch entwickeln kann, und welche selbst zur Auffindung neuer Thatsachen führt. Diese Hypothese hat dann für uns den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche Hypothese ist die jetzt der Behandlung der Optik zu Grunde gelegte Undulationstheorie. Seitdem man angenommen hat, das Licht sei eine zitternde Bewegung des Aethers, wurden alle experimentell aufgefundenen Gesetze der Lichterscheinungen Folgerungen dieses einen Grundsatzes, und mit ihr hat die Optik fast jene Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf welcher die Beobachtung nur mehr ein Mittel ist, die Folgerungen der Theorie zu bestätigen, anstatt das einzige Mittel zu sein, um die Gesetze der Erscheinungen aufzufinden. Das ist eben das charakteristische einer guten Hypothese.

Zunächst erhält man eine solche Hypothese für die verschiedenen Gruppen der unter sich gleichartigen Erscheinungen, wie diejenige des Lichts oder der Wärme, und man muss dieselbe für gut erklären, wenn sie das Gesamtgebiet der Erscheinungen, für welche sie eronnen wurde, als nothwendige Folgen erkennen lässt. Mit dem Fortschritte der Naturerkenntniss hat sich nun aber ergeben, dass die einzelnen Gruppen von unter sich gleichartigen Erscheinungen, welche scheinbar sich ganz fremd sind, wie die Bewegungserscheinungen, Licht- oder Wärmeerscheinungen, unter einander in dem innigsten Zusammenhange stehen. Bei der Abwägung der Hypothesen über die einer bestimmten Erscheinungsgruppe zu Grunde liegenden Naturkräfte, darf man deshalb nicht nur diese Erscheinungsgruppe allein ins Auge fassen, sondern muss auch die übrigen mit in Erwägung ziehen, und sich die Frage stellen, ob es zur Erklärung der bestimmten Gruppe der Annahme einer besondern Naturkraft bedarf. Gerade durch diese Erwägung hat die neuere Physik die Zahl der von den ältern Forschern angenommenen Naturkräfte wesentlich beschränkt; wir werden sehen, wie sie immer mehr dahin strebt, die verschiedenartigsten Erscheinungen auf ein und dieselbe Grundursache, auf Bewegung, zurückzuführen und an die Stelle der früher angenommenen so mannigfachen Kräfte nur eine zu setzen, die Kraft, welche der Materie Bewegung ertheilen kann, welche in einer Anziehung und Abstossung der einzelnen Theile der Materie besteht.

Aber selbst, wenn es gelungen ist alle Erscheinungen auf diese eine, der Materie eigenthümliche und deshalb unveränderliche Kraft zurückzu-

führen, darf man immer nicht vergessen, dass es eine Hypothese ist, auf welche wir die Erklärung der Naturerscheinungen stützen, die allerdings den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, der wir aber eine Gewissheit erst dann beilegen dürfen, wenn wir beweisen können, dass die so angenommene Ursache der Naturerscheinungen die einzig mögliche ist. Dann erst wäre dieselbe, nach dem Ausspruche von Helmholtz<sup>1)</sup>, als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen, es würde derselben alsdann objective Wahrheit zuzuschreiben sein. Dahin zu gelangen, das können wir als das letzte Ziel der Naturwissenschaften bezeichnen; ob es erreicht werden kann, das lässt sich jetzt noch nicht übersehen.

### Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen.

Wir haben im Vorigen bereits mehrfach gezeigt, dass die Grundlage alles physikalischen Wissens genaue Beobachtungen und Messungen sind; ehe wir zur Besprechung der physikalischen Naturerscheinungen selbst übergehen, müssen wir uns daher noch die Frage vorlegen, wie wir aus den Messungen die Gesetze der Erscheinungen ableiten, und wie wir bei den Messungen zu verfahren haben. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Zurückwerfung des Lichtes zeigen, welches wir vorhin bereits angeführt haben. Wir wissen also, dass jedesmal, wenn ein Lichtstrahl auf eine polirte Fläche fällt, derselbe zurückgeworfen wird, ferner, dass die Richtung, nach welcher der zurückgeworfene Strahl fortgepflanzt wird, sich ändert, wenn die Richtung des einfallenden sich ändert. Um das Gesetz zu erhalten, welches die Abhängigkeit der Richtung des zurückgeworfenen von der des einfallenden Strahles darstellt, setzen wir einen Spiegel in den Mittelpunkt eines getheilten Kreises, so dass die Ebene des Spiegels senkrecht ist zur Ebene des Kreises. An dem Kreise sind zwei bewegliche Radien, deren Enden mit einer Spitze auf die Theilung des Kreises zeigen. Die Radien tragen durchsichtige Röhren, deren Achsen den Radien parallel sind; vor der einen Röhre steht eine möglichst kleine Flamme, welche nur durch die Röhre Licht auf den Spiegel senden kann. Ist nun der Spiegel ferner so aufgestellt, dass die Spiegelnormale, das Einfallslot, den Nullpunkt der Theilung trifft, so gibt uns der Abstand des die Flamme tragenden Radius vom Nullpunkte der Theilung den Einfallswinkel des Lichtstrahls. Wir verschieben dann den zweiten beweglichen Radius so lange, bis wir durch die Röhre blickend den zurückgeworfenen Strahl sehen. Da dann die Richtung dieses zweiten Radius jene des zurückgeworfenen Lichtstrahles ist, so gibt uns der Abstand seiner Spitze von dem Nullpunkte der Theilung den Zurückwerfungswinkel. Man setzt dann die beiden beobachteten Winkel nebeneinander. Man wiederholt dann den Versuch, indem man nach und nach verschiedene Einfallswinkel wählt, dabei von dem kleinsten, der senkrechten Incidenz, bis zum grössten, der streifenden Incidenz, fortschreitet und entwirft sich eine Tabelle, auf welcher neben jedem gewählten Einfallswinkel der beobachtete Zurückwerfungswinkel verzeichnet ist. Eine Vergleichung der zusammengehörigen Winkel zeigt uns dann, unter Voraussetzung absoluter Genauigkeit, dass die zu einander gehörigen Winkel immer

<sup>1)</sup> Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. p. 7.



gleich sind. Indem man dann so eine ganz constante Beziehung zwischen den beiden Winkeln in den beobachteten Fällen erkennt, schliesst man, dass das in allen so sein wird, und erhält auf diese Weise ein experimentell bewiesenes Gesetz.

Der Beweis eines physikalischen Gesetzes ist somit der Nachweis einer bestimmten Beziehung zwischen Zahlen, welche durch direkte Messung erhalten oder aus direkt gemessenen Grössen berechnet werden; wir erkennen diese Beziehung in einer grössern oder geringern Anzahl von Fällen und schliessen daraus, dass sie in allen bestehe.

Damit aber die zwischen den verglichenen Grössen bestehende Beziehung in aller Schärfe hervortrete, ist es nöthig, dass die Messungen absolut genau sind. Das ist niemals zu erreichen, einmal wegen der Ungenauigkeit der Instrumente, dann aber auch wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne. In dem eben besprochenen Beispiele ist der Maassstab, an welchem gemessen wird, ein getheilter Kreis; eine solche Theilung lässt sich nie absolut genau herstellen, der eine Grad ist niemals dem andern absolut gleich, und die Theilstriche haben niemals absolut gleiche Breite. An dem Kreise lassen sich ferner niemals die beweglichen Radien mit absoluter Genauigkeit einstellen, und schliesslich lässt sich die Stellung der Radien nicht mit vollkommener Sicherheit ablesen. Deshalb sind auch die besten Messungen mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet, welche je nach der Güte der Instrumente und der Geschicklichkeit des Beobachters grösser oder kleiner sein können. Sind die Instrumente schlecht, besitzt der Beobachter nicht die nothwendige Geschicklichkeit, oder wendet er nicht die gehörige Sorgfalt an, so können die Beobachtungsfehler eine solche Grösse erreichen, dass die Messungen das Gesetz gar nicht erkennen lassen; man würde dann gar keine oder auch sehr viele algebraische Beziehungen finden, welche die beobachteten Werthe mit der gleichen Genauigkeit wiedergeben, und keine dieser Beziehungen würde nach den Messungen den Vorzug verdienen.

Haben aber die Instrumente die nöthige Feinheit, und hat der Beobachter die erforderliche Sorgfalt angewandt, so findet man immer eine Beziehung, welche die beobachteten Werthe am genauesten wiedergibt, und indem man dann erwägt, dass vollkommene Genauigkeit nicht erreicht werden kann, darf man diese Beziehung als den Ausdruck des physikalischen Gesetzes betrachten.

Hierbei sind aber noch folgende Punkte zu beachten. Da man bei einer hinreichend grossen Zahl von Messungen ebenso oft Wahrscheinlichkeit hat, dass die beobachteten Werthe zu klein als dass sie zu gross sind, so müssen im allgemeinen ebenso viele Werthe kleiner als grösser sein wie diejenigen, welche das aus den Messungen abzuleitende Gesetz verlangt. Findet man dagegen, dass die gefundenen Werthe, wenn auch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, stets grösser oder stets kleiner sind, so muss man dennoch schliessen, dass das Gesetz nicht genau besteht. Wir werden sehen, dass die Erkenntniss der nicht ganz strengen Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes lange Zeit dadurch verzögert wurde, dass Arago und Dulong diese Vorsicht bei den aus ihren Versuchen gezogenen Schlüssen verabsäumten.

Die Abweichungen der beobachteten Werthe von den vom Gesetze verlangten müssen ferner ganz unregelmässig sein, dieselben dürfen nicht

eine bestimmte Gesetzmässigkeit zeigen. Würde man finden, dass etwa für kleine Werthe der gegebenen Grösse der beobachtete Werth der von derselben abhängigen Grösse immer grösser, für grosse dagegen immer kleiner ist als der vom Gesetze verlangte, so würde man auch dann nicht schliessen dürfen, dass das aus den Messungen abgeleitete Gesetz der Wirklichkeit vollständig entspricht; wir dürfen es auch dann, wie in dem vorigen Falle, nur für ein annähernd richtiges halten.

Wie gross in den einzelnen Fällen die Beobachtungsfehler sein können, wie nahe die beobachteten Werthe den wirklich stattfindenden entsprechen können, das lässt sich nicht allgemein feststellen; es hängt das unter sonst gleichen Umständen von der Schwierigkeit der Messungen ab. Man hat in jedem Falle die Grenze der erreichbaren Genauigkeit zu bestimmen, in welcher Weise, das werden wir später bei den einzelnen Untersuchungen kennen lernen. Das aber ist immer festzuhalten, dass, wenn Beobachtungen ein Gesetz bestätigen sollen, die Differenzen des beobachteten und gesetzmässigen Werthes nur ein kleiner Bruchtheil des erstern sein dürfen.

### Die in der Physik gebräuchlichen Maasse.

Die Maasse, welche in der Physik angewandt werden, sind dem neu-französischen Maasssystem entnommen, welches den grossen Vorzug hat, dass es alle Maassbestimmungen auf ein und dieselbe Einheit, die des Längenmaasses zurückführt. Die Einheit des französischen Längenmaasses ist das Meter. Dasselbe ist von der Länge eines Erdmeridians abgeleitet, und zwar wurde der zehnmilliönte Theil des durch genaue Messungen bestimmten Quadranten eines Erdmeridian dazu gewählt. Später hat sich zwar ergeben, dass in die dem Meter zu Grunde liegenden Messungen sich ein kleiner Fehler eingeschlichen hat, da aber die Maasseinheit einmal festgestellt und verbreitet war, so hat man es unterlassen, dieselbe darnach zu ändern. Das Meter ist sonach um ein sehr Geringes von dem zehnmillionten Theile eines Erdmeridianquadranten verschieden. Das Originalmeter, nach welchem alle übrigen Maassstäbe abgeglichen werden, ist in den Archiven zu Paris niedergelegt.

Man theilt das Meter nach dem Decimalsystem

$$1 \text{ Meter} = 10^{\text{dc}} \text{ Decimeter} = 100^{\text{cm}} \text{ Centimeter} = 1000^{\text{mm}} \text{ Millimeter.}$$

Im deutschen Reiche ist seit dem 1. Januar 1872 dasselbe Maasssystem eingeführt worden. Als deutsche Bezeichnung ist für das Meter der Name Stab, für das Centimeter Neuzoll und für das Millimeter der Name Strich gewählt, welche Bezeichnungen indessen gegenüber den ältern oben angeführten wenig in Gebrauch sind.

Früher legte man in Frankreich und Deutschland und noch jetzt in vielen Ländern die willkürlich gewählte Einheit des Fusses (ungefähr von der Länge des menschlichen Fusses) zu Grunde.

Eine Vergleichung der wichtigsten Fussmaasse, wie sie bisher gebraucht wurden, mit dem Metermaasse gibt folgende Zusammenstellung

Meter	Pariser Fuss	Preussen Rhd. Fuss	England Fuss	Oestreich Wiener F.	Baiern Fuss	Baden Fuss	Sachsen Fuss	Schweden Fuss
1 =	3,078444	3,186199	3,280899	3,163446	3,426310	3,333333	3,531197	3,368126

Dem hier angegebenen preussischen ist das dänische, dem englischen das russische und dem badischen das schweizerische Fussmaass an Grösse gleich.

Der Fuss wird entweder duodecimal, in 12" Zoll, der Zoll in 12''' Linien oder decimal, in 10" der Zoll in 10''' Linien eingetheilt.

Das Flächenmaass wird in dem metrischen System durch Quadrirung des Meters erhalten und ebenso das Körpermaass durch Kubation des Meters

$$1^{\text{qm}} \text{ Quadratmeter} = 100^{\text{qdm}} = 10000^{\text{qcm}} = 1000000^{\text{qmm}}$$

$$1^{\text{km}} \text{ Kubikmeter} = 1000^{\text{kdm}} = 1000000^{\text{kcm}} = 1000000000^{\text{kmm}}$$

Es ist leicht darnach das Verhältniss der Quadrat- und Kubik-Füsse, Zolle etc. zum metrischen Flächen- und Körpermaasse zu erhalten, z. B.

$$1^{\text{qm}} = 9,476817 \square' \text{ Paris} = 10,15187 \square' \text{ preuss. etc.}$$

$$1^{\text{km}} = 29',17385 \text{ kub. Paris} = 32',32587 \text{ kub. preuss. etc.}$$

Als Einheit des Hohlmaasses nimmt das metrische System den Rauminhalt eines Kubikdecimeters und nennt dieses Maass ein Litre.

Dasselbe Hohlmaass ist jetzt auch als Einheit im deutschen Reiche acceptirt.

Früher wurde bei uns, und noch jetzt in den Ländern, welche das metrische System nicht acceptirt haben, das Hohlmaass aus dem Fussmaass verschieden gebildet. In Preussen war das Quart = 64" kub., in Baiern das Maass = 84",304 kub., in England ist die Gallone = 277",2738 kub., das österreichische Maass ist 0',0448 kub. u. s. f.

$$1 \text{ Litre} = 0,8733386 \text{ preuss. Quart} = 0,9354301 \text{ baier. Maass.}$$

$$= 0,2200967 \text{ engl. Gallone} = 0,7066483 \text{ östr. Maass.}$$

Auch die Einheit des Gewichtes ist im metrischen Systeme aus jenem des Längenmaasses abgeleitet. Man geht vom Centimeter aus und nennt **das Gewicht von einem Kubikcentimeter Wasser** bei der Temperatur 4° C. auf der Sternwarte zu Paris ein Gramm.

Im gewöhnlichen Leben wird das Gewicht von einem Liter Wasser als Einheit genommen; dasselbe enthält 1000<sup>cm</sup> kub. und wiegt daher 1000 Gramm. Dieses Gewicht wird Kilogramm genannt. Ein bei der Aufstellung des metrischen Systemes mit der grössten Sorgfalt hergestelltes Kilogramm wird in den Pariser Archiven aufbewahrt. Da man mit viel grösserer Genauigkeit zwei Gewichte mit einander vergleichen kann, als das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser bestimmen, so werden alle Normalgewichte nach dem pariser Kilogramm abgeglichen.

Die Unterabtheilungen des Grammes sind nach dem Decimalsystem gebildet

$$1 \text{ Gramm} = 10 \text{ Decigramme} = 100 \text{ Centigramme} = 1000 \text{ Milligramme.}$$

Besondere Zeichen werden für diese Unterabtheilungen nicht benutzt, man schreibt sie als Decimalstellen des Grammes.

Im deutschen Reich ist seit Einführung des metrischen Systems auch dieses Gewichtssystem eingeführt, nur wird als Einheit die Hälfte des Kilogramms, das Pfund, genommen. Dasselbe wird dann ohne weitere Unterabtheilung in 500 Gramm getheilt. Die in andern Ländern gewählten Gewichtseinheiten, die meist den Namen Pfund führen, sind von dem halben Kilogramm nicht sehr verschieden. Eine Vergleichung der wichtigsten Pfunde, mit dem Kilogramm bietet folgende Zusammenstellung

1 Kilogramm =	2,204 597	Pfl. englisch	Avoirdupois
	1,785 675	„	österreichisch
	2,441 883	„	russisch
	2,002 768	„	dänisch und norwegisch
	2,351 063	„	schwedisch Schalgewicht
	2,000 000	„	deutsch.

Das Pfund wird meist in 16 Unzen, wie in England, oder in 32 Loth eingetheilt.

In den Niederlanden, Spanien und Italien ist das metrische System eingeführt, zum Theil nur mit andern Benennungen.

Um eine Richtung im Raume mit einer andern zu vergleichen, hat man ein Maass für Winkel oder Richtungsverschiedenheiten eingeführt; man theilt zu dem Ende überall den Kreisumfang in 360 gleiche Theile, deren einer ein Grad genannt wird. Der Grad wird in 60' Minuten, die Minute in 60'' Sekunden getheilt.

Die Erscheinungen, welche wir in der Physik zu untersuchen haben, treten nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich verschieden auf. Wir haben daher in vielen Fällen auch die Zeit zu messen. Das Zeitmaass ist auf die Länge des Tages gegründet, es ist

1 Tag mittlerer Zeit =	24 Stunden
	1 <sup>h</sup> Stunde = 60' Minuten
	1' Minute = 60'' Sekunden.

Bei den physikalischen Zeitangaben wird meist die Sekunde als Zeiteinheit gewählt.

### Einige Messinstrumente.

#### Der Comparator.

Der Angabe der in der Physik gebräuchlichen Maasse lassen wir eine kurze Beschreibung der ohne besondere Theorie in ihrem Princip verständlichen Messinstrumente, der Längenmessinstrumente, und der Winkelmessinstrumente folgen.

Die Grundlage für alle Längenmessungen ist das Meter, und zwar wird, wie vorhin erwähnt wurde, als das Normalmeter das in den pariser Archiven befindliche aus Platin gefertigte Meter angenommen. Die sämtlichen in Gebrauch befindlichen Meter sind entweder direkt mit dem Pariser Normalmeter verglichen, oder nach solchen dargestellt, welche mit den Pariser Metern verglichen waren.

Zur Vergleichung der Längenmaasse wendet man Comparatoren an, welche verschieden eingerichtet sind, je nachdem man Endmaasse, das heisst Maasse vergleichen will, welche zwischen den Endpunkten des Maassstabes eine bestimmte Länge haben sollen, oder Strichmaasse, das heisst solche, welche zwischen zweien auf dem Maassstabe gezogenen Strichen eine bestimmte Länge haben. Wir begnügen uns damit einen für die Vergleichung von Endmaassen construirten Fühlhebelcomparator zu beschreiben<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Andere Comparatoren sehe man im ersten Bande von *Karstens* Encyclopädie der Physik p. 502 ff. und *Wild* Bericht über die Reform der schweizerischen Urmaasse. Zürich 1868.

Eine breite Platte von gehobeltem Gusseisen dient dem Apparat (Fig. 1) als Basis.

Diese Platte besitzt an dem einen Ende ein mit Schrauben befestigtes stählernes Aufsatzstück *C*; an diesem befindet sich eine vorspringende stumpfe Schneide, gegen welche das Meter fest angelegt wird. Gegen das andere Ende des Apparats hin ist ein stählerner Stift *DE* angebracht, der seiner Länge nach gleiten kann; man kann ihn von *D* nach *E* hin verschieben, aber eine Spiralfeder drückt ihn immer nach *D* hin zurück. Der Messapparat

Fig. 1.



des Instrumentes wird von einem um eine Axe *G* beweglichen Winkelhebel *ZGE*, dem Fühlhebel, gebildet. Der Winkelhebel hat einen sehr kurzen Arm *GE*, der durch eine Feder *F* immer an das Ende *E* des Stiftes *DE* ange-drückt ist, und einen 100mal längeren Arm *ZG*, dessen Ende auf einem getheilten Kreisbogen sich bewegt. Bei *L* befindet sich eine Lupe, durch welche man scharf beobachten kann, an welchem Theilstrich das Ende *Z* ansteht.

Um nun ein Meter zu prüfen, verfährt man folgendermaassen. Zunächst legt man den Etalon, mit welchem man den Maassstab vergleichen will, gegen die Scheide bei *C* und richtet ihn gerade durch Anschieben an die beiden festen Aufsatzstücke *M* und *N*. Der bewegliche Stift *DE* wird dann durch die ihn umgebende Spiralfeder gegen das Ende *A* des Etalons gedrückt; der Hebelarm *GE* wird dann durch die Feder *F* an das vordere Ende *E* des Stiftes *DE* angedrückt, und der Zeiger *GZ* stellt sich auf irgend einen Theilstrich der Theilung ein. Man beobachtet und bemerkt sich denselben.

Darauf ersetzt man den Etalon durch den Maassstab, der geprüft werden soll. Wenn der Zeiger dann genau auf demselben Theilstrich einsteht, so ist derselbe richtig, zeigt er auf eine andere Stelle der Theilung, so ist der Maassstab unrichtig und muss, je nachdem der Zeiger sich mehr oder weniger entfernt von *Z* einstellt, verkürzt oder verlängert werden.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu beurtheilen, genügt es zu beachten, dass der Unterschied der beiden verglichenen Maassstäbe in der Bewegung des Hebelendes *Z* hundertmal grösser erscheint, weil der Arm *ZG* des Winkelhebels hundertmal grösser ist als der Arm *GE*. Da man nun eine Verschiebung von  $0^{\text{mm}},1$  auf der Theilung mit Hilfe der Lupe noch recht gut wahrnehmen kann, so kann man einen Unterschied der Maassstäbe von  $0^{\text{mm}},001$  noch gut bestimmen.

Die Vergleichung eines Maassstabes mit dem Etalon ist aber dennoch meist nicht so einfach, da nur selten der verglichene Maassstab von Platin verfertigt ist. Die Wärme dehnt nämlich alle Körper aus, und der als Etalon benutzte Platinmaassstab hat nur bei der Temperatur des schmelzenden Eises genau die Länge des als Einheit angenommenen Meters. Man muss daher alle Vergleichenungen bei dieser Temperatur ausführen oder, wenn man

sie bei einer andern Temperatur ausgeführt hat, Rücksicht nehmen auf die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, welche für die verschiedenen Maassstäbe eine andere ist, wenn sie nicht aus dem gleichen Material gefertigt sind. Dadurch wird das Verfahren etwas complicirter; wir werden später sehen, wie man diese nothwendigen Correctionen anbringen kann.

Mit Hilfe des Comparators kann man sich also jeder Zeit ein genaues Meter verschaffen. Ist das geschehen, so müssen wir dasselbe in seine Unterabtheilungen, Decimeter, Centimeter und Millimeter theilen. Diese Operation geschieht mittels der Theilmaschine.

### Die Theilmaschine.

Der wichtigste Theil dieses Apparates ist eine Mikrometerschraube. Dieselbe ist auf einem möglichst homogenen Cylinder von hartem Stahl eingeschnitten und hat eine Länge von 50—80 Centimeter. Bei der Herstellung derselben sucht man es dahin zu bringen, dass ein Schraubengang genau einem Millimeter entspricht, das heisst also einmal zu erreichen, dass die Höhe aller Schraubengänge unter sich gleich und jeder gleich einem Millimeter ist. Es muss also die Anzahl der Schraubengänge genau der Anzahl Millimeter entsprechen, welche der Cylinder lang ist. Absolute Genauigkeit kann natürlich nicht erreicht werden, die Ungenauigkeiten dürfen aber nur sehr klein sein und müssen durch Messung bestimmt werden. Bei der Beschreibung des Instrumentes und seiner Anwendung nehmen wir an, dass die Schraube möglichst genau gearbeitet sei.

Fig. 2.



An seinen beiden Enden ist der mit der Schraube versehene Cylinder in zwei Zapfenlager *P* und *B* (Fig. 2) eingeschlossen, in denen er sich mit sanfter Reibung drehen kann, ohne die geringste fortschreitende Bewegung anzunehmen; eine Kurbel *A*, welche man mit der Hand dreht, bringt diese Bewegung hervor.

Die Schraube geht in einer Mutter *Q*, welche sie umfasst, und welche sich nicht mit derselben drehen kann. Die Mutter bewegt sich daher vorwärts oder rückwärts, wenn man die Schraube in dem einen oder andern Sinne dreht. Die Mutter theilt ihre Bewegung einer stählernen Platte *F'* mit, welche an ihr befestigt ist. An der Platte *F'* ist ein Grabstichel *H* angebracht, der also genau die Bewegung der Platte und somit der Schraubennutter *Q* annimmt.

Es ist klar, dass durch eine ganze Umdrehung der Kurbel der Grabstichel um die Höhe eines Schraubenganges, also um  $1^{\text{mm}}$  fortschreitet, durch eine zehntel, hundertstel, tausendstel Umdrehung bewegt sich auch der Stichel um  $0^{\text{mm}},1$ ,  $0^{\text{mm}},01$ ,  $0^{\text{mm}},001$  fort. Es genügt daher den Bruchtheil der

Umdrehung der Schraube zu kennen, um genau zu wissen, wie weit der Stichel vorangeschoben ist.

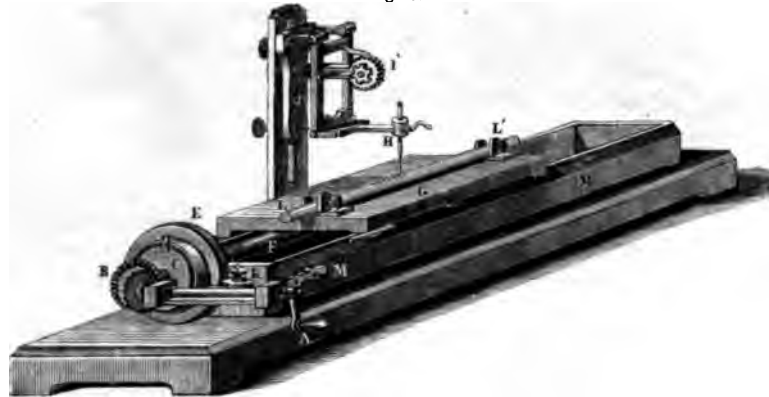
Es ist deshalb an dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube auf den Cylinder eine kreisförmige Scheibe *D* aufgesetzt, welche sich mit der Schraube dreht, und deren Rand in 100 oder mehr Theile getheilt ist; ein unbeweglicher an dem Tisch des Apparates angebrachter Zeiger *C* gibt dann an, um wieviel Theile einer Umdrehung die Schraube gedreht, um wieviel hundertstel eines Millimeter also der Stichel vorangeschoben ist.

Will man nun z. B. eine Glasröhre theilen, so legt man dieselbe, wie die Figur anzeigt, auf 2 Lager, in denen sie durch 2 Fäden *J* und *K* festgehalten wird, so dass sie sich drehen aber nicht ihrer Länge nach bewegen kann. Man nimmt dann als Stichel einen Schreibdiamanten und führt ihn mittels der Schraube an das Ende der Röhre. Dort macht man den ersten Strich, indem man den Diamanten mit der einen Hand sanft auf die Röhre drückt und mit der anderen die Röhre in ihren Lagern herumdreht. Darauf dreht man die Kurbel um *n* Theile des Kreises und bewirkt dadurch ein Fortschreiten des Diamanten um  $n \text{ } 0^{\text{mm}},01$ . Man zieht den zweiten Strich und fährt so fort, bis man die gewünschte Theilung vollendet hat.

Dies war die Theilmaschine in ihrer ersten Gestalt, theoretisch zwar vollendet, aber für die praktische Anwendung, wie jeder sieht, sehr un bequem. Man hat daher an derselben manche Verbesserungen angebracht. Eine vollkommnere, wie sie Bianchi in Paris verfertigt, zeigt Fig. 3.

Die Basis *M* ist von Gusseisen und stellt eine Eisenbahn dar, deren obere Schienen sorgfältig abgehobelt sind. Die Mikrometerschraube sieht man bei *F*, und die von ihr bewegte Mutter ist an der Platte *G* befestigt, welche mit ihr auf den Schienen gleitend sich bewegt. Auf dieser Platte

Fig. 3.



wird das zu theilende Object befestigt; der Grabstichel befindet sich bei *H* und steht fest; das zu theilende Object bewegt sich und bietet nach und nach der Wirkung des Stichels seine verschiedenen Punkte dar. Zur grösseren Bequemlichkeit befindet sich die Kurbel bei *A* und dreht die Schraube mittels zweier Zahnräder, welche unter einem rechten Winkel in einander greifen. Soweit ist die Maschine leicht verständlich; zwei Punkte haben wir jedoch noch hervorzuheben, nämlich die Art, wie der Grabstichel angebracht ist und wie man die Umdrehung der Schraube misst.

Man zieht auf einem Maassstabe, den man theilen will, nicht alle Striche gleich lang, sondern den ersten lang, dann 4 kurze, den 5. von mittlerer Länge, dann wieder 4 kurze und den zehnten mit dem ersten von gleicher Länge. Bei der alten Maschine musste die Hand des Theilenden diese Gruppierung der Linien besorgen; das erforderte Geschicklichkeit und stete Aufmerksamkeit, ohne dass man jedoch im Stande war, die gewünschte Regelmässigkeit zu erreichen. Die neue Einrichtung des Grabstichels jedoch, wie sie Fig. 3 perspectivisch und Fig. 4 vom Profil zeigt, enthält einen besonderen Mechanismus zur Lösung dieser Aufgabe. Man hat in der Hand den kleinen Haken *U* (Fig. 4).

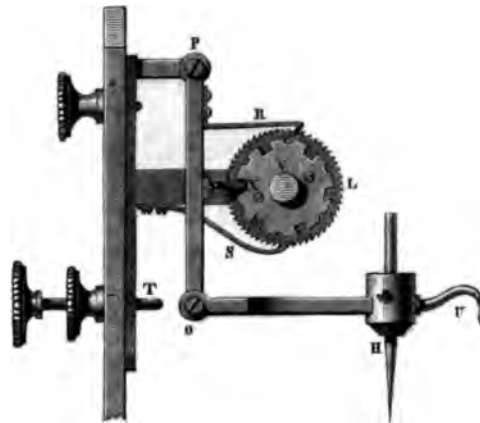
Man zieht denselben anfangs gegen sich hin, indem man ihn ein wenig aufhebt, dann schiebt man ihn leicht niederdrückend zurück. Dabei dringt der Stift ein wenig in das zu theilende Object ein und hinterlässt den Strich. Um nun dem Striche die gewünschte Länge zu geben, genügt es, den Gang des Stichels passend zu hemmen.

Dazu ist über dem Stichel ein Rad *LVX* (Fig. 4) angebracht, welches sich um eine feste Axe drehen kann; das Rad besteht aus zwei kreisrunden

Platten, deren eine *L* auf ihrem Umfange mit Zähnen versehen ist, die andere *VX* aber mit Ausschnitten, welche abwechselnd tiefer und weniger tief sind, getrennt durch Zwischenräume von gleicher Länge, die durch den Umfang der Scheibe gebildet werden. In dem Augenblick nun, wo man den Haken *U* anzieht, bewegt sich ein vorspringendes Stück bei *X* gegen das Rad, dringt in einen tieferen Ausschnitt ein und hemmt auf den Boden desselben aufstossend die Bewegung des Schreibstiftes. Wenn man dann den Stift zurückschiebt, so bewegt er sich so weit, bis er an den Vorsprung *T* stösst, welcher ihm nicht weiter zu gehen erlaubt.

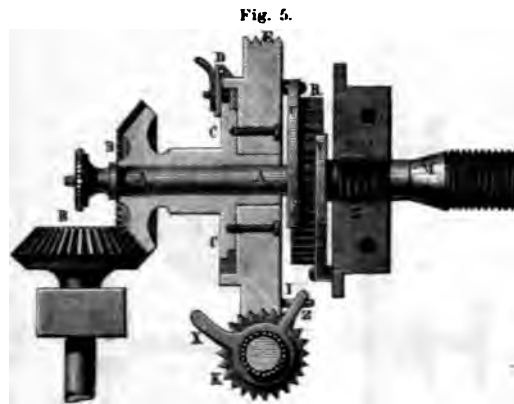
Während dieser Bewegung greift nun aber ein Haken *R* in die Zähne des Rades *J*, dreht es um einen Zahn voran und verschiebt den Ausschnitt des nebenliegenden Rades *V*. Wenn man dann den Stift von neuem anzieht, so trifft er nicht mehr auf einen Ausschnitt, sondern auf den äusseren Umfang des Rades, welcher an Stelle des Ausschnittes getreten ist. Die Bewegung des Stichels geht daher nicht so weit, und der von ihm gemachte Strich wird kürzer. Bei jeder Bewegung geht dieselbe Drehung der Räder vor, und kommt der fünfte Strich, so dringt der Stift *X* wieder in einen, aber weniger tiefen Ausschnitt. Dadurch wird der Strich länger als die vier vorhergehenden, aber kürzer als der erste. Kurz der Arbeiter braucht sich nicht um die Länge der Theile zu bekümmern, sie werden genau gezogen, und jedesmal der fünfte und zehnte sind durch ihre grössere Länge hervorgehoben.

Fig. 4.





Der zweite Mechanismus, den wir noch zu beschreiben haben, hat ebenfalls die Aufgabe, die Arbeit zu vereinfachen. Wenn man mit der alten Maschine theilte, so musste man zu jedem Theilstrich die Schraube um denselben Winkel drehen; das erforderte jedesmal eine kleine Rechenoperation. Man drehte z. B. von dem Theilstrich 0 nach 12, von dem nach 24, 36 u. s. f., alles das erforderte eine gewisse geistige Arbeit, denn es bedurfte immerhin ziemlicher Aufmerksamkeit, um genau den richtigen Theilstrich zu treffen. Alles dieses wird durch den nun zu beschreibenden Mechanismus geleistet.



Die Mikrometerschraube *M* liegt (Fig. 5) in dem Lager *NN*, welches in der Zeichnung offengelegt ist, in der sie sich ohne Verrückung dreht; sie verlängert sich dann durch ein Zahnrad *R* und endigt mit der Axe *A*.

Die Axe *A* ist umgeben von einem Stücke *CCDE*, das die Zeichnung im Durchschnitt zeigt; dieses wird von der Kurbel *A* (Fig. 3) in Bewegung gesetzt durch die beiden Zahnräder *B* und *B'*. An dem Ansatzstück befindet

sich eine grosse und dicke kreisförmige Scheibe, auf deren äusserem Umfang *E* ein Schraubengewinde eingeschnitten ist, dessen Aufgabe gleich hervortreten wird. Es ist klar, dass dieses Stück, welches ohne Reibung auf die Axe *A* aufgesetzt ist, sich umdrehen kann, ohne die Mikrometerschraube *M* zu drehen.

An dem Umfange der Scheibe *E* ist jedoch eine Feder befestigt *UF*, welche mit dem einen Ende in die Zähne des Rades *R* eingreift. Dreht man die Kurbel so, dass die Scheibe *E* sich von *F* gegen *U* hin bewegt, so gleitet die Feder über die Zähne hin, ohne das Rad zu bewegen, also ohne die Schraube zu drehen. Der Haken *V* dient ausserdem noch dazu, das Rad vor einer Drehung in dem Falle zu schützen. Wird jedoch die Scheibe *E* im entgegengesetzten Sinne gedreht, so drückt die Feder gegen einen Zahn des Rades *R*, treibt es voran und ertheilt somit der Schraube eine Drehung von genau gleicher Grösse mit der, welche die Scheibe erhielt. Durch diesen Mechanismus ist also die Mikrometerschraube nur mehr in einem Sinne drehbar: jede Bewegung der Scheibe von *U* gegen *F* hin theilt sich der Schraube mit, jede von *F* gegen *U* gerichtete Drehung lässt sie in Ruhe.

Es befindet sich nun in der Nähe des Kreises *E* ein Zahngetriebe *K*, welches in die auf *E* eingeschnittenen Schraubenwindungen eingreift; wenn die Scheibe einmal vollständig sich dreht, so geht das Trieb um einen Zahn voran, entweder in dem einen oder andern Sinne. An der Scheibe ist ein Vorsprung *I*, an dem Trieb eine Hemmung *Z*, und die Bewegung des Kreises von *F* nach *U* sowie des Triebes ist gehemmt, wenn der Vorsprung *I* und die Hemmung *Z* auf einander treffen. Man beginnt nun damit *I* und *Z* in Berührung zu bringen: ist das geschehen, so zieht man auf dem zu

theilenden Object den ersten Strich. Darauf dreht man die Scheibe *E* im entgegengesetzten Sinne und dreht so die Schraube; das Zahngetriebe *K* dreht sich dann in der Richtung von *X* nach *Z*, und nach einiger Zeit trifft ein Ansatzstück *D* an der Scheibe mit der zweiten Hemmung *X* des Triebes zusammen. Dadurch ist nun die Bewegung wieder gehemmt, und die Schraube hat je nach der Stellung der beiden Hemmsysteme eine genau bestimmte Drehung zurückgelegt. Man zieht dann einen zweiten Theilstrich und dreht währenddes die Kurbel *A* (Fig. 3) im entgegengesetzten Sinne, wodurch die Schraube keine Bewegung erhält, aber die beiden Vorsprünge *I* und *Z* in Berührung gebracht werden, wie sie es anfänglich waren. Man kann dann wieder zurückdrehen, einen Theilstrich machen und so fort, ohne die Umdrehung gemessen zu haben. Was also vorhin grosser Aufmerksamkeit bedurfte, das rechtzeitige Anhalten der Schrauben, das bewirkt hier die Maschine selbst. Fügen wir noch hinzu, dass die Hemmungen *I* und *Z* unveränderlich fest, die beiden anderen *X* und *D* verstellbar sind, und dass eine Theilung auf dem Kreise *CC*, an welchem der Stift *D* befestigt ist, den Theil der Umdrehung bestimmt, nach dem die Hemmungen wieder auf einander treffen, so ist es klar, dass man die Theilstriche in beliebiger Entfernung an dem zu theilenden Object anbringen kann.

Ohne auf die vielfachen Anwendungen der Theilmaschine einzugehen, kommen wir jetzt wieder zu der Aufgabe zurück, welche uns veranlasste, sie zu beschreiben. Wir haben einen metallnen Maassstab von einem Meter Länge und wollen ihn in Millimeter theilen. Wäre die Maschine ganz vollkommen, so wäre die Arbeit sehr leicht; man regelte den Lauf der Hemmungen *D* und *X* derart, dass sie nach einer ganzen Umdrehung auf einander träfen, und die Theilstriche würden genau ein Millimeter von einander entfernt sein. Wäre der erste an dem einen Ende des Meters gezogen, so würde der tausendste das andere Ende treffen. In der Praxis ist das jedoch nicht zu erreichen; es ist daher unsere erste Aufgabe, die Maschine selbst zu untersuchen. Zu dem Ende befestigt man das durch den Comparator verglichene Meter auf der mit der Schraube parallelen beweglichen Platte, bringt über demselben ein mit Fadenkreuz versehenes Mikroskop an und stellt den Stichel genau auf das Ende des Meter ein. Darauf setzt man die Maschine in Gang und bestimmt die Anzahl von Umdrehungen, deren es bedarf, um das andere Ende des Meter zu erreichen. Das lässt sich nicht auf einmal durchführen, weil die Schraube nicht 1<sup>m</sup> lang ist, man theilt deshalb das Meter in mehrere Theile und verfährt in der angegebenen Weise für die einzelnen Theile. Im allgemeinen wird man nun niemals finden, dass genau 1000 Umdrehungen der Schraube einem Meter entsprechen, man hat dann den Werth einer Umdrehung zu berechnen.

Habe man z. B. gefunden, dass bereits 998 Umdrehungen hinreichen, um das andere Ende des Meter zu erreichen, so ist der Werth einer Umdrehung gleich  $\frac{1000}{998}$  Millimeter gleich 1,002<sup>mm</sup>. Will man daher den Maassstab in 1000 Theile theilen, so genügen für den Abstand zweier Theilstriche 0,998 eines Schraubenganges, und man hat daher die Schraube auch nur um diesen Theil eines Schraubenganges zu drehen. In dem Falle ist man sicher, dass der tausendste Theilstrich das andere Ende des Meter erreicht, und dass der Abstand zweier Theilstriche bis auf geringe

Ungleichheiten in der Höhe der einzelnen Schraubengänge genau  $1^{\text{mm}}$  beträgt.

Mit Hilfe dieser Maschine sind wir also im Stande Maassstäbe zu irgend welchen Längenmessungen in ganze oder auch halbe Millimeter zu theilen. Das genügt jedoch nicht immer, oft ist es nothwendig, noch die kleinern Unterabtheilungen des Millimeter auszuwerthen. Dazu dient der Nonius.

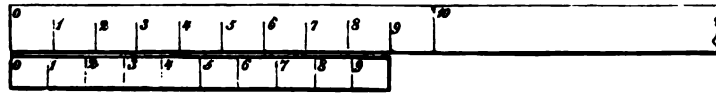
#### Der Nonius.

Nehmen wir einen Maassstab von genau  $9^{\text{mm}}$  Länge und theilen ihn mit der Theilmachine in 10 genau gleiche Theile, legen ihn dann der Länge nach an unser getheiltes Meter, so dass er längs des getheilten Randes verschoben werden kann, so ist dieser einfache Apparat ein Nonius. Da die Länge des Maassstabes  $9^{\text{mm}}$  in 10 Theile getheilt ist, so ist der Werth jedes Theilstriches 0,9 Millimeter. Der Werth der Theilung unseres Metermaasses ist dagegen  $1^{\text{mm}}$ . Der Unterschied beider daher

$$1^{\text{mm}} - 0^{\text{mm}},9 = 0^{\text{mm}},1.$$

Es folgt daraus, dass, wenn die beiden Theilstriche 0 (Fig. 6) zu-

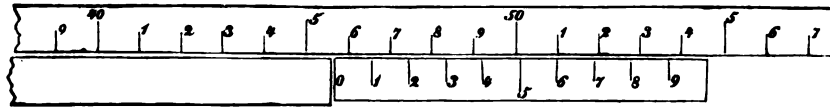
Fig. 6.



sammenfallen, die beiden Theilstriche 1 um  $0,1^{\text{mm}}$  von einander abstehen, die beiden Theilstriche 2 um  $0^{\text{mm}},2$  u. s. f., bis der Theilstrich 10 des Nonius mit dem Theilstrich 9 des Maassstabes zusammentrifft. Aehnlich wird es sein, wenn statt der Theilstriche 0 zwei andere Theilstriche auf einander treffen, von diesen aus werden dann die beiden nächsten zu jeder Seite um 1, die folgenden um 2 Zehntel eines Millimeter differiren.

Nehmen wir nun an, man wolle die Länge eines Objectes mit unserem Metermaass bestimmen, und es zeigte sich, dass es  $4^{\text{cm}} 5^{\text{mm}}$  und einen Bruchtheil eines Millimeter (Fig. 7) lang wäre. Dieser Bruchtheil wird dann mittels des Nonius bestimmt.

Fig. 7.



Zu dem Ende führt man den Nonius, bis er das Ende des zu messenden Objectes berührt, und sucht, welcher Theilstrich des Nonius mit einem des Maassstabes zusammenfällt. In unserer Abbildung ist es der sechste.

Von diesem ausgehend findet man dann, dass die Theilstriche 5, 4, . . . 0 des Nonius um  $0^{\text{mm}},1$   $0^{\text{mm}},2$  . . .  $0^{\text{mm}},6$  hinter denen des Maassstabes zurückbleiben. Der auszuwerthende Bruchtheil ist demnach  $0^{\text{mm}},6$ , sein Werth ist in Zehnthteilen eines Millimeters angegeben durch die Zahl, welche neben dem mit einem des Maassstabes zusammenfallenden Theilstrich steht.

Wir haben bei der Beschreibung des Nonius vorausgesetzt, dass derselbe eine Länge von  $9^{\text{mm}}$  habe und in 10 Theile getheilt sei. Dadurch erhielten wir die Theile des Millimeter in Zehnteln angegeben. Wir können nun ebenso gut die Länge desselben zu  $19^{\text{mm}}$ ,  $29^{\text{mm}}$ ,  $39^{\text{mm}}$  nehmen und diese Länge in 20, 30, 40 Theile theilen; wir erhalten dann Zwanzigstel, Dreissigstel, Vierzigstel eines Millimeter. Wenn man jedoch die Theile zu sehr vervielfältigt, so tritt der Uebelstand ein, dass zur Rechten und Linken der coincidirenden Theilstriche eine Anzahl so wenig von einander abstehender Theilstriche sich findet, dass sie noch zusammenzufallen scheinen, und man daher nicht im Stande ist anzugeben, welche nun eigentlich die coincidirenden Theile sind. Indem man die Theilstriche möglichst fein zieht und und dieselben durch ein Mikroskop betrachtet, kann man zwar die Genauigkeit ziemlich weit, vielleicht bis auf  $0,01$  eines Millimeter bringen; es gibt jedoch immer eine Grenze, welche nicht überschritten werden kann.

Der Nonius kann an allen Theilungen, auch an getheilten Kreisen angebracht werden; dort befindet er sich auf den Alhidaden. Wir werden ihn an allen feineren Messapparaten wiederfinden.

### Das Sphärometer.

Die Mikrometerschraube dient nicht allein dazu Längen zu theilen, sondern sie findet auch ganz besonders Anwendung, wenn es sich darum handelt sehr kleine Abstände zu messen. Es folge hier die Beschreibung eines Apparates, in welchem sie benutzt wird um sehr kleine Höhenunterschiede, zum Beispiel die Dicke von Platten oder Drähten, mit grösster Genauigkeit zu messen, des Sphärometers.

Der Haupttheil dieses Apparates Fig. 8 besteht in einer möglichst genau gearbeiteten Mikrometerschraube, deren Gänge die Höhe von  $0^{\text{mm}},5$  haben. Dieselbe bewegt sich in einer Mutter, welche unten in der Hülse *A* sich befindet. Die Hülse *A* ist in dem Arm *B* unveränderlich befestigt und wird mittels desselben von dem Stativ *SSG* getragen, welches seinerseits auf dem Dreifuss *D D* aufgesetzt ist. Um durch dieses Stativ den Apparat nicht einseitig zu belasten, ist bei *G* an der anderen Seite des Punktes mit welchem der Rahmen *S S* auf den Dreifuss gesetzt ist, ein Gegengewicht angebracht. Der Dreifuss ist mit Stellschrauben versehen, um den Apparat vertikal zu stellen. In der Büchse *A* befindet sich ein oben hervorragender Stahlstift *J* welcher mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Wird die Mikrometerschraube in dem einen Sinne gedreht, so hebt sie den Stift *J* empor, wird sie in dem andern Sinne gedreht, so sinkt der Stift *J* durch sein eigenes Gewicht herab. Auf den Stift *J* kann ein kleiner Stahlteller aufgeschraubt werden oder eine ziemlich scharfe Schneide, wie sie die Figur an dem Stifte *J'* zeigt. Gerade über dem Stifte *J* ist durch den horizontalen Arm *SH* ein unten mit einer Schneide versehener Stift *J'* geführt, welcher in der Durchbohrung des Armes mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Auf der obren Spitze dieses Stiftes ruht die um eine bei *a* befestigte Axe drehbare Libelle *L*. Damit die Libelle auf die Spitze des Stiftes *J'* nur einen sehr leisen Druck ausübt, und so der Stift *J'* auf den leisesten Druck von untenher emporsteigt, ist auf der andern Seite der Axe *a* das Gegengewicht *c* angebracht.

Durch Heben oder Senken des Stiftes  $J'$  der mit seiner Schneide auf dem Teller oder der Schneide des untern Stiftes  $J$  ruht, kann man somit die eine Seite der Libelle heben oder senken, also immer dafür sorgen, dass die Libelle genau horizontal steht. Diese horizontale Stellung der Libelle ist das Hilfsmittel um mit dem Apparate messen zu können.

Die Messung selbst geschieht an der unten am Rahmen  $S$  angebrachten Millimetertheilung  $T$  und an der Scheibe  $Z$ , welche auf ihrem Rande eine



Theilung trägt, welche den Umfang der Scheibe in 500 gleiche Theile theilt. Diese Scheibe ist unten an die Mikrometerschraube angeschraubt, so dass die Axe der Schraubenspindel gleichzeitig die Axe der Kreisscheibe ist. Wie erwähnt, ist die Höhe eines Schraubenganges der Mikrometerschraube ein halbes Millimeter, es bedarf daher zwei Umdrehungen der Schraube, um die Scheibe an der Theilung  $1^{\text{mm}}$  zu heben. Die Theilung  $T$  ist an dem Apparate so befestigt, dass jedesmal, wenn die Scheibe einen Theilstrich passirt, der Nullpunkt der Theilung auf der Scheibe an dem Rande der Platte  $T$  vorübergeht. Die auf die Theilung  $T$  gerichtete Lupe  $l$  hat den Zweck

genau zu erkennen, welche Stellung zwischen den Theilstrichen die Scheibe hat.

Aus der Beschreibung des Apparates ergibt sich leicht, wie bei den Messungen verfahren werden muss. Setzen wir voraus, es solle die Dicke einer planparallelen Glasplatte gemessen werden. Man schraubt auf die Spitze des Stiftes  $J$  den kleinen Stahlteller und schraubt dann die Mikrometerschraube so hoch empor, dass die Libelle genau horizontal steht. Man liest dann die Stellung der Scheibe  $Z$  an der Theilung  $T$  ab. Befinde sich der Rand der Scheibe zwischen den Theilstrichen 2 und 3, aber näher an 2, und sei der Theilstrich 325 der auf der Scheibe angebrachten Theilung an dem Rande der Platte  $T$ . Da die Höhe der Schraubengänge  $0,5^{\text{mm}}$  ist, so entspricht der Drehung der Schraube um einen Theilstrich ein Heben oder Senken der Mikrometerschraube um  $0,001^{\text{mm}}$ . Die soeben abgelesene Stellung der Scheibe gibt somit an, dass, wenn die Libelle genau horizontal steht, und zwischen der Schneide  $J'$  und dem Teller  $J$  nichts zwischen geschoben ist, dass dann die Scheibe sich  $2,325^{\text{mm}}$  unter dem Nullpunkte der Theilung  $T$  befindet.

Nun wird die Mikrometerschraube und damit der Teller  $J$  gesenkt

soweit, dass man die Glasplatte auf denselben legen kann. Ist das geschehen, so wird die Mikrometerschraube wieder gehoben, bis die Schneide  $J'$  von der Glasplatte berührt wird, und dann die Mikrometerschraube wieder vorsichtig weiter gedreht, bis die Libelle wieder genau horizontal steht. Diese Beobachtung beweist dann, dass die Schneide  $J'$  wieder genau dieselbe Höhe hat wie vorhin, die nach oben gewandte Fläche der Glasplatte ist also genau in der Lage, in der vorhin der Teller  $J$  war, der Teller  $J$  und damit die Scheibe  $Z$  ist also genau um die Dicke der Glasplatte niedriger wie vorhin. Wir erhalten also die Dicke der Glasplatte, wenn wir von der jetzt beobachteten Stellung der Scheibe die vorher bestimmte Stellung abziehen. Befinde sich die Scheibe jetzt zwischen dem Theilstriche 3 und 4, aber näher bei 4, und sei der Theilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte  $T$ . Da die Scheibe näher bei 4 als bei 3 ist, so folgt, dass sie mehr als  $3,5^{\text{mm}}$  tiefer ist als der Nullpunkt der Theilung, und zwar, da der Theilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte  $T$  ist, um  $0,438^{\text{mm}}$ . Die jetzige Stellung der Scheibe ist also 3,988. Hiervon den vorhin bestimmten Werth 2,325 abgezogen gibt  $1,613^{\text{mm}}$  als Dicke der Glasplatte. Zur Erreichung grösserer Genauigkeit wird man die Messung einige male wiederholen. Da man die Libelle nicht absolut genau einzustellen im Stande ist, so wird man bei den verschiedenen Messungen einige Theilstriche Differenz finden; man nimmt dann das Mittel aus den gefundenen Zahlen.

Zur Messung von Drähten wendet man an Stelle des Tellers auf dem untereren Stift die Schneide an; man schiebt dann ein kleines Stückchen des zu untersuchenden Drahtes zwischen die Schneiden, indem man im übrigen bei der Messung ganz in der angegebenen Weise verfährt.<sup>1)</sup>

#### Das Kathetometer.

Bei physikalischen Untersuchungen findet man sich oft in die Nothwendigkeit versetzt, kleinere oder grössere Höhenunterschiede zu messen, besonders von Flüssigkeitssäulen, ohne dass man an dieselben direkt einen Maassstab anlegen kann.

Zu diesem Zwecke haben zuerst die französischen Physiker Dulong und Petit einen besondern Apparat construirt und bei ihren Versuchen über die Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme zu Messungen benutzt. Später wurde dieser Apparat von Pouillet vergrössert und Kathetometer genannt.

Das in Fig. 9 und 10 abgebildete Kathetometer ist nach der ihm von Staudinger gegebenen Form construirt, nur die Anbringung des Fernrohrs Fig. 10 weicht von der von Staudinger gewählten Anordnung etwas ab. Das der Beschreibung zu Grunde liegende Exemplar ist vom Mechaniker Schubart in Gent verfertigt.

Die wesentlichen Bestandtheile des Apparates sind ein verticaler Maassstab, an dem ein horizontales Fernrohr auf und abgeschoben werden kann. Man stellt zu den Messungen das Fernrohr auf die Kuppen der beiden

<sup>1)</sup> Sphärometer der beschriebenen Form sind in vortrefflicher Ausführung aus der Werkstatt von *Hermann & Pfister* in Bern zu beziehen.

Flüssigkeitssäulen ein, und die beiden Stellungen des Fernrohres am Maassstab geben die Höhendifferenz der beiden Flüssigkeitssäulen.

Fig. 9.



So vorzüglich der Apparat ist, wenn er richtig geordnet ist, so unrichtige Resultate kann er andernfalls liefern, deshalb wird es gut sein, ihn etwas genauer zu beschreiben.

Auf einem massiven eisernen, mit drei Stellschrauben *SS* versehenen Fuss *F* (Fig. 9) steht eine verticale stählerne Axe; sie ist bei *L* sichtbar, wo die Messinghülle in der Zeichnung fortgenommen ist. Um diese kann sich ein hohler Messingcylinder *HH'* frei drehen. Um die Drehung leicht zu machen, ist derselbe oben bei *H* von einer stählernen Schraube durchsetzt, welche oben auf der stählernen Axe aufsteht; durch gelindes Anziehen der Schraube kann man bewirken, dass die Reibung an dem unteren Ende der Hülse, wo sie auf einen den Fuss umgebenden Reif sich stützt, sehr gering ist, indem die Hülse dann fast ganz von der Schraube getragen wird. An der Hülse ist nun einerseits der Maassstab *AB* der Axe genau parallel, an der anderen Seite ein den Maassstab als Gegengewicht balancirender massiver Messingcylinder *GG'* befestigt. Der Maassstab besteht aus einem Prisma von Gusstahl, dessen Seiten in einer Breite von 8<sup>mm</sup> möglichst glatt gehobelt, dann aber stark ausgehöhlt sind. Der Maassstab ist wie das Gegengewicht oben und unten an der Hülse be-

festigt. Die Basis des Prismas, die vordere Seite ist ebenfalls glatt abgehobelt. In der Mitte derselben ist ein Silberstreifen eingesetzt, von 1<sup>m</sup>,1 Länge und 8<sup>mm</sup> Breite. Derselbe ist 1<sup>m</sup> lang in Millimeter getheilt.

Auf den glattgehobelten und geschliffenen Seitenflächen des Prismas gleitet ein Schlitten *de*, von welchem Fig. 10 eine vergrösserte Abbildung gibt, auf und ab, welcher das Fernrohr mit Zubehör trägt. Der Schlitten

besteht aus zwei Theilen, welche in der Zeichnung mit *d* und *e* bezeichnet sind. Derselbe gleitet mit sanfter Reibung, die durch etwas Oel noch vermindert wird, an dem Prisma ganz regelmässig und ohne Schwankung auf und ab.

Der obere Theil des Schlittens *d* ruht mit einem kleinen Stahlfortsatz auf dem obern Ende der im untern Theile des Schlittens in einer Muttergehenden Mikrometerschraube *m* und wird durch eine elastische Feder von Stahl stets fest an dasselbe angedrückt.

Durch eine Klemmschraube *q*, welche ein der Seite des Prismas angepasstes Messingstück gegen das Prisma drückt, kann man den Schlitten festhalten. Mittels der Mikrometerschraube *m* kann dann der obere Theil des Schlittens noch etwas gehoben oder gesenkt werden, um eine möglichst feine Einstellung des Fernrohrs auf das Beobachtungsobject zu erzielen.

Im Schlitten ist ein abgeschrägter Ausschnitt über dem Buchstaben *d*, dessen eine Seite mit einem Nonius versehen ist, der gerade an der Theilung des Silberstreifens anliegt. Die Stellung des Schlittens an der Skala liest man durch eine Lupe *e* (Fig. 9) ab; der Nonius gibt direct  $0,02^{\text{mm}}$ .

Das Fernrohr *CD* ruht in den genau cylindrisch ausgedrehten Gabeln *r* und *r'* und wird dort mit gelindem Druck durch zwei zur Seite zu schlagende Schieber festgelegt. Dort, wo das Fernrohr auf den Gabeln aufliegt, hat dasselbe zwei genau cylindrisch abgedrehte Verdickungen. Auf diesen Verdickungen ruhen die unten genau ebenso cylindrisch ausgedrehten Füße der Libelle *N*, welche durch dieselben Schieber, die das Fernrohr festlegen, durch einen schwachen seitlichen Druck festgehalten werden.

Die beiden das Fernrohr tragenden Gabeln sind durch eine schmale Messingplatte mit einander verbunden, welche von der in dem Schlitten befestigten und dort gerade vor der Theilung befindlichen Axe *a* getragen wird und um diese Axe in einer der Ebene der Theilung parallelen Ebene drehbar ist. Diese Drehung, durch welche das Ende *C* des Fernrohres etwas gehoben oder gesenkt werden kann, wird durch die kleine Schraubenmutter *s* bewirkt. Zu dem Zwecke ist bei *b* nahe dem einen Ende der das Fernrohr tragenden Platte *bc* an diese eine Mikrometerschraube *bs* angesetzt, welche durch eine Durchbohrung des an dem Schlitten unveränderlich fest verbundenen Armes *A* hindurchgeführt ist. Schraubt man die Mutter *s* in dem einen Sinne, so wird dadurch die Mikrometerschraube und damit das Ende *C* des Fernrohres herabgezogen; schraubt man die Mutter in dem andern Sinne, so lässt sie die Mikrometerschraube eine Strecke frei,

Fig. 10.





und eine Feder  $f$  hebt dann die Schraube und damit das Ende  $C$  des Fernrohrs, bis die Mutter  $s$  wieder an der untern Fläche des Armes  $A$  anliegt. Der Zweck dieser Vorrichtung wird sofort hervortreten.

Nach der Beschreibung der Einrichtung unseres Messapparates haben wir noch einiges zu bemerken über die Art, wie er zu reguliren ist.

Das Fernrohr ist ein optischer Apparat, den wir später zu beschreiben haben. Hier müssen wir nur erwähnen, das es in seinem Innern 2 unter einem rechten Winkel gekreuzte Spinnfäden besitzt, ein so genanntes Fadenkreuz, welches man stets zugleich mit dem Object, auf welches das Fernrohr eingestellt ist, genau sieht. Man kann leicht bewirken, dass der Kreuzungspunkt der Fäden den zu fixirenden Punkt deckt. Es gibt nun in jedem Fernrohr eine festbestimmte Linie, die optische Axe, welche durch den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes und durch den Mittelpunkt des Objectives geht. Wenn nun der Mittelpunkt des Fadenkreuzes den zu fixirenden Punkt deckt, so kann man sicher sein, dass der fixirte Punkt in der Verlängerung der optischen Axe liegt.

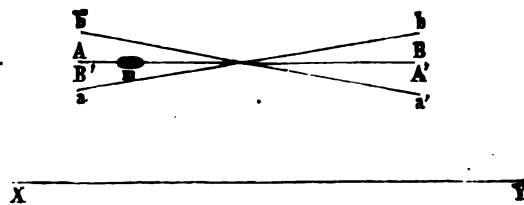
Die Gabel, in welcher das Fernrohr liegt, sowie das Fernrohr selbst, sind genau cylindrisch gearbeitet. Dreht man daher das Fernrohr in seinen Lagern um sich selbst, so kann seine geometrische Axe nicht geändert werden, es darf aber auch seine optische Axe dadurch nicht geändert werden, d. h. sie muss genau mit der geometrischen Axe zusammenfallen. Sieht man bei der Drehung des Fernrohrs nach und nach verschiedene Punkte in den Mittelpunkt des Fadenkreuzes fallen, so ist das nicht der Fall, dann muss man die optische Axe corrigiren, d. h. das Fadenkreuz so lange reguliren, bis bei einer Drehung des Fernrohrs um sich selbst stets derselbe Punkt von seinem Kreuzungspunkte bedeckt wird. Will man dann die Lage der optischen Axe corrigiren, so hat man nur die der geometrischen zu reguliren, da dann beide zusammenfallen.

Nachdem also die Fernrohraxe corrigirt ist, hat man vor Gebrauch des Kathometers

- 1) dafür zu sorgen, dass die Libelle der Axe des Fernrohrs parallel ist;
- 2) die Axe des Fernrohrs genau senkrecht zu dem Maassstab zu stellen;
- 3) die Rotationsaxe des Kathometers und damit den Maassstab  $AB$  vertical zu stellen.

Um die erste Bedingung zu prüfen ist die Libelle auf die cylindrisch abgedrehten Verdickungen des Fernrohrs mit den ebenso genau ausgedrehten Füßen einfach aufgesetzt, so dass sie abgenommen und wieder in umgekehrter Lage hingestellt werden kann, so dass das vorher nach  $D$  zeigende Ende jetzt nach  $C$  zeigt, und umgekehrt. Sei nun  $XY$  die Fernrohraxe und stelle  $AB$  Fig 11 die Libelle vor, deren Luftblase bei  $m$  stehe. Wird nun

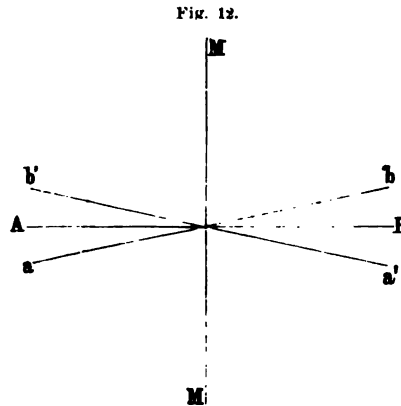
Fig. 11.



die Libelle in der angegebenen Weise umgesetzt, und ist sie der Fernrohraxe in der That parallel, so kehrt sich dieselbe bloß um, in ihrer zweiten Lage die erste deckend; sie muss wieder in  $A' B'$  liegen. Die Luftblase muss dann

wieder genau liegen wie früher, sie darf gegen den Beobachter ihre Lage nicht geändert haben. Hatte dagegen die Libelle die Lage  $ab$ , so hat sie nach der Umstellung die Lage  $a' b'$ , und die Luftblase würde ihre Lage geändert haben. Durch Drehung einer Schraube, welche das eine Ende der Libelle in ihren Lagern hebt und senkt, wird sie in dem letztern Falle corrigirt, bis eine Umstellung die Lage der Luftblase nicht mehr ändert.

Um die zweite Bedingung zu prüfen, hat man dem Instrument nur eine Drehung um  $180^\circ$  zu ertheilen. Ist das Fernrohr  $AB$  Fig. 12 senkrecht zum Maassstab  $MM$ , so ist es nach der Drehung sich selbst parallel, es muss also die Luftblase in Bezug auf den Beobachter dieselbe Lage beibehalten haben. Steht das Fernrohr nicht senkrecht, sondern etwa parallel  $ab$ , so hat es nach der Drehung die Lage  $a' b'$ , und die Luftblase der Libelle muss ihre Stellung geändert haben. Ist das der Fall, so wird durch Drehung der Schraubenmutter  $s$  das eine Ende des Fernrohrs soviel gehoben oder gesenkt, bis die Drehung des Instrumentes um  $180^\circ$  die Stellung der Libellenblase nicht mehr ändert.



Diese Correction genügt es nicht ein für allemal vorzunehmen; denn auch bei den bestgearbeiteten Apparaten kann der Schlitten nicht immer vollkommen in der gleichen Weise an das Prisma angepresst werden, und deshalb ist das Fernrohr nicht an allen Stellen sich genau parallel. Hat man deshalb in gleich zu beschreibender Weise den Maassstab vertical gestellt, muss man, wenn die Lage der Luftblase bei irgend einer Stellung des Schlittens anzeigt, dass das Fernrohr nicht mehr genau horizontal steht, durch Drehung der Mutter  $s$  das Fernrohr in die horizontale Lage zurückführen.

Um die dritte Regulirung, das Verticalstellen der Rotationsaxe des Instrumentes vorzunehmen, stellt man das Fernrohr der Verbindungslinie zweier Stellschrauben des Fusses parallel, und dreht eine oder beide Stellschrauben so lange, bis die Blase der Libelle in der Mitte steht; darauf dreht man den Apparat um  $90^\circ$  und bringt durch Drehung der dritten Schraube die Blase ebenfalls in die Mitte. Hat man auf diese Weise die Fernrohraxe in zwei auf einander senkrechten Richtungen horizontal gestellt, so ist sie es in allen, und die zur Fernrohraxe senkrechte Rotationsaxe und somit auch der Maassstab des Apparates stehen vertical.

#### Der Theodolith.

Ausser der Abmessung von Längen haben wir, besonders in dem optischen Theile der Physik, häufig genaue Winkelmessungen auszuführen. Dieselben werden mittelst des Theodolithen angestellt. Der Theodolith ist ein in geringerer oder grösserer Vollkommenheit schon sehr lange bekanntes Winkelmessinstrument, dessen erster Verfertiger ebenso unbekannt ist als

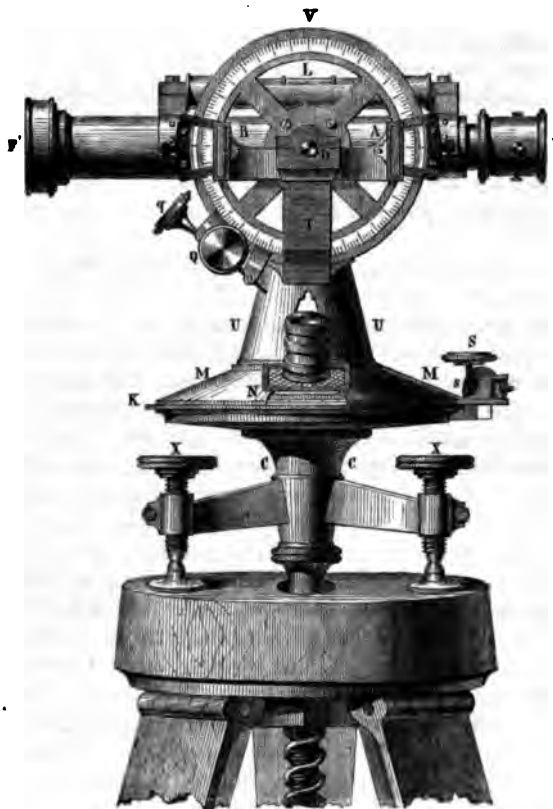
die eigentliche Bedeutung des Namens. Man hat zwar seinen Namen aus dem Griechischen herleiten wollen, doch ist die Ableitung ebenso unbestimmt als gezwungen.

Der Theodolith ist ein Winkelmessinstrument, welches aus zwei getheilten Kreisen, einem horizontalen und einem verticalen, mit Fernrohr besteht.

Nachfolgender Zeichnung (Fig. 13) und Beschreibung liegt ein Exemplar aus der Werkstätte mathematischer Apparate von Breithaupt in Kassel zu Grunde.

Auf einem massiven, mit Stellschrauben *X* versehenen Dreifuss *CC'* befindet sich ein Kreis von Messing *K*, der mittels Speichen in dem Mittelstücke des Dreifusses befestigt ist. Auf dem Kreise ist ein silberner, mit einer genauen Kreistheilung versehener Streifen eingelegt. Mit diesem Kreise

Fig. 13.



in gleicher Ebene und genau centrirt liegt ein kleiner Kreis, dessen äusserer Umfang genau den innern Rand des Kreises *K* berührt. Derselbe ist um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, im Mittelpunkt des Dreifusses genau eingeschlossene Axe, mit welcher er durch Speichen verbunden ist, drehbar. Der Kreis heisst der Alhidadenkreis. An den beiden Enden eines Durchmessers besitzt der Alhidadenkreis Nonien *N*, welche je nach der Theilung

des Kreises halbe Minuten oder noch kleinere Bruchtheile von einem Grade geben. An demselben Kreise sind über den Nonien kleine Mikroskope befestigt zur genaueren Ablesung. Der Alhidadenkreis kann mittels der Klemmschraube *S* festgestellt werden, an der zur feineren Einstellung des Kreises die Mikrometerschraube *s* angebracht ist.

An einer Säule *UU*, welche auf dem Alhidadenkreis festgeschraubt ist, befindet sich das Fernrohr *FF'*. Die optische Axe des Fernrohrs wird von der mit der Axe des Alhidadenkreises zusammenfallenden Drehungsaxe der Säule *U* geschnitten. Das Fernrohr selbst ist an einer auf seiner optischen Axe senkrechten Axe *D* befestigt, welche in zwei Zapfenlagern drehbar eingelegt ist. Die Axe *D* ist genau dem Horizontalkreis parallel. Auf dem Fernrohr befindet sich eine Libelle *L*. An dem Fernrohr in unveränderlich fester Verbindung und auf der Drehungsaxe *D* desselben senkrecht ist der Verticalkreis *V* angebracht. Zu beiden Seiten des Kreises, an den Enden eines Durchmessers, befinden sich feste, nicht drehbare Nonien *A* und *B*. Den Nullpunkten der Nonien entsprechend sind auf der Theilung des Verticalkreises zwei Nullpunkte, von denen aus die Theilung nach beiden Seiten von  $0-90^\circ$  fortzählt. Die optische Axe des Fernrohrs muss mit dem durch die Nullpunkte angegebenen Durchmesser des Verticalkreises zusammenfallen. Dreht man Fernrohr sammt Kreis, so liest man an den Nonien die Grösse der Drehung ab. Der Verticalkreis kann durch die Klemmschraube *Q* festgestellt und mittels der an dieser befestigten Mikrometerschraube *q* feiner eingestellt werden.

Der ganze Apparat steht auf einem massiven Stativ, an welchem er mittels einer Schraube und einer Spiralfeder befestigt ist.

Will man nun mittels des Theodolithen z. B. die Winkeldistanz zweier in einer Horizontalebene befindlicher Punkte nehmen, so hat man das Instrument zunächst in ähnlicher Weise wie das Kathetometer zu reguliren, und zu prüfen, ob die Libelle parallel dem Fernrohr ist, ob die Drehaxe des Fernrohrs zur optischen Axe senkrecht und mit dieser in einer zur Axe des Alhidadenkreises senkrechten Ebene liegt, und dann, ob die Drehungsaxe des Alhidadenkreises senkrecht zum Horizontalkreis ist. Dann hat man den Horizontalkreis horizontal und damit die Rotationsaxe des Verticalkreises vertical zu stellen<sup>1)</sup>.

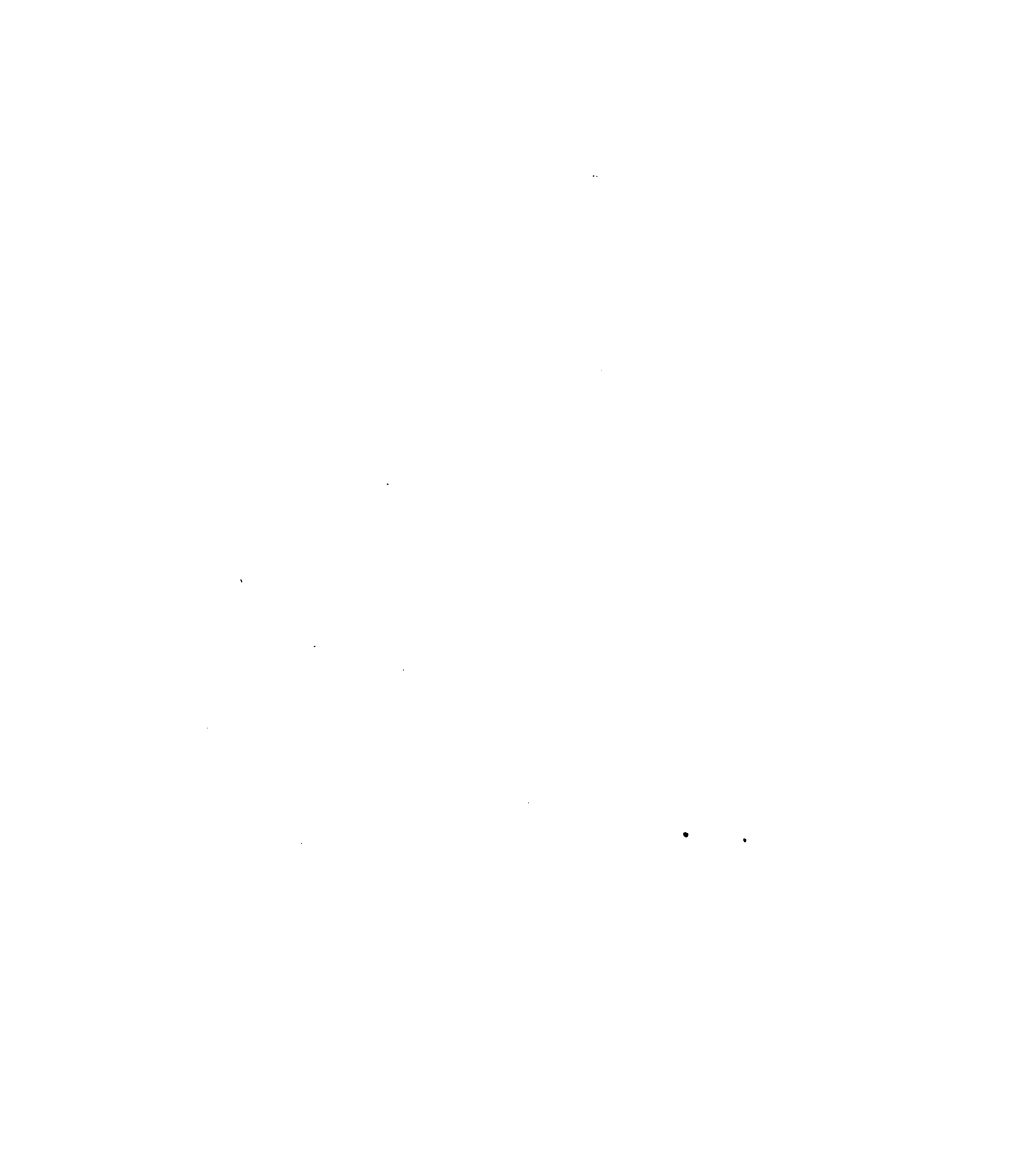
Hat man so das Instrument vorbereitet, so stellt man das Fernrohr zunächst auf den einen Punkt ein und merkt den Stand der Nonien am Horizontalkreise. Darauf verfährt man ebenso mit dem andern Punkte, und die Differenz der Nonienangaben gibt die gesuchte Winkeldistanz. Die beiden Nonien *N* geben jedesmal zwei Ablesungen, also auch zwei sich controlirende Werthe, die zugleich zum Eliminiren etwaiger Theilungsfehler dienen.

---

Ausser Längen und Winkel sind es nun vorzüglich noch Gewichte, welche wir in der Physik zu messen haben. Dieses geschieht mit der Wage, deren Beschreibung und Gebrauch wir aber erst an einer andern Stelle vorführen können.

---

<sup>1)</sup> Eine vorzügliche Zusammenstellung aller Correctionen am Theodolithen gibt Bauernfeind, „Elemente der Vermessungskunde“ Bd. I.



## Erster Abschnitt.

### Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

#### Erstes Kapitel.

#### Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

##### §. 1.

**Bewegung.** Die erste Thatsache, welche uns bei einer Betrachtung der Aussenwelt auffällt, ist die, dass einige Körper ihren Ort im Raume, soweit wir es beurtheilen können, stets behaupten, andere ihn verändern. Von den erstern sagen wir, sie seien in Ruhe, von den letztern, sie seien in Bewegung. Die Bewegungen der bewegten Körper unterscheiden wir sehr bald von einander, indem die einen in gleicher Zeit einen grössern Weg, die andern einen kleinern Weg zurücklegen. Den ersteren legen wir dann eine grössere, den letzteren eine kleinere Geschwindigkeit bei. Das Wort Geschwindigkeit bezeichnet also das Verhältniss des durchlaufenen Weges zu der Zeit, in welcher er durchlaufen ist.

Wir nehmen noch einen andern Unterschied in der Bewegung der Körper wahr. Einige legen in derselben Zeit  $t$  auch immer denselben Weg  $s$  zurück; bei diesen ist also das Verhältniss  $\frac{s}{t}$  immer dasselbe, wie gross oder wie klein im übrigen der Werth von  $s$  oder von  $t$  sein mag, oder an welcher Stelle der Bahn des Körpers wir auch das Verhältniss zwischen dem in einer gewissen Zeit durchlaufenen Wege und dieser Zeit bilden mögen; sie bewegen sich mit constanter Geschwindigkeit. Die Bewegung nennt man eine gleichförmige. Bei dieser Bewegung misst man die Geschwindigkeit eben durch das constante Verhältniss

$$c = \frac{s}{t}$$

oder, wenn wir die Bewegung des Körpers nicht von ihrem Ausgangspunkte verfolgen konnten, sondern sehen, dass er zu irgend einer Zeit  $t$  den Weg  $s$ , zur Zeit  $t_1$  den Weg  $s_1$  zurückgelegt hat, durch das immer gleiche Verhältniss

$$c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t},$$

indem dieser Quotient uns die Länge des Weges gibt, welche der Körper in der Zeiteinheit, als welche wir immer die Sekunde wählen, zurücklegt. Daraus folgt dann, dass der Raum  $s$ , welchen der Körper in irgend einer Zeit  $t$  zurücklegt, gegeben ist durch den Ausdruck

$$s = c \cdot t.$$

Andere Körper sehen wir sich ungleichförmig bewegen, das heisst wir sehen, dass sie in gleichen Zeiten verschiedene Wege zurücklegen. Bilden wir dann den Quotienten

$$c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

indem wir von verschiedenen Punkten  $s$  der Bahn ausgehen, welche zur Zeit  $t$  zurückgelegt sind, und zu andern Punkten  $s_1$  übergehen, welche in der Zeit  $t_1 - t$  erreicht sind, so finden wir denselben verschieden. Für diese Körper ist daher die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke verschieden, sie lässt sich mithin nicht definiren als das Verhältniss des in der Zeit  $t$  zurückgelegten Raumes  $s$  zu eben dieser Zeit  $t$ . Man kann überhaupt von einer bestimmten Geschwindigkeit eines solchen Körpers nur für einen bestimmten Augenblick sprechen und nennt dann die Geschwindigkeit des Körpers jene, mit welcher er sich nach der vorherigen Definition bewegen würde, wenn er sich von dem bestimmten Augenblicke an mit ungeänderter gleichförmiger Bewegung fortbewegen würde. Wir können diese Geschwindigkeit in folgender Weise erhalten.

Bilden wir den vorher angegebenen Quotienten aus dem Stücke  $s_1 - s$  der Bahn des Körpers, welches der Körper in der Zeit  $t_1 - t$  zurückgelegt hat, so gibt uns derselbe, den wir, um ihn von der constanten Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung zu unterscheiden, jetzt mit  $v$  bezeichnen wollen, oder

$$v = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Körpers innerhalb der Zeit  $t_1 - t$ ; das heisst hätte der Körper während dieser ganzen Zeit die so bestimmte Geschwindigkeit  $v$  gehabt, so würde der Körper in derselben Zeit denselben Weg zurückgelegt haben. Benutzen wir nun zur Bildung dieses Quotienten immer kleinere Stücke  $s_1 - s$  der Bahn, die in immer kleinern Zeiten  $t_1 - t$  zurückgelegt werden, so nähert sich der Werth dieses Quotienten immer mehr einer bestimmten Grenze, welche erreicht wird wenn wir  $s_1 - s$  und damit  $t_1 - t$  unendlich klein, das heisst kleiner als jede angebbare Grösse voraussetzen. Der Quotient aus diesen beiden unendlich kleinen Grössen, die man, um sie als solche zu kennzeichnen, mit  $ds$  und  $dt$  bezeichnet, oder

$$v = \frac{ds}{dt}$$

ist dann die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit  $t$  in dem Momente, von dem ab die kleine Zeit  $dt$  beginnt. In Wirklichkeit gibt uns dieser Quotient die mittlere Geschwindigkeit innerhalb der zur Zeit  $t$  beginnenden unendlich kleinen Zeit  $dt$ ; aber denken wir uns die Zeit  $dt$  nur hinreichend klein, so können wir ohne Ungenauigkeit annehmen, dass der Körper sich während dieser mit constanter Geschwindigkeit bewegt habe, und dass die Aenderung

der Geschwindigkeit beim Uebergang in das folgende Zeitelement eintrete. Dann aber gibt uns jener Quotient das Verhältniss des zurückgelegten Weges zur Zeit, in der er zurückgelegt ist, also die Geschwindigkeit, wie wir sie vorher definirt haben.

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Zeitmoment. Das Verhältniss der Geschwindigkeitsänderung zur Zeit, in welcher diese Geschwindigkeitsänderung eintritt, nennt man die Beschleunigung. Nimmt die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um die gleiche Grösse zu oder ab, so ist die Beschleunigung einfach gleich dem Quotienten aus der in der Zeit  $t$  eingetretenen Zunahme oder Abnahme und dieser Zeit  $t$ . Oder ist im Anfange der Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v$ , am Ende derselben  $v_1$ , so ist

$$g = \frac{v_1 - v}{t}$$

die Beschleunigung bei dieser Bewegung. Eine solche Bewegung, bei welcher in derselben Zeit immer dieselbe Geschwindigkeitsänderung eintritt, nennt man eine gleichmässig beschleunigte oder gleichmässig verzögerte, je nachdem  $v_1$  grösser oder kleiner ist als  $v$ ,  $g$  also positiv oder negativ ist. Die Beschleunigung gibt uns in diesem Falle die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, sie ist während der Bewegung constant.

Ist die Zunahme der Geschwindigkeit nicht zu allen Zeiten dieselbe, die Beschleunigung also nicht constant, so nennt man die Bewegung eine ungleichmässig geänderte. Um bei einer solchen Bewegung die in jedem Augenblicke stattfindende Beschleunigung zu erhalten, sei  $dv$  die Geschwindigkeitsänderung in der sehr kleinen Zeit  $dt$ ; dann ist  $\frac{dv}{dt}$  die mittlere Beschleunigung während dieser Zeit, d. h. wenn der Körper innerhalb des Zeitraums  $dt$  die durch diesen Quotienten gemessene Beschleunigung gehabt hätte, so würde seine Geschwindigkeitsänderung in der Zeit  $dt$  die wirklich stattgefundene  $dv$  gewesen sein. Auch dieser Quotient nähert sich einer bestimmten Grenze, wenn  $dt$  immer kleiner wird, und der Grenzwert desselben, wenn wir uns  $dt$  unendlich klein denken, ist die Beschleunigung in dem Augenblicke  $t$  der Bewegung, für welchen dieser Quotient gebildet ist. Er gibt uns die Geschwindigkeitsänderung in einer Sekunde, wenn innerhalb derselben die Geschwindigkeitsänderung in jedem Zeitelemente  $dt$  dieselbe wie in dem betrachteten gewesen wäre.

## §. 2.

**Kräfte.** Die Erfahrung zeigt uns, dass die Materie beweglich ist, sie zeigt uns aber zugleich, dass kein in Ruhe befindlicher Körper seinen Ruhezustand ohne eine äussere Veranlassung, ohne einen äussern Antrieb verlässt. Ist ein Körper aber einmal in Bewegung, so zeigt uns die Erfahrung weiter, dass derselbe die ihm einmal gegebene Bewegung beibehält, bis sie wieder durch äussere Veranlassung, etwa einen dem frühern Antrieb entgegengesetzten abgeändert und aufgehoben wird. Auf den ersten Blick scheint der letztere Satz der Wirklichkeit nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung allmählig zur Ruhe kommen. Betrachten wir indess die Bewegungen genauer, so finden wir bei jeder an der Erde statt-



findenden Bewegung eine Reihe von äussern Umständen, welche die Bewegung stören, wie der Widerstand der Luft, in welcher sich alles bewegen muss, die Reibung auf der Unterlage u. s. f.; je mehr wir diese Hindernisse der Bewegung beseitigen, um so weniger wird die Bewegung gestört, um so länger hält sie an. Werfen wir einen Körper über eine ebene horizontale Grundlage hin, so hört seine Bewegung um so eher auf, je rauher die Grundlage ist, indem der Körper gegen die verschiedenen Unebenheiten anstösst. Nehmen wir eine möglichst glatte Fläche und rollen über diese eine Kugel fort, so dauert die Bewegung sehr viel länger, so dass wir schliessen dürfen, dass, wenn wir alle Widerstände fortnehmen, dass dann die Bewegung ohne Aufhören dauern würde. Eine solche ohne Ende fortdauernde Bewegung materieller Massen sehen wir sogar in den Gestirnen, deren Bewegung seit 2000 Jahren, seitdem man ihre Bahnen beobachtet hat, sich nicht geändert hat. Es ergibt sich somit aus der Erfahrung, dass die Materie den ihr einmal gegebenen Bewegungszustand aus sich selbst niemals ändert; diese Eigenschaft nennt man die Trägheit der Materie.

Die äussern Ursachen, welche den Bewegungszustand der Materie ändern, nennen wir Kräfte.

Um alles zu kennen, wodurch eine Kraft bestimmt wird, müssen wir ihren Angriffspunkt, ihre Richtung und ihre Grösse kennen.

Die Richtung einer Kraft erkennen wir aus der Richtung, nach welcher sie eine Materie in Bewegung setzt, die Richtung der Kraft fällt zusammen mit der Richtung, nach welcher sie die Materie, auf welche sie wirkt, hintreibt.

Die Grösse einer Kraft können wir strenge genommen nur durch die Grösse ihrer Wirkung, also durch die von ihr erzeugte Bewegung messen. Um aber dieses Maass anwenden zu können, müssen wir zunächst wissen, von welchen Umständen überhaupt die Bewegung eines Körpers abhängt. Zu dieser Untersuchung selbst ist es aber durchaus wünschenswerth, schon ein Maass für die Kraft zu haben. Wir gelangen dazu durch folgende Ueberlegung. Zwei Kräfte müssen wir als gleich ansehen, wenn sie, an demselben Punkte angreifend, nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkend, sich aufheben, das heisst keine Bewegung hervorbringen oder eine vorhandene Bewegung ungeändert lassen. Da man nun stets einer Kraft das Gleichgewicht halten kann, indem man an demselben Punkte in einer ihr entgegengesetzten Richtung ein Gewicht wirken lässt, so ist dieses Gewicht der Kraft gleich und ihr Maass. Man kann demnach die Grösse einer Kraft in Gewichten auswerten.

Welcher Art nun auch die Kräfte sind, aus welcher Quelle sie auch herrühren, man kann sie in zwei Klassen theilen; die einen wirken stets nach derselben Richtung und erfordern stets die gleiche Anzahl von Kilogrammen, um im Gleichgewicht gehalten zu werden, es sind die constanten Kräfte. Die andern können sich mit der Zeit nach Grösse und Richtung ändern, d. h. es bedarf, um sie im Gleichgewicht zu halten, zu verschiedener Zeit verschieden grosser Gewichte, welche man nach verschiedenen Richtungen wirken lässt. Man nennt diese Kräfte veränderliche.

Es ist nun unsere Aufgabe zu untersuchen, wie die in §. 1 betrachteten Bewegungen durch solche Kräfte erzeugt werden, wie also in Folge der Wirkung einer Kraft sich die Körper bewegen. Wir verfahren zu dem Ende folgendermassen: wir beobachten einige einfache Fälle der Bewegung

und entwickeln deren experimentelle Gesetze; dann suchen wir aus diesen Gesetzen jene durch Abstraktion zu erhalten, welche uns allgemein angeben, wie Kräfte wirken, aus welchen also die experimentell gefundenen Gesetze sich durch Deduktion ableiten lassen. Dadurch erhalten wir die Theorie der Kräfte, und diese allgemeinen Sätze bieten uns die Grundlage der mathematischen Deduktionen, welche die theoretische Mechanik bilden.

### §. 3.

**Dasein und Richtung der Schwere.** Das sich uns am häufigsten zeigende Beispiel einer fortschreitenden Bewegung ist das Niederfallen eines nicht unterstützten Körpers zur Erde; dies eignet sich daher am besten dazu, die Gesetze der Bewegung zu untersuchen. Alle Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt sind, zur Erde nieder. Heben wir sie auf, so fühlen wir, dass sie das Bestreben haben zu fallen, indem es einer gewissen Anstrengung bedarf, sie am Fallen zu hindern. Wir nennen deshalb die Körper schwer und jene Kraft, welche sie zur Erde nedertreibt, die Schwere. Verschiedene Körper haben ein verschiedenes Bestreben zu fallen, sie üben auf ihre Unterlage einen verschiedenen Druck aus. Wir legen ihnen daher ein verschiedenes Gewicht bei, indem wir den Druck auf die Unterlage als Gewicht bezeichnen. Welche Einheit wir der Messung der Gewichte zu Grunde legen, haben wir in der Einleitung besprochen.

Die Richtung, in welcher die Schwere wirkt, lässt sich leicht durch einen einfachen Versuch bestimmen. Man befestigt einen schweren Körper, etwa eine Metallkugel, an einen Faden, der mit seinem andern Ende an irgend einem festen Punkte befestigt ist, und lässt die Kugel frei herabhängen. Eine Zeitlang schwingt die Kugel hin und her, dann hängt sie ruhig. Da sie nicht fällt, so folgt, dass eine der Schwere gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft die Kugel hält; es ist dies die Festigkeit des gespannten Fadens. Die Richtung des Fadens gibt uns somit die Richtung der Schwere; man überzeugt sich ferner dadurch, dass man den Faden durchschneidet; denn die Kugel fällt dann in der Richtung des gespannten Fadens zu Boden.

Die Richtung der Schwere ist also an jedem Orte durch einen solchen mit einem Gewichte versehenen Faden, dem Lothe oder Senkel gegeben; man nennt diese Richtung die lothrechte oder verticale.

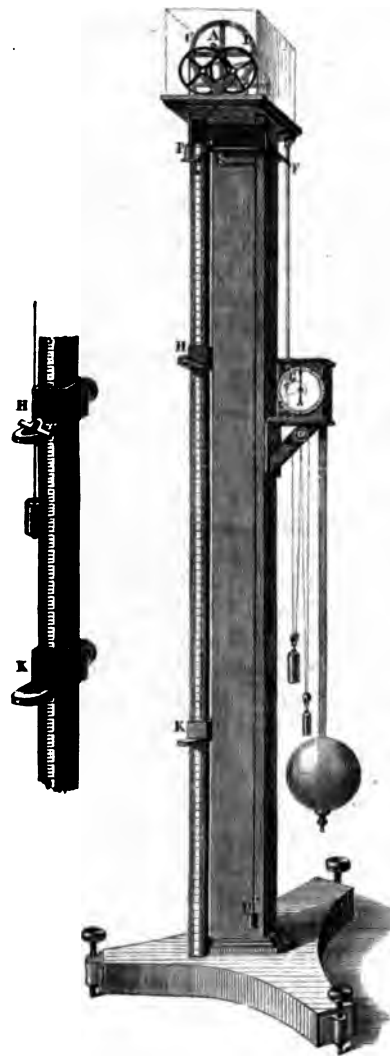
Hält man ein solches Loth über einer ruhenden Flüssigkeitsfläche, so findet man, dass es mit allen in der Ebene der Flüssigkeitsfläche durch seinen Fusspunkt gezogenen Linien einen rechten Winkel bildet, dass es also auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht steht. Man kann also die Richtung des Loths ebenso durch die Lage der Flüssigkeitsebene bestimmen; die Ebene der Flüssigkeit nennt man die horizontale.

### §. 4.

**Atwood's Fallmaschine.** Um die Gesetze der Bewegung mit Hilfe der Schwerkraft zu untersuchen, genügt es nicht, einfach einen fallenden Körper zu beobachten. Denn einmal ist, wie sich jeder leicht überzeugt, die Fallgeschwindigkeit bald so gross, dass sie einer exakten Beobachtung sich entzieht, und andererseits bietet der freie Fall der Körper nur einen

speciellen Fall von Bewegung, nämlich die Bewegung eines Körpers, der durch sein eigenes Gewicht bewegt wird. Man hat deshalb Apparate construirt, welche beiden Uebelständen abhelfen, welche die Bewegung verlangsamten und in vieler Beziehung abändern lassen; einer der bequemsten Apparate dieser Art ist die Atwood'sche Fallmaschine, mit deren Hülfe daher die Gesetze der Bewegung untersucht werden sollen.

Fig. 14.



Das Prinzip dieser Maschine ist folgendes. Wenn man an einem vollkommen biegsamen Faden zwei ganz gleich schwere Körper befestigt und dann den Faden über eine leicht bewegliche Rolle führt, so halten sich die beiden Gewichte genau das Gleichgewicht, es tritt keine Bewegung ein, da jeder der beiden Körper durch ein dem seinigen gleiches Gewicht der Schwere entgegen gezogen wird. Um nun dieses System von Körpern, die beiden Gewichte, den Faden und die Rolle in Bewegung zu setzen, bedarf es einer äussern Kraft, die wir erhalten, indem wir auf den einen Körper ein Uebergewicht legen. Die Grösse dieses Uebergewichtes, sowie die Grösse des zu bewegenden Körpers und die Dauer der Wirkung des Uebergewichtes, können wir dann beliebig ändern. Die Einrichtung des Apparates ist zu dem Zwecke folgende.

Auf einer massiven hölzernen mit 3 Stellschrauben versehenen Platte (Fig. 14) befindet sich ein Holzpfeiler von ungefähr 3 Meter Höhe. Auf dem Pfeiler ist eine Platte horizontal befestigt, und auf dieser ist ein möglichst leicht gearbeitetes, aus 4 Speichen und einem Radkranze bestehendes Rad möglichst beweglich aufgestellt. Um seine Beweglichkeit zu

erhöhen, ist die Axe des Rades nicht in feste Lager, sondern auf Frictionsräder gelegt. Dieselben bestehen aus 2 Systemen von Rädern *C*, *D*, welche, wie die Zeichnung zeigt, sich kreuzen, und welche das Rad *A* mit in Bewegung setzt. Die Reibung des Rades ist dadurch sehr vermindert; wie man dieselbe ganz unschädlich macht, werden wir gleich zeigen.

Der Umfang des Rades hat eine Rinne, und in dieser ist über das Rad ein Seidenfaden gelegt, an dessen Enden zwei genau gleiche Gewichte *P*

und  $P^1$  befestigt sind. Legt man dann auf  $P$  ein Uebergewicht  $p$ , so sinkt  $P$  nach unten,  $P^1$  steigt empor und das ganze System erhält eine gemeinschaftliche Bewegung. Die zu bewegenden Gewichte sind in diesem Falle  $p + P + P^1$  und das Gewicht des Fadens und der Rolle. Sind die Speichen der Rolle hinreichend fein gearbeitet, so darf man annehmen, dass das ganze Gewicht derselben im Radkranze vereinigt wäre. Dann erhält aber dieses Gewicht, da die Rolle mitgedreht wird, und die einzelnen Punkte derselben ebenso schnell bewegt werden als der Faden oder die Gewichte  $P$ , ganz dieselbe Bewegung wie die übrigen Theile des Systems. Bezeichnen wir das Gewicht der Rolle und des Fadens mit  $\Pi$ , so ist dann das Gewicht der zu bewegenden Körper  $p + P + P^1 + \Pi$ . Die Kraft, welche diese Gewichte in Bewegung setzt, ist das Uebergewicht  $p$ . Es muss indess, um diese Kraft genau zu erhalten, von diesem Gewichte ein kleiner Theil  $\pi$  abgezogen werden, um die Reibung der Axe des Rades  $A$  zu überwinden. Wenn diese Reibung auch sehr klein ist, so ist sie doch nicht gleich Null, wie man wahrnimmt, wenn man das System ohne Uebergewicht durch einen Anstoss in Bewegung setzt. Da auf das System dann keine äussere Kraft wirkt, müsste es, vermöge der Trägheit, in gleichförmiger Bewegung verharren. Man findet aber stets eine, wenn auch kleine Abnahme der Geschwindigkeit in Folge der Reibung. Um die Bewegung vollständig gleichförmig zu machen, muss man dann auf das niedersinkende Gewicht ein kleines Uebergewicht  $\pi$  legen, dessen Schwere gerade dazu hinreicht, um die Reibung zu überwinden. Um die Grösse dieses Gewichtes  $\pi$  muss man daher bei Berechnung der das System bewegenden Kraft das Uebergewicht  $p$  vermindern. Bequemer verfährt man indess so, dass man ein für allemal auf das niedersinkende Gewicht das zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Gewicht  $\pi$  hinlegt; das in Bewegung zu setzende Gewicht ist dann  $p + P + P^1 + \Pi + \pi$ , die bewegende Krafteinfach gleich dem Uebergewichte  $p$ .

Das Gewicht  $P$  fällt dann vor einem hölzernen in Centimeter getheilten Maassstabe. Längs desselben kann man einen kleinen Messingteller  $K$  verschieben und durch Klemmschrauben in irgend einer Höhe befestigen; auf denselben schlägt dann das Gewicht  $P$  auf und gibt durch das in Folge des Schlages entstehende Geräusch das Ende seines Laufes an.

Der Apparat ist ferner so eingerichtet, dass man an einer beliebigen Stelle das Uebergewicht  $p$  fortnehmen kann, ohne die Bewegung des Systems zu stören. Zu dem Ende ist an dem hölzernen Maassstabe ausser dem vorhin erwähnten Teller ein Ring  $H$  befestigt, durch den das Gewicht  $P$  ungehindert hindurchgehen kann, der aber das Uebergewicht  $p$ , welches die in der Nebenfigur bezeichnete Gestalt hat, zurückhält. Dieser Ring ist längs des Maassstabes verschiebbar und kann ebenfalls an beliebiger Stelle desselben befestigt werden. Durch Einschalten des Ringes kann also das Uebergewicht an einer beliebigen Stelle fortgenommen werden.

An der Maschine ist überdies noch ein Apparat angebracht, der die Zeit misst. Dieser ist im Prinzip nichts anders als ein Loth; bei der Lehre vom Pendel werden wir nachweisen, dass ein aus seiner Gleichgewichtslage gebrachtes Loth um dieselbe Schwingungen macht. Zu diesen Schwingungen braucht es immer dieselbe Zeit; wir können es daher benutzen, um gleiche Zeittheile zu messen. Hat das Pendel eine bestimmte Länge, so braucht es zu einer Schwingung genau eine Sekunde. Ein solches Sekundenpendel ist

an dem Apparate angebracht. Mit dem Pendel ist ein Zeiger in Verbindung, der die einzelnen Sekunden anzeigt, und ein Schlagwerk, welches jede Sekunde durch, einen hörbaren Schlag markirt.

Um die Bewegung genau mit dem Schläge einer Sekunde beginnen zu können, steht das Gewicht *P* vor der Bewegung auf einem kleinen Teller, der durch eine kleine Stütze gehalten wird, welche durch den Winkelhebel *EFG* mit dem Pendel in Verbindung gebracht ist. Jedesmal wenn der Zeiger an einer bestimmten Stelle steht, wird diese Stütze gelöst, und das System beginnt seine Bewegung.

Wie man sieht, lässt sich an diesem Apparate ein beliebiges Gewicht durch eine beliebige constante Kraft, deren Wirkungsdauer sich ebenfalls ändern lässt, in Bewegung setzen; der Apparat ist daher vorzugsweise geeignet, die durch constante Kräfte erzeugten Bewegungen in allen Einzelheiten zu untersuchen.

§. 5.

**Abhängigkeit der Bewegung von der Dauer der Kraftwirkung.**

Setzen wir nun unser System an der Atwoodschen Fallmaschine, nachdem es in der im vorigen §. beschriebenen Weise vorgerichtet ist, durch ein Übergewicht *p* in Bewegung und bringen an irgend einer Stelle z. B. 10 Centim. unter dem Ausgangspunkte der Gewichte den Ring *H* an. Geht *P* durch den Ring hindurch, so bleibt das Uebergewicht zurück, und wir finden dann, dass von da ab das System sich mit gleichförmiger Bewegung weiter bewegt. Bei einem bestimmten Uebergewicht, dessen Grösse von der der übrigen Gewichte abhängt, wird der Raum von 10 Cm. gerade in 1 Sekunde durchfallen; suchen wir dann durch passende Stellung des Tellers *K*, welcher Weg in 2, 3, 4 Sekunden durchlaufen wird, so finden wir

Zeit . . . . .	1"	2"	3"	4"	5"
Durchlaufener Weg . . . . .	10 <sup>cm</sup>	30 <sup>cm</sup>	50 <sup>cm</sup>	70 <sup>cm</sup>	90 <sup>cm</sup>
Weg in den auf die erste folgenden Sekunden zurückgelegt . . . . .	20 <sup>cm</sup>	40 <sup>cm</sup>	60 <sup>cm</sup>	80 <sup>cm</sup>	

Nach der ersten Sekunde, also nach Fortnahme des Uebergewichtes, ist somit die Bewegung in der That eine gleichförmige, in jeder Sekunde werden 20<sup>cm</sup> durchlaufen; wir erhalten darin einen experimentellen Beweis dafür, dass ein Körper, der sich ohne Hindernisse bewegt, in der That die ihm einmal ertheilte Bewegung beibehält.

Lassen wir nun dasselbe Uebergewicht anstatt einer 2, 3, 4 Sekunden wirken, (der Versuch zeigt, dass wir dazu den Ring *H* bei 40<sup>cm</sup>, 90<sup>cm</sup>, 160<sup>cm</sup> befestigen müssen), so finden wir stets, dass in der auf die Abnahme des Uebergewichtes folgenden Zeit die Bewegung eine gleichförmige ist, dass also jedesmal der in dieser Zeit zurückgelegte Weg sich darstellen lässt durch

$$s = c \cdot t,$$

wenn *t* die Anzahl der Sekunden nach Fortnahme des Uebergewichtes und *c* der in jedem Falle in der ersten Sekunde nach jener Fortnahme zurückgelegte Weg ist. Dieser Weg oder die während der Wirkung des Uebergewichtes erlangte Geschwindigkeit ist aber verschieden; sie ist um so grösser, je länger das Gewicht gewirkt hat. Bestimmen wir die Geschwindigkeiten in den einzelnen Fällen, so finden wir:

Nach 1''	ist $c = c_1 = 20^{\text{cm}}$
„ 2''	„ $c_2 = 40^{\text{cm}}$
„ 3''	„ $c_3 = 60^{\text{cm}}$
„ 4''	„ $c_4 = 80^{\text{cm}}$

Dividiren wir nun in den einzelnen Fällen die erlangten Geschwindigkeiten durch die Anzahl von Sekunden, in welchen dieselben durch die Wirkung des Uebergewichtes erzeugt sind, so sind

$$\frac{c_1}{1} = \frac{c_2}{2} = \frac{c_3}{3} = \frac{c_4}{4} = 20^{\text{cm}},$$

diese Quotienten somit alle gleich. Wir sehen somit in diesen Fällen und schliessen daraus für alle Fälle, dass die durch Wirkung eines constanten Uebergewichtes in verschiedenen Zeiten erreichten Geschwindigkeiten einfach den Zeiten proportional sind, oder dass

$$v = c_1 \cdot t$$

die in der Zeit  $t$  erlangte Geschwindigkeit  $v$  gleich ist dem Produkte aus der in der ersten Sekunde erlangten Geschwindigkeit und der Zeit  $t$ . Da somit die in gleichen Zeiten stattfindenden Geschwindigkeitszunahmen gleich sind, so erzeugt eine constante stetig wirkende Kraft eine gleichmässig beschleunigte Bewegung.

Aus dem so abgeleiteten Gesetze der Geschwindigkeitsänderung bei stetig wirkender constanter Kraft lässt sich nun sofort auch, ohne dass es dazu eines Versuches bedarf, der Weg ableiten, den unser System während der Wirkung des Uebergewichtes zurücklegt. Da nämlich die Zunahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeittheilen immer dieselbe ist, so legt der mit gleichmässig beschleunigter Bewegung bewegte Körper in einer gegebenen Zeit denselben Weg zurück, als wenn er sich während der ganzen Zeit in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit bewegt hätte, die er genau in der Mitte der Zeit gehabt hat. Denn mit dieser Geschwindigkeit hätte er in der ersten Hälfte der Zeit gerade soviel mehr zurückgelegt, als er in der zweiten Hälfte der Zeit weniger zurücklegen würde, wie er in Wirklichkeit zurückgelegt hat.

Die in den verschiedenen Sekunden zurückgelegten Wege sind demnach

$$\begin{aligned} \text{in der 1.}'' & \cdot \cdot \frac{0 + c_1}{2} = \frac{c_1}{2} \\ \text{„ „ 2.}'' & \cdot \cdot \frac{c_1 + 2c_1}{2} = 3 \frac{c_1}{2} \\ \text{„ „ 3.}'' & \cdot \cdot \frac{2c_1 + 3c_1}{2} = 5 \frac{c_1}{2} \end{aligned}$$

u. s. f., oder die in den einzelnen Sekunden bei gleichmässig beschleunigter Bewegung zurückgelegten Wege verhalten sich wie die Reihe der ungeraden Zahlen.

Um nun die in 2, 3, 4 ·  $t$  Sekunden zurückgelegten Wege zu erhalten, haben wir nur die für die einzelnen Sekunden gefundenen Wege zu addiren. Darnach ist der Weg für

$$\begin{aligned} \text{die ersten 2}'' & = \frac{c_1}{2} + 3 \frac{c_1}{2} = 4 \frac{c_1}{2} = \frac{c_1}{2} \cdot 2^2 \\ \text{„ „ 3}'' & = 4 \frac{c_1}{2} + 5 \frac{c_1}{2} = 9 \frac{c_1}{2} = \frac{c_1}{2} \cdot 3^2 \\ \text{„ „ 4}'' & = 9 \frac{c_1}{2} + 7 \frac{c_1}{2} = 16 \frac{c_1}{2} = \frac{c_1}{2} \cdot 4^2 \end{aligned}$$

wir haben also nur den in der ersten Sekunde zurückgelegten Weg mit dem Quadrate der Sekundenzahl zu multiplizieren, während deren sich der Körper bewegt hat, oder allgemein ist

$$s = \frac{c_1}{2} \cdot t^2.$$

Der in der ersten Sekunde dabei zurückgelegte Weg ist gleich der halben Beschleunigung oder der halben in jeder Sekunde stattfindenden Geschwindigkeitszunahme.

Dass wir bei diesen Schlüssen nicht irre gegangen sind, können wir leicht durch den Versuch bestätigen; wir nehmen an der Maschine den Ring *H* fort und suchen die Stellen, an denen wir den Teller *K* befestigen müssen, damit das Gewicht *P* nach 1, 2, 3, . . . Sekunden aufschlägt. Wir finden dann diese Stellen

nach	1''	2''	3''	4''	5''
bei	10 <sup>cm</sup>	40 <sup>cm</sup>	90 <sup>cm</sup>	160 <sup>cm</sup>	250 <sup>cm</sup> .

Diese letzten Zahlen können wir aber schreiben

$$10 \cdot 1^2; 10 \cdot 2^2; 10 \cdot 3^2; 10 \cdot 4^2; 10 \cdot 5^2$$

oder allgemein

$$s = 10 \cdot t^2.$$

Wie wir aber vorhin zeigten, ist in diesem Falle die Beschleunigung gleich 20<sup>cm</sup>, so dass der Versuch den vorhin gezogenen Schluss bestätigt, dass der bei gleichmässig beschleunigter Bewegung in einer gegebenen Zeit zurückgelegte Weg gleich ist dem Produkte aus der halben Beschleunigung und dem Quadrate der Sekundenzahl, während deren der Körper sich bewegt hat.

### §. 6.

**Abhängigkeit der Bewegung von der Grösse der Kraft und der zu bewegendem Gewichte.** Die durch eine constante Kraft hervorbrachte gleichmässig beschleunigte Bewegung ist nach dem vorigen §. vollständig bestimmt, wenn die Beschleunigung der Bewegung bekannt ist, denn aus dieser erhalten wir die Geschwindigkeit sowie den in jeder Zeit zurückgelegten Weg. Dass die Beschleunigung, der in jeder Sekunde stattfindende Zuwachs an Geschwindigkeit von der Grösse der wirksamen Kraft und der Grösse der zu bewegendem Gewichte abhängig sein muss, ergibt sich unmittelbar aus der Ueberlegung, dass es gerade die Kraft ist, welche den Bewegungszustand der Körper ändert; in welcher Weise aber die Beschleunigung von diesen beiden Grössen abhängt, darüber kann uns nur der Versuch belehren.

Lassen wir zunächst das Gesamtgewicht an unserer Fallmaschine ganz ungeändert und verändern nur das Uebergewicht. Zu dem Ende sind an den Enden des Fadens Scheiben angebracht, auf welche man eine Anzahl an sich ganz gleiche Ringe legt. Legen wir zunächst auf beide Seiten *n* Gewichte *p*, so dass etwa diese *n* · *p* gleich dem im vorigen §. angenommenen Gewichte *P* sind, so tritt keine Bewegung ein; legen wir dann auf die eine Seite unser Uebergewicht *p* und das Frictionsgewicht *π*, so tritt die vorhin betrachtete beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung *c*<sub>1</sub> gleich 20<sup>cm</sup> ein. Nun nehmen wir von der hintern Seite einen Ring vom Gewicht *p* und legen ihn auf die vordere Seite; wir haben dann bei ganz ungeändertem Ge-

sammtgewichte des ganzen Systems auf der einen Seite das Uebergewicht  $3p$ , denn vorn liegen die Gewichte  $(n+1)p + p = (n+2)p$ , auf der hintern Seite dagegen  $(n-1)p$ . Verfahren wir ein zweites Mal so, dann erhalten wir das Uebergewicht  $5p$ , ein drittes Mal  $7p$  u. s. f., so dass bei stets gleichem Gesamtgewichte sich die Uebergewichte verhalten wie  $1:3:5:7$  u. s. f.

Bestimmen wir nun die Beschleunigungen in diesen Fällen, so finden wir, dass dieselben mit der Grösse des Uebergewichtes in demselben Verhältnisse zunehmen, denn wir erhalten sie

bei dem Uebergewichte $p$	gleich	$c_1$
" "	"	$3p$ " $3c_1$
" "	"	$5p$ " $5c_1$
" "	"	$7p$ " $7c_1$

Bezeichnen wir daher die durch ein der Gewichtseinheit gleiches Uebergewicht unserm System ertheilte Beschleunigung mit  $d$ , so können wir die durch irgend ein Uebergewicht  $p$  erzeugte Beschleunigung  $c$  wiedergeben durch

$$c = d \cdot p,$$

oder die Beschleunigung ist allgemein der Grösse des Uebergewichts oder der Grösse der bewegenden Kraft proportional.

Andern wir bei gegebenem Uebergewicht das Gesamtgewicht unseres Systems  $P + P' + \Pi + \pi + p$ , was wir dadurch können, dass wir eine verschiedene Anzahl von Ringen auf die am Ende des Fadens angebrachten Scheiben legen, so finden wir, dass mit der Grösse dieses Gewichtes die Beschleunigung abnimmt. Legen wir bei dem Uebergewichte  $p$  soviel Ringe auf, dass das Gesamtgewicht verdoppelt, verdreifacht wird, so wird die Beschleunigung die Hälfte oder ein Drittel u. s. f. Wir finden allgemein, dass bei constantem Uebergewichte die Beschleunigung in demselben Maasse kleiner wird, als die Grösse des Gesamtgewichtes zunimmt.

Andern wir aber gleichzeitig das Gesamtgewicht des Systems und das Uebergewicht in demselben Sinne, verdoppeln, verdreifachen wir beide, so finden wir immer dieselbe Beschleunigung, wie wir sie bei einfachem Gesamtgewichte und einfachem Uebergewichte fanden. Daraus folgt, dass die Beschleunigung nicht allein von der Grösse der bewegenden Kraft oder von der Grösse des zu bewegenden Gewichtes, sondern von dem Verhältnisse beider zu einander abhängt, oder dass die Beschleunigung der Grösse dieses Verhältnisses direkt proportional ist. Nennen wir daher die Beschleunigung, welche die der Gewichtseinheit gleiche bewegende Kraft einem die Gewichtseinheit wiegenden Körper ertheilt,  $g$ , so wird die Beschleunigung  $c$ , welche die Kraft  $p$  dem Gewichte  $Q$  ertheilt,

$$c = g \cdot \frac{p}{Q},$$

oder allgemein die einem Körper ertheilte Beschleunigung ist der Grösse der Kraft direkt, dem Gewichte des Körpers umgekehrt proportional.

Es ist gut, zu beachten, dass in dieser Gleichung das Gewicht  $Q$  in einer andern Weise auftritt als das Uebergewicht  $p$ . Wir sahen schon früher, dass die Materie träge ist, dass es immer einer Kraft bedarf, um den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern, dass also in der Trägheit der Materie ein Widerstand gegen eine Aenderung der Geschwindigkeit vorhanden ist. Wir



sehen nun hier, dass es bei verschiedenen Körpern zur gleichen Aenderung ihres Bewegungszustandes einer verschiedenen Kraft bedarf, und dass diese Kraft in demselben Verhältnisse zunehmen muss wie der Druck, den der bewegte Körper auf seine Unterlage ausübt, oder dass der Widerstand des Körpers gegen die Bewegungsänderung seinem Gewichte proportional ist; das Gewicht ist also das Maass dieses Widerstandes, und in dem Sinne tritt es in dem Nenner obiger Gleichung auf.

Aus dem Ausdrücke für die Beschleunigung irgend eines Körpers vom Gewichte  $Q$  durch irgend eine Kraft  $p$  können wir nun auch sofort die Geschwindigkeit  $v$  erhalten, welche die Kraft diesem Körper in der Zeit  $t$  ertheilt, sowie den Weg  $s$ , den der Körper unter Wirkung dieser Kraft zurücklegt. Wir erhalten

$$v = g \cdot \frac{p}{Q} \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{p}{Q} \cdot t^2.$$

In diesen Ausdrücken ist alles enthalten, was auf die Bewegung eines Körpers in Folge einer constanten Kraft von Einfluss ist, Grösse der Kraft und bewegten Gewichte und Länge der Zeit, während welcher die Kraft wirkt. Die vierte darin vorkommende Grösse ist eine Zahl, die wir aus unsern Versuchen bestimmen können. Genaue später zu besprechende Versuche haben gezeigt, dass diese Grösse aus Gründen, die dann ebenfalls hervortreten werden, an den verschiedenen Orten der Erde einen etwas verschiedenen Werth hat. In Göttingen ist sie nach den Bestimmungen von Gauss <sup>1)</sup> 9,81163, für Paris nach den Bestimmungen von Biot und Arago <sup>2)</sup> 9,80896, wenn die Zeit  $t$  in Sekunden und die Geschwindigkeit in Metern gemessen wird.

Die Bedeutung dieser in der Physik immer mit  $g$  bezeichneten Zahl ist leicht zu erhalten; setzen wir nämlich  $p = Q$ , so wird

$$v = g \cdot t \quad s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Ist aber  $p = Q$ , so heisst das, das Uebergewicht ist gleich dem Gesamtgewichte, oder wir lassen den Körper frei fallen. Die Grösse  $g$  ist demnach die Beschleunigung oder der in jeder Sekunde eintretende Geschwindigkeitszuwachs beim freien Fall, und die beiden letzten Ausdrücke liefern uns die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach  $t$  Sekunden und den in  $t$  Sekunden durchfallenen Raum.

### §. 7.

**Unabhängigkeit der Wirkung von Kräften von der Bewegung, welche ein Körper bereits besitzt.** Die vorhin gefundene Beziehung  $v = g' \cdot t$  zeigt uns, dass ein Körper, welcher der Wirkung einer constanten Kraft ausgesetzt ist, im Anfange der einzelnen auf einander folgenden Sekunden die Geschwindigkeiten

$$0, g', 2g', 3g', 4g' \dots$$

<sup>1)</sup> GAUSS, Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam revocata Göttingen 1833. Poggend. Ann. Bd. XXVIII.

<sup>2)</sup> Biot et Arago, Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques etc. Paris 1821.

n. s. f. besitzt, dass also in jeder Sekunde durch die Wirkung der constanten Kraft die Geschwindigkeit um eine constante Grösse  $g'$  zunimmt. Man kann daher behaupten, dass die durch die constante Kraft auf den bewegten Körper hervorgebrachte Wirkung dieselbe ist, ob der Körper vorher in Ruhe, oder ob er bereits in Bewegung war.

Wenn wir andererseits die während der Zeit

$$1'', 2'', 3'', 4''$$

durchlaufenen Räume betrachten, so sind dieselben

$$\frac{g'}{2}, \frac{4g'}{2}, \frac{9g'}{2}, \frac{16g'}{2},$$

und während der auf einander folgenden Sekunden sind es

$$\frac{g'}{2}, \frac{3g'}{2}, \frac{5g'}{2}, \frac{7g'}{2}$$

Wenn der bewegte Körper in jeder Sekunde nur in Folge der Geschwindigkeit sich bewegt hätte, welche er im Anfange jeder Sekunde besass, so hätte er in jeder derselben die Räume

$$0, g', 2g', 3g'$$

durchlaufen. Der Unterschied zwischen diesen Zahlen und den vorhergehenden stellt daher den Einfluss der bewegenden Kraft in jeder Sekunde dar. Dieser Unterschied ist constant und zwar gleich  $\frac{g'}{2}$ , so dass wir auch hieraus den Schluss ziehen, dass die Wirkung einer Kraft ganz unabhängig davon ist, ob der Körper eine Bewegung bereits besitzt oder nicht.

Der soeben gemachte Schluss gilt zunächst nur für solche Kräfte, welche in einer Richtung auf einen Körper wirken, welche mit der Richtung der Bewegung, welche er bereits besitzt, zusammenfällt, doch lässt sich dieser Schluss mit Hilfe vieler Beobachtungen leicht verallgemeinern. Befinden wir uns z. B. auf einem mit gleichförmiger Bewegung begabten Schiffe, so merken wir die Bewegung nicht, wenn wir uns in einem seiner innern Räume befinden. Lassen wir nun auf irgend einen Punkt des Schiffes eine Kraft wirken, so finden wir, dass der Effekt dieser Kraft genau derselbe ist, als wenn das Schiff in Ruhe wäre; die Wirkung der Kraft auf den betrachteten Punkt ist also unabhängig von seiner mit dem Schiffe gemeinsamen Bewegung. Wir können daher unseren vorhin gezogenen Schluss ausdehnen und folgendes allgemeine Prinzip aufstellen:

„Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt in Folge dieser Kraft in Beziehung auf das System annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systems nicht existirt.“

### §. 8.

**Unabhängigkeit gleichzeitig wirkender Kräfte.** Wir haben experimentell nachgewiesen, dass zwei an einen beweglichen Körper angebrachte constante Kräfte ihm nach gleichen Zeiten Geschwindigkeiten ertheilen, welche ihrer Grösse proportional sind. Wenn folglich eine Kraft  $p$  einem

Körper die Geschwindigkeit  $v$  ertheilt, so ertheilt ihm eine Kraft  $2p$  oder, was damit identisch ist, zwei zugleich wirkende Kräfte  $p$  die Geschwindigkeit  $2v$ . Allgemein: mehrere auf einen Körper zugleich wirkende Kräfte summiren ihre Wirkung, jede Kraft wirkt also selbständg. Dehnen wir diesen Schluss, durch ähnliche Erfahrungen wie vorhin gestützt, auch auf Kräfte aus, welche nicht in gleicher Richtung wirken, so gelangen wir zu folgendem allgemeinen Grundsatz:

„Wenn 2 Kräfte  $p$  und  $p'$  auf einen Körper in irgend welchen Richtungen einwirken, so ertheilen sie ihm eine Bewegung, welche die resultirende aus der Bewegung ist, welche jede Kraft für sich erzeugen würde, d. h. gehört der Körper zu einem Systeme, welches durch die Kraft  $p$  bewegt wird, so erhält er in Bezug auf das System durch die Wirkung der Kraft  $p'$  dieselbe Bewegung, als wenn die Kraft  $p$  nicht thätig wäre.“

### §. 9.

**Das Kräfteparallelogramm.** Wir haben über den Fall, wo die nach einander oder zugleich wirkenden Kräfte nicht dieselbe Richtung haben, noch einige weitere Schlüsse hinzuzufügen. Es ist an sich klar, dass ein Körper, der sich in Folge zweier nach verschiedener Richtung wirkender Kräfte bewegt, sich weder in der Richtung der einen noch der andern bewegen kann. Er muss sich vielmehr in einer Richtung bewegen, welche zwischen beide fällt. Nach den vorigen Grundsätzen wird es uns jedoch leicht sein, diese Richtung zu bestimmen. Die Kräfte wirken, wie wir sahen, jede, als wenn die andere nicht da wäre, der Punkt z. B., welchen das bewegliche nach der ersten Sekunde erreicht hat, wird daher gerade so erreicht werden, wenn wir die beiden Kräfte nach einander jede eine Sekunde wirken lassen. Legen wir daher durch den Punkt, welchen der Körper unter Wirkung der einen Kraft erreicht hat, eine gerade Linie und tragen auf dieser parallel der Richtung, in welcher die zweite Kraft für sich den Körper bewegt haben würde, die Länge auf, welche er unter Wirkung dieser Kraft in einer Sekunde zurückgelegt haben würde, so wird der Endpunkt dieser Länge wirklich der Punkt sein, in welchem sich der Körper nach gemeinschaftlichem Wirken der beiden Kräfte befindet, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ausgangspunkte wird der Richtung und Länge nach der Weg sein, den der Körper wirklich zurückgelegt hat.

Man sieht, dieser Weg fällt der Grösse und Richtung nach mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammen, welches wir aus den Längen construiren können, welche der Körper in Folge jeder Kraft für sich in der gleichen Zeit zurücklegt, indem wir diese Längen in Ausgangspunkt in den entsprechenden Richtungen zusammenlegen und das durch diese Längen und den Winkel, den sie mit einander bilden, bestimmte Parallelogramm vervollständigen.

Diesen Weg hat der Körper allerdings durch die Wirkung zweier Kräfte zurückgelegt, welche nach verschiedenen Richtungen wirkten. Aber ganz denselben Weg hätten wir auch in derselben Zeit den Körper durch eine einzige in der Richtung der resultirenden Bewegung wirksamen Kraft zurücklegen lassen können. Da dann diese Kraft die gleiche Wirkung hat wie die beiden zusammenwirkenden, so kann man die beiden vorhandenen Kräfte auch vollständig durch diese Kraft ersetzen. In dem Sinne nennt man

auch die Kraft, welche der Richtung und Grösse nach dieselbe Bewegung zur Folge hat als die beiden einzelnen Kräfte durch ihr Zusammenwirken, die aus diesen resultirende Kraft.

Diese Kraft, welche also die beiden wirklich vorhandenen der Grösse und Richtung nach ersetzt, lässt sich nun durch eine ganz ähnliche Construction ihrer Grösse nach erhalten. Wenden wir nämlich anstatt der in gegebenen Zeiten durchlaufenen Wege zu unserer Construction die durch die einzelnen Kräfte bewirkten Beschleunigungen an, so sind die Kräfte den Beschleunigungen proportional und können durch dieselben dargestellt werden. Wir gelangen daher unmittelbar zu dem Satze, dass die aus zwei gegebenen in verschiedener Richtung wirkenden Kräften resultirende Kraft der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des von jenen Kräften und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmten Parallelogramms gegeben wird.

Dieser für die theoretische Mechanik äusserst wichtige Satz, der nur eine Consequenz des in den vorigen §§. Gesagten ist, wird der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt.

Man sieht, wie man dadurch im Stande ist, die Wirkung beliebig vieler nach verschiedenen Richtungen thätiger, an einem Punkte angreifender Kräfte auf jene einer einzigen zurückzuführen, welche alle jene vollständig ersetzt, indem man die Kräfte nur paarweise zusammensetzt.

Um die Grösse der aus 2 Kräften  $P$  und  $P_1$ , welche den Winkel  $\alpha$  mit einander bilden, resultirenden Kraft zu erhalten, haben wir nur den bekannten Satz aus der ebenen Geometrie über die Grösse der Diagonale eines Parallelogramms anzuwenden; die Resultante  $R$  ist danach gegeben durch

$$R^2 = P^2 + P_1^2 - 2PP_1 \cdot \cos \alpha.$$

Umgekehrt erhellt aber auch, dass eine jede Bewegung als die Resultirende aus zwei Seitenbewegungen aufgefasst, somit auch die jene Bewegung bestimmende Kraft als die Resultirende zweier gedachter Seitenkräfte aufgefasst werden kann. Da nun jede Linie als Diagonale unendlich vieler Parallelogramme aufgefasst werden kann, so kann man jede Kraft auf unendlich viele verschiedene Arten in Seitenkräfte zerlegen; jede dieser Seitenkräfte kann dann wieder als Resultirende anderer Seitenkräfte betrachtet werden, so dass also jede Kraft in unendlich viele Seitenkräfte zerlegt werden kann.

Diese letzten Sätze sind in der Mechanik von hoher Bedeutung, da sie uns in den Stand setzen die Wirkung, welche eine Kraft nach einer von ihrer eigenen verschiedenen Richtung ausüben kann, zu berechnen. Kann z. B. ein Körper sich nur nach einer bestimmten Richtung bewegen, und wirkte auf diesen eine constante Kraft, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung des Körpers den Winkel  $\alpha$  bildet, so erhalten wir die Grösse der die Bewegung des Körpers bewirkenden Seitenkraft, wenn wir die gegebene Kraft so zerlegen, dass die eine der Seitenkräfte in die Richtung der Bewegung fällt, die andere zu ihr senkrecht ist. Letztere trägt zur Bewegung gar nichts bei, die erstere Componente ist es somit, welche die Bewegung bedingt. Nennen wir die ursprüngliche Kraft  $P$ , die in die Bewegungsrichtung fallende Componente  $R$ , so ist

$$R = P \cdot \cos \alpha,$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, dass  $P$  die Diagonale eines Rechtecks ist, dessen eine Seite  $R$  mit  $P$  den Winkel  $\alpha$  bildet.

Haben wir eine ganze Reihe von Kräften  $P, P_1, P_2 \dots$ , die mit der Bewegungsrichtung die Winkel  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$  bilden, so ist die aus allen diesen resultierende die Bewegung bestimmende Kraft

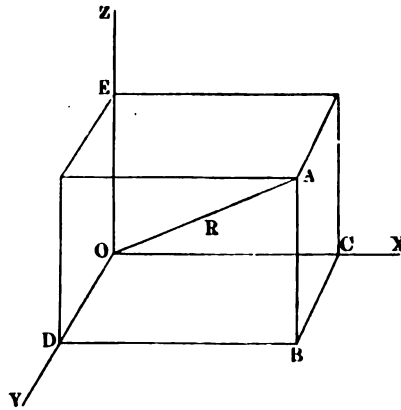
$$R = P \cdot \cos \alpha + P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 + \dots = \Sigma P \cdot \cos \alpha,$$

wenn das Zeichen  $\Sigma$  die Summe aller einzelnen Producte  $P \cdot \cos \alpha$  bedeutet.

### §. 10.

**Bedingungen des Gleichgewichts eines Punktes, auf den beliebig viele, beliebig gerichtete Kräfte wirken.** Die in dem letzten Paragraphen entwickelten Sätze bieten uns das Mittel zu bestimmen, wann ein fester Körper, der von beliebig vielen beliebig gerichteten Kräften afficirt wird, eine fortschreitende Bewegung annehmen kann, wann nicht. Greifen die Kräfte an demselben Punkte des Körpers an, so fallen die Gleichgewichtsbedingungen desselben mit denen eines materiellen Punktes zusammen; ja sehen wir von den später zu besprechenden drehenden Bewegungen ab, so ist die Bedingung, dass die Kräfte an demselben Punkte angreifen müssen, nicht einmal erforderlich, es fallen dann allgemein die Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers mit denen eines materiellen Punktes zusammen. Setzen wir zunächst voraus, dass der Punkt sich vollkommen frei bewegen kann, so ist die für das Gleichgewicht desselben nothwendige Bedingung, dass, wenn wir die Summe der Componenten der Kräfte nach irgend einer beliebigen Richtung bilden, diese Summe immer gleich Null ist, wie wir

Fig. 15.



diese Richtung auch wählen. Das ist aber der Fall, wenn die Summe der nach drei durch den Punkt gelegten zu einander senkrechten Richtungen gebildeten Componenten für jede dieser Richtungen einzeln gleich Null ist. Denn sind (Fig. 15)  $OX, OY, OZ$  die drei zu einander senkrechten durch den Punkt  $O$  gelegten Richtungen, und sind die nach diesen Richtungen gebildeten Componenten gleich Null, so folgt zunächst, da nach  $OY$  keine Kraft wirkt, dass der Punkt  $O$  sich nicht aus der durch  $OX$  und  $OZ$  gelegten Ebene bewegt. Jede Kraft  $P$  nämlich, welche den Punkt  $O$  aus dieser Ebene zieht, würde mit  $OY$

einen Winkel  $\beta$  bilden, der kleiner ist als  $90^\circ$ . Da nun die parallel  $Y$  gerichtete Componente dieser Kraft  $P \cdot \cos \beta$  sein würde, so wäre dieselbe und damit die parallel  $Y$  gerichtete Componente der Kräfte überhaupt nicht gleich Null. Daraus, dass die Summe aller parallel  $OZ$  gerichteten Componenten gleich Null ist, folgt ferner, dass der Punkt  $O$  nicht aus der Linie  $OX$  in der Ebene  $ZOX$  entfernt wird; denn auch dazu wäre eine Kraft nöthig, die einen Winkel  $\gamma$  kleiner als  $90^\circ$  mit der Richtung  $OZ$  bilden würde. Die Componente dieser Kraft  $P$  parallel  $OZ$ ,  $P \cdot \cos \gamma$  würde dann wieder von Null verschieden sein. Da nun auch die parallel  $OX$  gerichtete

Componente gleich Null ist, so folgt schliesslich, dass der Punkt  $O$  auch in dieser Linie nicht bewegt werden kann, somit dass der Punkt überhaupt in Ruhe ist.

Wirken demnach auf den Punkt  $O$  beliebige Kräfte  $P$ , deren Richtungen durch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben sind, welche sie mit den festen Richtungen  $OX, OY, OZ$  bilden, so können wir die Bedingung des Gleichgewichts nach der schon im vorigen §. gewählten Bezeichnungsweise schreiben

$$\Sigma P \cdot \cos \alpha = 0 \quad \Sigma P \cdot \cos \beta = 0 \quad \Sigma P \cdot \cos \gamma = 0.$$

Sind diese Componenten nicht gleich 0, so haben sie eine Resultirende, welche wir mit  $R$  bezeichnen wollen, die mit den 3 Richtungen  $OX, OY, OZ$  die Winkel  $a, b, c$  bilden möge. Die Grösse dieser Resultirenden und ihre Richtung ist dann vollständig dadurch bestimmt, dass ihre parallel den drei Richtungen genommenen Componenten den Componenten der vorhandenen Kräfte einfach gleich sein müssen, oder dass

$$\Sigma P \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos a \quad \Sigma P \cdot \cos \beta = R \cdot \cos b \quad \Sigma P \cdot \cos \gamma = R \cos c$$

sein muss. Daraus folgt dann weiter

$$R^2 \cdot (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = (\Sigma P \cdot \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \cdot \cos \beta)^2 + (\Sigma P \cdot \cos \gamma)^2.$$

In der Stereometrie wird nun bewiesen, dass wenn  $a, b, c$  die Winkel sind, welche eine Richtung  $OA$  (Fig. 15) mit den drei zu einander senkrechten Richtungen  $OX, OY, OZ$  bildet, die Quadratsumme

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

ist; daraus ergibt sich dann, wenn wir zugleich

$$\Sigma P \cdot \cos \alpha = X \quad \Sigma P \cdot \cos \beta = Y \quad \Sigma P \cdot \cos \gamma = Z$$

setzen,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

als Ausdruck für die Grösse der Resultirenden. Stellen wir also, wie im vorigen §., die Componenten der Kräfte auf den drei Richtungen und ebenso die Resultirende durch Linien dar, so ergibt sich, dass die Resultirende als die Diagonale eines Parallelepipeds angesehen werden kann, dessen drei Seiten die parallel den drei festen Richtungen genommenen Componenten aller Kräfte sind.

Ist  $OA$  (Fig. 15) diese Resultante, und sind  $OC, OD, OE$  die Componenten, so erhalten wir, da  $OCA, ODA, OEA$  rechtwinklige Dreiecke sind, für die die Richtung der Resultirenden bestimmenden Winkel

$$\cos a = \frac{OC}{OA} = \frac{X}{R}; \quad \cos b = \frac{OD}{OA} = \frac{Y}{R}; \quad \cos c = \frac{OE}{OA} = \frac{Z}{R}.$$

Kennen wir somit die drei Componenten  $X, Y, Z$  aller Kräfte, so ist dadurch Grösse und Richtung der resultirenden Kraft, somit auch, wenn das Gewicht des in  $O$  befindlichen Körpers bekannt ist, die ganze Bewegung desselben bestimmt.

Kann der Punkt  $O$  sich nicht frei nach allen Richtungen bewegen, ist er etwa genöthigt auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so ist die im Vorigen abgeleitete Bedingung des Gleichgewichts nicht nothwendig; es genügt dann,

dass die an ihm angreifenden Kräfte den Körper in der Oberfläche nach keiner Richtung hin bewegen können; und dazu ist es nur nothwendig, dass die Resultirende aller Kräfte auf der Oberfläche senkrecht ist. Welche Bedingungen dazu erforderlich sind, das mathematisch zu formuliren ist Aufgabe der theoretischen Mechanik, auf deren Lehrbücher wir deshalb verweisen.

## §. 11.

**Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Wurfbewegung.** Ebenso wie wir durch die in den §§. 7 und 8 abgeleiteten allgemeinen Gesetze im Stande waren, die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, sind wir nun auch im Stande ganz allgemein zu entwickeln, welches die Bewegung eines Körpers unter Wirkung einer constanten Kraft ist.

Lassen wir auf einen Körper vom Gewichte  $Q$  die Kraft  $P$  einwirken, so wird die Beschleunigung des Körpers in der Richtung, nach welcher die Kraft wirkt,

$$G = g \cdot \frac{P}{Q}.$$

Die in der Zeit  $t$  erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = g \cdot \frac{P}{Q} \cdot t.$$

Besass der Körper beim Beginne der Wirkung der Kraft bereits die Geschwindigkeit  $a$ , so setzt nach §. 7 die neuerlangte Geschwindigkeit sich einfach mit dieser zusammen; ist die Geschwindigkeit  $a$  mit der neuen gleich gerichtet, so addiren sich die beiden, ist sie entgegengesetzt gerichtet, so subtrahiren sie sich. Wir können die Geschwindigkeit in diesen beiden Fällen somit nach der Zeit  $t$  allgemein setzen

$$v = a \pm g \cdot \frac{P}{Q} \cdot t.$$

Vermöge der Geschwindigkeit  $a$  durchläuft der Körper in der Zeit  $t$  den Raum  $a \cdot t$ , vermöge der ihm von der Kraft  $P$  ertheilten Geschwindigkeit den Raum  $\frac{1}{2} g \cdot \frac{P}{Q} \cdot t^2$ . Hat der Körper im Beginne der Zeit  $t$  bereits den Raum  $C$  durchlaufen, so wird der am Ende der Zeit  $t$  durchlaufene Raum

$$s = C + at \pm \frac{1}{2} g \cdot \frac{P}{Q} \cdot t^2.$$

Setzen wir hierin  $C$  und  $a$  gleich Null, so erhalten wir den mit der Fallmaschine experimentell entwickelten Ausdruck, und setzen wir  $P = Q$  und nehmen an, die Kraft  $P$  sei die Schwere, unsern Ausdruck für den freien Fall der Körper.

Die Bewegung geworfener Körper ist ein specieller Fall dieser allgemeinen Sätze. Untersuchen wir zunächst den Fall, dass ein Körper mit der Geschwindigkeit  $a$  senkrecht in die Höhe geworfen wird.

Für die Geschwindigkeit nach  $t$  Sekunden erhalten wir, da in diesem Falle  $P = Q$  ist,

$$v = a - g \cdot t,$$

dieselbe wird mit wachsender Zeit immer kleiner, sie wird gleich 0, der Körper hört auf zu steigen, wenn

$$a = g t; t = \frac{a}{g}$$

ist. Die Höhe, bis zu welcher der Körper dann aufgestiegen ist, erhalten wir durch Einsetzen dieses Ausdruckes für  $t$  in die für  $s$  erhaltene Gleichung:

$$s = a \cdot \frac{a}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{a^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g}.$$

In dieser Höhe angekommen, hört er auf zu steigen und bleibt einen Augenblick in Ruhe, aber sofort wirkt die Schwere auf ihn ein und zieht ihn wieder herab. Seine rückgängige Bewegung ist durch die Ausdrücke,

$$v = g \cdot t; s = \frac{1}{2} g t^2$$

bestimmt. Auf dem Boden angelangt hat er den Weg  $\frac{1}{2} \frac{a^2}{g}$  durchlaufen: setzen wir diesen Werth in die Gleichung für  $s$ , so wird

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{g} = \frac{1}{2} g t^2; t = \frac{a}{g},$$

und die Geschwindigkeit, die er dann besitzt, ist

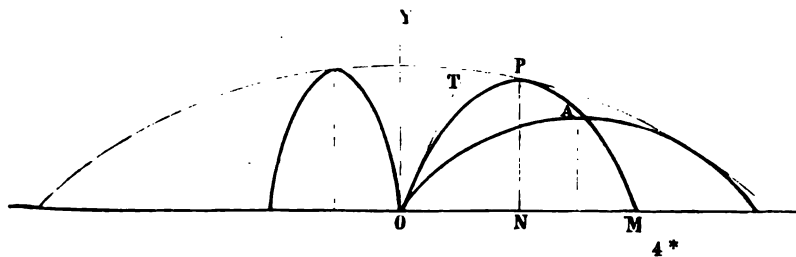
$$v = g \cdot \frac{a}{g} = a.$$

Der Körper braucht also, um die Höhe, bis zu der er gestiegen ist, zu durchfallen, genau dieselbe Zeit, die er zum Ersteigen der Höhe gebrauchte, und die Geschwindigkeit, mit der er an seinem Ausgangspunkt ankommt, ist genau von gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung als die, mit der er zu steigen begann.

Letztere Bemerkung können wir unmittelbar dahin verallgemeinern, dass ein Körper, der von einem Ausgangspunkte mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausgeht und unter Wirkung von Kräften auf seinem Wege zur Ruhe kommt, stets in den Ausgangspunkt mit der ursprünglichen Geschwindigkeit zurückkommen muss, wenn er auf demselben Wege unter Wirkung derselben Kräfte zurückkehrt. Dabei ist es sogar gleichgültig, ob die Kräfte constant oder veränderlich sind.

Untersuchen wir jetzt den Fall, dass die Richtung der dem Körper ursprünglich gegebenen Bewegung nicht mit derjenigen zusammenfällt, welche die auf ihn wirkenden Kräfte ihm ertheilen. Es wird genügen diesen Fall an einem speciellen Beispiel, an der Bewegung eines in irgend einer Richtung geworfenen Körpers zu erörtern. Nehmen wir an, dass vom Punkte  $O$  (Fig. 16) aus ein Körper mit der Geschwindigkeit  $a$  in der Richtung  $OT$

Fig. 16.





geworfen werde. Gemäss unseres in §. 8 entwickelten Grundsatzes wirken zwei Kräfte ganz unabhängig auf ihn ein; die erstere hat ihm in der Richtung  $OT$  die Geschwindigkeit  $a$  ertheilt, die zweite, die Wirkung der Schwere ertheilt ihm in jeder Sekunde nach der Richtung der Verticalen die Beschleunigung  $g$ . Die wirklich stattfindende Bewegung resultirt aus beiden.

Die Geschwindigkeit  $a$  können wir nach §. 9 in 2 Componenten zerlegen, in eine verticale und eine horizontale. Bezeichnen wir den Winkel  $TON$  mit  $\alpha$ , so ist erstere  $a \cdot \sin \alpha$ , letztere  $a \cdot \cos \alpha$ . Die Schwere wirkt in der Richtung der verticalen und zwar in entgegengesetztem Sinne mit  $a \cdot \sin \alpha$ . Nennen wir die horizontale Geschwindigkeit  $v'$ , die verticale  $v''$ , so erhalten wir demnach für die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$

$$v' = a \cdot \cos \alpha \quad v'' = a \cdot \sin \alpha - gt.$$

Man findet nach dem Fröhern daraus für die in verticaler und horizontaler Richtung zurückgelegten Wege

$$\begin{aligned} \text{für den horizontalen } x &= a \cdot \cos \alpha \cdot t \\ \text{für den verticalen } y &= a \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \end{aligned}$$

wo  $y$  positiv in der Richtung nach oben genommen ist.

Aus diesen Ausdrücken findet man in jedem Augenblicke den Ort des Körpers, wenn man in horizontaler Richtung von  $O$  aus die für die Zeit  $t$  berechnete Grösse  $x$  aufträgt und am Endpunkte dieser Linie das für die gleiche Zeit berechnete  $y$  vertical anlegt. Der durch den Endpunkt des  $y$  bestimmte Punkt ist dann der Ort des Körpers. Die Linie, welche wir durch alle so bestimmten Orte des Körpers hin legen, ist die Bahn des geworfenen Körpers. Entwickeln wir aus den zu gleicher Zeit bestehenden  $x$  und  $y$  die Grösse  $t$ , so ist

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{a \cdot \cos \alpha} \\ t &= \frac{a \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2yg}}{g}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke gleich, so gibt uns die Gleichung die Beziehung, welche immer zwischen den gleichzeitigen Werthen von  $x$  und  $y$  bestehen muss, oder lösen wir die Gleichung nach  $y$  auf, so erhalten wir in der Gleichung zu jedem  $x$  das zugehörige  $y$ . Lassen wir demnach  $x$  alle Werthe von Null an durchlaufen, so geben uns die Endpunkte aller dazugehörigen  $y$  die Bahn des Körpers.

Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{gx}{a \cos \alpha} &= a \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2gy} \\ y &= x \cdot \tan \alpha - x^2 \cdot \frac{g}{2 a^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit  $h$  die Höhe, bis zu welcher der senkrecht mit der Geschwindigkeit  $a$  emporgeworfene Körper aufgestiegen wäre, so haben wir wie vorhin

$$a^2 = 2gh,$$

und setzen wir das in unseren Ausdruck für  $y$

$$y = x \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4h \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Die analytische Geometrie sagt uns nun, dass eine Linie, für deren Punkte diese Beziehung zwischen  $x$  und  $y$ , den Coordinaten besteht, eine Parabel sei, die symmetrisch um eine verticale Axe  $NP$  liegt, so dass also die Bahn des Körpers aus einem aufsteigenden  $OP$  und einem absteigenden Stücke  $PM$  besteht, die symmetrisch zur Axe der Parabel sind.

Setzen wir  $y = 0$ , so erhalten wir 2 Werthe für  $x$ , nämlich

$$x' = 0, x'' = 2h \cdot \sin 2\alpha.$$

In dem Abstände  $x'' = OM$  schneidet also die Bahn des Körpers zum zweiten Male die Horizontale, der Abstand gibt also den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung zurückgelegt hat, wenn er wieder zu Boden fällt; es ist die Wurfweite.

Man sieht, dieselbe wächst anfänglich mit  $\alpha$ , erreicht ihren grössten Werth für  $\alpha = 45^\circ$  und nimmt dann wieder ab. Ausserdem ist sie proportional der Grösse  $h$ , also dem Quadrate der dem Körper ertheilten Anfangsgeschwindigkeit  $a$ .

Setzen wir  $\alpha = 45^\circ + m$ , so ist die Wurfweite

$$2h \cdot \sin (90^\circ + 2m) = 2h \cdot \cos 2m.$$

Für gleiche Neigungen über und unter  $45^\circ$  ist also die Wurfweite dieselbe.

Die höchste Höhe, welche der Körper erreichen kann, entspricht dem Punkte  $N$  der Mitte der Wurfweite. Setzen wir daher  $x = h \cdot \sin 2\alpha$ , so erhalten wir für  $y$

$$y = h \cdot \sin^2 \alpha.$$

Diese Höhe wächst mit  $\alpha$  und wird am grössten, wenn  $\alpha = 90^\circ$ , wenn der Körper senkrecht in die Höhe geworfen ist. Sie ist überdies mit  $h$  dem Quadrate der ertheilten Anfangsgeschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit ist in Punkten der Bahn, welche in gleicher Höhe liegen, gleich. Denn in der That, bezeichnen wir wieder die auf einander senkrechten Componenten der Geschwindigkeit mit  $v'$ ,  $v''$ , so folgt die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn  $V$  aus

$$\begin{aligned} V^2 &= v'^2 + v''^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - 2agt \sin \alpha + g^2 t^2 \\ &= a^2 - 2g(at \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2) = a^2 - 2gy, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt, dass  $V$  für gleiche  $y$ , also für Punkte gleicher Höhe der Bahn gleich ist; die Geschwindigkeiten sind symmetrisch zur mittelsten Höhe der Bahn  $PN$ . Bei  $P$  ist die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 - 2gy = a^2 - 2gh \sin^2 \alpha = a^2 - a^2 \sin^2 \alpha \\ V &= a \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Die verticale Bewegung ist dort 0 und nur noch die horizontale Componente der Anfangsgeschwindigkeit vorhanden.

Die Zeit, welche der geworfene Körper braucht, um seinen höchsten Punkt zu erreichen, ist darnach gleich jener, in welcher er niederfällt.

Man kann es sich nun zur Aufgabe machen, jenen Werth von  $\alpha$  zu bestimmen, unter welchem man den Körper zur Erreichung eines bestimmten Punktes bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit werfen muss. Nennt man die Coordinaten dieses Punktes  $x'$ ,  $y'$ , so haben wir zur Bestimmung unseres Winkels  $\alpha$  nur unsere Gleichung für  $y$ , in welcher wir setzen

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha,$$

also

$$y' - x' \tan \alpha + \frac{x'^2}{4h}(1 + \tan^2 \alpha) = 0$$

nach  $\alpha$  aufzulösen. Wir erhalten daraus

$$\tan \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - x'^2 - 4hy'}}{x'}.$$

Es gibt ausser im Falle, wo die Grösse unter dem Wurzelzeichen 0 ist, 2 Werthe für  $\alpha$ , entsprechend dem positiven und negativen Zeichen der Wurzelgrösse. Es gibt somit ausser in dem erwähnten Falle 2 Parabeln, in denen sich der Körper zur Erreichung seines Zieles bewegen kann.

Ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv, so ist die Lösung der Aufgabe möglich, d. h. alle Punkte, die durch  $x'$  und  $y'$  so bestimmt sind, dass

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' > 0,$$

können bei der durch  $h$  bestimmten Anfangsgeschwindigkeit getroffen werden, denn wir erhalten für alle 2 Werthe für  $\alpha$ .

Ist der Ausdruck negativ, so wird  $\tan \alpha$  imaginär, d. h. die Punkte, deren  $x'$  und  $y'$  so bestimmt sind, dass sie den Ausdruck

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' < 0$$

machen, sind nicht erreichbar.

Die nicht erreichbaren sind von den erreichbaren Punkten getrennt durch eine Linie, deren  $x$  und  $y$  durch die Gleichung

$$4h^2 - x^2 - 4hy = 0,$$

also

$$x^2 = 4h(h - y)$$

mit einander verknüpft sind. Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist das eine Parabel, deren Axe mit der in  $O$  errichteten  $Oy$  zusammenfällt, deren Concavität gegen die Horizontale gerichtet ist, deren Scheitel die Höhe  $h$  und deren Parameter die Länge  $4h$  hat. Mit  $h$ , also mit der Anfangsgeschwindigkeit  $a$ , ändert sich die Grenze der erreichbaren Punkte.

Wenn man alle diese Folgerungen experimentell prüft, so findet man sie mit Abweichungen, welche in dem Widerstand der Luft und einigen andern später zu betrachtenden störenden Umständen ihren Grund haben, bestätigt.

## §. 12.

**Bewegung auf der schiefen Ebene.** Wegen der vielfachen Anwendungen und des historischen Interesses, da Galilei an ihr die Gesetze der Bewegung in Folge einer constanten Kraft zuerst nachwies, möge hier noch

aus den allgemeinen Gesetzen der vorigen §§. die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene abgeleitet werden. Wir setzen voraus, der Körper sei kugelförmig und könne sich ohne Reibung auf der schiefen Ebene bewegen.

Nehmen wir an, die schiefe Ebene bilde mit dem Horizonte den Winkel  $\alpha$  und der aufgelegte Körper habe das Gewicht  $p$ . Die Richtung der Schwere ist die der Verticalen. Wir können nun nach §. 9 die Schwerkraft als eine Resultirende zweier Kräfte ansehen, deren eine auf der schiefen Ebene senkrecht steht, während die andere mit ihr parallel ist. Mit der Richtung der Schwere bildet die erstere den Winkel  $\alpha$ , die zweite den Winkel  $90^\circ - \alpha$ ; nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist die erstere daher gleich  $p \cdot \cos \alpha$  und die zweite  $p \cdot \sin \alpha$ . Die erstere dieser Kräfte wird einen Druck gegen die schiefe Ebene bewirken und zu einer Bewegung nichts beitragen; die zweite jedoch, welche parallel der schiefen Ebene ist, wird dem Körper eine Bewegung die schiefe Ebene herab zu ertheilen suchen. Ihr Werth ist  $p \cdot \sin \alpha$ , also mit dem Neigungswinkel veränderlich. Soll der Körper in Ruhe bleiben, so muss also eine Kraft  $p \cdot \sin \alpha$  parallel und die schiefe Ebene hinaufgerichtet angebracht werden. Der Versuch bestätigt es. Denn befestigt man an dem Körper einen Faden und führt ihn der schiefen Ebene parallel über eine Rolle, so muss man an der andern Seite des Fadens Gewichte  $p \cdot \sin \alpha$  anhängen, um den Körper auf der schiefen Ebene festzuhalten.

Lässt man den Körper rollen, so ist die ihn bewegende Kraft nach dem Vorigen  $p \cdot \sin \alpha$ . Diese ertheilt ihm die Beschleunigung

$$G = g \cdot \frac{p \cdot \sin \alpha}{p} = g \cdot \sin \alpha.$$

Die Gleichungen seiner Bewegung sind demnach

$$v = g \cdot \sin \alpha \cdot t \quad s = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2.$$

Wenn nun der bewegliche Körper  $A$  im Punkte  $B$  angekommen ist, so hat er den Raum  $AB$

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha}$$

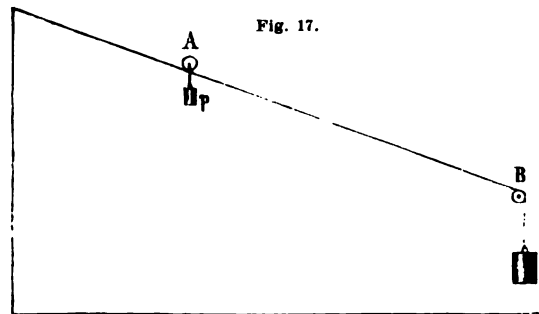
durchlaufen, wenn wir mit  $h$  die Höhe der schiefen Ebene bezeichnen. Setzt man nun diesen Werth in unsere Gleichung für  $s$ , so ist

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2$$

$$\frac{\sqrt{2gh}}{g \cdot \sin \alpha} = t$$

für die Dauer des Falls und

$$\sqrt{2gh} = v$$



für die Geschwindigkeit, mit der  $A$  in  $B$  ankommt. Wir sehen, dass, wenn  $h$  constant ist, die Dauer des Falles sich mit der Neigung der schiefen Ebene gegen die Horizontalebene ändert, dass aber die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel unten ankommt, von dem Neigungswinkel unabhängig und gleich jener ist, welche der Körper erhalten würde, wenn er die Höhe  $h$  frei durchfallen hätte.

Von der schiefen Ebene macht man oft in der Praxis Anwendung, um Lasten eine gewisse Höhe hinaufzuschaffen. Denn da ein Theil des Gewichtes von der schiefen Ebene getragen wird, so bedarf es nur einer kleineren Kraft, um die Gegenstände hinaufzuschaffen. Wir sahen, eine Kraft  $P \cdot \sin \alpha$  hält, wenn sie parallel der schiefen Ebene wirkt, dem auf derselben befindlichen Gewichte  $P$  das Gleichgewicht, durch einen etwas grösseren Druck als  $P \cdot \sin \alpha$  wird der Körper in die Höhe geschafft. Die in vielen Apparaten benutzte Schraube ist nichts wie eine um einen Cylinder gewickelte schiefe Ebene; ebenso beruht die Wirksamkeit des Keils auf den Gesetzen der schiefen Ebene. Die Wirkungen dieser Apparate sind darnach leicht zu erhalten.

### §. 13.

**Masse.** Eine in vielen Fällen äusserst bequeme Vereinfachung unserer Gleichungen für die Bewegung eines Körpers erhalten wir durch Einführung eines neuen Begriffs, desjenigen der Masse des Körpers. Lässt man einen gegebenen Körper vom Gewichte  $P$ , dasselbe in Kilogrammen gegeben, einmal frei fallen und unterwirft ihn dann der Wirkung verschiedener Kräfte  $F, F_1, F_2 \dots$ , so erhält er in allen den Fällen verschiedene Beschleunigungen. Diese Beschleunigungen verhalten sich aber nach §. 6 in allen Fällen direkt wie die wirksamen Kräfte. Bezeichnen wir dieselben, in Metern ausgedrückt, mit  $g, G_1, G_2, G_3 \dots$ , so sind deshalb die Quotienten

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{F_2}{G_2} = \frac{F_3}{G_3} = \dots = \frac{P}{g} = m$$

einander stets gleich. Kennt man deshalb einmal für einen Körper den Werth dieses Quotienten  $m$ , so kennt man auch sofort die Wirkung, welche irgend eine Kraft auf ihn ausübt. Denn man erhält in

$$G = \frac{F}{m},$$

in dem Quotienten aus der wirksamen Kraft und dem constanten Verhältnisse  $m$  die Beschleunigung, welche der Körper von der Kraft  $F$  erhält, und damit die Bewegung des Körpers vollständig bestimmt. Umgekehrt kann man aber auch aus der Beschleunigung, welche der Körper von irgend einer Kraft erhält, mit Hilfe jenes Verhältnisses die Grösse der Kraft bestimmen. Dieses für einen Körper ganz constante Verhältniss zwischen den ihn antreibenden Kräften und der Beschleunigung, welche sie ihm ertheilen, nennt man die Masse des Körpers.

Um sie zu erhalten genügt es demnach, an dem Körper irgend eine Kraft  $F$  anzubringen, die erzeugte Beschleunigung  $G$  zu beobachten, und dann  $F$  durch  $G$  zu dividiren. Da es nun ganz einerlei ist, welche Kraft man anbringt, so kann man die wählen, durch welche man das Verhältniss

am leichtesten findet, sein Gewicht  $P$ . Wir wissen, dass beim freien Fall die Beschleunigung  $g = 9^m,808$  ist, und erhalten daraus die Masse  $m$

$$m = \frac{P}{g}.$$

Man kann also die Masse eines Körpers als ein reines für denselben Körper ganz constantes Zahlenverhältniss betrachten.

Oft jedoch pflegt man die Masse eines Körpers als eine Grösse besonderer Art anzusehen und nach einer bestimmten Einheit zu messen. Dadurch tritt dann hervor, dass diese Grösse  $m$  auch eine bestimmte physikalische Bedeutung hat.

Wie wir sahen, setzen zwei verschiedene Körper einer auf sie wirkenden Kraft einen verschiedenen Widerstand entgegen. Man kann sie nun, wie in Beziehung auf ihre sonstigen Eigenschaften, auch in Beziehung auf diesen Widerstand, den wir der Trägheit der Materie zuschreiben, vergleichen und sagen: sie haben gleiche oder verschiedene Masse, je nachdem sie einer Kraft einen gleichen oder verschiedenen Widerstand entgegensetzen.

Wir nennen demnach solche Massen gleich, welche unter Einfluss gleicher Kräfte gleiche Beschleunigungen erhalten. Aus dem Begriffe der Gleichheit zweier Massen erhält man dann sofort den der Verschiedenheit, zwei Massen verhalten sich wie  $m$  zu  $n$ , wenn die eine in  $m$ , die andere in  $n$  gleiche Massen zerlegt werden kann.

Wir haben nun §. 6 gesehen, dass der Widerstand, den ein Körper einer Kraft entgegensetzt, proportional seinem Gewichte ist, dass also zwei Körper gleichen Gewichtes der Wirkung einer Kraft auch gleichen Widerstand entgegensetzen. Es läge daher nahe, Gewicht und Massen, die darnach proportional sind, zu identificiren und einem Körper von der Einheit des Gewichtes, also einem Kilogramm, auch die Einheit der Masse beizulegen. Es ist das jedoch nicht zulässig, indem, wie sich leicht zeigen lässt, die Einheit der Masse schon aus den gewählten Einheiten der Kraft, 1 Kilogramm, und Beschleunigung ein Meter bestimmt ist.

Haben wir nämlich zwei Massen  $m$  und  $m'$ , deren erste durch eine ihrem Gewicht  $P$  gleiche, die andere durch irgend eine Kraft  $P'$  angetrieben wird, so erhalten sie die Beschleunigungen  $g$  und  $g'$ . Auf die Masseneinheit wirkt dann in dem ersten Falle die Kraft  $\frac{P}{m}$ , in dem zweiten die Kraft  $\frac{P'}{m'}$  und da die Bewegung der einzelnen Theile dieselbe ist wie die der gesamten Massen, so haben wir nach dem Satze über die Proportionalität von Kraft und Beschleunigung

$$\frac{P}{m} : \frac{P'}{m'} = g : g'$$

oder

$$\frac{P}{P'} = \frac{mg}{m'g'}.$$

Wir müssen nun die Masse gleich eins setzen, welche zu den bereits gewählten Einheiten passt, die also durch die Einheit der Kraft, 1 Kilogramm, die Beschleunigung eins, 1 Meter erhält. Setzen wir daher in unserer Gleichung  $P' = 1$  und  $g' = 1$ , so wird auch  $m' = 1$  und es folgt

$$m = \frac{P}{g},$$

oder die Masse eines Körpers ist unter Annahme dieser Einheit nicht gleich seinem Gewichte, sondern gleich dem Quotienten des Gewichtes und der Zahl  $g$ , d. h. die Masse eines Körpers enthält soviel Masseneinheiten, als dieser Quotient Einheiten hat.

Die Einheit der Masse ist also jene, welche durch die Einheit der Kraft die Einheit der Beschleunigung erhält. Nun haben wir zur Kräfteinheit den Druck von einem Kubikdecimeter Wasser bei der Temperatur  $4^{\circ}$  C. auf der Sternwarte zu Paris festgesetzt. Die Masse desselben erhält unter diesem Drucke beim freien Falle die Beschleunigung von  $9^m,808$ . Nach §. 6 wird nun ein  $9,808$ mal grösseres Gewicht unter dem Einflusse dieser Kraft die Beschleunigung von 1 Meter erhalten. Wir müssen daher als Einheit der Masse diejenige nehmen, welche gleich der von  $9,808$  Kubikdecimeter Wasser bei  $4^{\circ}$  C. ist.

Es ist gut, hier schon zu beachten, dass die Masse eines Körpers eine durchaus constante Grösse ist, während das Gewicht oder der Druck, den der Körper auf seine Unterlage ausübt, nicht constant, sondern an verschiedenen Orten verschieden ist. Da aber mit geändertem Drucke der Körper auch eine andere Beschleunigung erhält, da Kraft und Beschleunigung proportional sind, so bleibt der Quotient des Gewichtes und der Beschleunigung ganz ungeändert.

Einige Physiker haben die Masse als die Quantität Materie definiert, welche in einem Körper enthalten sei. Diese Definition rührt von der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes Masse her; man darf sie jedoch nicht als ganz exakt bezeichnen. Dieselbe sagt zu viel, denn wir sind mit dem Wesen der Materie viel zu unbekannt, als dass wir sie messen könnten. Streng genommen kann man nur Kupfer mit Kupfer, Blei mit Blei vergleichen und keine Beziehung aufstellen zwischen der Materie des Kupfers und der des Bleis. Diejenigen, welche diese Definition beibehalten wollen, müssen daher vor allem definiren, was sie unter gleichen Quantitäten Materie oder gleichen Massen verstehen. Diese werden dann dahin definiert, dass gleiche Massen diejenigen sind, welche gleiches Gewicht haben. Das ist aber mit unserer Definition, dass gleiche Massen die sind, welche unter Wirkung gleicher Kräfte gleiche Beschleunigung erhalten, dasselbe, und es ist demnach besser mit dieser Definition zu beginnen, als einen unbestimmten Begriff über die Quantität der Materie voraus zu schicken.

#### §. 14.

**Verschiedene Arten die Kraft zu messen.** Als Maass für die Kraft haben wir bisher das Gewicht betrachtet, welches an einem Punkte der Kraft entgegenwirkend angebracht werden muss, um denselben das Gleichgewicht zu halten. Wir sind indess jetzt auch im Stande die Kräfte nach den Wirkungen zu messen, welche sie auf verschiedene Massen hervorbringen. Kennen wir nämlich die Beschleunigung  $G$ , welche eine Kraft  $P$  der Masse  $M$  ertheilt, so erhalten wir nach dem vorigen §.

$$P = G \cdot M,$$

oder die Kraft, welche auf die Masse  $M$  wirkt, ist gleich dem Produkte aus der Beschleunigung und der Masse, welcher sie diese Beschleunigung ertheilt.

Aus unserer Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers von der Masse  $M$  unter Wirkung der constanten Kraft  $P$

$$v = \frac{P}{M} \cdot t$$

erhalten wir unmittelbar

$$M \cdot v = P \cdot t \dots I.$$

Das Produkt aus der bewegten Masse und der von ihr erreichten Geschwindigkeit ist gleich dem Produkte aus der wirkenden Kraft und der Zeit, während welcher sie gewirkt hat.

Wirkt ein anderes Mal die Kraft  $P_1$  auf die Masse  $M_1$ , und ertheilt sie ihr in derselben Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v_1$ , so ist

$$M_1 v_1 = P_1 \cdot t$$

und

$$M \cdot v : M_1 v_1 = P \cdot t : P_1 \cdot t = P : P_1.$$

Man nennt das Produkt  $M \cdot v$  die Bewegungsgrösse der Masse  $M$ ; obige Proportion sagt daher, dass die zwei Massen bewegenden Kräfte sich verhalten wie die Bewegungsgrössen dieser Massen, jedoch unter der Voraussetzung, dass die Kräfte gleiche Zeit gewirkt haben. Das Produkt  $P \cdot t$  heisst der Antrieb der Kraft in der Zeit  $t$ .

Wir haben ferner die Gleichungen

$$v = \frac{P}{M} \cdot t; s = \frac{1}{2} \frac{P}{M} \cdot t^2$$

und aus der ersten dieser beiden Gleichungen

$$v^2 = \frac{P^2}{M^2} \cdot t^2.$$

Aus dieser Gleichung und der zweiten der eben hingeschriebenen folgt

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{P}{M} \cdot s$$

oder

$$\frac{1}{2} M \cdot v^2 = P \cdot s \dots II.$$

Das Produkt aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche sie besitzt, ist gleich dem Produkte aus der bewegenden Kraft und der Weglänge, auf welcher sie der Masse  $M$  diese Geschwindigkeit ertheilt hat. Wirken zwei Kräfte  $P$  und  $P_1$  eine gleiche Weglänge  $s$  hindurch auf zwei Massen  $M$  und  $M_1$  und ertheilen ihnen die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$ , so besteht demnach die Gleichung

$$\frac{1}{2} M v^2 : \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = P : P_1$$

oder auch

$$M v^2 : M_1 v_1^2 = P : P_1.$$

Die Produkte  $\frac{1}{2} M v^2$  oder auch  $M v^2$  nennt man die lebendige Kraft der Masse  $M$ . Nennt man letzteres die lebendige Kraft, so nennt man ersteres, die Hälfte des letztern, wohl die lebendige Potenz. Wir werden später die erstere Grösse, welche sich unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen ergibt, als lebendige Kraft bezeichnen. Wir können dann obige Gleichung dahin interpretiren, dass die bewegenden Kräfte, welche auf zwei Massen



den gleichen Weg hindurch gewirkt haben, sich verhalten wie die lebendigen Kräfte, welche sie den Massen ertheilt haben.

Das Produkt  $P \cdot s$ , aus der Kraft und dem Wege, durch welchen die Kraft gewirkt hat, nennt man die Arbeit der Kraft; diese Benennung beruht auf der Anschauung, dass eine Kraft auf dem ganzen Wege, auf welchem sie gewirkt hat, einen ihr an Grösse genau gleichen Widerstand zu überwinden hat, eine Anschauung, die sich unmittelbar aus der Eigenschaft der Trägheit oder dem von Newton zuerst ausgesprochenen Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt.

Dieses Prinzip sagt aus, dass, wenn ein Körper auf einen andern eine Wirkung, einen Zug oder einen Druck ausübt, dass er dann von dem letztern eine ebenso grosse Gegenwirkung, also einen ebenso starken Gegenzug oder Gegendruck erfährt. Dasselbe gibt sich überall in der Natur zu erkennen; ziehen wir einen Körper mit einer gewissen Kraft zu uns hin, so werden wir von demselben ebenso stark angezogen, denn ziehen wir mit aller Kraft an einem an einer Wand befestigten Seil, so fallen wir zurück, wenn es reisst. Ueben wir auf einen Körper einen Druck aus, so erfahren wir einen Gegendruck von derselben Stärke; wird z. B. ein Gas comprimirt, so übt die Spannung des Gases in jedem Momente auf den Stempel einen genau ebenso grossen Gegendruck aus, den wir in später zu besprechender Weise mit einem Manometer messen können. Der Magnet zieht das Eisen an, genau ebenso stark zieht aber, wie wir uns mit einer Wage überzeugen können, das Eisen den Magnet an.

Wie in diesen Fällen, so in allen, so auch wenn eine Kraft einen Körper in Bewegung setzt; während der ganzen Bewegung hat dieselbe einen ihr an Grösse genau gleichen Gegenzug zu überwinden, um den augenblicklichen Bewegungszustand des Körpers zu ändern. Dass dieser Gegenzug auch dann in der That vorhanden ist, können wir direkt durch den Versuch nachweisen. Man hänge das Uebergewicht  $p$  bei der Fallmaschine an das Gewicht  $P$  mit Hilfe einer Feder, so lange  $P$  auf dem obern Teller steht. Die Feder kommt dann in einen gewissen Zustand der Spannung, der beweist, dass die Feder nach entgegengesetzten Richtungen von gleich grossen Kräften gezogen wird. Denn die Feder biegt sich so lange, bis die nach beiden Seiten ziehenden Kräfte genau gleich sind. Lässt man dann das System sich bewegen, so bleibt die Feder ganz genau in derselben Weise gespannt, wie gross auch die zu bewegende Masse und wie gross auch die Geschwindigkeit ist.

Die Kraft  $P$  übt also während des ganzen Weges, durch welchen sie die Last  $M$  bewegt, den Druck  $P$  aus, wir nennen deshalb das Produkt  $P s$  ebenso die Arbeit der Kraft, wie wir die beim Heben einer Last geleistete Arbeit durch das Produkt der gehobenen Last in die gehobene Strecke messen. Dass dort aber die Arbeit durch dieses Produkt gemessen werden muss, ergibt die einfache Ueberlegung, dass es dieselbe Arbeit ist, wenn wir 1 Kilogr. auf die Höhe von 2 M. heben, wie wenn wir 2 Kilogr. auf die Höhe von 1 M. heben. Denn in beiden Fällen müssen wir zweimal 1 Kilogr. auf die Höhe von 1 M. heben.

Die Gleichung

$$P s = \frac{1}{2} m v^2$$

ist zugleich der Ausdruck eines wichtigen physikalischen Prinzips, welches

besonders in der neueren Zeit immer vollständiger erkannt ist, und dem wir an vielen Stellen begegnen werden, des Prinzips von der Erhaltung der Kraft. Dieses Prinzip sagt aus, dass in der Natur keine Kraft gewonnen und keine verloren werden kann. Wenn demnach eine Kraft irgend eine Arbeit leistet, so ist dieselbe nicht verloren, nicht verbraucht, sondern nur in eine andere Form umgesetzt, in der man sie vollständig wiederfindet. In einem speciellen Falle zeigt die obige Gleichung, sie zeigt, dass die Arbeit der Kraft  $P$  sich vollständig als lebendige Kraft in der bewegten Masse wiederfindet. Wir können auch in der That dieselbe Arbeit aus dem Körper wiedergewinnen, wenn wir ihm seine Bewegung nehmen. Wie wir später sehen werden, geschieht das z. B. dann, wenn wir eine vollkommen elastische Kugel auf eine andere ihr gleiche stossen lassen, welche sich in Ruhe befindet. Die ursprünglich bewegte Kugel kommt zur Ruhe, die gestossene bewegt sich aber mit genau derselben Geschwindigkeit weiter. Gerade der Umstand, dass eine Masse  $M$ , welche die Geschwindigkeit  $v$  besitzt, eine Arbeit leisten kann, welche  $\frac{1}{2} M v^2$  gleich ist, wenn man sie zur Ruhe bringt, berechtigt dazu, dieses Produkt als lebendige Kraft dieser Masse zu bezeichnen.

Wie in diesem Falle, so können wir leicht das Prinzip, dass keine Kraft verloren werden kann, auch in andern Fällen nachweisen. Heben wir ein Gewicht  $P$  durch die Höhe  $s$ , so haben wir die Arbeit  $P s$  nur in dieses Gewicht übertragen, das niedersinkende Gewicht kann genau dieselbe Arbeit wieder leisten.

In manchen Fällen glaubte die ältere Physik einen wirklichen Verlust von Kraft annehmen zu müssen, so z. B. bei der Reibung; wir werden später den Nachweis liefern, dass auch hier kein Verlust, nur eine Umsetzung der Kraft in andere Formen, vorzüglich in Wärme, stattgefunden hat.

### §. 15.

**Bewegung in Folge inconstanter Kräfte und Maass derselben.**  
 Unsere experimentell abgeleiteten Sätze über die Bewegungen, welche durch constante Kräfte hervorgebracht werden, und die allgemeinen Sätze über die Wirkung von Kräften, welche wir daraus ableiteten, gestatten uns nun schliesslich auch im Allgemeinen zu bestimmen, welcher Art die Bewegungen sein müssen, welche inconstante Kräfte einem festen Körper oder einem materiellen Punkte ertheilen. Wirken die Kräfte immer in derselben Richtung, aber mit verschiedener Stärke, so muss die Bewegung eine geradlinig fortschreitende, aber ungleichmässig beschleunigte sein, das heisst, die Geschwindigkeitszunahme muss zu verschiedenen Zeiten in demselben Verhältnisse sich ändern, wie die Grösse der Kraft sich ändert. Kennen wir das Gesetz, nach welchem die Kraft sich ändert, so können wir daraus auch das Gesetz bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit sich ändert. Denken wir uns nämlich die Zeit, während welcher die veränderliche Kraft wirkt, in hinreichend kleine Zeittheilchen zerlegt, so können wir, ohne ungenau zu sein, annehmen, dass innerhalb jedes dieser Zeittheilchen die Kraft constant ist, und dass sich dieselbe erst vom einen zu dem andern Zeittheilchen ändert. Innerhalb eines solchen Zeittheilchens gelten dann die Gesetze constanter Kräfte. Ist demnach  $F$  die auf die Masse  $M$  wirkende

Kraft zur Zeit  $t$ , so erhalten wir für die Beschleunigung in diesem Zeitmomente, welche wir nach §. 1 in dem Quotienten  $\frac{dv}{dt}$  ausgedrückt haben,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}.$$

Ist hierin  $F$  als eine Funktion der Zeit  $t$  gegeben, so lehrt die Integralrechnung, aus diesem Ausdrücke auch die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  und aus dieser den zurückgelegten Weg finden. Von der Form der Funktion  $F$  ist es dann, wie man sieht, abhängig, welcher Art die Bewegung sein wird, und je nach dieser Form ist auch die specielle Lösung der Aufgabe, aus der Beschleunigung Geschwindigkeit und Weg zu finden, eine verschiedene. Einzelne Fälle werden wir später behandeln.

Kennen wir das Gesetz, nach welchem eine inconstante Bewegung erfolgt, so können wir daraus dann auch umgekehrt das Gesetz ableiten, nach welchem die veränderlichen Kräfte wirken. Kennen wir nämlich den unter Wirkung der Kraft zurückgelegten Weg  $s$  in seiner Abhängigkeit von  $t$ , so können wir daraus zunächst für jeden Zeitpunkt  $t$  die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und aus dieser die Beschleunigung  $\frac{dv}{dt}$  erhalten. Für die letztere haben wir aber die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M},$$

somit auch hier die bewegende Kraft in dem Momente, für welchen jener Quotient gebildet ist,

$$F = M \cdot \frac{dv}{dt},$$

oder wir erhalten in dem Produkte der bewegten Masse und der jedesmaligen Beschleunigung das Maass für die Grösse der veränderlichen Kraft in jedem Momente der Bewegung.

Auch diesen Satz werden wir häufig anwenden, um in speciellen Fällen das Gesetz, nach welchem eine Kraft wirkt, aus der bekannten Bewegung abzuleiten.

Wirken die Kräfte auf eine bewegte Masse nicht immer in derselben Richtung ein, so wird die Bewegung der Masse nicht eine geradlinig fortschreitende, sondern die Bahn des Bewegten wird eine von dem Gesetze der Kraftwirkung abhängige krumme Linie. Eine Untersuchung dieses Falles würde uns zu weit in die theoretische Mechanik einführen. Es ist unsere Aufgabe, die experimentellen Grundlagen der Bewegungslehre aufzusuchen und aus ihnen die Gesetze abzuleiten, nach denen die Kräfte wirken; das haben wir im Bisherigen für die fortschreitende Bewegung gethan, indem wir gleichzeitig einige der wichtigsten Sätze der theoretischen Mechanik aus denselben folgerten, soweit wir dieselben zum Verständniss des Folgenden nothwendig hatten. Wegen des Weitern müssen wir auf die Lehrbücher der Mechanik verweisen. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung anderer Bewegungen, die wir in der Natur vorfinden.

Zweites Capitel.  
Von den drehenden Bewegungen.

§. 16.

**Entstehung der drehenden Bewegung.** Wir haben bereits mehrfach erwähnt, dass ein Loth, wenn es aus seiner verticalen Richtung gebracht wird, nicht einfach in diese zurückfällt, sondern eine Bewegung um die senkrechte Lage ausführt. Ganz dasselbe sehen wir, wenn wir einen festen Stab an seinem einen Ende an einer horizontalen Axe befestigen, so dass ihm eine Bewegung in der verticalen Ebene gestattet bleibt. Sich selbst überlassen sinkt er herab und macht Schwingungen um die senkrecht nach unten gerichtete Lage. Solche Bewegungen, bei denen jeder Punkt Kreise um einen festen Mittelpunkt beschreibt mit einem Radius, der gleich ist seinem Abstände von der Drehungsaxe, nennen wir drehende Bewegungen.

Bei den drehenden Bewegungen können wir, ebenso wie bei den fortschreitenden, von einer Geschwindigkeit und Beschleunigung sprechen, die wir hier jedoch nicht auf die absolut zurückgelegten Räume, sondern auf die Bogen beziehen, welche die einzelnen Punkte eines in drehender Bewegung begriffenen Körpers beschreiben. Demnach legen wir zweien in drehender Bewegung begriffenen Körpern gleiche Winkelgeschwindigkeit bei, wenn ihre einzelnen Punkte in gleichen Zeiten gleiche, verschiedene, wenn sie in gleichen Zeiten verschiedene Bogen zurücklegen.

Es ist klar, dass dabei die Wege, welche verschiedene Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit zurücklegen, absolut genommen sehr verschieden sein können, indem die absolute Länge der Bögen proportional ist dem Abstände der Punkte von der Drehungsaxe.

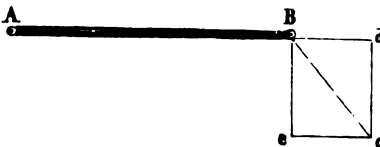
Ist die Winkelgeschwindigkeit eine ungleichförmige, so gilt alles, was wir im §. 1 über die fortschreitende Bewegung gesagt haben, auch hier, wenn wir nur statt der Längen die beschriebenen Bögen in Winkelmaass einführen.

Die drehende Bewegung wird ebenso von Kräften veranlasst als die fortschreitende, dass es aber nur Kräfte sind, die in einer ganz bestimmten Richtung wirken, lässt sich sofort erkennen.

Wir setzen voraus, dass unserem Stabe nur eine Bewegung in der Drehungsebene gestattet ist; es ist klar, dass dann alle Kräfte, welche senkrecht zu dieser Ebene, also parallel zur Drehungsaxe wirken, unwirksam sind, und dass von Kräften, die unter einer andern Neigung gegen diese Ebene wirken, nur der Theil thätig sein kann, dessen Richtung in die Drehungsebene fällt, wenn wir die ganze Kraft nach §. 9 in eine zu der Drehungsebene senkrechte und in eine andere zerlegt haben, deren Richtung in die Drehungsebene fällt.

Aber auch der Theil kann nicht immer vollständig zur Erzeugung der Bewegung dienen. Wirkt z. B. auf den bei *A* um eine horizontale Drehungsaxe beweglichen Stab *AB* bei *B* eine Kraft nach der Richtung *Bc*, so können wir diese nach §. 9 ebenfalls in

Fig. 18.



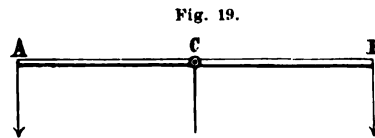
zwei Theile zerlegen, die zu einander senkrecht, eine in der Richtung  $Bd$ , die andere in der Richtung  $Be$  wirksam sind. Die erstere dieser Kräfte  $Bd$  übt nur einen Zug in der Richtung senkrecht zur Axe; ihr wird durch die Befestigung des Punktes  $A$  und den Zusammenhang der Theile des Stabes  $AB$  das Gleichgewicht gehalten. Nur die andere Kraft  $Be$  kann eine drehende Bewegung des Stabes um die Axe bei  $A$  veranlassen.

Wir sehen also, von allen Kräften, welche auf einen Körper wirken, der um eine feste Axe drehbar ist, können nur diejenigen eine drehende Bewegung erzeugen, welche in einer zur Drehungsaxe senkrechten Ebene senkrecht auf die Verbindungslinie des Angriffspunktes mit der Drehungsaxe wirken.

Die Schwere ist nun bei dem in  $A$  aufgehängten Stabe eine solche Kraft. Hat der Stab die horizontale Lage, so treibt das Gewicht jedes Theiles des Stabes ihn herunter, und deshalb sinkt er nieder. Die schwingenden Bewegungen um die senkrechte Lage sind dann die Folge davon, dass die Schwere, sobald der Stab die horizontale Lage verlassen hat, nur mehr zum Theil wirkt, indem dann nur eine, je mehr sich der Stab der senkrechten Lage nähert, immer kleiner werdende Componente ihn antreibt, auf der andern Seite aber die aufsteigende Bewegung des Stabes durch die Schwere gehemmt wird. Ehe wir jedoch diese Bewegung genauer untersuchen, müssen wir uns zu der Frage wenden, ob es gleichgiltig für die entstehende Bewegung sei, in welchem Abstände von der Drehungsaxe eine Kraft auf unseren Stab wirkt.

### §. 16.

**Die statischen Momente.** Wenn wir einen Stab an einer festen verticalen Drehungsaxe  $C$  aufhängen, so kann ihm nach dem Vorigen die Schwere, welche dann der Drehungsaxe parallel wirkt, keine Bewegung mittheilen. Wenn wir dann an dem Stabe ein und dieselbe Kraft einmal



in  $A$ , dann in  $C$  und später in  $B$  anbringen, so ist die Wirkung derselben immer eine andere. In  $A$  angebracht bringt dieselbe eine Drehung hervor, bei  $C$  nicht und bei  $B$  wieder eine Drehung, welche aber der erstern entgegengesetzt ist. Die Kraft hat also je nach ihrem Angriffspunkte ganz verschiedene Wirkungen. Wie diese mit dem Angriffspunkte sich ändern, haben wir jetzt näher zu untersuchen.

Zu dem Ende wenden wir einen gleichmässig gearbeiteten Stab an, der an allen Stellen gleich dick ist, so dass gleiche Längen desselben Stabes gleich schwer sind. Führen wir durch die Mitte seiner Länge eine Axe, die wir horizontal befestigen, so finden wir, dass er in Ruhe bleibt, dass er keine Drehung unter dem Einflusse der Schwere annimmt. Der Grund dieser Erscheinung ist nach der eben gemachten Bemerkung klar; denn die Schwere will den beiden Hälften des Stabes entgegengesetzte Drehungen ertheilen; da die beiden Hälften des Stabes sich aber nicht eine ohne die andere drehen können, so heben sich die Drehungen auf.

Befestigen wir nun an dem Ende  $B$  (Fig. 20) unserer so aufgehängenen Stange ein Gewicht  $P$ , so muss dieselbe eine Drehung annehmen, da jetzt eine Kraft auf unseren Körper einwirkt, welche senkrecht ist zur Verbindungslinie des Angriffspunktes und der Drehungsaxe in der senkrecht zur Drehungsaxe gelegten Verticalebene.

Bringen wir aber nun an eben dem Punkte  $B$  eine nach oben gerichtete Kraft von genau gleicher Grösse an, etwa indem wir an  $B$  einen Faden befestigen, diesen über eine feste Rolle  $R$  führen und an der andern Seite des Fadens das Gewicht  $Q = P$  anbringen, so tritt keine Drehung des Stabes ein. Dies ist nach dem Fröhern auch nicht zu erwarten, das Gewicht  $P$  wird durch ein ihm genau gleiches, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkendes äquilibrirt.

Verschieben wir nun aber das Gewicht  $P$  von  $B$  nach  $D$  hin, so sehen wir sofort, dass unser Stab sich dreht und zwar in einem dem fröhern entgegengesetzten Sinne; er folgt dem Zuge, den das Gewicht  $Q$  auf ihn ausübt, obwohl das genau gleiche Gewicht  $P$  den Stab nach unten zu drehen sucht. Es folgt daraus, dass eine Kraft einen Körper um so leichter zu drehen vermag, je weiter ihr Angriffspunkt von der Drehungsaxe entfernt ist. Wenn wir das Gewicht  $P$  nun vergrössern, so sehen wir bald, dass wir im Stande sind, die Drehung wieder aufhören zu machen. Ist nämlich  $CD = \frac{1}{2} CB$ , so hört die Drehung auf, sobald das Gewicht  $P$  verdoppelt ist, sobald wir also statt  $P$  das Gewicht  $2P$  an  $D$  angehängt haben. Eine neue Verschiebung des Gewichtes ruft sofort wieder Bewegung hervor, entweder nach unten, wenn wir das Gewicht dem Ende  $B$  nähern, oder nach oben, wenn wir das Gewicht der Drehungsaxe nähern. Welches aber auch der Abstand  $a$  von  $C$  sei, in welchem wir das Gewicht aufhängen, immer finden wir, dass eine entsprechende Aenderung der Gewichte das Gleichgewicht wieder herstellt und zwar, wenn wir das Gewicht  $P$  so ändern, dass das Verhältniss besteht

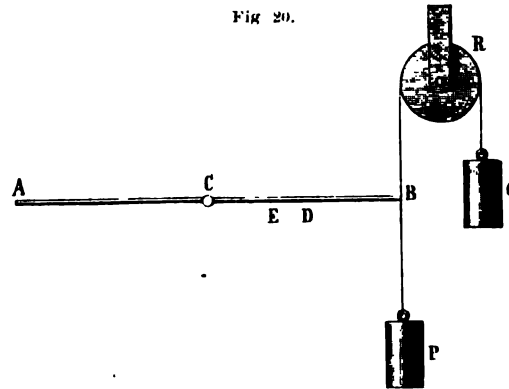
$$P : Q = CB : a,$$

oder dass

$$a \cdot P = CB \cdot Q.$$

Es folgt daraus, dass zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegengesetzte Drehung zu ertheilen suchen, sich im Gleichgewicht halten, wenn sie sich verhalten umgekehrt wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Drehungsaxe, oder wenn die Produkte aus den Kräften und den Abständen ihrer Angriffspunkte gleich sind. Diese Produkte nennt man die *statischen* oder *mechanischen Momente*; so dass wir also den Satz so aussprechen können: Zwei Kräfte, welche einem Körper entgegengesetzte

Fig. 20.



Drehungen zu ertheilen suchen, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre mechanischen Momente gleich sind.

Wir sahen eben, dass eine zwischen  $C$  und  $A$  angebrachte nach unten gerichtete Kraft unseren Stab in demselben Sinne zu drehen sucht wie das Gewicht  $Q$ . Anstatt zwischen  $C$  und  $B$  eine nach oben ziehende Kraft anzubringen, können wir daher eine ihr genau gleiche, in gleichem Abstände von  $C$  zwischen  $C$  und  $A$  anbringen. Auch dann wird nach dem obigen Satze eine Bewegung nicht eintreten können, wenn die Momente gleich sind. Der Versuch bestätigt diese Folgerung unmittelbar.

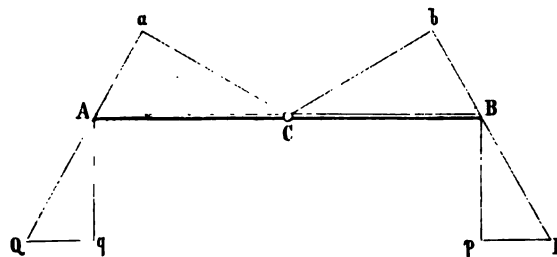
Wenn wir anstatt des einen Gewichtes  $P$  eine Reihe von verschiedenen Gewichten  $p, p', p'' \dots$  in den Abständen  $d, d', d'' \dots$  anbringen und statt des einen Gewichtes  $Q$  eine Anzahl Gewichte  $q, q', q'' \dots$  in den Abständen  $c, c', c'' \dots$ , so folgt unmittelbar und zeigt uns der Versuch, dass Gleichgewicht ist, wenn die Summe der Momente nach der einen Richtung gleich ist der Summe der Momente nach der andern Richtung, wenn also

$$pd + p' d' + p'' d'' \dots = qc + q' c' + q'' c'' \dots$$

Wir können nun, wie man es in der Geometrie zu machen pflegt, entweder die Kräfte  $p, q$ , wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken, oder die Richtungen  $d, c$ , die an entgegengesetzter Seite der Drehungsaxe liegen, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen und dann unseren Satz kurz dahin aussprechen, dass sich ein drehbarer Körper im Gleichgewicht befindet, wenn die Summe der Drehungsmomente der auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null ist.

Wir haben bisher zwar alle Kräfte, welche nicht senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Angriffspunktes und der Drehungsaxe wirken, aus der Betrachtung ausgeschlossen, aber auch auf solche Kräfte lässt sich der soeben erkannte Satz ausdehnen, wenn man nur anstatt des Abstandes

Fig. 21.



des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsaxe den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft von der Drehungsaxe einführt. Denn wirkt z. B. auf unsere Stange  $AB$  an dem Hebelarm (so nennt man kurz den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsaxe, während man den ganzen Stab als Hebel bezeichnet)  $CB$  die Kraft  $P$ , aber in einer zu  $CB$  nicht senkrechten Richtung, so wirkt eigentlich von dieser Kraft nur

$$p = P \cdot \cos \alpha,$$

wenn wir mit  $\alpha$  den Winkel  $pBP$  bezeichnen und das Moment der Kraft ist

$$P \cdot \cos \alpha \cdot CB.$$

Der senkrechte Abstand der Kraft  $P$  von der Drehungsaxe ist aber gleich  $Cb$ . Da nun aber  $Cb$  senkrecht auf  $bP$  und  $CB$  senkrecht auf  $pB$  ist, so ist auch  $\angle bCB = \alpha$  und  $Cb = CB \cdot \cos \alpha$ ; also

$$P \cdot Cb = P \cdot \cos \alpha \cdot CB.$$

Man sieht, dass es gleichwerthig ist, das Moment der Kraft  $P$  als  $p \cdot CB$  oder als  $P \cdot C'b$  zu nehmen, dass also unter der soeben gemachten Restriction der Satz von den Momenten auch für Kräfte gilt, welche nicht senkrecht zu ihrem Hebelarm sind.

Den Satz, dass bei der drehenden Bewegung zwei Kräfte sich das Gleichgewicht halten, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Abstände von der Drehungsaxe, haben wir im vorigen als einen experimentellen Erfahrungssatz hingestellt. Man kann indess diesen Satz auch als eine Folgerung der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über die Arbeit der Kraft erhalten. Aus jenen Sätzen ergibt sich nämlich, dass ein System, an welchen Kräfte an verschiedenen Punkten, welche starr mit einander verbunden sind, im Gleichgewicht sein muss, wenn bei der Bewegung des Systemes in dem einen Sinne genau soviel Arbeit geleistet wird wie bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne. Um die Bedeutung des Satzes und seine Richtigkeit zu erkennen, sei  $AB$  Fig. 22 ein starrer Hebel, den wir uns ohne Gewicht denken wollen. Derselbe liege horizontal und sei bei  $A$  um eine verticale Axe drehbar. Im Punkte  $C$  im

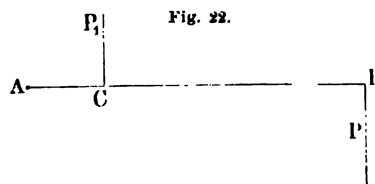


Fig. 22.

Abstände  $l_1$ , von der Drehungsaxe sei eine Schnur an dem Hebel befestigt, diese sei über eine Rolle geführt und trage das Gewicht  $P_1$ . Ebenso sei bei  $B$  im Abstände  $l$  von der Drehungsaxe eine Schnur angebracht, welche das

Gewicht  $P$  trage. Sinkt nun das Gewicht  $P$ , so muss  $P_1$  gehoben werden, sinkt  $P_1$ , so muss  $P$  gehoben werden. Dass nun, wenn zum Heben des Gewichtes  $P_1$  eine Arbeit geleistet werden muss, welche gleich ist der Arbeit des Gewichtes  $P$ , das ist gleich dem Produkte aus  $P$  und dem von ihm zurückgelegten Wege, durch diese beiden an dem Hebel angreifenden Kräfte keine Bewegung entstehen kann, das ergibt sich folgendermassen. Würde durch die constant wirkende Kraft  $P$  das System aus der Ruhe in Bewegung versetzt, so würde ebenso in jedem Momente die Bewegung geändert, somit eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen müssen. Dadurch erhielten die Massen der Gewichte  $P$  und  $P_1$  eine mit der Zeit wachsende lebendige Kraft, welche wieder einen gewissen Arbeitsvorrath repräsentirt. Wir würden demnach durch das niedersinkende Gewicht die der Arbeit der Kraft  $P$  gleiche Arbeit des Emporhebens von  $P_1$  leisten, ausserdem noch in der Form von lebendiger Kraft einen mit der Zeit wachsenden Vorrath von Arbeit erhalten, diese letztere Arbeit somit ohne einen entsprechenden Aufwand von Kraft, somit aus nichts schaffen. Das widerspricht aber dem Principe von der Erhaltung der Kraft. Ist demnach die bei der Bewegung in dem einen Sinne zu leistende Arbeit gleich jener im entgegengesetzten Sinne, so müssen sich die Kräfte  $P$  und  $P_1$  im Gleichgewicht halten.

Um nun daraus die Bedingung des Gleichgewichts zu erhalten, denken wir uns, der Hebel werde in dem Sinne der Kraft  $P$  um den sehr kleinen Bogen  $\varphi$  gedreht, so sinkt das Gewicht  $P$  um die Strecke  $l \varphi$ , die diesem Sinken entsprechende Arbeit ist  $P \cdot l \cdot \varphi$ . Dabei würde das Gewicht  $P_1$  um  $l_1 \cdot \varphi$  gehoben, die geleistete Arbeit wäre somit  $P_1 \cdot l_1 \cdot \varphi$ , die Bedingung, dass keine Bewegung eintritt, ist somit

$$P \cdot l \cdot \varphi = P_1 \cdot l_1 \cdot \varphi$$



oder

$$P \cdot l = P_1 \cdot l_1,$$

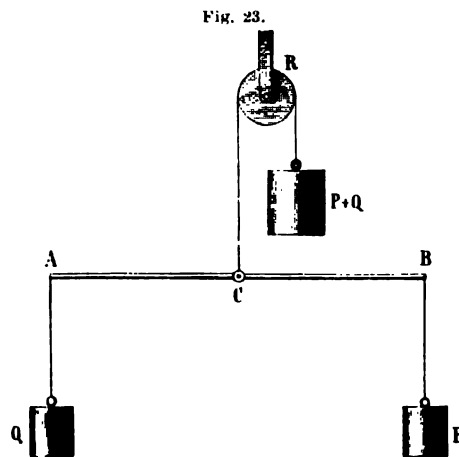
die mechanischen Momente müssen gleich oder ihre Summe, dieselbe gebildet wie vorhin, muss gleich Null sein.

Ganz in derselben Weise erhält man aus diesem Prinzip die Bedingung des Gleichgewichtes, wenn an dem Hebel beliebig viele Kräfte angreifen; es müssen auch dann, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die bei einer eintretenden Drehung auf beiden Seiten geleisteten Arbeiten gleich sein, somit muss die Summe aller statischen Momente gleich Null sein.

Das soeben zur Ableitung des Satzes von den statischen Momenten angewandte Prinzip, dass, wenn die von den thätigen Kräften bei einer Bewegung des Systems nach entgegengesetzten Richtung geleisteten Arbeiten einander gleich sind, das System durch diese Kräfte keine Bewegung annehmen kann, gilt, wie leicht ersichtlich, nicht nur in dem speciellen Falle, an dem wir es erläutert haben, sondern ganz allgemein. Haben wir irgend ein System von Punkten, an dem irgend welche Kräfte angreifen, und ist bei einer beliebigen Bewegung des Systems die von den Kräften geleistete Arbeit gleich derjenigen, die bei der gerade entgegengesetzten Bewegung geleistet wird, so können die Kräfte keine Bewegung erzeugen, sie halten sich das Gleichgewicht. Das so allgemein ausgesprochene Prinzip nennt man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, eine Bezeichnung, welche andeuten soll, dass die Bewegungen, welche man zur Bestimmung der Arbeit betrachtet, eben nur gedachte, nicht wirklich stattfindende sind. In der Mechanik wird dieses Prinzip vielfach angewandt um die Bedingungen des Gleichgewichtes für ein System von Punkten, an welchen Kräfte angreifen, zu formuliren.

### §. 18.

**Mittelpunkt paralleler Kräfte.** Wenn wir einen Hebel  $AB$  haben, an dem eine Reihe von Kräften so vertheilt ist, dass die Summe der Momente in Bezug auf den Unterstützungspunkt gleich Null ist, so tritt keine Drehung desselben ein. Würden wir nun den Unterstützungspunkt plötzlich

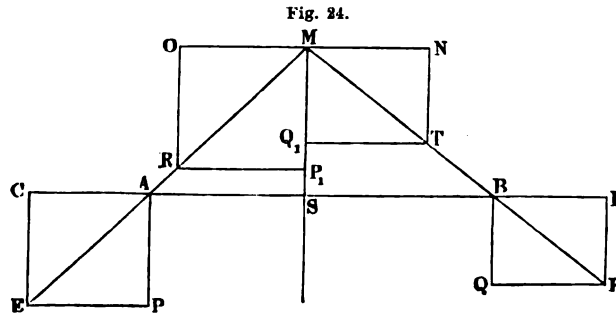


lösen, so würde der Stab in Folge der parallel wirkenden Kräfte eine fortschreitende Bewegung annehmen. Diese können wir jedoch hemmen, wenn wir an  $C$  (Fig. 23) in entgegengesetzter Richtung eine Kraft anbringen, welche gleich ist der Summe der Kräfte  $P + Q$ , also an einem über die Rolle  $R$  geführten Faden das Gewicht  $P + Q$  befestigen. Das in Punkte  $C$  angebrachte Gewicht  $P + Q$  hält also den beiden einzelnen in  $A$  und  $B$  angebrachten Gewichten  $Q$  und  $P$  das Gleichgewicht. Diese beiden Kräfte wirken also zusammen

ebenso, als wenn am Punkte  $C$  eine ihrer Summe  $P + Q$  gleiche Kraft angebracht wäre.

Wir schliessen demnach, dass auch parallele Kräfte eine Resultirende haben, welche ihrer Summe gleich ist, und dass diese Resultirende an jenem Punkte angreift, in Bezug auf den die Summe der Momente gleich Null ist, d. h., dass in Bezug auf die fortschreitende Bewegung die vertheilt angebrachten Kräfte gerade so wirken, als wenn an diesem Punkte alle Kräfte angebracht wären. Dieser Punkt heisst daher der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Dass in der That der Punkt, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist, und dass die Mittelkraft der Summe der einzelnen Kräfte gleich ist, können wir auch ohne Versuch schon aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm beweisen. Sei zu dem Ende  $AB$  (Fig. 24) eine feste Linie, an deren Enden die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  parallel nach derselben Richtung wirkend angebracht seien;



die Längen  $AP$  und  $BQ$  stellen diese Kräfte dar. Bringen wir nun an  $A$  und  $B$  die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte  $AC$  und  $BD$  an, so wird, da sie sich gegenseitig aufheben, durch dieselben am System gar nichts gestört. Die je zwei Kräfte  $AC$  und  $AP$ , sowie  $BQ$  und  $BD$  geben nun eine Resultirende, welche der Grösse und Richtung nach durch die Diagonalen  $AE$  und  $BF$  der Parallelogramme  $APCE$  und  $BQFD$  gegeben ist. Verlängern wir diese beiden Diagonalen rückwärts, bis sie sich im Punkte  $M$  schneiden, und denken wir uns den Punkt  $M$  mit der Linie  $AB$  in fester unveränderlicher Verbindung, so können wir uns die beiden Kräfte  $AE$  und  $BF$  an dem Punkte  $M$  in  $MR$  und  $MT$  angebracht denken. Die Verhältnisse des Systems werden dadurch nicht geändert. Die beiden Kräfte  $MR$  und  $MT$  können nun nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zerlegt werden und zwar  $MR$  in  $OM = AC$  und  $MP_1 = AP$  und  $MT$  in  $MN = BD$  und  $MQ_1 = BQ$ . Die beiden Kräfte  $MO$  und  $MN$  heben sich auf, und es bleibt zuletzt als Resultirende die Summe der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$ . Daraus folgt zunächst, dass zwei parallele Kräfte eine ihrer Summe gleiche Resultirende oder Mittelkraft haben, deren Richtung jener der gegebenen Kräfte parallel ist, und die in einem Punkte  $S$  zwischen  $A$  und  $B$  die feste Linie  $AB$  schneidet. Die Lage dieses Punktes  $S$  auf  $AB$  erhält man aus den ähnlichen Dreiecken  $ASM \sim RP_1M$  und  $BSM \sim TQ_1M$ . Dieselben geben nämlich

$$\begin{aligned} AS : SM &= RP_1 : P_1M \\ BS : SM &= Q_1T : Q_1M. \end{aligned}$$

Und daraus, da  $SM = SM$ ,  $RP_1 = Q_1T$ ,  $P_1M = P$ ,  $Q_1M = Q$ ,

$$AS \cdot P = BS \cdot Q,$$

dieselbe Bedingung, welche wir soeben experimentell ableiteten, der Punkt  $S$  liegt so, dass in Bezug auf ihn die Summe der Momente gleich Null ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die einander parallelen Kräfte auch gleich gerichtet seien, aber ebenso haben zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte im allgemeinen eine Resultirende. Um die Grösse

derselben und ihren Angriffspunkt zu finden, sei  $AB$  wieder eine feste Linie, an deren Punkten  $A$  und  $B$  die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  wirken. Wir können nun  $P$  als Mittelkraft zweier anderer betrachten, von denen die eine bei  $B$  angreift und der Kraft  $Q$  genau gleich ist, während die andere gleich  $P - Q$  ist und in einem Punkte  $S$  angreift, dessen Lage durch die Bedingung gegeben ist, dass

$$AS \cdot (P - Q) = AB \cdot Q$$

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Die beiden Kräfte  $Q$  und  $Q_1$  heben sich nun auf, da sie an demselben Punkte nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es bleibt also als Resultirende die Differenz der gegebenen Kräfte übrig, deren Richtung der ursprünglichen parallel ist, und deren Angriffspunkt wieder jener Punkt ist, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist. Denn aus der Gleichung für  $AS$  folgt

$$AS \cdot P = (AS + AB) Q = SB \cdot Q.$$

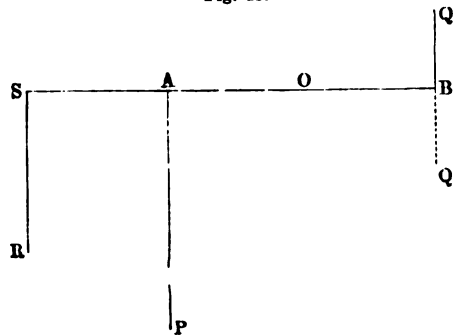
In einem Falle jedoch haben parallele Kräfte keine Resultante, bringen sie also ein ganz freies System von Punkten nicht in eine fortschreitende Bewegung, nämlich dann, wenn sie einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Dass in dem Falle keine resultirende Kraft vorhanden ist, folgt zunächst aus dem soeben abgeleiteten Satze, nach welchem bei entgegengesetzt gerichteten Kräften die Resultante gleich der Differenz der beiden Kräfte ist, es folgt aber weiter aus der Gleichung für die Lage des Angriffspunktes

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Da nämlich in diesem Falle  $P - Q = 0$  ist, so wird  $AS$  unendlich, oder es gibt keinen in endlicher Entfernung von  $A$  liegenden Punkt, an dem die Mittelkraft anzubringen wäre, es gibt also keine Mittelkraft.

Ein solches Kräftepaar bringt deshalb nur eine drehende Bewegung hervor um irgend einen zwischen  $A$  und  $B$  liegenden Punkt, und das statische Moment eines solchen Paares ist gleich dem Produkte aus einer der Kräfte und dem senkrechten Abstände beider. Denn welchen Punkt wir uns auch als fest denken, wo auch der Punkt  $O$  (Fig. 25) liegt, das Drehungs-

Fig. 25.



moment ist, da beide Kräfte das System in demselben Sinne drehen,  $P \cdot AO + Q \cdot BO$ , also wenn  $P$  und  $Q$  gleich sind, gleich  $P(AO + OB) = P \cdot AB$ .

Die Kräftepaare, ihr Verhalten und die Zusammensetzung derselben ist besonders von Poinot untersucht worden, der die Anwendung derselben zur Bestimmung der drehenden Bewegungen in die Mechanik eingeführt hat. Wir verweisen wegen dieser schönen Theorie auf die Lehrbücher der Mechanik und besonders auf Poinot: *Eléments de statique*.

Haben wir eine Reihe von in einer Richtung wirkenden parallelen Kräften anstatt an einer Linie an einer festen Ebene vertheilt, so müssen auch diese eine Resultirende und einen Mittelpunkt haben. Denn wir können je zwei solcher Kräfte zusammensetzen, die Resultirende dann mit einer folgenden und so fort, bis uns die Mittelkraft der zuletzt übrig bleibenden Kräfte die Resultante und deren Angriffspunkt den Mittelpunkt aller Kräfte gibt.

Sind die parallelen Kräfte nicht alle gleich gerichtet, so liefert die Zusammensetzung der gleich gerichteten zunächst zwei entgegengesetzt gerichtete Resultirende. Greifen dieselben an verschiedenen Punkten an, so erhalten wir die Resultirende und den Angriffspunkt in der vorhin angegebenen Weise; sind dieselben gleich, so gibt es nur ein resultirendes Paar.

Die gleichen Schlüsse können wir anwenden, wenn eine Anzahl paralleler Kräfte anstatt an einer festen Ebene an einem festen Körper angreift; auch für diesen muss es einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte geben, in welchem wir uns die Summe aller Kräfte angebracht denken können, und für den die Summe aller Momente gleich Null ist. Ist deshalb dieser Punkt befestigt, z. B. durch ihn eine Drehungsaxe geführt, so kann der Körper weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen.

Aendern wir die Richtung sämmtlicher auf ein System wirkender Kräfte, aber so, dass sie einander parallel bleiben, so wird der Angriffspunkt der Resultirenden nicht geändert. Denn nach der Drehung ist die Summe der Momente in Bezug auf eben diesen Punkt gerade so gleich Null wie vorher. Es folgt das unmittelbar aus unserm Satze über die Momente. Haben sich z. B. alle Kräfte um den Winkel  $\alpha$  gedreht, so sind die Momente der einzelnen Kräfte  $p, p_1, p_2 \dots$  in den Abständen  $d, d_1, d_2 \dots$ , wenn sie vorher waren

$$pd + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \dots,$$

nach der Drehung

$$p \cdot d \cdot \cos \alpha + p_1 d_1 \cdot \cos \alpha + p_2 d_2 \cdot \cos \alpha \dots,$$

also gleich

$$(pd + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \dots) \cdot \cos \alpha,$$

und war die Summe  $pd \dots$  gleich Null, so ist sie es auch, wenn sie mit  $\cos \alpha$  multiplicirt worden ist.

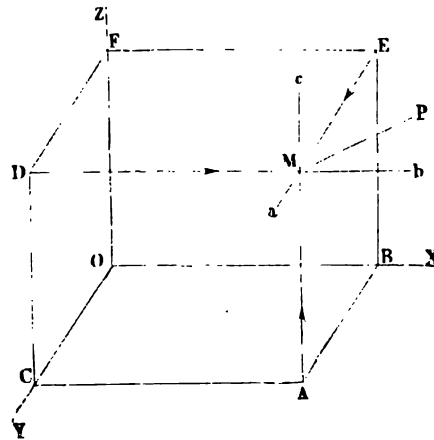
### §. 19.

**Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen.** Im §. 10 haben wir die Bedingungen abgeleitet, unter welchen ein Körper im Gleichgewicht ist, an welchem beliebige Kräfte wirksam sind,

die aber alle an demselben Punkte angreifen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes fielen dort zusammen mit denen eines Punktes. Die wenigen Sätze über die drehende Bewegung, welche wir im Bisherigen abgeleitet haben, setzen uns nun auch in den Stand das Gleichgewicht eines Körpers zu bestimmen, an welchem beliebige Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen. Diese Gleichgewichtsbedingungen fallen zusammen mit denen eines Systems von Punkten, an denen Kräfte angreifen, und die mit einander in fester Verbindung stehen. Ein solches System kann eine fortschreitende und eine drehende Bewegung annehmen. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist daher die, dass weder die eine noch die andere Bewegung eintreten kann.

Wir denken uns, um diese Bedingungen zu erhalten, durch das System drei feste zu einander senkrechte Richtungen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  (Fig. 26) gelegt, die sich in einem Punkte  $O$  schneiden. Sei  $M$  ein Punkt des Systems, dessen

Fig. 26.



Lage durch die Coordinaten  $MA=z$ ,  $CA = OB = x$ ,  $AB = CO = y$  gegeben sei. An  $M$  greife eine Kraft  $P$  an, deren Richtung durch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gegeben ist, welche sie mit den Achsen bildet. Zerlegen wir die Kraft nach den drei Achsen, so erhalten wir als Componenten parallel

$$\begin{aligned} X & Mb = P \cdot \cos \alpha, & Y & Ma = P \cdot \cos \beta, \\ Z & & & \\ & & & Mc = P \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Diese drei Kräfte können dem System sowohl eine fortschreitende Bewegung, jede nach ihrer Richtung, als auch eine drehende Bewegung geben.

Um die drehenden Bewegungen und ihre Momente zu erhalten, legen wir durch  $M$  die Linien  $MD$ ,  $ME$ ,  $MA$  parallel den drei Achsen und verlängern dieselben, bis sie die durch die Achsen bestimmten Ebenen schneiden in den Punkten  $D$ ,  $E$ ,  $A$ , die wir uns fest mit dem Punkte  $M$  verbunden denken. Wir können uns dann, ohne irgend etwas an der Wirkung von  $P$  zu ändern, die drei Componenten an den Punkten  $D$ ,  $E$ ,  $A$  angreifend denken. Jede dieser Kräfte kann dann das System um zwei Achsen drehen,  $Mb$  um  $Z$  und  $Y$ ,  $Ma$  um  $Z$  und  $X$ ,  $Mc$  um  $Y$  und  $X$ , so dass also für jede der drei Achsen zwei Drehungsmomente vorhanden sind. Diese je zwei Drehungen sind aber einander entgegengesetzt, so dass z. B.  $Mb$  das System in entgegengesetzter Richtung um  $Z$  zu drehen sucht als  $Ma$ . Um deshalb die Drehungsmomente für die drei möglichen Drehungen zu bekommen, müssen wir die Differenzen der je zwei Momente bilden. Die senkrechten Abstände der drei Krafrichtungen von den Drehungsachsen sind nun

$$\begin{aligned} Ma \text{ von } X & \text{ gleich } EB = z; & Ma \text{ von } Z & \text{ gleich } EF = x \\ Mb \text{ „ } Z & \text{ „ } DF = y; & Mb \text{ „ } Y & \text{ „ } DC = z \\ Mc \text{ „ } X & \text{ „ } AB = y; & Mc \text{ „ } Y & \text{ „ } AC = x. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Drehungen positiv, welche im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers erfolgen, wenn wir in der Richtung der positiven Axen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  stehend die Füße in der Drehungsebene, auf die Drehungsebene hinsehen, so sind die Drehungsmomente um

$$\begin{aligned} Mc \cdot AB - Ma \cdot EB &= P \cdot \cos \gamma \cdot y - P \cdot \cos \beta \cdot z = P (y \cdot \cos \gamma - z \cdot \cos \beta); \\ Mb \cdot DC - Mc \cdot AC &= P \cdot \cos \alpha \cdot z - P \cdot \cos \gamma \cdot x = P (z \cdot \cos \alpha - x \cdot \cos \gamma); \\ Ma \cdot EF - Mb \cdot DF &= P \cdot \cos \beta \cdot x - P \cdot \cos \alpha \cdot y = P (x \cdot \cos \beta - y \cdot \cos \alpha). \end{aligned}$$

Haben wir nun eine beliebige Anzahl von Kräften  $P$ , welche an beliebigen Punkten des Systems angreifen und beliebig gerichtet sind, so können wir für jede Kraft ganz dieselbe Zerlegung vornehmen, und wir erhalten für jede Kraft drei mit den eben abgeleiteten gleich gerichtete Componenten und drei Drehungsmomente, welche das System in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen. Die je drei Componenten sowie die Summen der drei Drehungsmomente müssen nun einzeln gleich Null sein, wenn das System weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen soll. Bezeichnen wir diese einzelnen Summen mit  $\Sigma$ , so ist also die nothwendige und ausreichende Bedingung des Gleichgewichtes

$$\begin{aligned} \Sigma P \cdot \cos \alpha &= 0; \quad \Sigma P \cdot \cos \beta = 0; \quad \Sigma P \cdot \cos \gamma = 0; \\ \Sigma P (y \cdot \cos \gamma - z \cdot \cos \beta) &= 0; \quad \Sigma P (z \cdot \cos \alpha - x \cdot \cos \gamma) = 0; \\ \Sigma P (x \cdot \cos \beta - y \cdot \cos \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Denn diese Gleichungen zeigen, dass das System in Folge der wirklichen Kräfte nach keiner Richtung fortschreiten und nach keiner Richtung gedreht werden kann.

Sind die Kräfte alle parallel einer und derselben Richtung, etwa parallel  $MP$ , so dass sie entweder nach  $MP$  oder der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, sind also für alle die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  dieselben, so vereinfachen sich die Bedingungen des Gleichgewichtes bedeutend. Da es nämlich gleichgültig ist, ob wir in einer Summe alle einzelnen Glieder mit ein und demselben Factor multipliciren, oder ob wir die Summe der einzelnen Glieder mit diesem Factor multipliciren, so können wir in obigen Gleichungen die Cosinus als gemeinschaftliche Factoren herausschreiben; wir erhalten dann als Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \Sigma P &= 0; \quad \cos \beta \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos \gamma \cdot \Sigma P = 0; \\ \cos \gamma \cdot \Sigma Py - \cos \beta \cdot \Sigma Pz &= 0; \quad \cos \alpha \cdot \Sigma Pz - \cos \gamma \cdot \Sigma Px = 0; \\ \cos \beta \cdot \Sigma Px - \cos \alpha \cdot \Sigma Py &= 0, \end{aligned}$$

wo in den letzten Gleichungen die Summen  $Px$  etc. die Summen der Produkte aller einzelnen Kräfte in die Abstände  $x$  etc. ihrer Angriffspunkte bedeuten.

Da nun  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Winkel sind, welche ein und dieselbe Richtung mit drei festen Richtungen bildet, dieselben also nie gleichzeitig rechte werden können, so können obige Gleichungen nur bestehen, wenn

$$\Sigma P = 0; \quad \Sigma Px = 0; \quad \Sigma Py = 0; \quad \Sigma Pz = 0,$$

wenn also sowohl die Summe aller Kräfte gleich Null ist, als auch die Summe

der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände  $x, y, z$  ihrer Angriffspunkte von den drei festen Richtungen.

Ist das System nicht im Gleichgewicht, so kann es eine Resultante haben oder auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden. Wenn es eine Resultante hat, so muss Gleichgewicht bestehen, wenn wir an dem Mittelpunkte eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte Kraft anbringen. Ist die Resultante gleich  $R$ , und sind die Abstände des Mittelpunktes von den drei festen Richtungen  $x_1, y_1, z_1$ , so erhalten wir, da nach dem Vorigen die Richtung der Resultante derjenigen der gegebenen Kräfte parallel sein, dieselbe mit den Axen also dieselben Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bilden muss, zur Bestimmung derselben und ihres Angriffspunktes

$\cos \alpha \Sigma P = \cos \alpha \cdot R$ ;  $\cos \beta \Sigma P = \cos \beta \cdot R$ ;  $\cos \gamma \cdot \Sigma P = \cos \gamma \cdot R$ ,  
somit zunächst, wie wir vorhin schon ableiteten,

$$\Sigma P = R.$$

Ferner aber

$$\begin{aligned} \cos \gamma \cdot \Sigma Py - \cos \beta \cdot \Sigma Pz &= \cos \gamma \cdot Ry_1 - \cos \beta \cdot Rz_1; \\ \cos \alpha \cdot \Sigma Pz - \cos \gamma \cdot \Sigma Px &= \cos \alpha \cdot Rz_1 - \cos \gamma \cdot Rx_1; \\ \cos \beta \cdot \Sigma Px - \cos \alpha \cdot \Sigma Py &= \cos \beta \cdot Rx_1 - \cos \alpha \cdot Ry_1 \end{aligned}$$

und daraus  $\Sigma Px = Rx_1$ ;  $\Sigma Py = Ry_1$ ;  $\Sigma Pz = Rz_1$

oder

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}; y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}; z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Wir erhalten demnach die Lage des Mittelpunktes durch seine Abstände  $x_1, y_1, z_1$  von den Axen, indem wir die Summen der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände ihrer Angriffspunkte von den festen Richtungen durch die Summe der Kräfte dividiren.

Das System reducirt sich auf ein Kräftepaar, wenn  $\Sigma P = 0$ , aber eine der Summen  $\Sigma Px, \Sigma Py, \Sigma Pz$  oder alle drei von Null verschieden sind.

Es genüge an diesen Entwicklungen, um zu zeigen, wie wir aus den experimentell abgeleiteten Gesetzen über die drehende Bewegung in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen über die Wirkung von Kräften auf mathematischem Wege zu weitem Gesetzen gelangen können; ein weiteres Verfolgen dieses Weges würde uns zu weit in die analytische Mechanik führen.

## §. 20.

**Schwerpunkt.** Wenden wir uns jetzt dazu, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines beliebig festen Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, abzuleiten. Alle Körper, welche der Schwere unterworfen sind, unterliegen der Wirkung paralleler vertical abwärts gerichteter Kräfte, da die Schwere auf alle Theile des Körpers gleichmässig wirkt. Die Schwere wirkt überdies an einem Orte in der gleichen Richtung, nur an sehr weit von einander entfernten Orten sind die Richtungen der Schwerkraft merklich verschieden. Für die der Schwere unterworfenen Körper gibt es demnach einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte, an dem wir uns alle Kräfte vereinigt denken können, und in Bezug auf welchen die Summe der Drehungsmomente gleich

Null ist. Man nennt diesen Punkt, in welchem man sich demnach das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, den Schwerpunkt des Körpers. Ist deshalb der Schwerpunkt unterstützt, oder greift an ihn eine vertical nach oben gerichtete dem Gewichte des Körpers gleiche Kraft an, so kann der Körper gar keine, weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen, derselbe ist im Gleichgewicht.

Der Schwerpunkt ist in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn wir auch den Körper drehen. Denn eine solche Drehung hat denselben Erfolg, als wäre bei ungeänderter Körperlage die Richtung sämtlicher Kräfte um einen gleichen Winkel gedreht. Wie aber in §. 18 nachgewiesen ist, ändert eine solche Drehung den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht.

Den Schwerpunkt von Linien, Flächen und geometrisch bestimmbar Körpern kann man mit Hülfe der in den beiden letzten Paragraphen abgeleiteten Sätze und der vorhin gemachten Bemerkung, dass ein an den Schwerpunkt vertical nach oben angebrachter Zug, der gleich dem Gewichte des Körpers ist, den Körper im Gleichgewichte halte, berechnen.

Wir können nämlich jeden schweren Körper als ein System von Punkten betrachten, auf welche alle vertical abwärts gerichtete Kräfte wirken, indem wir den ganzen Körper als aus einzelnen schweren Elementen zusammengesetzt ansehen. Die Summe der Gewichte dieser Elemente ist das Gewicht des Körpers. Denken wir uns nun durch den Körper ein dreiaxiges rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt und für alle einzelnen schweren Punkte die Abstände  $x, y, z$  gegeben, so sind es einfach die am Schlusse des vorigen §. abgeleiteten Gleichungen, die uns die Lage des Schwerpunktes geben. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Körperelemente  $p$ , das Gewicht des ganzen Körpers  $P$ , so sind die Abstände des Schwerpunktes von den drei Axen

$$x_1 = \frac{\sum p x}{P}; y_1 = \frac{\sum p y}{P}; z_1 = \frac{\sum p z}{P}.$$

Um demnach die Lage des Schwerpunktes eines solchen Körpers zu erhalten, haben wir das Gewicht jedes Punktes mit seinem Abstände von jeder der drei Axen zu multipliciren, für jede Axe die Summe dieser Produkte zu bilden und jede dieser Summen durch das Gewicht des ganzen Körpers zu dividiren. Diese drei Quotienten bestimmen die Lage des Schwerpunktes, indem sie uns die Abstände desselben von den drei festen Richtungen geben.

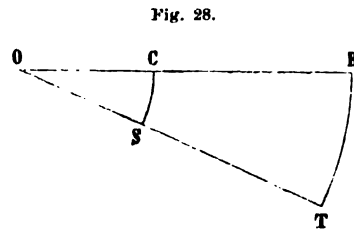
In welcher Weise die Rechnungen in speciellen Fällen durchzuführen sind, können wir hier nicht besprechen, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik.

Man kann indess leicht den Schwerpunkt der Körper, auch solcher, die geometrisch nicht bestimmbar sind, experimentell bestimmen, indem man den Satz von den statischen Momenten anwendet.

Ist nämlich der Schwerpunkt unterstützt, so ist der Körper in Ruhe, ist er es nicht, so nimmt der Körper, wenn seine fortschreitende Bewegung gehemmt ist, eine drehende Bewegung an, bis sein Schwerpunkt sich senkrecht unter dem Unterstützungspunkte befindet. Denn wir sahen vorhin, dass eine Reihe von Kräften nur dann keine drehende Bewegung hervorruft,



durch gegebene Kräfte in Bewegung zu setzenden Systems. Denken wir uns deshalb zunächst wieder einen gewichtslosen Hebel  $OB$  Fig., 28 an dessen Ende bei  $B$  eine Kraft  $p$  angreife, von der wir der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, dass sie in jeder Lage des Hebels constant und senkrecht zum Hebelarm sei. Im Punkte  $B$



befinde sich eine Masse  $m$ , welche durch die Kraft  $p$  in Bewegung gesetzt wird. Der Weg  $BT = s$ , den die Masse in irgend einer Zeit zurücklegt, ist dann, da wir die Kraft als immer von gleicher Grösse vorausgesetzt haben,

$$BT = s = \frac{1}{2} \frac{p}{m} \cdot t^2.$$

Nennen wir die Länge des Hebels  $l$  und den Bogen, dem der Weg  $s$  entspricht,  $\varphi$ , so können wir auch schreiben

$$s = l\varphi = \frac{1}{2} \frac{p}{m} \cdot t^2; \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{p}{l \cdot m} \cdot t^2.$$

Nun werde die Masse  $m$  bei  $B$  fortgenommen, und es soll dann bei  $C$  im Abstände  $s$  von  $O$  eine Masse  $m'$  angebracht werden, so dass auch jetzt in derselben Zeit  $t$  durch die Wirkung der bei  $B$  angreifenden Kraft  $p$  von dem System derselbe Bogen  $\varphi$  beschrieben wird.

Um die Grösse dieser Masse zu bestimmen, haben wir zunächst uns daran zu erinnern, dass die bei  $B$  wirkende Kraft  $p$  in dem Punkte  $C$  einen Druck  $p'$  ausübt, der gegeben ist durch die Gleichung

$$pl = p' \cdot r \\ p' = p \cdot \frac{l}{r}$$

Der Weg den die Masse  $m'$  in der Zeit  $t$  durch die Wirkung dieser Kraft zurücklegt, ist

$$s' = \frac{1}{2} \frac{p \cdot l}{m' \cdot r} \cdot t^2.$$

Dieser Weg soll nun demselben Bogen  $\varphi$  entsprechen, es ist also  $s' = r\varphi$  und

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{p \cdot l}{r^2 m'} \cdot t^2.$$

Aus den beiden Gleichungen für  $\varphi$  ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{p}{l m} = \frac{1}{2} \frac{p \cdot l}{r^2 m'}$$

oder

$$m \cdot l^2 = m' \cdot r^2.$$

Die in dem Punkte  $C$  anzubringende Masse  $m'$  bekommt also durch die in  $B$  angreifende Kraft  $p$  dieselbe Winkelbewegung wie die in  $B$  angebrachte Masse  $m$ , wenn das Produkt aus der Masse  $m'$  und dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsaxe gleich ist der Masse  $m$ , multiplicirt mit dem Quadrate ihres Abstandes, oder zwei Massen erhalten durch eine und dieselbe an demselben Punkte angreifende Kraft dieselbe drehende Be-

wegung, wenn sie ihrer Grösse nach umgekehrt sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

Das Produkt  $mr^2$  einer Masse  $m$  in das Quadrat ihres Abstandes  $r$  von der Drehungsaxe bezeichnet man als das Trägheitsmoment der Masse; mit dieser Bezeichnung können wir somit den eben abgeleiteten Satz auch kurz so aussprechen, dass durch eine gegebene Kraft verschiedene Massen gleiche drehende Bewegung erhalten, wenn sie gleiche Trägheitsmomente besitzen.

Das Trägheitsmoment einer gegebenen Masse bedeutet gleichzeitig jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angebracht werden muss, um die im Abstande  $r$  befindliche Masse  $m$  zu ersetzen, sodass die Winkelgeschwindigkeit dieselbe ist.

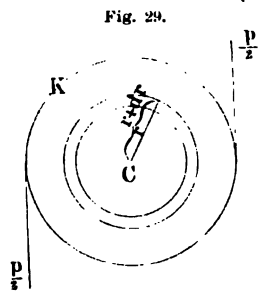
Dieser Satz von den Trägheitsmomenten setzt uns in den Stand die drehende Bewegung eines Systems, in welchem Massen in verschiedenen Punkten vorhanden sind und von verschiedenen Kräften angegriffen werden, oder auch diejenige eines ausgedehnten Körpers wenigstens dann vollständig zu bestimmen, wenn wir die Vertheilung der Massen und Kräfte kennen. Indem wir nämlich die Trägheitsmomente der vorhandenen Massen bestimmen, erhalten wir jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die sämtlichen vorhandenen Massen so ersetzt, dass die drehende Bewegung, welche diese in der Abstandseinheit vorhandene Masse durch die wirksamen Kräfte erhält, genau jener gleich ist, welche die vertheilten Massen erhalten. Durch Bestimmung der statischen Momente erhalten wir dann die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifende Kraft, welche die sämtlichen an verschiedenen Punkten angreifenden Kräfte ersetzt. Da diese Kraft in demselben Punkte angreift, in welchem die durch das Trägheitsmoment bestimmte Masse sich befindet, so erhalten wir die Beschleunigung dieser Masse, indem wir den Quotienten aus der Kraft und der Masse bilden, und aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit und den in einer gegebenen Zeit zurückgelegten Weg ganz nach den im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätzen.

Bei einem ausgedehnten um eine Axe drehbaren Körper haben wir, um das Trägheitsmoment desselben zu bilden, uns den Körper in einzelne Punkte zerlegt zu denken; die Summe der Trägheitsmomente aller einzelnen Punkte ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Hat der Körper eine geometrisch bestimmte Gestalt, und ist die Masse in ihm gleichförmig vertheilt, sodass also innerhalb des Körpers gleiche Volumina überall gleiche Masse enthalten, so lässt sich das Trägheitsmoment berechnen und damit die drehende Bewegung des Körpers vollständig bestimmen.

Um diese Rechnung zu übersehen, wollen wir als Beispiel die drehende Bewegung einer Kreisscheibe um eine durch ihre Axe gehende Drehungsaxe untersuchen. Die Kreisscheibe  $K$  Fig. 29 habe den Durchmesser  $a$ , die Dicke  $b$ , und an ihrem Umfange greife eine constante Kraft  $p$  an etwa so, dass wir die Drehungsaxe der Scheibe vertical gestellt, dann um die Scheibe zwei Schnüre gelegt denken, welche an einem Punkte des Umfangs befestigt und dann über zwei Rollen geführt sind. An den über die Rollen herabhängenden Enden der Schnüre seien an jeder das Gewicht  $\frac{p}{2}$  befestigt. Sei ferner das Gewicht von einem Cubikcentimeter

der Scheibe gleich  $q$ , somit die in einem Kubikcentimeter vorhandene Masse gleich  $\frac{q}{g}$ .

Um das Trägheitsmoment der Scheibe zu erhalten, denken wir uns aus derselben einen Ring ausgeschnitten, dessen innerer Radius gleich  $r$  und dessen äusserer den



von  $r + dr$  hat, sodass der Ring die unendlich kleine Dicke  $dr$  besitzt. Da wir den Ring als unendlich dünn voraussetzen, so ist der äussere Umfang nur unendlich wenig von dem innern verschieden, wir können deshalb ohne einen merklichen Fehler das Volumen dieses Ringes gleich  $2\pi r \cdot dr \cdot b$  setzen. Die Masse desselben wird dann  $2\pi b r \cdot dr \cdot \frac{q}{g}$ . Eben deshalb, weil wir den

Ring als unendlich dünn voraussetzen, können wir den Abstand aller seiner Punkte von der durch die Axe des Ringes gehenden Drehungsaxe als gleich und zwar als gleich  $r$  nehmen. Dann wird das Trägheitsmoment dieses Ringes gleich

$$r^2 \cdot 2\pi \cdot b \cdot r \cdot dr \cdot \frac{q}{g} = 2\pi b \cdot \frac{q}{g} \cdot r^3 dr.$$

Das Trägheitsmoment unserer ganzen Scheibe erhalten wir nun, indem wir die Trägheitsmomente aller der unendlich vielen unendlich dünnen Ringe summiren, welche wir erhalten, wenn wir in obigem Ausdrucke für  $r$  nach und nach alle Werthe einsetzen von 0 bis  $a$ . Bezeichnen wir das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe mit  $K$ , so können wir die Summe schreiben

$$K = \int_0^a 2\pi b \cdot \frac{q}{g} \cdot r^3 dr$$

worin das Summenzeichen  $\int_0^a$  bedeuten soll, dass die Summe aller einzelnen

Werthe des unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruckes genommen werden soll, wenn nach und nach für  $r$  alle zwischen 0 und  $a$  enthaltenen Werthe eingesetzt werden. Jedes Glied dieser Summe hat den für alle gleichen Coefficienten  $2\pi b \cdot \frac{q}{g}$ ; da es nun bei einer Summe gleichgültig ist, ob wir alle Glieder mit einem Coefficienten multipliciren und dann summiren, oder ob wir erst die Glieder ohne Coefficienten summiren und dann die Summe mit dem Coefficienten multipliciren, so können wir den Coefficienten auch vor das Summenzeichen setzen und schreiben

$$K = 2\pi b \cdot \frac{q}{g} \cdot \int_0^a r^3 dr.$$

Den hier noch unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck  $r^3 dr$  können wir nun als die Differenz zwischen zwei Werthen des Ausdrucks  $\frac{1}{4} r^4$  auffassen, welche sich nur durch einen unendlich kleinen Unterschied in dem

Werthe von  $r$  unterscheiden, in welchem wir also das eine mal  $r = r$ , das andere mal für  $r$  setzen  $r + dr$ . Denn es ist nach bekannten Sätzen

$$(r + dr)^4 = r^4 + 4r^3 dr + 6r^2 dr^2 + 4r dr^3 + dr^4.$$

Da nun aber  $dr$  von uns als unendlich klein vorausgesetzt wird, so ist das mit  $dr^2$  multiplicirte, und noch mehr die folgenden Glieder, gegen  $4r^3 dr$  selbst unendlich klein, so dass wir sie ganz ausser Acht lassen können. Dann aber ist

$$(r + dr)^4 - r^4 = 4r^3 dr$$

$$r^3 dr = \frac{1}{4} \{ (r + dr)^4 - r^4 \}.$$

Unsere Summe ist also die Summe aller dieser Differenzen, wenn wir nach und nach für  $r$  alle Werthe zwischen 0 und  $a$  einsetzen. Diese Summe ist aber einfach gleich der Differenz des letzten Gliedes, in welchem wir  $r = a$  setzen, also  $\frac{1}{4} a^4$  und des ersten, in welchem wir  $r = 0$  setzen, also 0, oder gleich  $\frac{1}{4} a^4$ . Denn schreiben wir die in Wirklichkeit unendliche Reihe der Werthe hin, welche  $\frac{1}{4} r^4$  annehmen kann, deren erster 0 ist, deren folgende wir mit  $\frac{1}{4} r_1^4, \frac{1}{4} r_2^4, \dots$  bezeichnen wollen, so ist dieselbe

$$0, \frac{1}{4} r_1^4, \frac{1}{4} r_2^4, \dots, \frac{1}{4} r_n^4, \frac{1}{4} a^4.$$

Die einzelnen zu summirenden Differenzen sind

$$\frac{1}{4} r_1^4 - 0; \frac{1}{4} r_2^4 - \frac{1}{4} r_1^4; \dots, \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{4} r_n^4$$

und die Summe derselben

$$\frac{1}{4} r_1^4 - 0 + \frac{1}{4} r_2^4 - \frac{1}{4} r_1^4 + \dots, \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{4} r_n^4.$$

Da nun in dieser Summe jedes Glied der Reihe von Werthen, welche  $\frac{1}{4} r^4$  annehmen kann, ausser dem letzten und ersten, einmal positiv und einmal negativ vorkommt, so heben sich alle Glieder ausser dem letzten, das nur positiv, und dem ersten, das nur negativ vorkommt, auf, und die Summe ist die Differenz des letzten und ersten Gliedes.

Wir wollen hier die Bemerkung anknüpfen, dass diese Bestimmung des Werthes einer Summe ganz allgemein gilt. Ist eine Summe von der Form

$$\int_a^b f(x) dx$$

zu bilden, und können wir zeigen, dass innerhalb der Grenzen  $a$  und  $b$

$$f(x) dx = \varphi(x + dx) - \varphi(x),$$

so ist immer die Summe gleich

$$\varphi(b) - \varphi(a),$$

wie sich durch eine der eben durchgeführten genau gleiche Betrachtung ergibt. Wir werden von diesem Satze sehr häufig Gebrauch machen.

Setzen wir den soeben gefundenen Werth für diese Summe

$$\int_0^a r^3 dr = \frac{1}{4} a^4$$

Der in die Klammer eingeschlossene Theil des Ausdruckes  $K$  ist die Masse der Kugel; bezeichnen wir dieselbe mit  $M$ , so wird

$$K = \frac{2}{5} \cdot M \cdot a^2.$$

Die beiden Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie man durch Rechnung das Trägheitsmoment eines homogenen Körper von genau bestimmter Gestalt erhalten kann. Für alle Formen, welche die bei dieser Rechnung vorkommenden Summirungen auszuführen gestatten, kann man so das Trägheitsmoment bestimmen.

Ausser durch Rechnung lässt sich das Trägheitsmoment einer Masse auch experimentell bestimmen. Dafür geeignete Methoden werden wir später kennen lernen.

Das Trägheitsmoment einer Masse hat nach der Definition dieses Begriffes keineswegs einen für die gegebene Masse immer gleichen Werth, sondern dieser Werth hängt wesentlich ab von der Lage der Drehungsaxe, um welche die drehende Bewegung stattfindet. Auf specielle Fälle derart einzugehen, würde zu weit führen; wir wollen in der Beziehung nur einen allgemeinen Satz beweisen, der uns immer gestattet, das Trägheitsmoment einer Masse in Bezug auf eine beliebige Axe zu bestimmen, wenn man es in Bezug auf eine der beliebigen Axe parallele durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Axe kennt. Ist nämlich  $M$  die Masse eines Körpers und  $Mk^2$  das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe, so ist in Bezug auf eine mit der letztern parallele und im Abstände  $z$  von derselben befindliche Drehungsaxe das Trägheitsmoment gleich  $M(k^2 + z^2)$ .

Um diesen Satz zu beweisen, sei der senkrechte Abstand  $a$  des Punktes  $m$  Fig. 31 von der durch den Schwerpunkt  $o$  des Körpers senkrecht zur Ebene der Zeichnung gehenden Axe durch zwei senkrechte Coordinaten  $x$  und  $y$  gegeben, so dass

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

Das Trägheitsmoment des im Punkte  $m$  befindlichen Massenelementes  $m$  ist dann

$$ma^2 = m(x^2 + y^2),$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ist dann die Summe der so für alle Massenelemente gebildeten Momente

$$\Sigma ma^2 = \Sigma m(x^2 + y^2) = M \cdot k^2.$$

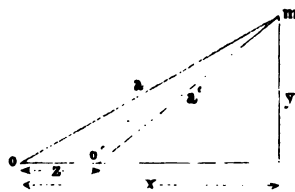
Liege nun die zweite Axe in der Richtung der senkrechten Abstände  $x$  von der ersten Axe um  $z$  entfernt, sie gehe durch  $o'$ , so ist das Trägheitsmoment des in  $m$  befindlichen Massenelementes in Bezug auf diese neue Axe

$$m a'^2 = m \{ (x - z)^2 + y^2 \}$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers, die Summe der Trägheitsmomente aller Massenelemente

$$\Sigma m a'^2 = \Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \}.$$

Fig. 31.



einsetzen, welche in der Kugel vorkommen. Die obere Hälfte der Kugel bekommen wir, indem wir für  $x$  nach und nach alle Werthe einsetzen, von 0 bis  $a$ , die untere, deren Scheiben an der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes sich befinden, wenn wir für  $x$  alle Werthe zwischen 0 und  $-a$  einsetzen, da wir, um die in Bezug auf den Mittelpunkt, von dem aus wir die Abstände  $x$  rechnen, entgegengesetzte Lage der Scheiben zu beachten, den nach unten gerechneten Abständen  $x$  das negative Vorzeichen geben müssen. Wir erhalten somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, indem wir von  $-a$  anfangen nach und nach für  $x$  alle Werthe von  $-a$  bis  $+a$  setzen und alle die so sich ergebenden Werthe des Ausdruckes (1) summiren, oder

$$K = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \frac{g}{g} (a^2 - x^2)^2 dx$$

oder da  $\frac{1}{2} \pi \frac{g}{g}$  ein constanter Coefficient ist,

$$K = \frac{1}{2} \pi \frac{g}{g} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx.$$

Führen wir die angedeutete Quadrirung unter dem Summenzeichen durch, so zerlegt sich die Summe in drei Summen

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = \int_{-a}^{+a} a^4 dx - \int_{-a}^{+a} 2a^2 x^2 dx + \int_{-a}^{+a} x^4 dx.$$

Da nun

$$a^4 dx = a^4 (x + dx) - a^4 x,$$

so ist

$$\int_{-a}^{+a} a^4 dx = a^4 (a - (-a)) = 2a^5.$$

Da weiter

$$2a^2 x^2 dx = \frac{2}{3} a^2 (x + dx)^3 - \frac{2}{3} a^2 x^3,$$

so ergibt sich in derselben Weise

$$\int_{-a}^{+a} 2a^2 x^2 dx = \frac{2}{3} a^2 (a^3 - (-a)^3) = \frac{4}{3} a^5.$$

Und da schliesslich

$$x^4 dx = \frac{1}{5} (x + dx)^5 - \frac{1}{5} x^5,$$

so wird die letzte Summe

$$\int_{-a}^{+a} x^4 dx = \frac{1}{5} (a^5 - (-a)^5) = \frac{2}{5} a^5.$$

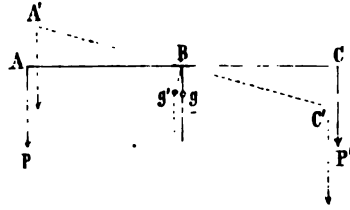
Setzen wir die so gefundenen Werthe in den abgeleiteten Ausdruck für  $K$ , so wird

$$K = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{g}{g} \left\{ 2a^5 - \frac{4}{3} a^5 + \frac{2}{5} a^5 \right\} = \frac{1}{2} \pi \frac{g}{g} \cdot \frac{10}{15} \cdot a^5$$

$$K = \left\{ \frac{1}{3} \pi a^3 \frac{g}{g} \right\} \frac{2a^2}{5}.$$

Gewichte, in welche die zu vergleichenden Körper gelegt werden. Sind die Schalen leer, so ist der Wagbalken im Gleichgewicht, wenn die durch den Aufhängepunkt  $B$  und den Schwerpunkt  $g$  der Wage gelegte Ebene vertical ist; der Wagbalken steht dann horizontal.

Fig. 32.



Die erste Bedingung nun, welche bei Construction einer Wage erfüllt sein muss, ist die, dass die beiden Hebelarme  $AB$  und  $BC$  unter einander genau gleich sein, und dass sie ganz symmetrisch zur Ebene  $Bg$  liegen müssen. Ist diese Bedingung erfüllt, so können wir aus der Horizontalstellung des Wagbalkens auf die Gleichheit der in die Schalen gelegten Gewichte schliessen; denn diese besteht oder wird gestört, wenn gleiche oder ungleiche Gewichte in die Wagschalen gelegt werden. Der Schwerpunkt  $g$  kann nun in der Ebene  $Bg$  entweder unter oder über  $B$  liegen oder mit  $B$  zusammenfallen. Je nach der Lage desselben kann die Wage gut oder schlecht sein. Weisen wir das nach, zunächst unter der Voraussetzung, dass die drei Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (Fig. 32) in einer geraden Linie liegen.

Ist der Wagbalken  $AC$  in seinem Schwerpunkte aufgehängt, so befindet er sich nach §. 20 im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes. Sind nun die Wagschalen leer, oder befinden sich gleiche Gewichte in denselben, so ist er in allen Lagen im Gleichgewicht. Wenn jedoch in einer Schale das geringste Uebergewicht vorhanden ist, so dreht sich der Wagbalken sofort um  $90^\circ$  nach der Seite des Uebergewichtes hin. Denn durch das geringste Uebergewicht würde nach dem vorigen der Schwerpunkt nach der Seite des Uebergewichtes hin in der Linie  $AC$  verschoben; soll das System im Gleichgewicht sein, so muss aber der Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Verticalebene sein. Dazu ist aber in diesem Falle eine Drehung von  $90^\circ$  nothwendig, denn nur wenn die ganze Linie  $AC$  vertical steht, kann ein anderer Punkt derselben mit dem Punkte  $B$  sich in einer Verticalebene befinden. Fällt also der Schwerpunkt der Wage genau mit dem Aufhängepunkt zusammen, so ist bei gleicher Belastung der Wagbalken in allen Lagen, bei ungleicher nur in der senkrechten Lage im Gleichgewicht. Mit einer so construirten Wage würde es demnach nicht möglich sein zu wiegen; der Schwerpunkt muss eine andere Lage haben.

Würde der Schwerpunkt über der Drehungsaxe liegen, so wäre der Wagbalken im Zustande des labilen Gleichgewichtes; die geringste Bewegung selbst bei gleicher Belastung würde ein vollständiges Umschlagen desselben zur Folge haben. Es würde sodann gar nicht möglich sein, zwei Gewichte mit einander zu vergleichen, die Wage würde schlechter sein als in dem vorigen Falle.

Es bleibt sonach nur die dritte Lage des Schwerpunktes möglich, er muss unter dem Aufhängepunkt liegen. Das zweite wesentliche Erforderniss für Herstellung einer Wage ist also das, der Schwerpunkt der Wage muss unter dem Aufhängepunkt liegen. Sind die Wagschalen leer oder gleich belastet, so befindet sich die Wage im Zustande des stabilen Gleichgewichtes, wenn der Schwerpunkt  $g$  senkrecht unter  $B$  liegt; bewegt man

dennach den Wagbalken, so kehrt er immer in diese Lage zurück. Legt man dann ungleiche Gewichte in die Schalen, so bewirkt ihr Unterschied, wenn  $P'$  schwerer ist, eine Neigung von  $AC$  nach  $P'$  hin, so dass der Wagbalken die Lage  $A'C'$  annimmt. Der Schwerpunkt der Wage hebt sich nach  $g'$  so lange, bis das Moment des Gewichtes des Wagbalkens gleich ist dem Momente des Uebergewichtes. Man sieht, in diesem Falle wird sich die Wage immer ins Gleichgewicht stellen; in horizontaler Lage, wenn sie mit gleichen, in geneigter Lage, wenn sie mit ungleichen Gewichten belastet ist. Man wird daher aus der horizontalen oder geneigten Lage des Wagbalkens auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Gewichte schliessen können.

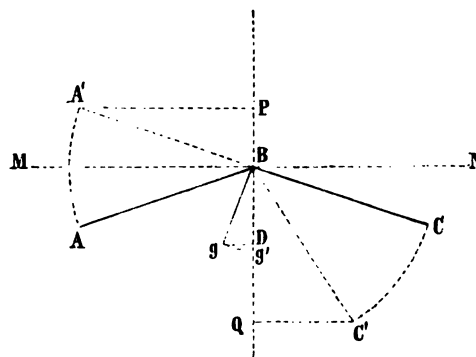
**2. Empfindlichkeit der Wage.** Diese beiden Bedingungen genügen, um die Wage brauchbar zu machen, jedoch noch nicht, um sie empfindlich zu machen, d. h. zu bewirken, dass ein kleiner Unterschied in den aufgelegten Gewichten einen grossen Ausschlag des Wagbalkens zur Folge habe. Zunächst ist es nun klar, dass, wenn alles Uebrige ungeändert bleibt, der Ausschlag um so grösser wird, je kleiner der Hebelarm ist, an dessen Ende  $g$  das Gewicht der Wage wirkt; denn je kleiner derselbe ist, um so kleiner wird das Moment dieses Gewichtes, es muss daher um so mehr aus der Verticalebene verschoben werden, soll es dem Momente eines gegebenen Uebergewichtes gleich werden. Es ist folglich die Wage um so empfindlicher, je näher der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt; eine Bedingung, die wir für eine gute Wage als dritte den beiden vorhergehenden hinzufügen können.

Bisher nahmen wir an, dass die drei Punkte  $A, B, C$  in einer geraden Linie liegen; man sucht das in der That bei Herstellung einer Wage zu erreichen. Einerseits ist es jedoch schwer vollkommen zu erreichen, und andererseits ist es unmöglich, dies während des Wiegens zu erhalten, da der Wagbalken durch die angehängten Gewichte sich immer etwas biegt. Wir müssen daher jetzt den allgemeineren Fall betrachten, in welchem bei übrigens bewahrter Symmetrie in Bezug auf die Ebene  $Bg$  die Punkte  $A$  und  $C$ , die Aufhängepunkte der Wagschalen tiefer liegen als der Aufhängepunkt des Wagbalkens.

Seien  $AB, BC$  (Fig. 33) die beiden Arme des Wagbalkens, wenn er nicht belastet ist; nehmen wir an, ihre Länge sei gleich und

zwar gleich  $l$ ; sie liegen jedoch nicht in einer geraden Linie, und  $\beta$  sei der Winkel, den jeder mit der Horizontalen  $MN$  bildet. Sei  $g'$  der Schwerpunkt des Wagbalkens, senkrecht in einem Abstände  $l'$  unter  $B$ . Sei ferner  $p$  das Gewicht desselben, und sei das Gewicht der an  $A$  und  $C$  angehängten Wag-

Fig. 33.





schalen inclusive der eingelegten Gewichte gleich  $Q$  auf der einen,  $Q$  auf der andern Seite. Die Wage wird sich um einen Winkel  $\alpha$  neigen die Lage  $A'BC'$  annehmen. Der Schwerpunkt der Wage rückt dann nach  $D$ . Besteht Gleichgewicht, so muss die Summe der Momente der wirkenden Gewichte,  $Q, p, Q + q$  gleich Null sein.

Die Hebelarme der Gewichte sind nun für  $Q$  die Länge  $A'P$ , für das Gewicht  $p$  der Wage  $gD$  und für die Gewichte  $Q + q$ , welche an den Punkten  $C'$  angreifen,  $C'Q$ , es muss sonach

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD - (Q + q) C'Q = 0,$$

oder

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD = (Q + q) C'Q \dots 1.$$

Nun sind

$$A'P = A'B \cdot \cos BA'P = A'B \cdot \cos A'BM = l \cdot \cos(\alpha - \beta),$$

$$gD = gB \cdot \sin gBD = l \cdot \sin \alpha,$$

$$C'Q = C'B \cdot \cos QC'B = C'B \cdot \cos C'BN = l \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

und daraus, wenn wir diese Ausdrücke in (1) einsetzen,

$$Q \cdot l \cos(\alpha - \beta) + p \cdot l \sin \alpha = (Q + q) l \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

oder auch

$$\begin{aligned} Q \cdot l (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) + p \cdot l \sin \alpha &= \\ &= (Q + q) l (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta). \end{aligned}$$

Fassen wir die mit  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  multiplicirten Glieder zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos \alpha \left\{ Q \cdot l \cdot \cos \beta - (Q + q) l \cdot \cos \beta \right\} &= \\ = - \sin \alpha \left\{ Q \cdot l \cdot \sin \beta + (Q + q) l \cdot \sin \beta + p \cdot l \right\} \end{aligned}$$

oder

$$q \cdot l \cos \beta \cdot \cos \alpha = \left\{ 2Q \cdot l \cdot \sin \beta + q \cdot l \cdot \sin \beta + p \cdot l \right\} \sin \alpha$$

Dividiren wir durch  $\cos \alpha$  und lösen die Gleichung nach  $\tan \alpha$  auf,

$$\tan \alpha = \frac{q \cdot l \cos \beta}{2Q \cdot l \cdot \sin \beta + q \cdot l \cdot \sin \beta + p \cdot l}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2 \cdot \frac{Q}{q} \cdot \tan \beta + \tan \beta + \frac{p \cdot l}{q \cdot l \cdot \cos \beta}} \dots 2.$$

Der Winkel  $\alpha$  gibt die Neigung des Wagbalkens, wenn in die Schale bei  $C$  das Uebergewicht  $q$  gebracht ist, er misst also die Empfindlichkeit der Wage. Da jedoch  $\alpha$  immer sehr klein ist, können wir auch  $\tan \alpha$  als Maass der Empfindlichkeit betrachten. Man sieht nun, dass der Wert von  $\tan \alpha$  zunächst abhängt von  $2Q$ , d. h., dass die Empfindlichkeit ändert mit der gemeinsamen Belastung der Wagschalen; dass sie grösser wird, wenn  $2Q$  abnimmt, und kleiner, wenn die Belastung wächst. Die Wage verliert daher beim Wägen grösserer Gewichte einen Theil ihrer Empfindlichkeit.

Lägen die Punkte  $A$  und  $C$  anstatt unter der Horizontalen über derselben

so könnte man die vorige Rechnung ganz genau so durchführen, nur müsste man dann den Winkel  $\beta$  negativ setzen. Unserer Formel (2) würde dann

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{-2 \frac{Q}{q} \cdot \operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \beta + \frac{p \cdot l}{q \cdot l \cdot \cos \beta}}$$

Dieser Nenner unseres Ausdruckes für  $\operatorname{tang} \alpha$  nimmt dann also ab, wenn  $Q$  wächst; die Empfindlichkeit der Wage würde mit steigender Belastung zunehmen. Es ist sonach klar, dass auch der Winkel, den die Richtungen  $AB$  und  $CB$ , welche die Aufhängepunkte der Wagschalen mit dem Unterstützungspunkte verbinden, mit der Horizontalen oder mit einander einschliessen, auf die Empfindlichkeit der Wage von grossem Einfluss ist, indem je nach dem Werthe dieses Winkels die Empfindlichkeit der Wage mit der Belastung sich ändert. In einem Falle, wenn der Winkel  $\beta = 0$ , die Richtungen also in eine gerade Linie fallen, ist die Empfindlichkeit der Wage von der Belastung unabhängig, denn dann wird die Formel (2)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\frac{p \cdot l}{q \cdot l}} = \frac{q \cdot l}{p \cdot l}$$

Diese Bedingung sucht man nun bei der Construction der Wage möglichst zu realisiren, und dann ist die Empfindlichkeit der Wage:

- 1) proportional der Länge  $l$  jedes Armes des Wagbalkens;
- 2) umgekehrt proportional dem Gewichte  $p$  der Wage;
- 3) umgekehrt proportional dem Abstände  $l'$  des Schwerpunktes  $g'$  vom Unterstützungspunkte  $B$ .

Wir erhalten demnach für Herstellung einer brauchbaren und empfindlichen Wage folgende fünf Regeln:

- 1) Das Gewicht des Wagbalkens muss möglichst klein sein.
- 2) Der Wagbalken muss eine möglichst grosse Länge haben, wobei indess darauf zu achten ist, dass mit der Länge auch das Gewicht der Wagbalken wächst, und zwar wenn die Länge sehr gross genommen wird, in rascherem Verhältniss als diese, weil dann der Wagbalken, um Verbiegungen zu vermeiden, stärker gearbeitet werden muss. Von zwei Wagen, für welche der Quotient  $\frac{l}{p}$  denselben Werth hat, die also nach der letzten Gleichung dieselbe Empfindlichkeit besitzen, ist immer diejenige vorzuziehen, deren Wagbalken die kleinere Länge haben, da bei dieser nicht so leicht Verbiegungen eintreten, und da sich mit derselben, wie im nächsten §. hervortreten wird, schneller wägen lässt.
- 3) Die beiden Arme des Wagbalkens müssen einander genau gleich sein.
- 4) Der Aufhängepunkt des Wagbalkens und die der Wagschalen müssen in einer geraden Linie liegen.
- 5) Der Schwerpunkt der Wage muss unter dem Unterstützungspunkte liegen, aber ihm möglichst nahe.

Diese Bedingungen, besonders die beiden ersten, sind jedoch in der Ausführung in gewisse Grenzen eingeschlossen, indem bei zu grosser Länge und Leichtigkeit des Wagbalkens leicht eine Biegung desselben eintritt, also die wichtige vierte Bedingung einer guten Wage verletzt wird.

**Beschreibung einer feinen Wage.** Um diesen vielfachen Bedingungen Genüge zu leisten, wendet man als Wagbalken einen Messing- oder St streifen von ungefähr 5<sup>mm</sup> Dicke und 60<sup>cm</sup> Länge an. Man gibt ihm Form (Fig. 34) eines länglichen verschobenen Vierecks, und, um ihn leicht

Fig. 34.



machen, wird er vielfach durchbrochen, so dass nur die Seiten des Vierecks übrig bleiben nebst einigen das Viereck durchsetzenden Stützen. Man erhält dadurch die beiden ersten Bedingungen, man erhält einen langen, leichten Wagbalken, ohne befürchten zu müssen, dass er sich leicht biegt.

Auf die Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen ist grosse Aufmerksamkeit zu verwenden. Es ist nothwendig, Träger herzustellen, die einer zur Drehungsebene des Wagbalkens senkrechten Linie auslaufen, fähig sind, dem Drucke zu widerstehen, welchen die angehängten Gewichte ausüben, die sich während der Drehung des Wagbalkens nicht verschieben und die hinlänglich beweglich sind, um nicht durch einen merklichen Reibungswiderstand die Bewegung des Wagbalkens zu hemmen. Man befestigt zu dem Ende in dem Wagbalken ein Prisma von gehärtetem Stahl *F*, dessen untere möglichst geradlinig gearbeitete Kante auf einer gut polirten Platte von Stahl oder besser noch von Achat aufliegt.

Es ist klar, dass eine solche Aufhängevorrichtung den gestellten Bedingungen auf das wünschenswertheste entspricht. An den Enden des Wagbalkens sind ebenfalls zwei Prismen angebracht, deren Kanten nach oben gerichtet sind, um auf diese die unten eben abgeschliffenen Stahlstücke aufzunehmen, an denen die Wagschalen aufgehängt sind. Die Aufhängepunkte des Wagbalkens sowie der Wagschalen sind demnach die Kanten dieser drei Prismen. Diese drei Kanten müssen nun gemäss der vierten Regel möglich in eine gerade Linie gebracht werden, und die beiden Abstände der an den Enden des Wagbalkens angebrachten von der mittleren nach der dritten Regel unter sich genau gleich gemacht werden.

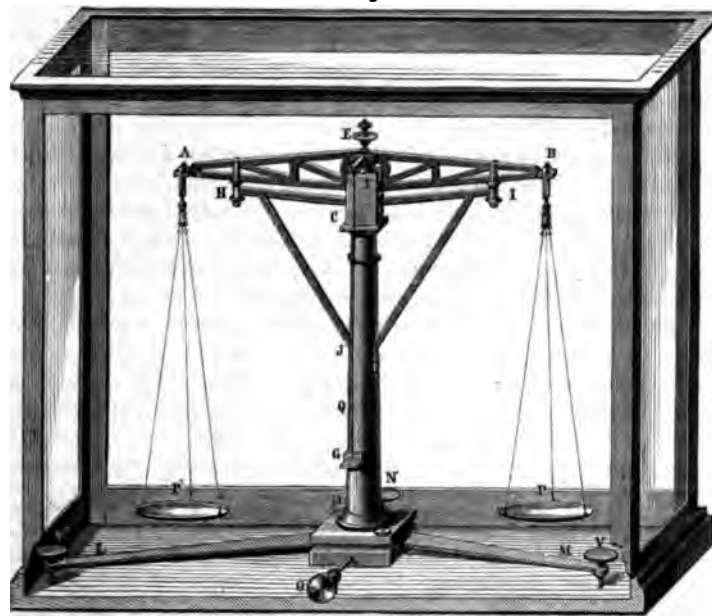
Gewöhnlich werden diese Bedingungen von dem Verfertiger der Wage erfüllt, das ist bei unserer Zeichnung angenommen; zuweilen aber wird auch demjenigen überlassen, der mit der Wage arbeitet. In dem Falle

nur zwei Prismen unveränderlich fest. Das dritte kann durch Schrauben vertical verschoben werden, um die Kanten der drei Prismen in eine Linie zu bringen, und horizontal, um die Abstände der beiden äusseren Prismen von dem mittlern unter sich gleich zu machen.

Um die fünfte und wichtigste Bedingung herzustellen, ist an dem obern Rande des Wagebalkens gerade über dem Aufhängepunkt eine Schraubenspindel mit sehr schmalen Gängen eingesetzt, auf welcher sich zwei Laufgewichte *E* auf- und abschrauben lassen. Das untere ist grösser und schwerer, das obere kleiner und leichter. Eine Bewegung dieser Gewichte ändert die Lage des Schwerpunktes; werden sie hinaufgeschraubt, so steigt der Schwerpunkt, werden sie hinabgeschraubt, so sinkt derselbe. Die grössern Hebungen und Senkungen des Schwerpunktes werden nun durch eine Bewegung der grossen, die kleinern durch eine Drehung der kleinern Schraubenmutter bewirkt. Durch diese Vorrichtung wird also der Schwerpunkt des Wagebalkens beweglich, und man sieht, wie man ihn dadurch der Aufhängeaxe so nahe bringen und dadurch die Wage so empfindlich machen kann, wie man will. Man hat diese Vorrichtung noch dahin vervollkommenet, dass man mittels ihr dem Schwerpunkt auch eine seitliche Bewegung geben kann. Zu dem Ende ist auf der einen Schraubenmutter ein excentrischer Knopf *T* angebracht, der durch seine seitliche Bewegung bei der Drehung des Laufgewichtes den Schwerpunkt auch seitlich etwas verschiebt, uns also in den Stand setzt, ihn genau vertical unter die Aufhängeaxe zu bringen in dem Augenblicke, wo die drei Prismenkanten sich in der Horizontalen befinden.

Wir bedürfen an unserer Wage nun noch eines Zeigers, der angibt, wann der Wagebalken horizontal ist. Zu dem Zwecke ist in der Mitte des Balkens genau über der Aufhängeaxe eine stählerne Nadel *Q* (Fig. 35) befestigt, die

Fig. 35.



bis unten an die Säule hinabreicht, welche die Wage trägt. Die Spitze der Nadel schwingt vor einer Elfenbeinplatte *G* (Fig. 35) hin und her, welche mit einer Theilung versehen ist. Man regulirt nun die unbelastete Wage durch Drehung der Stellschrauben *VV'* so, dass das Ende der Nadel gerade auf der Mitte der Theilung, dem mit *O* bezeichneten Theilstrich, einsteht. Von dem Punkte geht man aus, eine Neigung des Wagbalkens wird dann durch den einen Ausschlag der Nadel angegeben; und da letztere sehr lang ist, so gibt sie für die geringste Neigung schon einen deutlichen Ausschlag.<sup>1)</sup>

Es erübrigt noch die Aufstellung der Wage zu betrachten. Dieselbe steht auf einem eisernen Dreifuss *LMN* (Fig. 35), welcher mit Stellschrauben *VV'* versehen ist. Von der Mitte des Dreifusses erhebt sich eine Messingsäule *DC*, auf deren Spitze die Achatplatte angebracht ist, auf welcher die Schneide des Stahlprisma *F* ruht. Theils um die Stahlschneide zu schonen, theils um die Wagbalken vor einer Biegung zu bewahren und die Wage besser transportiren zu können, ist an der Säule *DC* eine Gabel *HIJ* angebracht, deren Arme den Wagbalken erreichen. Sie kann mittels einer in der Säule verborgenen Zahnstange, in welche ein mittels des Knopfes *O* drehbares Zahnrad eingreift, gehoben und gesenkt werden. Dreht man den Knopf nach der einen Seite, so hebt man die Gabel; dieselbe nimmt den Wagbalken zwischen ihre Arme bei *H* und *I* und unterstützt ihn, indem sie ihn ein wenig emporhebt. Dreht man den Knopf *O* und damit das Zahnrad nach der entgegengesetzten Seite, so sinkt die Gabel hinunter, lässt die Schneide *F* sehr langsam auf ihre Unterlage herab und lässt dann den Wagbalken frei.

Um nun beim Vornehmen einer Wägung die störenden Luftströmungen, welche die Bewegung der Wage hemmen, um die Wirkung der Feuchtigkeit auf die zu wägenden Körper zu hindern, und andererseits um die Wage selbst vor Staub und sonstigen verderblichen Einflüssen zu schützen, umgibt man den ganzen Apparat mit einem Glaskasten, der an einer Seite geöffnet werden kann.

### §. 23.

**Methode der Wägungen.** Wenn nun auch alles Mögliche aufgewandt ist, um die Wage genau und empfindlich zu machen, so können kleine Fehler doch niemals vermieden werden. Diese kann man jedoch durch einige Vorsichtsmassregeln unschädlich machen. Um den störenden Einfluss einer kleinen Ungleichheit der Wagbalken fortzuschaffen, wendet man folgendes Verfahren an. Man legt in die eine Wagschale den abzuwägenden Körper und äquilibrirt ihn mittels Schrotkörner, welche auf die andere Seite gelegt werden. Man nimmt dann den Körper, dessen Gewicht gesucht wird, fort und bringt Gewichte an seine Stelle, bis die Wage wieder genau im Gleichgewicht ist.

Es ist klar, dass dann diese Gewichte, welche in derselben Schale, in welcher der Körper war, liegen, auf das genaueste dem Gewichte des Kör-

<sup>1)</sup> Der Mechaniker Bunge in Hamburg verfertigt jetzt Wagen mit sehr kurzen Wagbalken, indem er durch die Form, die er den Balken gibt, sie so leicht machen kann, ohne Verbiegung zu befürchten, dass die Wagen dieselbe Empfindlichkeit haben, als Wagen mit längern Balken. Die Wagen von Bunge werden sehr gerühmt, ich habe kein Urtheil darüber, weil ich noch nicht mit einer solchen gearbeitet habe; das Prinzip, nach dem sie gearbeitet sind, ist jedenfalls ganz richtig.

pers entsprechen, mögen die Arme des Wagbalkens gleich sein oder nicht, wenn nur die Wage empfindlich genug ist, um die kleinsten Gewichts διαφοrenzen anzugeben.

Die Empfindlichkeit der Wage nimmt, wenn die Aufhängepunkte des Wagbalkens und der Wagschalen nicht in einer geraden Linie liegen, mit steigender Last ab. Wenn nun auch ursprünglich diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen, so ist bei den feinen Wagen doch nicht zu vermeiden, dass bei Wägung grosser Gewichte eben wegen der Länge und Leichtigkeit des Wagbalkens derselbe eine geringe Biegung erhält. Dadurch aber sinkt der Schwerpunkt des Wagbalkens herab, und die Wage verliert an Empfindlichkeit. Um nun diesen Fehler zu corrigiren, sind die über dem Wagbalken angebrachten Laufgewichte vorzüglich brauchbar, indem sie die Lage des Schwerpunktes ändern. Man kann mittels derselben der Wage immer die grösste Empfindlichkeit geben.

Will man kleine Gewichte wägen, so schraubt man vorher die beiden Laufgewichte in die Höhe, bis die Wage in den Zustand des labilen Gleichgewichts versetzt wird; dann schraubt man das eine der Gewichte wieder herunter, bis das Gleichgewicht der Wage gerade wieder anfängt stabil zu werden. Auf diese Weise ist in dem Falle das Maximum der Empfindlichkeit erreicht. Will man nun grosse Gewichte abwägen, so legt man zunächst auf die beiden Wagschalen Gewichte, welche nahezu eine gleiche Belastung ausmachen als die zu bestimmenden. Dann verfährt man gerade wie vorher, man schraubt die beiden Laufgewichte bis zum labilen Gleichgewicht der Wage in die Höhe und lässt dann das eine soweit herab, bis das Gleichgewicht der Wage wieder stabil wird. Auch hier ist dann wieder das Maximum der Empfindlichkeit erreicht.

Da die Wägungen zu den feinsten und wichtigsten Versuchen in der Physik gehören, so wird es gut sein, das Verfahren bei denselben etwas genauer zu beschreiben. Wir setzen voraus, die Wage stehe auf einem festen Tische, durch die Stellschrauben sei der Zeiger bei unbelasteter Wage auf den Nullpunkt geführt, man habe der Wage den abzuwägenden Gewichten gemäss das Maximum der Empfindlichkeit gegeben und wolle die Methode der doppelten Wägung anwenden. Man legt alsdann den abzuwägenden Körper in die eine Wagschale und Schrot in die andere, bis das Gleichgewicht nahezu hergestellt ist; das bietet keine Schwierigkeit. Ist das erreicht, so arretirt man mittels der Gabel den Wagbalken, hemmt mit der Hand die Schwankungen der Schalen, schliesst den Kasten und lässt die Gabel vorsichtig wieder herab. Die Nadel wird dann sehr langsam vor der Theilung hin und her schwingen. Man beobachtet dann eine Anzahl Schwingungen; ist das Gleichgewicht erreicht, so sind die Schwingungen um den Nullpunkt symmetrisch, so dass die Summe zweier auf einander folgenden Schwingungen nach der einen Seite gleich ist dem doppelten Werthe der zwischen den beiden liegenden Schwingung nach der entgegengesetzten Seite. Man wird nämlich bei absolut gleicher Belastung, oder auch wenn man die mit aller Genauigkeit justirte Wage ohne Belastung in Schwingung versetzt, finden, dass die aufeinander folgenden Schwingungen nicht von gleicher Grösse sind, dass die Weite der Schwingungen vielmehr stetig und regelmässig abnimmt. Geht etwa die erste Schwingung nach rechts um  $r$  Skalentheile, so findet man die darauf folgende Schwingung nach links etwa  $r - \alpha$  Skalentheile;

dann bewegt sich der Zeiger nach rechts um  $r - 2\alpha$  Skalentheile, wieder nach links um  $r - 3\alpha$  Skalentheile u. s. f. Der Grund dieser Abnahme liegt darin, dass der Bewegung der Wage der Widerstand der Luft und die Reibung in der Aufhängung entgegen wirkt. Bezeichnen wir nun die Schwingungen, ausgedrückt in Theilen der Skala nach rechts mit  $r_1, r_2, r_3 \dots$ , nach links mit  $l_1, l_2, l_3 \dots$ , so muss, wenn die Wage um die horizontale Lage, der Zeiger also um den Nullpunkt schwingt,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2l_1 \\ 2r_2 &= l_1 + l_3 \\ r_3 + r_2 &= 2l_2 \end{aligned}$$

u. s. f. sein. Findet man also nach der vorgenommenen Tarirung, dass dies erreicht ist, so folgt, dass die Ruhelage des Wagebalkens die horizontale, somit dass das Gleichgewicht erreicht ist. Findet man dagegen, dass

$$r_1 + r_2 > 2l_1$$

ist u. s. f., so beweist das, dass die Ruhelage des Wagebalkens nicht die horizontale, somit dass das Gleichgewicht noch nicht erreicht ist; ist  $r_1 + r_2 < 2l_1$ , so ist die Wage rechts zu schwer, im entgegengesetzten Falle auf der linken Seite. Man muss dann, nachdem man die Wage arretirt hat, mit einer Pincette ein Schrotkorn fortnehmen oder zulegen, jenachdem die Tara zu gross oder zu klein ist. Wenn durch Wegnehmen oder Zulegen eines Schrotkornes aber die Tara zu sehr geändert wird, so muss man feineres Schrot anwenden oder Papierschnitzel oder auch Sandkörner und so lange mit dem Ab- und Zugeben dieser kleinen Gewichtchen fortfahren, bis die Schwingungen des Zeigers der angegebenen Bedingung entsprechen.<sup>1)</sup>

Dann ist der Körper tarirt; nun wird er aus der Wagschale genommen, statt seiner werden Gewichte hineingelegt und mit den Gewichten jetzt gerade so verfahren, wie vorhin mit der Tara. Man findet zunächst das nothwendige Gewicht leicht als zwischen  $n$  und  $n + 1$  Gramme enthalten und hat dann zu dem Gewichte noch die Bruchtheile eines Gramms zu legen. Zu dem Ende befinden sich in den Gewichtssätzen 9 Decigramme in Stücken von 5, 2 und 1 Decigramm, so dass man dadurch eine beliebige Zahl von Decigrammen zwischen 1 und 9 herstellen kann. Ebenso findet man 9 Centigramme und 9 Milligramme in ähnlichen Stücken, so dass man bis auf Milligramme genau das Gewicht eines Körpers erhalten kann.

An vielen Wagen ist nun noch eine Vorrichtung, um selbst die Bruchtheile der Milligramme bis auf 0,1 zu erhalten. Es ist nämlich jede Hälfte des Wagebalkens durch verticale Striche zunächst in 10 gleiche Theile getheilt und diese einzelnen Theile nochmal in 10 gleiche Unterabtheilungen. Bei den Gewichtssätzen befinden sich dann Häkchen von Platindraht, genau ein Centigramm schwer, welche als Reiterchen auf dem Wagebalken verschoben werden können. Auf dem ersten Haupttheilstrich wirkt dann ein solches

<sup>1)</sup> Die oben auseinandergesetzte Beobachtung der Gleichgewichtslage aus den Schwingungen ist der Beobachtung ohne Schwingungen vorzuziehen, da sie genauer ist und rascher zum Ziele führt. Gerade dann zeigt sich aber der Vorzug der Wagen, welche bei gleicher Empfindlichkeit die kürzesten Balken haben, da die Schwingungsdauer bei kürzern Balken immer kleiner ist als bei längern Balken.

Reiterchen gerade soviel als 1 Milligramm in der Wagschale, weil es an einem Hebelarm wirkt, der nur 0,1 der Länge des Wagbalkens hat; auf den Theilstrichen 2, 3, . . . als 2, 3, . . . Milligramme und auf den zwischen den Haupttheilstrichen eingeschnittenen Theilstrichen als 1,1; 1,2; etc. Milligramme, so dass man durch Verschiebung der Reiter zugleich die Milligramme und ihre Bruchtheile erhält.

Die Unterabtheilungen der Grammgewichte verfertigt man sich am besten selbst, da man sich meist auf die käuflichen nicht sicher verlassen kann. Man macht dieselben aus Platindraht, der mehrmals durch denselben Drahtzug gezogen ist, und von dem eine Länge von 1 Meter ungefähr ein Gramm wiegt. Nachdem man von einem solchen Draht ein Stück abgeschnitten, welches etwas mehr als ein Gramm wiegt, beschneidet man es, um es genau auf ein Gramm zu bringen. Dann wird es ausgespannt und seine Länge gemessen; da nun jedes Zehntel des Drahtes ein Decigramm wiegt, so zertheilt man ihn nach der Länge in Stücke von 5, 2, 1, 1 Decigramm. Das übrig bleibende Zehntel wird dann in einem Drahtzuge zu ungefähr einem Meter ausgezogen, und man verfährt mit dem neuen Stücke wie vorher, um die Centigramme zu erhalten. Das dann übrig bleibende Zehntel wird dann zu Milligrammen verarbeitet. Schliesslich gibt man dann den verschiedenen Drahtstücken entsprechende Formen, welche ihr Gewicht bezeichnen.

## §. 24.

**Specifisches Gewicht und Dichtigkeit.** Mittels der Wage sind wir im Stande eine wichtige Eigenschaft der Körper zu erkennen. Man findet nämlich sehr oft, dass zwei gleiche Volumina verschiedener Körper nicht das gleiche Gewicht haben, oder was dasselbe ist, dass das Verhältniss der Volumina verschiedener Körper zu ihren Gewichten nicht dasselbe ist. Für einen und denselben Körper ist das Gewicht  $P$  seinem Volumen  $V$  proportional, also

$$P = V \cdot p \text{ oder } \frac{P}{V} = p.$$

Diese Grösse  $p$  nennt man das specifische Gewicht der Körper. Die Grösse  $p$  gibt also das Verhältniss des Gewichtes zum Volum eines Körpers oder das Gewicht der Volumeinheit. Die Grösse  $p$  ist constant für ein und dieselbe Substanz bei gleicher Temperatur, für verschiedene Substanzen verschieden.

Da die Grösse  $p$  das Gewicht eines bestimmten Volumens eines Körpers ausdrückt, so ist sie eigentlich abhängig von den gewählten Einheiten des Gewichtes und Volumens und daher in verschiedenen Ländern numerisch verschieden. Um jedoch diese Verschiedenheit zu vermeiden, ist man übereingekommen, die specifischen Gewichte überall in derselben Einheit auszudrücken, nämlich als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zu nehmen. Für gleiche Volumina hat man nun

$$\begin{array}{l} \text{für irgend einen Körper } P = V \cdot p \\ \text{für Wasser } \dots \dots P' = V \cdot p' \end{array}$$

und daraus

$$\frac{P}{P'} = \frac{p}{p'} = \pi,$$



so dass  $\pi$  das Verhältniss des Gewichtes der Volumeinheit eines Körpers zu dem der Volumeinheit von Wasser bei  $4^{\circ}$  C. darstellt. Es ist das relative specifische Gewicht, welches aber meist schlechthin das specifische Gewicht genannt wird.

Um es zu erhalten, genügt es, das Verhältniss der Gewichte  $P$  und  $P'$  zu bestimmen, d. h. des Gewichtes von einem beliebigen Volum eines Körpers zu dem eines gleichen Volum Wasser von  $4^{\circ}$ . Dieses Verhältniss ist sonach unabhängig von den gewählten Einheiten.

Man hat nun

$$P = P' \cdot \pi = V \cdot p' \cdot \pi,$$

d. h. das Gewicht eines Körpers ist gleich dem Produkt aus seinem Volumen  $V$ , seinem relativen specifischen Gewicht  $\pi$  und dem Gewicht  $p'$  der Volumeinheit Wasser von  $4^{\circ}$ .

Legt man das Grammgewicht zu Grunde, so ist die Gewichtseinheit schon die von 1 Kubikcentimeter Wasser bei  $4^{\circ}$ , also das Gewicht  $p'$  gleich 1; in dem Falle hat man daher

$$P = V \cdot \pi.$$

Diese Vereinfachung gilt jedoch nur dann, wenn man das Verhältniss des Gewichtes eines Körpers zu dem eines gleichen Volumens Wasser als sein relatives specifisches Gewicht nimmt; geht man von dem Gewicht der Volumeinheit eines andern Körpers aus, so fällt sie fort.

Bei den Gasen und Dämpfen z. B. geht man von dem Gewicht der Volumeinheit der atmosphärischen Luft aus;  $p'$  ist dann das Gewicht eines Kubikcentimeter atmosphärischer Luft bei  $0^{\circ}$  und 760<sup>mm</sup> Barometerstand gleich 0,001293. Das Gewicht des Volum  $V$  irgend eines Gases ist dann, wenn  $\pi$  sein specifisches Gewicht in Bezug auf atmosphärische Luft ist,

$$P = V \cdot \pi \cdot 0,001293.$$

Wir haben früher §. 13 die Masse eines Körpers definirt und gesehen, dass sie gemessen wird durch den Quotienten seines Gewichtes und der Beschleunigung  $g$ , die er beim freien Falle erhält. Die Masse eines Körpers ist also seinem Gewichte und somit für eine und dieselbe Substanz auch dem Volumen proportional. Man hat sonach

$$m = V \cdot d, \quad \frac{m}{V} = d.$$

Der Quotient  $d$  heisst die Dichtigkeit des Körpers, er gibt die Masse der Volumeinheit.

Man kann die Massen der verschiedenen Körper mit der eines gleichen Volumens Wasser von  $4^{\circ}$  vergleichen. Bedeuten  $m'$ ,  $V'$ ,  $d'$  Masse, Volumen und Dichtigkeit des Wassers, so hat man

$$m = Vd, \quad m' = Vd', \\ \frac{m}{m'} = \frac{d}{d'} = \delta.$$

Dieses Verhältniss  $\delta$  der Massen gleicher Volumina eines Körpers und Wassers ist die relative Dichtigkeit, welcher die Masse der Volumeinheit Wasser als Einheit zu Grunde liegt.

Nun ist

$$m = \frac{P}{g}, m' = \frac{P'}{g}$$

und daher

$$\frac{m}{m'} = \frac{P}{P'} = \delta = \pi.$$

Es geht daraus hervor, dass Dichtigkeiten und specifische Gewichte der Körper durch ein und dieselbe Zahl dargestellt werden. Dennoch aber sind Dichtigkeiten und specifische Gewichte verschieden, und die Einheiten, die beiden zu Grunde liegen, sind nicht dieselben; bei dem einen ist es das Gewicht, beim andern die Masse der Volumeinheit Wasser.

Häufig wirft man die Worte Dichtigkeit und specifisches Gewicht durcheinander und drückt durch dieselbe Bezeichnung die specifischen Gewichte  $\rho$ , die specifischen Gewichte in Bezug auf das Wasser  $\pi$ , die Dichtigkeiten  $d$  und die relativen Dichtigkeiten  $\delta$  aus. Zur Vermeidung von Verwirrung ist es jedoch gut, die Bedeutung der einzelnen Grössen festzuhalten.

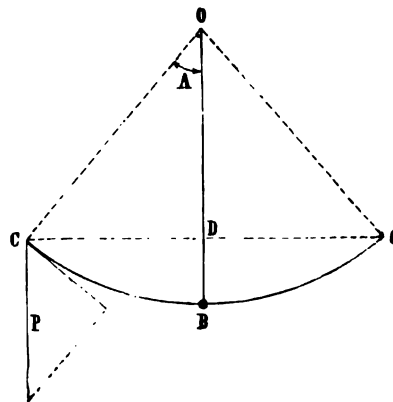
### §. 25.

**Das Pendel.** Wir sahen in §. 17, dass das Drehungsmoment, welches eine Kraft  $P$  auf einem Körper, der um eine Axe drehbar ist, ausübt, gleich ist dem Produkte aus der Kraft  $P$  und ihrem senkrechten Abstände von der Drehungsaxe oder, was dasselbe ist, gleich dem Produkte aus dem Abstände des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsaxe und der zu der Verbindungslinie senkrechten Componente der Kraft  $P$ . Wenden wir diesen Satz jetzt an, um die Bewegung eines um eine horizontale Drehungsaxe beweglich aufgehängten Körpers unter Wirkung der Schwere zu betrachten.

Befestigen wir zu dem Ende eine schwere Kugel  $B$  (Fig. 36) an einem Faden und hängen diesen mit seinem andern Ende an einen festen Punkt  $O$ . Dieser Apparat, welcher den Namen Pendel trägt, ist im Gleichgewicht, wenn er vertical herabhängt. Ist er jedoch aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, nach  $C$ , so zieht ihn sein Gewicht herunter und eine Componente des Gewichtes ist es, welche ihm eine Drehung um den Aufhängepunkt als Drehungsaxe in der Richtung  $CB$  ertheilt. Nennen wir den Winkel  $BOC = A$ , so ist nach §. 17 die Kraft, welche den Körper von  $C$  nach  $B$  zurücktreibt,  $= P \cdot \sin A$ . Die Kraft, welche den Körper dreht, ändert sich also in jedem Augenblicke mit dem Werthe der Winkel  $A$ , sowohl ihrer Grösse als ihrer Richtung nach. Sie wird kleiner, wenn sich unsere Kugel der Gleichgewichtslage nähert, und wird gleich Null, wenn dieselbe letztere erreicht.

Die Gesetze dieser Bewegung sind daher nicht die im ersten Kapitel betrachteten der gleichförmig geänderten

Fig. 36.



Bewegung; die Bewegung ist vielmehr eine der im letzten §. des ersten Kapitels erwähnten ungleichförmig geänderten Bewegungen; die nähere Untersuchung derselben wird uns daher auch ein Beispiel sein, wie die Untersuchung solcher Bewegungen zu führen ist.

Im Punkte  $B$  angekommen, besitzt unsere Kugel eine gewisse Geschwindigkeit und setzt deshalb ihren Weg auf dem Bogen  $BC'$  weiter fort. Allein das Gewicht der Kugel wirkt immerfort, und jetzt sucht die gleiche Kraft  $P \cdot \sin A$ , welche senkrecht zu  $OC'$ , also tangential zum Kreisbogen  $BC'$  wirkt, die Bewegung zu hemmen und die Geschwindigkeit, welche vorher in jedem Augenblicke die Kraft  $P \cdot \sin A$  ertheilt hat, in gleicher Weise zu vernichten. Hat daher die Kugel den Kreisbogen  $BC' = BC$  durchlaufen, so ist ihre Geschwindigkeit Null geworden. Dann fällt die Kugel wieder zurück, um aber an der andern Seite wieder nach  $C$  aufzusteigen. Von dort kehrt sie dann wieder nach  $C'$  zurück u. s. f., kurz sie nimmt eine hin- und hergehende Bewegung an zwischen  $C$  und  $C'$ , welche immer fort-dauern würde, wenn nicht äussere Hindernisse, Reibung und Widerstand der Luft, sie störten. Diese bewirken, dass die Schwingungsweiten allmählig kleiner werden, und das Pendel schliesslich zur Ruhe kommt.

### §. 26.

**Isochronismus kleiner Oscillationen; Gesetz der Längen.** Es ist leicht, die mittlere Dauer einer Schwingung zu beobachten. Man bedient sich dazu eines Zählers, der Viertelsekunden angibt, und dessen Zeiger man willkürlich mittels eines Schiebers arretiren und loslassen kann. Man hebt das Pendel um einen Winkel  $A$ , und im Augenblick, wann man es fallen lässt, lässt man den Zeiger des Chronometers los. Man zählt 100 Schwingungen, und am Ende der letzten arretirt man den Zeiger. Dies gibt die Zeit von 100 Schwingungen, deren Schwingungsweiten allmählig von  $A$  auf  $A'$  abgenommen haben. Theilt man die beobachtete Zeit durch 100, so erhält man die Dauer einer Schwingung von der mittlern Weite  $\frac{A + A'}{2}$ . Ohne das Pendel festzuhalten, beobachtet man dann neue 100 Schwingungen, deren Schwingungsweiten kleiner sind als die vorherigen, sie liegen zwischen  $A'$  und  $A''$ . Führt man nun so fort die Schwingungsdauer des Pendels zu messen, bis die Amplituden verschwindend klein werden, so findet man, dass allerdings die Dauer einer Oscillation mit der Grösse der Amplitude abnimmt, dass kleineren Schwingungsweiten auch kleinere Schwingungsdauern entsprechen; jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze, nur bis die Schwingungsweiten ungefähr  $3^\circ$  betragen. Von dem Augenblick an ändert sich die Oscillationsdauer mit dem Ausschlagswinkel nicht mehr; die kleinen Schwingungen haben eine gleiche Dauer, sie sind isochron.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer zweier Pendel, an denen wir verschiedene Kugeln angebracht haben, z. B. ein Pendel, dessen Kugel von Blei ist, ein anderes mit gläserner, wieder ein anderes mit einer Kugel von Eisen oder Platin, so findet man ihre Schwingungsdauer absolut gleich. Die Oscillationsdauer eines Pendels ist somit unabhängig von der Natur des schwingenden Körpers.

Die Kraft, welche das Pendel in Bewegung setzt, ist die Schwerkraft;

wir ziehen daraus den wichtigen Schluss, dass die Schwerkraft auf alle Körper gleich wirkt, dass somit auch alle Körper gleich schnell fallen müssen.

Wendet man mehrere Pendel verschiedener Länge an, so hören die Schwingungsdauern auf gleich zu sein. Man hänge vier gleiche Kugeln neben einander an Fäden auf, deren Längen sind

$$1, 4, 9, 16,$$

die sich also verhalten wie die Quadrate der natürlichen Zahlen. Vier Beobachter heben dann jeder eines der Pendel aus seiner Gleichgewichtslage, lassen sie auf ein gegebenes Zeichen los und zählen die Schwingungen bis zu einem zweiten Zeichen. Hat der erste 60 Schwingungen gezählt, so finden sich als die vier Schwingungszahlen

$$60, 30, 20, 15,$$

Die Schwingungszeiten der einzelnen Pendel verhalten sich also wie

$$1, 2, 3, 4,$$

d. h. wie die natürlichen Zahlen. Man zieht daraus allgemein den Schluss:

Die Oscillationsdauern verschiedener Pendel verhalten sich direkt wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

### §. 27.

**Angenäherte Formel für die Schwingungsdauer des einfachen Pendels.** Diese Gesetze sind die einzigen, welche uns die Beobachtung über die Pendelbewegung liefert. Sie genügen aber nicht, uns über die Dauer der Schwingungen Aufschluss zu geben. Wollen wir diese berechnen, so lässt sich eine theoretische Behandlung, mittels der wir Anwendung von den mechanischen Gesetzen machen, nicht umgehen.

Wir nehmen an, das Pendel bestehe aus einem gewichtslosen Faden von der Länge  $OB = l$ , an dessen Ende sich ein schwerer materieller Punkt befinde (Fig. 37). Das Pendel fällt von dem Punkte  $C$ , und im Punkte  $E$  hat es eine Geschwindigkeit erlangt, welche unter der Voraussetzung, dass wir  $CE$  als gerade ansehen dürfen, nach §. 12 gleich ist

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot DF}.$$

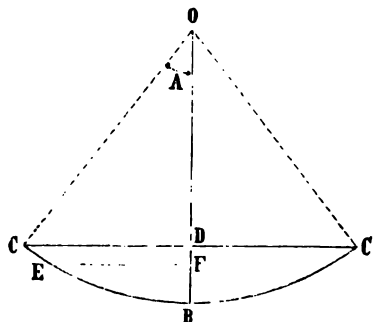
Nehmen wir nun an, dass der Ausschlagswinkel so klein sei, dass wir anstatt der Bögen  $CB = a$  und  $EB = x$  ihre Sehnen einsetzen können, so haben wir nach bekannten Sätzen aus der Geometrie

$$BD = \frac{CB^2}{2OB} = \frac{a^2}{2l}$$

$$BF = \frac{EB^2}{2OB} = \frac{x^2}{2l},$$

$$DF = BD - BF = \frac{a^2 - x^2}{2l}.$$

Fig. 37.

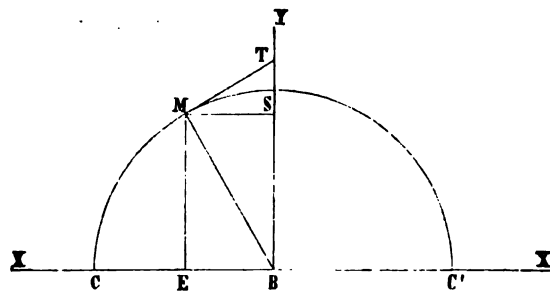


und setzen wir das in unseren Ausdruck für  $v$ , so wird

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}.$$

Entwickeln wir nun den Bogen  $CBC'$  in eine gerade Linie (Fig. 38),

Fig. 38.



und nehmen wir an, dass auf dieser Linie ein Körper sich mit derselben Geschwindigkeit hin- und herbewegt, wie das Pendel auf dem Bogen, den es beschreibt, so wird die Zeit, in der dieser Körper sich von  $C$  nach  $C'$  bewegt, genau mit der Oscillationsdauer des Pendels zusammenfallen.

Um diese Zeit zu erhalten, construiren wir über  $CBC'$  mit dem Radius  $CB = a$  einen Halbkreis und nehmen an, dass ein zweiter Körper diesen Halbkreis mit der constanten Geschwindigkeit

$$a \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$$

durchlaufe. Die Zeit, in der dieser Körper von  $C$  nach  $C'$  gelangt, wird dann sein

$$t = \frac{\pi a}{a \sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zerlegt man nun aber die Geschwindigkeit dieses Körpers in eine horizontale und eine verticale Componente, wenn er im Punkte  $M$  senkrecht über  $E$  angekommen ist, so erhält man unter Beachtung, dass die Bewegung im Punkte  $M$  nach der Tangente  $MT$  gerichtet ist, und dass

$$\angle SMT = \angle EMB,$$

für die horizontale Componente der Geschwindigkeit

$$v = a \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin \angle EMB = a \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\sqrt{MB^2 - EB^2}}{MB},$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}.$$

Die beiden Körper haben also in den Punkten  $M$  und  $E$  dieselbe horizontale Geschwindigkeit. Daraus folgt, dass dieselben, wenn sie zugleich den Punkt  $O$  verlassen, auch zugleich nach der Zeit

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

im Punkte  $C'$  ankommen werden. Diese Zeit ist also auch die Dauer einer Oscillation unseres Pendels von der Länge  $l$ .

Unsere Formel für die Zeitdauer einer Oscillation gilt unseren Voraussetzungen gemäss für so kleine Ausschläge, dass wir die Bögen mit ihren Sehnen vertauschen können; dafür stimmt sie aber auch mit den vorhin experimentell bewiesenen Sätzen. Nach unserer Formel ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude; wir sahen vorhin, dass für kleine Amplituden die Schwingungen des Pendels isochron seien. Ferner sahen wir, die Schwingungszeiten sind unabhängig vom Gewicht und der Substanz der schwingenden Kugel; auch dieses zeigt unsere Formel, denn keine der Grössen tritt in derselben auf. Ferner erkennen wir in unserem Ausdrucke das dritte der erkannten Gesetze, dass die Schwingungszeiten direkt proportional sind den Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Uebrigens aber sehen wir viertens, dass die Schwingungszeit umgekehrt proportional ist der Quadratwurzel aus der Beschleunigung, welche die an dem Punkte *B* angebrachte Kraft dem Punkte unter constanter Wirkung ertheilen würde. In unserem Falle ist das einfach die Beschleunigung des freien Falles, da der Punkt *B* der Wirkung der Schwere unterliegt. Wir hätten daher hier ein vortreffliches Mittel, um die Beschleunigung *g* zu bestimmen, denn unsere Gleichung nach *g* aufgelöst gibt

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2},$$

wenn wir im Stande wären, die Bedingungen, unter denen wir diese Gleichung erhalten haben, zu verwirklichen. Das geht nun aber nicht, denn in der Wirklichkeit können wir weder ein solches einfaches Pendel herstellen, welches aus einem gewichtslosen Faden mit einem an seinem Ende befestigten schweren Punkte besteht, noch sind die Schwingungen so klein zu erhalten, dass wir ohne allen Fehler die Bögen mit den Sehnen derselben verwechseln können. Nach diesen beiden Richtungen haben wir daher unsere Entwicklungen zu vervollständigen.

### §. 28.

**Das physische Pendel.** Wenden wir uns zunächst zu dem ersten Punkte, nämlich, dass die Pendel, welche wir schwingen lassen, nicht einfache mathematische Pendel sind, sondern aus Fäden oder Stangen bestehen, die an ihrem untern Ende ein Gewicht haben. Jeder Punkt eines solchen Pendels ist der Wirkung der Schwere unterworfen, er erhält also eine bestimmte Geschwindigkeit, die nach §. 25 für die der Drehungsaxe näher liegenden Punkte eine grössere ist als für die entfernter liegenden Punkte. Da nun aber das ganze Pendel, wie eine einfache Beobachtung uns zeigt, eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit besitzt, so ist klar, dass die Schwingungsdauer nicht einfach die eines mathematischen Pendels von derselben Länge sein kann.

Wir gelangen aber mit Hilfe des so eben bewiesenen Satzes, dass die Schwingungsdauer eines Pendels umgekehrt proportional ist der Quadratwurzel aus der Beschleunigung, welche der am Ende des mathematischen Pendels vorhandene materielle Punkt durch die wirksamen Kräfte, dieselben als von constanter Wirkung vorausgesetzt, erhält, leicht dahin, die Schwingungsdauer eines physischen Pendels zu berechnen. Die im §. 18 abgeleiteten Sätze über die Resultirende von parallelen Kräften und die im §. 21 vorgeführten

Sätze über das Trägheitsmoment setzen uns nämlich in den Stand das physische Pendel auf ein mathematisches Pendel zurückzuführen und die Beschleunigung zu berechnen, welche die am Ende dieses mathematischen Pendels vorhandene Masse durch die wirksamen Kräfte bei constanter Wirkung erhalten würde.

Die Kräfte, welche auf die verschiedenen Punkte des Pendels wirken, sind Parallelkräfte, da es die Schwere ist, welche das Pendel in Bewegung setzt. Wie §. 18 gezeigt wurde, haben Parallelkräfte stets eine an einem bestimmten Punkte angreifende Resultirende, welche der Summe der Kräfte gleich ist: bei einem der Schwere unterworfenen Körper ist der Schwerpunkt der Angriffspunkt der Resultirenden und die Resultirende das Gewicht des Körpers. Wir können uns demnach auch bei dem Pendel das ganze Gewicht desselben als im Schwerpunkte desselben angreifend denken. Ist daher das Gesamtgewicht des Pendels gleich  $P$  und der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe gleich  $z$ , so ist das Moment der Kraft bei einem Ausschlagswinkel  $A$  gleich  $Pz \cdot \sin A$ . Wir sehen, die bewegende Kraft ist dieselbe wie bei einem einfachen Pendel von der Länge  $z$ , an welchem ein materieller Punkt vom Gewichte  $P$  angebracht ist, oder wie bei einem Pendel von der Längeneinheit, an dessen Ende eine Kraft  $Pz$  vertical abwärts wirksam wäre.

Das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf die Drehungsaxe liefert uns dann weiter die Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die an dem ganzen Pendel vertheilte und zu bewegende Masse ersetzt, so dass die drehende Bewegung genau dieselbe ist wie die drehende Bewegung des wirklichen Pendels. Es muss deshalb die ganze Bewegung des physischen Pendels und damit auch die Schwingungsdauer identisch dieselbe sein wie diejenige eines einfachen Pendels, dessen Länge der gewählten Längeneinheit gleich ist, und an dessen Ende sich eine dem Trägheitsmomente des Pendels gleiche Masse befindet, auf welche die Kraft  $P \cdot z$  wirkt. Bezeichnen wir nun das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf die Umdrehungsaxe mit  $\Sigma mr^2$ , so ist die Beschleunigung, welche diese Masse durch die auf sie wirkende Kraft  $P \cdot z$  bekommt

$$g' = \frac{P \cdot z}{\Sigma mr^2}.$$

Da das einfache Pendel, auf welches wir das physische Pendel reducirt haben, eine Länge besitzt, welche der Einheit gleich ist, so liefert der im vorigen §. abgeleitete Ausdruck für die Schwingungsdauer dieses Pendels den Werth

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g'}}.$$

oder indem wir  $g'$  durch seinen Werth ersetzen,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{P \cdot z}{\Sigma mr^2}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{P \cdot z}}.$$

Zu ganz demselben Ausdruck für die Schwingungsdauer gelangen wir natürlichere Weise, wenn wir das Pendel auf ein einfaches Pendel von der Länge  $z$  reduciren, an dessen Ende einfach das Gewicht  $P$  des Pendels an-

greift. Ist  $M$  die Masse, welche im Schwerpunkt die Masse des ganzen Pendels ersetzen soll, so wird dieselbe bestimmt durch die Gleichung

$$Mz^2 = \sum mr^2$$

$$M = \frac{\sum mr^2}{z^2}$$

Die Beschleunigung dieser Masse durch Kraft  $P$  wird

$$g_1 = \frac{P \cdot z^2}{\sum mr^2}$$

und damit die Schwingungsdauer des Pendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{z}{g_1}} = \pi \sqrt{\frac{\sum mr^2}{P \cdot z}}$$

Es ergibt sich somit, dass die Schwingungsdauer eines physischen Pendels gleich ist dem Produkte aus der Zahl  $\pi$  und der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente des Pendels in Bezug auf die Aufhängeaxe, letzteres dividirt durch das statische Moment des Pendels d. h. durch das Product aus dem Gewichte des Pendels und dem Abstände seines Schwerpunktes vom Aufhängepunkt.

Dass diese Gleichung als einen speciellen Fall auch die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels enthält, ist leicht ersichtlich. Denn ist das Gewicht des an dem Ende des als gewichtlos angenommenen Fadens gedachten materiellen Punktes gleich  $P$ , so ist das statische Moment des Pendels von der Länge  $l$  gleich  $P \cdot l$ , das Trägheitsmoment, da die Masse des Gewichtes  $P$  gleich  $\frac{P}{g}$  ist, gleich  $\frac{P}{g} \cdot l^2$ , somit der Quotient aus beiden  $\frac{l}{g}$ .

Für  $P$  können wir noch, wenn wir mit  $\sum m$  die Summe der einzelnen Massentheilchen, also die Masse des Körpers bezeichnen, einsetzen

$$P = g \cdot \sum m,$$

und wir erhalten dann die gewöhnliche Form für den Ausdruck der Schwingungsdauer eines physischen Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{\sum mr^2}{g \cdot z \cdot \sum m}}$$

In dieser Form lässt sich nun auch leicht erkennen, dass jedes physische Pendel mit einem mathematischen von bestimmter Länge isochron schwingt. Setzen wir nämlich

$$\frac{\sum mr^2}{z \cdot \sum m} = l,$$

so wird

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

so dass also das so bestimmte  $l$  die Länge des mathematischen Pendels an gibt, welches einem gegebenen physischen isochron schwingt.

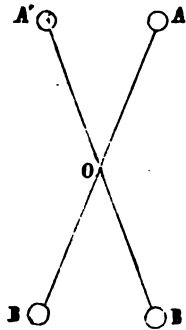
Den um den Abstand  $l$  von der Drehungsaxe befindlichen Punkt nennt man den Schwingungspunkt des Pendels, und die Länge  $l$ , welche also die Länge eines mathematischen mit dem physischen isochron schwingenden Pendels an gibt, nennt man auch die Länge des physischen Pendels.



## §. 29.

**Experimenteller Beweis des vierten Gesetzes.** Nach diesen Entwicklungen über die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ist es nun auch leicht, das letzte Gesetz über die Pendelbewegung experimentell zu prüfen, nämlich das, dass die Schwingungsdauer umgekehrt proportional

Fig. 39.



sein soll der Quadratwurzel aus der Beschleunigung  $g'$ , welche die im Angriffspunkt der Kraft concentrirte und die des ganzen Pendels ersetzende Masse erhält. Wir stellen zu dem Ende ein zusammengesetztes Pendel her, für welches wir die Grösse  $g'$  variiren können, und vergleichen die Schwingungszeiten. An den beiden Enden eines dünnen leichten Stabes von Tannenholz befestigen wir zwei schwere Bleikugeln A und B, deren Gewicht ist resp.  $P$  und  $P + p$ . Mittels einer in der Mitte des Stabes O befestigten Stahlschneide setzen wir dann den Stab auf eine feste Unterlage; wir haben dann ein zusammengesetztes Pendel, dessen Bewegung wir leicht berechnen können. Die bewegende Kraft dieses Pendels ist nicht das Gesamtgewicht, sondern nur das Uebergewicht  $p$ , da die beiden Gewichte  $P$  im Abstände  $+ l = OB = OA$  sich vollständig äquilibriren. Der Angriffspunkt der Kraft ist der Punkt B, da dort der Schwerpunkt des untern Gewichtes sein soll. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Holzstabes mit  $K$ , und die Radien der Kugeln mit  $r$  und  $r_1$ , so ist nach §. 21 das Trägheitsmoment des ganzen Pendels

$$\Sigma mr^2 = K + \frac{P}{g} \left( \frac{2}{5} r^2 + l^2 \right) + \frac{P+p}{g} \left( \frac{2}{5} r_1^2 + l^2 \right)$$

$$\Sigma mr^2 = \frac{2P+p}{g} l^2 + \frac{2}{5} \left( \frac{P}{g} \cdot r^2 + \frac{P+p}{g} r_1^2 \right) + K.$$

In dem Abstände  $l$ , in welchem das Gewicht  $gs$  angreift, wird diese Masse ersetzt durch

$$\frac{\Sigma mr^2}{l^2} = \frac{2P+p}{g} + \frac{2}{5} \left( \frac{P}{g} \cdot \frac{r^2}{l^2} + \frac{P+p}{g} \frac{r_1^2}{l^2} \right) + \frac{K}{l^2}.$$

Nehmen wir den Stab recht leicht und geben ihm eine Länge von 2 Metern, so dass  $l$  gleich  $1^m$  wird, so können wir ohne merklichen Fehler die beiden letzten Glieder ganz ausser Acht lassen, da der Radius der Bleikugeln, selbst wenn wir bis zu einem Gewichte von 2 Kilogramm gehen, nur etwa 0,035 Meter beträgt. Der Werth der beiden letzten Glieder erreicht deshalb dann noch nicht 0,001 des ersten Gliedes.

Dies vorausgesetzt, wird dann die Beschleunigung, welche die zu bewegende Masse von der Kraft  $p$  erhalten würde,

$$g' = \frac{p \cdot l^2}{\Sigma mr^2} = g \frac{p}{2P+p}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist daher

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g'}} = \pi \sqrt{\frac{l(2P+p)}{g \cdot p}}.$$

Wählen wir nun als Kugel bei  $A$  eine von 1 Kilogramm Gewicht und bei  $B$  der Reihe nach Kugeln von

1,666 Kilogr. 1,25 Kilogr. 1,1333 Kilogr.,

wodurch also

$$p = \frac{2}{3} \text{ Kilogr. } \quad \frac{2}{8} \text{ Kilogr. } \quad \frac{2}{5} \text{ Kilogr.}$$

wird, so werden die Schwingungsdauern des Pendels

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 4\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

die Schwingungsdauern müssen also unter einander und zu denen des einfachen Pendels von der Länge  $l$  im Verhältniss 2:3:4 stehen.

Wir können noch in anderer Weise die Beschleunigungen und Schwingungsdauern variiren und damit gleichzeitig einen experimentellen Beweis für die Richtigkeit des im §. 21 abgeleiteten Satzes über das Trägheitsmoment liefern. Wir nehmen zwei Bleikugeln, jede vom Gewichte  $P$ , und durchbohren sie so, dass sie auf dem Stabe verschiebbar und in verschiedenen Abständen von der Drehungsaxe festgeklemmt werden können. Im Abstände  $l$  unten am Ende des Stabes befestigen wir dann eine Kugel vom Gewichte  $p$ . Klemmen wir dann die Kugeln  $P$  einmal so ein, dass ihr Mittelpunkt sich im Abstände  $\frac{3}{4}l$  befindet, dann, dass der Abstand der Mittelpunkt wird  $\frac{1}{2}l$ ,  $\frac{1}{4}l$ , so lassen wir die bewegende Kraft und die bewegte Masse ganz ungeändert, geben letzterer aber eine andere Vertheilung, und in Folge dessen muss die Schwingungsdauer jedesmal eine andere sein. Befinden sich die Kugeln im Abstand  $\frac{3}{4}l$ , so wird das Trägheitsmoment des Pendels

$$\Sigma mr^2 = K + 2 \frac{P}{g} \left( \frac{9}{16} l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) + \frac{p}{g} \left( l^2 + \frac{2}{5} r_1^2 \right),$$

wenn  $r$  der Radius der Kugeln  $P$  und  $r_1$  jener der Kugeln  $p$  ist. Nach der vorhin gemachten Bemerkung können wir auch hier die nicht mit  $l^2$  multiplicirten Glieder vernachlässigen und erhalten dann

$$\Sigma mr^2 = \left( \frac{9}{8} \frac{P}{g} + \frac{p}{g} \right) l^2$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(18P + 16p)l}{16 \cdot g \cdot p}}$$

Klemmen wir die beiden Kugeln  $P_1$  so dass ihre Mittelpunkte sich in  $\frac{1}{2}l$  befinden, so wird in derselben Weise berechnet

$$t = \pi \sqrt{\frac{(8P + 16p)l}{16 \cdot p \cdot g}}$$

und wenn die Kugeln in  $\frac{1}{4}l$  eingeklemmt werden,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(2P + 16p) \cdot l}{16 \cdot p \cdot g}}$$

Nehmen wir nun jede der Kugeln  $P$  gleich 1 Kilogramm und  $p$  gleich  $\frac{1}{16}$  Kilogramm, so werden diese Schwingungsdauern

$$t = 4,35 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 3 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 1,732 \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

Werthe, welche man durch den Versuch bestätigt findet. Damit ist dann auch experimentell der Nachweis geliefert, dass das Produkt einer Masse in das Quadrat ihres Abstandes von der Drehungsaxe das Trägheitsmoment der Masse ist, oder dass bei der drehenden Bewegung Massen sich ersetzen, welche sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

## §. 30.

**Corroction wegen der Amplitude.** Nachdem wir kennen gelernt haben, wie die Länge eines mathematischen Pendel erhalten wird, welches mit einem gegebenen physischen Pendels isochron schwingt, haben wir auch die zweite Annahme, die wir bei der Herleitung unserer Formel für die Schwingungsdauer machten, die sich in der Wirklichkeit nicht erfüllen lässt, zu corrigiren, nämlich die, dass das Pendel so kleine Schwingungen macht, zu unseren Rechnungen benutzen konnten. Hier müssen wir uns jedoch begnügen, von den Resultaten der analytischen Mechanik Notiz zu nehmen, da es nicht möglich ist, das Problem der Schwingungsdauer für grössere Amplituden anders als durch Hilfe der Differential- und Integralrechnung allgemein aufzulösen.

Die analytische Mechanik liefert uns für die Schwingungszeit eines einfachen Pendels ganz allgemein die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \dots \left(\frac{1.2 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^n + \dots \right\},$$

worin  $h$  die senkrechte Höhe  $BD$  (Fig. 37) des Punktes  $C$  über dem Punkt  $B$  bedeutet. Man sieht, dass die Schwingungsdauer im allgemeinen abhängig ist von der Oscillationsweite, wie wir es auch §. 26 sahen. Ist  $h$  jedoch klein, so convergirt die Reihe sehr rasch, und ist es sehr klein, so kann schon das erste Glied der Reihe, welches  $h$  enthält, ohne Einfluss sein. Das ist der bisher von uns angenommene Fall. In den meisten Fällen genügt es nun, wenn man bis zum zweiten Gliede der Reihe fortschreitet; nämlich dann, wenn die Amplitude  $10^\circ$  nicht überschreitet. Der Ausdruck für die Schwingungsdauer wird dann

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{h}{8l} \right).$$

Nun ist, wenn wir, wie in §. 27, den Ausschlagswinkel des Pendels mit  $A$  bezeichnen,

$$\frac{h}{l} = \frac{BO - DO}{l} = 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$$

und somit bei solch kleinen Amplituden

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} A \right\}.$$

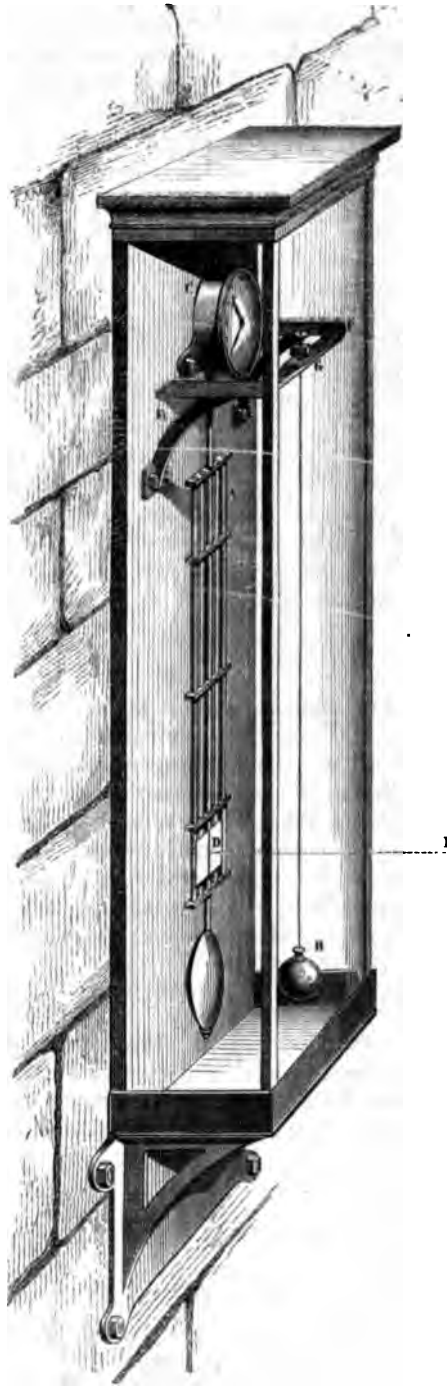
## §. 31.

**Bestimmung von  $g$ .** Eine der wichtigsten Anwendungen des Pendels ist die Bestimmung der Grösse  $g$ , der Beschleunigung beim freien

Fall, da diese Grösse auf keinem andern Wege mit einer ähnlichen Genauigkeit bestimmt werden kann, als durch Beobachtung der Pendelschwingungen. Man beobachtet dazu mit möglicher Genauigkeit die Schwingungsdauer eines Pendels, bestimmt die Länge des mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer und berechnet dann  $g$ . Die einzige Schwierigkeit ist die Bestimmung der Länge des mathematischen mit dem physischen isochron schwingenden Pendels. Man kann dazu auf einem doppelten Wege gelangen; entweder gibt man dem Pendel eine geometrisch bestimmte Gestalt, und sorgt dafür, dass die Masse des Pendels überall die gleiche Dichtigkeit hat, so dass man das Trägheitsmoment des Pendels berechnen kann; diesen Weg schlugen Borda, sowie Arago und Biot bei ihren Bestimmungen von  $g$  ein; oder man gibt dem Pendel eine solche Form, dass man an ihm experimentell die Länge des mit ihm isochron schwingenden mathematischen Pendels bestimmen kann. Letztere Methode ist von Bohnenberger angegeben und vorzugsweise von Kater ausgeführt worden.

Die Anordnung der Versuche, wie sie Borda und später Arago und Biot anwandten, zeigt Fig. 40. Das Pendel  $GB$  besteht aus dünnem Platindraht, an welchem unten eine Kugel von Platin befestigt ist. Das Pendel ist befestigt an einem stählernen Prisma, das mit seiner untern scharfen Kante auf einer auf dem eisernen Träger  $EFG$  aufgelegten in ihrer Mitte zum Durchlassen des Pendels durchbohrten Platte von Stahl oder Achat aufsteht. Da das Prisma und die Klemmvorrichtung,

Fig. 40.



welche den Draht hält, an den Oscillationen Theil nimmt und ein nicht zu vernachlässigendes Gewicht hat, so würde die Schwingungsdauer des Pendels auch von der Vertheilung der Masse des Prismas abhängen. Dadurch würde es schwierig sein, durch Rechnung das Pendel auf ein mathematisches zu reduciren, da man der Aufhängevorrichtung nicht eine so einfache geometrische Gestalt geben kann, wie sie zur Berechnung des Trägheitsmoments erforderlich ist. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit richtete Borda die Aufhängevorrichtung so ein, dass sie auf die Schwingungsdauer des Pendels gar keinen Einfluss hatte. Wegen der unter dem Prisma angebrachten, zur Aufnahme des Platindrahtes dienenden Klemmvorrichtung liegt der Schwerpunkt der ganzen Aufhängevorrichtung unterhalb der Schneide. Stellt man daher das Prisma ohne angehängtes Pendel auf die Unterlage, so schwingt es selbst als Pendel hin und her. Um nun die Schwingungsdauer dieses kleinen Pendels verlängern zu können, ist, wie die Figur zeigt, in der Mitte des Prismas, gewissermaassen als eine nach oben gerichtete Verlängerung des Pendelfadens, eine Schraubenspindel aufgesetzt, auf welcher ein Laufgewicht auf und nieder bewegt werden kann. Durch eine Hebung des Laufgewichtes wird der Schwerpunkt der Aufhängevorrichtung der Schneide näher gebracht, und damit wird die Schwingungsdauer derselben eine grössere. Denn nennen wir die Masse der Aufhängevorrichtung  $m$ , den Abstand ihres Schwerpunkts von der Schneide  $a$  und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schneide  $k$ , so ist die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{k}{g \cdot a \cdot m}};$$

es wächst somit  $t$ , wenn  $a$  kleiner wird. Das Laufgewicht wurde nun so gestellt, dass die Schwingungsdauer der Aufhängevorrichtung für sich genau gleich war der Schwingungsdauer des ganzen zusammengesetzten Pendels. Dann ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels dieselbe, als wenn es nur aus dem Aufhänge Draht und der unten angehängten Kugel bestände. Sei, um das nachzuweisen,  $K$  das Trägheitsmoment des Fadens und der unten angehängten Kugel  $A$  der Abstand des Schwerpunktes dieser beiden Theile von der Schneide, und  $M$  die Masse von Faden und Kugel. Ist nun die Schwingungsdauer des ganzen Pendels ebenfalls gleich  $t$ , so ist

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{k + K}{g (am + A M)}},$$

da das Trägheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers gleich ist der Summe der Trägheitsmomente der Bestandtheile, und das statische Moment mehrerer Kräfte gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{k}{g \cdot am} = \frac{k + K}{g (am + A M)}$$

und daraus unmittelbar

$$\frac{k + K}{g (am + A \cdot M)} = \frac{K}{g \cdot A \cdot M}$$

oder auch

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{g \cdot A \cdot M}}$$

Bei den eigentlichen Versuchen zur Bestimmung von  $g$  war die Kugel von Platin; um aber zu untersuchen, ob der Werth von  $g$  für alle Substanzen genau derselbe sei, wurde die Kugel zuweilen gewechselt. Deshalb war die Kugel nicht direct, sondern durch ein ganz kleines Ansatzstück  $B$ , welches unten concav als Theil einer Kugelfläche, deren Radius gleich dem der anzuhängenden Kugeln war, befestigt. Die Kugel wird mittels einer ganz dünnen Wachsschicht in diese Vertiefung eingeklebt. Dadurch ist gleichzeitig ermöglicht, die Kugel an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche anzukleben, um so zu untersuchen, ob der Mittelpunkt der Kugel auch der Schwerpunkt derselben ist.

Das Pendel wurde an einem festen schmiedeeisernen Träger  $EGF$  Fig. 40 aufgehängt, welcher in einer massiven steinernen von belebten Strassen entfernten Mauer derartig befestigt und durch Streben  $E$  unterstützt war, dass er weder durch äussere Stösse, noch auch durch die Schwingungen des Pendels die geringste Bewegung annahm. Auf diesen Träger war bei  $g$  die gut polirte Platte von Stahl oder Achat fest aufgesetzt, auf welcher die Schneide der Aufhängevorrichtung aufstand.

Das Pendel hing dann vor einer gut regulirten astronomischen Uhr herab, so dass man gleichzeitig die Bewegung des zu den Beobachtungen dienenden und des Pendels der Uhr übersehen konnte. Schliesslich war Uhr und Pendel von einem Glasgehäuse umgeben, welches etwaige Luftströmungen von dem Pendel abhielt.

Zur Bestimmung von  $g$  bedarf es nun zunächst der Kenntniss der Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem physischen isochron schwingt, also des Werthes

$$l = \frac{K}{A \cdot M}.$$

Dazu ist es nothwendig, die Länge  $f$  des Fadens, das Gewicht des Fadens und den Radius, sowie das Gewicht der Kugel, zu dem wir ohne merklichen Fehler das Gewicht des Ansatzstückes  $B$  hinzuziehen können, zu messen. Die Länge des Fadens, deren Bestimmung vor Construction des Kathetometers mit einiger Schwierigkeit verknüpft war, ist mit Hülfe dieses Messapparates leicht zu erhalten. Borda brachte eine genau horizontale Platte durch eine Mikrometerschraube mit dem tiefsten Punkte der Kugel zur Berührung und maass dann mit Hülfe eines Maassstabes den Abstand der Platte von der Schneide. Jetzt visirt man mit einem Kathetometer einmal die Schneide und dann den tiefsten Punkt der Kugel, so dass der horizontale Faden des Fadenkreuzes gerade als Tangente der Kugel erscheint. Die Differenz der Stellungen des Kathetometerfernrohrs gibt dann die Länge des Fadens plus dem Durchmesser der Kugel. Ist das Pendel länger als die Skala des Kathetometers, so visirt man zunächst die Schneide und irgend einen zwischen dem obern und untern Ende des Pendels liegenden Punkt, setzt dann das Kathetometer tiefer und visirt dann von neuem den eben visirten Punkt und darauf den tiefsten Punkt der Kugel.

Um den Durchmesser der Kugel zu erhalten, kann man sich des Sphärometers bedienen, oder genauer, man bestimmt den Gewichtsverlust der Kugel beim Eintauchen derselben in Wasser von bestimmter Temperatur, in welcher Weise, wird später hervortreten, wenn wir die Methoden zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der festen Körper besprechen. Die

Differenz zwischen den Ablesungen des Kathetometers und dem Durchmesser  $2r$  der Kugel gibt dann die Länge  $f$  des Fadens.

Da der Faden überall dieselbe Dichtigkeit hat, so liegt sein Schwerpunkt in dem Abstände  $\frac{1}{2}f$  von der Aufhängeaxe; der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte. Ist daher  $p$  das Gewicht des Fadens,  $P$  das Gewicht der Kugel, so ist

$$A \cdot M = \frac{p}{g} \cdot \frac{f}{2} + \frac{P}{g} (f + r).$$

Das Trägheitsmoment des Fadens erhalten wir in folgender Weise. Sei  $q$  das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, so ist das Gewicht eines unendlich kleinen Stückchens von der Länge  $dx$  gleich  $q \cdot dx$ . Befindet sich dieses Stückchen im Abstände  $x$  von der Schneide, so ist das Trägheitsmoment dieses Stückchens

$$\frac{q}{g} \cdot x^2 \cdot dx$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Fadens

$$K_1 = \frac{q}{g} \int_0^f x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{q}{g} (f^3 - 0) = \frac{1}{3} \frac{q}{g} \cdot f^3.$$

Nun ist  $q \cdot f = p$  gleich dem Gewichte des Fadens, somit

$$K_1 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot f^3.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende, der Schneide parallele Axe ist

$$\frac{2}{5} \frac{P}{g} \cdot r^2.$$

Da diese Axe sich im Abstände  $f + r$  von der Drehungsaxe des Pendels befindet, so wird das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf diese Axe

$$K_2 = \frac{2}{5} \frac{P}{g} \{r^2 + (f + r)^2\},$$

somit

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot f^2 + \frac{2}{5} \frac{P}{g} \{r^2 + (f + r)^2\}$$

und schliesslich die Länge  $l$  des mathematischen Pendels

$$l = \frac{\frac{1}{3} p \cdot f^2 + \frac{2}{5} P \{r^2 + (f + r)^2\}}{p \cdot \frac{f}{2} + P \{f + r\}}.$$

Da die Länge  $f$  des Fadens und der Radius der Kugel von der Temperatur abhängig sind, so ändert sich auch die Länge  $l$  des Pendels mit der Temperatur. Ist daher die Temperatur bei den Beobachtungen nicht immer dieselbe und zwar jene, bei welcher die Längenmessungen durchgeführt sind, so muss man eine Correction anbringen, um die für jeden Versuch gültige Länge des Pendels zu erhalten. Ist Faden und Kugel von demselben *Metall* und  $t$  die Temperatur, bei welcher die Längenmessungen vorgenom-

men sind,  $t_1$  die Temperatur, bei welcher die Schwingungen beobachtet werden. so ist die zur Bestimmung von  $g$  in Rechnung zu ziehende Länge  $l'$

$$l' = l (1 + \alpha (t_1 - t)),$$

wenn  $\alpha$  den Ausdehnungscoefficienten des Metalls bedeutet. Die Werthe von  $\alpha$  für die verschiedenen Metalle werden wir im dritten Bande kennen lernen<sup>1)</sup>.

Um die Schwingungsdauer des Pendels mit grösster Genauigkeit zu bestimmen, vergleicht man die Schwingungen des Beobachtungspendels mit denen des Uhrpendels. Zu dem Zwecke beobachtet man die Schwingungen des durch einen kleinen Stoss in Bewegung gesetzten Pendels mit Hülfe eines dem Apparate gegenüber in der Richtung  $DD'$  in einer Entfernung von mehreren Metern aufgestellten Fernrohrs.

Man sieht dann, wenn man durch das Fernrohr auf den Apparat hinblickt, das Pendel der Uhr, auf welches man vorher einen feinen verticalen Strich gezogen hat, und das davor aufgehängte Pendel gesondert durch das Gesichtsfeld gehen. Da nun das eine der Pendel immer etwas rascher schwingt als das andere, nehmen wir an, das raschere sei das Pendel  $GB$ , so werden nach einigen Schwingungen die beiden Pendel zugleich in das Gesichtsfeld treten und sich decken. Diesen Zeitpunkt einer Coincidenz der beiden Pendel wählt man zum Ausgangspunkte der Beobachtungen. Um ihn genau zu erhalten, beginnt man die Beobachtungen schon etwas früher; man sieht dann, dass bei den aufeinanderfolgenden Durchgängen die Pendel sich immer näher rücken, bis sie endlich bei einem Durchgange zur Coincidenz kommen. Bei den dann weiter folgenden Schwingungen eilt dann das Pendel  $GB$  vor, so dass nach einiger Zeit das Pendel  $GB$  schon eine rückgängige Bewegung hat, während das Uhrpendel noch eine vorwärtsgerichtete Bewegung besitzt. Dabei kommt dann wieder ein Zeitpunkt, in welchem die beiden Pendel sich wieder in der Mitte des Gesichtsfeldes decken, aber jetzt mit entgegengesetzt gerichteter Bewegung. Dann hat das Pendel  $GB$  eine Oscillation mehr gemacht als das Pendel der Uhr von dem als Ausgangspunkt der Bewegung gerechneten Zeitpunkt der vorigen Coincidenz an. Weiterhin eilt dann das Pendel  $GB$  immer mehr vor, es geht bald wieder in gleicher Richtung mit dem Uhrpendel durch das Gesichtsfeld und kommt dann wieder mit dem Uhrpendel zur Coincidenz wie bei der ersten Beobachtung. Bei dieser zweiten Coincidenz hat das Pendel zwei Schwingungen mehr gemacht, und so bei jeder folgenden Coincidenz jedesmal eine Schwingung mehr. Setzen wir nun voraus, dass das Uhrpendel genau Sekunden schwingt, und dass man, während man  $m$  Coincidenzen beobachtet hat, an dem Sekundenzeiger der Uhr  $n$  Sekunden abliest, so ist die Schwingungsdauer  $t$  gleich

$$t = \frac{n}{n + m}$$

Diese Art die Schwingungen des Pendels zu beobachten, die Methode der Coincidenzen, bietet eine Reihe von Vortheilen. Zunächst leitet man

<sup>1)</sup> Genaueres über die Bestimmung der Pendellänge und insbesondere über den Einfluss der als Drehungsaxe dienenden Schneide auf die Länge des Pendels sehe man: *F. W. Bessel* Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Aus den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1826.



die Dauer einer Schwingung aus der Beobachtung einer sehr grossen Zahl ( $n + m$ ) Schwingungen ab; der bei der Zeitmessung begangene Fehler wird deshalb durch die Division mit dieser grossen Zahl beträchtlich verkleinert. Ferner kann man bei der Beobachtung mit dem Fernrohr den Zeitpunkt der einzelnen Coincidenz scharf beobachten. Schliesslich bedarf es nur einer sehr scharfen Beobachtung der ersten und letzten Coincidenz; ja man kann sogar, nachdem man die zweite Coincidenz beobachtet und so jedenfalls mit grosser Annäherung die zwischen zwei Coincidenzen liegende Anzahl  $r$  von Sekunden erhalten hat, die Beobachtungen bis kurz vor der letzten Coincidenz unterbrechen, indem dann der Coefficient  $\frac{n}{r} = m$  uns die Anzahl der Coincidenzen liefert.

Zur Berechnung von  $g$  müssen die Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bögen reducirt werden. Sind die Bögen überhaupt nur sehr klein, so genügt es das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude zu nehmen. Man misst zu dem Ende die Amplituden an einem hinter dem Pendel angebrachten Gradbogen, den man gleichzeitig mit dem Pendel im Fernrohr sehen kann. Ist die erste Amplitude  $A_1$ , die letzte  $A_n$ , so setzt man in der Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} A\right)$$

$$A = \frac{A_1 + A_n}{2}.$$

Will man bei der Rechnung strenge verfahren, so hat man zu beachten, dass die Dauern der einzelnen Schwingungen unter einander nicht ganz gleich sind, und dass der gefundene Mittelwerth  $t$  nicht gerade die Schwingungsdauer des Pendels bei der so bestimmten Amplitude  $A$  ist. Es würde das nur der Fall sein, wenn die Schwingungsdauer sich in einfach linearer Weise mit dem Bogen änderte, und wenn weiter die aufeinander folgenden Bögen immer um dieselbe Grösse kleiner würden. Beides ist nicht der Fall; dass ersteres nicht der Fall ist, zeigt unsere Gleichung für die Schwingungsdauer, und dass letzteres nicht der Fall ist, ergibt die Beobachtung. Dieselbe zeigt nämlich, dass nicht die Differenzen der aufeinander folgenden Schwingungsbögen constant sind, sondern dass dieselben in einem constanten Verhältnisse stehen, oder dass die Schwingungsbögen eine geometrische Reihe bilden. Sind also  $A_1, A_2 \dots A_p$  die einzelnen Bögen, so ist

$$A_2 = k \cdot A_1; A_3 = k \cdot A_2 = k^2 \cdot A_1 \dots A_p = k^{p-1} \cdot A_1,$$

wenn wir mit  $k$  einen echten Bruch bezeichnen.

Da wir bei den hier vorausgesetzten kleinen Bögen die Sinus noch den Bogen proportional setzen können, so dürfen wir auch schreiben

$$\sin \frac{1}{2} A_2 = k \cdot \sin \frac{1}{2} A_1; \sin \frac{1}{2} A_3 = k^2 \cdot \sin \frac{1}{2} A_1 \dots \sin \frac{1}{2} A_p = k^{p-1} \cdot \sin \frac{1}{2} A_1,$$

und zur genauern Berechnung von  $g$  erhalten wir dann folgende Gleichungen, wenn wir mit  $t_1, t_2 \dots t_p$  die Dauer der ersten, zweiten etc. bis zur letzten Schwingung, für welche wir  $p = m + n$  setzen, bezeichnen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} A_1\right)$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{4} k^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A_1) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 t_p &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{4} \cdot k^{2p-2} \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A_1).
 \end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Schwingungsdauern ist gleich der Dauer  $n$  der ganzen Beobachtung. Bilden wir die Summe aller dieser Gleichungen, so erhalten wir deshalb auf der linken Seite  $n$ , und die Gleichung wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ p + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} A_1 (1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2p-2}) \right\}$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist bekanntlich

$$1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2p-2} = \frac{k^{2p} - 1}{k^2 - 1};$$

somit wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ p + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} A_1 \frac{k^{2p} - 1}{k^2 - 1} \right\},$$

worin  $k$  nach dem eben angeführten Gesetze aus zwei aufeinander folgenden Amplituden, oder aus der ersten und letzten Amplitude gegeben ist durch

$$k^{p-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} A_p}{\sin \frac{1}{2} A_1}.$$

An dem so berechneten Werthe für  $g$  sind dann noch 2 Correctionen anzubringen; das Pendel schwingt nämlich in der Luft, durch deren Gegenwart das Gewicht des Pendels vermindert wird (in welcher Weise, das werden wir später zeigen), und die Bewegung des Pendels wird durch die Reibung der Luft verzögert. Die Anbringung dieser beiden Correctionen können wir indess hier nicht besprechen<sup>1)</sup>. Zweitens gilt der so gefundene Werth von  $g$  nur für den Ort, an dem man ihn bestimmt hat. Im nächsten Kapitel wird sich ergeben, dass der Werth von  $g$  mit der Erhebung von der Erdoberfläche, resp. dem Meeresniveau kleiner wird; wir werden dort auch zeigen, wie wir den beobachteten Werth auf das Meeresniveau reduciren.

Borda erhielt auf diese Weise für  $g$ , in Paris unter 48° 50' 14" n. Br. reducirt auf die Meereshöhe,

$$g = 9,80882;$$

Biot fand unter denselben Verhältnissen

$$g = 9,80896,$$

zwei Werthe, die sich nur um 0,14 Mm. unterscheiden.

Borda sowohl, wie auch später Bessel haben dann weiter gezeigt, dass der Werth von  $g$  identisch derselbe ist, aus welcher Substanz man auch die Kugel des Pendels wählt; daraus folgt dann mit aller Strenge, dass die Schwere auf alle Körper gleichmässig wirkt, dass alle Körper beim freien Fall die gleiche Beschleunigung erhalten.

### §. 32.

**Bestimmung von  $g$  mittels des Reversionspendels.** Die im vorigen Paragraphen besprochene Methode zur Bestimmung von  $g$  leidet an einer

<sup>1)</sup> Man sehe darüber *Bessel* a. a. O. und *O. E. Meyer* Poggend. Ann. Bd. CXLII.

Unsicherheit, nämlich ob, wie es bei der Berechnung des Trägheitsmomentes vorausgesetzt werden muss, die Kugel am untern Ende des Pendels auch überall dieselbe Dichtigkeit besitzt. Von dieser Unsicherheit ist die zweite der vorhin erwähnten Methoden frei, welche die Länge des mit dem physischen isochronen Pendels auf experimentellem Wege bestimmt. Die Methode wurde im Anfange dieses Jahrhunderts von dem Astronomen Bohnenberger zu Tübingen vorgeschlagen und später besonders von dem englischen Naturforscher Kater zur Messung der Länge des Sekundenpendels benutzt. Das Verfahren beruht auf einer besondern Eigenschaft des Schwingungspunktes des physischen Pendels. Führt man nämlich durch den Schwingungspunkt eines physischen Pendels eine der Aufhängeaxe des Pendels parallele Axe und hängt dann an dieser als Drehungsaxe das Pendel auf, so ist die Schwingungsdauer des Pendels bei dieser Aufhängung genau gleich derjenigen bei der frühern Aufhängung. Da nun der Abstand des Schwingungspunktes von der Drehungsaxe gleich ist der Länge des mathematischen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hat wie das physische Pendel, so gibt uns der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, mit der wir den Werth von  $g$  zu berechnen haben.

Wir können diese Eigenschaft des Schwingungspunktes leicht nachweisen mit Hülfe des im §. 21 abgeleiteten Satzes, dass wenn das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt geführte Axe gleich ist  $M \cdot a^2$ , dass es dann in Bezug auf eine mit dieser parallele und im Abstand  $z$  von ihr befindliche gleich ist  $M(a^2 + z^2)$ .

Ist nämlich  $M$  die Masse unseres Pendels und  $z$  bei der ersten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, so ist die Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer

$$l = \frac{M(z^2 + a^2)}{M \cdot z} = z + \frac{a^2}{z}.$$

Sei bei der zweiten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe gleich  $z'$ , so ist der Abstand der beiden Schneiden gleich  $z + z'$  und die Länge des mathematischen Pendels

$$l' = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Ist nun die Schwingungsdauer in beiden Fällen dieselbe, so folgt auch

$$l = l'$$

oder

$$z + \frac{a^2}{z} = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Diese Gleichung besteht erstens, wenn  $z = z'$  ist; wenn also der Schwerpunkt des Pendels in der Mitte zwischen den beiden Schneiden liegt. Ist das aber der Fall, so können wir aus der Gleichheit der Schwingungsdauern nur auf die Gleichheit der beiden Werthe von  $l$  und  $l'$  schliessen, ohne dass der Abstand der beiden Schneiden  $z + z'$  gleich  $l$  zu sein braucht. Ist aber  $z$  von  $z'$  verschieden, so kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn

somit wenn

$$l = z + z'$$

ist. Liegt daher der Schwerpunkt nicht in der Mitte zwischen beiden Schneiden, so folgt aus der Gleichheit der Schwingungsdauern, dass die zweite Schneide durch den Schwingungspunkt geht, somit dass der Abstand der beiden Schneiden gleich ist der Länge des mathematischen Pendels mit gleicher Dauer der Schwingungen.

Das auf diesen Satz basirte Kater'sche Pendel Fig. 41 besteht aus einem Messingstabe, der an seinen beiden Enden mit Spitzen versehen ist, um bei der Beobachtung der Schwingungen die in dem vorigen Paragraphen besprochene Methode der Coincidenzen anwenden zu können. Die beiden Schneiden  $S$  und  $S^1$  sind ein für allemal an dem Pendel unveränderlich und zwar so befestigt, dass das fertige Pendel ungefähr jede Sekunde eine Schwingung vollführt. Unterhalb der einen Schneide  $S^1$  ist eine Metalllinse angebracht, welche den Schwerpunkt des Pendels, das im übrigen in Bezug auf die beiden Schneiden symmetrisch eingerichtet ist, sicher unterhalb die Mitte von  $SS^1$  herab, also näher zu  $S^1$  legt. Zwischen den beiden Schneiden ist auf dem Pendelstabe eine Masse  $m$  mit Reibung verschiebbar, und ausserdem befindet sich an einer andern Stelle eine zweite Masse  $m_1$ , welche durch eine in dem Ringe  $R$  befestigte Mikrometerschraube eine kleine Verschiebung auf und ab erhalten kann.

Man hängt das Pendel nun zunächst an die eine der Schneiden, etwa  $S$ , und beobachtet in der vorher beschriebenen Weise seine Schwingungsdauer. Darauf hängt man das Pendel um und bewirkt durch eine Verschiebung der Massen  $m$  und  $m_1$ , dass bei dieser Aufhängung die Schwingungsdauer ganz genau dieselbe ist. Hat man das erreicht, so hat man nur mit dem Kathetometer den Abstand der Schneiden zu messen, und die so gefundene Länge in die Gleichung zur Berechnung von  $g$  für die Länge  $l$  des Pendels einzusetzen, also in die Gleichung

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ p + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} A_1 \frac{k^{2p} - 1}{k - 1} \right\},$$

worin die Bedeutung der Zeichen dieselbe ist wie im vorigen Paragraphen.

Eine vollkommene Uebereinstimmung der Schwingungsdauern ist nur schwierig zu erreichen; wenn man indess die Lage des Schwerpunkts in dem Pendel bestimmt, so kann man aus der Beobachtung der beiden Schwingungsdauern leicht die Schwingungsdauer eines Pendels ableiten, dessen Länge gleich ist dem Abstände der beiden Schneiden. Sei wie vorhin der Abstand des Schwerpunkts von der einen Schneide gleich  $z$ , von der andern gleich  $z_1$ , und sei die bei der ersten Aufhängung beobachtete Schwingungsdauer  $t_1$ , die bei der zweiten beobachtete gleich  $t_2$ .

Der Abstand der beiden Schneiden ist dann  $z + z_1$ , und die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von dieser Länge ist

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{z + z_1}{g}} \dots (1).$$

Fig. 41.



Ist  $M$  die Masse des Pendels und  $Ma^2$  wie vorher das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende den Schneiden parallele Axe, so ist

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{z + \frac{a^2}{z}}{g}} \dots (2)$$

$$t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{z_1 + \frac{a^2}{z_1}}{g}} \dots (3),$$

wenn wir die Correction wegen der Amplitude, welche hier genau dieselbe ist wie vorhin, der Kürze wegen ausser Acht lassen.

Nun folgt

$$\text{aus (1) } \dots \frac{g}{\pi^2} = \frac{z + z_1}{t^2} \dots (4)$$

$$\text{aus (2) } \dots \frac{g}{\pi^2} \cdot t_1^2 = z + \frac{a^2}{z} \dots (5)$$

$$\text{aus (3) } \dots \frac{g}{\pi^2} \cdot t_2^2 = z_1 + \frac{a^2}{z_1} \dots (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$z \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot t_1^2 = z^2 + a^2 \dots (7)$$

$$z_1 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot t_2^2 = z_1^2 + a^2 \dots (8)$$

Subtrahiren wir (8) von (7), so wird

$$\frac{g}{\pi^2} (z t_1^2 - z_1 t_2^2) = z^2 - z_1^2 \dots (9)$$

und setzen wir hierin den Werth von  $\frac{g}{\pi^2}$  aus (4),

$$\frac{z + z_1}{t^2} (z t_1^2 - z_1 t_2^2) = z^2 - z_1^2,$$

und diese Gleichung nach  $t$  aufgelöst gibt

$$t = \sqrt{\frac{z t_1^2 - z_1 t_2^2}{z - z_1}}.$$

Dieser Werth in die Gleichung (1) eingesetzt liefert

$$\frac{z t_1^2 - z_1 t_2^2}{z - z_1} = \pi^2 \frac{z + z_1}{g}$$

$$g = \pi^2 \frac{z^2 - z_1^2}{z t_1^2 - z_1 t_2^2}.$$

Bei der letzteren Gleichung ist zu beachten, dass für  $t_1$  und  $t_2$  die auf unendlich kleine Schwingungen reducirten Schwingungsdauern zu nehmen sind.

Mit einem solchen Pendel erhielt Kater für die Länge eines Pendels, welches in einer Sekunde seine Schwingung vollführt, unter der Breite von Paris und im Niveau des Meeres

$$l = 0,9938606.$$

Daraus ergibt sich der Werth von  $g$  nach der Gleichung

$$1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{0,9938606}{g}}$$

$$g = \pi^2 \cdot 0,9938606 = 9,80904,$$

eine Zahl, welche mit der von Biot gefundenen fast genau übereinstimmt.

### §. 33.

**Anwendung des Pendels bei Uhren.** Da die Schwingungen eines Pendels von gegebener Länge eine ganz bestimmte Dauer haben, so kann man sich derselben zu Zeitmessungen bedienen.

Deshalb findet das Pendel seine ausgedehnteste Anwendung bei den Uhren. Die Einrichtung der Uhren ist im wesentlichen folgende. Um eine Walze  $Q$  (Fig. 42) ist ein Faden geschlungen, an dessen Ende sich ein Gewicht  $P$  befindet, welches beim Herabsinken bewirkt, dass sich die Walze dreht. Auf die Walze ist ein gezähntes Rad  $II$  mit schräg geschnittenen Zähnen aufgesetzt. An einer mit der Axe der Walze parallelen Drehungsaxe  $A$  ist ein Pendel  $ACB$  aufgehängt, welches durch seine Schwingungen einem Stift  $CD$  und einem mit dem Stift verbundenen Doppelhaken  $GE$  eine hin- und hergehende Bewegung ertheilt. Die umgebogenen Enden des Doppelhakens greifen in die Zähne des Rades  $II$ . Bewegt sich nun das Pendel und hebt sich der Haken bei  $E$ , so sinkt das Gewicht und die Walze dreht sich; während dess senkt sich jedoch die andere Seite des Doppelhakens, greift in die Zähne des Rades ein und hemmt die Drehung der Walze. Bei der folgenden Schwingung hebt sich nun diese Seite, die Walze dreht sich wieder, bis das Ende  $E$  neuerdings in das Rad eingreift, aber nicht in denselben, sondern in den folgenden Zahn des Rades. Für je zwei Oscillationen des Pendels dreht sich also die Walze um einen Zahn weiter. Die Walze dreht sich somit während gleicher Zeiten, die durch die Schwingungen des Pendels gegeben sind, um gleiche Winkel; und ist an ihrer Axe ein Zeiger befestigt, der sich vor einem Zifferblatte dreht, so schreitet auch der Zeiger in gleichen Zeiten um gleiche Bögen fort. Hat das Rad z. B. 30 Zähne und vollführt das Pendel in der Sekunde eine Schwingung, so wird der Zeiger sich in einer Minute um das ganze Zifferblatt bewegen, und ist der Umkreis desselben in 60 Theile getheilt, so entspricht jeder Theilstrich einer Sekunde. Wie man nun mittels passend angebrachter Räderwerke die Bewegung der Zeiger ändern, Sekunden- und Minutenzeiger anbringen kann, ist leicht ersichtlich. Nur ist zu erwähnen, dass die Stellung der Zähne und Haken derartig ist, dass der Haken jedesmal, wenn er gehoben wird, zugleich einen Anstoss erhält, wodurch die Bewegung des Pendels, welche sonst durch die Reibung aufhören würde, erhalten wird.

Fig. 42.



Um die Bewegung der Uhr zu reguliren, ist die Linse  $B$  an der Pendelstange verschiebbar angebracht; ein Heraufziehen beschleunigt, ein Herabziehen verzögert die Bewegung. Dadurch ist es möglich zu bewirken, dass das Pendel gerade in der gewünschten Zeit eine Schwingung vollführe.

## §. 34.

**Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze.** Es wird im Laufe unserer Untersuchungen häufig unsere Aufgabe sein, Kräfte zu messen, welche zwar den verschiedensten Ursprung haben, sich aber durch Anziehungen und Abstossungen äussern. Wir haben dann zwei Mittel diese Kräfte zu messen: entweder halten wir der Kraft durch eine in entgegengesetzter Richtung wirkende an ihrem Angriffspunkte das Gleichgewicht; diese Methode gibt meist nur angenähert richtige Resultate; oder wir messen die Beschleunigung, welche sie einer bekannten Masse  $m$  ertheilt. Bezeichnen wir diese Beschleunigung mit  $G$ , so ist nach §. 14 und 15 die Kraft  $P$  gegeben durch

$$P = G \cdot m.$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung ist nun das genaueste Mittel, ein Pendel unter dem Einflusse der Kraft schwingen zu lassen. Sind die Kräfte einer festen Richtung parallel, oder sind sie wie die Schwerkraft nach einem festen Centrum gerichtet, welches hinlänglich weit entfernt ist, so dass man sie in Bezug auf ein kleines Pendel als parallel ansehen kann, so beobachtet man die Schwingungsdauer, welche dasselbe unter Wirkung dieser Kräfte annimmt. Nach der in §. 28 gemachten Bemerkung ist dann diese Schwingungsdauer gleich

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{D}},$$

wenn  $K$  das Trägheitsmoment des Pendels und  $D$  das Drehungsmoment bedeutet, welches die wirksame Kraft dem Pendel in einer zur Richtung der Kraft senkrechten Lage ertheilt. Die Beschleunigung, welche diese Kraft jener Masse ertheilt, die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die Masse des Pendels ersetzt, ist dann

$$G = \frac{D}{K},$$

und da  $K$  die Masse ist, der jene Beschleunigung ertheilt ist, so erhalten wir für die Grösse der Kraft in gewöhnlichem Maasse, das heisst in Druckeinheiten

$$P = GK = D,$$

so dass also schon der Nenner des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen im Ausdruck für die Schwingungsdauer uns die gesuchte Grösse der Kraft gibt, indem wir den Ausdruck für  $t$  nach  $D$  auflösen

$$D = \frac{\pi^2 \cdot K}{t^2}$$

Ändert sich die Grösse der Kraft mit dem Abstände vom anziehenden Mittelpunkte, so können wir durch Annäherung oder Entfernung des Pendels von demselben auch das Gesetz ableiten, nach welchem die Kraft sich ändert.

Die Pendelgesetze finden noch weitere Anwendung; wir werden noch mehrfach schwingende Bewegungen von Körpern um eine bestimmte Gleichgewichtslage beobachten, deren Schwingungsdauer von der Grösse der Amplitude unabhängig ist. Wir schliessen daraus dann stets, dass die Kraft, welche diese Schwingungen veranlasst, dem Ausschlagswinkel proportional ist, oder dass bei einem Ausschlagswinkel  $\alpha$  diese in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifende Kraft gleich  $F \cdot \alpha$  ist. Die Kraft  $F$ , welche das auf den schwingenden Körper wirkende Drehungsmoment gibt, wenn der Werth von  $\alpha$  gleich 1 wird, also auch den in dieser Lage auf die Masse, welche die Masse des Körpers in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe ersetzt, wirkenden Druck bedeutet, erhalten wir dann ebenfalls aus der Beobachtung der Schwingungsdauer  $t$ . Ist  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, so ist gerade wie in den vorher besprochenen Fällen

$$F = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Es ergibt sich das aus der Ueberlegung, dass die Kraft  $F$  in diesem Falle ganz an die Stelle des Gewichts an dem unter der Wirkung der Schwere schwingenden Pendel tritt, indem ja bei diesem die Kraft bei dem Ausschlagswinkel  $\alpha$ , so lange derselbe nur klein ist, gleich  $Pz \cdot \alpha$  ist. Die Kraft  $F$  bewirkt also in dem jetzt betrachteten Falle die schwingende Bewegung, wie die Kraft  $Pz$  bei dem unter Wirkung der Schwere schwingenden Pendel; beide müssen also auf dieselbe Weise aus der beobachteten Schwingungsdauer abgeleitet werden.

Ebenso benutzen wir die Pendelgesetze in manchen Fällen zu einer experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente, wo die Formen oder die Vertheilung der Massen der schwingenden Körper eine Berechnung derselben nicht zulassen. In welcher Weise das geschehen kann, möge kurz an einem Beispiele angedeutet werden. Man hänge an einem Metalldraht einen Stab in seiner Mitte so auf, dass der Stab horizontal schwebt. Ist der Draht oben ganz fest eingeklemmt, so nimmt der Stab eine bestimmte Lage an; stösst man ihn dann an, so vollführt er in horizontaler Ebene Schwingungen um seine Gleichgewichtslage, deren Dauer von der Grösse der Schwingungen unabhängig ist. Es ergibt sich somit, dass auf den Stab eine Kraft wirkt, welche der Ablenkung des Stabes von der Gleichgewichtslage proportional ist; dieselbe rührt, wie wir später nachweisen werden, daher, dass der Draht um eine in ihm liegende Axe gedreht, dass er tordirt ist. Bezeichnen wir diese Kraft mit  $F$  und das Trägheitsmoment des Stabes und Drahtes in Bezug auf die Drehungsaxe mit  $K$ , so ist nach der vorhin gemachten Bemerkung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{F}}.$$

Um nun  $K$  experimentell zu bestimmen, hängen wir etwa mit Hülfe einer Schlinge von ganz feinem Draht an den Stab an jeder Seite des Aufhänge-drahtes und in gleichen Abständen  $r_1$  von demselben ein Gewicht, dessen Masse mit der der Drahtschlinge gleich  $M$  sei. Da jetzt das Trägheitsmoment der schwingenden Masse ein anderes ist, so wird auch die Schwingungsdauer eine andere; bezeichnen wir das Trägheitsmoment nach dem



Anhängen der Gewichte mit  $K_1$ , so wird die Schwingungsdauer sein

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K_1}{F}}$$

Das Trägheitsmoment  $K_1$  ist nun gleich dem frühern Trägheitsmoment  $K$  plus dem Trägheitsmoment der angehängten Gewichte. Bezeichnen wir nun das Trägheitsmoment jedes der angehängten Gewichte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Gewichte gehende verticale Axe mit  $M \cdot a^2$ , so ist das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Drehungsaxe des horizontalen Pendels gleich  $M(a^2 + r_1^2)$ . Denn jedes der Gewichte hängt sich so, dass sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkt liegt; die Verbindungslinie des Aufhängepunkts mit dem Schwerpunkt ist also jene Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Gewichtes gleich  $M a^2$  ist. Da nun diese Axe dem Aufhängedraht parallel und im Abstände  $r_1$  von derselben befindlich ist, so ist das Trägheitsmoment jedes der Gewichte in Bezug auf den Aufhängedraht gleich  $M(a^2 + r_1^2)$ . Damit wird

$$K_1 = K + 2 M(a^2 + r_1^2)$$

und

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2 M(a^2 + r_1^2)}{F}}$$

Wir hängen dann dieselben Gewichte in einen Abstand  $r_2$  von der Drehungsaxe und beobachten die Schwingungsdauer  $t_2$ , dann ist

$$t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2 M(a^2 + r_2^2)}{F}}$$

Die drei beobachteten Schwingungsdauern liefern dann die Gleichungen

$$F \cdot t^2 = \pi^2 K$$

$$F \cdot t_1^2 = \pi^2 (K + 2 M a^2 + 2 M r_1^2)$$

$$F \cdot t_2^2 = \pi^2 (K + 2 M a^2 + 2 M r_2^2).$$

Subtrahiren wir von der zweiten die dritte Gleichung, so wird

$$F(t_1^2 - t_2^2) = \pi^2 2M(r_1^2 - r_2^2)$$

$$F = \pi^2 \frac{2 M(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \dots \dots (A)$$

und wenn wir diesen Werth von  $F$  in die erste Gleichung setzen und nach  $K$  auflösen

$$K = t^2 \cdot \frac{2 M(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \dots \dots (B)$$

Wir erhalten somit den Werth von  $K$  ausgedrückt in lauter bekannten Grössen, da die Masse  $M$  jedes der angehängten Gewichte  $P$  gleich ist  $\frac{P}{g}$ .

Die Gleichung (A) zeigt gleichzeitig, dass wir aus so geführten Beobachtungen auch direct die Grösse der bewegenden Kraft ableiten können, ohne dass wir den Werth des Trägheitsmomentes  $K$  zu berechnen haben.

Man sieht demnach, wie das Pendel in der einen oder andern Form für die experimentelle Physik einer der wichtigsten Apparate ist; wir werden fast stets zur Messung von Kräften von demselben Gebrauch machen.

## §. 35.

**Centripetalkraft und Centrifugalkraft.** Wir haben sowohl bei der fortschreitenden, als bei der drehenden Bewegung gesehen, dass die Masse eines Körpers vermöge der Trägheit der Materie jeder Aenderung des Bewegungszustandes ein Hinderniss entgegengesetzt, welches durch die Wirkung der Kraft überwunden werden muss. Demgemäss sahen wir, dass die Beschleunigung, welche ein Körper erfährt, abhängig ist von dem Verhältniss der Kraft zur bewegten Masse. Bei den drehenden Bewegungen tritt die Trägheit der Materie in einer noch auffallendern Weise in einer andern Richtung hervor.

Bei dieser Bewegung wird nämlich in jedem Augenblick die Richtung des beweglichen Körpers geändert, indem die augenblickliche Bewegungsrichtung stets mit der Tangente der Bahn zusammenfällt, in der sich der Körper bewegt. Vermöge der Trägheit hat dann der Körper das Bestreben, in der einmal angenommenen Bewegungsrichtung zu verharren.

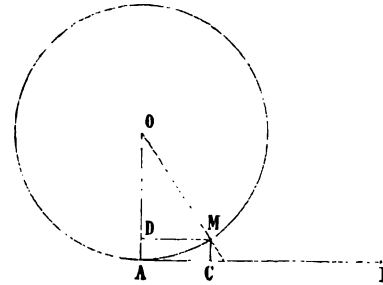
Soll nun der Körper seine Bewegungsrichtung ändern, soll er in einer kreisförmigen Bahn verharren, so muss auf ihn eine Kraft wirken, welche ihn dem Centrum der Bahn soviel nähert, als die Bahn selbst von der Tangente sich entfernt. Diese Kraft, welche bei jeder drehenden Bewegung vorhanden sein muss, und die den Körper stets nach dem Mittelpunkt seiner Bahn hinzieht, heisst die Centripetalkraft.

Der Centripetalkraft genau an Grösse gleich und ihr entgegengesetzt ist die Centrifugalkraft. Dass diese Kraft vorhanden sein muss, und dass in Folge derselben der Körper auf den Mittelpunkt der Bahn einen genau ebensolchen Zug ausüben muss, wie vom Mittelpunkt her auf ihn ausgeübt wird, das ist eine unmittelbare Folge des §. 14 näher besprochenen Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wir nehmen dieselbe auch bei jeder drehenden Bewegung wahr. Ist der im Kreise bewegte Körper an einem Faden befestigt, so ist es der Zusammenhang des Fadens, der ihn nach dem Mittelpunkt hinzieht, der Faden ist gespannt, ein Beweis, dass der Körper einen ebenso starken Zug auf den Mittelpunkt ausübt, als der ist, welcher ihn aus der geradlinigen Bewegung ablenkt. Reisst der Faden, so bewegt sich der Körper einfach in der Tangente der Bahn weiter.

Die Centrifugalkraft ist also weiter nichts als der Widerstand, den der träge Körper der Aenderung seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt; hört die Centripetalkraft auf, so auch die Centrifugalkraft, indem der Körper sich dann in der Richtung seiner Bewegung von der Drehungsaxe entfernt.

Es ist leicht, aus den bisher gewonnenen Sätzen die Grösse der Centrifugalkraft oder Centripetalkraft abzuleiten.

Es bewege sich ein Körper  $A$  mit der Masse  $m$  in einem Kreise um den Mittelpunkt  $O$  (Fig. 43), mit welchem er durch einen Faden verbunden ist. Er habe beim Beginn der Bewegung eine constante nach  $AB$  gerichtete Ge-



schwindigkeit erhalten. Nach einer sehr kleinen Zeit  $t$  sei er in  $M$  angekommen; er hat den Bogen  $AM$  beschrieben, den wir so klein voraussetzen, dass wir ihn mit der Sehne  $AM$  zusammenfallen lassen dürfen. Die ursprünglich dem Körper ertheilte Geschwindigkeit hätte ihn nach  $C$  gebracht, der Zusammenhang des Fadens hat ihn in derselben Zeit durch die Strecke  $CM = AD$  gezogen, er wirkt also wie eine Kraft, welche in derselben Zeit den Körper nach  $D$  gezogen hätte;  $AM$  ist dann nach dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen die Diagonale des aus  $AC$  und  $AD$  construirten Rechteckes. Da wir  $AM$  als sehr klein voraussetzen, können wir die Centripetalkraft während der Zeit als constant und nach  $AO$  gerichtet annehmen, wir haben dann, wenn wir dieselbe mit  $F$  bezeichnen,

$$AD = \frac{1}{2} \frac{F'}{m} \cdot t^2;$$

andererseits ist, wenn wir mit  $v$  die Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn bezeichnen,

$$AM = v \cdot t.$$

Ferner nach einem bekannten Satze aus der Geometrie

$$AM^2 = 2R \cdot AD,$$

wenn  $R$  den Radius des Kreises bedeutet. Setzen wir hierin für  $AM$  und  $AD$  ihre Werthe, so ist

$$v^2 \cdot t^2 = R \cdot \frac{F'}{m} \cdot t^2$$

und daraus

$$F' = \frac{m \cdot v^2}{R}.$$

Damit sich also der Körper im Kreise drehe, muss ihn an jeder Stelle seiner Bahn eine Kraft nach dem Mittelpunkte ziehen, die proportional ist der Masse des Körpers, dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, und die umgekehrt proportional ist dem Radius des Kreises, in welchem der Körper sich bewegt.

Mit gleicher Kraft wirkt die Centrifugalkraft entgegen und spannt, wenn der Körper an einem Faden befestigt ist, den Faden. Gleitet der Körper in einer Rinne, so übt der Rand derselben auf ihn in jedem Augenblicke einen Druck aus gleich  $\frac{m \cdot v^2}{R}$ , und mit gleicher Kraft drückt der Körper gegen den Rand der Rinne.

Man kann dem Ausdrücke für die Centrifugalkraft eine manchmal bequemere Form geben, indem man beachtet, dass der Umfang des Kreises  $2\pi R$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in einer Zeit  $T$  durchlaufen wird, also

$$2\pi R = v \cdot T.$$

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Ausdruck für  $v$  in die Gleichung für  $F'$  ein, so wird

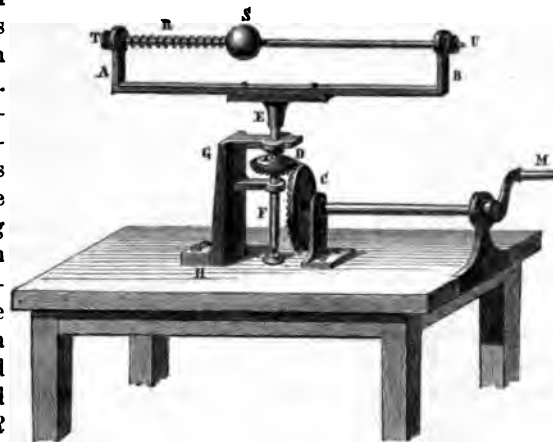
$$F' = \frac{4\pi^2 R \cdot m}{T^2}.$$

Man kann das Dasein der Centrifugalkraft durch eine Menge sehr einfacher Versuche nachweisen. Wenn man ein an einem Faden befestigtes,

mit Wasser gefülltes Gefäß sehr rasch im Kreise in der Verticalebene herumschleudert, so fällt kein Tropfen Wasser heraus, weil bei der raschen Bewegung das Wasser gegen den Boden des Gefäßes mit einer Kraft drückt, welche senkrecht gegen den Kreisumfang gerichtet und stärker ist als das Gewicht des Wassers.

Es gibt Apparate, mit denen man diese Kraft messen kann. Eine metallische Axe  $EF$  (Fig. 44), die vertical auf einem festen Tische steht, kann

Fig. 44.



mittels einer Kurbel  $M$ , deren Zahnrad  $C$  in ein an der Axe befestigtes Zahnrad  $D$  eingreift, in Rotation versetzt werden. Auf der Axe ist ein Rechteck  $TABU$  befestigt, dessen eine Seite  $TU$  aus einem cylindrischen Stabe besteht, der beliebig herausgenommen werden kann. Man kann auf diesen Stab eine durchbohrte Kugel  $S$  schieben, deren Gewicht gleich  $P$  sei, und zwischen die Kugel und die Seite  $T$  eine Feder  $R$  einsetzen, die mit einem

Zeiger versehen ist, um den Druck zu bestimmen, welchen die Kugel auf sie ausübt. Setzt man mittels der Kurbel den Apparat in rasche Rotation, so beschreibt die Kugel anfangs eine Spirale; bald aber drückt die Kugel gegen die Feder und drückt sie bis auf einen bestimmten Punkt zusammen. Dann beschreibt sie einen Kreis, und der auf die Feder ausgeübte Druck misst die Centrifugalkraft. Man wird finden, dass der Druck mit dem vorhin durch Rechnung bestimmten der gleiche ist, dass

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Dass die Centrifugalkraft proportional dem Gewichte der rotirenden Körper ist, kann man an einem sehr hübschen Versuche sehen. Ersetzt man den Messingstab des vorigen Versuches durch eine geschlossene Glasröhre, in welcher Luft, Wasser, ein Stückchen Kork und eine Bleikugel eingeschlossen ist, so sieht man bei der Rotation des Apparates die Luft dem Centrum des Kreises am nächsten, das Stückchen Kork sich auf die dem Centrum zugewandte Seite des Wassers legen, und die Bleikugel sich bis ans Ende der Röhre bewegen, selbst wenn die Röhre gegen den Mittelpunkt des Kreises stark geneigt ist.

## §. 36.

**Erhaltung der Rotationssebene.** In gleicher Weise, wie ein Körper bei der drehenden Bewegung der Aenderung der Bewegungsrichtung in seiner Bahn einen gewissen Widerstand leistet, welcher sich in der Centri-

fugalkraft äussert, so auch strebt ein rotirender Körper in der Ebene, welcher er rotirt, zu verharren. Jeder Theil des Körpers beschreibt nämlich bei seiner Bewegung einen ebenen Kreis, und in jedem Augenblicke besitzt derselbe eine nach der Tangente des Kreises gerichtete Geschwindigkeit. Wenn man nun den rotirenden Körper so drehen will, dass die Ebene in der sich jeder Punkt desselben bewegt, mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel bildet, so muss ebenfalls die Richtung der Bewegung geändert werden.

Dazu bedarf es aber ebenso einer Kraft, wie zu der Aenderung der Bewegungsrichtung in der Rotationsebene. Wirken demnach keine äussere Kräfte auf einen solchen rotirenden Körper ein, so bleibt er in seiner Lage, so dass die von den einzelnen Punkten beschriebenen Kreise stets derselben Ebene parallel bleiben.

Man sieht dieses sehr deutlich an einem schmalen Rade oder einer schmalen Scheibe, welche sofort umfallen, wenn man sie ruhend auf der Kante vertical aufstellen will, welche aber in der verticalen Ebene fortrollen, wenn man sie in rasche Drehung um eine horizontale Axe versetzt. Dasselbe zeigt sich in dem Beharren der sogenannten freien Axen rotirender Körper. Dreht sich nämlich der Körper um eine Axe, um welche die Masse desselben ganz symmetrisch vertheilt ist, so zwar, dass die Schwerpunkte aller einzelnen auf der Axe senkrechten Schichten auf der Axe liegen, dann übt die Centrifugalkraft nach allen Richtungen hin einen gleichmäßigen Zug auf die Axe aus, ihre Wirkung hebt sich also auf. Eine solche Axe, welche durch die Centrifugalkraft gar keinen Zug erfährt, nennt man eine freie Axe. Dass eine solche Axe ihre Richtung im Raume beibehält, sieht man sehr deutlich an dem Bohnenberger'schen Apparate. Derselbe besteht aus drei in einander liegenden Ringen, in deren innerstem eine Kugel in rasche Rotation versetzt werden kann. Der äusserste Ring

Fig. 45.



(Fig. 45) ist fest vertical aufgestellt. Der zweite Ring *B* kann sich in dem ersten um eine verticale Axe frei drehen. Der dritte Ring *C* kann sich in dem zweiten um eine Axe frei drehen, welche mit der Drehungsaxe des zweiten Ringes einen rechten Winkel bildet, und die Kugel *D* endlich ist auf dieser senkrechten Axe drehbar. An der Axe der Kugel ist eine kleine Röhre angebracht, um welche ein Faden vielfach geschlungen werden kann. Zieht man diesen Faden sehr rasch ab, während man den Ring festhält, so nimmt die Kugel eine sehr rasche Rotation um ihre Axe an.

Man sieht, durch diese dreifache Anordnung, dass sich die Axe der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen kann; rotirt die Kugel nicht, so bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Axe hervor. Wenn man aber die Kugel mittels raschen Ziehens der Schnur in schnelle Rotation

setzt, so mag man den Apparat drehen und wenden wie man will, die Axe der Kugel bleibt sich immer parallel. Sehr deutlich sieht man das, wenn man den Apparat auf der Centrifugalmaschine befestigt und diese dann in Rotation versetzt; die Richtung der Drehungsaxe wird dadurch nicht geändert.

Ganz dieselbe Erscheinung zeigt sich bei dem bekannten Kinderspielzeug, dem Kreisel. Wenn derselbe nicht rotirt, so fällt er auf die Spitze gestellt sofort um, weil er sich dann im Zustande des labilen Gleichgewichts befindet. Rotirt er dagegen, so fällt er nicht um, selbst wenn die Axe gegen die Verticale geneigt ist, also der Kreisel durch die Schwerkraft umgeworfen würde, wenn er nicht rotirte.

Wie gross der Widerstand ist, den ein rotirender Körper einer Aenderung der Rotationsebene entgegensetzt, fühlt man sehr deutlich, wenn man versucht, die Axe der rotirenden Kugel im Bohnenberger'schen Apparat zu drehen. Noch auffallender zeigt es sich an einem Versuche, welcher den Mechanikus Fessel auf die Construction eines besondern Apparates, des Fessel'schen Rotationsapparates, führte.

Wenn man eine an ihrem Rande mit einem starken Messingwulste versehene Scheibe auf einer Axe befestigt, welche wie die Bohnenberger'sche Kugel in einem Ringe angebracht ist, nun die Scheibe in sehr rasche Rotation versetzt und dann den Ring in der in (Fig. 46) bezeichneten Weise an einem Faden aufhängt, so sinkt Ring und Scheibe nicht herab, sondern bleibt frei schweben, weil beim Herabsinken eine Aenderung der Rotationsebene eintreten würde, welcher die Rotation entgegen wirkt, obwohl das Gewicht des Apparates wegen der Schwungscheibe ein ziemlich bedeutendes ist.

Dagegen sieht man an diesem Apparate sowohl als am Kreisel eine andere auf den ersten Blick höchst auffallende Erscheinung; die Scheibe dreht sich um den verticalen Faden in einer der Rotation der Scheibe in ihrem Ringe entgegengesetzten Richtung, wobei zugleich ein stetiges Heben der Drehungsaxe stattfindet.

Zu allseitiger Darstellung dieser Erscheinungen dient der Fessel'sche Rotationsapparat (Fig. 47). Die Scheibe mit dem Ringe von Fig. 46 ist nach Art der Bohnenberger'schen Aufhängung in einem zweiten Ringe befestigt, an welchem sich ein Stiel befindet, welcher in der Gabel *G* um eine horizontale Axe drehbar befestigt wird. Die Gabel befindet sich auf einer verticalen im Fuss des Apparates drehbaren Axe. An der Ver-

Fig. 46.

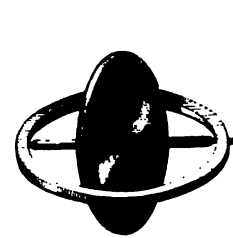


Fig. 47.



längerung des Stieles können Gewichte angehängt werden, um die rotirende Scheibe ganz oder zum Theil zu äquilibriren. Hängt nun die Scheibe ganz frei, und rotirt sie, so sieht man eine Drehung der Scheibe mit den Ringen um die verticale Axe in dem eben bezeichneten Sinne; ist sie ganz äquilibrirt, so hängt die Scheibe ganz ruhig, als wenn sie nicht rotirte; ist dagegen das Uebergewicht auf der andern Seite des Stieles, so dreht sich die ganze Vorrichtung in einer der vorhin angegebenen entgegengesetzten Richtung um die verticale Axe, also in der Richtung der Rotation des Rades.

Dass alle diese Erscheinungen nur Folge der tangentialen Geschwindigkeit der einzelnen Theile der Scheibe sind, hat Poggendorf in sehr fasslicher Weise gleich nach dem Bekanntwerden des Fessel'schen Apparates gezeigt.

Wird nämlich die Drehungsaxe der rotirenden Scheibe zuerst horizontal gehalten, wie Fig. 46, und die Scheibe in der Verticalebene rotiren gelassen, so wird beim Loslassen der Scheibe, wenn sie nicht durch ein Gewicht im Gleichgewicht gehalten wird, zunächst die Schwere einwirken und die Vorrichtung ein wenig sinken machen.

Durch dieses Sinken tritt eine geringe Drehung der Scheibe um eine horizontale Axe ein, und dadurch wird die Bewegung der Theilchen der Scheibe vorn, wo sie aufsteigen, und hinten, wo sie hinuntersinken, gestört. Dieselben haben eine verticale Geschwindigkeit, die Scheibe nimmt dagegen eine etwas geneigte Lage an. Die verticalen Geschwindigkeiten der Theilchen treten daher vorn, wo sie aufsteigen, zur Rechten, hinten, wo sie absteigen, zur Linken aus der Scheibe heraus. Da nun die Theilchen der Scheibe ihnen nicht mehr ganz folgen können, so üben sie einen Zug senkrecht auf die Scheibe aus, vorn nach rechts hin, hinten nach links hin. Beide Wirkungen unterstützen sich, und die Folge davon ist eine Drehung der ganzen Vorrichtung um die verticale Axe und zwar von oben gesehen umgekehrt, wie die Bewegung eines Uhrzeigers stattfindet.

Sobald aber nun diese Drehung der Vorrichtung um die verticale Axe beginnt, wird auch die Bewegung der Theilchen unten, wo sie sich nach vorn, oben, wo sie sich nach hinten bewegen, gestört. Die augenblickliche Geschwindigkeit derselben tritt unten nach links und oben nach rechts aus der augenblicklichen Stellung der Scheibe hervor. Zerlegen wir sie in zwei Componenten, eine in der Richtung der augenblicklichen Bewegung der Scheibe und eine darauf senkrechte, so sieht man sofort, wie dadurch an dem tiefsten Punkte des Scheibendurchmessers ein Zug nach links und am höchsten ein Zug nach rechts entsteht. Beide Kräfte zusammen müssen die Drehungsaxe der Scheibe ein wenig heben, also in der entgegengesetzten Richtung bewegen, in welcher die Schwere ursprünglich das Bestreben hatte, die Axe zu drehen.

Ist dagegen dem Gewichte der Vorrichtung durch ein gleiches Gegengewicht das Gleichgewicht gehalten, so fehlt der erste Impuls, der die Scheibe ein wenig dreht, die Wirkung der Schwere, deshalb tritt gar keine Bewegung ein.

Ist aber das Gegengewicht schwerer, so ist die Wirkung eine gerade entgegengesetzte, wie eine der vorigen ganz analoge Betrachtung unmittelbar ergibt.

Die Bewegung der Rotationsaxe des Kreisels auf einem Kegel um die Verticalrichtung wird man sich leicht auf die gleiche Weise ableiten können.

## §. 37.

**Foucault's Pendelversuch.** Ein schwingendes Pendel hat ebenso das Bestreben, stets in derselben Verticalebene zu schwingen, indem auch an diesem die einzelnen Theile in ebenen Curven, in Kreisbogen, sich bewegen. Wenn daher keine seitliche Einwirkung auf das Pendel stattfindet, so wird es stets in derselben Ebene schwingen.

Diese Eigenschaft des Pendels hat der französische Physiker Foucault benutzt, um einen experimentellen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern. Man denke sich ein Pendel gerade über dem Pole der Erde, z. B. dem Nordpole, aufgehängt und das Pendel gerade in einem Meridian schwingen. Das Pendel bleibt sich mit seinen Schwingungen stets parallel, der Meridian aber, mit dem es anfänglich parallel hin und her sich bewegte, dreht sich unter dem Pendel in 24 Stunden vollständig im Kreise herum. Ein Beobachter muss daher nach und nach die Richtung der Pendelschwingung von der des Meridians abweichen sehen und, da er die Drehung der Erde nicht wahrnimmt, glauben, dass sich die Pendelebene in entgegengesetztem Sinne drehe. Es muss daher den Anschein haben, als wenn sich die Pendelebene mit der Sonne drehe.

An andern Orten der Erde ist das Verhältniss nicht ganz so einfach, dort kann die Pendelebene nicht ganz ihre Lage beibehalten, wie unter dem Pole, da mit der Rotation der Erde die Richtung der Schwere sich ändert; in wie weit dort nun eine Drehung der Pendelebene eintreten muss, gibt folgende Ueberlegung. Die Lage der Pendelebene in einem bestimmten Momente ist bestimmt durch die Richtung der Verticalen und durch die Richtung der horizontalen Tangente, die wir an den tiefsten Punkt des von dem Pendel beschriebenen Kreisbogens legen, also etwa durch den Winkel, den diese mit dem Meridian bildet. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Pendel schwinde in dem betrachteten Moment in der durch den Meridian gelegten Verticalebene, so würde *OAC* Fig. 48 uns die Lage der Pendelebene darstellen, wenn *A* uns einen Ort, auf dem Parallel *ABP*, und *O* den Mittelpunkt der Erde bedeutet. Dreht sich nun die Erde um *CO* als Axe, so ändert sich die Richtung der Verticalen stetig, und mit der Drehung der Verticalen ändert sich die Lage der Pendelebene, da das Pendel immer um die augenblickliche Verticale als die Gleichgewichtslage in Folge der nach der Verticalen gerichteten Wirkung der Schwere hin und her schwingen muss. Hat sich die Erde so weit gedreht, dass der Punkt *A* auf dem Parallel *ABP* bis *B* gekommen ist, so hat sich die Verticale um den Winkel *AOB* gedreht, eine Drehung, die wir indess nicht wahrnehmen, da wir uns mit der Erde drehen.

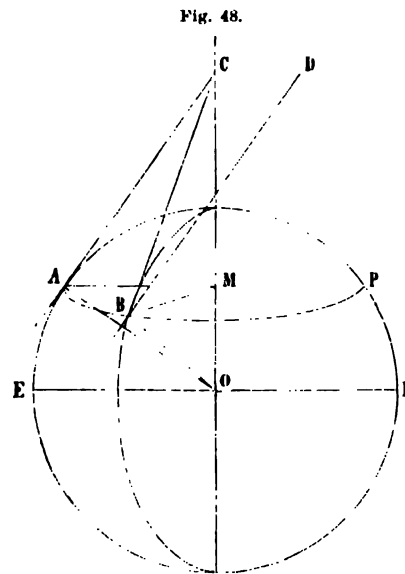
Auf die andere Richtung dagegen, welche uns die Lage des Pendels bestimmt, resp. auf die horizontale Componente seiner Bewegung wirkt gar keine Kraft ein, so dass die horizontale Richtung, das heisst die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente im Raume immer dieselbe Richtung beibehalten muss. Denn ein Verlassen dieser Richtung wäre nur möglich, wenn auf das schwingende Pendel in der horizontalen Ebene irgend eine der horizontalen parallele Kraft einwirkte. Es muss deshalb im Punkte *B* die zweite Richtung, welche die Lage der Pendelebene bestimmt, die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte



horizontale Tangente  $BD$  der ursprünglichen Richtung  $AC$  parallel sein. Wir setzen ursprünglich voraus, das Pendel schwinde in der durch den Meridian gelegten Verticalebene. Da nun diese Ebene, resp. die Richtung des Meridians sich gedreht hat, so muss die an den untersten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente mit der Richtung des Meridians im Punkte  $B$  einen Winkel  $\beta$  bilden, der, wenn  $\varphi$  die geographische Breite und  $\alpha$  der Winkel  $AB$  ist, den der Punkt  $A$  auf seinem Parallelkreis durchlaufen hat, wie sich leicht zeigen lässt, gegeben ist durch

$$\beta = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Wir setzen voraus, das Pendel schwinde anfangs in der Richtung des Meridians. Diese Richtung fällt zusammen mit der Richtung der Tangente  $CA$ ,



welche wir an den Punkt  $A$  ziehen, da wir die Erde wegen der geringen Strecke, welche wir übersehen, für eine Ebene halten und die Horizontalebene die Tangentialebene ist, welche wir in dem Punkte, in dem wir uns befinden, an die Erde legen. Nach der Zeit  $T$  hat nun der Punkt  $A$  auf dem Parallelkreis  $AP$  den Kreisbogen  $AB$  um den Mittelpunkt  $M$  beschrieben. Das Pendel, dessen Schwingungsrichtung immer mit  $AC$  parallel bleibt, schwingt dann in der Ebene, welche durch die mit  $AC$  parallele gelegte Richtung  $BD$  und die Verticale  $OB$  bestimmt ist, nach  $BD$ . Die scheinbare Drehung der Schwingungsrichtung des Pendels in Bezug auf eine in der Horizontalebene fixirte Richtung ist demnach gleich dem Winkel, den dieselbe mit der Meridianrichtung

macht, da wir annehmen, das Pendel habe ursprünglich im Meridian sich bewegt. Die Meridianrichtung bei  $B$  ist nun wieder durch die Tangente  $BC$  bestimmt, welche wir in dem Punkte  $B$  an den Meridiankreis ziehen. Der Winkel, um den sich die Pendelebene scheinbar gedreht hat, ist also der Winkel  $CBD$ . Dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel  $ACB$ , den die beiden Tangenten im Punkte  $C$  mit einander bilden. Die Pendelebene hat also eine scheinbare Drehung um den Winkel erfahren, den die Tangenten an den Meridian des Punktes  $A$  in dessen auf einander folgenden Lagen mit einander bilden. Man sieht, dass dieser Winkel kleiner sein muss als der Winkel, den der Punkt  $A$  in seinem Parallelkreise beschrieben hat.

Um das Verhältniss des Winkels  $ACB$  zum Winkel  $AMB$  zu erhalten, erinnere man sich daran, dass der Parallelkreis  $AB$  zugleich die Basis der Kegelfläche ist, welche die Tangente  $AC$  in ihren auf einander folgenden Lagen beschreibt. Setzen wir daher  $AB$  nur sehr klein voraus, so können

wir es als einen mit dem Radius  $AC$  beschriebenen Bogen ansehen und erhalten deshalb ohne merklichen Fehler

$$AB = ACB \cdot AC.$$

Andererseits ist, da  $AB$  ein Bogen des Parallelkreises  $AP$  ist,

$$AB = AMB \cdot AM.$$

Wir hatten nun genannt

$$ACB = \beta, \quad AMB = \alpha,$$

ferner die Breite von  $A$

$$AOE = \varphi.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} AM &= AO \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos \varphi, \\ AC &= AO \cdot \text{tang } AOC = AO \cdot \text{cotg } \varphi = R \cdot \text{cotg } \varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \beta \cdot R \cdot \text{cotg } \varphi &= \alpha \cdot R \cos \varphi, \\ \beta &= \alpha \cdot \frac{\cos \varphi}{\text{cotg } \varphi} = \alpha \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Oder der Winkel der scheinbaren Drehung der Pendelebene ist gleich dem Produkte des Winkels, um den sich die Erde in der Zeit gedreht hat, in den Sinus der Breite.

Am Pole ist  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\sin \varphi = 1$ ,  $\beta = \alpha$ ; am Pole dreht sich die Pendelebene ebenso rasch als die Erde, am Aequator ist  $\varphi = 0$ ,  $\sin \varphi = 0$ ,  $\beta = 0$ , dort dreht sich die Pendelebene gar nicht, wie sich auch unmittelbar daraus erkennen lässt, dass am Aequator alle an den Meridian gezogenen Tangenten der Erdaxe und somit einander parallel sind.

$$\text{Für Berlin ist } \beta = \alpha \cdot \sin 52^\circ 30' = 0,79335 \alpha.$$

$$\text{Für Bonn } \beta = \alpha \cdot \sin 50^\circ 43' 45'' = 0,77416 \alpha.$$

In 24 Stunden dreht sich somit, da  $\alpha$  dann gleich  $360^\circ$  ist, das Pendel

$$\begin{aligned} &\text{zu Berlin um } 285^\circ 36' \\ &\text{zu Bonn um } 278^\circ 41' 51'', \end{aligned}$$

oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel

$$\text{in Berlin } 30 \text{ Stunden } 15 \text{ Minuten}$$

und

$$\text{in Bonn } 31 \quad \text{,,} \quad 6 \quad \text{,,}$$

Genau ausgeführte Versuche haben wirklich diese von der Theorie geforderten Zahlen geliefert und haben somit einen experimentellen Beweis für die Axendrehung der Erde gegeben.

Am bequemsten werden die Versuche in hohen Räumen ausgeführt. Man befestigt an einem langen feinen Draht ein schweres Gewicht und stellt um den Punkt, auf welchen das Pendel zeigt, wenn es vertical herabhängt, als Mittelpunkt einen getheilten Kreis. Man sieht, wie nach und nach das Pendel auf immer andere Theilstriche zeigt, indem sich seine Schwingungsebene scheinbar mit der Sonne dreht.

Drittes Kapitel.  
Von der allgemeinen Gravitation.

§. 38.

**Allgemeine Anziehung. Kepler's Gesetze.** In den beiden vorigen Kapiteln haben wir mehrfach gesehen, dass alle Körper auf der Erde von Kräften angegriffen werden, die wir ihr Gewicht nannten, und welche an jeder Stelle senkrecht gegen den Horizont wirken. Es hat demnach den Anschein, als wenn die ganze Masse der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Körper eine Anziehung ausübe, welche überall merklich gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, und welche bis zu irgend einer Höhe über dem Boden wirksam ist. Durch Induction schliessen wir daraus, dass sich diese Anziehung über jene Grenzen ausdehnt, welche wir erreichen können, dass sie sich bis zu den Sternen erstreckt, aber mit der Entfernung an Grösse abnehmend.

Andererseits dürfen wir mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass alle Gestirne ähnliche Erscheinungen darbieten, dass es auf allen eine gegen ihren Mittelpunkt gerichtete Schwere gebe, die bis zu einer gewissen Entfernung auf alle andern Himmelskörper wirkt. Diese Schlüsse waren es, welche Newton dahin führten, anzunehmen, dass alle Gestirne sich anziehen, dass ihre Bewegungen durch die wechselseitige Einwirkung derselben auf einander bestimmt seien, und dass das ganze Weltall durch Kräfte regiert werde, die aus einer einzigen Quelle fliessen, aus der Anziehung der Materie.

Ist dem so, so müssen die Bewegungen der Gestirne äusserst verwickelter Natur sein, weil ihre Zahl äusserst gross ist, und alle auf einander einwirken. Indess ist es leicht ersichtlich, dass sich das Problem mit einer ersten Annäherung einfacher stellt. Die Himmelskörper theilen sich in zwei Klassen; die eine umfasst die Fixsterne, welche sich in so grossen Entfernungen von der Sonne und Erde befinden, dass man ihren Einfluss vernachlässigen kann; die andern stehen sich näher, sie wirken einer auf den andern ein und bilden eine abgeschlossene, von Fixsternen freie Gruppe; es sind dies die Sonne nebst ihren Planeten. Wir haben uns zunächst nur mit der Wechselwirkung dieser auf einander zu befassen. Vergleichen wir nun die einzelnen Körper dieser Gruppe mit einander, so erkennen wir sofort, dass die Sonne wegen ihrer überwiegenden Grösse in dem System auch einen überwiegenden Einfluss haben muss, derart, dass ein Planet wie unsere Erde von der Sonne sehr stark angezogen werden muss, von den übrigen so unbedeutend, dass wir auch deren Einfluss zunächst vernachlässigen dürfen. Wir betrachten daher die Sonne als den einzigen anziehenden Mittelpunkt in unserem System und nehmen an, dass die übrigen Planeten unabhängig von einander sich nach denselben Gesetzen bewegen, jeder so, als sei er allein der Anziehung der Sonne unterworfen. Wir haben dann, um die Gesetze der Anziehungskraft zu erhalten, nur die Aufgabe, die Bewegung der einzelnen Planeten um die als fest betrachtete Sonne zu untersuchen, und aus dieser dann nach den bisher entwickelten Gesetzen auf diejenigen zurückzuschliessen, nach welchen die Kraft wirksam ist.

Die Gesetze, nach denen sich die einzelnen Planeten um die Sonne bewegen, sind im Anfange des 17. Jahrhunderts, wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, von dem grossen deutschen Astronomen Keppler durch sorgfältige langjährige Beobachtungen abgeleitet worden und werden daher nach ihm die Keppler'schen Gesetze genannt. Es sind folgende drei:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, welche in dem einen Brennpunkte der Ellipsen steht.

2. Die von dem Radius vector jedes Planeten beschriebenen Flächenräume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Auf diese Gesetze gründete Newton den Nachweis von der Existenz einer zwischen verschiedenen Massen thätigen, anziehenden Kraft und die Entwicklung der Gesetze, nach welchen dieselbe sich ändert.

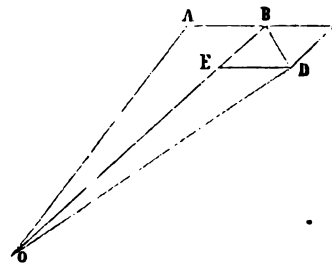
## §. 39.

Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet. Sei  $O$  (Fig. 49) das Centrum der Sonne, und  $A$  das eines Planeten, in einem bestimmten Augenblicke. Während einer sehr kleinen Zeit beschreibt nun letzterer das Stück  $AB$  seiner Bahn. Wenn nun keine äussere Kraft auf ihn einwirkte, so würde er in einer der ersten gleichen und ihr folgenden Zeit das gleiche Stück  $BC$  in der Richtung seiner Bewegung zurücklegen. Anstatt dessen legt jedoch der Punkt  $A$  in der auf die erste folgenden und ihr gleichen Zeit den Weg  $BD$  zurück. Man muss daraus schliessen, dass auf ihn eine Kraft einwirkt, welche seine Bewegungsrichtung ändert. Um die Richtung dieser Kraft zu erhalten, bedenken wir, dass nach dem zweiten Keppler'schen Gesetze die Fläche

$$ABO = BDO = CBO$$

sein muss. Soll nun aber das Dreieck  $BDO$  gleich dem Dreieck  $CBO$  sein, welches gleich  $ABO$  ist, weil  $AB = BC$  ist, und die Spitzen der Dreiecke zusammenfallen, so müssen die Spitzen  $C$  und  $D$  der beiden Dreiecke  $BDO$  und  $BCO$  auf einer mit  $BO$  parallelen Linie liegen, da sie die Seite  $BO$  gemeinsam haben. Construiren wir nun das Parallelogramm  $BEDC$ , so sehen wir, dass auf den Planeten eine Kraft wirken muss, welche ihn zwingt den Raum  $BE$  zu durchlaufen, während er vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit sich nach  $BC$  bewegt haben würde. Diese Kraft ist aber nach dem Mittelpunkte  $O$  gerichtet. Es ist also bewiesen, dass die Planeten, da sie sich in einer krummen Linie bewegen, einer stetig wirkenden Kraft unterworfen sind, und dass aus dem zweiten Keppler'schen Gesetze, nach welchem die von den Radien vectoren in gleichen Zeiten beschriebenen Flächenräume gleich sind, hervorgeht, dass

Fig. 49.



diese Kraft nach dem Centrum der Sonne gerichtet sein muss. Das ist der erste Theil der Newton'schen Entwicklung.

#### §. 40.

**Entwicklung des Anziehungsgesetzes.** Das erste Kepler'sche Gesetz bestimmt die Gestalt der Planetenbahnen, es erklärt sie für Ellipsen, deren Excentricitäten verschieden sind. Nehmen wir nun als einen bestimmten Fall an, dass die Excentricität gleich Null sei, dass also die elliptische Bahn in eine Kreisbahn übergehe. In Wirklichkeit ist das zwar für keinen einzigen Planeten der Fall; da jedoch die Excentricität der Planetenbahnen immer sehr klein ist, so wird unsere Annahme nicht weit von der Wahrheit abweichen, und wir werden durch unsere Entwicklungen eine erste Annäherung erhalten. Den gleichen Weg schlug Newton ein.

Im Falle der Planet sich in einer kreisförmigen Bahn bewegt, in deren Mittelpunkt sich die Sonne befindet, müssen die einzelnen Bögen, welche der Planet in gleichen Zeiten durchläuft, gleich sein, da diese Gleichheit nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze für die von den Radien beschriebenen Räume, die Sektoren bestehen muss. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet sich in seiner Bahn bewegt, ist demnach eine gleichförmige während der ganzen Umlaufzeit. Wir haben somit hier einen Fall der Kreisbewegung, wie wir ihn in dem Paragraphen über die Centripetalkraft und Centrifugalkraft betrachtet haben.

Für die Centripetalkraft hatten wir den Ausdruck

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

oder für die von der Centripetalkraft hervorgebrachte Beschleunigung

$$\frac{F}{m} = G = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

worin  $R$  den Radius des von dem bewegten Körper beschriebenen Kreises und  $T$  die Umlaufzeit bedeutet. Nehmen wir für  $R$  den Radius der Planetenbahn und für  $T$  seine Umlaufzeit, so haben wir also hier den Ausdruck für die Beschleunigung, welche der Planet gegen die Sonne erhält, also die Anziehung der Sonne auf die Einheit der Masse des Planeten, in dem Abstände  $R$  von der Sonne.

Für die verschiedenen Planeten in den Abständen  $R, R', R''$  von der Sonne erhalten wir aus den Umlaufzeiten  $T, T', T''$  für die Grösse der anziehenden Kraft der Sonne auf die Einheit der Masse in den Entfernungen  $R, R', R''$  die Ausdrücke

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, G' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^2}, G'' = \frac{4\pi^2 R''}{T''^2}.$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze verhalten sich nun die Quadrate der Umlaufzeiten wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen, so dass wir haben

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \frac{T''^2}{R''^3} = K,$$

also

$$T^2 = K \cdot R^3, T'^2 = K \cdot R'^3, T''^2 = K \cdot R''^3.$$

Setzen wir diese Werthe in unsere Ausdrücke für  $G$ ,  $G'$  . . ein, so erhalten wir

$$G = \frac{4\pi^2}{KR^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2}{KR'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2}{KR''^2},$$

oder in Worten: die von der Sonne in verschiedenen Entfernungen den Planeten ertheilten gegen die Sonne gerichteten Beschleunigungen, welche die auf die Einheit der Massen ausgeübte Anziehungskraft messen, sind dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional.

Wollen wir aus der Beschleunigung die anziehende Kraft  $F$  erhalten, welche die Sonne auf die verschiedenen Planeten ausübt, so haben wir  $F = m \cdot G$ , also die Beschleunigung  $G$  mit der Masse  $m$  zu multipliciren. Es wird dann

$$F = m \cdot G = \frac{m}{R^2} \cdot f,$$

wenn wir mit  $f$  die Anziehung der ganzen Sonnenmasse auf die Einheit der Planetenmasse in der Einheit des Abstandes bezeichnen. Da nun diese Anziehung gleich ist der Summe der Anziehungen der einzelnen Massentheilchen, so ist sie proportional der gesammten Masse  $M$  der Sonne, so dass wir setzen können

$$f = M \cdot \varphi$$

und dann allgemein

$$F = \frac{m \cdot M}{R^2} \cdot \varphi.$$

Das Gesetz der Massenanziehung können wir daher ganz allgemein ausdrücken: „Die Anziehung zweier Körper auf einander ist proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes.“

Wir haben bisher die der Wirklichkeit nicht entsprechende Annahme gemacht, dass die Planetenbahnen Kreise seien; es entsprach das unserer Absicht, durch eine angenäherte Methode zu zeigen, wie Newton die Gesetze der Attraction entwickelte. In der theoretischen Mechanik werden diese Probleme jedoch ohne diese Beschränkung abgehandelt; man gelangt dann genau zu denselben Resultaten, dass auf die Planeten eine gegen die Sonne gerichtete Kraft wirke, die mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Sonne abnimmt. Wir haben diese Kraft Anziehung der Materie genannt, dadurch jedoch schon den Boden der Gewissheit verlassen und eine Hypothese aufgestellt. Denn nichts beweist uns, dass es wirklich eine Anziehung der Materie sei, die sich hier äussert; es ist möglich, dass die Materie sich in der Beziehung ganz passiv verhält, und dass der Aether, welcher überall in dem Raume verbreitet ist, in welchem die Gestirne sich bewegen, die Ursache der Kräfte sei, welche wir zwischen den Gestirnen thätig sehen. Kurz wir erkennen nur das Dasein der Kräfte, ihre Ursache ist uns unbekannt; schreiben wir sie der Anziehung der Materie zu, so bilden wir eine Hypothese, um ein allgemeines Naturgesetz zu erklären. Newton hat deshalb auch niemals behauptet, die Materie zieht sich an, sondern hat immer ausgesprochen, dass alle Bewegungserscheinungen im Weltraume so vor sich gingen, als wenn die Materie sich anzöge. Es ist gut, in dieser Exaktheit Newton nachzufolgen.

Nachdem man die Gesetze erkannt hat, denen die Attractionskraft folgt, liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, wodurch es dahin gekommen, dass die Planeten sich in diesen Bahnen bewegen. Es ist das eine rein mathematische Aufgabe, wie aus Folgendem ersichtlich ist. Wären Sonne und Erde z. B. anfänglich ohne Bewegung sich im Raume in einem gewissen Abstände gegentübergestellt, so würden beide Gestirne in Folge der Anziehung sich gegen einander bewegt haben, bis sie sich berührt hätten. Hatte aber die Erde anfänglich eine Geschwindigkeit in anderer Richtung als in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte erhalten, so musste sie sich unter dem doppelten Einfluss dieser Anfangsgeschwindigkeit und der Anziehung der Sonne in einer krummlinigen Bahn bewegen. Die Rechnung zeigt nun, dass diese Bahn jedenfalls ein Kegelschnitt sein musste und zwar, je nach dem anfänglichen Abstände der beiden Körper und der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen, ein Kreis, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Einmal auf dieser Bahn bewegt, muss das Gestirn dieselbe unaufhörlich durchlaufen, entweder wenn die Curve geschlossen ist, seinen Weg immer wieder zurücklegend, wie es bei den Planeten der Fall ist, oder ohne Wiederkehr fortschreitend, wenn die Curve eine nicht geschlossene ist. Letzteres ist für einige Cometen wahrscheinlich.

Dieses ist jedoch noch nicht die exakte Lösung des Problems der Astronomie; man kann die Gestirne in ihrer Bewegung nicht als unabhängig von einander betrachten, denn jedes derselben wird in jedem Augenblicke von der Sonne und allen andern angezogen. Deshalb sind die Bahnen der Planeten nicht vollkommene Ellipsen, als welche Keppler sie ansah, sondern sehr verwickelte Curven, welche in Folge der Störungen der andern Planeten, bald an der einen bald an der andern Seite von der Ellipse abweichen. Dadurch wird das allgemeine Problem der Bewegung der Gestirne äusserst verwickelt, und es bedarf zu seiner Lösung schwieriger mathematischer Entwicklungen und exakter Beobachtungen. Erstere liefert die Mechanik des Himmels, letztere die beobachtende Astronomie.

#### §. 41.

**Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung.** Machen wir es uns jetzt zur Aufgabe, den Nachweis zu liefern, dass die Ursache, welche auf der Erde die Körper fallen macht, dieselbe ist wie jene, welche die eben betrachteten Bewegungen regelt. Auch dieses zuerst nachgewiesen zu haben ist Newton's Verdienst.

Die Erde besitzt einen Trabanten, den Mond, dessen Centrum im Mittel 60 Erdradien von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist. Astronomisch gesprochen ist dieser Abstand sehr gering, und daher kommt es, dass die Anziehung der Erde auf den Mond viel grösser ist als die Anziehung der Sonne, so zwar, dass man annehmen darf, der Mond sei nur der Anziehung der Erde unterworfen. Es ist dieses allerdings nicht genau, aber eine ähnliche Annäherung an die Wirklichkeit wie bei unserer vorigen Annahme, dass die Planetenbahnen Kreise seien. Der Mond wird deshalb um die Erde, letztere als ruhend betrachtet, eine Ellipse beschreiben. Nehmen wir nun überdies an, dass die Mondbahn ein Kreis sei, was bei ihrer geringen Excentricität nur wenig von der Wahrheit abweicht, sowie

die Erde und der Mond seien vollkommene Kugeln. Nach allen diesen Annahmen können wir zwar keine genauen numerischen Daten erwarten, jedoch für unsern Zweck hinreichende, da alle diese Annahmen nur sehr wenig von der Wahrheit abweichen.

Die Anziehung, welche der Mond von der Erde erfährt, können wir aus der centripetalen Beschleunigung berechnen, welche der Mond von der Erde erfährt; diese Beschleunigung ist gleich der Kraft, welche die Masseneinheit des Mondes von der ganzen Erde erfährt. Bezeichnen wir die Umlaufszeit des Mondes mit  $T$ , den Radius der Mondbahn mit  $r$ , so ist die centripetale Beschleunigung

$$G = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Der Radius der Mondbahn ist nun, wie erwähnt, gleich 60 Erdradien; bezeichnen wir letztern mit  $R$ , so wird

$$G = \frac{2\pi R \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{T^2}$$

In diesem Ausdrücke ist  $2\pi R$  gleich dem Umfange der Erde, gleich 40000000 Meter; die Umlaufszeit  $T$  des Mondes ist gleich 27 Tage, 7 Stunden, 43 Minuten = 39343 . 60 Sekunden. Demnach wird  $G$

$$G = \frac{40000000 \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{(39343 \cdot 60)^2} = \frac{40000000 \pi}{(39343)^2 \cdot 30}$$

$$G = 0,002706 \text{ Meter.}$$

Diese Zahl gibt uns die Beschleunigung, welche der Mond durch die Anziehung der Erde in jeder Sekunde gegen den Mittelpunkt der Erde erhält, also auch die Anziehung in Kräfteinheiten, in Kilogrammen, welche die an der Stelle des Mondes befindliche Masseneinheit von der Erde erhält.

Ein an der Erdoberfläche befindlicher Körper erhält nun die Beschleunigung 9,81 Meter, oder was dasselbe ist, die Erde zieht an ihrer Erdoberfläche die Masseneinheit mit einer Kraft von 9,81 Kilogrammen an. Ist deshalb die Schwerkraft mit der allgemeinen Gravitation dieselbe Kraft, so würden die in beiden Fällen auf die Masseneinheiten wirkenden Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Abstände derselben von dem Punkte der Erde, von welchem wir uns die Anziehung der Erde ausgehend denken können.

Um diese Vergleichung durchführen zu können, müssen wir deshalb zunächst untersuchen, von welchem Punkte der Erde aus die auf ausserhalb der Erde befindliche Massen ausgeübte Anziehung ausgeht, von wo aus wir die Abstände der zu vergleichenden Masseneinheiten zu rechnen haben.

Befindet sich die angezogene Masse von der Erde so weit entfernt, dass wir die Verbindungslinien aller Punkte der Erde mit dieser Masse als einander parallel ansehen können, so lehrt uns schon der Satz vom Mittelpunkte der parallelen Kräfte, dass die Erde und die Masse sich gerade so anziehen müssen, als ginge die gesammte Anziehung von dem Mittelpunkte der Erde aus. Denn da an alle Punkten der Erde in dem Falle parallele gegen die angezogene Masse gerichtete Kräfte angreifen, so befindet sich die Erde jener Masse gegenüber gerade wie eine auf der Erde befindliche schwere Kugel. Wie nun letztere von der Erde gerade so angezogen wird, als wäre

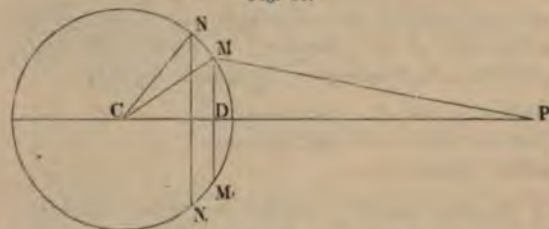


ihr ganzes Gewicht im Schwerpunkt, welcher bei einer homogenen Kugel der Mittelpunkt ist, vereinigt, so ist auch die Anziehung der entfernten Masse auf die Erde und der Erde auf die entfernte Masse gerade so, als wenn die ganze anziehende Masse der Erde in deren Mittelpunkt vereinigt wäre.

Als Abstand der an der Stelle des Mondes befindlichen angezogenen Masseneinheit von der Erde müssen wir deshalb den Abstand der Mittelpunkte des Mondes und der Erde oder 60 Erdradien einsetzen.

Aber ebenso wie auf entfernte Massen wirkt eine Kugel auch auf solche, die sich in ihrer Nähe befinden, gerade so, als wenn die ganze anziehende Masse der Kugel in ihrem Schwerpunkte, also bei einer homogenen Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Zunächst erkennt man leicht, dass die Anziehung einer Kugel gegen den Mittelpunkt derselben gerichtet sein muss. Denn stellt der Kreis (Fig. 50) den Durchschnitt einer Kugel nach einem grössten Kreise vor, welche anziehend auf irgend einen Punkt

Fig. 50.



$P$  wirkt, so sieht man sofort, dass alle anziehenden Punkte der Kugel ganz symmetrisch um die Verbindungslinie  $PC$  des Punktes  $P$  mit dem Mittelpunkte vertheilt sind. Jedem Punkte  $M$  oberhalb  $PC$  entspricht ein genau so weit von  $P$  entfernter Punkt unterhalb  $PC$ . Zerlegen wir nun die nach  $M$  und  $M_1$  gerichteten Anziehungen in ihre Componenten parallel zu  $PC$  und senkrecht zu  $PC$ , so heben die letztern sich auf, da die Winkel  $MPC$  und  $M_1PC$  einander gleich sind. Wie hier, so bleiben in allen Fällen nur die gegen den Mittelpunkt gerichteten Componenten übrig, es muss also die gesammte Anziehung gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtet sein.

Um nun die Anziehung der Kugel auf eine im Punkte  $P$  befindliche Masse  $m$ , deren Abstand vom Mittelpunkte  $CP$  gleich  $a$  sei, zu berechnen, denken wir uns die Kugel in lauter einzelne sehr dünne Schalen zerlegt, deren Dicke gleich  $\delta$  sei; stelle jener Kreis den Durchschnitt einer solchen Schale vor. Die Dichtigkeit der Schale, das heisst die in der Volumeinheit enthaltene Masse sei gleich  $\sigma$ . Führen wir nun durch die Kugelschale zwei einander sehr nahe zu  $PC$  senkrechte Schnitte  $MM_1$  und  $NN_1$ , so schneiden dieselben aus der Schale eine Zone heraus, deren Volumen gleich dem Produkte aus dem Kreisumfang  $MM_1$ , dem Bogen  $MN$  und der Dicke  $\delta$  der Schale ist, wenn wir eben  $MN$  und  $\delta$  so klein voraussetzen, dass der Kreis  $MM_1$  von dem in der Mitte der Schale mitten zwischen  $M$  und  $N$  gelegten Schnitte nur unendlich wenig verschieden ist. Das Volumen dieser Zone ist demnach

$$2\pi MD \cdot MN \cdot \delta,$$

und die in dieser Zone enthaltene Masse erhalten wir, wenn wir das Volumen mit  $\sigma$  multipliciren. Nennen wir nun die Anziehung, welche zwei der Einheit gleiche Massen in der Entfernungseinheit auf einander ausüben,  $f$ , so

erhalten wir für die Anziehung der Kugelzone auf die in  $P$  befindliche Masse  $m$  nach dem im vorigen §. entwickelten Anziehungsgesetz:

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2}$$

und die allein übrig bleibende in  $PC$  fallende Componente, wenn wir obigen Ausdruck mit  $\cos CPM$  multipliciren,

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2} \cdot \cos CPM.$$

Bezeichnen wir nun den Radius der Kugelschale  $CM$  mit  $r$ , den Abstand des Punktes  $P$  von der Zone  $MP$  mit  $e$ , den Winkel  $MCP$  mit  $\vartheta$ , die Breite der Zone im Winkelmaass oder  $MCN$  mit  $d\vartheta$ , so erhalten wir

$$MD = r \cdot \sin \vartheta, \quad MN = r \cdot d\vartheta \\ \cos CPM = \frac{DP}{e} = \frac{a - r \cdot \cos \vartheta}{e};$$

zur Bestimmung des Zählers im Ausdruck für  $\cos CPM$  haben wir

$$MP^2 = MC^2 + CP^2 - 2MC \cdot CP \cdot \cos \vartheta = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos \vartheta \\ r \cdot \cos \vartheta = \frac{r^2 + a^2 - e^2}{2a} \\ a - r \cdot \cos \vartheta = \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in den für die Anziehung der Kugelzone erhaltenen ein, so wird derselbe

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot r \cdot d\vartheta \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{c^2} \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a \cdot e}$$

oder, indem wir passender ordnen,

$$f \cdot \frac{\pi r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{e^3}.$$

Um nun die Anziehung der ganzen Kugelschale auf  $m$  zu erhalten, haben wir für alle die Kugel zusammensetzenden Zonen obigen Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu addiren. Wir erhalten diese Werthe für die einzelnen Zonen, indem wir für  $\vartheta$  nach und nach alle Werthe von  $0 - \pi$  und gleichzeitig den jeder Zone entsprechenden Werth von  $e$  einsetzen. Mit Hülfe unseres Werthes für  $e$  können wir nun bequemer den Winkel  $\vartheta$  eliminiren und die Breite der einzelnen Zonen durch  $e$  ausdrücken. Nennen wir nämlich die Länge von  $e$ , wenn wir von dieser Zone zur nächstfolgenden übergehen, deren Grenze in  $N$  liegt,  $e + de$ , so haben wir

$$(e + de)^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos (\vartheta + d\vartheta) \\ e^2 + 2e de + de^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \{ \cos \vartheta \cos d\vartheta - \sin \vartheta \sin d\vartheta \}.$$

Da nun  $de$  und  $d\vartheta$  äusserst klein sind, so können wir das gegen  $de$  selbst äusserst kleine Glied  $de^2$  vernachlässigen und ferner setzen

$$\cos d\vartheta = 1 \quad \sin d\vartheta = d\vartheta,$$

und dann wird, indem wir auf beiden Seiten  $e^2$  abziehen,

$$e de = ar \cdot \sin \vartheta d\vartheta; \quad \sin \vartheta d\vartheta = \frac{e}{ar} \cdot de.$$

Setzen wir diesen Werth in unsern Ausdruck ein, so erhalten wir für die Anziehung der ganzen Kugelzone

$$f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{c^2}\right) dc.$$

Lassen wir hierin  $c$  nach und nach alle der Kugelschale entsprechenden Werthe annehmen, also  $c$  von  $a - r$  bis  $a + r$  sich ändern, so gibt uns die Summe der unendlich vielen Ausdrücke, die den einzelnen zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werthen von  $c$  entsprechen, die Anziehung der ganzen Kugelschale.

Wir erhalten diese Summe durch eine der im §. 21 durchgeführten ganz gleiche Ueberlegung. Da jedes Glied dieser Summe mit dem vor der Klammer stehenden Factor multiplicirt ist, so können wir denselben heraussetzen und nach der schon §. 21 gewählten Bezeichnung die Summe schreiben

$$f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2} \int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{c^2}\right) dc,$$

worin auch jetzt wieder das Zeichen  $\int_{a-r}^{a+r}$  die Summe aller Werthe des unter demselben stehenden Ausdrucks bedeutet, wenn  $c$  nach und nach alle Werthe zwischen  $a - r$  und  $a + r$  annimmt.

Die Summe können wir in zwei Theile zerlegen, in

$$\int_{a-r}^{a+r} dc + \int_{a-r}^{a+r} \frac{a^2 - r^2}{c^2} dc.$$

Da nun der Ausdruck unter dem ersten Summenzeichen

$$dc = c + dc - c,$$

so ist nach §. 21 die erste Summe

$$\int_{a-r}^{a+r} dc = a + r - (a - r) = 2r.$$

Schreiben wir die zweite Summe

$$\int_{a-r}^{a+r} \frac{a^2 - r^2}{c^2} dc = (a^2 - r^2) \int_{a-r}^{a+r} \frac{dc}{c^2} = (a^2 - r^2) \int_{a-r}^{a+r} c^{-2} dc,$$

so erkennt man leicht, dass

$$c^{-2} dc = -(c + dc)^{-1} - (-c^{-1});$$

denn entwickeln wir nach der binomischen Weise, so ist

$$-(c + dc)^{-1} = -c^{-1} + c^{-2} dc - c^{-3} dc^2 + \dots,$$

worin wir schon das dritte Glied, da  $dc^2$  selbst gegen  $dc$  unendlich klein ist, und so alle folgenden vernachlässigen können.

Dann ist aber nach den Bemerkungen des §. 21

$$\int_{a-r}^{a+r} e^{-2} de = -\frac{1}{a+r} - \left(-\frac{1}{a-r}\right) = \frac{1}{a-r} - \frac{1}{a+r}$$

Damit wird dann die ganze Summe

$$\int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de = (a+r) - (a-r) + \left(\frac{a^2 - r^2}{a-r} - \frac{a^2 - r^2}{a+r}\right) = 4r$$

und damit der Ausdruck für die Anziehung der ganzen Kugelschale

$$f \cdot \frac{4 r^2 \pi \cdot \delta \cdot \sigma m}{a^2}$$

In diesem Ausdrucke ist  $4 r^2 \pi$  die Oberfläche der mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kugel,  $4 r^2 \pi \delta$  somit das Volumen und  $4 r^2 \pi \delta \cdot \sigma$  die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir diese Masse mit  $M$ , so erhalten wir für die Anziehung der Kugelschale auf die im Abstände  $a$  von ihrem Mittelpunkte befindlichen Masse  $m$

$$f \cdot \frac{M \cdot m}{a^2},$$

oder die Kugelschale zieht die Masse  $m$  gerade so an, als wenn die gesammte Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Was nun für diese Kugelschale gilt, dasselbe gilt für alle, in welche wir uns die Kugel zerlegt gedacht haben, selbst dann, wenn die einzelnen Schalen eine verschiedene Dichtigkeit haben. Wir erhalten deshalb ganz allgemein den Satz, dass die Anziehung einer homogenen oder einer aus concentrischen Schalen zusammengesetzten Kugel, bei der nur die einzelnen Schalen überall dieselbe Dichtigkeit haben, nach aussen gerade so wirkt, als wäre die ganze Masse derselben im Mittelpunkt vereinigt.

Zur Vergleichung der Anziehung, welche der Mond von der Erde erhält, mit der Schwere auf der Erde, müssen wir also auch für die auf der Erde befindlichen Gegenstände als anziehenden Punkt den Mittelpunkt der Erde ansehen, als Abstand der Masseneinheit auf der Oberfläche von der anziehenden Masse der Erde somit den Radius der Erde einsetzen.

Für die auf die Masseneinheit des Mondes wirkende Anziehung erhielten wir nun 0,002706, für die auf der Erdoberfläche wirkende 9,81; ist deshalb die Schwere mit der allgemeinen Massenanziehung identisch, so müssen sich diese Zahlen umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung dieser beiden Massen vom Mittelpunkt der Erde, oder es muss

$$g = 9,81 = 3600 \cdot G = 3600 \cdot 0,002706$$

sein. Führen wir die angedeutete Multiplication aus, so erhalten wir aus der Anziehung des Mondes

$$g = 9,742,$$

eine Zahl, die so nahe mit der aus der Pendelbewegung gefundenen übereinstimmt, dass unter Berücksichtigung der gemachten nicht ganz genauen Annahmen dadurch der sicherste Beweis geführt ist, dass die Schwere mit der allgemeinen Anziehung identisch ist.

Dieser Satz, dass die Schwere mit der allgemeinen Gravitation identisch

ist, und dass die Erde auf alle auf ihr befindlichen Gegenstände gerade so wirkt, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt, führt unmittelbar zu der am Schluss von §. 31 erwähnten Folgerung, dass ein Pendel in verschiedener Höhe über der Erdoberfläche eine verschiedene Schwingungsdauer haben, oder dass  $g$  in verschiedenen Höhen verschieden gross sein muss. In einer Höhe  $x$  über der Erdoberfläche muss der Werth von  $g$  nach dem Gesetze der Massenattraction sich ergeben aus der Gleichung

$$\begin{aligned} g : g_0 &= R^2 : (R + x)^2 \\ g \cdot (R + x)^2 &= g_0 R^2, \end{aligned}$$

wenn  $g_0$  die Beschleunigung an der Erdoberfläche oder im Niveau des Meeres bedeutet; es ist somit

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + x)^2}$$

oder mit hinreichend grosser Annäherung, da  $x$  gegen  $R$  immer sehr klein ist,

$$g = g_0 \left( 1 - 2 \frac{x}{R} \right); \quad g_0 = g \left( 1 + 2 \frac{x}{R} \right),$$

ein Ausdruck, der uns gestattet, aus den in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche oder dem Meeresniveau beobachteten Werthen von  $g$  den Werth von  $g_0$  für das Meeresniveau zu berechnen.

#### §. 42.

**Verschiedenheit von  $g$  in verschiedenen Breiten.** Ist die Beschleunigung  $g$  eine Folge der Anziehung der Erdmasse auf die an der Oberfläche befindlichen Körper, so muss der Werth derselben an verschiedenen Punkten der Erde verschieden sein. Denn die Erde dreht sich in 24 Stunden um ihre Axe, und jeder Punkt beschreibt in dieser Zeit einen Kreis, dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstand desselben von der Erdaxe. Die bei der drehenden Bewegung auftretende Centrifugalkraft sucht daher alle Punkte von der Erde zu entfernen. Da nun aber diese Radien und somit die Kreise um so kleiner werden, je mehr wir uns den Polen nähern, so wird auch die Rotationsgeschwindigkeit und mit ihr die Centrifugalbeschleunigung im quadratischen Verhältnisse kleiner. Die Centrifugalkraft wirkt aber auch nur unter dem Aequator der Schwere gerade entgegen, an allen andern Orten bildet ihre Richtung, da sie senkrecht zur Erdaxe ist, mit der Richtung der nach dem Mittelpunkt der Erde gehenden Anziehung einen Winkel, der gleich ist der Breite des Ortes. Nur die in die Richtung der Schwere fallende Componente, welche gleich dem Produkte aus der Centrifugalkraft in den Cosinus der Breite ist, wirkt an diesen Orten der Schwere entgegen. Es muss deshalb die Beschleunigung der Körper durch die Schwere zunehmen, so wie wir uns vom Aequator zu den Polen entfernen.

Andererseits aber ist, wie uns geodätische Messungen lehren, die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid, so zwar, dass die Abplattung, das Verhältniss der Differenz zwischen Aequatorial- und Polar-Radius zum Aequatorialradius  $= \frac{1}{299}$  ist. Daraus folgt nun aber, dass wir dem Mittelpunkt der Erde näher kommen, wenn wir

uns vom Aequator aus zu den Polen hin bewegen. Es muss also auch aus diesem Grunde die Beschleunigung des freien Falles zunehmen, da, wie wir vorhin gezeigt haben, die Erde alle auf ihr befindlichen Körper so anzieht, als wäre die gesammte anziehende Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

Mit diesen Forderungen der Theorie ist nun die Beobachtung im Einklang, sie zeigt uns, dass die Beschleunigung vom Aequator zu den Polen hin zunimmt, und dass sie stärker zunimmt, als sie es allein wegen der Abnahme der Centrifugalbeschleunigung thun müsste. Ja mehr noch, die theoretische Mechanik gibt uns an, in welcher Weise wegen der Abplattung die Beschleunigung wachsen muss, und gibt uns so ein Mittel an die Hand, aus der beobachteten Beschleunigungsänderung die Abplattung theoretisch zu berechnen. Der so erhaltene Werth stimmt sehr nahe mit dem aus geodätischen Messungen abgeleiteten überein.

Die Aenderungen der Grösse  $g$  hat man aus den Aenderungen der Länge des Sekundenpendels bestimmt. Man hat

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

setzen wir nun  $t = 1$ , so wird

$$g = \pi^2 \cdot l.$$

Es genügt also, die Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten zu messen, um daraus den Werth für  $g$  zu erhalten.

Nun ist nach den Messungen von Sabine reducirt auf das Meeresniveau

Breite.	Länge des Sekundenpendels.	$g$ .
$0^0$	$0^m,990938$	$9^m,78009$
$45^0$	$0^m,993509$	$9^m,80552$
$90^0$	$0^m,996080$	$9^m,83089$ .

Diese Werthe für  $g$  sowie alle an verschiedenen Orten beobachteten lassen sich wiedergeben durch

$$g = 9^m,78009 + 0,05080 \cdot \sin^2 \varphi,$$

wenn wir mit  $\varphi$  die Breite des Ortes bezeichnen, an welcher die Beschleunigung gleich  $g$  ist.

In welcher Weise  $g$  sich ändern müsste, wenn nur die Centrifugalbeschleunigung es afficirte, lässt sich nun leicht berechnen. Die Centrifugalbeschleunigung am Aequator ist

$$\frac{4 \pi^2 R}{T^2} = \frac{2 \pi \cdot 40000000}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 0^m,03368.$$

Der Radius der Kreise, in welchem sich die nicht unter dem Aequator liegenden Punkte bewegen, ist nun der senkrechte Abstand der Punkte von der Drehungsaxe der Erde. Nennen wir daher die Breite eines Ortes  $\varphi$ , so ist er  $R \cos \varphi$ . Die Centrifugalbeschleunigung ist also für einen Ort von der Breite  $\varphi$  gleich  $0^m,03368 \cos \varphi$ . Die in die Richtung der Schwere fallende und ihr entgegen wirkende Componente ist demnach  $0^m,03368 \cos^2 \varphi$ . Nennen wir nun  $G$  die Beschleunigung durch die Schwere, wenn die Centrifugalkraft nicht vorhanden wäre, so ist die wirklich stattfindende Beschleunigung  $g$

$$g = G - 0,03368 \cos^2 \varphi.$$

Nun ist für den Aequator, wo  $\varphi = 0$  ist, nach Sabine

$$G = 9,78009 + 0,03368.$$

Vorausgesetzt, dass nur die verschiedene Centrifugalkraft die Beschleunigung ändert, muss dies aber auch die Beschleunigung durch die Schwere an allen Orten der Erde sein, demnach allgemein die um die Centrifugalbeschleunigung verminderte und zu beobachtende Beschleunigung  $g$

$$g = 9^m,78009 + 0^m,03368 - 0,03368 \cos^2 \varphi$$

$$g = 9^m,78009 + 0^m,03368 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Nach unserer obigen aus der Beobachtung abgeleiteten Formel ist der Coefficient von  $\sin^2 \varphi$  grösser, so dass also die Beschleunigung  $g$  in der That stärker zunimmt, als sie es nur der Abnahme der Centrifugalkraft wegen thun würde.

Um aus der Beschleunigungsänderung die Abplattung zu berechnen, dient das Clairaut'sche Theorem<sup>1)</sup>, nach welchem die Summe des Quotienten, aus der Beschleunigungsdifferenz am Pol und Aequator und der Beschleunigung am Aequator, und der Abplattung gleich dem Zweiundeinhalbfachen des Quotienten aus der Centrifugalbeschleunigung und der Beschleunigung durch die Schwere am Aequator ist, oder

$$\frac{\Delta g}{g_0} + e = 2,5 \frac{c}{g_0},$$

wenn  $\Delta g$  den Unterschied der Beschleunigung an dem Pole und am Aequator,  $g_0$  die Beschleunigung am Aequator,  $e$  die Abplattung und  $c$  die an dem Aequator stattfindende Centrifugalbeschleunigung bedeutet. Wir erhalten daraus für die Abplattung

$$e = 2,5 \frac{c}{g_0} - \frac{\Delta g}{g_0}$$

oder, wenn wir die eben erhaltenen Zahlenwerthe einsetzen,

$$e = 2,5 \frac{0,03368}{9,78009} - \frac{0,05080}{9,78009} = 0,003415 = \frac{1}{292}.$$

Man sieht, dass dieser aus den Pendelschwingungen unter Annahme, dass die nicht kugelförmige Anordnung der Erdmasse die Beschleunigung ändere, berechnete Werth für die Abplattung sehr nahe mit dem durch geodätische Messungen erhaltenen übereinstimmt. Der Unterschied kann nicht auffallen, wenn man einerseits die Schwierigkeit der Messungen erwägt und andererseits bedenkt, dass die besondere Bodenbeschaffenheit eines Orts auf die Pendelschwingungen von Einfluss ist.

### §. 43.

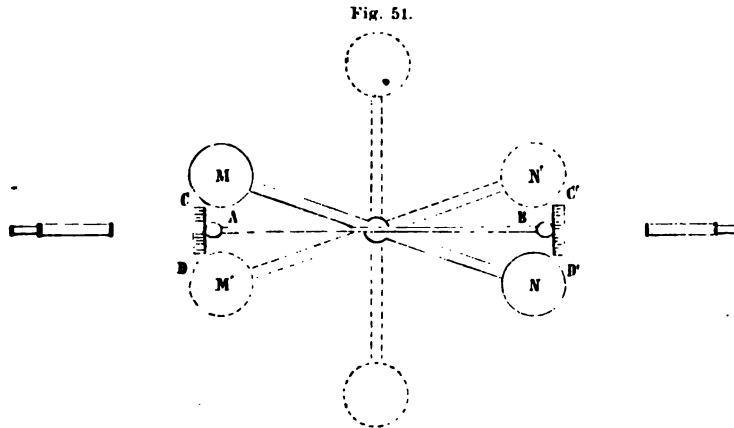
**Versuche von Cavendish.** Dass die Bodenbeschaffenheit auf die Bewegung des Pendels von Einfluss ist, folgt direkt aus dem experimentellen

<sup>1)</sup> Clairaut, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743. Das Theorem ergibt sich aus der Untersuchung, welche Gestalt die Erde annehmen musste unter der Voraussetzung, dass die Erde früher eine flüssige Masse gewesen sei, und unter der Voraussetzung, dass nicht die ganze Masse der Erde homogen, sondern dass die Erde aus concentrischen homogenen Schalen bestehe.

Nachweis von Cavendish und Maskelyne, dass die einzelnen Körper auf der Erde anziehend auf einander wirken. Cavendish zeigte, dass eine grosse Bleimasse eine metallene Kugel anzieht, Maskelyne bewies, dass das Pendel in der Nähe grosser Gebirge aus der Verticalen abgelenkt wurde.

Beide Anziehungen sind gemessen und durch Vergleichung mit der Anziehung der Erde dann die Masse der Erde bestimmt. Beginnen wir mit den Versuchen von Cavendish, welcher dieselben mit folgendem von Michell construirtem Apparate anstellte.

Ein leichter und gleichmässig gearbeiteter Hebel von Tannenholz  $AB$  (Fig. 51) ist in seiner Mitte an einem sehr feinen Metalldrahte horizontal



aufgehängt, welcher an der Decke eines verschlossenen Zimmers befestigt ist. An seinen Enden trägt er zwei ganz gleiche Kugeln  $A$  und  $B$  und an diesen zwei mit einer Theilung versehene Elfenbeinblättchen  $CD$  und  $C'D'$ . Faden und Hebel sind von einem hölzernen Gehäuse umgeben, um die Luftströmungen abzuhalten. Die Seiten desselben bei  $A$  und  $B$  sind von Spiegelglas, um die Theilungen  $CD$  und  $C'D'$  beobachten zu können. Die Beobachtungen der Theilungen geschehen mittelst zweier mit Fadenkreuz versehener Fernrohre, welche den Theilungen gegenüber in der Mauer des Zimmers angebracht sind.

Untersuchen wir, ehe wir mit der Beschreibung des Apparates fortfahren, die Bedingungen, unter welchen dieser Hebel im Gleichgewicht ist. Wir werden dazu einige Lehren über die Elasticität der Körper benutzen müssen, welche wir in den folgenden Abschnitte kennen lernen werden, deren Richtigkeit wir demnach hier annehmen. Wenn wir den Hebelarm aus seiner Gleichgewichtslage ablenken, indem wir ihn um den Faden als Axe drehen, so ertheilen wir dadurch auch dem Faden eine Drehung um sich selbst, eine Torsion. Der Faden sucht nun, sich selbst überlassen, sich wieder aufzudrehen und übt dadurch ein Drehungsmoment auf den Hebel aus, den er wieder in seine Gleichgewichtslage zurückbringen will. Nennen wir nun  $f$  die Kraft, welche wir in dem Abstände  $l$  von dem Faden an einem Hebel anbringen müssen, um ihn in der abgelenkten Lage zu erhalten, in welcher das Ende des Hebels von der Länge  $l$  um einen Bogen von der



Länge 1 gedreht ist, so zeigt der Versuch, dass man eine Kraft  $f \cdot A$  anbringen muss, um den Hebel um einen Bogen von der Länge  $A$  gedreht zu erhalten. Die Torsionskraft des Fadens ist also proportional der Drehung, welche wir dem Faden ertheilt haben. In dem Apparate von Cavendish ist also die Kraft, mit welcher die Torsion des Fadens, den um einen mit dem Radius 1 beschriebenen Bogen von der Länge  $A$  gedrehten Hebel zurückführt, gleich einer im Abstände 1 von der Mitte angebrachten Kraft  $fA$ , oder gleich einer Kraft  $\frac{fA}{l}$  an dem Mittelpunkte der Kugel  $A$  angebracht, wenn wir die halbe Länge  $AB$  mit  $l$  bezeichnen.

Um die Kraft  $f$  zu messen, haben wir nur den Hebel in Bewegung zu setzen. Wir sehen dann, dass er in der Horizontalebene Oscillationen vollführt, welche alle eine gleiche Zeit dauern. Auf diese Oscillationen ist nun ohne weiteres unser Ausdruck für die Schwingungsdauer eines Pendels anzuwenden, da wir hier wie dort eine Kraft haben, welche nach den gleichen Gesetzen wirkt, deren Drehungsmoment um so kleiner wird, je näher der Hebel der Gleichgewichtslage kommt. Die das horizontale Pendel bewegende Kraft  $f$  greift im Abstände 1 von der Drehungsaxe an; in diesem Abstände ersetzt eine Masse  $2ml^2$  die beiden im Abstände  $l$  befindlichen Kugeln, deren jede die Masse  $m$  hat. Wenn wir die Masse des Stabes als sehr klein vernachlässigen<sup>1)</sup>, wird somit nach §. 34 die Schwingungsdauer  $t$  des Pendels:

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{\frac{f}{2ml^2}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{2ml^2}{f}}.$$

Setzen wir anstatt  $m = \frac{p}{g}$ , worin  $p$  das Gewicht jeder Kugel bedeutet, und lösen unsere Gleichung nach  $f$  auf, so wird

$$f = \frac{2\pi^2 p \cdot l^2}{g \cdot t^2}.$$

Sind demnach  $p$  und  $l$  bekannt, so bedarf es, um die Grösse der Kraft  $f$  zu messen, nur den Hebel in Schwingungen zu versetzen und die Schwingungsdauer zu beobachten. Kennt man nun  $f$ , so kann man leicht die Grösse der Kraft erhalten, die an  $A$  anzubringen ist, um den Hebel im Gleichgewicht zu halten, wenn man ihn um irgend einen Bogen aus seiner ursprünglichen Lage, in welcher der Draht ohne Torsion ist, gedreht hat. Sei er z. B. so gedreht, dass statt des Theilstriches  $o$  der Theilung  $CD$  oder  $C'D'$  der Theilstrich  $n$  in der Visirlinie des Fernrohrs einsteht; ist der Abstand zweier Theilstriche gleich  $\alpha$ , so ist der Bogen  $A$ , welchen der um die Länge 1 von der Axe entfernte Punkt durchlaufen hat,

$$A = \frac{n \alpha}{l}$$

und die an  $A$  anzubringende der Torsionskraft gleiche Kraft

$$\frac{f \cdot A}{l} = \frac{fn \alpha}{l^2},$$

<sup>1)</sup> (Genauer würde man in der §. 34 angedeuteten Weise das Trägheitsmoment des ganzen Horizontalpendels bestimmen. Den vollständigen Beweis für die Richtigkeit der oben durchgeführten Rechnung liefert §. 53.

oder, indem wir für  $f$  den eben gefundenen Werth einsetzen,

$$\frac{f \cdot n \alpha}{l^2} = \frac{2\pi^2 \alpha}{g} \cdot \frac{p n}{t^2}.$$

Wir können nun diese Kraft halbiren und die eine Hälfte in  $A$ , die andere in  $B$  so angreifen lassen, dass sie der Torsionskraft des Fadens gerade so entgegenwirken wie die eine im Punkte  $A$  angebrachte Kraft  $f$ ; auch dann ist das System im Gleichgewicht. Bezeichnen wir jede dieser Hälften mit  $F$ , so ist

$$F = \frac{\pi^2 \alpha}{g} \cdot \frac{p n}{t^2}.$$

In dem Apparate von Cavendish war die Constante  $\frac{\pi^2 \alpha}{g} = \frac{1}{818}$ , so dass demnach

$$F = \frac{1}{818} \cdot \frac{p n}{t^2}.$$

Wenn also durch Drehung des Hebels dem Faden eine Torsion ertheilt ist, so wird durch die Torsionskraft dem System ein Drehungsmoment ertheilt, welches es in die Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt, und welches gleich ist dem Drehungsmomente, welches zwei Kräfte ihm ertheilen würden, deren eine an  $A$ , deren andere an  $B$  angebracht ist, und deren jede die Grösse  $F = \frac{1}{818} \cdot \frac{p n}{t^2}$  besitzt. Kennt man daher das Gewicht  $p$  und hat die Anzahl Theilstriche  $n$ , um welche das System gedreht ist, mittels der Fernrohre beobachtet und früher die Schwingungsdauer  $t$  bestimmt, so kann man diese Kräfte durch Rechnung erhalten.

Es befinden sich nun an dem Apparate von Cavendish zwei grosse Bleikugeln  $M$  und  $N$ , jede 158 Kilogramm schwer. Dieselben sind an den Enden eines drehbaren Stabes befestigt, der von aussen gedreht wird, ohne dass der Beobachter in das zu den Versuchen bestimmte Zimmer eintritt. Man kann den Stab senkrecht zu  $AB$  stellen und ihm die Lage  $MN$  und  $M'N'$  geben, die symmetrisch sind zu der Gleichgewichtslage von  $AB$ , und in denen der Stab festgestellt werden kann. Sind die Kugeln in der ersten Lage, so afficiren sie den Hebel nicht; beide Kugeln ziehen sowohl  $A$  als  $B$  ganz gleichmässig an, und können ihnen daher keine Bewegung ertheilen. Der Beobachter liest die Stellung der Theilung ab und notirt sie als die Gleichgewichtslage des Hebels. Darauf bringt man die Kugel in die Lage  $MN$ . Jetzt zieht  $M$  die Kugel  $A$  und  $N$  die Kugel  $B$  an; der Hebel dreht sich und erreicht eine zweite Gleichgewichtslage, wenn die Anziehung von  $M$  auf  $A$  und  $N$  auf  $B$  gleich ist den Kräften  $F$ , mit denen die Torsionskraft des Fadens den Hebel zurückzudrehen sucht. Man beobachtet dann mit Hilfe der Fernrohre die Anzahl  $n$  der Theilstriche, um welche die Kugeln  $A$  und  $B$  abgelenkt sind, und berechnet dann die beiden Kräfte  $F$  oder die diesen gleichen Anziehungen der grossen Kugeln auf  $A$  und  $B$  mittels der Formel

$$F = \frac{1}{818} \cdot \frac{p \cdot n}{t^2}.$$

Zur Zeit als man die Kugeln in die Lage  $MN$  gebracht hatte, war nun der Abstand der Mittelpunkte von  $A$  und  $M$  oder  $B$  und  $N$  gleich  $D$ . Ist in der neuen Lage das Gleichgewicht eingetreten, so ist der Abstand

dann  $D' = D - na$ . Ist nun  $D'$  bestimmt, so kennen wir die zwischen den Kugeln thätigen anziehenden Kräfte  $F$  und den Abstand  $D'$  der Schwerpunkte der Kugeln, in dem diese Kräfte wirksam sind. Darauf macht man noch eine zweite Messung, indem man die Kugeln in die Lage  $M' N'$  bringt, und nimmt schliesslich aus den in beiden Fällen berechneten Werthen von  $F$  und den beobachteten Abständen  $D'$  das Mittel, um dann folgendermaassen aus diesen Daten das Gesamtgewicht  $P'$  der Erde und ihre mittlere Dichtigkeit zu berechnen.

Da die Anziehung der Kugel  $M$  auf  $A$  im Abstände  $D'$  gleich  $F$  ist, so würde sie in einem der Einheit gleichen Abstände  $F \cdot D'^2$  sein; nennen wir andererseits die Anziehung der Gewichtseinheit auf die Kugel  $A$  in der Abstandseinheit  $\varphi$ , so ist die dem Gewichte  $P$  der Kugel  $M$  proportionale Anziehung der ganzen Kugel  $M$  gleich  $P \cdot \varphi$ . Wir haben demnach

$$F \cdot D'^2 = P \cdot \varphi.$$

Die Anziehung der Erde auf die Kugel  $A$  ist an der Oberfläche der Erde, also im Abstände  $R$  von dem anziehenden Mittelpunkt gleich dem Gewichte  $p$  dieser Kugel. Nennen wir nun  $P'$  das Gewicht der Erde und geben  $\varphi$  dieselbe Bedeutung wie vorhin, so haben wir ebenfalls

$$p \cdot R^2 = P' \cdot \varphi$$

und erhalten aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{F}{p} = \frac{P \cdot R^2}{P' \cdot D'^2},$$

und wenn wir den für  $F$  vorhin erhaltenen Werth einsetzen,

$$\frac{F}{p} = \frac{1}{818} \cdot \frac{n}{t^2} = \frac{P \cdot R^2}{P' \cdot D'^2}.$$

In dieser Gleichung sind  $n$ ,  $t$ ,  $D'$  durch die Beobachtung gegeben,  $P$  ist das Gewicht der Kugel  $M = 158$  Kilogr.,  $R$  ist der Radius der Erde, man hat daher in lauter bekannten Grössen für das Gewicht  $P'$  der Erde

$$P' = \frac{818 \cdot P \cdot R^2 \cdot t^2}{n \cdot D'^2}.$$

Bezeichnen wir nun die mittlere Dichtigkeit der Erde mit  $d$ , so ist  $P'$  gleich dem Produkte aus dem Volumen der Erde und der mittlern Dichtigkeit

$$P' = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot d$$

und demnach schliesslich

$$d = \frac{613,5 \cdot P \cdot t^2}{\pi \cdot R \cdot n \cdot D'^2}.$$

Wir müssen in Bezug auf die Versuche noch einen Umstand hinzufügen, den wir, um den Gang der Entwicklungen nicht zu unterbrechen, übergangen haben. Wir sahen, dass wir, um  $n$  zu erhalten, zweimal den Stand der Theilungen  $CD$ ,  $C'D$  beobachten mussten, einmal in der Gleichgewichtslage des Stabes  $AB$  vor der Einwirkung der Kugeln, dann in der durch die Anziehung der Kugeln bedingten Gleichgewichtslage. Cavendish fand nun, dass der Stab  $AB$  niemals in Ruhe war, sondern stets um die Gleichgewichtslage, welche er hätte einnehmen müssen, Schwingungen voll-

führte. Man konnte daher die Stellung des Stabes in der Gleichgewichtslage nicht direkt bestimmen, sondern nur, indem man das Mittel aus den äussersten Lagen nahm, welche er bei diesen Schwingungen zur Rechten und Linken der Gleichgewichtslage erreichte.

Cavendish wandte zu seinen Versuchen zwei Drähte an. Bei Anwendung des ersten, sehr feinen, war die beobachtete Schwingungsdauer  $t = 14$  Minuten und die Zahl  $n$  der Theilstriche, um welche der Stab nach Einwirkung der Kugeln abgelenkt wurde,  $n = 16$ . In dem zweiten Falle, bei sehr viel dickerem Drahte, war  $t = 7$  Minuten,  $n = 5,7$ . Mit beiden Drähten erhielt er für  $d$  den gleichen Werth

$$d = 5,48.$$

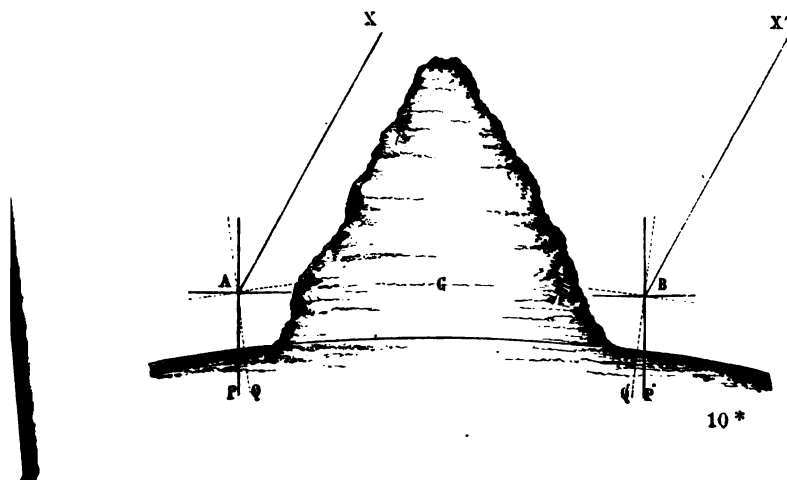
Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist demnach  $5\frac{1}{2}$  mal grösser als die des Wassers.

In späterer Zeit wurden die Versuche zunächst von Reich in Freiberg wiederholt im Jahre 1837. Er fand in der letzten Berechnung dieser Versuche im Jahre 1851 denselben Werth wie Cavendish  $d = 5,49$ . Später unternahm Baily zu London im Auftrage der königlichen Astronomischen Gesellschaft eine grosse Reihe von Versuchen und erhielt nach Correction einiger Fehler als Mittel aus mehr als 2000 Versuchen  $d = 5,67$ , also etwas grösser wie Cavendish. Darauf bestimmte Reich 1852 nochmals den Werth von  $d$  und fand ihn gleich 5,5832.

#### §. 44.

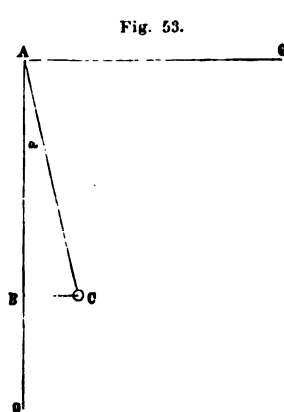
**Versuche von Maskelyne.** Es gibt noch eine zweite Methode, um die Anziehung der einzelnen Theile der Erde auf Körper zu messen und daraus die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, nämlich die Beobachtung der Ablenkung des Lothes durch grosse Gebirgsmassen. Die ersten Versuche derart wurden von Bouguer gemacht; sie wiesen jedoch nur nach, dass das Loth wirklich abgelenkt wird, ohne dass sie messend verfolgt werden konnten. Dieses gelang zuerst Maskelyne, der an der Bergkette Shehallien in Portshire in Schottland mit grosser Sorgfalt eine Reihe

Fig. 52.



von Messungen ausführte. Der Shehallien ist ein isolirter von West nach Ost sich erstreckender Gebirgszug, dessen geognostische Zusammensetzung bekannt ist, und der eine einfache Form hat. Man konnte daher sein Volumen, sein Gewicht und die Lage seines Schwerpunktes berechnen. Maskelyne wählte nun zwei Stationen *A* und *B* (Fig. 52), die nördlich und südlich von dem Berge in einer durch den Schwerpunkt desselben gehenden Ebene und auf demselben Meridiane lagen. Zunächst wurde nun die Polhöhe beider Orte bestimmt. Wenn der Gebirgszug nicht vorhanden gewesen wäre, so hätten die beiden Lothe *AP* und *BP'* einen Winkel mit einander gebildet, der gleich der Breitendifferenz der beiden Orte ist. Die Anziehung der zwischen beiden Orten liegenden Gebirgsmassen bewirkt nun, dass die Richtung der Lothe *AQ* und *BQ'* wird, oder dass die Richtung der Horizontalen gegen den Berg hin sich erhebt und die Polhöhe in *B* vermehrt ist. Man misst daher die Polhöhe und leitet daraus für jede Station die Ablenkung des Lothes her, indem man von dem Unterschiede der Polhöhen die vorher bestimmte Breitendifferenz abzieht.

Wirkt nun an einer der Stationen (Fig. 53) z. B. *A* die Anziehung der Erde nach *AO* mit einer Kraft gleich  $\frac{P' \varphi}{R^2}$ , so wirkt daneben die Anziehung des Berges in der Richtung *AG*, die wir als horizontal voraussetzen, mit einer Kraft gleich  $\frac{P \cdot \varphi}{D^2}$ , wenn wir mit *P* das Gewicht des Berges und mit *D* den Abstand seines Schwerpunktes vom Orte *A* bezeichnen. Das Loth ist demnach von zwei aufeinander senkrechten Kräften angegriffen, es wird sich in die Richtung des Resultirenden *AC* stellen und mit *OA* einen Winkel  $\alpha$  bilden, der gleich ist der beobachteten Ablenkung des Lothes. Man hat daher



$$\frac{P' \varphi}{R^2} : \frac{P \varphi}{D^2} = AB : CB,$$

$$\frac{CB}{AB} = \tan \alpha$$

und daher

$$\tan \alpha = \frac{P}{D^2} = \frac{P R^2}{P' D^2}.$$

Setzen wir nun wieder

$$P' = \frac{4}{3} R^3 \pi d,$$

so wird

$$d = \frac{0,75 P}{\pi R \cdot D^2} \cdot \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Maskelyne erhielt nun aus dem von Hutton bestimmten Gewicht *P* des Berges und dem Abstände *D* des Schwerpunktes vom Pendel für *d* eine Zahl, die nahe gleich 5 war, ein Resultat, welches die Versuche von Cavendish und Reich bestätigt, da auf diese Weise nicht die Genauigkeit erreicht werden kann, wie nach der vorigen Methode.

## §. 45.

**Methode von Airy.** Noch eine dritte Methode gibt es, um den Nachweis der Massenanziehung an den einzelnen Theilen der Erde zu liefern und die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, welche kürzlich der englische Astronom Airy angewandt hat. Dieselbe beruht darauf, dass der Werth der Beschleunigung ein anderer wird, wenn man unter die Erdoberfläche hinabsteigt. Um zu übersehen, in welcher Weise diese Veränderung von  $g$  stattfindet, denken wir uns die Erde zerlegt in eine Kugelschale von der Dicke  $x$ , der Tiefe der durchsunkenen Schicht und eine Kugel vom Radius  $R_1 = R - x$ .

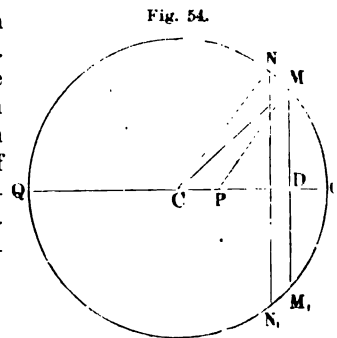
Auf einen an der Oberfläche befindlichen Körper wirkt nun sowohl die Anziehung der innern Kugel als auch der Kugelschale gerade so, als wäre die Masse beider im Mittelpunkte vereinigt, also so, als befände sich die Masse  $M_1$  der innern Kugel und die Masse  $M_2$  der Schale im Abstände  $R$  von dem angezogenen Körper.

Anders jedoch, wenn wir uns auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $R_1$  begeben, also die Schicht  $x$  hinabsteigen. Die Kugel mit dem Radius  $R_1$  wirkt nach dem Anziehungsgesetz, da der Körper sich ausserhalb derselben befindet, so als wäre ihre ganze Masse  $M_1$  im Mittelpunkte, also in der Entfernung  $R_1$  vom angezogenen Körper vereinigt. Die Anziehung der Kugelschale  $x$  muss aber eine andere sein, da der Körper sich im Innern derselben befindet. Wir können nun leicht nachweisen, dass eine Hohlkugel auf einen in ihrem Innern befindlichen Körper gar keine Anziehung ausübt, wenn die Schale aus homogenen concentrischen Schichten besteht; und daraus folgt dann, dass in der Tiefe  $x$  unter der Erdoberfläche auf den Körper nur die Masse der innern Kugel aus der ihrem Radius gleichen Entfernung  $R_1$  einwirkt.

Stelle, um diesen Nachweis zu führen, der Kreis (Fig. 54) einen Durchschnitt durch eine dünne Schicht der Kugelschale vor, und der Punkt  $P$  liege im Innern derselben, im Abstände  $a$  vom Mittelpunkte. Legen wir nun gerade wie in §. 41 durch die Kugelschale zwei zu  $CP$  senkrechte unendlich nahe Schnitte  $MM_1$  und  $NN_1$ , so erhalten wir für die Anziehung dieser Kugelzone auf den Punkt  $P$ , indem wir genau dieselbe Entwicklung wie in §. 41 anwenden, auch identisch denselben Ausdruck, nämlich, unter Benutzung derselben Zeichen,

$$f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{c^2}\right) dc.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale zu erhalten, müssen wir auch in diesem Ausdrücke für  $c$  alle möglichen Werthe einsetzen und die Summe aller einzelnen Ausdrücke bilden. Die äussersten Werthe, welche  $c$  annehmen kann, sind aber hier nicht  $a - r$  und  $a + r$ , sondern  $PO = r - a$  und  $PQ = r + a$ . Summiren wir nun genau so wie im §. 41, so wird damit die Summe jetzt



$$\int_{r-a}^{r+a} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de = (r+a) - (r-a) + \left(\frac{a^2 - r^2}{r-a} - \frac{a^2 - r^2}{r+a}\right) = 0.$$

Da diese Summe gleich Null ist, so folgt also, dass eine solche Schicht auf einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar keine Anziehung ausübt, und damit, dass überhaupt eine aus concentrischen homogenen Schichten bestehende Kugelschale einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar nicht anzieht.

Es folgt somit, dass der in der Tiefe  $x$  unter der Erdoberfläche befindliche Körper nur von der innern Kugel, deren Radius  $R_1 = R - x$  ist, angezogen wird. Suchen wir nun zunächst, wie sich die Beschleunigungen in der Tiefe und an der Erdoberfläche verhalten müssen.

Die Beschleunigung, welche die innere Kugel an ihrer Oberfläche ertheilt, sei  $g_1$ . Die Beschleunigung an der Erdoberfläche ist dann gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die innere Kugel an der Erdoberfläche, also im Abstände  $R$  von dem anziehenden Mittelpunkte ertheilt, und welche die Kugelschale von der Dicke  $x = R - R_1$  an ihrer Oberfläche ertheilt.

Die Beschleunigung  $g'_1$ , welche die innere Kugel an der Erdoberfläche ertheilt, ist nun nach dem Anziehungsgesetz

$$g'_1 = g_1 \cdot \frac{R_1^2}{R^2}$$

Bezeichnen wir nun die Beschleunigung an der Erdoberfläche wie immer mit  $g$ , so gibt uns die Differenz

$$g - g'_1$$

die Anziehung, welche die äussere Schale allein auf einen an ihrer äussern Oberfläche befindlichen Körper ausübt.

Die Anziehungen der äussern Schale sowohl als des innern Kernes geschehen so, als wären die ganzen Massen in ihrem Mittelpunkte vereinigt; sie sind daher proportional diesen Massen selbst oder den Produkten aus deren Volumen  $V$  und  $V_1$  und ihren Dichtigkeiten  $D$  und  $D_1$ . Wir haben demnach

$$g - g'_1 : g'_1 = V \cdot D : V_1 D_1$$

und, indem wir für  $g'_1$  seinen Werth einsetzen,

$$\frac{g - g_1 \frac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^2}{R^2}} = \frac{V D}{V_1 D_1} = \frac{\frac{4}{3} (R^3 - R_1^3) \pi \cdot D}{\frac{4}{3} R_1^3 \pi \cdot D_1} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1}$$

$$\frac{g \cdot R^2 - g_1 \frac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^2}{R^2}} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1},$$

ein Ausdruck, den man leicht auf die Form

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^2}{R^2} + \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 R_1} \cdot \frac{D}{D_1} = \frac{R_1^2}{R^2} \left\{ 1 + \left( \frac{R^3}{R_1^3} - 1 \right) \frac{D}{D_1} \right\}$$

bringen kann, und der zu erkennen gibt, dass das Verhältniss der Beschleunigung an der Oberfläche und in der Tiefe abhängig ist von dem Verhältniss der Dichten der äussern Schale und in der Tiefe. Derselbe zeigt aber gleichzeitig, dass wenn man  $g_1$ ,  $R_1$  und  $D$  beobachtet,  $D_1$  sich berechnen lässt.

Hierauf gestützt, stellte Airy zwei Pendel auf, eines an der Erdoberfläche, eines auf dem Boden des Bergwerkes von Harton in einer Tiefe von 383 Meter. Jedes war, wie bei den Borda'schen Versuchen, vor einer astronomischen Uhr aufgehängt. Man beobachtete die Oscillationen mittels der Methode der Coincidenzen und bestimmte ihre Dauer durch die Angaben der Uhr. Wenn nun aber die Veränderung der Schwere die Dauer einer Oscillation des Pendels verändert, so ist klar, dass sie auch den Gang der Uhr ändert. Es war deshalb nothwendig, den Gang der untern Uhr mit dem der obern zu vergleichen; das geschah mittels elektrischer Signale, welche sich augenblicklich fortpflanzten, und durch die man die Zeitangabe der untern Uhr corrigirte.

Die Beobachtung ergab nun, dass die Beschleunigung durch die Schwere auf dem Boden des Bergwerks  $\frac{1}{10190}$  grösser war, oder dass

$$\frac{g_1}{g} = 1,000052$$

war, ein Resultat, aus welchem sich ergibt, dass  $D_1$  bedeutend grösser sein muss als  $D$ . Denn wäre das nicht der Fall, so müsste die Schwere in der Tiefe kleiner werden, wäre etwa  $D = D_1$ , so ergibt sich

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R};$$

die Schwere müsste in demselben Verhältnisse abnehmen, als der Radius der innern Kugel kleiner ist wie der Radius der Erde.

Indem man nun den Inhalt des Bodens über dem Schachte untersucht, erhält man die mittlere Dichtigkeit der Schale in der Nähe des Orts, wo die Versuche angestellt wurden. Dieselbe ergab sich zu 2,5. Airy setzt nun diese Dichtigkeit als die mittlere Dichtigkeit der Kugelschale ein, was man ohne merklichen Fehler thun darf, wenn auch die Kugelschale nicht vollständig homogen ist, da die nähern Massen vorwiegend einwirken. Die Bestimmungen Airy's ergaben ferner, dass, die Tiefe des Hartoner Schachts gleich 1 gesetzt,

$$R = 16621,7 \text{ und deshalb } R_1 = 16620,7.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung für  $D_1$  ein, so erhält man

$$D_1 = 6,566,$$

so dass also die Dichtigkeit des innern Kernes, oder da die Masse der obern Schale gegen die des innern Kernes verschwindend klein ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 6,5mal so gross als die des Wassers wäre.

Das Resultat weicht allerdings bedeutend von den andern ab. Indess glaubt Airy, und auch wohl mit Recht, dass es dasselbe Vertrauen verdiene als die früheren Resultate, so dass wir annehmen dürfen, die mittlere Dichtigkeit der Erde betrage zwischen 5,5 und 6,5. Wir müssen daraus schliessen, dass das Erdinnere aus weit dichterem Materie zusammengesetzt ist als die von uns bis jetzt erschlossene Erdrinde.

Nehmen wir für die Dichtigkeit der Erde das Mittel aus den Zahlen von Reich und Airy oder in runder Zahl 6 an, so sind wir dadurch schliesslich im Stande die Anziehungen zu berechnen, welche zwei der Einheit



gleiche Massen auf einander aus der Einheit der Entfernung ausüben. Bezeichnen wir die Masse der Erde mit  $M$ , so gibt uns das Anziehungsgesetz für die Zahl  $g$  die Gleichung

$$g = f \cdot \frac{M}{R^2},$$

worin  $f$  wie früher die Anziehung der beiden Masseneinheiten aus der Entfernungseinheit bedeutet; demnach ist

$$f = g \cdot \frac{R^2}{M},$$

oder, indem wir für  $M$  seinen Werth setzen,

$$f = g \cdot \frac{R^2}{\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \delta} = 0,75 \cdot g \cdot \frac{1}{R \pi \delta}.$$

$R\pi$  ist der halbe Umfang der Erde, also gleich 20000000 Meter. Setzen wir für  $g$  seinen Werth für die Breite 45",  $g = 9,80552$ , so erhalten wir mit dem Werthe  $\delta = 6$  für  $f$  den Werth

$$f = 0,0000006128.$$

Diese Zahl gibt uns in Kilogrammen den Zug, den jede Masseneinheit auf die andere im Abstände 1 Meter ausübt, oder in Meter die Beschleunigung, welche die eine Masse der andern gegen sich hin ertheilt.

#### §. 46.

**Ebbe und Fluth.** Eine wichtige Erscheinung an unserer Erdoberfläche, hervorgehend aus der allgemeinen Massenanziehung und zwar aus der Anziehung des Mondes und der Sonne, ist das täglich zweimalige Steigen und Fallen des Wassers in den grossen Meeren. Wir müssen uns hier begnügen, die Erscheinung in ihren Grundzügen zu erklären.

Die Anziehung, welche der Mond auf die verschiedenen Punkte der Erde ausübt, ist verschieden, da dieselben von dem Monde verschieden entfernt sind. Ziehen wir z. B. durch den Mittelpunkt der Erde eine gerade Linie gegen den Mond, so ist der Mittelpunkt der Erde von dem des Mondes um 60, der Punkt, in welchem die dem Monde zugewandte Erdhälfte von der Geraden getroffen wird, um 59, der entsprechende Punkt auf der abgewandten Erdhälfte 61 Erdradien entfernt. Nennen wir die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit in der Entfernungseinheit  $f$ , den Abstand des Erdmittelpunktes vom Monde  $d$  und den Radius der Erde  $R$ , so erhalten wir für die Anziehung auf jene drei Punkte respective

$$\frac{f}{d^2} \dots \frac{f}{(d-R)^2} \dots \frac{f}{(d+R)^2}$$

und als die Differenzen zwischen den beiden letzten und der ersten Grösse

$$\pm \frac{2f \cdot R}{d^3},$$

wenn wir die Glieder der Differenzen, in denen höhere Potenzen von  $d$  als die dritte vorkommen, vernachlässigen. Um diese Grösse wird also der dem Monde zugewandte Punkt der Erdoberfläche stärker, der vom Monde abgewandte Punkt schwächer angezogen als der Mittelpunkt der Erde.

Wäre nun die ganze Erde fest, kein Punkt derselben gegen die andern verschiebbar, so würden diese Differenzen durch die festen Verbindungen so übertragen werden, dass dadurch nur ein Zug auf den Mittelpunkt der Erde entstände. Nun ist aber ein grosser Theil der Erde mit Wasser bedeckt, dessen einzelne Theile gegen einander und gegen die festen Theile der Erde frei beweglich sind. Das Wasser wird daher in Folge dieser verschiedenen Anziehungen eine Bewegung annehmen müssen, und zwar wird es, wenn jene Linie zum Beispiel die Erdoberfläche an beiden Punkten im Meere schneidet, sich an beiden Punkten erheben und dafür an den zwischenliegenden fallen müssen. Da nämlich an der dem Monde zugewandten Seite das Wasser stärker, an der vom Monde abgewandten Seite schwächer angezogen wird als der Mittelpunkt der Erde, so ist das gerade so, als wenn an beiden Punkten eine der Schwere entgegengesetzte Kraft von der Grösse jener Differenz angebracht wäre, wie sich leicht durch folgende Betrachtung anschaulich machen lässt.

Man habe 3 Punkte  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ; die Punkte  $A$  und  $B$  werden jeder durch eine Kraft gleich 10, um ein Zahlenbeispiel zu wählen, gegen  $C$  hingezogen. Nun seien ferner an den drei Punkten nach gleicher Richtung, z. B. nach rechts hin, folgende Kräfte angebracht: an  $B$  die Kraft 3, an  $C$  die Kraft 2 und an  $A$  die Kraft 1. Diese Punkte befinden sich gewissermaassen in denselben Verhältnissen wie unsere vorhin betrachteten Punkte auf der Erde. In dem Verhältniss der 3 Punkte zu einander wird nun nichts geändert, wenn wir von jedem derselben die nach rechts hin ziehende Kraft 2 fortnehmen. Dadurch ist der Punkt  $C$  wieder wie anfangs von keiner Kraft afficirt. Am Punkte  $B$  bleibt aber die Kraft 1 nach rechts hin, also vom Punkt  $C$  fortziehend übrig. An  $A$  zog ursprünglich die Kraft 10 gegen  $C$  nach rechts, es trat dann noch die Kraft 1 hinzu, später aber nahmen wir die Kraft 2 wieder fort; es bleibt also nur die Kraft 9 nach  $C$  hinziehend übrig, oder da wir uns statt der Kraft 9 die Kraft 10 nach  $C$  hin und die Kraft 1 von  $C$  fortziehend denken können, so folgt, dass durch Anbringen jener Kräfte auch bei  $A$  gleichsam eine von  $C$  fortziehende Kraft entsteht, welche gleich ist der Differenz der von  $C$  und  $A$  nach rechts hin wirkenden Kräfte.

So also auch bei der Erde. Durch Anziehung des Mondes entsteht an den unter dem Monde und den ihm gegenüber an der andern Seite der Erde liegenden Punkten gleichsam eine das Wasser vom Mittelpunkte der Erde fortziehende Kraft.

Das Wasser muss also dort steigen und dafür an den mitten zwischen beiden liegenden Punkten der Erde fallen. Dadurch müssen also zwei, an diametral gegenüberliegenden Stellen der Erde sich bildende Fluthwellen entstehen, deren jede, da die Erde sich in 24 Stunden von Westen nach Osten um ihre Axe dreht, die Erde in 24 Stunden von Osten nach Westen umkreisen muss.

In den Meeren muss also täglich zweimal Fluth und Ebbe entstehen, da sie jeden Tag den Mond einmal im Zenith, einmal im Nadir haben. Wegen der Eigenbewegung des Mondes in seiner Bahn jedoch, wodurch der Durchgang durch einen bestimmten Meridian täglich um 50 Minuten verzögert wird, verzögert sich auch der Eintritt von Ebbe und Fluth jeden Tag um ebensoviel.

Ebenso wie der Mond erzeugt auch die Sonne Ebbe und Fluth, jedoch viel schwächer, wie man sofort erkennt, wenn man in unsern Ausdruck  $\frac{2fR}{d^3}$ , der uns die von dem Mittelpunkte fortziehende Kraft angibt, die der Sonne entsprechenden Grössen einsetzt. Bezeichnet  $M$  die Masse der Sonne und  $m$  die Masse des Mondes, so haben wir statt  $f$  der Anziehung des Mondes in der Abstandseinheit  $f \cdot \frac{M}{m}$  zu setzen, und anstatt  $d$  die Entfernung der Sonne von der Erde  $d' = 400 d$ , da die Sonne 400mal weiter von uns entfernt ist als der Mond. Die Masse der Sonne  $M$  ist 355 000mal grösser als die der Erde und die der Erde gleich  $88 m$ , also 88mal grösser als die des Mondes. Wir haben demnach für die Differenz der Sonnenanziehung

$$\frac{2fR \cdot 355\,000 \cdot 88}{d^3 \cdot 400^3},$$

also ungefähr die Hälfte des Unterschiedes der Mondanziehung auf die entsprechenden Punkte der Erde. Die Sonnenfluth wird daher auch nur die halbe Höhe der Mondfluth haben. Durch die vereinte Wirkung von Sonne und Mond wird nun die Fluthhöhe entweder vergrössert oder verkleinert. Stehen Sonne und Mond an der gleichen Seite der Erde, zur Zeit des Neumondes, oder an der entgegengesetzten, zur Zeit des Vollmondes, so verstärken sie die Fluthen, es treten die sogenannten Springfluthen ein. Zur Zeit der Quadraturen, also des ersten und letzten Viertels tritt Sonnenfluth und Mondebbe an der gleichen Stelle auf und umgekehrt; die Fluthen sind dann als Nippfluthen die kleinsten.

Durch die verschiedenen Tiefen des Meeres und die Configuration des Festlandes wird der Verlauf der Fluthen sowie das Gesetz ihrer Aenderung ein äusserst verwickeltes, welches jedoch La Place in grosser Vollständigkeit gelöst hat. Wir müssen uns hier begnügen, darauf hingewiesen zu haben.

### Litteratur des ersten Abschnittes.

Die bisher vorgetragenen Lehren sind grösstentheils so vielfach behandelt und in vortrefflichen Werken zusammengestellt, dass eine Angabe der Originalquellen theils zu weit führen würde, theils nur ein geschichtliches Interesse hat. Wir verweisen daher in Betreff der genauern Kenntniss der einzelnen Lehren auf die vielen vorzüglichen Lehrbücher der Mechanik, von denen wir folgende namhaft machen.

1. *Brix, A. F.*, Lehrbuch der Statik fester Körper. Berlin, 1849.
2. *Broch, O. J.*, Lehrbuch der Mechanik. Berlin und Christiania, 1854.
3. *Burg, A.*, Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre. 2. A. Wien, 1849.
4. *Delaunay, Ch.*, Cours de Mécanique rationelle. 2. éd. Paris, 1857.
5. *Duhamel*, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch v. Dr. *O. Schlömilch*. 2. A. Leipzig, 1858.
6. *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von *Clebsch*. Berlin, 1866.
7. *Jolly, Ph.*, Prinzipien der Mechanik. Stuttgart, 1852.
8. *Möbius, A. F.*, Lehrbuch der Statik. Leipzig, 1837.
9. *Poinsot, L.*, Eléments de statique. 9. éd. Paris, 1848.
10. *Poisson, S. D.*, Traité de Mécanique. 2. éd. Paris, 1833.

11. *Redtenbacher*, Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues. Mannheim, 1852.

12. *Jullien, M.*, Problèmes de Mécanique rationelle. Paris, 1855.

13. *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig, 1870.

Des geschichtlichen Interesses wegen sei es jedoch gestattet, die Autoren und Quellen vorzuführen, von denen die verschiedenen wichtigsten Lehren zuerst vorgetragen sind. Daran schliessen wir dann eine Angabe der Litteratur der neueren Gegenstände, besonders der Lehren über Erhaltung der Rotations- und Schwingungsebene, die in neuerer Zeit durch den *Foucault'schen* Versuch die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sowie über die Bestimmungen von  $g$  und der Dichtigkeit der Erde.

Zum ersten Kapitel bemerken wir, dass die Fallgesetze von *Galilei* erkannt und in seinen:

„Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed i movimenti locali. Leiden, 1638.“

vollständig vorgetragen sind.

Die allgemeinen Folgerungen aus diesen Gesetzen zog zuerst *Isaac Newton*. Er legte sie in seinem Werke:

„Philosophiae naturalis principia mathematica. Lond., 1687.“

der Behandlung der Lehre von den Bewegungen und Kräften zu Grunde. Die drei Prinzipien, welche er anwandte, sind

1) das Prinzip der Trägheit, nur äussere Kräfte ändern den Bewegungszustand eines Körpers,

2) dass die Aenderung der Bewegung proportional sei der wirkenden Kraft,

3) das von uns §. 14 erläuterte Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Unsere im §. 14 aus der Gleichung für die Bewegung einer constant wirkenden Kraft abgeleiteten Gleichungen  $Mv = Pt$  und  $\frac{1}{2} Mv^2 = Pt$ , wurden die erstere von *Cartesius* in seinen *Principiis philosophiae* abgeleitet und dabei das Produkt  $Mv$  als das Maass der bewegenden Kraft aufgestellt; die zweite entwickelte *Leibnitz* und glaubte seinerseits das Produkt  $Mv^2$  als Maass der bewegenden Kraft dem *Cartesischen* gegenüberstellen zu müssen:

„Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum. Acta eruditorum. Leipzig, 1686, März.“

Daran knüpfte sich ein langer Streit, der vorzugsweise in den *Actis eruditorum* geführt wurde.

*D'Alembert* wies dann 1743 in seinem *Traité de dynamique* nach, wie der ganze Streit nur ein Wortstreit sei und durch eine präzisere Begriffsfassung erledigt werde.

Die im zweiten Kapitel vorgetragenen Sätze über die statischen Momente und den Schwerpunkt rühren ursprünglich schon von *Archimedes* her:

„*Archimedes* von Syracus vorhandene Werke aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen versehen von *Ernst Nizze*. Stralsund, 1824.“

Theoretische Beweise für das Hebelgesetz gaben zuerst *Cartesius* und *Newton*, ersterer im *Tractatus de mechanica* in den *opusculis postumis* Amstellod. 1701. Letzterer in den *Principiis* liber I. *Leges motus*, lex III.

Die Theorie der Wage wurde zuerst vollständig entwickelt von *Leonhard Euler* in den *Commentariis* der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg. Tom. X.

Die Pendelgesetze wurden zum Theil schon von *Galilei* entwickelt, nämlich, dass ein Pendel von gleicher Länge in gleichen Zeiten ihre Schwingungen vollführt, auch wenn die Gewichte ungleich sind, und dass bei ungleich langen Pendellängen sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

*Huyghens* baute dann in seinem Werke:

„*Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris, 1673.“

die Theorie weiter aus und fügte die Sätze hinzu, dass nur unendlich kleine Schwingungen genau isochron sind, und dass die Dauer eines Hin- und Herganges

des Pendels sich zur Dauer des freien Falles durch die doppelte Pendellänge verhalte wie die Peripherien eines Kreises zu seinem Durchmesser, also

$$t : 2 \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi : 1,$$

woraus dann die Zeitdauer einer Schwingung, wie wir sie gefasst haben, die einmalige Zurücklegung des Bogens hervorgeht.

Von *Huyghens* rührt die Unterscheidung des einfachen und zusammengesetzten Pendels und die Zurückführung des letztern auf das erstere, wie wir sie vorge tragen haben.

Die erste Bestimmung von  $g$  mittels des Pendels machte *Huyghens*, er fand  $g = 15$  Fuss und 1 Zoll.

Die von uns mitgetheilte Methode von *Borda* befindet sich in „Base du Système Métrique etc. redigée par M. Delambre. Tome III. pag. 337. Paris, 1810.“

und mit Berücksichtigung des Gewichtes des Fadens

„Biot et Arago: Recueil d'observations géodésiques astronomiques et physiques exécutées par Ordre du Bureau des Longitudes. Paris, 1821.“

Die zweite Methode wurde vorgeschlagen von *Bohnenberger* in seiner *Astronomie*. Tübingen, 1811.

Die Ausführung von *Capt. Kater* ist beschrieben

„Philosophical transactions of the Royal Society of London for the year 1818, p. 33 ff.“

Die Gesetze der Centrifugalkraft entwickelte *Huyghens* zuerst a. a. O., und ausführlicher finden sie sich mit Beweisen in den opusculis postumis, Leyden, 1703, in einer Abhandlung de vi centrifuga, p. 401 sq.

Auf die Erhaltung der Rotationsebene machte *Bohnenberger* bei Bekanntmachung seines Apparates aufmerksam. *Gilbert*, Annalen, Bd. 60, p. 60.

In neuerer Zeit ist die Litteratur über diesen Gegenstand sehr bedeutend angeschwollen, seit *Foucault* diese Eigenschaft der rotirenden Körper zum Beweise der Axendrehung der Erde vorschlug. Man sehe unter andern ausser in den Werken über Mechanik, über die freien Axen

*Poinsot*, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouville Journal de mathématiques 1851. (*Poinsot*, neue Theorie der Drehung der Körper, übersetzt von *Schellbach*. Berlin, 1851.)

*L. Foucault*, Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixeté du plan de rotation. Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. XXXV. p. 421. Paris 1852. Ferner C. R. XXXV. p. 424, p. 602.

*Person*, L'appareil de *Bohnenberger* peut servir à constater la rotation de la terre. C. R. XXXV. p. 417, 549 und 753.

*J. Plücker*, Ueber die Fessel'sche Rotationsmaschine, Poggendorff's Annalen Bd. 90.

*J. C. Poggendorff*, Noch ein Wort über die Fessel'sche Rotationsmaschine. Poggend. Annal. Bd. 90, p. 348. (Die von uns mitgetheilte Erklärung.)

*G. Magnus*, Verbesserte Construction eines Apparates zur Erläuterung verschiedener Erscheinungen bei rotirenden Körpern. Poggend. Annal. Bd. 91.

Der *Foucault*'sche Pendelversuch wurde zuerst mitgetheilt in der Abhandlung von *Foucault*:

*L. Foucault*, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. C. R. XXXII. p. 135, auch Poggend. Ann. 82.

Seitdem sind eine Menge von Mittheilungen erschienen, welche theils Wiederholungen des Versuches darstellen, theils dazu dienen, das Gesetz, nach welchem sich die Dauer der Drehung unter verschiedenen Breiten ändert, zu bestimmen. Die von uns gegebene Ableitung fällt im Wesentlichen mit der von *Marignac*, Archive des sciences physiques et naturelles. Tome XVII. p. 116 zusammen.

Eine vollständige Zusammenstellung der Litteratur über diesen und den vorigen Gegenstand findet sich in den Berichten über die Fortschritte der Physik dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin in den Jahren 1850, 1851, Berlin 1853, 1852, Berlin 1855, 1853, Berlin 1856 u. s. f., in dem Abschnitt über Mechanik, *Foucault*'sche Versuche.

Die im dritten Kapitel vorgetragenen Lehren über die allgemeine Attraction hat *Newton* in dem bereits erwähnten Werke Principia etc. entwickelt.

Die drei *Kepler'schen* Gesetze, auf welche *Newton* seine Entwicklungen stützte, theilte *Kepler* mit, die beiden ersten 1609 in seiner Astronomia nova αλιολογητός, sive physica coelestis tradita commentariis de motu stellae Martis Pragae 1609; das dritte, welches er am 15. Mai 1618 auffand, in Epitome astronomiae Copernicanae, Lincii 1618.

Die Verschiedenheit von  $g$  an verschiedenen Orten der Erde behauptete *Newton* zuerst, und der französische Astronom *Richer* zeigte 1670, dass das Sekundenpendel in Cayenne unter 5° N. B. 1,25 Linien kürzer sei als in Paris.

Die genauern Messungen von  $g$  sind zusammengestellt in *Gehler's* Physikalischem Wörterbuch 2. Auflage von *Brandes*, *Munk*, *Pfaff*, *Littrow*, *Gmelin*, *Horner*. Bd. III. Artikel Erde p. 891 ff.

*Cavendish*, Versuche über die Dichtigkeit der Erde sind mitgetheilt in den Philosophical Transactions LXXXVIII, auch Gilbert Annalen Bd. II.

*Reich*, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mit der Drehwage. Freiberg, 1838.

*Baily*, Experiments with the Torsion Rod for determining the mean density of the Earth. Vol. XIV. of the Mem. of the Royal Astron. Society. London, 1843. Unter demselben Titel auch besonders erschienen.

*Reich*, Abhandlungen der mathematisch-physik. Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1. Bd. 1852.

*Muskelyne* und *Hutton*, Philosoph. Transact. 1775 und 1778.

*Airy*, Philosoph. Transact. 1856.

Die Erklärung von Ebbe und Fluth gab zuerst *Newton* in seinen Principiis phil. nat. lib. I. prop. 66 und lib. III. prop. 24. 36. 37.

Vollständig ausgeführt ist sie von *Laplace*, Mécanique céleste livre IV. u. XIII.

Man sehe *Gehler's* Physik. Wörterbuch 2. Auflage Bd. III. Artikel „Ebbe und Fluth.“

## Zweiter Abschnitt.

### Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen.

---

#### Erstes Kapitel.

#### Von den festen Körpern.

#### §. 47.

**Beschaffenheit der Materie.** Bei unsern bisherigen Untersuchungen über die Wirkung von Kräften auf die Körper haben wir die letztern als absolut starr angesehen, indem wir nur die Bewegungen ins Auge gefasst haben, welche die Körper als solche unter der Wirkung der Kräfte annehmen. Untersuchen wir die Einwirkung der Kräfte auf die Körper aber genauer, so finden wir auch dann, wenn die Körper keine Bewegung annehmen, dass dieselben durch die auf sie einwirkenden Kräfte Veränderungen erfahren. Wir sehen, dass die festen Körper verlängert oder verkürzt und gebogen werden können, wir sehen Bewegungen in einer Flüssigkeitsmasse eintreten, kurz wir sehen, dass die einzelnen Theile eines Körpers gegen einander verschiebbar sind.

Die Erscheinungen dieser Art, das übersieht man unmittelbar, werden ausser von den äussern wirksamen Kräften wesentlich bedingt sein von der innern Structur der Körper, oder was dasselbe ist, von der innern Structur dessen, was die Körper bildet, der Materie. Ehe wir deshalb zur Untersuchung dieser Erscheinungen übergehen, wird es vorthellhaft sein zu untersuchen, ob wir nicht schon von anderer Seite her über diese Structur der Materie einigen Aufschluss erhalten können, der uns die Untersuchung der an den Körpern beobachteten physikalischen Erscheinungen erleichtert.

Die erste Erfahrung, welche wir in Betreff der Structur der Körper machen, ist die Theilbarkeit derselben: es gibt keinen Körper, der nicht in Theile zerlegt, der nicht zerstückt werden kann. Diese Theilbarkeit geht so weit, dass es nicht möglich ist, eine Grenze derselben zu erreichen oder zu bestimmen. Um sich davon zu überzeugen, genügt es an ein Beispiel zu erinnern; ein wenig Moschus verbreitet in dem Raume, in dem es aufbewahrt wird, einen sehr starken Geruch, weil es fortdauernd in demselben einen Theil seiner Substanz zerstreut; dennoch kann es lange Zeit in dem Raume gelassen werden, ohne dass sich sein Gewicht vermindert, denn die Theilchen, welche es ausstösst, sind so klein, dass sie sich jeder Messung entziehen. Bei dieser grossen Theilbarkeit kann man zwei Annahmen über die Constitution der Materie machen; man kann annehmen, die Materie sei bis ins Unendliche theilbar, oder man komme bei fortgesetzter Theilung

schliesslich auf Theilchen, welche nicht weiter getheilt werden können, auf Atome. Macht man die letztere Annahme, so muss die Materie aus diesen kleinsten Theilchen aufgebaut sein, die im Innern als solche existiren, sie muss ein Aggregat dieser einzelnen Theile, dieser Atome sein, die in mehr oder weniger grossen Abständen neben einander gelagert sind, ohne sich zu berühren. die sich anziehen oder abstossen können, welche sich einander festhalten, wie in den festen Körpern, oder gegen einander beweglich bleiben, wie in den flüssigen oder gasförmigen Körpern.

Macht man dagegen die erstere Annahme, ist die Materie, wenn auch nur ideell, bis ins Unendliche theilbar, so können in der Materie keine discreten Theilchen als solche existiren, sondern jedes Theilchen ist nur ein Theil des Ganzen. Daraus folgt dann, dass nach dieser Anschauungsweise die Materie den Raum eines Körpers continuirlich erfüllen muss, natürlich Spalten und Poren in demselben ausgenommen. Denn sobald man innerhalb der Materie eine Discontinuität zugibt, hat eben das für sich bestehende Theilchen eine selbständige Existenz, es ist der Baustein, aus welchem die Materie zusammengesetzt ist.

Schon die hierin gegebene Fragestellung beweist, dass es sich hier um die Wahl einer von zwei möglichen Hypothesen über die Structur der Materie handelt, somit auch, dass wir bei der Entscheidung der Frage mit aller der Vorsicht verfahren müssen, welche bei der Bildung von Hypothesen angewandt werden muss. Wir haben nach den in der Einleitung aufgestellten Prinzipien die Hypothese zu wählen, welche die von der Structur der Materie abhängigen Erscheinungen am einfachsten und ohne weitere Hülfs-hypothesen verständlich macht; die Erfahrungen der Chemie sind es, welche wir zunächst ins Auge zu fassen haben.

Wir können diese Erfahrungen in folgenden wenigen Sätzen zusammenfassen.

1. Zwei verschiedene Materien können sich zu einer dritten neuen, deren Eigenschaften von denen ihrer Bestandtheile wesentlich verschieden sind, verbinden; so der brennbare Wasserstoff und der die Verbrennung unterhaltende Sauerstoff zu dem nicht brennbaren Wasser; das magnetische Metall Eisen und der brennbare Schwefel zu dem nicht magnetischen, nicht metallischen Schwefeleisen.
2. Bei dem Uebergange des Gemenges zweier Materien in die Verbindung findet stets eine Aenderung des Wärmezustandes, in den meisten Fällen eine Wärmeentwicklung statt. Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in passenden Verhältnissen gemischt unter heftiger Explosion, und die Flamme des so mit Sauerstoff gemischten Wasserstoffs, des Knallgases, erzeugt eine der höchsten erreichbaren Temperaturen. Bei der Herstellung des Schwefeleisens kommt die ganze Masse in ein lebhaftes Glühen.
3. Die Mengenverhältnisse der einzelnen Materien, welche in eine Verbindung eingehen, sind immer dieselben. Wasserstoff und Sauerstoff treten zu Wasser immer nur in dem Verhältniss zusammen, dass auf je ein Gewichtstheil Wasserstoff acht Gewichtstheile Sauerstoff kommen, Schwefel und Eisen zu Schwefeleisen nur so, dass zu je einem Gewichtstheil Schwefel 1,75 Gewichtstheil Eisen treten, und so in allen Fällen.
4. Zwei Materien können sich in verschiedenen Verhältnissen zu neuen Materien verbinden; so kann Wasserstoff mit Sauerstoff ausser zu Wasser

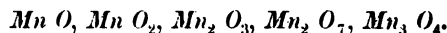


noch zu einem zweiten Körper zusammentreten, zu Wasserstoffdioxid; die Menge des Sauerstoffs, die dann zum Wasserstoff tritt, ist gerade die doppelte der im Wasser vorhandenen, auf je ein Gewichtstheil Wasserstoff kommen 16 Gewichtstheile Sauerstoff. Eine zahlreiche Reihe von Verbindungen bildet z. B. der Stickstoff mit dem Sauerstoff, die Verbindungen sind Stickoxydul, Stickoxyd, Salpetrigsäureanhydrid, Stickstofftetroxyd und Salpetersäureanhydrid. Die Gewichtsmengen Sauerstoff, welche zu je einem Gewicht Stickstoff getreten, verhalten sich in diesen Verbindungen der Reihe nach wie 1:2:3:4:5. Im Stickoxydul tritt zur Gewichtseinheit Stickstoff  $\frac{8}{14}$  Gewicht Sauerstoff, in den folgenden das Doppelte, Dreifache und so fort. Aehnlich ist es bei andern Körpern; so liefert das Metall Mangan eine Reihe von Verbindungen, dieselben enthalten:

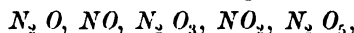
- 1) Manganoxydul . . auf 1 Gewichtstheil Mangan  $\frac{8}{27,5}$  · Sauerstoff
- 2) Mangansuperoxyd „ 1 „ „  $2 \cdot \frac{8}{27,5}$  „
- 3) Mangansesquioxyd „ 2 „ „  $3 \cdot \frac{8}{27,5}$  „
- 4) Uebermangansäure „ 2 „ „  $7 \cdot \frac{8}{27,5}$  „
- 5) Manganoxyduloxyd „ 3 „ „  $4 \cdot \frac{8}{27,5}$  „

Diese und eine Menge ähnlicher Erfahrungen fasst die Chemie unter dem Gesetze der multiplen Proportionen zusammen, wonach verschiedene Verbindungen je zweier Materien dadurch entstehen, dass die einzelnen Bestandtheile nach bestimmten Gewichtsmengen oder nach einfachen Vielfachen dieser Gewichtsmengen zusammentreten.

Bezeichnen wir, um die Sauerstoffmengen und die Mangannengen, welche in den verschiedenen Verbindungen zusammentreten, durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken, 55 Gewichtseinheiten Mangan mit  $M$  und 16 Gewichtseinheiten Sauerstoff mit  $O$ , so können wir die sämtlichen Manganverbindungen darstellen durch



Ebenso können wir auch die Verbindungen des Stickstoffs mit dem Sauerstoff darstellen; bezeichnen wir die Gewichtsmenge 14 des Stickstoffs mit  $N$ , so sind die fünf Stickstoffverbindungen



worin auch hier das Zeichen  $O$  die Gewichtsmenge 16 Sauerstoff bezeichnet. Schliesslich lassen sich ebenso die Wasserstoffverbindungen als  $H_2 O$  und  $H_2 O_2$  bezeichnen, wenn die Gewichtsmenge 1 Wasserstoff mit  $H$  bezeichnet wird.

Bezeichnen wir ganz allgemein jene Gewichtsmenge irgend einer Materie, welche selbst oder von der ein Vielfaches mit 16 Gewichtstheilen Sauerstoff oder mit einem Vielfachen derselben zusammentritt, mit  $A$ , so können wir jede Sauerstoffverbindung darstellen durch die Formel



worin  $m$  und  $n$  stets ganze und zwar nicht grosse Zahlen sind.

Diese Gewichtsmengen  $A$  sind die Mischungsgewichte der einzelnen Materien in Bezug auf Sauerstoff; die Chemie bezeichnet dieselben durch die Anfangsbuchstaben der lateinischen Namen der Elemente.

i. Die so bestimmten Mischungsgewichte haben aber noch eine weitere Bedeutung. Die verschiedenen Materien verbinden sich nicht nur mit dem Sauerstoff, sondern auch unter einander nach den beiden angegebenen Gesetzen, dem Gesetze der festen Verhältnisse und dem der multiplen Proportionen. Die Untersuchung der Gewichtsmengen, nach welchen die verschiedenen Materien zusammentreten, zeigt dann, dass dieselben Zahlen, welche die Mischungsgewichte für die Sauerstoffverbindungen angeben, auch gelten für die Verbindung der Körper unter einander. Bedeutet  $S$  die Gewichtsmenge 32 Schwefel, so sind die Verbindungen des Schwefels mit Sauerstoff wieder  $mS + nO$ . Die Verbindungen des Schwefels mit Wasserstoff sind dann  $mS + nH$ , mit Mangan  $mS + nMn$ . Bedeutet das Zeichen  $Cl$  die Gewichtsmenge 35,5 Chlor, so sind die Sauerstoffverbindungen des Chlors gegeben durch  $mCl + nO$ . Die Verbindung des Chlors mit dem Wasserstoff ist dann  $H_2Cl_2$ , die Verbindungen des Chlors mit Schwefel wieder  $mCl + nS$ , die des Chlors mit Mangan  $mCl + nMn$ , wo immer  $m$  und  $n$  ganze nicht grosse Zahlen sind. Kurz sind  $A$  und  $B$  die Mischungsgewichte irgend zweier Materien für die Sauerstoffverbindungen, so sind immer mit derselben Bedeutung von  $m$  und  $n$ ,  $mA + nB$  die Verbindungen dieser beiden Körper. Auch dann, wenn 3, 4 und mehrere Elemente zusammentreten, bleibt immer dieselbe Beziehung bestehen; sind  $A, B, C, D$  die Mischungsgewichte von vier Materien, so sind alle ihre Verbindungen dargestellt durch

$$m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C + q \cdot D,$$

worin  $m, n, p, q$  ganze nicht grosse Zahlen sind.

Gehen wir nun dazu über, diese Erfahrungen der Chemie mit den beiden möglichen Hypothesen über die Structur der Materie zusammenzustellen. Jene derselben haben wir als die für uns wahrscheinliche zu wählen, welche die oben experimentell gefundenen Gesetze am ungezwungensten aus sich entwickeln lässt, welche, einmal aufgestellt, dieselben als nothwendige Folgerungen erkennen lässt.

Die Wahl kann uns in diesem Falle nicht schwer fallen. Ist die Materie etwas den Raum stetig Erfüllendes und nicht ein Aggregat selbständig existirender in gewissen Abständen neben einander gelagerter Atome, so ist der Vorgang der Verbindung selbst ein höchst dunkler. Die einzige Möglichkeit ist dann, dass die Materien sich gegenseitig durchdringen; nehmen wir das aber an, warum durchdringen sich die Materien nur in ganz bestimmten, unveränderlichen Verhältnissen? Wir sehen z. B., dass die Gewichtsmenge 14 Stickstoff mit 8, 16, 24 . . Sauerstoff sich verbinden kann, warum also diese Menge Stickstoff mehr wie 8 Sauerstoff aufnehmen kann, warum nun gerade nur die doppelte, dreifache etc. Menge? Besonders aber warum durchdringen sich die verschiedenen Materien gerade in dem Verhältniss, in welchem sie mit dem Sauerstoff zusammentreten? Alle diese Gesetze folgen aus dieser Hypothese über die Constitution der Materie nicht, jedes derselben verlangt, um mit derselben in Einklang gebracht zu werden, eine neue der Materie beizulegende Eigenschaft; so die Eigenschaft,

das eine Materie in die andere eindringen kann, die Eigenschaft, durch eine ganz bestimmte Menge eingedrungener Materie, aber auch durch die doppelte, dreifache Menge gesättigt zu werden u. s. f.; kurz man sieht, jede dieser Tatsachen bedarf zu ihrem Verständniss eine besondere Eigenschaft der Materie, die wir ihr aber lediglich in Folge der beobachteten Thatsache beilegen. Das aber ist gerade das Charakteristische einer schlechten Hypothese, dass sie allein nicht hinreicht, die mit ihr in Verbindung stehenden Thatsachen zu erklären, dass jede neue Thatsache eine neue Hülfs-hypothese verlangt.

Wie anders zeigt sich dagegen die zweite Hypothese; nehmen wir an, dass die Materie aus Atomen bestehe, so ergeben sich die beobachteten Thatsachen und die aus ihnen abgeleiteten Sätze als so unmittelbare Folgen, dass man sofort diese Erscheinungen als im Wesen der Materie begründet erkennt.

Zunächst ergibt sich unmittelbar, worin die Verbindung zweier Körper besteht, und worin sie sich von dem Gemenge unterscheidet. In dem Gemenge sind die einzelnen Materien ungeändert, jede mit ihren charakteristischen Eigenschaften enthalten, die atomistische Hypothese sagt uns, dass der Grund hier ist, dass in einem solchen Gemenge die Atome der einzelnen Materien neben einander, jedes für sich existirend, bestehen. Verwandelt sich das Gemenge in eine Verbindung, so treten die Atome der einzelnen Materien zusammen, sie lagern sich fest an einander und existiren nur mehr als verbundene Moleküle. Im Wasser existirt nicht mehr das Wasserstoffatom oder das Sauerstoffatom, sondern jedes Sauerstoffatom ist mit zwei Wasserstoffatomen unauflöslich verbunden, und die Verbindung dieser Atome bildet das Atom Wasser.

1) Im Augenblicke nun, wo diese Atome zusammentreten, muss jedenfalls eine sehr lebhafte Bewegung derselben eintreten, indem Atom an Atom anprallt und nun die Atome als Atomgruppen oder Moleküle weiter existiren; wir sehen die lebhafte Bewegung in den Wärmeercheinungen, welche jede chemische Verbindung begleitet.

2) Da in der Verbindung die Atome der einzelnen Materien nicht mehr als solche existiren, so müssen die Eigenschaften der Verbindungen ganz andere sein als diejenigen der Materien, aus welchen sie sich bilden. Denn da die Materie aus den Atomen aufgebaut ist, sind auch die Atome die Träger der Eigenschaften, die wir an der Materie wahrnehmen; die Atome der Verbindung sind aber ganz andere als jene der getrennten Materien, es müssen deshalb auch ihre Eigenschaften und somit auch die der Verbindung ganz andere sein als die der Bestandtheile.

3) Die Atome der einzelnen Materien haben eine unveränderliche Grösse und ein festbestimmtes Gewicht, welches für die verschiedenen Materien verschieden ist. Wenn nun in einer Verbindung je ein Atom der einen Materie sich an je ein Atom der andern anlegt, oder wenn sich je  $m$  Atome der einen an je  $n$  Atome der andern anlegen, so ist damit auch das Verhältniss der Gewichte, in welchem die Materien in eine Verbindung eingehen, ein ganz festes und bestimmtes; es muss entweder das Verhältniss der Gewichte der einzelnen Atome selbst, oder das Verhältniss der Gewichte von  $m$  Atomen der einen zu  $n$  Atomen der andern Materie sein. Das experimentell bewiesene Gesetz der Verbindung nach festen Verhältnissen ist

der thatsächliche Ausdruck dieser aus der Structur der Materie gezogenen Folgerungen.

4) Ebenso folgt unmittelbar das Gesetz der multiplen Proportionen. In einer Verbindung können die Materien Atom für Atom zusammentreten, es können aber auch mit je einem Atom der einen 2, 3, 4 ..  $n$  Atome der andern zusammentreten oder auch 2, 3 ...  $m$  Atome der einen mit  $n$  Atomen der andern, wo aber  $m$  und  $n$ , da die Atome nicht theilbar sind, immer ganze Zahlen sein müssen. Das ist aber das Gesetz der multiplen Proportionen, nach dem jede Verbindung zweier Materien nach Vielfachen der Mischungsgewichte derselben erfolgt.

5) Sind aber die Mengenverhältnisse, in welchen die Materien zusammentreten, die Gewichtsverhältnisse ihrer Atome, so folgt schliesslich auch, dass dieselben Verhältnisszahlen, die für die Verbindungen einer Gruppe maassgebend sind, es für alle sein müssen. Denn sind  $A$  und  $B$  die Gewichtsmengen zweier Materien, welche sich mit der Menge  $C$  einer dritten zu den Verbindungen  $AC$  und  $BC$  verbinden, so können, da  $A$  und  $B$  uns die Gewichte der Atome dieser beiden Materien repräsentiren, sie selbst auch nur in den Verhältnissen  $mA$  und  $nB$  zusammentreten. Das fünfte der vorhin abgeleiteten Gesetze zeigt, dass es in der That sich so verhält.

Schon diese Erfahrungen zeigen also die bedeutende Ueberlegenheit der atomistischen Hypothese; sie zeigen, dass dieselbe jene Eigenschaften besitzt, welche wir von einer Hypothese fordern, wenn wir sie in den Naturwissenschaften zulassen, nämlich dass sie einen einfachen obersten Grundsatz bilde, aus welchem die mit ihr verknüpften Thatsachen unmittelbar folgen.

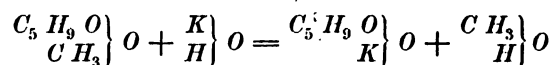
Die Erscheinungen der chemischen Verbindungen sind indess immer noch ein einseitiges Gebiet, und es genügt nicht, um eine Hypothese zuzulassen, welche eine so allgemeine Bedeutung hat, dass sie sich auf einem solchen bewähre, sie muss sich auch auf andern Gebieten, die von der Beschaffenheit der Materie bedingt sind, als ebenso stichhaltig bewähren. Wenden wir uns zu solchen, und zwar zunächst zu den Erscheinungen der chemischen Zersetzung.

Wenn wir einen zusammengesetzten Körper, z. B. Wasser, chemisch zerlegen, so erhalten wir aus ihm immer die Bestandtheile, welche wir zu seiner Zusammensetzung verwandten, also immer Sauerstoff und Wasserstoff genau in den zur Zusammensetzung des Wassers erforderlichen Gewichtsverhältnissen, immer auf einen Gewichtstheil Wasserstoff acht Gewichtstheile Sauerstoff. Diese Thatsache ist nur verständlich, wenn wir das Wasser nicht als einen Körper betrachten, aus welchem unter gewissen Umständen Wasserstoff und Sauerstoff entstehen kann, sondern wenn wir annehmen, dass diese Bestandtheile wirklich als solche und zwar in den angegebenen Gewichtsverhältnissen im Wasser vorhanden sind. Dann aber müssen diese beiden Stoffe, wenn auch noch so innig verbunden, so doch räumlich getrennt sein. Wenn wir nun die Theilung des Wassers immer weiter fortgesetzt denken, so müssen wir schliesslich auf Wassertheilchen kommen, deren nochmalige Theilung die Bestandtheile des Wassers von einander trennt, deren nochmalige Zerlegung also bewirkt, dass die getheilte Substanz aufhört, als solche, wie sie war, zu existiren. Diese letzten Theilchen sind es, die wir Atome nennen.

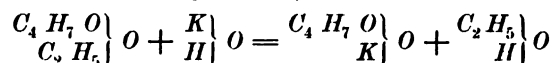
Man sieht, dass wir den Gesetzen der chemischen Zerlegung zu Folge auf das Dasein der Atome geführt wurden, durch den aus jenen Gesetzen gezogenen Schluss, dass in den Verbindungen die Bestandtheile, wenn auch nicht mehr isolirt, so doch noch als solche existiren. Dieser Schluss, der vielleicht auf den ersten Blick nicht ganz exakt erscheinen mag, wird durch einige andere chemische Thatsachen zur unabweisbaren Nothwendigkeit.

Die organische Chemie lehrt uns verschiedene Körper kennen, welche bei genau gleicher Zusammensetzung sich doch ganz verschieden verhalten, es sind die sogenannten isomeren Körper im weitesten Sinne des Wortes. Unter diesen isomeren Körpern gibt es eine Gruppe, die metameren, welche bei ganz identischer elementarer Zusammensetzung unter ganz gleicher Behandlungsweise dennoch ganz verschiedene Zersetzungsprodukte liefern.

So gibt es z. B. zwei Verbindungen, welche nach der Formel  $C_6 H_{12} O_2$  zusammengesetzt sind, das valeriansaure Methyl, welches aus der Einwirkung von Valeriansäure auf Holzgeist entsteht, und das buttersaure Aethyl, entstanden aus der Einwirkung von Buttersäure auf Weingeist; in beiden sind mit 72 Gewichtstheilen Kohlenstoff 12 Gewichtstheile Wasserstoff und 32 Gewichtstheile Sauerstoff verbunden. Beim Einwirken von Actzkali auf diese beiden, genau aus den gleichen Elementen bestehenden Substanzen ist das Resultat aber sehr verschieden; die eine liefert nach dem Schema



valeriansaures Kali und Methylalkohol, die andere nach dem Schema



buttersaures Kali und Aethylalkohol.

Aus einem Körper von genau gleicher Zusammensetzung treten also bei genau gleicher Behandlung ganz verschiedene Körper hervor. Diese Thatsache ist unbegreiflich, wenn wir nicht annehmen, dass in der auf verschiedenen Wegen dargestellten Verbindung  $C_6 H_{12} O_2$  bereits die Bestandtheile der Körper, in die sie zerfallen kann, also einmal die Atomgruppen  $C_5 H_9 O$  und  $C H_3$ , das anderemal die Atomgruppen  $C_4 H_7 O$  und  $C_2 H_5$ , wirklich als solche vorhanden sind. Dann aber müssen sie räumlich getrennt sein; und eine fortgesetzte Theilung muss auf Elemente führen, deren weitere Zertheilung die Substanz in ihre Bestandtheile auflöst, auf Atome.

Diese Deduction<sup>1)</sup> aus den Gesetzen der Zerlegung der Körper bezieht sich allerdings zunächst nur auf die zusammengesetzten Körper, wir werden sie aber auf die sogenannten einfachen Körper ausdehnen müssen. Denn zunächst sind wir nicht berechtigt, diese Körper, welche uns zu zerlegen noch nicht gelungen ist, wirklich als einfache Körper zu betrachten, dann aber besteht zwischen ihnen und den nachweisbar zusammengesetzten Substanzen nicht ein solcher Unterschied, dass wir annehmen dürfen, sie seien von wesentlich verschiedener Natur. Zudem aber lehrt uns auch über diese die Chemie Thatsachen kennen, welche nicht zu verstehen sind ohne die Annahme von Atomen.

<sup>1)</sup> Kopp, Lehrbuch der physikalischen u. theoretischen Chemie als 1. Bd. des Lehrb. d. Chemie v. Graham-Otto. 2. Aufl.

Die Chemie zeigt uns nämlich eine Reihe von einfachen Körpern in verschiedenen, den sogenannten allotropen Modificationen, in denen dieselben Körper ganz verschiedene Eigenschaften haben, ohne dass zu ihnen etwas hinzugefügt oder etwas von ihnen fortgenommen wäre. So kommt die Kohle krystallinisch in zwei ganz verschiedenen Formen vor, als Diamant und als Graphit; beide Formen sind reiner Kohlenstoff, denn die Verbrennung gleicher Gewichtsmengen beider liefert genau die gleiche Menge Kohlensäure. Trotzdem sind die beiden Körper ganz und gar verschieden. Der Diamant ein klarer durchsichtiger Körper, härter wie irgend ein anderer, der Graphit schwarz undurchsichtig und so weich, dass er auf dem Papiere abfärbt; es ist das Material unserer Bleistifte. Der Schwefel ist in einer ganzen Reihe verschiedener Formen bekannt<sup>1)</sup>, er kommt vor als Rhombenoktaeder krystallisirt, und in klinorhombischen Prismen, bald ist er hart, bald weich wie Kautschuk, bald ist er in Schwefelkohlenstoff löslich, bald unlöslich, der eine ist hellgelb, der andere durchsichtig und braun. Es ist in allen Formen nichts als Schwefel, denn verbrennen wir ihn, in welcher Form es sei, wir bekommen aus allen Formen nichts als schwefeliche Säure, und bei Verbrennung gleicher Gewichte immer dieselbe Menge.

Aehnliches gilt vom Selen, welches als metallisches und als glasartiges, vom Arsen, welches als metallisches und graphitartiges vorkommt, vom Phosphor u. s. f.

In der Natur findet sich der Schwefel in Rhombenoktaedern krystallisirt, und in diese Form lassen sich alle übrigen durch gewisse Manipulationen zurückführen. Bei dieser Ueberführung zeigt sich aber dann im Augenblicke der Verwandlung eine plötzliche spontane Erwärmung, wie Regnault gezeigt hat<sup>2)</sup>. Aus dem metallischen Selen erhält man das amorphe glasartige, indem man es schmilzt und dann tropfenweise in kaltes Wasser fallen lässt oder auf einem kalten Bleche ausgiesst, überhaupt es rasch erkaltet. Erwärmt man dann das amorphe Selen auf 94° C., so geht es plötzlich in metallisches über. Dabei zeigt es dann eine sehr beträchtliche Wärmeentwicklung, die, wie Hittorf<sup>3)</sup> zuerst gezeigt hat, das Selen auf eine Temperatur von über 200° erwärmt. Gleichzeitig tritt dabei eine ganz beträchtliche Verdichtung ein, indem das specifische Gewicht von 4,28 auf 4,80 steigt.

Diese Thatsachen führen uns unabweislich darauf, auch für die einfachen Körper die atomistische Hypothese zu wählen; denn ist die Materie ein Continuum, so können wir es absolut nicht verstehen, wie ein und dieselbe Materie sich verschieden verhalten kann; besteht sie aber aus Atomen, so sind die verschiedenen Zustände leicht erklärlich. Die Atome müssen in den Körpern eine gewisse Gruppierung haben, und die physikalischen Eigenschaften, Durchsichtigkeit, Härte, Dichtigkeit werden nicht nur von der Beschaffenheit, sondern auch von der Gruppierung der Atome abhängen. Die allotropen Zustände sind dann nichts als verschiedene Lagerung der Atome.

Werden die Substanzen aus einer Modification in die andere übergeführt, so muss eine Bewegung der Atome eintreten, wir haben sie wahr-

<sup>1)</sup> Man sehe über diese verschiedenen Modificationen: *Graham-Otto*, Lehrb. der Chemie. Bd. II.

<sup>2)</sup> *Regnault*, Annales de chim. et de phys. III Sér. T. I.

<sup>3)</sup> *Hittorf*, Poggend. Ann. Bd. 84.

genommen in den Wärmeercheinungen, welche bei dieser Ueberführung sich zeigen.

Wir erhalten somit von der Chemie eine ganze Reihe von Thatsachen, welche von den beiden möglichen Hypothesen über die Structur der Materie die eine als durchaus unzulässig erkennen lassen. Wir sind dadurch jedenfalls berechtigt, unsern Untersuchungen über die an der Materie beobachteten physikalischen Erscheinungen die atomistische Hypothese zu Grunde zu legen. Dabei wird die Fruchtbarkeit dieser Hypothese erst recht hervortreten, wenn wir sehen, dass die verwickeltsten Erscheinungen im Lichte dieser Hypothese sich einfach und ungezwungen erklären lassen. Ja wir werden eine ganze Reihe von Erscheinungen finden, die sich ebenso wie die Isomerie und die Allotropie überhaupt nur verstehen lassen unter der Annahme, dass die Materie ein Aggregat discreter Theilchen ist, welche sich in Abständen von einander befinden, die mit gewissen genau messbaren Grössen, der Länge der Lichtwellen vergleichbar sind.

Ehe wir nun zur Besprechung der einzelnen Erscheinungen übergehen, werden wir noch die Frage zu beantworten haben, wie wir uns die Atome denn eigentlich zu denken haben. Die Erfahrung gibt uns darüber direkt nichts an; bei der Besprechung dieser Frage begeben wir uns ganz auf das Gebiet der Speculation, welche nur den Zweck haben kann, den scheinbaren Widerspruch, dass eine gegebene Menge Materie, das Atom untheilbar sein soll, zurückzuweisen.

Für die zusammengesetzten Körper konnten wir vorhin bereits den Begriff des Atomes feststellen, wir nannten die Atome solcher Körper jene Theilchen, welche als die letzten dieser Substanz anzusehen sind, deren weitere Theilung die Substanz in ihre Elemente zerfallen lässt. Für diese ist somit das Atom nicht etwas absolut untheilbares, sondern nur etwas relativ untheilbares, es ist also noch ein Theilchen, das eine, wenn auch äusserst kleine, so doch immerhin noch ideell messbare Ausdehnung hat, da in demselben die Atome der Bestandtheile räumlich getrennt sind.

Für die einfachen Körper, für jene, die wir chemisch nicht zerlegen können, liegt der Begriff des Atoms nicht so unmittelbar vor; indess dürften wir auf Grund der Erfahrungen über Isomerie und Allotropie ihn doch wohl ähnlich fassen. Wir werden nämlich vermuthen dürfen, dass die chemisch verschiedenen Elemente in der That nicht ebenso viele verschiedene Materien sind, dass es vielmehr überhaupt nur eine Materie gibt, und dass die verschiedenen Stoffe nur Modificationen dieser Materie sind. Das physische Atom, mit dem wir es überhaupt zu thun haben, ist dann auch für die einfachen Körper nicht etwas absolut untheilbares, sondern es ist auch noch der Theilung fähig, es ist indess das letzte Theilchen, auf welches wir bei der Theilung eines Stoffes gelangen, dessen weitere Theilung diesen Stoff nicht mehr existiren lässt. Aus solchen einzelnen Theilchen müssen wir die unserer Untersuchung unterworfenen Stoffe aufgebaut annehmen, zwischen diesen sind die Kräfte thätig, deren Wirkungen wir beobachten. Das hiernach definirte kleinste Theilchen der Materie ist also das letzte, welchem wir eine selbständige Existenz zuschreiben; die Chemie bezeichnet dieselbe als Moleküle, um anzudeuten, dass sie diese Theilchen noch wohl für theilbar hält. Eine solche Theilung nimmt dieselbe für die Moleküle der einfachen Stoffe noch an, wenn dieselben mit andern Stoffen in Verbindung

treten. So besteht nach den jetzigen Anschauungen das Molekül freien Wasserstoffs aus zwei Atomen, ebenso das Molekül Chlor. Verbinden sich die beiden, so spalten sich ihre Moleküle, und die Elemente treten Atom für Atom aneinander. Treten wir dieser Auffassung des Atoms bei, so gilt natürlich auch für dieses unsere vorige Definition des Atoms ganz ebenso, nur dass damit dem einzelnen Atom als solchem nicht immer mehr eine selbständige Existenz zukommt, dass auch bei einfachen Stoffen dieselben ebenso zu zwei oder mehr verbunden sein können, wie bei zusammengesetzten.

Von den so definirten Atomen und chemischen Molekülen können wir noch das physikalische Molekül unterscheiden, welches aus einer Zusammenlagerung mehrerer chemischer Moleküle bestehen kann, welches sich also zum chemischen Molekül verhält, wie dieses zum Atom. Diese physikalischen Moleküle würden dann die nähern Bestandtheile der einzelnen Körper bilden. Zu dieser Annahme führen uns hauptsächlich die allotropen Modificationen der einfachen Körper; denn auf diese Weise können wir uns am besten die vorhin erwähnte verschiedene Lagerung der Atome denken, welche die Verschiedenheit in den Eigenschaften der allotropen Modificationen bedingt. Das Atom und das chemische Molekül des Graphits muss dasselbe sein wie des Diamants, da wir in beiden chemisch denselben Körper haben; das physikalische Molekül des Graphits unterscheidet sich aber von dem des Diamanten, indem bei der einen dieser Formen der Kohle eine grössere oder geringere Zahl von Atomen zu einem Molekül vereinigt und in diesem Molekül dann verschieden gelagert sind.

Physikalisch sind wir hiermit an der Grenze angelangt, zu der wir durch inductorische Schlüsse kommen können, philosophisch ist der Begriff des Atoms und somit derjenige der Materie noch nicht erfasst. Denn dazu wäre die Frage noch zu erledigen: Wie ist denn nun das physikalische Atom weiter beschaffen, was entsteht, wenn wir es weiter zerlegen? Dass das Atom nach dem Vorigen selbst wieder, wenn ich so sagen darf, atomitisch gefasst werden muss, leuchtet ein; denn nur dann ist die Verschiedenheit der physikalischen Atome fassbar, wenn wir sie als Modificationen einer Materie ansehen. Ob aber dann die Grundlage der physikalischen Atome, das philosophische Atom, als etwas ausgedehntes, oder ob es als einfacher, materieller Punkt aufzufassen ist, das ist eine Frage, welche lediglich der Speculation angehört, die zu besprechen deshalb hier nicht der Ort ist<sup>1)</sup>.

Da das physikalische Atom eine bestimmte Quantität Materie enthält, so besitzt es ein bestimmtes Gewicht; es ist nicht möglich das Gewicht desselben für die verschiedenen Stoffe in Grammen anzugeben, sein relatives Gewicht, das heisst das Verhältniss zwischen den Gewichten der einzelnen Atome lässt sich bestimmen. Nennen wir das Gewicht des Atoms Wasserstoff eins, so werden wir nach dieser Einheit das des Chlors, das des Stick-

<sup>1)</sup> Man sehe über die Frage nach der Beschaffenheit der Atome: *Fechner*, *Atomenlehre*. 2. Aufl. Leipzig, 1864. Fechner entscheidet sich dort für die Einfachheit des philosophischen Atoms; seine Deduction scheint mir indess nicht gegen allen Widerspruch sicher zu sein. Ausserdem sehe man die philosophische Einleitung in die *Encyclopädie der Physik* (herausgegeben von *G. Karsten*) von *Harms*, in welcher man die verschiedenen Anschauungen von dem Wesen der Materie zusammengestellt findet. So interessant es auch wäre, so verbieten doch die Grenzen dieses Werkes auf die verschiedenen Theorien einzugehen; ich habe deshalb oben die dynamische Anschauung nicht einmal erwähnt.



stoffs etc. messen können. Eine Verbindung des Chlors und Wasserstoffs wird sich dann, wenn wir das Gewicht der beiden Atome mit  $cl$  und  $h$  bezeichnen, darstellen lassen durch  $m \cdot h + n \cdot cl$  oder, da wir  $h$  gleich 1 setzen, durch  $m + n \cdot cl$ , wo  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind und die Anzahl der Atome geben, die bei dieser Verbindung zusammentreten. Das Verhältniss der Atomgewichte des Wasserstoffs und Chlors wird dann sein  $m : n \cdot cl$  oder  $1 : \frac{n}{m} \cdot cl$ . Die chemische Analyse nun, welche uns das Mischungsgewicht des Chlors, jene Menge, welche sich mit einem Gewichtstheil Wasserstoff verbindet, liefert, bestimmt somit die Grösse  $\frac{n}{m} \cdot cl$  oder das Atomgewicht multiplicirt mit dem Quotienten  $\frac{n}{m}$ .

Wären uns daher die Zahlen  $m$  und  $n$  bekannt, so lieferte uns dieselbe Analyse, welche das Mischungsgewicht des Chlors ergibt, auch das Atomgewicht desselben. Man hat aber kein direktes Mittel, diese Zahlen zu bestimmen; denn man weiss niemals, wieviel Atome bei einer Verbindung zu einem zusammentreten. In welcher Weise die Chemie, durch gewisse Erscheinungen geführt, die Atomgewichte aus dem Aequivalenten ableitet, das zu besprechen würde hier zuviel Raum einnehmen; wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Chemie<sup>1)</sup> und begnügen uns hier die von der Chemie jetzt angenommenen Atomgewichte mitzutheilen, da wir die Zahlen an mehreren Stellen benutzen müssen.

**Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper,**

bezogen auf  $H = 1$ .

Aluminium . . . . . <i>Al</i> = 27,4	Jod . . . . . <i>J</i> = 127,0
Antimon . . . . . <i>Sb</i> = 122,0	Kalium . . . . . <i>Ka</i> = 39,1
Arsen . . . . . <i>As</i> = 75,0	Kobalt . . . . . <i>Co</i> = 58,7
Barium . . . . . <i>Ba</i> = 137,0	Kohlenstoff . . . . . <i>C</i> = 12,0
Beryllium . . . . . <i>Be</i> = 9,3	Kupfer . . . . . <i>Cu</i> = 63,5
Blei . . . . . <i>Pb</i> = 207,0	Lanthan . . . . . <i>La</i> = 92,0
Bor . . . . . <i>B</i> = 11,0	Lithium . . . . . <i>Li</i> = 7,0
Brom . . . . . <i>Br</i> = 80,0	Magnesium . . . . . <i>Mg</i> = 24,0
Cadmium . . . . . <i>Cd</i> = 112,0	Mangan . . . . . <i>Mn</i> = 55,0
Caesium . . . . . <i>Car</i> = 133,0	Molybdän . . . . . <i>Mo</i> = 96,0
Calcium . . . . . <i>Ca</i> = 40,0	Natrium . . . . . <i>Na</i> = 23,0
Cerium . . . . . <i>Ce</i> = 92,0	Nickel . . . . . <i>Ni</i> = 58,7
Chlor . . . . . <i>Cl</i> = 35,5	Niobium . . . . . <i>Nb</i> = 94,0
Chrom . . . . . <i>Cr</i> = 52,2	Osmium . . . . . <i>Os</i> = 199,2
Didym . . . . . <i>Di</i> = 95,0	Palladium . . . . . <i>Pa</i> = 106,6
Eisen . . . . . <i>Fe</i> = 56,0	Phosphor . . . . . <i>P</i> = 31,0
Erbium . . . . . <i>Er</i> = 112,6	Platin . . . . . <i>Pt</i> = 197,5
Fluor . . . . . <i>Fl</i> = 19,0	Quecksilber . . . . . <i>Hg</i> = 200,4
Gold . . . . . <i>Au</i> = 197,0	Rhodium . . . . . <i>Rh</i> = 104,4
Indium . . . . . <i>In</i> = 37,8	Rubidium . . . . . <i>Rb</i> = 85,4
Iridium . . . . . <i>Ir</i> = 198,0	Ruthenium . . . . . <i>Ru</i> = 104,0

<sup>1)</sup> Man sehe: *Lothar Meyer*, Die modernen Theorien der Chemie. Breslau 1864. *Kekulé*, Lehrb. d. organischen Chemie. 1. Bd. Erlangen 1859.

Sauerstoff . . . . .	<i>O</i> = 16,0	Titan . . . . .	<i>Ti</i> = 50,0
Schwefel . . . . .	<i>S</i> = 32,0	Uran . . . . .	<i>U</i> = 120,0
Selen . . . . .	<i>Se</i> = 79,5	Vanadium . . . . .	<i>Va</i> = 51,3
Silber . . . . .	<i>Ag</i> = 108,0	Wasserstoff . . . . .	<i>H</i> = 1
Silicium . . . . .	<i>Si</i> = 28,0	Wismuth . . . . .	<i>Bi</i> = 210,0
Stickstoff . . . . .	<i>N</i> = 14,0	Wolfram . . . . .	<i>W</i> = 184,0
Strontium . . . . .	<i>Sr</i> = 87,5	Yttrium . . . . .	<i>Y</i> = 61,7
Tantal . . . . .	<i>Ta</i> = 182,0	Zink . . . . .	<i>Zn</i> = 65,2
Tellur . . . . .	<i>Te</i> = 128,0	Zinn . . . . .	<i>Su</i> = 118,0
Thallium . . . . .	<i>Tl</i> = 204,0	Zirconium . . . . .	<i>Zi</i> = 89,6.
Thorium . . . . .	<i>Th</i> = 231,5		

## §. 48.

**Die Aggregatzustände.** Die in dem letzten §. mitgetheilten Erfahrungen berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat neben einander liegender Moleküle zu betrachten, welche einen äusserst kleinen Raum einnehmen, so dass wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend ansehen dürfen. In welcher Weise diese Moleküle grupirt sind, dass wissen wir nicht; dass aber mussten wir annehmen, dass sich die einzelnen Moleküle nicht berühren, dass sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber doch mit andern in der Physik vorkommenden Grössen vergleichbaren Entfernungen von einander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des Körpers vergrössern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern sucht, wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen wir annehmen, dass auch die Moleküle irgend einer Substanz mit einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegen einander getrieben werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle sehr gross sein muss. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der Moleküle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern thätigen Kräfte als eine Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft muss das Bestreben haben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um so mehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber folgen, dass die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein könnten, wenn die einzelnen Theile sich berühren, dass also die Körper nicht porös sein könnten. Dem widerspricht aber die unmittelbare Anschauung; denn es gibt Körper, in denen wir die Poren direkt sehen können. Es muss deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft thätig sein, welche verhindert, dass sie sich bis zur Berührung annähern, welche wir also als eine die Moleküle gegenseitig abstossende bezeichnen müssen, und welche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Theile abnimmt, so zwar, dass unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte die Moleküle bereits in einem gewissen Abstände von einander in den Zustand des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schluss gezogen, dass die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Porosität, dass zwischen denselben auch abstossende Kräfte thätig sein müssen. Würden wir die letztern analog den ersten betrachten, so müssten wir schliessen,

dass die Grösse dieser abstossenden wie die der anziehenden nur von dem Abstände der Moleküle und ihrer Masse, nicht von der Natur derselben abhängig sei. Dieser Ansicht von der Natur der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte widerspricht aber eine Reihe bekannter Erfahrungen. Die Masse eines Körpers ist nämlich seinem Gewichte proportional, diejenige eines gegebenen Volumens demnach um so grösser, je grösser das Gewicht desselben ist. Da die Körper nun aus Molekülen bestehen, so müssen in einem gegebenen Volumen um so mehr Moleküle oder Moleküle von um so grösserer Masse sein, je dichter der Körper ist. Unter beiden Annahmen müsste aber der dichtere Körper zugleich der fester sein, das heisst, es müssten seine Moleküle um so stärker zusammenhalten, da sowohl mit der grössern Annäherung der Moleküle als auch mit ihrer grössern Masse die anziehenden Kräfte grösser werden. Man weiss aber, dass das nicht der Fall ist; die Theile aller flüssigen Körper stellen einem Versuche, sie zu trennen, einen weit geringern Widerstand entgegen als die der festen Körper; viele feste Körper sind aber weniger dicht als flüssige, wie z. B. das Wasser dichter ist als die meisten Holzarten, das Quecksilber dichter als die meisten Metalle. Man könnte dagegen behaupten, dass mit der grössern Annäherung der Moleküle auch die abstossenden Kräfte wachsen müssen, dass somit je nach dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte sich mit der Entfernung oder der Masse ändern, die dichteren Körper nicht gerade die festern sein müssten. Würde aber die Grösse der Molekularkräfte nur von der Entfernung und Masse der Moleküle abhängig sein, so müssten alle Körper gleicher Dichtigkeit auch dieselbe Festigkeit zeigen, da in diesen die einzelnen Moleküle wenigstens nicht sehr verschiedene Masse und Abstände haben können. Aber auch dem widerspricht die Erfahrung, da wir feste Körper herstellen können, welche genau dieselbe Dichtigkeit haben wie Flüssigkeiten.

Wir müssen deshalb schliessen, dass die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte nicht lediglich von der Masse und den Abständen der Moleküle, sondern auch von der Natur derselben abhängig sind. Ob diese Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Moleküle den anziehenden Kräften zukomme, die dann nicht mit denen der allgemeinen Gravitation zusammenfallen würden, oder den abstossenden Kräften, oder beiden, dass lässt sich nicht entscheiden. Indem man das unentschieden lässt, spricht man nur die in der Natur sich zeigenden Thatsachen aus, wenn man den einzelnen Theilen der Körper je nach ihrer Natur eine verschiedene Cohäsion beilegt, indem man ganz unbestimmt jene Kräfte, welche den Zusammenhalt der Körper bedingen, unter dem Namen der Cohäsion oder der Cohäsionskräfte zusammenfasst.

Je nach der verschiedenen Cohäsion der einzelnen Körpertheilchen unterscheidet man drei Aggregatzustände und zwar

1) Die festen Körper. Dieselben haben ein selbständiges Volumen und eine selbständige Gestalt; ihre einzelnen Theilchen verschieben sich nicht leicht gegen einander, sondern es bedarf einer mehr oder weniger bedeutenden Kraft, diese zu verschieben oder zu trennen; einmal getrennt, lassen sie sich nicht wieder durch Zusammenlegen vereinigen.

2) Die flüssigen Körper. Sie haben ein selbständiges Volumen ohne selbständige Gestalt. Die geringste äussere auf sie einwirkende Kraft kann

eine Verschiebung und selbst eine Trennung derselben bewirken. Nach der Trennung fügen sie aber ein einfaches Zusammenbringen wieder zusammen.

3) Die gasförmigen Körper haben weder eine selbständige Gestalt noch ein selbständiges Volumen, sie verbreiten sich durch jeden ihnen dargebotenen Raum, bis sich ein äusseres Hinderniss ihnen entgegenstellt.

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit den festen Körpern.

### §. 49.

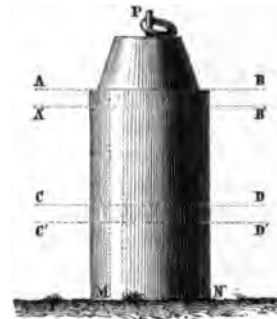
**Elasticität.** Unter Wirkung der Cohäsion, unter der wir die sämtlichen, die einzelnen Theile des Körpers zusammenhaltenden Kräfte, anziehende wie abstossende, zusammenfassen, sind die einzelnen Theile der Körper im stabilen Gleichgewicht, wenn sie in ihrem natürlichen Zustande sich selbst überlassen sind. Wirken nun äussere Kräfte auf den Körper ein, so ist klar, dass der Gleichgewichtszustand der Moleküle gestört werden muss.

Betrachten wir z. B. einen auf einer unveränderlich festen horizontalen Unterlage stehenden Cylinder (Fig. 55). Wir können ihn als zusammengesetzt ansehen aus einer Reihe übereinander lagernder horizontaler Schichten  $AB$ ,  $A'B'$  von Molekülen, die durch sehr kleine Zwischenräume getrennt sind. Legen wir auf  $AB$  ein Gewicht, so wird dieses die Schicht  $AB$  gegen  $A'B'$  treiben, den Abstand der Schichten verändern und dadurch nothwendig das Gleichgewicht stören. Die abstossende Kraft wird dann die anziehende der Schichten übersteigen und zunehmen, bis die Differenz beider gleich ist dem Drucke des Gewichtes  $P$ . Diese zwischen den Schichten  $AB$  und  $A'B'$  thätige abstossende Kraft wirkt auf  $AB$  von unten nach oben, um dem Gewichte  $P$  das Gleichgewicht zu halten, und von oben nach unten auf die Schicht  $A'B'$ , welche sich dadurch in denselben Umständen befindet, als stände das Gewicht unmittelbar auf ihr. Die Schicht  $A'B'$  nähert sich dadurch der folgenden Schicht und übt auf diese einen eben solchen Druck aus wie  $AB$  auf  $A'B'$ ; gleiches gilt für alle folgenden Schichten, und die letzte drückt dadurch auf die Unterlage ebenso, als wenn das Gewicht unmittelbar auf ihr stände.

Es hat demnach eine gleiche Annäherung aller einzelnen Schichten stattgefunden und folglich eine Verkürzung des Cylinders, die proportional ist der Anzahl der Schichten, d. h. der Länge des Cylinders; diese Annäherung hat aber gleichzeitig zwischen je zwei Schichten  $CD$ ,  $C'D'$  eine abstossende Kraft hervorgerufen, welche gleich ist dem Drucke des Gewichtes.

Hätte man, anstatt auf den Cylinder einen Druck auszuüben, denselben an seinem obern Ende befestigt und an seinem untern ein Gewicht wirken lassen, so würden sich die einzelnen Schichten von einander entfernt haben, gleichzeitig aber auch in Folge der grössern Entfernung einander angezogen, und das Gleichgewicht tritt in dem Falle ein, wenn der Ueberschuss der anziehenden über die abstossenden Kräfte gleich dem am untern Ende des Cylinders wirkenden Zuge geworden ist.

Fig. 55.



Dass in der That in den beiden eben besprochenen Fällen zwischen den genäherten oder entfernten Molekülschichten abstossende oder anziehende Kräfte wirksam sind, dass lässt sich sofort erkennen, wenn wir die äussern Kräfte aufhören lassen zu wirken, denn wir nehmen sofort eine Bewegung der Molekülschichten gegen ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage wahr, der comprimirte Cylinder dehnt sich wieder aus, der ausgedehnte zieht sich wieder zusammen. Diese Eigenschaft der Körper, das Bestreben, ihre ursprüngliche Gestalt und das ursprüngliche Volumen wieder anzunehmen, wenn die Kraft, welche kleine Formänderungen an ihnen hervorgebracht hat, aufhört zu wirken; bezeichnet man mit dem Namen der Elasticität.

Die Existenz dieser Eigenschaft gibt uns einen weitem Aufschluss über die Natur der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte; sie zeigt, dass die abstossenden Kräfte mit zunehmender Entfernung der Moleküle weit rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte. Denn wenn die Moleküle in der Gleichgewichtslage sind, sind die anziehenden und abstossenden Kräfte einander gleich. Mit Aenderung der Abstände müssen sich nun sowohl die anziehenden als auch die abstossenden Kräfte in demselben Sinne ändern. Da nun aber eine grössere Annäherung Abstossung, eine grössere Entfernung Anziehung hervortreten lässt, so folgt, dass bei Verringerung des Abstandes die abstossenden Kräfte rascher wachsen, bei Vergrösserung des Abstandes rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte.

Die besprochenen beiden Fälle sind nicht die einzigen, bei denen sich die Elasticität der festen Körper zeigt, sie zeigt sich ebenso, wenn wir einen Stab biegen oder ihn um eine in ihm befindliche Axe zu drehen suchen, während sein eines Ende festgehalten wird, wenn wir ihn tordiren. Wir werden indess sehen, dass wir die elastischen Kräfte in diesen Fällen auf die zuerst besprochenen zurückführen können.

Die Untersuchung der Elasticität fester Körper ist eine der schwierigsten auf dem ganzen Gebiete der Physik; um die Gesetze derselben vollständig zu übersehen, bedarf es der complicirtesten mathematischen Entwicklungen und der feinsten Versuche. Wir müssen uns deshalb hier darauf beschränken, die Resultate der Untersuchungen vorzuführen, indem wir gleichzeitig, so weit es möglich ist, den innern Zusammenhang derselben darlegen<sup>1)</sup>.

### §. 50.

**Elasticität beim Zuge.** Der einfachste Fall aller Probleme über Elasticität ist der, dass man einen dünnen soliden Stab, der an seinem einem Ende befestigt ist, durch einen Zug oder Druck in seiner Längsrichtung ausdehnt oder zusammendrückt. So lange die Veränderungen, welche die wirksame Kraft hervorbringt, klein genug sind, muss die durch ein ge-

<sup>1)</sup> Die wichtigsten allgemeinen Untersuchungen über Elasticität finden sich in: *Poisson*, Mémoire sur les Mouvements des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris. T. VIII.

*Cauchy*, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide. Exercices des Mathématiques T. II und III.

*Lamé*, ausser einer Reihe von Abhandlungen besonders in seinen *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. II. édit. Paris 1866.

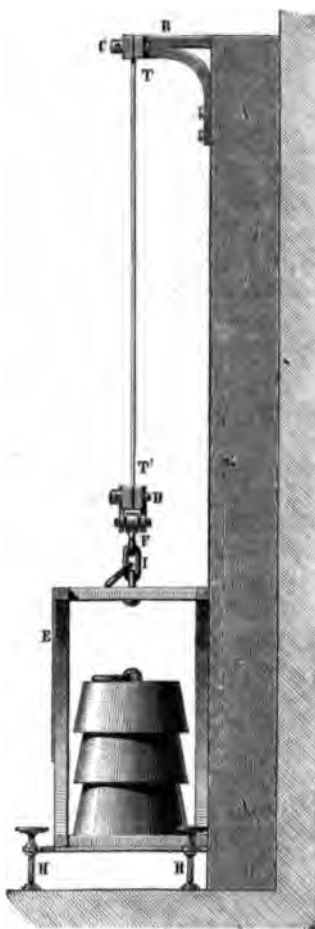
*Kirchhoff*, Abhandlungen über Elasticität. *Crelle's Journal*, Band 40 und Bd. 56.  
*Clebsch*, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

benes Gewicht beim Zusammendrücken hervorgebrachte Verkürzung gleich sein der durch die Ausdehnung bewirkten Verlängerung; es genügt daher, den Fall der Ausdehnung zu betrachten und die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen der Belastung und der eintretenden Verlängerung stattfinden. Die einfachste Methode der Untersuchung ist die von Wertheim angewandte. Derselbe befestigte an einer festen Mauer ein Kniestück von sehr starkem Eisen *B* (Fig. 56). Dasselbe endigt in einer ebenen verticalen Fläche von gehärtetem Stahl, gestreift wie eine Feile, gegen welche eine Platte, ebenfalls von Stahl und an der einen Seite ebenso gestreift, passt und mittels Schrauben *C* angeedrückt werden kann. Diese beiden Stücke dienen als Backen eines starken Schraubstocks, und zwischen ihnen wird der Draht, dessen Elasticität man untersuchen will, durch einen sehr starken Druck befestigt.

An dem untern Ende des Drahtes wird mittels einer gleichen schraubstockartigen Vorrichtung ein Haken befestigt und an diesen eine Wagschale *E* angehängt, welche die ziehenden Gewichte aufnimmt. Sind die Gewichte hinreichend schwer, so dehnt sich der Draht merklich aus, verkürzt sich aber wieder zu seiner frühern Länge, wenn man die Gewichte fortnimmt. Zur Messung der Verlängerung bedarf es gewisser Vorsichtsmassregeln.

Wenn man die Gewichte in die Wagschale sehr rasch einsetzt, so ertheilt man dem Apparat Stösse, durch welche man den Draht zerreißen kann. Um diese nun zu vermeiden, ist die Wagschale mit drei langen Fussstellschrauben *H* versehen, welche man vor Beginn des Versuches so weit hinabschraubt, dass sie den Boden berühren und somit die Wagschale tragen; dann wird die Schale belastet, und dann erst hebt man die Schrauben sehr langsam, um allmählig das Gewicht seine ziehende Wirkung ausüben zu lassen. Dabei hat man keine Stösse zu befürchten. Bei der Beobachtung hat man sich dann noch vor einem leicht zu begehenden Irrthume zu schützen. Wählt man nämlich feine Drähte, so sind diese stets an vielen Stellen gebogen und gekrümmt. Ein Anhängen der Gewichte bewirkt nun zunächst ein Geradestrecken und dadurch scheinbar ein Verlängern des Drahtes. Um diese Täuschungen zu vermeiden, ist es nothwendig, anfänglich ein kleines Gewicht in die Schale zu legen, welches hinreicht, den Draht gerade zu machen und dann erst allmählig die Schale stärker zu belasten. Von da an zählt man dann auch erst die Gewichte.

Fig. 56.



Die Verlängerungen des Drahtes, welche immer sehr klein sind, misst man mit dem Kathetometer; man stellt dasselbe dem Drahte ein für allemal fest gegenüber und visirt mit dem Fernrohr desselben auf zwei feine an den Enden des Drahts angebrachte Marken  $T$  und  $T'$ . Der Unterschied der Fernrohrstellungen des Kathetometers liefert dann in allen Fällen die Länge des Drahtes, sowohl vor als nach der Belastung; die Differenz zwischen den beobachteten Längen vor und nach der Belastung gibt dann die in Folge der Belastung eintretende Verlängerung. Mit Hülfe dieser Methode hat Wertheim<sup>1)</sup> zunächst die schon früher von Hooke<sup>2)</sup>, S'Gravesande<sup>3)</sup>, Th. Young<sup>4)</sup> u. a. aufgestellten Gesetze der Elasticität bestätigt. Dieselben sind:

1) Die Verlängerungen eines Drahtes sind bei demselben angehängten Gewicht der Länge des Drahtes proportional. Um das Gesetz nachzuweisen, hat man auf dem Drahte nur mehrere Marken in gleicher Distanz zu ziehen; man findet dann nach der Belastung, dass der Abstand der verschiedenen Marken sich gleich viel vergrössert hat. Da nun die Verlängerung des ganzen Drahtes gleich der Summe der Ausdehnungen seiner einzelnen Theile ist, so folgt, dass dieselbe der Länge des Drahtes proportional ist.

2) Die Verlängerung eines gegebenen Drahtes ist der Grösse des spannenden Gewichts direkt proportional. Aus diesem Satze folgt, dass die durch kleine Verschiebungen der Moleküle hervorgerufenen elastischen Kräfte den Verschiebungen selbst proportional sind. Denn wenn unter Wirkung des spannenden Gewichtes Gleichgewicht eingetreten ist, so beweist das, dass die von einander entfernten Molekülschichten sich mit der dem spannenden Gewichte gleichen Kraft anziehen. Da nun die Verschiebungen der Moleküle dem spannenden Gewichte proportional sind, so folgt auch, dass die elastischen Kräfte den Verschiebungen proportional sind.

3) Die Verlängerung verschieden dicker Drähte ist bei gleichen spannenden Gewichten dem Querschnitt der Drähte umgekehrt proportional, von der Gestalt des Querschnittes aber unabhängig. Dieser Satz folgt auch schon unmittelbar aus der Überlegung, dass wir einen Stab  $n$ facher Dicke als aus  $n$ Stäben einfacher Dicke bestehend ansehen können; damit deshalb ein solcher Stab dieselbe Verlängerung erhalte, bedarf er ein  $n$ mal so grosses Gewicht als der einfache Stab.

4) Schliesslich ist die Verlängerung abhängig von der Natur des Drahtes, den wir belasten.

Fassen wir diese vier Sätze in einen Ausdruck zusammen, so können wir die Verlängerung  $v$ , wescie ein Draht von der Länge  $l$  und dem Querschnitte  $q$  durch ein Gewicht  $p$  erhält, darstellen durch die Gleichung

$$v = c \cdot \frac{p \cdot l}{q},$$

worin  $c$  eine für jede Substanz besondere Constante ist, welche die Verlänge-

<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. t. 12. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

<sup>2)</sup> Hooke, Philosophical tracts and Collections. London 1679.

<sup>3)</sup> S'Gravesande, Physicae Elementa mathematica. T. I.

<sup>4)</sup> Th. Young, Course of lectures on natural Philosophy. London 1807.

ung bedeutet, welche ein aus ihr gefertigter Stab durch die Gewichtseinheit erhält, wenn seine Länge und sein Querschnitt der Einheit gleich ist. Als Einheit des Gewichtes nimmt man das Kilogramm, als Einheit der Länge das Meter, als Einheit des Querschnittes das Quadratmillimeter.

Die Grösse  $p$  gibt uns nach 2) gleichzeitig die bei einer Verlängerung  $v$  zwischen den Molekülschichten auftretende elastische Kraft; lösen wir die Gleichung nach  $p$  auf, so erhalten wir

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{c} \cdot \frac{v}{l}.$$

Der Quotient  $\frac{p}{q}$  gibt uns die in der Querschnittseinheit auftretende elastische Kraft, der Quotient  $\frac{v}{l}$  die Verlängerung des Stabes, gemessen in Bruchtheilen seiner ursprünglichen Länge, oder die Verlängerung der Längeneinheit. Setzen wir diese Quotienten gleich  $\pi$  und  $\delta$ , so erhalten wir

$$\pi = \frac{1}{c} \cdot \delta.$$

Den reciproken Werth des Coefficienten  $c$  bezeichnet man als den **Elasticitätscoefficienten** oder den **Elasticitätsmodulus**; setzen wir denselben gleich  $E$ , so wird schliesslich

$$\pi = E \cdot \delta,$$

oder die in der Querschnittseinheit bei kleinen Veränderungen auftretende elastische Kraft ist gleich dem Produkte aus dem Elasticitätsmodul und der nach Bruchtheilen der ursprünglichen Länge gemessenen Verlängerung.

Der soeben eingeführte Elasticitätsmodul einer Substanz ist der reciproke Werth der Verlängerung, welche die Längeneinheit eines Stabes der betreffenden Substanz durch die auf die Querschnittseinheit beim Zuge wirkende Gewichtseinheit erhält. In dieser Weise wird derselbe auch bestimmt; man kann denselben indess auch anders definiren. In der Gleichung

$$\pi = E \cdot \delta$$

wird  $\pi = E$ , wenn  $\delta$  gleich eins wird. Der Elasticitätscoefficient ist also auch das Gewicht, welches einem Stab der betreffenden Substanz vom Querschnitt eins eine der Einheit gleiche Verlängerung gibt, welche also die Länge des Stabes oder den Abstand der Molekülschichten in demselben verdoppeln würde, vorausgesetzt, dass die für kleine Aenderungen geltenden Gesetze soweit gültig wären. Dieser Definition entsprechend drückt man den **Elasticitätsmodul** einer Substanz auch gewöhnlich durch Gewichte aus.

Wertheim hat nach der angegebenen Methode eine Anzahl Elasticitätscoefficienten bestimmt<sup>1)</sup>, wir lassen dieselben hier folgen.

<sup>1)</sup> Wertheim, Poggend. Annal. Ergänzungsband II.



**Tabelle der Elasticitätscoefficienten verschiedener Metalle bei verschiedenen Temperaturen.**

Metalle	Coefficienten bei			Coefficienten aus der Longitudinaltönen bestimmt
	15°—20° C.	100° C.	200° C.	
Blei gezogen . . . . .	1883			2278
„ angelassen . . . . .	1727	1630	—	2146
Gold gezogen . . . . .	8131			8599
„ angelassen . . . . .	5584	5408	5482	6372
Silber gezogen . . . . .	7357			7576
„ angelassen . . . . .	7140	7274	6374	7242
Zink gezogen . . . . .	8734			9556
Kupfer gezogen . . . . .	12449			12536
„ angelassen . . . . .	10519	9827	7862	12540
Platin gezogen . . . . .	17044			17165
„ angelassen . . . . .	15518	14178	12964	15611
Eisen gezogen . . . . .	20869			19903
„ angelassen . . . . .	20794	21877	17700	19925
Gussstahl gezogen . . . . .	19549			19823
„ angelassen . . . . .	19561	19014	17926	19828
Engl. Stahl gezogen . . . . .	18809			19445
„ angelassen . . . . .	17278	21292	19278	19200

Die Zahlen der letzten Columne gelten ebenfalls für die Temperatur 15°—20° C., die Methode, nach welcher sie erhalten wurden, werden wir später besprechen<sup>1)</sup>.

Obige Zahlen zeigen, dass die Elasticitätscoefficienten nicht nur für verschiedene Metalle, sondern auch für ein und dasselbe Metall verschieden sein können, je nachdem dasselbe als gezogener Draht oder nach vorhergegangene Erhitzen untersucht wird.

Die in obiger Tabelle erhaltenen Zahlen liefern uns nicht nur die elastische Kraft bei Verlängerung eines Stabes, sondern auch bei einer Verkürzung durch auf die Endflächen des Stabes angebrachte Drucke, da nach der im Anfange dieses §. gemachten Bemerkung die Gesetze der bei solchem Drucke stattfindenden Verkürzungen mit denen der Verlängerung zusammenfallen, so lange wir nur kleine Veränderungen in Betracht ziehen.

### §. 51.

**Volumveränderung während des Zuges.** Wir haben bisher nur die Veränderungen in der Länge eines Stabes betrachtet, welche auftreten, wenn man einen Stab ausdehnt oder zusammendrückt; man sieht aber leicht, dass auch der Querschnitt eines solchen Stabes bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung nach der Längsaxe sich ändern muss. Es ist ferner wahrscheinlich, dass der Querschnitt kleiner werden muss, wenn man den Stab verlängert. Man kann dieses auch sehr leicht mittels eines einfachen Versuches nachweisen, den Wertheim<sup>2)</sup> angestellt hat. Er nahm sehr sorgfältig gearbeitete Kautschukstreifen (Fig. 57) von ungefähr 300 Millimeter Länge. Sie hatten

<sup>1)</sup> Man sehe §. 153 dieses Bandes.

<sup>2)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Poggend. Annal. LXXVIII.

die Gestalt von Prismen mit quadratischer Grundfläche. Die Länge einer Seite war zwischen 9 und 47 Millimeter. An ihren beiden Enden versah er sie mit eisernen Ansätzen *A* und *B*, in denen die Kautschukstreifen fest angebracht waren. Die Ansätze hatten Haken; mittels des einen wurde der Kautschukstreifen vertical aufgehängt; an dem andern, *B*, wurde das ziehende Gewicht *P* angebracht. Da der Kautschuk sich äusserst leicht ausdehnt, so verlängerte sich der Streifen sehr bedeutend; die Verlängerung wurde gemessen. Da der Querschnitt des Streifens ferner sehr gross war, so konnte man ihn mittels eines Zirkels messen und so die Veränderungen des Querschnittes bestimmen, welche durch die Verlängerung der Streifen entstanden. Man beobachtete, was vorausgesehen war, dass der Querschnitt des Kautschukstreifens kleiner wurde.

Bezeichnen wir nun die ursprüngliche Länge eines Drahtes mit *L*, so wird durch die Einwirkung irgend eines Gewichtes diese Länge in  $L(1 + \delta)$  übergehen, wo  $\delta$  wieder die Verlängerung der Längeneinheit darstellt und gleich  $\frac{\pi}{E}$  ist. Der Querschnitt des Stabes, dessen Breite *B*, dessen Dicke *D* war, wird nach der Belastung dann sein  $B \cdot D (1 - \mu \cdot \delta)^2$ , wenn wir die Verkürzung des Querdurchmessers des Stabes, die jedenfalls der Verlängerung des Stabes proportional sein muss, mit  $\mu \delta$  bezeichnen. Entwickeln wir den Ausdruck für den Querschnitt nach der Belastung, so können wir, da  $\delta$  immer nur sehr klein ist,  $\mu^2 \delta^2$  vernachlässigen und erhalten dann für den Querschnitt des Stabes

$$BD (1 - 2 \mu \delta)$$

und für das Volumen desselben nach dem Zuge

$$LBD (1 + \delta) (1 - 2 \mu \delta)$$

oder auch, wenn wir das sehr kleine Glied  $2 \mu \delta^2$  wieder ausser Acht lassen,

$$LBD (1 + \delta - 2 \mu \delta).$$

Je nach dem Werthe von  $\mu$  kann deshalb eine Vergrösserung oder Verkleinerung des Volumens eintreten. Es hat sich nun aus sämtlichen in der Richtung angestellten Versuchen ergeben, dass in der That eine Vergrösserung des Volumens eintritt, somit dass  $2 \mu \delta < \delta$  oder dass  $\mu < 0,5$ , aber grösser als Null ist.

Welches indess der wirkliche Werth von  $\mu$  innerhalb dieser Grenzen ist, darüber herrscht wegen der grossen Schwierigkeit, diese Grösse zu bestimmen, noch einige Unsicherheit. Navier<sup>1)</sup>, Poisson<sup>2)</sup>, Lamé und Clapeyron<sup>3)</sup> gelangen in ihren theoretischen Untersuchungen über Elasticität zu dem Resultate, dass  $\mu = \frac{1}{4}$  sei, ein Resultat, welches Poisson<sup>4)</sup> durch Versuche von Cagniard de Latour bestätigt fand. Derselbe befestigte auf einem festen Fussbrett (Fig. 58) einen Metalldraht, so dass derselbe senk-

Fig. 57.



<sup>1)</sup> Navier, Mémoires de l'Académie des sciences. T. VII.

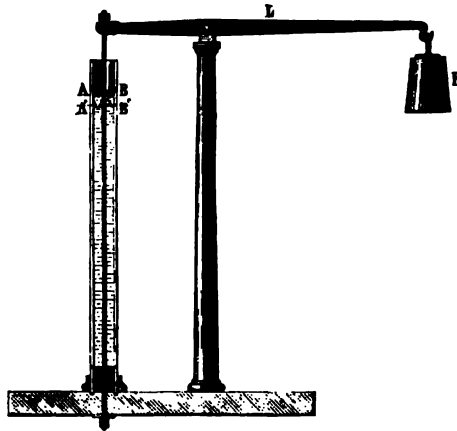
<sup>2)</sup> Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences. T. VIII.

<sup>3)</sup> Lamé und Clapeyron, Crelle's Journal für Mathematik. Bd. VII.

<sup>4)</sup> Poisson theilt diesen Versuch mit Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. Poggend. Annal. Bd. XII.

recht aufstieg; dass obere Ende des Drahtes wurde an einem Arme eines ungleicharmigen Hebels  $L$  befestigt, dessen anderer Arm mit einem Gewichte  $P$  beschwert wurde.

Fig. 58.



Die Länge des unbelasteten Drahtes, sie betrug  $2^m$ , war genau bestimmt, und es wurde dann die Verlängerung beobachtet, welche durch die Belastung des Hebels eintrat. Die letztere wurde so weit gesteigert, dass die Verlängerung des Drahtes  $6^{mm}$  betrug. Der Draht war, wie die Figur zeigt, von einer engen, unten geschlossenen und mit Wasser gefüllten Röhre umgeben, der Durchmesser der Röhre und des Drahtes waren genau gemessen. Im Augenblicke nun, in dem sich der Draht durch den Zug zu verlängern begann, sah man das Niveau des

Wassers in der Röhre von  $AB$  bis  $A'B'$  sinken; ein Beweis, dass in der That bei der Verlängerung des Drahtes eine Verminderung des Querschnittes eintritt. Die Niveaudifferenz vor und nach dem Zuge wurde genau gemessen. Darauf wurde der Draht unten am Fussbrett gelöst, in die mit Wasser gefüllte Röhre eingesetzt, so dass sein unteres Ende den Boden der Röhre geradberührt, und das Niveau des Wassers wieder beobachtet. Darauf wurde der Draht so weit emporgezogen, dass das obere Ende  $6^{mm}$  aus dem Wasser emporragte, dass also ein ebenso grosses Stück des Drahtes aus dem Wasser emporragte als bei dem vorigen Versuche. Da dann das Volumen des in das Wasser tauchenden Drahtes um das herausgezogene Stück kleiner war, so musste das Niveau des Wassers wieder sinken, und es ergab sich, dass es jetzt doppelt so tief sank als bei dem vorigen Versuch, somit dass die Volumverminderung des jetzt noch in das Wasser tauchenden Drahtes doppelt so gross war als bei der Verlängerung des Drahtes. Der Werth von  $\mu$  ergibt sich daraus auf folgende Weise: bezeichnen wir den Radius des cylindrischen Drahtes mit  $r$ , so nimmt, wenn wir die Verlängerung der Längeneinheit mit  $\delta$  bezeichnen, bei der Ausdehnung des Drahtes das noch in das Wasser tauchende Stück des Drahtes das Volumen

$$l \cdot r^2 \pi (1 - 2\mu\delta)$$

ein, da wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, voraussetzen dürfen, dass die Länge des eintauchenden Stückes nicht geändert ist. Das Volumen des Stückes ist dann nur kleiner geworden, weil der Querschnitt des Drahtes im Verhältniss  $1 : 1 - 2\mu\delta$  verkleinert ist.

Das Volumen des in das Wasser eintauchenden Drahtes ist nach dem zweiten Versuche dasselbe, wenn der Draht ohne Dehnung um die Hälfte der Verlängerung aus dem Wasser hervorgezogen wird. Das Volumen des dann noch im Wasser befindlichen Drahtstückes ist

$$l \cdot r^2 \pi (1 - \frac{1}{2}\delta);$$

somit erhalten wir

$$l \cdot r^2 \pi (1 - 2\mu\delta) = l \cdot r^2 \pi (1 - \frac{1}{2}\delta)$$

oder

$$\begin{aligned} 2 \mu \delta &= \frac{1}{2} \delta, \\ \mu &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dieser Versuch gibt also für die Verminderung des zur Zugrichtung senkrechten Durchmessers eines Drahtes ein Viertel der Verlängerung, entsprechend der Theorie von Navier und Poisson.

Weder die theoretischen Entwicklungen, aus welchen der Werth  $\mu = 0,25$  geschlossen wurde, noch auch der denselben bestätigende Versuch sind einwurfsfrei. Was zunächst den Versuch von Cagniard de Latour angeht, so kann man aus demselben mit Sicherheit kaum mehr schliessen, als dass bei der Verlängerung eine Quercontraction eintritt; genaue Messungen sind bei der angewandten Methode nicht möglich. Denn zunächst ist die Aenderung des Wasserniveaus in der Röhre, welche einen den Durchmesser des Drahtes weit übertreffenden Durchmesser hat, bei der an dem Draht überhaupt stattfindenden äusserst kleinen Aenderung des Volumens so unbedeutend, dass die geringste Ungenauigkeit beim Ablesen das Resultat wesentlich beeinträchtigen muss, und eine solche Ungenauigkeit ist um so weniger zu vermeiden, da das Wasser die Innenwand der Röhre niemals ganz gleichmässig benetzt. Dazu kommt ferner, dass der Draht beim Emporziehen aus der Flüssigkeit immer Flüssigkeit mit sich heraushebt, deren Menge zudem bei den verschiedenen Versuchen verschieden ist, schon aus dem Grunde, weil der Umfang des herausgezogenen Drahtes verschieden ist. So klein auch die Fehler sind, bei der Kleinheit der zu messenden Grössen wird die Sicherheit des Resultates dadurch wesentlich beeinträchtigt.

Spätere theoretische Untersuchungen haben dann auch gezeigt, dass das aus den Untersuchungen von Navier und Poisson sich ergebende Resultat durch specielle nicht nothwendige Annahmen erhalten ist; die Untersuchungen von Cauchy<sup>1)</sup>, Lamé<sup>2)</sup> und Kirchhoff<sup>3)</sup> haben vielmehr gezeigt, dass die Theorie der Elasticität nur zu dem vorhin bereits angedeuteten Resultate führt, dass der Werth von  $\mu$  zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  liegt, dass der Versuch in jedem Falle über den Werth von  $\mu$  innerhalb dieser Grenzen entscheiden muss.

Cauchy und in ganz ähnlicher Weise Lamé gehen von folgender Annahme aus. Denken wir uns ein rechteckiges Parallelepiped, welches nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzt; dasselbe erhalte auf zwei gegenüberliegenden Flächen, und zwar senkrecht zu denselben solche Zielungen, dass die Flächeneinheit den Zug  $\pi_1$  erhält. Dieser Zug hat dann eine Verlängerung des Parallelepipeds in der Zugrichtung zu Folge, welche für die Längeneinheit des Parallelepipeds gleich  $\delta_1$  sei; in den zur Zugrichtung senkrechten Richtungen findet dann ebenfalls eine Veränderung der Seiten des Parallelepipeds statt, so dass die Breite desselben  $B(1 + \mu\delta_1)$  und die Dicke  $(1 + \mu\delta_1)$  wird. Ob diese letztere Veränderung eine Verlängerung oder Verkürzung sein wird, hängt dann von dem Vorzeichen von  $\mu$  ab; ist  $\mu$  positiv, so ist die seitliche Veränderung von derselben Art wie  $\delta$ , ist es negativ, so ist die seitliche Veränderung jener in der Zugrichtung statt-

<sup>1)</sup> Cauchy, Exercices de Mathématiques. T. III. p. 182 und p. 205 ff.

<sup>2)</sup> Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. II. éd. p. 66 ff.

<sup>3)</sup> Kirchhoff, Crelle's Journal. Bd. XL und LVI.

findenden entgegengesetzt. Das Volumen des Parallelepipeds ist dadurch geworden

$$V(1 + \delta_1 + 2\mu\delta_1).$$

Die Volumeinheit hat sich somit um  $\delta_1 + 2\mu\delta_1$  verändert. Setzen wir diese die Volumeinheit betreffende Aenderung gleich  $v$ , so nehmen nun Cauchy und Lamé an, dass

$$\pi_1 = k \cdot \delta_1 + Kv,$$

worin  $k$  und  $K$  zwei von der Natur der Substanz des Parallelepipeds abhängige Constante sind; sie machen also die Annahme, dass man die durch den Zug  $\pi_1$  im Innern hervorgebrachte der Zugrichtung parallele Spannung der parallel der Zugrichtung eintretenden Veränderung und der in Folge dieses Zuges stattfindenden Volumänderung proportional setzen könne.

Werden nun die drei Flächenpaare des Parallelepipeds gleichzeitig durch Ziehungen  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  angegriffen, so werden die jeder Zugrichtung parallelen Veränderungen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  sein, und das Volumen des Parallelepipeds  $V$  wird übergehen in

$$V(1 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)),$$

so dass also die Veränderung der Volumeinheit  $v$  wird

$$v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Diese drei Drucke  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  oder die ihnen gleichen elastischen Spannungen sind in dem Falle nach obiger Annahme gegeben durch die drei Gleichungen:

$$\pi_1 = k \delta_1 + K \cdot v; \pi_2 = k \delta_2 + Kv; \pi_3 = k \delta_3 + Kv.$$

Diese drei Gleichungen behalten ihre Gültigkeit, welches auch die Drucke  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  sein mögen; also auch für den Fall, dass zwei derselben,  $\pi_2$  und  $\pi_3$  gleich Null werden, dass also das betrachtete Parallelepipid nur nach einer Richtung einen Druck oder einen Zug erfährt, sie behalten ihre Gültigkeit für den Fall, den wir untersuchen. In dem Falle sind

$$\begin{aligned} k \delta_2 + K v &= k \delta_3 + K v = 0 \dots \dots \dots (a) \\ \delta_2 &= \delta_3 = \mu \delta, \end{aligned}$$

und die Volumveränderung wird dann

$$v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_1 (1 + 2\mu).$$

Eine der beiden Gleichungen (a) liefert nun

$$v = -\frac{k}{K} \cdot \delta_2,$$

also

$$\begin{aligned} \delta_1 (1 + 2\mu) &= -\frac{k}{K} \cdot \mu \delta_1; \\ K + 2K\mu &= -k\mu; \\ \mu &= -\frac{K}{2K+k} = -\frac{1}{2 + \frac{k}{K}} \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit zunächst, da das Vorzeichen von  $\mu$  negativ ist, dass die seitliche Veränderung immer derjenigen in der Druckrichtung ent-

gegengesetzt ist, dass also beim Zuge eine Quercontraction, beim Drucke eine Querdilatation eintritt. Ferner ergibt sich, dass der Werth von  $\mu$  kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist; welcher Werth dem Coefficienten aber zukommt, das hängt von dem Verhältniss der beiden Constanten  $k$  und  $K$  ab. Der von Navier und Poisson gegebene Werth  $\mu = \frac{1}{4}$  ergibt sich, wenn  $k = 2K$  ist, eine Beziehung, die sich indess theoretisch nicht folgern lässt. Ueberhaupt gibt die Theorie der Elasticität über die Beziehung zwischen diesen beiden Constanten keinen weiteren Aufschluss, sie lässt es selbst unentschieden, ob diese Beziehung für alle Substanzen dieselbe ist, oder ob sie für verschiedene Substanzen verschieden sein könne.

Wertheim<sup>1)</sup> schliesst aus seinen Versuchen das erstere, er findet bei seinen Versuchen mit Kautschuk, Glas und Messing nämlich, dass

$$\mu = -\frac{1}{3},$$

somit dass  $k = K$  ist, und glaubt deshalb, dass diese Beziehung ganz allgemein das Verhältniss der beiden Constanten wiedergebe. Die Versuche mit Kautschuk haben wir vorhin bereits erwähnt; so lange  $\delta$  nur etwa  $\frac{1}{2}$  beträgt, findet sich in der That  $\mu$  ziemlich genau gleich  $\frac{1}{3}$ .

Zu den andern Versuchen wandte er auf einen Vorschlag von Regnault ohne Naht gezogene Röhren von Messing oder Glasröhren  $A$  (Fig. 59) an, welche mit ihren Enden an andere kurze, aber weitere Röhren  $B'B'$  befestigt waren. Die untere war unten verschlossen, die obere an beiden Seiten offen, und an ihrem obern Ende mit einer Fassung versehen, durch welche eine sehr enge Glasröhre  $F$  mit dem Innern der Röhre communicirte. Diese so vorgerichteten Röhren wurden mit Wasser bis zur Marke  $F$  der Glasröhre gefüllt. Man befestigt die Röhre nun an ihrem obern Ende, so dass sie vertical herabhing, und belastete sie an ihrem andern Ende mit einem Gewichte  $p$ . Sie dehnte sich dann gerade so aus wie ein solider Metallstab von derselben Substanz.

Man maass nun einerseits die Verlängerungen dieser Vorrichtung, andererseits das Herabsinken der Flüssigkeit in der Glasröhre  $F$ . Der Versuch ergab somit sowohl die Verlängerung  $\delta$  für die Längeneinheit als auch andererseits die Vergrößerung  $\delta(1 - 2\mu)$  des Volumens für die Volumeinheit, und man hatte diese nur zu vergleichen. Man fand nun in Uebereinstimmung mit den Versuchen am Kautschuk, dass  $\delta(1 - 2\mu) = \frac{1}{3}\delta$ , also  $\mu = \frac{1}{3}$  war, dass also die Aenderung des Durchmessers für die Längeneinheit  $\frac{1}{3}\delta$  war.

Die nach dieser Methode von Wertheim erhaltenen Zahlen, zusammengestellt mit den nach dem Poisson'schen und dem Wertheim'schen Werthe von  $\mu$  aus der beobachteten Verlängerung berechneten Werthe der Volumverminderung enthält folgende kleine Tabelle.

Fig. 59.



<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Poggend. Annal. Bd. LXXVIII.

		V . $\delta$ (1 - 2 $\mu$ )		
No. der Röhren		berechnet mit $\mu = \frac{1}{4}$	beobachtet	berechnet mit $\mu = \frac{1}{3}$
Messing	I	0,81047	0,52017	0,54032
	II	0,87866	0,54363	0,58578
	III	0,88949	0,56104	0,59299
Glas	I	5,3650	3,8613	3,5767
	II	4,0639	2,4217	2,7093
	III	1,5282	1,1472	1,0188
	IV	1,1938	0,7786	0,7959

Für Glas ergeben diese Versuche ziemlich genau den Werth  $\mu = \frac{1}{3}$ , da die damit berechneten Werthe der Volumveränderung bald grösser bald kleiner sind als die beobachteten, und die Abweichungen nicht zu gross sind; für Messing ist dagegen trotz der ziemlich guten Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung dieser Werth zweifelhaft, da mit  $\mu = \frac{1}{3}$  alle berechneten Zahlen zu gross werden; für Messing würde man aus diesen Beobachtungen  $\mu = 0,315$  ableiten.

Man würde deshalb schon aus Wertheim's Resultaten eher den Schluss ziehen, dass  $\mu$  für verschiedene Substanzen verschieden sein kann, als dass es stets denselben Werth  $\frac{1}{3}$  hat, ein Schluss, den auch die Versuche von Kirchhoff zu bestätigen scheinen. Kirchhoff<sup>1)</sup> bestimmte den Werth von  $\mu$ , indem er an verschiedenen Stäben durch bestimmte Gewichte gleichzeitig Biegung und Torsion hervorbrachte; gerade wie nämlich der Elasticitätscoefficient, wenn man ihn durch  $k$  und  $K$  ausdrücken will, den Werth von  $\mu$  enthält, so ist auch auf Torsion und Biegung die Quercontraction von Einfluss, so dass, wenn man beide beobachtet hat, sich daraus  $\mu$  berechnen lässt. Die Versuche sind gemacht an drei Stäben von glashartem Stahl und an einem Stabe von hartgezogenem Messing. Für die ersten drei Stäbe fand er im Mittel  $\mu = - 0,291$ , nämlich

für den ersten Stab  $\mu = - 0,293$ ,

„ „ zweiten „  $\mu = - 0,295$ ,

„ „ dritten „  $\mu = - 0,294$ .

Für den Messingstab erhielt er dagegen  $\mu = - 0,387$ , einen Werth also, der den für Stahl gefundenen und auch den von Wertheim allgemein angenommenen nicht unbeträchtlich übersteigt. Kirchhoff glaubt dem für das Messing gefundenen Werthe  $\mu$  nicht dieselbe Bedeutung beilegen zu können, da das gezogene Messing parallel der Zugrichtung eine andere Elasticität haben könne als senkrecht dazu; indess wird man wohl kaum den grossen Unterschied zwischen Messing und Stahl lediglich dieser Verschiedenheit im Messing zuschreiben können.

Dieselbe Methode, welche Kirchhoff anwandte, hat später Okatow<sup>2)</sup> be-

<sup>1)</sup> Kirchhoff, Poggend. Annal. Bd. CVIII. p. 369 ff.

<sup>2)</sup> Okatow, Poggend. Ann. Bd. CXIX.

nutzt, um die Quercontraction einer Anzahl verschiedener Stahlstäbe zu untersuchen; es ergab sich dabei, dass der Werth von  $\mu$  sowohl für verschiedene Stahlarten von demselben Zustande als auch für dieselbe Stahlart in verschiedenen Zuständen verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werthe für  $\mu$

	Stricknadelstäbchen.	Glatter runder engl. Stahl
a) ursprünglicher Zustand	$\mu = - 0,2750$	$\mu = - 0,2989$
b) in Oel gehärtet	$\mu = - 0,2969$	$\mu = - 0,3190$
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt	$\mu = - 0,3037$	$\mu = - 0,3281.$

Die für den glatten runden englischen Draht angegebenen Werthe wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimensionen gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6<sup>mm</sup>. Okatow glaubt, dass der ganz weiche Stahl der vollen Gleichheit nach allen Richtungen am nächsten kommt; deshalb spricht die Verschiedenheit von  $\mu$  für die verschiedenen Stahlsorten auch in diesem Zustande dafür, dass der Werth des Verhältnisses von Quercontraction und Verlängerung nicht für alle Körper derselbe ist.

Für eine Anzahl von Stäben aus glattem rundem Stahl, deren Länge bis zu 1 Meter, deren Durchmesser bis zu 2<sup>cm</sup> betrug, erhielt Schneebeli<sup>1)</sup> nach einer Methode, welche wir im 3. Abschnitt §. 137 besprechen werden, als Werth von  $\mu = - 0,296$ , als die Stäbe federhart, und  $\mu = - 0,303$  als die Stäbe ganz weich waren; Werthe welche mit denen von Kirchhoff und von Okatow für die erste Stahlart erhaltenen vortrefflich übereinstimmen.

Gegenüber der hier ausgesprochenen Ansicht, dass der Werth von  $\mu$  für die verschiedenen Körper verschieden sei, hat kürzlich Cornu<sup>2)</sup> wieder die Ansicht vertheidigt, dass für wirklich nach allen Richtungen gleichmässig elastische Körper der Werth von  $\mu = - 0,25$  sein müsse. Er glaubt, dass Glas diesem gleichmässig elastischen Zustand am nächsten kommt, und findet für dieses nach einer Methode, deren Princip wir im §. 55 andeuten können, in der That Werthe, welche nur wenig von 0,25 abweichen; sie liegen bei 6 Glasprismen zwischen  $\mu = - 0,224$  und  $- 0,257$ .

Es ist indess wohl anzunehmen, dass, wie Okatow hervorhob, ein durch langsame Abkühlung ganz weich gewordener Stahl ebenso vollkommen nach allen Richtungen gleich elastisch ist als Glas, und dann würden die Versuche Cornus eher für die eben ausgesprochene Ansicht, dass, dass  $\mu$  nicht für alle Körper denselben Werth hat, ein Beleg sein.

## §. 52.

**Kubische Zusammendrückbarkeit der festen Körper.** Die in den beiden letzten §§. besprochenen Constanten, der Elasticitätscoefficient und die Quercontraction bedingen alle Erscheinungen, welche durch die Elasticität der festen Körper hervorgerufen werden; sind diese beiden Grössen bekannt, so kann man alle Veränderungen, welche durch äussere Kräfte an den Körper hervorgebracht werden, berechnen. Umgekehrt kann man aber auch aus

<sup>1)</sup> Schneebeli, Poggend. Ann. Bd. CXL.

<sup>2)</sup> Cornu, Comptes Rendus. Bd. LXIX. pag. 333.



derartigen Beobachtungen die eine oder die andere Constante ableiten. Da wir nun aus den longitudinalen Aenderungen, sei es durch direkte Beobachtung, sei es durch die im 3. Abschnitt ausführlicher zu besprechenden longitudinalen Schwingungen, den Elasticitätscoefficienten mit grosser Sicherheit ableiten können, so können wir die meisten elastischen Veränderungen gleichzeitig benutzen, um den Werth von  $\mu$  zu bestimmen.

Wir betrachten zunächst die kubische Zusammendrückbarkeit der Körper, das heisst die Volumverminderung eines festen Körpers, wenn er von allen Seiten ganz gleichmässig durch Kräfte, welche an jedem Punkte der Oberfläche normal zu derselben wirken, zusammengedrückt wird. Bei derartig wirkenden Kräften verändern sich die Dimensionen des Körpers alle in demselben Verhältnisse, seine Gestalt bleibt sich immer ähnlich, und es tritt nur eine Verminderung seines Volumens ein. In welcher Weise diese Volumverminderung von den beiden Constanten, dem Elasticitätscoefficienten und dem Quercontractionscoefficienten abhängt, ergibt sich auf folgende Weise.

Für ein rechteckiges Parallelepipèd hatten wir nach Cauchy ganz allgemein

$$\pi = k\delta + K v \dots \dots \dots (1),$$

wenn  $\pi$  den auf die Flächeneinheit ausgeübten normalen Druck,  $\delta$  die diesem Druck entsprechende lineare der Druckrichtung parallele Aenderung,  $v$  die dabei stattfindende Aenderung des Volumens, und  $k$  und  $K$  zwei Constante bezeichnen.

Für den Fall nun, dass die Kraft  $\pi$  nur an den Endflächen des Stabes wirkt, wird, wie wir sahen,

$$v = \delta (1 - 2\mu)$$

und  $\mu$  gleich

$$\mu = \frac{K}{2K + k},$$

wenn wir jetzt mit  $\mu$  den Zahlenwerth der Quercontraction bezeichnen.

Hieraus folgt dann für  $v$ , die Volumänderung, die bei dem Zuge eintritt,

$$v = \delta (1 - 2\mu) = \delta \left(1 - \frac{2K}{2K + k}\right) = \delta \frac{k}{2K + k}.$$

Setzen wir diesen Werth für  $v$  in die Gleichung (1) ein, so wird

$$\begin{aligned} \pi &= k \cdot \delta \left(1 + \frac{K}{2K + k}\right) \\ \pi &= \frac{3K + k}{2\frac{K}{k} + 1} \cdot \delta \dots \dots \dots (2). \end{aligned}$$

Wir haben vorhin als Elasticitätscoefficienten jene Kraft definiert, welche an den Enden eines Parallelepipèds wirkend die Länge desselben in der Zugrichtung verdoppelt, welche somit  $\delta = 1$  macht. Die Gleichung (2) liefert uns deshalb den Elasticitätscoefficienten in den beiden Constanten  $K$  und  $k$

$$E = \frac{3K + k}{2\frac{K}{k} + 1} \dots \dots (3).$$

Der reciproke Werth des Elasticitätscoefficienten gibt uns die lineare Ausdehnung des Parallelepipeds oder seine Verkürzung, wenn die an den Endflächen wirkende Kraft der Einheit gleich ist, oder den linearen Ausdehnungscoefficienten, mit dem wir in jedem Falle die wirksame Kraft multipliciren müssen, um die Verlängerung oder Verkürzung des ausgedehnten Parallelepipeds oder Cylinders zu erhalten. Bezeichnen wir diesen Quotienten mit  $C$ , so ist derselbe

$$C = \frac{2 \frac{K}{k} + 1}{3 \frac{K}{k} + k}$$

Wird nun das Parallelepiped von allen Seiten ganz gleichmässig zusammengedrückt oder ausgedehnt, so ist  $\delta$  nach allen drei Richtungen dasselbe, und damit wird die Volumsveränderung  $v = 3 \delta$  oder die dann nach einer Richtung stattfindende Linearänderung gleich  $\frac{1}{3} v$ . Damit erhalten wir dann aus der Gleichung (1), indem wir  $\delta$  durch  $v$  ausdrücken,

$$\pi = \frac{1}{3} k v + K \cdot v = \frac{3 \frac{K}{k} + k}{3} \cdot v,$$

$$v = \frac{3}{3 \frac{K}{k} + k} \cdot \pi.$$

Der Coefficient der kubischen Compressibilität, der Coefficient, mit dem wir den auf der Flächeneinheit normal zu derselben wirkenden Druck multipliciren müssen, um für das Parallelepiped die Aenderung der Volumeneinheit zu erhalten, ist somit

$$C_1 = \frac{3}{3 \frac{K}{k} + k}; \dots \dots (4);$$

wie man sieht, hängt derselbe wesentlich ab von dem Verhältniss der beiden Constanten  $K$  und  $k$ .

Kennt man für eine Substanz den Werth von  $E$  oder  $C$ , und beobachtet dann den kubischen Compressioncoefficienten  $C_1$ , so kann man aus beiden den Werth des Verhältnisses  $K$  und  $k$  ableiten. Dividiren wir nämlich beide durch einander, so wird

$$\frac{C_1}{C} = \frac{3}{2 \frac{K}{k} + 1},$$

$$\frac{K}{k} = \frac{3 C - C_1}{2 C_1}.$$

Wir können aber auch direkt  $C_1$  sowie  $K$  und  $k$  durch  $C$  oder  $E$  und  $\mu$  ausdrücken.

Die Gleichung (3) liefert

$$E \left( 2 \frac{K}{k} + 1 \right) = 3 K + k \dots \dots (3a),$$

oder da

$$1 - 2 \mu = \frac{k}{2 \frac{K}{k} + k} \dots \dots (3b),$$

in Verbindung mit Gleichung (4)

$$\frac{E}{1 - 2 \mu} = \frac{3}{C_1}$$

$$C_1 = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} = 3 C (1 - 2\mu).$$

Die Gleichungen (3a) und (3b) liefern ferner

$$K = E \frac{\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}; k = \frac{E}{1 + \mu}.$$

Ebenso wie man hiernach aus den bekannten Werthen von  $E$  und  $\mu$  den Werth von  $C_1$  erhalten kann, lässt sich auch der Werth von  $\mu$  aus den Beobachtungen von  $C_1$  und  $E$  ableiten.

Ueber die Compression fester Körper hat Regnault bei Gelegenheit seiner Untersuchung über die Compression der Flüssigkeiten einige Versuche angestellt<sup>1)</sup>. Er benutzte zu diesen Versuchen Gefässe, deren Form und Substanz genau bestimmt waren, entweder Kugeln von Kupfer oder Messing, deren innerer und äusserer Durchmesser mit grösster Genauigkeit gemessen war, und mit deren Innern eine lange Glasröhre in Verbindung stand; oder er nahm ein Glasgefäss  $A$  (Fig. 60), dessen innere Capacität

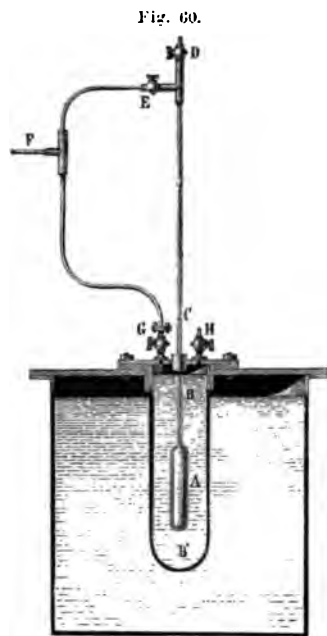


Fig. 60.

und dessen äusseres Volumen mit grösster Sorgfalt bestimmt war. Die Gefässe füllte er bis zu einer Marke  $C$  mit Wasser, welche sich auf der Glasröhre  $CD$  dem Halse des Gefässes befindet. Darauf senkte er das Gefäss in einen ringsum fest geschlossenen mit Wasser gefüllten Behälter  $BB'$  und übte auf das Wasser des Behälters einen Druck  $P$  aus, indem er aus einem Behälter durch die Röhrenleitung  $FG$  bei geschlossenem Hahn  $E$  auf die Oberfläche des Wassers in  $B$  comprimirte Luft wirken liess. Auf diese Weise drückte er das Gefäss  $A$  von allen Seiten ganz gleichmässig zusammen, das Volumen desselben verminderte sich um eine dem Druck proportionale Grösse, und man sah das Wasser in der Röhre über  $C$  heraufsteigen; die Steighöhe misst man an einer auf dem Rohre angebrachten Theilung. Man kann nun die durch den äussern Druck hervorgebrachte Volumverminderung aus der Steighöhe des Wassers ableiten, wenn man die Capacität der Röhre im Verhältniss zum Volumen des ganzen Gefässes kennt. Dieses Verhältniss wurde

durch Wägung genau bestimmt.

Aus den Beobachtungen der Volumverminderung von Hohlräumen lässt sich nicht unmittelbar auf den kubischen Compressionscoefficienten des Materials schliessen, aus welchem die Wandung des Hohlraumes gefertigt ist, da die Volumverminderung des Hohlraumes eine andere sein muss als jene eines massiven Körpers, welche den Hohlraum ausfüllen würde. Dass das

<sup>1)</sup> Regnault. Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. T. XXI.

der Fall sein muss, ergibt sich aus der einfachen Ueberlegung, dass, wenn der Hohlraum mit demselben Material angefüllt ist, durch die Compression im Innern desselben eine Spannung entstehen muss, welche den comprimirenden Kräften entgegenwirkt, welche Spannung fortfällt, wenn der innere Raum leer ist oder eine Flüssigkeit enthält, welche, wie bei den Versuchen von Regnault, aus dem Hohlraum in Folge der Verminderung des Volumens austritt. Die Theorie der Elasticität gestattet aber auch in diesem Falle die durch die Compression eintretende Volumverminderung zu berechnen.

Durch den auf die äussere Kugelfläche wirkenden Druck werden die Radien der Kugel verkleinert; bezeichnen wir den Radius der innern Kugelfläche vor der Compression mit  $R_0$ , so wird derselbe nach der Compression  $R_0 (1 - \varphi_0)$ , wenn wir mit  $\varphi_0$  einen sehr kleinen gleich zu bestimmenden Bruch bezeichnen. Der Hohlraum der Kugel, welcher vor der Compression  $\frac{4}{3} R_0^3 \pi$  war, wird deshalb nach der Compression  $\frac{4}{3} R_0^3 (1 - \varphi_0)^3 \pi$  oder, da  $\varphi_0$  nur sehr klein ist,  $\frac{4}{3} R_0^3 (1 - 3 \varphi_0) \pi$ . Die stattgefundenen Volumverminderung ist deshalb

$$\Delta V = \frac{4}{3} R_0^3 \pi - \frac{4}{3} R_0^3 \pi (1 - 3 \varphi_0) = \frac{4}{3} R_0^3 \pi \cdot 3 \varphi_0$$

oder in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens  $V$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \varphi_0.$$

Die Theorie der Elasticität ergibt nun<sup>1)</sup>, dass bei einer Hohlkugel, welche auf ihrer äussern Fläche gleichmässig zusammengepresst wird, die Verkürzung  $\varphi$  der Radien einer in der Kugelschale liegenden Kugelfläche vom Radius  $r$  gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = c + \frac{b}{r^3}$$

worin  $c$  und  $b$  zwei Constante sind, welche abhängig sind von dem Drucke, den die Kugel erfährt, und den Radien der äussern und innern Fläche der Hohlkugel. Sind diese beiden Radien  $R_1$  und  $R_0$ , und ist der Druck, der auf die Flächeneinheit der äussern Fläche wirksam ist, gleich  $P_1$ , der auf die Flächeneinheit der innern Fläche wirkende gleich  $P_0$ , so erhält man für diese beiden Constanten den Werth

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{P_1 R_1^3 - P_0 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{R_1^3 - R_0^3}$$

oder, wenn, wie bei den Versuchen von Regnault  $P_0$ , der Druck auf die innere Fläche der Hohlkugel gleich 0 ist,

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 \cdot R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Daraus folgt dann für  $\varphi$

<sup>1)</sup> Man sehe Lamé, théorie mathématique de l'élasticité des corps solides p. 211 ff. Clebsch. Theorie der Elasticität fester Körper §. 18. p. 50 ff.

$$\varphi = P_1 \left\{ \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 \cdot R_1^3}{r^3 (R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Es folgt somit, dass in diesem Falle die Radien der verschiedenen in der Hohlkugel liegenden Kugelflächen nicht in demselben Verhältnisse verkürzt werden, dass die Verkürzung vielmehr eine relativ kleinere ist, je näher die Kugelfläche der äussern Grenzfläche der Hohlkugel liegt. Die relativ grösste Verkürzung erhält der Radius der die Hohlkugel nach innen begrenzenden Kugelfläche, für welche  $r$  den kleinsten Werth, nämlich  $R_0$ , hat. Setzen wir diesen Werth von  $r$  in die Gleichung für  $\varphi$  ein, so erhalten wir  $\varphi_0$  dessen dreifacher Werth die Volumverminderung des Hohlraumes ist, oder

$$3 \varphi_0 = \frac{\Delta v}{V} = 3 \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{2k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Drücken wir hierin  $K$  und  $k$  durch  $E$  und  $\mu$  aus, so wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Die Compression einer massiven Kugel erhalten wir aus den obigen Ausdrücken, indem wir den Radius der innern Hohlkugel, also  $R_0$  gleich 0 setzen. Damit wird  $b$  gleich 0, und wir bekommen

$$\varphi = \frac{1}{3K+k} \cdot P_1$$

und die Volumverminderung einer in der massiven Kugel gedachten Kugel von gleichem Volum wie die Hohlkugel

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = 3 \frac{1}{3K+k} \cdot P_1 = 3 \frac{1-2\mu}{E} \cdot P_1 = C_1 \cdot P_1.$$

Es ergibt sich also auch auf diesem Wege, dass die Compression einer massiven Kugel gerade wie die eines massiven Parallelepipedes gleich ist dem Produkte aus dem Compressionscoefficienten und dem auf die Flächeneinheit der Kugel wirkenden normalen Drucke, dass dagegen die Volumverminderung der Hohlkugel eine stärkere ist; das Verhältniss beider ist

$$\frac{\Delta V}{\Delta V_1} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Der Ausdruck für  $\Delta V$  lässt aber erkennen, dass wir aus der beobachteten Volumverminderung des Hohlraumes, wenn  $E$  bekannt ist,  $\mu$  und  $C_1$  berechnen können. Bezeichnen wir den direkt aus der Beobachtung der Volumverminderung der Kugel sich ergebenden Compressionscoefficienten mit  $C_2$ ,

$$\frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} = C_2,$$

so wird

$$\mu = 1 - \frac{2}{3} C_2 \cdot E.$$

Folgende Tabelle enthält die von Regnault an einer Hohlkugel von Kupfer ausgeführten Versuche. Bei dieser Kugel waren

$$R_1 = 29^{\text{mm}},9; R_0 = 29^{\text{mm}},105; V = 109^{\text{cc}},11.$$

$\frac{\Delta V}{V}$	$P_1$	$C_2$
0,000112556	2,8017	0,000003123
0,000177533	4,3687	0,000003156
0,000233944	5,6753	0,000003140
0,000265950	6,4502	0,000003224
0,000329544	7,8202	0,000003273

Die Drucke  $P_1$  sind in Atmosphären angegeben; die Einheit des Druckes ist dabei, wie wir später nachweisen werden, 0,010328 Kilogramm auf das Quadratmillimeter; um den Werth  $C_2$  für ein Kilogramm zu erhalten, müssen wir daher die oben angeführten Werthe mit 0,010328 dividiren.

Die beiden letzten Beobachtungsreihen weichen von den drei ersten so bedeutend ab, dass wir annehmen müssen, es habe dort bereits eine bleibende Deformation der Kugel stattgefunden. Nehmen wir das Mittel aus den drei ersten Zahlen, so wird

$$C_2 = 0,000003139 \text{ oder für 1 Kilogramm} = 0,0003039.$$

Für weiches Kupfer erhielt Wertheim (§. 50)

$$E = 10519$$

aus der direkten Beobachtung der Verlängerung. Damit wird

$$\mu = 1 - 0,7103 = 0,2897$$

$$C_1 = 1,2618 \cdot C = 0,0001199.$$

Der kubische Compressionscoefficient ist hiernach etwa  $\frac{5}{4}$  des linearen, und der Werth von  $\mu$  würde etwa dem des harten Stahles gleich sein.

Die Versuche mit der Messingkugel finden sich in der folgenden Tabelle zusammengestellt; für diese Kugel war

$$R_1 = 29^{\text{mm}},45; R_0 = 28^{\text{mm}},73; V = 102^{\text{cc}},71.$$

$\frac{\Delta V}{V}$	$P_1$	$C_2$
0,000074569	1,5834	0,000003370
0,000112723	2,4282	0,000003325
0,000150909	3,2233	0,000003350
0,000190904	4,0254	0,000003392
0,000222921	4,7319	0,000003371
0,000262613	5,5724	0,000003372
0,000299431	6,3860	0,000003355
0,000335997	7,1860	0,000003345
0,000396031	8,4119	0,000003369
0,000433301	9,1515	0,000003387

Die Constanz der Werthe von  $C_2$  beweist, dass hier auch bei den stärksten Drucken die Elasticitätsgrenze noch nicht überschritten ist; als

Mittel ergibt sich aus den zehn Beobachtungen

$$C_2 = 0,00003363 \text{ oder für ein Kilogramm } 0,0003256.$$

Der Werth von  $E$  für Messing ist nach Wertheim's Bestimmungen<sup>1)</sup>

$$E = 9271 \text{ und daraus } C = 0,0001078.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \mu &= 1 - 0,6708 = 0,3292 \\ C_1 &= 1,025 \cdot C = 0,0001106. \end{aligned}$$

Der Werth von  $\mu$  entspricht somit hier ziemlich genau dem von Wertheim angenommenen, der kubische Compressionscoefficient ist demzufolge fast genau gleich dem linearen.

Ausser diesen Versuchen hat Regnault auch die Compression einer Glasröhre bestimmt, welche die Form eines Cylinders mit halbkugelförmigen Endflächen besass. Um die Compression eines solchen Gefässes zu berechnen, hat man dasselbe in zwei Theile zerlegt zu denken, in den Cylinder mit geraden Endflächen und in die aus den beiden Halbkugeln zusammengesetzte Kugel. Wird jeder dieser Theile unter denselben Umständen für sich zusammengedrückt, so ist die Summe der Compressionen gleich der Compression des zu diesen Versuchen benutzten Gefässes. Es folgt das aus der Ueberlegung, dass der Druck auf die zur Längsaxe senkrechten Endflächen desselben durch Vermittlung der Halbkugeln gerade so wirkt, wie wenn er direkt auf die Endflächen wirken würde, da diese Endflächen grösste Kreise der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel sind.

Bezeichnen wir die Radien der Halbkugeln wie vorhin mit  $R_0$  und  $R_1$ , den auf der Flächeneinheit der äussern Fläche wirkenden Druck mit  $P_1$ , so erhalten wir zunächst für die Volumverminderung der Kugel wie vorhin

$$\Delta V = 3 \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{2k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V$$

oder, wenn wir  $K$  und  $k$  durch  $\mu$  und  $E$  ausdrücken,

$$\Delta V = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V,$$

wenn  $V$  das Volumen der Kugel bezeichnet.

Die Volumverminderung des Cylinders erhalten wir auf folgende Weise. Ist  $H$  die Höhe des Cylinders,  $R_0$  der Radius desselben, so ist das Volumen desselben vor der Compression

$$V_1 = R_0^2 \pi \cdot H.$$

Geht nun durch die Compression die Höhe desselben über in  $H(1 - \delta)$ , der Radius in  $R_0(1 - \varphi_0)$ , so wird

$$V_1 - \Delta V_1 = R_0^2 \pi H (1 - \delta) (1 - \varphi_0)^2 = R_0^2 \pi H (1 - \delta - 2 \varphi_0)$$

und daraus

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \delta + 2 \varphi_0.$$

<sup>1)</sup> Wertheim. Annales de chim. et de phys. III. Série T. XII. p. 598.

Für die Verkürzung  $\delta$  der Längsaxe liefert die Theorie der Elasticität den Werth<sup>1)</sup>

$$\delta = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2},$$

wo  $R_1, R_0$  die Radien der innern und äussern Cylinderfläche, welche bei den Versuchen von Regnault denen der Halbkugel gleich sind, und  $P_1, P_0$  die auf die Flächeneinheiten der äussern und innern Fläche wirkenden Drucke sind. Da auch bei diesen Versuchen  $P_0 = 0$  ist, so wird

$$\delta = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Für die Verkürzung  $\varphi$  eines Radius der Cylinderschale erhält man ganz analog wie bei der Kugel

$$\varphi = c + \frac{b}{r^2},$$

also für die Verkürzung des Radius der innern Cylinderfläche, für welche  $r = R_0$  ist,

$$\varphi_0 = c + \frac{b}{R_0^2}.$$

Die beiden Constanten  $c$  und  $b$  erhalten hier folgende Werthe

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2}; \quad b = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2 (P_1 - P_0)}{R_1^2 - R_0^2}$$

oder, wenn wie bei den Versuchen von Regnault  $P_0 = 0$ ,

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1; \quad b = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Daraus folgt

$$\varphi_0 = \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1$$

und schliesslich

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \delta + 2\varphi_0 = \left\{ \frac{3}{3K+k} + \frac{2}{k} \right\} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Ersetzen wir auch hier  $K$  und  $k$  durch  $\mu$  und  $E$ , so wird

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Für die Volumverminderung des ganzen Hohlraumes erhalten wir darnach

$$\Delta V + \Delta V_1 = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V + \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1 V_1$$

oder

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{(V + V_1) \cdot P_1} = \left\{ \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot V + \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \right\} \frac{1}{V + V_1}.$$

Wäre das der Compression ausgesetzte Gefäss massiv, also  $R_0 = 0$ , so würde, da die Constante  $b$  für Kugel und Cylinder dann gleich 0 wird,

<sup>1)</sup> Man sehe Lamé a. a. O. p. 188 ff.



die Compression des den Hohlraum gleichen Volumens auch jetzt wieder

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{V + V_1} = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot P_1 = C_1 P_1.$$

Man sieht somit, dass auch jetzt gemäss unserer vorigen Bemerkung die Compression eine stärkere ist.

Um aus dieser Beobachtung  $\mu$  zu berechnen, haben wir nur obige Gleichung nach  $\mu$  aufzulösen. Setzen wir, um abzukürzen,

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{(V + V_1) \cdot P_1} = a; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = M; \quad \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} = N,$$

so erhält man leicht

$$\frac{\frac{2}{3} N \cdot V + 5 M V_1 - a (V + V_1) \cdot E}{\frac{2}{3} N V + 4 M V_1} = \mu.$$

Bei den Versuchen von Regnault waren

$$R_1 = 12^{\text{mm}}, 128; \quad R_0 = 10^{\text{mm}}, 728; \quad H = 208^{\text{mm}}, 7;$$

$$V_1 = 75^{\text{cc}}, 499; \quad V = 5^{\text{cc}}, 167; \quad V + V_1 = 80^{\text{cc}}, 666.$$

Als Mittel aus 10 Versuchsreihen, in denen  $P_1$  von 2,5 bis 10,5 Atmosphären zunahm, ergab sich für  $P_1 = 1$  Atmosphäre

$$a = 0,000028289,$$

somit für  $P_1 = 1$  Kilogramm

$$a = 0,002739.$$

Ferner gibt Wertheim als Resultat der Ausdehnungsversuche für Glas <sup>1)</sup>

$$E = 6040; \quad C = \frac{1}{E} = 0,0001655.$$

Damit wird

$$\mu = 0,319; \quad C_1 = \frac{1,086}{E} = 0,000179.$$

Die Versuche von Regnault bestätigen die am Schlusse des vorigen §. ausgesprochene Ansicht, dass der Werth von  $\mu$  für die verschiedenen Stoffe verschieden ist.

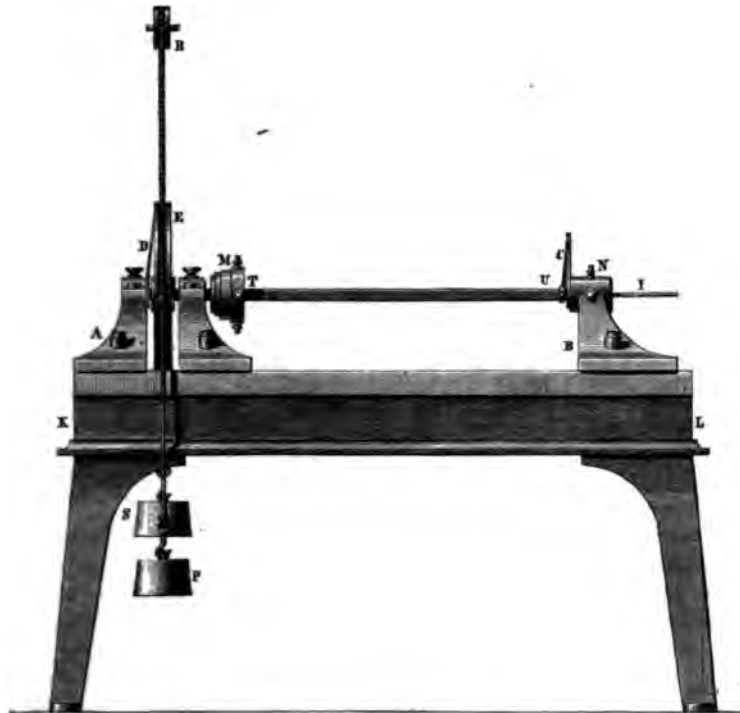
### §. 53.

**Torsionselasticität.** Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die auf einen festen Körper wirkenden Kräfte stets normal gegen die Oberfläche gerichtet waren, so dass nur Verlängerungen oder Verkürzungen der Dimensionen des Körpers eintraten. Wir können aber die Kräfte auch in andern Richtungen wirken lassen, so dass neben den Veränderungen der Dimensionen des Körpers auch Verschiebungen der Moleküle gegen einander vorkommen. Bei der Untersuchung der dann eintretenden Aenderungen beschränken wir uns auf die Betrachtung der einfachsten Fälle, wir beginnen mit der experimentellen Untersuchung der elastischen Kräfte, welche auftreten, wenn wir die einzelnen Schichten eines Stabes dadurch gegeneinander verschieben, dass wir alle, die einen mehr, die andern weniger um eine im Innern des Stabes liegende Axe drehen.

<sup>1)</sup> Wertheim. Annales de chim. et de phys. III. Série T. XIX. p. 137.

Wir erreichen das auf die einfachste Weise, wenn wir einen Stab oder einen Draht an seinem einen Ende befestigen, an seinem andern Ende einen zur Längsrichtung des Stabes senkrechten Hebelarm anbringen und an dem Hebel eine Kraft wirken lassen, welche den Stab um seine Längsaxe dreht. Es entwickelt sich dann in dem Stabe, durch die Verschiebung der dem untern Ende näher liegenden Schichten gegen die entfernteren eine der Drehung entgegenwirkende Kraft, welche wächst mit dem Winkel, um welchen man das untere Ende des Stabes gedreht hat.

Fig. 61.



Nehmen wir das Drehungsmoment des Gewichtes  $P$ , welches wir angebracht haben,  $p$ , so dreht sich der Stab so lange, bis zu einem solchen Winkel  $\alpha$ , dass das Drehungsmoment, welches die Gegenwirkung des Stabes ausübt, um ihn zurückzudrehen, gleich ist dem Drehungsmoment  $p$ . Es treten demnach bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes immer zwei Drehungsmomente auf, welche, unter sich gleich, sich das Gleichgewicht halten. Das rückwirkende Drehungsmoment des Drahtes bezeichnet man mit dem Namen der Torsionskraft; es ist unsere Aufgabe, zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dieser und dem Drehungswinkel besteht.

Die ausgedehntesten Versuche zur Beantwortung dieser Frage hat Wertheim<sup>1)</sup> angestellt; er bediente sich dazu des Apparates Fig. 61. Der-

<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. t. 50. p. 202 ff.

selbe besteht aus einer schweren eisernen Bank, auf welcher sich zwei Aufsätze befinden, ähnlich denen einer Drehbank. Der erstere,  $B$  ist beweglich er dient dazu, das eine Ende des Stabes  $U$ , den man untersuchen will, fest zuhalten. Zu dem Ende trägt er ein durchbohrtes Stück, durch welches der Stab hindurchgesteckt wird, und in welchem er mittels einer Druckschraube  $N$  festgeklemmt wird.

Es ist nothwendig, dass dieses Ende  $U$  des Stabes während der Versuche ganz fest ist: um sich davon zu überzeugen, ist an ihm ein Zeiger  $C$  angebracht, dessen Ende immerfort auf eine am Apparat angebrachte Mark hinzeigen muss.

Das vordere Ende  $T$  des Stabes ist in gleicher Weise in die hohle Axe  $M$  eingesteckt und dort festgeklemmt. Diese Axe kann sich in zwei horizontalen Lagern drehen; sie trägt eine Rolle  $E$ , um welche zwei Schnüre gelegt sind. Die erste ist an dem Haken bei  $E$  befestigt und trägt das Gewicht  $P$ ; die zweite ist an der andern Seite der Rolle befestigt, steigt von dort zur Rolle  $R$  auf, ist um diese herumgelegt und trägt an ihrem andern Ende ein Gewicht  $S$ , welches gleich  $P$  ist. Es ist klar, dass diese beiden Gewichte die Rolle  $E$  in gleichem Sinne zu drehen und somit dem Stabe eine Torsion zu ertheilen streben.

Um die ertheilte Drehung zu messen, ist die eine Seite der Rolle  $E$  mit einem getheilten Kreise zu versehen, auf den ein unbeweglicher Zeiger  $D$  eingestellt ist. Man bemerkt die Stellung des Kreises vor der Drehung, und neuerdings, wenn die Gewichte wirken; die gemessene Drehung des Kreises ist gleich dem Torsionswinkel  $\omega$ . Wir haben nun zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dem Winkel  $\omega$  und der Wirkung der beiden Gewichte  $P$  besteht.

Das Drehungsmoment der beiden Gewichte,  $2Pq$ , wenn wir den Radius der Rolle gleich  $q$  setzen, sei gleich  $F$ .

I. Untersucht man zunächst die Abhängigkeit des Torsionswinkels von der Grösse des Drehungsmomentes  $F$ , so zeigt sich, dass, wenn wir  $F$  im Verhältniss von 1, 2, 3, 4 . . . ändern, die Torsionswinkel in demselben Verhältniss  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  . . . werden. Da nun, wie wir sahen, die gegenwirkende Torsionskraft gleich dem drehenden Momente  $F$  ist, so folgt der wichtige Satz, dass die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

II. Wenden wir Stäbe derselben Substanz, aber verschiedener Länge an, so dass die Längen im Verhältniss 1, 2, 3, 4 . . . stehen, so findet man bei Anwendung derselben Kraft, dass die Torsionswinkel  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  sind. Die Torsionswinkel sind demnach bei gleicher tordirender Kraft der Länge der tordirten Stäbe direkt proportional.

III. Wendet man cylindrische Stäbe an, deren Radien sich verhalten wie 1, 2, 3, 4, so werden bei Anwendung derselben Kraft die Torsionswinkel bei zunehmendem Radius kleiner, und zwar findet man sie  $\frac{\omega}{16}$ ,  $\frac{\omega}{81}$ ,  $\frac{\omega}{256}$ . Es sind also, da 1, 16, 81, 256 gleich sind  $1^4$ ,  $2^4$ ,  $3^4$ ,  $4^4$ , bei Anwendung derselben drehenden Kraft die Torsionswinkel umgekehrt proportional den vierten Potenzen der Radien der Stäbe.

IV. Wenn man bei gleichen Dimensionen und gleichen Kräften verschiedene Substanzen anwendet, so findet man die Torsionswinkel verschie-

den. Um deshalb aus den beobachteten Dimensionen des Stabes und den drehenden Kräften die Torsionswinkel zu erhalten, bedarf es eines gewissen für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Coefficienten  $\frac{1}{T}$ .

Wir erhalten demnach für den Torsionswinkel den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{T} \cdot \frac{F \cdot l}{r^4}.$$

Die Torsionskraft des Stabes ist gleich der Kraft, welche dem Stabe die Torsion erteilt, denn der Stab dreht sich so lange, bis die gegenwirkende Kraft desselben gleich ist der drehenden Kraft. Wir erhalten daher die Torsionskraft, welche der Stab bei einer Drehung um den Winkel  $\omega$  entwickelt, wenn wir die soeben erhaltene Gleichung nach  $F$  auflösen. Wir erhalten

$$F = \omega \cdot T \cdot \frac{r^4}{l},$$

oder die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der vierten Potenz des Radius des tordirten Stabes und umgekehrt proportional der Länge desselben, ausserdem für jede Substanz noch proportional einem besonderen Coefficienten, dem sogenannten Torsionscoefficienten. Die physikalische Bedeutung dieses Coefficienten ist leicht zu erhalten. Setzen wir  $r = 1$  und  $l = 1$ , so wird für einen Draht von der Längeneinheit z. B. 1<sup>m</sup> und der Einheit des Radius z. B. 1<sup>mm</sup>

$$F = \omega T.$$

Nun wird der Torsionskraft das Gleichgewicht gehalten durch ein am Hebelarm  $\varrho$  angreifendes Gewicht  $P$ , so dass wir setzen können

$$F = P \cdot \varrho = \omega \cdot T,$$

woraus

$$P \cdot \frac{\varrho}{\omega} = T.$$

Und machen wir schliesslich  $\varrho = \omega$ , so wird

$$P = T.$$

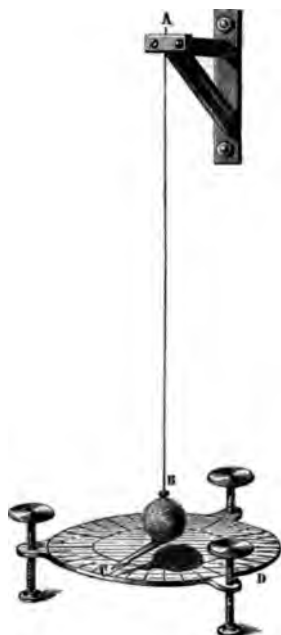
Der Torsionscoefficient  $T$  gibt uns also das Gewicht an, welches am Ende eines mit dem Stabe von der Länge 1 und dem Querschnitt 1 verbundenen Hebelarmes von der Länge  $\varrho$  wirken muss, um der Torsionskraft das Gleichgewicht zu halten, wenn wir den Stab um einen Winkel  $\omega$  gedreht haben, so dass der von dem Ende des Hebelarms durchlaufene Bogen die Länge des Radius erreicht hat; oder er ist, wenn wir  $\varrho$  gleich der Längeneinheit, gleich 1 Meter setzen, gleich jener Kraft, welche, an einem Radius von 1 Meter Länge wirkend, den Stab so stark tordirt, dass der Endpunkt des Radius einen Bogen von einem Meter zurücklegt.

Die soeben beschriebene Methode von Wertheim eignet sich besonders zur Untersuchung der Torsion an Stäben von grossen Dimensionen. Um die wegen ihrer vielen Anwendungen weit wichtigern Gesetze der Torsion an feinen Fäden oder Drähten zu untersuchen, wandte Coulomb eine andere Methode an<sup>1)</sup>, die sogenannte Methode der Oscillationen. Wir befestigen

<sup>1)</sup> Coulomb, Mémoires de l'Acad. des Sciences. Paris 1784.

einen Faden mit seinem obern Ende an einem festen Haken *A* (Fig. 62) und hängen an sein unteres Ende einen schweren Körper, z. B. eine

Fig. 62.



lische Kugel. Hängt die Kugel vertical herab, dreht man dieselbe um die verticale Axe um einen beliebigen Winkel und überlässt sie derselben. In Folge der durch die Drehung entstandenen Torsionskraft wird dann der Faden wieder aufdrehen und dabei die Kugel um die verticale Axe mit steigender Geschwindigkeit drehen, da die Torsionskraft continüirlich zunimmt. Nach einiger Zeit wird sich nun der Faden in die Lage befinden, welche er einnahm, bevor er gedreht war. Aber in diesem Augenblicke ist die Rotationsgeschwindigkeit am grössten geworden, die Bewegung wird wegen der eben so grossen Geschwindigkeit fortdauern und der Faden entgegengesetzte Torsion erhalten. Dadurch nun nach und nach die Bewegung verzögert wird, bis sie gleich Null, wenn der Winkel der entgegengesetzten Torsion gleich dem ursprünglichen Torsionswinkel geworden ist. Dann wird die Bewegung umkehren, wieder über die Gleichgewichtslage hinausgehen u. s. f., so dass dieselben Aenderungen zeigt wie das Pendel; eine hin- und herdrehende Bewegung mit abnehmender Amplitude, weil Reibung,

Widerstand der Luft und die unvollkommene Elasticität des Drahtes eine hemmte Fortdauer verhindern.

Es ist nun klar erstens, dass, wenn die Torsionskraft des Fadens proportional ist dem Torsionswinkel, dass dann die Oscillationen dieselbe Zeit dauern, welches auch ihre Ausdehnung sei, ob sie mehrere Umdrehungen umfassen oder nur wenige Bruchtheile eines Umdrehens. Denn dann wird in demselben Verhältnisse, als die Drehung aus der Gleichgewichtslage grösser wird, auch die Drehungsgeschwindigkeit gegeben, welche die Torsionskraft dem Faden ertheilt; wenn aber die Geschwindigkeit immer der Drehung proportional ist, der doppelten Drehung die doppelte, der dreifachen die dreifache Geschwindigkeit entspricht, so müssen alle Drehungen, alle Oscillationen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Zweitens aber ist umgekehrt klar, dass, wenn dieser Isochronismus der Oscillationen stattfindet, dass dann auch die Proportionalität zwischen der Torsionskraft und Torsionswinkel besteht. Es genügt daher, um das eben aufgestellten Gesetze für diesen Fall zu beweisen, zu zeigen, dass die Oscillationen isochron sind.

Um diese Beobachtung mit der nothwendigen Genauigkeit zu machen, verfährt man in ganz ähnlicher Weise wie bei Pendelbeobachtungen: man hängt den Faden an einem Widerhalt *A* auf (Fig. 62), befestigt an dem unteren Ende den Faden eine Kugel *B* einen möglichst leichten Zeiger *C* und stellt zur Messung der Oscillationsweiten einen getheilten Kreis darunter, so dass dessen Mittelpunkt von dem verlängerten Faden getroffen wird. Der Beobachte

sich in einer gewissen Entfernung mit einem Fernrohr so auf, dass er den Zeiger visiren und eine Sekundenuhr beobachten kann, die er zu arretiren und loszulassen im Stande ist. Im Augenblick, in welchem nun der Zeiger das Gesichtsfeld des Fernrohrs passirt, setzt er die Uhr in Gang. Nach Zählung von  $n$  Oscillationen mit der Amplitude  $A$  bestimmt er dann die verfllossene Zeit. Dieselbe Beobachtung wird dann mit kleinern oder grössern Oscillationsweiten gemacht, wobei man selbst bis zu mehreren ganzen Umdrehungen des Fadens fortschreitet. Der Versuch zeigt dann mit vollkommener Exaktheit die Gleichheit der Oscillationsdauer, welches auch die Amplituden sind. Es folgt also, dass die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

Bezeichnet man nun mit  $f$  die Torsionskraft für die Einheit der Drehung, oder die Kraft, welche, an einem Hebelarme von der Länge eines Meters angebracht, der Torsion des Fadens das Gleichgewicht hält, wenn die Drehung so gross war, dass das Ende des Hebels einen Bogen von 1 Meter Länge zurücklegte — man könnte sie als den Torsionscoefficienten dieses bestimmten Drahtes bezeichnen —, so hat man für die Kraft  $F$ , welche eine Drehung um einen Bogen  $\omega$  bewirkt,

$$F = f \cdot \omega.$$

Man sieht nun leicht ein, dass die Torsionskraft ihren Sitz nur in dem Faden selbst hat, und dass sie nicht von der Natur und dem Gewicht der Kugel  $B$  abhängt. Indess, da es die Torsionskraft ist, welche die Kugel in Bewegung setzt, so wird die derselben ertheilte Geschwindigkeit und die Oscillationsdauer von der Masse der Kugel abhängig sein. Es ist nicht schwierig, diese Abhängigkeit zu erhalten.

Der Torsionskraft hält bei der Drehung um einen Bogen  $\omega$  die im Abstände 1 von dem Faden angebrachte Kraft  $f\omega$  das Gleichgewicht, die Bewegung erfolgt also gerade so, als wenn der Faden keine Drehungskraft hätte, sondern im Abstände 1 von der Drehungsaxe eine Kraft  $f\omega$  dem System eine Drehung in demselben Sinne ertheilen würde, wie es die Torsionskraft thut. Diese Kraft folgt nun ganz denselben Gesetzen wie jene, welche die Bewegung des Pendels veranlasste. Denn beim Pendel hatten wir, wenn das Gewicht des schweren Punktes am Ende des Pendels  $p$  war, für einen Ausschlagswinkel  $\alpha$  als bewegende Kraft den Werth  $p l \cdot \sin \alpha$ ; oder da für die kleinen Schwingungen, für welche unser Ausdruck für die Schwingungsdauer galt,  $\sin \alpha = \alpha$  gesetzt werden kann, für die bewegende Kraft  $p l \alpha$ ; also auch eine bewegende Kraft, welche dem Ausschlagswinkel proportional ist. Wie wir nun beim Pendel als Ausdruck für die Schwingungsdauer hatten, wenn wir mit  $m$  die Masse des bewegten Gewichtes bezeichneten,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l^2}{g \cdot m \cdot l}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l^2}{p \cdot l}},$$

so ist klar, dass, wenn im Abstände 1 von unserem Faden ein schwerer Punkt von der Masse  $m$  wäre, der Ausdruck für Schwingungsdauer sein würde

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{f}}$$

Anstatt des Punktes von der Masse  $m$  im Abstände 1 haben wir aber die um den Faden vertheilte Masse  $M$  der schweren Kugel und des Zeigers. Bezeichnen wir nun aber mit  $Mk^2$  das Trägheitsmoment der Masse  $M$  in Bezug auf die verticale Drehungsaxe, so ist dieses gleich der Masse  $m$ , welche im Abstände 1 von der Drehungsaxe die rings vertheilt liegenden Massentheilchen ersetzt. Wir erhalten demnach für die Schwingungsdauer in unserem Falle

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{Mk^2}{f}}.$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der schwingenden Masse kann man hier die §. 34 besprochene Methode anwenden, bei welcher wir eine der jetzigen ähnliche Anordnung des Versuches vorausgesetzt haben. Man hätte nur als Zeiger an der Kugel der Fig. 62 einen leichten Stab zu wählen, der in seiner Mitte unten an der Kugel befestigt ist, und diesen in der §. 34 angegebenen Weise zu belasten. Am Besten versieht man dazu den Stab in genau gemessenen und an beiden Seiten gleichen Abständen  $r_1, r_2$  mit Spitzen, welche nach oben hervorstehen, und hängt auf diese an kleinen Ringen die Gewichte. Die Rechnungen sind dann genau so zu führen, wie es §. 34 angegeben ist.

Ist aber die Masse des Drahtes gegenüber derjenigen der Kugel sehr klein, und benutzt man als Zeiger einfach eine auf der Kugel gezogene Marke, so kann für das Trägheitsmoment der schwingenden Masse einfach das der Kugel eingesetzt werden. Ist der Radius der Kugel gleich  $a$ , so ist das Trägheitsmoment derselben bezogen auf die mit einem verticalen Durchmesser der Kugel zusammenfallende Rotationsaxe nach §. 21

$$Mk^2 = \frac{2}{5} \cdot Ma^2;$$

somit erhalten wir für die Dauer einer Oscillation unserer Kugel in Folge der Torsionskraft des Fadens

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}.$$

Will man nun zwei Fäden verschiedener Länge, verschiedener Dicke und verschiedener Substanz mit einander vergleichen, so hängt man sie nach einander an demselben Punkte  $A$  auf und befestigt an ihnen dieselbe Kugel. Ist ihre Oscillationsdauer verschieden, gleich  $t$  und  $t'$ , so kann das nur daher rühren, dass ihre Torsionskräfte verschieden sind. Wären dieselben  $f$  und  $f'$ , so hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}, \quad t' = \pi \cdot \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f'}},$$

und daraus

$$\frac{f}{f'} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Man sieht, dass die Werthe für die Torsionskraft umgekehrt proportional sind dem Quadraten der Schwingungsdauern. Misst man nun diese Zeiten, so findet man unsere früheren Gesetze, nämlich 1)  $f$  ist direkt proportional der vierten Potenz des Radius des Drahtes, 2)  $f$  ist umgekehrt proportional der Länge des Drahtes, 3)  $f$  ist direkt proportional einem für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Coefficienten.

Es ist somit

$$f = \frac{T \cdot r^4}{l},$$

oder das zu einer Drehung um den Winkel  $\omega$  erforderliche Drehmoment  $F$

$$F = T \cdot \frac{r^4}{l} \cdot \omega,$$

wie wir es schon aus den Versuchen von Wertheim ableiteten.

Wir haben oben bemerkt, dass die Torsionskraft des Fadens unabhängig sei von dem Gewichte der Kugel; Coulomb hat dieses bei seinen Versuchen für Metalldrähte direkt nachgewiesen. Für zusammengesetzte Seidenfäden ist das nach den Beobachtungen von Gauss<sup>1)</sup> indess nicht mehr der Fall, für diese nimmt die Torsionskraft mit dem spannenden Gewichte zu.

§. 54.

**Beziehung zwischen dem Torsions- und Elasticitätscoefficienten.**

Die bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes auftretende elastische Kraft ist nur eine andere Form der bei der Ausdehnung oder Compression auftretenden Kraft, da auch sie durch eine Verschiebung der Moleküle gegen einander geweckt wird. Ein etwas näheres Eingehen auf die molekularen Vorgänge bei der Torsion wird uns in den Stand setzen, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Aeusserungen der Elasticität zu erkennen.

Denken wir uns einen verticalen Cylinder, den wir durch eine an seinem untern Ende angebrachte Kraft tordiren, so wird dadurch jeder Querschnitt des Cylinders um seinen Mittelpunkt gedreht, und zwar um so mehr, je näher derselbe dem untern Ende des Cylinders liegt. Die Verbindungslinie zweier Punkte in unter einander liegenden Querschnitten, welche vor der Torsion vertical war, bildet daher jetzt mit seiner frühern Richtung den Winkel  $\varphi$ , oder eine vor der Torsion mit der Axe parallele Faser des Cylinders bildet nach der Torsion eine Schraubenlinie, welche überall um den Winkel  $\varphi$  gegen die Verticale geneigt ist. Die Grösse dieses Winkels der die Verschiebung der Moleküle gegen einander misst, und den (Clebsch<sup>2)</sup>) deshalb den Verschiebungswinkel nennt, kann man aus der Grösse des Torsionswinkels ableiten. Ist nämlich der unterste Querschnitt um den Winkel  $\omega$  gedreht, so wird beim Abwickeln von dem Cylinder die erwähnte Schraubenlinie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Länge  $l$  des Cylinders, dessen andere Kathete der von dem untern Ende der Schraubenlinie beschriebene Bogen, also, wenn wir den Abstand der Faser von der Axe des Cylinders mit  $r$  bezeichnen, gleich  $r \cdot \omega$  ist. Der Winkel  $\varphi$  ist der in diesem Dreiecke der Seite  $r \cdot \omega$  gegenüberliegende Winkel. Zur Bestimmung von  $\varphi$  haben wir daher

$$\text{tang } \varphi = \frac{r \cdot \omega}{l},$$

<sup>1)</sup> Gauss, Intensitas vis magneticae terrestis. Göttingen 1833. Poggendorff's Annalen. Bd. XXVIII.

<sup>2)</sup> Clebsch, Theorie der Elasticität. p. 8.



oder, da  $\varphi$  immer nur ein sehr kleiner Winkel ist,

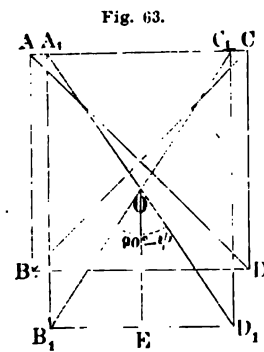
$$\varphi = \frac{r \cdot \omega}{l}$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der Grösse der Torsion proportional; da nun die Torsionselasticität der Grösse der Torsion proportional ist, so ist sie auch diesem Verschiebungswinkel proportional. Nennen wir die in der Flächeneinheit des untersten Querschnittes durch einen der Einheit gleichen Verschiebungswinkel erzeugte Torsionskraft  $C$ , so können wir die in dem Flächenelement des untersten Querschnittes  $\Delta q$ , dessen Grösse gleich dem Querschnitte der betrachteten Faser ist, durch die Torsion erzeugte Kraft deshalb setzen

$$P = C \cdot \varphi \cdot \Delta q;$$

denn die einzelnen Punkte dieses Flächenelements sind gegen die Punkte des darüber liegenden Querschnitts alle um denselben Winkel  $\varphi$  verschoben.

Die Kraft  $P$  wirkt in dem untersten Querschnitt der Richtung der drehenden Kraft entgegen. Den Werth der Constanten  $C$  können wir nach Clebsch in folgender Weise ableiten<sup>1)</sup>. Denken wir uns einen Würfel, aus derselben Substanz wie den betrachteten Cylinder, an einer Fläche befestigt und an der gegenüberliegenden durch eine Kraft gezogen, deren Grösse für die Flächeneinheit gleich  $K$  sei. Durch den Zug geht der Würfel in ein Parallelepiped über, indem die der Zugrichtung parallele Kante  $a$  in  $a(1 + \delta)$  oder, wenn wir den Elasticitätscoefficienten des Würfels mit  $E$  bezeichnen, in  $a(1 + \frac{K}{E})$  übergeht, die beiden andern Kanten aber in  $a(1 - \mu \frac{K}{E})$  übergehen, wenn wir den Coefficienten der Quercontraction mit  $\mu$  bezeichnen. Die der Zugrichtung parallelen Seiten des Würfels  $ABCD$  (Fig. 63)



werden dadurch Parallelogramme  $A_1 B_1 C_1 D_1$  deren Diagonalen  $C_1 B_1$  und  $A_1 D_1$ , welche vor dem Zuge zu einander senkrecht waren, jetzt einen Winkel  $\frac{1}{2}\pi - \psi$  mit einander bilden. Ziehen wir von dem Punkte  $O$ , in dem die Diagonalen sich schneiden eine Senkrechte  $OE$  auf die zur Zugrichtung senkrechte Kante  $B_1 D_1$  des Parallelepipedes, so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck  $OED_1$ , dessen eine Kathete  $OE = \frac{1}{2} a(1 + \delta)$ , dessen andere  $ED_1 = \frac{1}{2} a(1 - \mu\delta)$ , und in welchem der der letzteren Kathete gegenüberliegende Winkel  $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \psi)$  ist zur Bestimmung von  $\psi$  haben wir daher

$$\tan \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \psi) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\psi}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\psi}{2}} = \frac{ED_1}{OE} = \frac{a(1 - \mu \frac{K}{E})}{a(1 + \frac{K}{E})}$$

oder, da  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  und  $\psi$  ein sehr kleiner Winkel ist,

<sup>1)</sup> Clebsch, a. a. O. p. 8 ff.

$$\frac{1 - \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \mu \frac{K}{E}}{1 + \frac{K}{E}}$$

und schliesslich mit Vernachlässigung sehr kleiner Grössen

$$\psi = \frac{K}{E} (1 + \mu).$$

Der so bestimmte Winkel  $\mu$  ist aber gleichzeitig der Verschiebungswinkel der einer Diagonale des Würfels parallelen Diagonalfächen gegen einander, welche in Folge des Zuges eingetreten ist. Denn denken wir uns den Würfel vor dem Zuge durch eine Schaar Ebenen getheilt, welche der einen der beiden besprochenen Diagonalen  $AD$  und der ihr entsprechenden auf der gegenüberliegenden Seite des Würfels parallel ist, so verbindet eine der zweiten Diagonale  $CB$  parallele durch den Mittelpunkt des Würfes gelegte Gerade die Mittelpunkte aller dieser Ebenen mit einander; diese Gerade ist normal zu der Ebenenschaar. Nach dem Zuge ist die Lage dieser Ebenen parallel  $A_1 D_1$  geworden, die Mittelpunkte derselben liegen auch jetzt wieder auf einer der zweiten Diagonale  $C_1 B_1$  parallelen Linie, welche in einer die Normale der Ebenenschaar aufnehmenden Ebene mit den Ebenen, wie vorher abgeleitet wurde, den Winkel  $90^\circ - \psi$ , mit der Normale selbst also den Winkel  $\psi$  bildet. Die Mittelpunkte und damit alle entsprechend liegenden Punkte der Ebenenschaar sind also so gegen einander verschoben, dass der Verschiebungswinkel nach der gegebenen Definition gleich  $\psi$  ist. In Folge dieser Verschiebung muss nun in dem Parallelepipiped eine jener Ebenenschaar parallele Kraft geweckt sein, welche den Ebenen parallel wirkt, und deren Grösse für die Flächeneinheit

$$P = C \cdot \psi = C \cdot \frac{K}{E} \cdot (1 + \mu)$$

ist, eine Kraft, welche die Ebenen in ihre frühere Lage zurückzuziehen strebt.

Dieser Kraft hält nun die der Ebenenschaar parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Componente der Zugkraft  $K$  das Gleichgewicht. Da die Kraft  $K$ , welche der Seite des Würfels parallel ist, mit der Diagonale einen Winkel von  $45^\circ$  bildet, so ist die der Flächeneinheit der Würfeläche parallel der Diagonale wirkende Kraft  $K \cdot \cos 45^\circ = K \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Diese Kraft wirkt auf das der Flächeneinheit der Würfeläche entsprechende Stück der Diagonalfäche; da nun die Diagonalfäche zur Würfeläche sich verhält wie  $\sqrt{2}:1$ , so ergibt sich für die auf die Flächeneinheit der Diagonalfäche parallel derselben wirkende Kraft

$$K \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{K}{2}.$$

Da nun diese Kraft der durch die Verschiebung geweckten Kraft das Gleichgewicht hält, so ist schliesslich

$$P = \frac{K}{2} = C \cdot \frac{K}{E} (1 + \mu)$$

und daraus

$$C = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Die Constante  $C$  somit, mit der wir bei einer Verschiebung der Moleküllschichten gegen einander, wie sie bei der Torsion eintritt, den Verschiebungswinkel multipliciren müssen, um die durch diese Verschiebung geweckte elastische Kraft zu erhalten, ist durch die beiden die Elasticität einer Substanz bedingenden Constanten, den Elasticitätscoefficienten und den Coefficienten der Quercontraction vollständig bestimmt, sie ist gleich dem Quotienten aus dem Coefficienten der Elasticität und dem doppelten des um eins vermehrten Contractionscoefficienten.

Diesen Werth von  $C$  haben wir nun auch in den am Anfange dieses Paragraphen für die Torsionskraft unsers Cylinders abgeleiteten Ausdruck einzusetzen; derselbe wird damit

$$P = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \varphi \cdot \Delta q = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{r \cdot \omega}{l} \cdot \Delta q.$$

Um aus diesem Werthe den Torsionscoefficienten nach unserer frühern Definition abzuleiten, haben wir hieraus zunächst das Drehungsmoment zu berechnen; welches der tordirte Stab in Folge der Torsion um  $\omega$  erhält. Der Werth von  $P$  ist die Torsionskraft in dem Flächenelemente  $\Delta q$  des untersten Querschnitts, welches im Abstände  $r$  von der Axe liegt. Das daraus hervorgehende Drehungsmoment ist

$$P \cdot r = f = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\omega}{l} r \cdot r \cdot \Delta q.$$

Um nun hieraus das Drehungsmoment des ganzen untersten Querschnitts zu erhalten, haben wir für alle Flächenelemente desselben das Drehungsmoment  $f$  in der angegebenen Weise zu bilden und alle diese einzelnen Drehungsmomente zu summiren. Bezeichnen wir mit  $\rho$  den Radius unseres Cylinders, so ist diese Summe, wie die Integralrechnung lehrt,

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega \cdot \rho^4}{l};$$

ein Ausdruck, der sich von dem im vorigen §. experimentell abgeleiteten nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle des dort benutzten Torsionscoefficienten  $T$  hier der Werth desselben durch den Elasticitätscoefficienten  $E$  und durch den Contractionscoefficienten  $\mu$  gegeben ist; für den Torsionscoefficienten  $T$  erhalten wir somit

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Sind  $E$  und  $\mu$  bekannt, so gestattet uns diese Relation sofort den Werth des Torsionscoefficienten zu berechnen; kennt man  $E$  und  $T$ , so kann man aus beiden auch den Werth von  $\mu$  ableiten.

<sup>1)</sup> Es ist wohl zu beachten, dass diese Berechnung des Torsionscoefficienten nur für cylindrische Stäbe gilt; denn bei Stäben von anderer Form findet bei der Torsion nicht nur eine Verschiebung der unter einander liegenden Querschnitte, sondern auch eine Verschiebung der einzelnen Punkte jedes Querschnitts gegen einander statt. Der Verschiebungswinkel ist somit an den verschiedenen Stellen der Querschnitte verschieden, und nicht wie bei dem Cylinder für alle Punkte, welche gleich weit von der Drehungsaxe entfernt sind, derselbe.

Es liegen einige Versuche von Coulomb<sup>1)</sup>, Savart<sup>2)</sup> und Wertheim<sup>3)</sup> vor, welche in Verbindung mit den von Wertheim gegebenen Werthen für  $E$  den Werth von  $\mu$  abzuleiten gestatten.

Coulomb findet für einen Eisendraht von 243<sup>mm</sup>;63 Länge und 0<sup>mm</sup>,07481 Radius  $F = 0,001545$  nach der vorhin besprochenen Schwingungsmethode. Die vorhin mitgetheilte Gleichung gibt daraus

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} = 7651.$$

Der Elasticitätscoefficient ist nach Wertheim  $E = 20869$ . Man erhält daraus  $\mu = 0,363$ .

Savart erhält nach einer der Wertheim'schen ähnlichen Methode für cylindrische Kupferdrähte zwischen 1 und 4<sup>mm</sup>,5 Dicke

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} = 4213.$$

Der Werth von  $E$  ist nach Wertheim 10519. Man erhält daraus  $\mu = 0,25$ , ein Werth, welcher ziemlich gut mit dem aus den Regnault'schen Compressionsversuchen abgeleiteten übereinstimmt.

Wertheim untersuchte eine Reihe von Stäben, an denen er direkt den Elasticitätscoefficienten durch Verlängerung bestimmte. Die von ihm gefundenen Werthe enthält folgende kleine Tabelle

Substanzen	Radius der Cylinder	$\frac{E}{2(1 + \mu)}$ aus d. Torsion	$E$ aus d. Verläng.	$\mu$
	mm.			
Eisen . . . . .	8,220	6836,6	17805	0,317
Eisen . . . . .	5,501	6677,2		
Engl. Gussstahl . .	5,055	7458,4	19542	0,310
Kupfer . . . . .	5,031	3611,7	9395	0,300
Glas . . . . .	3,535	2383,1	6200	0,321
Glas . . . . .	3,4225	2308,3	„	

Man erhält also auch hier wieder für  $\mu$  je nach den Substanzen der Stäbe verschiedene Werthe; die Werthe für Glas und Kupfer weichen nur sehr wenig von den früher aus den Regnault'schen Compressionsversuchen abgeleiteten ab, welche für Glas 0,315, für Kupfer 0,291 waren.

Kohlrausch und Loomis<sup>4)</sup> fanden bei ihren Versuchen, welche den Zweck hatten, die Abhängigkeit des Elasticitätscoefficienten von der Temperatur zu bestimmen, und bei denen sie nach der Coulomb'schen Methode die Schwingungsdauer dünner Drähte bei verschiedenen Temperaturen beobachteten, die Werthe von  $\frac{E}{2(1 + \mu)}$

<sup>1)</sup> Coulomb, Mémoires de l'Académie. 1784. Biot, traité de physique. T. I. p. 492.  
<sup>2)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. T. LXI.  
<sup>3)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. L.  
<sup>4)</sup> Kohlrausch und Loomis, Poggend. Ann. Bd. CXLI.

für Eisen gleich 6940  
 „ Kupfer „ 3900  
 „ Messing „ 3200.

Die Werthe von  $E$  erhielten sie aus Bestimmungen der Schwindauern (man sehe §. 129)

für Eisen  $E = 20310$   
 „ Kupfer „ = 12140  
 „ Messing „ = 9810.

Daraus würden sich für  $\mu$  die Werthe ergeben, für Eisen 0,53, für Kupfer 0,55, für Messing 0,53, im Mittel also fast genau 0,5, welche bedeuten würde, dass bei einfachem Zuge gar keine Aenderung des Volumens einträte, die indess gegenüber allen sonstigen Beobachtungen gross ist und vermuthen lässt, dass die Bestimmung der Torsionscoefficienten fehlerhaft ist.

Für die Abhängigkeit der Torsionscoefficienten oder auch der proportionalen Elasticitätscoefficienten von der Temperatur ergab sich, dass die Coefficienten mit steigender Temperatur kleiner werden, wie schon aus den Beobachtungen Wertheims (§. 50) ergab. Bezeichnen wir den Elasticitätscoefficienten bei  $0^\circ$  mit  $E_0$ , so ist derselbe bei der Temperatur  $t^\circ$  für Eisen

$$E = E_0 (1 - 0,000483 t - 0,00000012 t^2),$$

für Kupfer

$$E = E_0 (1 - 0,000572 t - 0,00000028 t^2),$$

für Messing

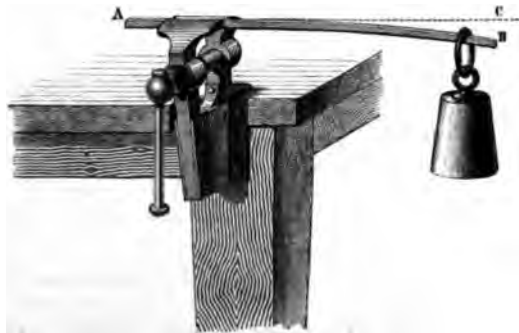
$$E = E_0 (1 - 0,000485 t - 0,00000136 t^2).$$

Es nehmen die Elasticitätscoefficienten bei einer Erwärmung um  $t$  Grad Celsius von der Temperatur des gefrierenden bis zu der des siedenden Wassers um 6 Procent ab.

### §. 55.

**Biegeelasticität.** Ausser durch Ausdehnung und Torsion kann die elastische Kraft fester Körper noch auf eine dritte Art geweckt werden, nämlich durch Biegung. Bei der grossen Schwierigkeit, welche der sorgfältigen Behandlung der Biegung entgegensteht, müssen wir uns da

Fig. 64.



zu begnügen, den einfachsten Fall etwas näher zu betrachten. Wenn ein Stab  $AB$  (Fig. 64) mit dem einen Ende in einem Schraubstock festgeklemmt ist, und an seinem anderen Ende  $B$  ein Gewicht hängt, so biegt er sich und nimmt die Gestalt einer Curve an. Dann hält die elastische Kraft des Stabes die

ichte  $P$  das Gleichgewicht. Man sieht ein, dass bei dieser Bewegung die obere horizontale Fläche des Stabes sich ausdehnt, während die untere Seite des Stabes zusammengedrückt wird, und dass durch diese Verschiebung der Moleküle sich Kräfte entwickeln müssen, welche den Stab in seine frühere Lage zurückführen werden, sobald das Gewicht abgenommen ist.

Um diese Erscheinung zu untersuchen, kann man die Enden  $A$  und  $C$  der vielmehr auf diesen gezogene Marken mit dem Kathetometer visiren; an legt die zu untersuchenden Stäbe anfänglich horizontal, belastet sie an dem Ende  $C$  mit einem Gewichte  $P$  und misst dann die Länge  $\alpha$ , um welche die Marke von  $C$  nach  $B$  herabsinkt. Dieser Länge  $\alpha$ , welche man den Pfeil der Biegung nennt, und die immer sehr klein ist, können wir den in der Marke beschriebenen Bogen gleich setzen. Eine ähnliche Methode benutzte Gerstner zu seinen Versuchen an<sup>1)</sup>.

Bei einer Durchführung dieser Versuche findet man nun zunächst, dass der Pfeil der Biegung der Grösse des biegenden Gewichts proportional, so ist auch, dass die bei der Biegung auftretende Elasticität der Biegung proportional ist, wie sie bei der Ausdehnung der Verlängerung proportional ist. Die Grösse des Biegungspfeiles hängt aber ausserdem von den Dimensionen des Stabes, der Gestalt seines Querschnittes und dem Elasticitätscoefficienten ab.

Für den einfachsten Fall, den eines rechteckigen Stabes, dessen horizontale Seite gleich  $b$ , dessen verticale gleich  $e$  und dessen Länge von dem Punkte der Einklemmung bis zur Stelle, wo das Gewicht hängt, gleich  $l$  sei, können wir diese Abhängigkeit aus einer genauern Betrachtung des Vorganges der Biegung in folgender Weise ableiten. Die Biegung kommt dadurch zu Stande, dass an der oberen Seite des Stabes seine Längsfasern ausgedehnt, an der untern Seite dagegen zusammengedrückt werden; im Innern des Stabes muss es daher eine Faserschicht geben, welche weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird, und wenn der Stab ganz homogen ist, muss diese Schicht gerade die mittlere Schicht des Stabes sein. Stelle nun

(Fig. 65)  $AB$  einen Längs-

durchschnitt durch den

gebogenen Stab dar,  $A$

sei der Punkt der Ein-

klemmung,  $B$  der Auf-

hängepunkt des Gewich-

tes  $P$  und  $MN$  der

Durchschnitt durch die

nicht verlängerte Faser-

schicht. Nun sei  $pq$  ein

Querschnitt des Stabes,

der von dem Anfange des

Stabes um  $x$  entfernt sei,

und  $rs$  ein zweiter von

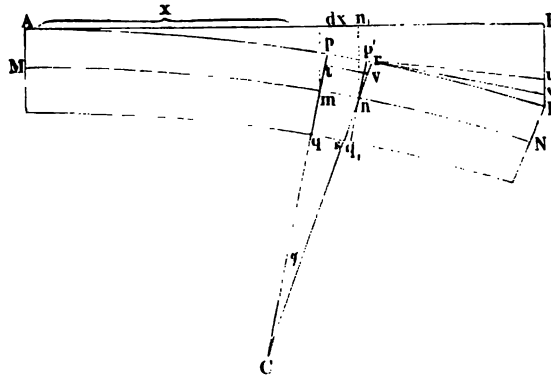
dem ersten um die un-

endlich kleine Strecke

$dr$  entfernter Querschnitt.

Während in der Gleichgewichtslage die beiden

Fig. 65.



<sup>1)</sup> Gerstner, Handbuch der Mechanik. Bd. I.

Schnitte parallel sind, ist nach der Biegung durch die Verlängerung der über  $mn$  und die Verkürzung der unter  $mn$  liegenden Fasern der zweite Querschnitt gegen den ersten um einen Winkel  $\varphi$  gedreht. Legen wir durch den Punkt  $n$ , in welchem  $rs$  die nicht verlängerte Faser schneidet,  $p'q' \parallel pq$ , so können wir die Biegung an dieser Stelle als eine Drehung des Querschnittes  $rs$  um die durch  $n$  gelegte Horizontale als Drehungsaxe auffassen, deren Grösse jenem Winkel  $\varphi$  gleich ist. Damit sind wir dann auch sofort im Stande, die Gleichgewichtsbedingung für den gebogenen Stab aufzustellen; die Bedingung ist, dass dem gedrehten Querschnitt durch die elastischen Kräfte ein ebenso grosses Drehungsmoment nach rückwärts ertheilt wird, als ihm durch das Gewicht  $P$  nach entgegengesetzter Richtung gegeben wird. Wir können nun das System  $rmN$  als einen Winkelhebel ansehen, an dessen einem Arm  $nN$  im Punkte  $N$  das Gewicht  $P$  angreift, dessen anderer Arm durch den Querschnitt  $rs$  gegeben ist, an dessen sämtlichen Punkten Kräfte angreifen, welche ihn in seine frühere Lage zurückziehen. Das aus letztern resultirende Drehungsmoment erhalten wir folgendermaassen. Es sei  $r$  der Durchschnitt durch ein Element des Schnittes  $rs$ , welches um  $y$  von  $n$  entfernt sei, und dessen Höhe  $dy$  sei, so dass sein Querschnitt  $b \cdot dy$  ist. Die dieses Element mit  $p'q'$  verbindenden Fasern  $tv$  sind um  $tv - mn = y \cdot \varphi$  verlängert. Die Kraft, mit der dieses Element gegen  $t$  in Folge dessen gezogen wird, ist dann, wenn wir mit  $E$  den Elasticitätscoefficienten des Stabes bezeichnen,

$$E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx} \cdot b \, dy,$$

und das in Folge dessen dem Schnitte ertheilte Drehungsmoment

$$y \cdot E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx} \cdot b \, dy = E \frac{b \varphi}{dx} \cdot y^2 \, dy.$$

Ein ebensolches Drehungsmoment enthält der Schnitt für jedes Element  $b \, dy$ , die Summe derselben ist das ganze Drehungsmoment des Schnittes. Wir erhalten diese Summe, indem wir in jenem Ausdrucke für  $y$  nach und nach alle Werthe setzen für  $y$  von 0 bis  $\frac{e}{2}$  und von 0 bis  $-\frac{e}{2}$  oder kurz von  $-\frac{e}{2}$  bis  $+\frac{e}{2}$ . Die gesuchte Summe erhalten wir nach der schon §. 21 angewandten Methode; es ist

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \cdot \frac{b \varphi}{dx} \cdot y^2 \, dy = E \frac{b \varphi}{dx} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} y^2 \, dy.$$

Nun ist  $y^2 \, dy = \frac{1}{3} \left\{ (y + dy)^3 - y^3 \right\}$  und deshalb jene Summe gleich  $\frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{e}{2}\right)^3 - - \left(-\frac{e}{2}\right)^3 \right\}$  oder

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \cdot \frac{b \varphi}{dx} \cdot y^2 \, dy = \frac{E}{12} \cdot \frac{b \cdot e^3}{dx} \cdot \varphi.$$

Diesem Drehungsmomente hält das des Gewichtes oder  $nN \cdot P$  das Gleichgewicht. Für  $nN$  können wir setzen  $n_1 B_1 = l - (x + dx)$  oder, da  $dx$  gegen  $x$  verschwindend klein ist, gleich  $l - x$ . Damit wird die Gleichgewichtsbedingung des Schnittes

$$\frac{E}{12} \frac{b \cdot c^3}{dx} \cdot \varphi = P(l - x)$$

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot c^3 \varphi = P(l - x) dx.$$

Den in diesem Ausdrücke auftretenden Winkel  $\varphi$  können wir durch das Element des Biegungspfeiles  $B_1 B$  ausdrücken; legen wir durch  $r$  eine Tangente an den Stab und ziehen durch  $r$  ebenfalls eine Linie parallel der Tangente des Stabes bei  $p$ , so bilden diese beiden Linien den Winkel  $\varphi$  mit einander. Aus dem Biegungspfeil schneiden dieselben dann das Element  $ur$ , und indem wir das als den zu  $\varphi$  gehörigen mit  $n_1 B_1$  oder  $(l - x)$  beschriebenen Bogen ansehen, können wir schreiben

$$\varphi(l - x) = ur; \varphi = \frac{ur}{l - x}.$$

Damit wird die Gleichgewichtsbedingung, wenn wir schliesslich das Element  $ur$  des Biegungspfeiles, entsprechend der dem letztern gegebenen Bezeichnung  $\alpha$  mit  $d\alpha$  bezeichnen,

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot c^3 d\alpha = P(l - x)^2 dx.$$

Dieselbe Bedingung gilt für jeden Schnitt, den wir ebenso wie den betrachteten durch den Stab legen; die Gleichgewichtsbedingung des ganzen Stabes erhalten wir demnach, indem wir auf beiden Seiten die Summe der für jeden einzelnen Querschnitt geltenden Ausdrücke bilden. Auf der linken Seite geschieht das, indem wir die Summe aller Elemente des Biegungspfeiles bilden, also einfach statt  $d\alpha$  schreiben  $\alpha$ , auf der rechten, indem wir nach und nach für  $x$  alle Werthe von 0 bis  $l$  einsetzen und wie oben summiren. Diese Summation giebt dann

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot c^3 \alpha = \frac{1}{3} P \cdot l^3$$

oder

$$\alpha = \frac{4P}{E} \cdot \frac{l^3}{b \cdot c^3},$$

oder die durch den Pfeil der Biegung gemessene Biegung ist der dritten Potenz der Länge direkt, jener der Höhe und der ersten Potenz der Breite sowie dem Elasticitätscoefficienten umgekehrt proportional.

Ist der Querschnitt des Stabes ein anderer, so erhält man für  $\alpha$  andere Werthe<sup>1)</sup>, immer aber findet man, dass die Biegung der Grösse des biegenden Gewichtes, oder dass die Grösse der erregten Elasticität der Biegung proportional ist. Letzteres ist auch dann der Fall, wenn der Stab in anderer als der oben vorausgesetzten Weise befestigt ist, wenn er an beiden Enden festgeklemmt oder nur aufgelegt, oder wenn er an einem Ende festgeklemmt und an dem andern aufgelegt ist. Es folgt daraus nach den Gesetzen der

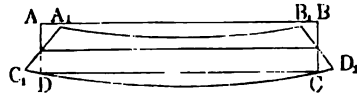
<sup>1)</sup> Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. p. 87 ff. und p. 363 ff.



Pendelschwingungen, dass auch in diesem Falle der Stab isochrone Schwingungen um seine Gleichgewichtslage macht, wenn man ihn aus derselben bringt und dann sich selbst überlässt; wir werden diese Schwingungen an einer andern Stelle genauer betrachten.

Die Biegung eines Stabes nach seiner Längsaxe muss auch eine Biegung nach der Breitendimension zur Folge haben, so dass, wenn wir

Fig. 66.



voraussetzen, dass der Stab nach unten gebogen ist, wie in Fig. 65, die untere Fläche des Stabes in ihrer Breitendimension convex, die obere, welche nach ihrer Länge convex ist, nach der Breite concav wird. Ist also  $ABCD$  Fig. 66 der Querschnitt des ungebogenen Stabes, so wird  $A_1 B_1 C_1 D_1$  jener des gebogenen Stabes. Dass eine derartige Biegung des Querschnittes eintreten muss, lässt sich leicht erkennen. Wie vorhin entwickelt wurde, hat die Biegung eine Verlängerung der oberhalb der ungeänderten Faserschicht, eine Verkürzung der unterhalb derselben liegenden Fasern zur Folge. Diese Verlängerung der obern Schichten hat eine Contraction nach der Breite zur Folge, so dass, wenn die Verlängerung gleich  $\delta$  ist, die Contraction gleich  $\mu \delta$  ist. Die Verkürzung der untern Faserschichten hat eine Ausdehnung nach der Breite zur Folge, welche ebenso gross ist als die Verkürzung oben. Zu diesen Ausdehnungen und Verkürzungen parallel  $MM$  treten solche parallel  $AD$ . Oberhalb der ungeänderten Schicht  $MM$  tritt in dieser Richtung eine Contraction, unterhalb  $MM$  eine Ausdehnung ein. Man sieht leicht, dass die vorher ebenen Flächen, welche den Stab oben und unten begrenzen, in Folge dieser Contractions der obern und Ausdehnungen der untern Hälfte des Stabes sich krümmen müssen, oder dass der Stab parallel  $AB$  so gebogen werden muss, dass die obere Fläche concav, die untere convex wird<sup>1)</sup>.

Legen wir einen Stab, dessen Länge gegen den Querschnitt beträchtlich ist, auf zwei gleich weit von der Mitte entfernte Stützen und biegen ihn dann dadurch, dass wir seine beiden über die Stützen herausragenden Enden mit gleichen Gewichten belasten, so ist der der Längsrichtung des gebogenen Stabes parallele Schnitt der oberen convexen Fläche ein Kreisbogen; ein zur Längsrichtung senkrechter, also parallel  $ABCD$  durch die obere Fläche geführter Schnitt ist dann ebenfalls ein Kreisbogen, und die Radien dieser Kreisbögen verhalten sich wie die Längendilatation zur Quercontraction. Setzen wir also den Radius des der primären Biegungsebene parallelen Bogens gleich 1, so wird der Radius des Bogens  $A_1 B_1$  gleich  $\mu$ .

Eine Bestimmung dieser Krümmungsradien kann also ebenfalls dazu dienen, das Verhältniss der Längendilatation zur Quercontraction, also den Werth von  $\mu$  zu bestimmen.

Die im §. 51 angeführten Versuche von Cornu<sup>2)</sup> beruhen auf diesem Satze. Er bestimmte nach einer optischen Methode, die wir im zweiten Bande, bei Besprechung der Interferenz des Lichtes mit grossen Gangunter-

<sup>1)</sup> De Saint Venant. Mémoire sur la flexion des prismes etc. Journal des mathématiques pures et appliquées par Liouville. II. Série. T. I. 1856.

<sup>2)</sup> Cornu, Comptes Rendus. T. LXIX. p. 333.

schieden kennen lernen werden, die Krümmungen der obern Fläche verschiedener Glasprismen, und erhielt im Mittel für  $\mu$  den Werth 0,25.

## §. 56.

**Grenze der Elasticität.** Wir haben bisher angenommen, dass die Veränderungen des Volumens und der Gestalt der Körper, welche wir durch äussere Kräfte hervorgebracht haben, nur vorübergehend seien, dass der Körper in seinen frühern Zustand zurückkehrt, sobald die Kräfte aufhören zu wirken. Dieses gilt jedoch nicht ganz allgemein; man beobachtet im Gegentheil oft bleibende Formänderungen, und zwar immer dann, wenn die ändernden Kräfte eine gewisse Grösse überschreiten. Wird ein Draht durch grosse Gewichte ausgedehnt, so behält er auch nach Fortnahme der Gewichte einen Theil seiner Verlängerung bei, seine Moleküle haben eine neue Gleichgewichtslage angenommen. Dasselbe findet sich in den andern von uns betrachteten Fällen. Man kann einen Draht um kleinere Winkel ohne bleibende Aenderung tordiren; überschreitet man aber eine gewisse Grenze, so kehrt er in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage nicht zurück. Man kann einen Stab mässig biegen ohne Formänderung; hängt man aber ein zu grosses Gewicht an, so ertheilt man ihm eine bleibende Biegung. Hierauf beruht die Verlängerung eines Drahtes, wenn man ihn durch einen Drahtzug zieht; der Abdruck des Stempels auf den Münzen, das Auswalzen der Bleche, die Wirkung des Hämmerns und alle ähnliche Formänderungen der Körper, welche man ohne Trennung ihres Zusammenhanges wahrnimmt.

Es gibt demnach eine Elasticitätsgrenze, eine Grenze, welche äussere Kräfte bei ihrer Wirkung auf die Körper nicht überschreiten dürfen, ohne deren Form zu ändern. Diese Grenze ist nicht für alle Körper gleich schnell erreicht; der Kautschuk z. B. kann sehr bedeutende Formveränderungen annehmen, ohne dass sie bleibend sind; das Blei dagegen erhält bei dem geringsten Zuge, der geringsten Torsion oder Biegung bleibende Aenderungen.

Am genauesten kennt man die Elasticitätsgrenze für den zuerst betrachteten Fall, wenn man einen Körper durch Zug verlängert.

Nehmen wir einen Draht von 1 Millimeter Durchmesser, von irgend einer Länge, und suchen wir das Gewicht, von dem aus eine weitere Belastung dem Faden eine bleibende Verlängerung ertheilt. Diese Untersuchung ist schwieriger, als sie auf den ersten Blick erscheint; denn sie hängt sehr ab von der Empfindlichkeit der Messapparate, und wenn man eine bleibende Verlängerung beobachtet, so ist diese Grenze schon überschritten. Man ist daher übereingekommen, jenes Gewicht als das Grenzwert zu betrachten, welches dem Stabe eine bleibende Verlängerung von 0,5 Millimeter auf ein Meter ertheilt. Eine andere Schwierigkeit ist die, dass die Zeitdauer der Wirkung des Gewichtes auf die bleibende Verlängerung von Einfluss ist; einmal begonnen, setzt sich die Verlängerung langsam fort, ist sie während weniger Minuten unmerklich, so ist sie nach einigen Stunden oft beträchtlich; ja selbst eine lang dauernde Einwirkung eines kleinern Gewichtes als das Grenzwert bringt Aenderungen hervor. Aus dem Grunde erlahmen auf die Dauer alle Federn, biegen sich die Balken in den Decken u. s. f.; die Elasticitätsgrenze ist demnach keine genau messbare Grösse, sondern kann nur annähernd erhalten werden. In

der im folgenden §. mitgetheilten Tabelle finden sich einige Zahlen nach der Angabe von Wertheim<sup>1)</sup>.

Man bemerkt dort, dass die Metalle alle in zwei Zuständen untersucht sind, einmal als gezogene Drähte und dann ausgeglüht, und man sieht, wie die Elasticitätsgrenze der geglühten Metalle weit niedriger ist als die der gezogenen Drähte; besonders auffallend ist es bei Eisen und Gussstahl. Man hat darin die Erklärung einer Reihe von Erscheinungen, zunächst der, dass ein gezogener Draht bei neuem Ziehen sich nicht merklich mehr verlängert, dagegen bedeutend, wenn er vorher geglüht wurde; deshalb ferner sind die Federn von gehärtetem Stahl; deshalb muss ein Blech, wenn es mehrmals durch die Walzen gegangen ist, erst neu erwärmt werden und so fort.

Aehnliches gilt von der Grenze der Torsionselasticität; sie ist verschieden, je nach der Behandlung, welche die Drähte erfahren haben, bei einem hartgezogenen Draht liegt sie weiter als bei einem geglühten u. s. f.; allgemein gültige Gesetze gibt es jedoch nicht, jeder Draht muss besonders auf seine Grenze der Torsionselasticität geprüft werden. Ueber das Verhalten tordirter Drähte hat Wiedemann neuerlichst sehr interessante Versuche mitgetheilt<sup>2)</sup>; wir müssen uns jedoch begnügen, darauf hingewiesen zu haben.

Die Grenze der Biegungselasticität ist erreicht, wenn Stäbe unter dem Einfluss eines biegenden Gewichtes eine bleibende Durchbiegung zeigen. Wegen der grossen Wichtigkeit dieser Eigenschaft in der Technik und Architektur sind vielfache Versuche angestellt über die Gewichte, bei denen Balken von bestimmter Dicke, Axen verschiedenen Metalls u. s. f., sowohl wenn sie an einem Ende, als auch wenn sie an beiden Enden befestigt sind, bleibende Durchbiegungen erhalten; allgemeine Gesetze gibt es jedoch auch hier nicht.

### §. 57.

**Festigkeit.** Wenn man die Einwirkung äusserer Kräfte auf einen festen Körper über die Elasticitätsgrenze hinaus fortsetzt, so gelangt man endlich dahin, dass der Zusammenhang der einzelnen Theile aufgehoben wird; ein über die Elasticitätsgrenze belasteter Draht zerreisst, unter zu starkem Drucke wird ein Körper zerquetscht oder zerstampft, ein zu stark tordirter Faden wird abgedreht, und ein zu stark gebogener Stab wird zerbrochen.

Man bezeichnet nun den Widerstand, den ein Körper der Trennung seiner Theile entgegensetzt, mit dem Namen Festigkeit. So viele verschiedene Arten der Einwirkung es gibt, so viele Arten Festigkeit. Man hat das Gewicht zu bestimmen gesucht, welches einen Draht von beliebiger Länge und 1 Millimeter Durchmesser zu zerreißen im Stande ist, und misst durch dieses die Zugfestigkeit oder absolute Festigkeit der Körper; man findet in der folgenden Tabelle eine Anzahl Angaben nach den Versuchen von Wertheim. Zur Bestimmung dieser Zahlen hat man mit denselben Schwierigkeiten zu kämpfen, die vorhin erwähnt wurden; bei langsamer

<sup>1)</sup> Wertheim, Annal. de chim. et de phys. III. Sér. Tome 12.

<sup>2)</sup> Wiedemann, Poggend. Annal. Bd. CVI.

und dauernder Belastung reisst ein Draht viel früher als bei schneller nur kurz dauernder, Stösse natürlich ausgenommen. Die Festigkeit wird daher durch die Belastung vermindert. Die folgenden Angaben beziehen sich auf langsame Belastung<sup>1)</sup>.

Metalle	Elasticitätsgrenze	Gewichte beim Zerreißen
Blei . . . . .	gezogen	0,25 klgrm.
	angelassen	2,07 klgrm.
Zinn . . . . .	gezogen	0,20
	angelassen	1,80
Gold . . . . .	gezogen	0,45
	angelassen	2,45
Silber . . . . .	gezogen	0,20
	angelassen	1,70
Zink . . . . .	gezogen	13,5
	angelassen	27,00
Kupfer . . . . .	gezogen	3,0
	angelassen	10,08
Platin . . . . .	gezogen	11,25
	angelassen	29,00
Eisen . . . . .	gezogen	2,75
	angelassen	16,02
Gussstahl . . . . .	gezogen	0,75
	angelassen	12,80
Stahldraht . . . . .	gezogen	1,00
	angelassen	—
	gezogen	12,0
	angelassen	40,30
	gezogen	3,0
	angelassen	30,54
	gezogen	26,0
	angelassen	34,10
	gezogen	14,5
	angelassen	23,50
	gezogen	32,5
	angelassen	61,10
	gezogen	5,0
	angelassen	46,88
	gezogen	55,6
	angelassen	80,00
	gezogen	5,0
	angelassen	65,75
	gezogen	42,5
	angelassen	70,00
	gezogen	15,0
	angelassen	40,00

Man sieht, auch hier zeigt sich ein auffallender Unterschied zwischen den verschiedenen Metallen sowohl als auch zwischen den verschiedenen Drähten desselben Metalles, je nachdem es gezogen oder gegläht ist.

Man sieht ferner, wie zwischen den Gewichten, welche die Elasticitätsgrenze angeben, und jenen, die das Zerreißen bewirken, bei den verschiedenen Metallen ein verschiedener Unterschied ist; je grösser der Unterschied ist, um so dehnbarer ist das Metall, ohne dass man jedoch diesen Unterschied als Maass der Dehnbarkeit hinstellen könnte.

Die Kraft, mit der ein Körper dem Zerdrücken widersteht, nennt man die rückwirkende Festigkeit; über diese sind nur wenige ältere, meist zu praktischen Zwecken angestellte Versuche vorhanden.

Die relative oder Bruchfestigkeit ist zu praktischen Zwecken vielfach untersucht worden, um die Tragfähigkeit von Balken, Axen u. s. f. zu bestimmen. Gefundene Zahlen anzuführen, denen nur eine praktische Bedeutung zuzuschreiben ist, erscheint überflüssig.

Die Gesetze, nach denen sich die Festigkeiten mit den Dimensionen des Körpers ändern, sind nicht bekannt. Annähernd richtige Resultate wird man unter Anwendung der für die Elasticität gültigen Gesetze erhalten, also z. B. bei der Zugfestigkeit bei der Annahme, dass dieselbe proportional dem Querschnitt sei. Jedoch haben Versuche gezeigt, dass es nicht statthaft ist, aus Versuchen mit Drähten von kleinen Dimensionen auf Stäbe von grössern Dimensionen zu schliessen.

<sup>1)</sup> Wertheim a. a. O.

Gleiches gilt von der Drehfestigkeit, auch über diese ist nichts genauere bekannt.

Man unterscheidet noch eine fünfte Art von Festigkeit, die Härte. Man versteht darunter den geringern oder grössern Widerstand, den ein Körper dem Eindringen von Spitzen oder Schneiden entgegensetzt. Man hat darnach die Körper in 10 Klassen getheilt und bestimmt den Grad der Härte darnach welche Körper den zu untersuchenden noch ritzen können, und welche ritzen kann. Die Körper, welche man als Härteskala aufgestellt hat, sind nach Mohs vom geringsten zum grössten Härtegrad fortschreitend folgende 10<sup>1)</sup>.

- 1) Talk,
- 2) Steinsalz,
- 3) Kalkspath,
- 4) Flusspath,
- 5) Apatit,
- 6) Feldspath,
- 7) Quarz,
- 8) Topas,
- 9) Korund,
- 10) Diamant.

Man legt darnach einem Körper z. B. den Härtegrad 5 bei, wenn er Flusspath ritzen kann und selbst vom Feldspath geritzt wird. Körper, die sich gegenseitig ritzen, haben gleiche Härte.

#### §. 58.

**Vom Stosse der Körper<sup>2)</sup>.** Auf der Eigenschaft der Elasticität beruhen die Bewegungserscheinungen, welche zwei Körper darbieten, wenn sie gegen einander prallen, wenn sie sich stossen.

Haben zwei Massen  $m$  und  $m'$  gewisse gleichgerichtete Geschwindigkeiten  $v$  und  $v'$  erhalten, so werden sie, wenn die Geschwindigkeit  $v$  von  $m$  grösser ist als die  $v'$  von  $m'$ , nach einiger Zeit auf einander treffen und während einer sehr kurzen Zeit gegen einander gedrückt sein. In Folge dieses Stosses wird dann die Geschwindigkeit jedes der beiden Körper geändert sein, die Geschwindigkeit des stossenden Körpers wird verkleinert, die des gestossenen Körpers wird vergrössert sein. Sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stosse  $c$  und  $c'$ , so erhalten wir zunächst ganz allgemein folgende Relation zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse. Während die Körper sich berühren, übt der eine auf den andern einen Druck aus, und in Folge dieses Druckes wird die Geschwindigkeit geändert, und zwar für den stossenden Körper um  $v - c$ , für den gestossenen um  $c' - v'$ . Da der Druck auf die beiden Massen  $m$  und  $m'$  während derselben Zeit wirkt, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, die

<sup>1)</sup> v. Kobell, Lehrbuch der Mineralogie.

<sup>2)</sup> Die Gesetze des Stosses wurden vollständig zu gleicher Zeit von *Wallis*, *Wren* und *Huyghens* entwickelt und von Wallis am 26. November, von Wren am 17. December 1668, von Huyghens am 4. Januar 1669 der Royal Society zu London vorgelegt, der letztere soll sie jedoch schon im Jahre 1663 entwickelt haben. Phil. Transact. of the Royal Soc. of London from commencement etc. Abridged with notes etc. Vol. I. London 1809. p. 307; 310; 335.

diese Drucke ertheilen, also die soeben abgeleiteten Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt wie die Massen, denen sie ertheilt sind, oder

$$\frac{v - c}{c' - v'} = \frac{m'}{m}$$

und daraus

$$mv + m' v' = mc + m' c'.$$

Um eine zweite Relation zwischen den Geschwindigkeiten zu erhalten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1) Beide Körper sind absolut unelastisch. Der Stoss wird dann eine bleibende Aenderung der Gestalt hervorbringen, die Körper entfernen sich nach dem Stosse nicht mehr von einander, sondern bewegen sich nach dem Stosse mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter. In diesem Falle ist also  $c = c'$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} mv + m' v' &= (m + m') c, \\ c &= \frac{mv + m' v'}{m + m'}, \\ v - c &= \frac{m'(v - v')}{m + m'}, \quad c' - v = \frac{m(v - v')}{m + m'}. \end{aligned}$$

War die Bewegung  $v'$  jener von  $v$  entgegengesetzt, so haben wir in diesen Ausdrücken nur  $v'$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen, und es wird

$$c = \frac{mv - m' v'}{m + m'}.$$

Und ist nun  $mv = m' v'$ , so wird  $c = 0$ , also beide Körper bleiben in Ruhe. Dieser Fall scheint also durchaus dem im §. 14 abgeleiteten Satze von der Constanz der lebendigen Kraft zu widersprechen, da die lebendige Kraft nach dem Stosse gleich Null ist. Indess ist der Widerspruch nur scheinbar, da durch den Stoss Arbeit geleistet, nämlich die Gestalt der Massen bleibend geändert, und, wie wir später nachweisen werden, auch Wärme erzeugt ist. Und da hier, nicht nur wenn  $c = 0$  ist, sondern in jedem Falle eine Gestaltsänderung der Massen erfolgt, also Arbeit geleistet wird, so muss in jedem Falle die lebendige Kraft der bewegten Massen nach dem Stosse kleiner sein wie vor dem Stosse. Man findet diesen Satz bestätigt, wenn man die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse vergleicht.

2) Wenn dagegen die beiden Körper vollkommen elastisch sind, so gleicht sich die im Stosse eintretende Gestaltsänderung sofort wieder aus, da die zusammengedrückten Körper sich sofort wieder ausdehnen und ihre ursprüngliche Gestalt annehmen. Die Körper sind also nach dem Stosse wieder in ihrem ursprünglichen Zustande, oder es ist bei dem Stosse keine Arbeit geleistet worden. Die lebendige Kraft der bewegten Massen kann daher durch den Stoss nicht geändert sein. Diese Bemerkung liefert uns für die elastischen Körper die zweite Relation zur Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stosse; denn nach derselben ist

$$m \cdot v^2 + m' v'^2 = m c^2 + m' c'^2$$

oder

$$m (v^2 - c^2) = m' (c'^2 - v'^2).$$

Dividiren wir diese Gleichung durch die vorhin allgemein abgeleitete

$$m(v - c) = m'(c' - v'),$$

so folgt

$$v + c = v' + c'$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$c = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'}; c' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'},$$

in denen wir wieder das Zeichen von  $v'$  ändern müssen, wenn die Geschwindigkeiten die entgegengesetzte Richtung haben.

Nehmen wir nun an, dass  $m = m'$  sei, so wird

$$c = v', c' = v.$$

Die Körper haben also nach dem Stosse ihre Geschwindigkeit einfach ausgetauscht. War die Geschwindigkeit der einen Masse  $m'$  gleich 0, so wird jetzt die der andern 0, denn dann wird

$$c = 0, c' = v.$$

Wird also eine ruhende Kugel von einer bewegten ganz gleicher Masse gerade gestossen, so erhält sie von letzterer deren volle Geschwindigkeit, und die stossende Kugel bleibt in Ruhe. Dieser bemerkenswerthe Schluss lässt sich leicht durch den Versuch nachweisen<sup>1)</sup>. Man hängt an einem Gestelle (Fig. 67) mehrere unter sich gleiche Kugeln von Elfenbein so auf,

Fig. 67.



<sup>1)</sup> Der Apparat zum Nachweis des Satzes vom Stosse der Körper wurde bereits von *Mariotte* angegeben. *Mariotte, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.*

dass sie sich berühren, und dass ihre Centra sich in einer geraden Linie befinden. Man hebt nun die erste um einen gewissen Winkel und lässt sie dann fallen. Sie beschreibt einen Kreisbogen wie ein Pendel und stösst auf die zweite Kugel mit einer Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$ . Nach dem Stosse ist sie in Ruhe, gibt aber ihre Geschwindigkeit an die zweite Kugel ab; diese überträgt sie an die dritte u. s. f. durch die ganze Reihe, bis schliesslich die letzte Kugel  $A$  die Geschwindigkeit erhält, welche  $B$  besass, und deshalb bis  $A'$  aufsteigt.

Dann fällt  $A$  wieder zurück, erreicht dieselbe Geschwindigkeit und theilt dieselbe wieder durch alle die Kugeln hindurch an  $B$  mit. Man hat demnach ein Pendel, welches aus einer Reihe von Kugeln besteht, deren mittlere unbeweglich bleiben, und deren beide äussern sich abwechselnd heben und senken.

Ist  $m' = \infty$ ,  $v' = 0$ , so wird

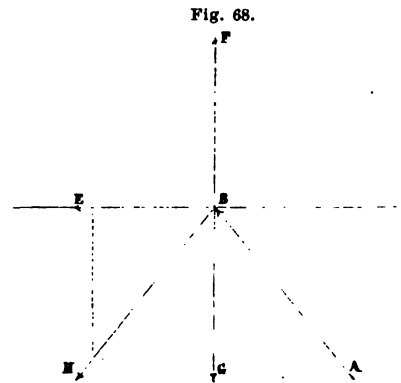
$$c = \frac{v(m - m')}{m + m'} = -v \frac{m'}{m} = -v,$$

d. h., stösst eine Kugel gegen eine feste Wand, so besitzt sie nach dem Stosse eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte gerichtete Geschwindigkeit. Lässt man demnach eine Elfenbeinkugel auf eine Marmorplatte fallen, so muss sie zurückspringen und zu derselben Höhe wieder aufsteigen, von der sie herabfiel, um neuerdings zu fallen und so ihre Bewegung ohne Ende fortzusetzen. Man weiss nun, dass das nicht der Fall ist, dass die Kugel allerdings zurückspringt, aber nicht bis zu ihrer ursprünglichen Höhe, und dass ihre Bewegung bald aufhört. Es hat das drei Ursachen.

- 1) Die Stoffe sind nie vollkommen elastisch.
- 2) Der Widerstand der Platte ist nicht unendlich, weil wegen der Geschwindigkeit des Stosses die Wirkung desselben sich nur auf einen Theil, nicht aber auf die gesammte Masse überträgt.
- 3) Die Luft leistet der Bewegung Widerstand.

Wenn die Kugel die widerstehende Ebene schief stösst, in der Richtung  $AB$  (Fig. 68), so zerlegt sich ihre Geschwindigkeit in zwei Theile eine parallel der Ebene,  $BE$ , die andere zu ihr senkrecht,  $BF$ . Nur die letztere verändert ihr Zeichen nach dem Stosse und geht in  $BG$  über. Aus der Verbindung der beiden Geschwindigkeiten  $BE$  und  $BG$  resultirt dann der Grösse und Richtung nach die Geschwindigkeit  $BH$ , und da die Geschwindigkeit  $BE$  keine Aenderung erfährt, und ebenso  $BG = FB$ , so folgt, dass die Kugel von der Wand unter einem Winkel zurückkehrt, der dem Winkel, unter welchem sie auftrifft, an Grösse gleich ist.

Wir haben bisher die einfachsten Fälle des Stosses betrachtet, wenn die sich treffenden Kugeln nur eine fortschreitende Bewegung besitzen, nicht aber eine drehende. Will man diese





mit in Betracht ziehen, so wird die Frage äusserst schwierig, sie g mit zu den complicirtesten der analytischen Mechanik.

### §. 59.

**Von der Adhäsion.** Wir sahen bisher, wie die einzelnen Theile Körper mit einer mehr oder weniger bedeutenden Kraft aneinander haften und nahmen deswegen eine besondere von der allgemeinen Massenattraction verschiedene Kraft an, die Cohäsionskraft. Etwas ähnliches nimmt man wahr, wenn man zwei verschiedene Körper in grosser Ausdehnung in innige Berührung bringt. Schleift man zwei Platten möglichst eben aneinander, schiebt sie dann vorsichtig über einander, so dass die beiden Ebenen ihrer ganzen Ausdehnung sich berühren, so sieht man, dass sie mit grosser Kraft aneinander haften. Diese Erscheinung nennt man die Adhäsion und sagt, die Platten adhären aneinander. Dieselbe Erscheinung zeigt sich, wie gesagt, immer, wenn zwei Körper mit grossen Flächen mit einander in Berührung kommen. Durch Adhäsion erklären sich eine Menge von Erscheinungen. Sie zeigt sich am stärksten, wenn man Körper im flüssigen Zustande auf oder an einen andern gebracht hat, ihn dann erstarren lässt, weil dann die Berührung beider eine innige ist; darauf beruht die Anwendung des Mörtels, des Leims und derartiger Bindemittel. Sehr oft, ja meist ist es der Fall, dass diese Bindemittel stärker an den Körpern adhären, zwischen welche man sie gebracht hat, als ihre einzelnen Theile unter einander cohären, deshalb wird bei einer versuchten Trennung der durch ein solches Bindemittel verbundenen Körper meist eher die Cohäsion des Bindemittels überwunden als die Adhäsion desselben an die verbundenen Körper.

Die Adhäsion ist unter übrigens gleichen Umständen der Grösse der Berührungsflächen proportional, wie man sich leicht durch Versuche an sogenannten Adhäsionsplatten überzeugt; je grösser dieselben sind, desto fester haften sie aneinander.

### §. 60.

**Von der Reibung.** Wenn zwei Körper über einander hin bewegt werden, so bedarf es immer einer gewissen Kraft, um die Bewegung zu unterhalten, selbst wenn die Bewegung in genau horizontaler Richtung sich geht. Durch die Berührung der Körper tritt also der Bewegung selbst über einander hin ein Hinderniss entgegen. Dieses Hinderniss zeichnet man als Reibungswiderstand; er tritt nur dann auf, wenn man einen Körper über einen andern hin in der Berührungsebene zu bewegen sucht.

Die Reibung ist um so stärker, je rauher die Flächen sind, wenn sie sich über einander bewegen; wir müssen daher eben in dieser Rauheit ihren hauptsächlichsten Grund suchen, indem dadurch die Theile der Körper theilweise in einander greifen, und deshalb bei jeder Bewegung selbst über einander hin ein geringes Heben des bewegten Körpers stattfinden muss. Je glatter deshalb im allgemeinen die Berührungsflächen sind, um so geringer ist die Reibung. Dass aber in den Unebenheiten der

rührungsflächen nicht der einzige Grund zu suchen ist, geht daraus hervor, dass die Reibung auch von der Natur der Körper abhängig ist. So z. B. zeigt sich, dass bei sonst gleichen Umständen Stahl und Messing auf einander bewegt den geringsten Reibungswiderstand zeigen. Wir müssen daher zur Erklärung der Reibung noch eine Anziehung zwischen den Theilen der sich berührenden Körper annehmen, die jedoch von der Adhäsion verschieden sein muss, da, wie wir sofort sehen werden, die Reibung von der Grösse der sich berührenden Oberflächen unabhängig ist.

Man unterscheidet gleitende Reibung und rollende Reibung; erstere findet statt, wenn zwei Ebenen über einander hingeschoben werden, oder zwei in einander passende Flächen, wie der Zapfen im Zapfenlager, sich in einander bewegen. Rollende Reibung tritt auf, wenn ein von krummen Flächen begrenzter Körper so über einen anderen von ebenen Flächen begrenzten hin bewegt wird, dass in jedem Augenblicke andere Punkte des bewegten Körpers den festen berühren, wenn also z. B. ein Rad auf den Schienen rollt. Die gleitende Reibung ist bei weitem die stärkere.

Die gleitende Reibung ist bisher am genauesten untersucht worden. Um sie zu untersuchen, legt man einen Körper auf eine glatte horizontale Unterlage und sucht die Kraft zu bestimmen, deren es bedarf, um den Körper in Bewegung zu setzen. Das kleinste Gewicht, welches Bewegung hervorbringt, misst die Reibung. Durch derartige Versuche haben Coulomb<sup>1)</sup>, Rennie<sup>2)</sup> und besonders Morin<sup>3)</sup> folgende allgemein gültige Gesetze nachgewiesen.

1) Die Reibung ist dem Drucke der Körper auf ihre Unterlage proportional.

2) Die Reibung hängt bei dem gleichen Drucke nicht von der Ausdehnung der sich berührenden Flächen ab, sofern diese keine Spitzen oder Kanten enthalten, sondern nur von deren Natur und Glätte.

3) Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Das Verhältniss der Reibung zum Drucke, d. h. den Bruchtheil des Gewichtes eines Körpers, der ihn in Bewegung zu setzen vermag, der nach dem Vorigen für dieselben Körper constant ist, nennt man den Reibungscoefficienten. So ist z. B. der Reibungscoefficient

von Eisen auf Eisen . . . 0,108

„ Messing auf Gusseisen 0,189 u. s. f.

Im allgemeinen nimmt die Reibung etwas zu, wenn Körper lange auf einander gestanden haben, jedoch nur beim Uebergange des Körpers aus der Ruhe zur Bewegung; einmal bewegt, ist der Reibungscoefficient wieder der frühere.

<sup>1)</sup> *Coulomb*, Mémoires présentés à l'Académie de Paris. T. X.

<sup>2)</sup> *Rennie*, Experiments on the friction etc. Philos. Trans. 1829.

<sup>3)</sup> *Morin*, Nouvelles expériences sur le frottement. I. Mémoires présentés à l'Acad. de Paris. T. IV. 1833. II. Memoires. Paris 1834. III. Mémoire. Paris 1835. Dove's Repertorium Bd. I.

## Zweites Kapitel.

## Von den tropfbar flüssigen Körpern.

## §. 61.

**Constitution der Flüssigkeiten.** Wir haben in §. 48 aus festen Körpern flüssige Körper kennen gelernt und sie dahin definirt, sie ein festes Volumen besitzen, aber keine feste Gestalt, sondern die Gestalt des Gefäßes annehmen, in welchem sie sich befinden. Die Theile der Flüssigkeiten sind nicht, wie die der festen Körper, fest miteinander verbunden, sie können sich vielmehr unter dem Einfluß der geringsten äussern Kraft gegen einander verschieben und fortwährend ihren Ort verändern, indem jedes Theilchen nach und nach einen beständigen Platz einnimmt und wieder verlässt, um von einem andern ersetzt zu werden.

Aus dieser, soweit wir beurtheilen können, vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitstheilchen gegeneinander ergibt sich zunächst, dass eine flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn irgend ein Molekül der Flüssigkeit wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, wenn also die etwa auf das Molekül wirkenden Drücke nach entgegengesetzten Richtungen genau gleich sind und deshalb sich ausgleichen. Denn wäre der Druck auf das Molekül nach der einen Richtung stärker als nach der gerade entgegengesetzten, so müsste das Molekül, da es aus dem kleinsten Drucke folgt, sich nach der Richtung der grössern Kraft bewegen.

Es folgt weiter, dass, wenn wir ein ringsgeschlossenes Gefäß

Fig. 69.



Flüssigkeit haben, welche unter der Wirkung irgend welcher Kräfte im Gleichgewicht ist, und nun durch einen Stempel *A* einen Druck *P* auf die Flüssigkeit ausüben, dass dann dieser Druck sich ganz ungeändert durch die Flüssigkeit breiten muss. Sei der Druck auf den Stempel *A* normal zur Berührungsebene des Stempels der Flüssigkeit gleich *P*, so dass die Fläche der Berührungsebene, welche die Gefäßwand habe, den Druck  $\frac{P}{S}$  erhält, so wirkt auf die Gefäßwand innern oder in der Grenzfläche der Flüssigkeit der Druck  $\frac{P}{S}$  über die flache Ebene, deren Fläche gleich *s* ist, der Druck  $\frac{P}{S} \cdot s$ , also über die Flächeneinheit der Druck  $\frac{P}{S}$ .

Um dieses nachzuweisen, nehmen wir an, die Flüssigkeit in dem Gefässe Fig. 69 sei unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht. Es wirke nun auf den Stempel *B* eine Kraft, so dass die Flächeneinheit der Berührungsebene einen normalen Druck  $p_0$  erfahre. Denken wir uns von dem Mittelpunkte des Stempels *B* eine Linie in das Innere der Flüssigkeit von der Länge *l*, etwa in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Stempels *A*, und um diese Linie einen Kreiscylinder gelegt, dessen Querschnitt gegen die Länge nur sehr klein sei. Die an *B* anliegende Grenzfläche

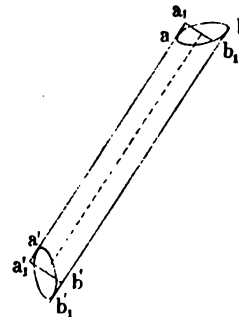
Cylinders steht dann schief zur Axe, ihre Normale bildet mit der Axe denselben Winkel  $\alpha$ , welchen die Normale der Stempelfläche mit der Richtung  $AB$  bildet. An der andern Seite denken wir uns den Cylinder ebenfalls durch eine schiefe Endfläche begrenzt  $a'b'$  Fig. 70, welche etwa parallel sei mit der Fläche des Stempels  $A$ , deren Normale mit der Axe den Winkel  $\alpha'$  bilde. Die Richtung der Axe bilde mit der Verticalen den Winkel  $\beta$ . Wenn die Flüssigkeit vor der Herstellung des Druckes im Gleichgewicht war, so bleibt sie es auch nach derselben, die Flüssigkeit befindet sich also im Innern des gedachten Cylinders im Gleichgewicht. Da nun aber in Folge des Druckes auf  $ab$  und der Schwere der im Innern des Cylinders vorhandenen Flüssigkeit eine bewegende Kraft vorhanden ist, so kann die Flüssigkeit wegen der vollkommen freien Beweglichkeit der Theile nur dann in dem Cylinder eingeschlossen und in Ruhe bleiben, wenn die auf die äussere Begrenzung des Cylinders wirkenden, durch die umgebende Flüssigkeit ausgeübten Drucke gleich den bewegendenden Kräften sind, oder wenn die überhaupt auf die Grenzfläche des Cylinders wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Denken wir uns die überhaupt auf die Flüssigkeit des Cylinders durch die Umgebung ausgeübten Drucke jeden in zwei Componenten zerlegt, deren eine normal zur Grenzfläche des Cylinders ist an der Stelle, wo die Kraft wirkt, deren andere parallel der Grenzfläche ist, so müssen die letztern für sich schon im Gleichgewicht sein, da sonst die Flüssigkeit im Innern des Cylinders sich gegen einander verschieben würde. Die zur Oberfläche normalen Drucke und die Schwere der Flüssigkeit stehen dann für sich wieder im Gleichgewicht, weil sonst der Cylinder als solcher sich in der umgebenden Flüssigkeit bewegen würde.

Wenn diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so haben sie nach keiner Richtung eine Resultirende; bilden wir also die Summe der Projectionen nach irgend einer beliebigen Richtung, so muss, welche Richtung wir auch wählen, diese Summe stets gleich Null sein. Projiciren wir nun die Kräfte, welche, wie wir eben sahen, den Cylinder als solchen bewegen können, auf die Axe des Cylinders, so sieht man zunächst, dass die Summe aller Projectionen der auf die Seitenfläche des Cylinders wirkenden Drucke auf die Axe für sich Null ist, da diese Kräfte zur Axe senkrecht sind; es müssen also ebenfalls für sich Null sein die Summe der auf die Axe des Cylinders projicirten Componenten der auf die schiefen Endflächen wirkenden Drucke und der Schwere der im Cylinder enthaltenen Flüssigkeit. Setzen wir nun den Druck auf die Fläche  $ab$  gleich  $p$ , den auf die Endfläche  $a'b'$  wirkenden gleich  $p'$ , und bezeichnen wir das Gewicht der Flüssigkeit des Cylinders mit  $q$ , so ist diese Gleichgewichtsbedingung

$$p \cdot \cos \alpha + p' \cdot \cos \alpha' + q \cdot \cos \beta = 0.$$

Bezeichnen wir nun den Querschnitt unseres Cylinders mit  $\sigma$ , so ist nach bekannten Sätzen der Stereometrie die Grösse der schiefen Endfläche

Fig. 70.



$ab$ , welche wir mit  $s$  bezeichnen wollen,

$$s = \frac{\sigma}{\cos \alpha},$$

somit

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{s}.$$

Ebenso erhalten wir für  $\cos \alpha'$ , wenn wir die Grösse der schiefen Endfläche  $a' b'$  mit  $s'$  bezeichnen,

$$\cos \alpha' = \frac{\sigma}{s'}.$$

Das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders ist nun, nach ebenfalls bekannten Sätzen der Stereometrie, gleich dem Volumen des geraden Cylinders, dessen Axe gleich ist der Länge der Axe des schief abgeschnittenen Cylinders, den wir also erhalten, wenn wir durch die Mittelpunkte der schiefen Endflächen die geraden Endflächen  $a_1 b_1$  und  $a'_1 b'_1$  legen. Bezeichnen wir nun die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, das Gewicht der Volumeneinheit mit  $d$ , so ist das Gewicht  $q$  der im Cylinder enthaltenen Flüssigkeit

$$q = \sigma \cdot l \cdot d.$$

Setzen wir die so erhaltenen Werthe für  $\cos \alpha$ ,  $\cos \alpha'$ ,  $q$  in die sich aus dem Gleichgewicht des Cylinders ergebende Gleichung ein, so wird

$$\frac{p}{s} \cdot \sigma + \frac{p'}{s'} \cdot \sigma + \sigma l d \cdot \cos \beta = 0$$

oder

$$-\frac{p'}{s'} \cdot \sigma = \frac{p}{s} \cdot \sigma + \sigma \cdot l d \cdot \cos \beta.$$

Da  $\beta$  der Winkel ist, welchen die Axe des Cylinders mit der Verticalen bildet, so ist

$$l \cdot \cos \beta = h$$

gleich dem lothrechten Abstände der Mittelpunkte der beiden Endflächen des Cylinders, und wir erhalten dann schliesslich

$$-\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + d \cdot h.$$

Die Quotienten  $\frac{p}{s}$  und  $\frac{p'}{s'}$  liefern uns die auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke, vorausgesetzt, dass die Drucke auf derselben gleichmässig vertheilt und überall so gross sind als auf den sehr kleinen Flächen  $s$  und  $s'$ . Dann sagt also die letztere Gleichung, dass auf der untern Fläche  $a' b'$  des Cylinders ein gegen das Innere des Cylinders gerichteter normaler Druck wirkt, welcher für die Flächeneinheit gleich ist dem auf die Flächeneinheit der obern Endfläche des Cylinders wirkenden Drucke, vermehrt um das Gewicht eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich ist dem verticalen Abstände der Mittelpunkte der Flächen, welche den Cylinder oben und unten begrenzen.

Da wir nun vorher sahen, dass in einer Flüssigkeit nur Gleichgewicht sein kann, wenn die auf die Moleküle nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander gleich sind, so folgt, dass eine ebensolche Kraft auf die Flächeneinheit der untern Grenzfläche von innen nach aussen wirkt,

und daraus weiter, da wir über die Lage unseres Cylinders, also über den Winkel  $\beta$  und ebenso über die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  gar keine specielle Voraussetzung gemacht haben, dass sich der auf irgend eine Fläche im Innern oder an der Grenze der Flüssigkeit wirkende Druck nach einer beliebigen Richtung ganz ungeändert fortpflanzt, so dass auf die Flächeneinheit immer derselbe Druck wirkt. Setzen wir z. B. in Fig. 69 etwa voraus, dass die Stempel  $A, B, C$  sich in derselben Horizontalebene befinden, so ist  $h$  gleich Null, und wir erhalten dann, wenn die Querschnitte der Stempel  $S, S_1, S_2$  sind, für die auf dieselben wirkenden Drucke  $P, P_1, P_2$

$$\frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}$$

oder mit der vorhin gewählten Bezeichnung

$$\frac{P}{S} = p_0$$

$$P_1 = p_0 \cdot S_1; P_2 = p_0 \cdot S_2.$$

Liegen die Stempelflächen nicht in derselben Horizontalebene, so ist für den fortgepflanzten Druck ganz dasselbe; der auf die im tiefern Niveau liegenden Stempelflächen wirkende Druck wird dann nur vermehrt durch das Gewicht des Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt gleich ist dem der tiefer liegenden Stempelflächen, und dessen Höhe gleich ist der Niveau-Differenz der Stempelflächen.

Aus der Gleichmässigkeit der Fortpflanzung des Druckes ergibt sich nun weiter, dass, wenn wir uns im Innern der Flüssigkeit eine kleine ebene Fläche denken, welche durch die vorhandenen Kräfte irgend einen Druck erfährt, dass der Druck dann unabhängig ist von der Richtung, welche die kleine Fläche hat. Wir mögen die Ebene drehen, wie wir wollen, der Druck ist immer derselbe. Die vorhin aus der Beweglichkeit der Moleküle gezogene Folgerung, dass die auf ein Molekül nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte gleich sein müssen, können wir daher dahin erweitern, dass die im Innern einer Flüssigkeit auf ein Molekül wirkenden Kräfte nach allen Richtungen des Raumes dieselben sind.

### §. 62.

**Compressibilität der Flüssigkeiten.** Wir haben im vorigen Paragraphen die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes, den wir an einer Stelle einer Flüssigkeit ausüben, lediglich als eine Folgerung aus der vollkommen leichten Beweglichkeit der Flüssigkeitstheilchen abgeleitet; wir können aber leicht auch den physikalischen Vorgang erkennen, wodurch diese Ausbreitung des Druckes zu Stande kommt.

Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Moleküle derselben in bestimmten durch die gegenseitigen Anziehungen und Abstossungen bedingten Entfernungen. Wenn wir nun auf eine eingeschlossene Flüssigkeit in einer Richtung einen Druck ausüben, so muss zunächst in dieser Richtung, gerade wie bei den festen Körpern, eine Annäherung der Moleküle stattfinden, bis die in Folge der Annäherung derselben vergrösserte Abstossung der Moleküle gleich ist der durch den äussern Druck vermehrten Anziehung der Moleküle. Gerade so nun aber,

wie die Moleküle sich in der Richtung des Druckes einander nähern, so nähern sie sich auch in den auf die Druckrichtung senkrechten Dimensionen, und zwar, wie aus der gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes folgt, um genau die gleiche Grösse. Darin unterscheiden sich also die Flüssigkeiten von den festen Körpern; drücken wir einen festen Körper in der einen Richtung zusammen, so ist die Querdilatation nur ein Bruchtheil der in ersterer Richtung eintretenden Compression; soll die Ausdehnung nach der Quere verhindert werden, so bedarf es deshalb auch nur eines ebenso grossen Bruchtheils der in der ersten Richtung thätigen Kraft, welche in der Richtung der Querdimensionen der Ausdehnung entgegen wirken muss. Weil aber bei einer in einem unausdehnbar eingegliederten Gefässe eingeschlossenen Flüssigkeit die Moleküle nach allen Richtungen sich gleichmässig nähern, deshalb muss, wenn keine Ausdehnung eintreten soll, von allen Seiten der gleiche Gegendruck wirken.

Die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten können wir somit als eine Folge davon ansehen, dass die Flüssigkeiten in einer Beziehung ebenso wie die festen Körper elastisch sind; es treten in ihnen Elasticitätskräfte auf immer dann, aber auch nur dann, wenn die Moleküle aus ihrer Gleichgewichtslage so verschoben werden, dass sie sich einander nähern; eine Verschiebung der Moleküle ohne Aenderung der Dichtigkeit ruft keine elastische Kraft hervor.

Um den Nachweis zu liefern, dass die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes in der That eine Folge der durch eine Annäherung der Moleküle geweckten elastischen Kraft ist, haben wir zu zeigen, dass die Flüssigkeiten in der That durch äussere Drucke eine Volumverminderung erfahren. Indem wir dann gleichzeitig die durch einen gegebenen Druck hervorgebrachte Volumverminderung messen, können wir die Abhängigkeit der Volumverminderung von dem äussern Drucke und besonders die Frage untersuchen, ob auch hier, wie bei festen Körpern, die Volumverminderung der Grösse des Druckes proportional ist. Ist das der Fall, so muss die durch einen auf die Flächeneinheit wirkenden Druck  $P$  hervorgebrachte Volumverminderung  $v$

$$v = \alpha \cdot P$$

sein, worin  $\alpha$  eine Constante ist, welche man als den Compressionscoefficienten der Flüssigkeit bezeichnet. Der reciproke Werth dieses Coefficienten oder

$$\frac{1}{\alpha} = E$$

ist dann der Elasticitätscoefficient der Flüssigkeiten, jener Coefficient, mit welchem wir die in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens angegebene Volumverminderung multipliciren müssen, um die durch diese Volumverminderung geweckte elastische Kraft zu erhalten.

Der erste Versuch um die Compressibilität der Flüssigkeiten nachzuweisen wurde von der Academia del Cimento zu Florenz<sup>1)</sup> gemacht, jedoch mit ungünstigem Erfolge. Man nahm unter andern Versuchen eine mit Wasser gefüllte, mit einer Oeffnung versehene Hohlkugel von Silber. In die Oeffnung wurde ein Stempel mit grosser Gewalt hineingetrieben; aber an-

<sup>1)</sup> Fischer, Geschichte der Physik. Bd. II. p. 207.

statt einer Zusammendrückung des Wassers beobachtete man, dass dasselbe durch die Poren des Silbers hindurch gepresst wurde.

Mit günstigerem Erfolge wurde der Versuch im Jahre 1761 von Canton<sup>1)</sup> wiederholt, dem es gelang den Nachweis zu liefern, dass das Wasser durch einen äussern Druck eine Verminderung des Volumens erfuhr. Canton wandte zu seinen Versuchen eine mit einer langen und engen Glasröhre versehene Kugel an. Dieselbe wurde mit Wasser gefüllt, erhitzt, und wenn das Wasser im Kochen war, die Spitzen der Röhre zugeschmolzen. Durch die Abkühlung zog sich dann das Wasser zusammen und reichte bei einer bestimmten Temperatur bis zu einem gewissen Punkte der Röhre. Durch das Zusammenziehen des Wassers entstand dann über demselben in der Röhre ein luftleerer Raum. Wurde dann die Spitze abgebrochen, so drang die Luft rasch in die Röhre, und unter ihrem Drucke sah man die Flüssigkeit in der Röhre sinken. Dieses Sinken hatte jedoch zwei Ursachen, einmal die Zusammendrückung des Wassers, dann aber die Vergrößerung des Volumens des Gefässes dadurch, dass plötzlich der Druck im Innern desselben um den Druck einer Atmosphäre erhöht wurde. Um die Vergrößerung des innern Raumes des Gefässes zu messen, genügt es, den äussern Druck auf die Gefässwände gerade so viel zu vermindern, als vorher der innere Druck vermehrt war; brachte man also die Kugel in den luftleeren Raum so musste sich ihr Volumen gerade so vermehren wie in dem vorigen Falle. Die Vermehrung wurde durch das Sinken des Wassers in der engen Röhre gemessen und die so erhaltene Grösse von der bei dem ersten Versuche erhaltenen abgezogen; der Unterschied gab die Compression des Wassers. Auf diese Weise war also die Compressibilität des Wassers bewiesen. Aehnliche Versuche stellte 1820 Perkins<sup>2)</sup> an mit gleichem Erfolg. Die ersten genauer messenden Versuche rühren jedoch von Oersted her<sup>3)</sup>.

Oersted construirte einen Apparat, den man Piezometer oder Sympiezometer nennt. Das Piezometer besteht aus einem weiten Gefässe (Fig. 71), in dem sich ein sehr enges Glasrohr *O* befindet, welches in einem kleinen Trichter endigt und unverschlossen bleibt.

Das Rohr ist genau cylindrisch und in gleiche Theile getheilt. Zunächst muss nun der Apparat graduirt, d. h. die Capacität des ganzen Gefässes mit der des zwischen zwei Theilstreichen befindlichen Raumes verglichen werden. Wir wollen das

Fig. 71.



<sup>1)</sup> Joh = Canton, Experiments to prove that water is not incompressible. Philosophical Transactions of London Royal Society. Vol. LII. Poggend. Ann. Bd. XII. p. 39.

<sup>2)</sup> Perkins. Philosophical Transactions. Vol. LXXII. 1820. Poggend. Ann. IX. 547.

<sup>3)</sup> Oersted, Denkschriften der Kopenhagener Academie IX Bd. 1822. Poggend. Ann. Bd. IX. p. 603.



Verfahren etwas näher beschreiben, da wir noch häufig derselben Aufgabe begegnen.

Man wiegt zunächst das leere Gefäss und füllt es dann mit Quecksilber; wegen der Enge der Röhre lässt sich das nicht durch einfaches Eingiessen füllen, weil die im Gefässe enthaltene Luft nicht entweichen und deshalb das Quecksilber nicht eindringen kann. Man erwärmt daher das Gefäss und hält dann den Trichter, in welchem das Rohr  $O$  endigt, unter Quecksilber. Beim Erkalten steigt dann durch den Druck der äussern Luft das Quecksilber in die Röhre und das Gefäss auf. Hört das Quecksilber auf zu steigen, so erwärmt man neuerdings und so fort, bis das Gefäss ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Um keine Spur Luft in dem Gefäss zu lassen, erwärmt man dann das Gefäss nochmals, taucht währenddessen seine Spitze in Quecksilber und lässt es dann auf  $0^0$  erkalten, indem man es vorsichtig mit schmelzendem Eise umgibt. Nach einiger Zeit, vielleicht nach einer Viertel-Stunde oder bei grossen Gefässen noch länger, nimmt man den mit Quecksilber von der Temperatur  $0^0$  gefüllten Apparat aus dem Eise heraus, trocknet ihn rasch und vorsichtig ab und bestimmt möglichst rasch sein Gewicht. Von dem dann erhaltenen Totalgewicht  $P$  zieht man dann das Gewicht  $p$  des leeren Gefässes ab und erhält dann aus dem Quotienten  $\frac{P-p}{D}$  das Volumen des Gefässes in Kubikcentimetern, wenn  $P$  und  $p$  in Grammen gegeben und  $D$  das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist.

Darauf erwärmt man das Gefäss sehr wenig, bewirkt dadurch, dass etwas Quecksilber austritt, und lässt es dann wieder wie vorhin auf  $0^0$  erkalten. Dabei zieht sich das Quecksilber zusammen, und schliesslich wird das Ende des in die Röhre hineinragenden Quecksilberfadens constant einem Theilstriche der Röhre gegenüber stehen, der um  $n$  Theilstriche tiefer sei als bei der vorigen Wägung. Jetzt wiegt man wieder; und ist das jetzt gefundene Gewicht gleich  $P'$ , so gibt die Verminderung des Gewichtes  $P - P'$  an, wieviel Gramme Quecksilber den Raum zwischen jenen  $n$  Theilstrichen ausfüllen; der Quotient  $\frac{P - P'}{D}$  gibt dann diesen Raum in Kubikcentimetern und der Quotient  $\frac{P - p}{nD}$  den Raum zwischen zwei Theilstrichen in derselben Einheit an.

Nach geschehener Calibrirung wird dann das Gefäss in ganz gleicher Weise mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und in den kleinen Trichter ein Tropfen Quecksilber gebracht. Dieser dient einmal als Pfropfen, um das Eindringen von Flüssigkeit in das Gefäss zu verhüten, dann aber auch als Index, da er während der Compression in die Röhre hinabgedrückt wird und somit angibt, um wieviel das Volumen der Flüssigkeit kleiner geworden ist. Das Gefäss wird dann auf einer Messingplatte befestigt, daneben ein Thermometer  $L$  und eine getheilte, unten offene, oben geschlossene, mit Luft gefüllte Röhre  $K$ , welche als Druckmesser dient, befestigt und dann die ganze Vorrichtung in ein mit Wasser gefülltes Gefäss hinabgelassen, das als Compressionsapparat dient.

Das Gefäss  $E$  besteht aus einem Cylinder von starkem Glase, der unten in einen Fuss  $F$  eingelassen und oben mit einer Fassung versehen ist, in deren Röhre  $A$  sich ein beweglicher Kolben  $D$  befindet. Man füllt nun

das Gefäss, während der Kolben sich über  $A$  befindet, durch den Hahn  $B$  mit Wasser so weit, dass dasselbe aus einer Oeffnung bei  $A$  ausfliesst. Man schliesst dann den Hahn und schraubt den Kolben herab. Sobald derselbe unter  $A$  herabgeschraubt ist, kann kein Wasser mehr entweichen, und das des Gefässes wird zusammengedrückt.

Der Druck, den man auf diese Weise ausübt, trifft nach den Entwicklungen des vorigen §. in ganz gleicher Weise die äussere Wand des Piezometers und die in seinem Innern enthaltene Flüssigkeit. Man sieht nun den Index um eine gewisse Anzahl Theilstriche sinken und misst dadurch die Volumverminderung der im Piezometer enthaltenen Flüssigkeit. Zugleich wird nun auch die Luft in der Röhre  $K$  comprimirt, und in der Volumveränderung derselben erhalten wir, wie wir später sehen werden, ein Maass für den ausgeübten Druck.

Man hat auf diese Weise die Volumverminderung gemessen und andererseits den Druck, welcher dieselbe hervorgebracht hat. Dividirt man die Volumveränderung durch das ursprüngliche Volumen und diesen Quotienten dann durch den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck, so erhält man den scheinbaren Compressionscoefficienten der Flüssigkeit, d. h. die Compression der Flüssigkeit ohne Rücksicht auf diejenige des Gefässes.

Oersted fand diesen Coefficienten für Wasser gleich 46 Milliontheile, wenn man als Einheit des Druckes den einer Atmosphäre annimmt, d. h. wenn man in einem rings geschlossenen Gefässe auf jedes Quadratcentimeter Oberfläche einen Druck von 1,0336 Kilogramm ausübt, so wird die Flüssigkeit um 46 Milliontheile ihres ursprünglichen Volumens comprimirt. Oersted hielt dies für die wahre Compressibilität des Wassers; denn er glaubte, weil der Druck in ganz gleicher Weise auf die äussere und innere Wand ausgeübt wird, so könne sich die Capacität des Gefässes nicht ändern ausser ganz unmerklich dadurch, dass die Wanddicke des Gefässes etwas geändert wird. Oersted hatte jedoch Unrecht. Denn setzen wir voraus, dass das Piezometer, anstatt mit Wasser gefüllt zu sein, ganz und gar von Glas sei, so ist klar, dass, wenn man dasselbe von aussen drückt, der Druck sich auf den innern Kern fortpflanzt und dessen Volumen nach den Gesetzen der kubischen Compression vermindert. Die Capacität der Hülle muss sich demnach um die gleiche Grösse ändern. Ganz dasselbe muss nun aber auch der Fall sein, wenn das Gefäss mit Wasser gefüllt ist; denn so wie in dem oben betrachteten Falle der Kern von der Hülle einen Druck erfährt und nach seiner Zusammenpressung einen ganz gleichen Gegendruck ausübt, die Hülle also ganz genau so stark nach innen wie nach aussen gedrückt wird, so auch hier, wo der feste Kern durch Wasser ersetzt ist; die Hülle erfährt gleiche Drucke; sowie also in dem Falle des festen Kernes eine Volumveränderung einträte, so muss sie es in diesem Falle auch.

Nennen wir demnach die Capacität des Piezometers  $V$ ,  $P$  den ausgeübten Druck,  $\alpha$  den Compressionscoefficienten des Wassers, so würde bei ganz unverändertem Gefässe die Volumverminderung, welche man beobachtet,  $\alpha V \cdot P$  sein. Da aber das Gefäss comprimirt wird, so beobachtet man eine kleinere. Ist nämlich  $C$  der kubische Compressionscoefficient des Gefässes, so vermindert sich dessen Volum um  $C \cdot P \cdot V$ , und dadurch muss die Flüssigkeit im Gefässe steigen. Die beobachtete Contraction  $w$  ist die Differenz beider:

$$w = \kappa \cdot P \cdot V - C \cdot P \cdot V,$$

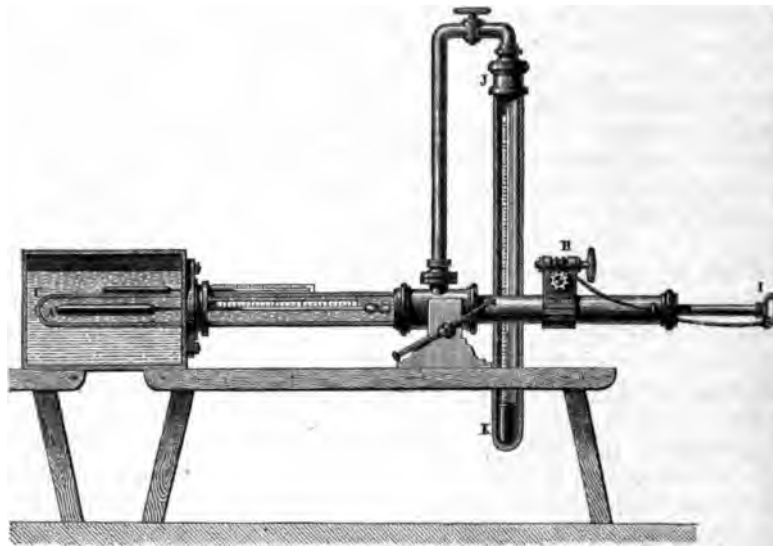
oder

$$\frac{w}{P \cdot V} = \kappa - C.$$

Man beobachtet also die Differenz zwischen dem Compressionscoefficienten des Wassers und dem kubischen Compressionscoefficienten des Gefässes.

Colladon und Sturm wiesen diesen Irrthum in Oersted's Versuchen nach und unternahmen es, ihn zu corrigiren<sup>1)</sup>. Sie stellten eine grosse Reihe von Versuchen mit einem dem Oersted'schen sehr ähnlichen Apparate (Fig. 72)

Fig. 72.



an. Ein Piezometer *A* wurde wie das Oersted'sche hergestellt und graduirt und dann in ein weites Gefäss *C* mit starken Wänden, welches mit Wasser gefüllt war, eingeschlossen. Letzteres diente als Compressionsapparat. Der einzige Unterschied besteht darin, dass sie das Piezometer horizontal legten und den ausgeübten Druck mit einem fein getheilten, langen und deshalb sehr empfindlichen Quecksilbermanometer *KJ* maassen. Dieser Druck wurde mit Hilfe eines Kolbens ausgeübt, dessen Stiel *I* durch ein Seil gezogen wurde, welches um eine, durch eine Schraube ohne Ende *H*, bewegliche Walze gerollt war.

Colladon und Sturm bemerkten nun bald auch einige Fehlerquellen, welche an sich zwar sehr klein, auf das endliche Resultat wegen der Kleinheit der zu messenden Grössen jedoch von bedeutendem Einfluss wurden. Der Index von Quecksilber in der Röhre des Piezometers bot manche Unbequemlichkeit, er adhürirte am Glase, bewegte sich nicht regelmässig,

<sup>1)</sup> Colladon und Sturm, Annales de chim. et de phys. T. XXXVI, p. 113. Auch Poggend. Annalen XII, 39.

sondern sprungweise bei Vermehrung des Druckes. Sie wandten deshalb einen Tropfen Schwefelkohlenstoff oder auch eine kleine Luftsäule an und erhielten so regelmässig verlaufende Versuche.

Andererseits ist das Piëzometer ein wahres Thermometer und wegen des grossen Gefässes und der engen Röhre sogar ein sehr empfindliches. Jede Temperaturänderung veranlasst daher eine Bewegung des Index; und da jede Zusammendrückung das Wasser erwärmt, jede Ausdehnung wieder abkühlt, so waren die beobachteten Variationen Resultate sehr verwickelter Natur. Man schaffte diese Störung fort, indem man das Compressionsgefäss in ein grosses Gefäss mit Wasser einschloss, welches dazu diente, die Temperatur constant zu halten. Die Versuche waren daher sehr genau. Die Messungen mussten indess wegen der Compressibilität des Glases corrigirt werden; dazu verfahren die Physiker folgendermaassen. Sie nahmen einen Glasstab von 1 Meter Länge und 13,3 Quadratmillimeter Querschnitt. Dieser wurde durch ein Gewicht von 8 Kilogramm gezogen und eine Verlängerung von  $0^{\text{mm}},06$  beobachtet. Er würde durch das gleiche Gewicht um ebensoviele comprimirt worden sein. Der Druck der Atmosphäre ist nun auf den Quadratcentimeter 1,0336 Kilogramm, auf jede Endfläche des Stabes 13,3 Quadratmilligr., somit  $138^{\text{gr}},3$ , und da die Verkürzung des Stabes dem pressenden Gewichte proportional ist, so folgt, dass sich der Stab durch den Druck einer Atmosphäre um  $0^{\text{mm}},0011$  verkürzt. Dies ist die lineare Compressibilität für ein Meter Länge und den Druck einer Atmosphäre.

Colladon und Sturm nahmen nun an, dass ein Druck auf die Endflächen nur eine Verkürzung des Stabes und keine andere Veränderung der Gestalt oder des Querschnittes bewirke. Wenn nun nach dieser Hypothese ein Druck auf die ganze Oberfläche ausgeübt wird, so muss sich der Stab nach allen Richtungen hin gleichmässig verkürzen. Die Länge  $l$  wird  $l(1-0,0000011)$ , der Radius der Basis wird  $r(1-0,0000011)$ , und das ursprüngliche Volumen  $\pi r^2 l$  geht sonach über in  $\pi r^2 l (1-0,0000011)^3$  oder annähernd mit Vernachlässigung der zweiten und dritten Potenzen in  $\pi r^2 l (1-0,0000033)$ . Die kubische Compression wäre sonach die dreifache von der linearen.

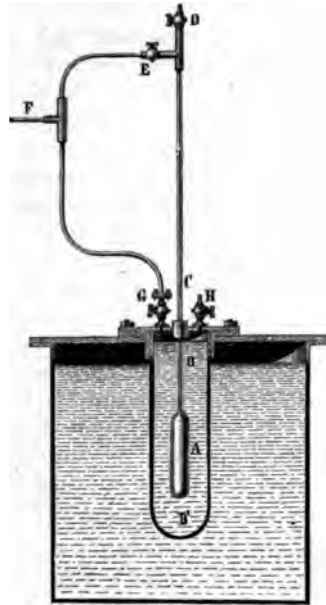
Wir sahen jedoch vorhin, dass ein Stab, der in seiner einen Richtung zusammengedrückt wird, zugleich eine Vergrösserung des Querschnittes erhält; deshalb ist die vorstehende Entwicklung nicht exakt und die Correction sowie die von Colladon und Sturm gegebenen Zahlen für die Compressibilität der Flüssigkeiten zu gross.

**Versuche von Regnault<sup>1)</sup>.** Regnault wurde durch andere Fragen darauf geführt, sich eingehend mit diesem Gegenstande zu beschäftigen, und seine nach einer ganz neuen Methode unternommenen Versuche gestatten es, beide Compressibilitäten, die der Flüssigkeit und die des Gefässes zugleich zu messen. Er gibt dem Piëzometer  $A$  eine genau bestimmbare geometrische Gestalt, einer Metallkugel von bekanntem innern und äussern Radius oder eines Cylinders mit ebenen oder halbkugelförmigen Endflächen, wie in Fig. 73. An das Gefäss ist eine gut calibrirte Glasröhre  $CD$  ange-

<sup>1)</sup> Regnault, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie. Tome XXI. p. 429. Paris 1847.

setzt, die ihrer ganzen Länge nach getheilt ist, und deren Volumnisse in der vorhin beschriebenen Weise bestimmt sind.

Fig. 73.



Man schliesst nun das Gefäß des meters in einen mit Wasser angefüllten cylinder *B*, der durch einen mittels Schrauben befestigten Deckel verschlossen ist. eine Oeffnung des Deckels reicht durch des Piezometers aus dem Gefässe hervor mit Kitt in der Oeffnung befestigt ist. Innere der Röhre kann an ihrem oberen durch einen Hahn *D* mit der freien Verbindung gebracht und dem Druck der Atmosphäre ausgesetzt werden. Durch Hahn *E* und die Röhre *EF* kann das Gefäß der Röhre *CD* aber auch mit einem mit comprimierter Luft gefüllten Gefässe in Verbindung gebracht und so beliebig einem Drucke ausgesetzt werden oder nicht. die Röhre *FG* kann nun dasselbe mit comprimierter Luft, wenn der Hahn *H* geöffnet und *H* geschlossen ist, auch Druck auf das Wasser des Gefässes *A* üben.

Man kann somit 1) auf das Piezometer einen äussern Druck ausüben, indem man *D* schliesst, *G* und *D* öffnet und *H* schliesst; 2) einen innern Druck ausüben, wenn man *H* und *D* schliesst, *G* und *E* öffnet; 3) kann einen innern Druck allein üben, wenn man *D* und *G* schliesst, *E* öffnet.

Man vollführt nach und nach alle drei Compressionen.

I. Man comprimirt das Wasser im Gefäss *BB*. Diesen Versuch wird schon §. 52 beschrieben bei Betrachtung der kubischen Compressibilität. Die Flüssigkeit im Piezometer unterliegt keiner Einwirkung; das Gefäss ist comprimirt, sein Volumen verkleinert, die Flüssigkeit steigt. Bezeichnen wir die eingetretene Volumverminderung mit  $\Delta V'$ , so ist §. 52 für den Fall der Kugel

$$\frac{\Delta V'}{V} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P.$$

Die Beobachtung liefert uns den Werth von  $\mu$  und daraus auch den kubischen Compressionscoefficienten des Gefässes

$$C_1 = 3 \frac{1-2\mu}{E}.$$

II. Man übt innen und aussen den gleichen Druck *P* aus; dabei beobachtet man die Volumverminderung der Flüssigkeit, weniger die des Gefässes. Bezeichnen wir den Compressionscoefficienten der Flüssigkeit mit  $\kappa$ , so erhalten wir für die Volumverminderung der Flüssigkeit aus den Gleichungen des §. 52

$$\Delta v_1 = \kappa \cdot P \cdot V;$$

denn die Flüssigkeit ist eine massive Kugel, somit der Radius  $R_0$  der

gleich Null. Darnach ist auch die Constante  $b = 0$ , und der Werth von  $\Delta v_1$  reducirt sich auf das oben hingeschriebene Glied.

Um die Volumverminderung des Gefäßes zu erhalten, haben wir in den Gleichungen des §. 52  $P_1 = P_0$  zu setzen. Damit wird

$$b = 0; \quad c = \frac{1}{3K+k} \cdot P = \frac{1-2\mu}{E} \cdot P,$$

mit die Volumverminderung

$$\Delta v_2 = 3 \frac{1-2\mu}{E} \cdot P \cdot V = C_1 P \cdot V.$$

Die in diesem Falle überhaupt beobachtete Verminderung des Volumens  $\Delta V''$  ist die Differenz zwischen der Verminderung des Volumens der Flüssigkeit und jener des Gefäßes,

$$\begin{aligned} \Delta V'' &= \Delta v_1 - \Delta v_2 = x PV - C_1 PV, \\ \frac{\Delta V''}{P \cdot V} &= x - C_1; \quad x = \frac{\Delta V''}{P \cdot V} + C_1. \end{aligned}$$

Da der erste Versuch  $C_1$  geliefert hat, können wir aus diesem den Werth von  $x$  berechnen.

III. Der dritte Versuch liefert eine Controle der beiden erstern; man setzt den Druck  $P$  nur im Innern aus. Die beobachtete Volumänderung  $\Delta V$  resultirt her von der Compression der Flüssigkeit und der Ausdehnung des Gefäßes, erstere ist wie oben

$$\Delta v_1 = x PV.$$

Die Ausdehnung des Gefäßes erhalten wir aus den Gleichungen des §. 52, indem wir  $P_1$  gleich Null setzen; damit wird dieselbe

$$\Delta v = P \cdot V \left\{ \frac{3}{3K+k} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{3}{2k} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \right\},$$

mit

$$\Delta V = \Delta v_1 + \Delta v = P V \left\{ x + \frac{3}{3K+k} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{3}{2k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \right\},$$

oder auch, wenn wir  $K$  und  $k$  durch  $\mu$  und  $E$  ausdrücken,

$$\Delta V = P V \left\{ x + 3 \frac{(1-2\mu) R_0^3 + \frac{1}{2}(1+\mu) R_1^3}{E (R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Da nun die bei dem ersten Versuch beobachtete Volumänderung war

$$\Delta V' = 3 \frac{\frac{1}{2}(1-\mu)}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P \cdot V;$$

ferner bei dem zweiten Versuche die Volumänderung sich ergab

$$\Delta V'' = \left\{ x - 3 \frac{1-2\mu}{E} \right\} P \cdot V,$$

folgt

$$\Delta V' + \Delta V'' = \left\{ x + 3 \frac{(1-2\mu) R_0^3 + \frac{1}{2}(1+\mu) R_1^3}{E (R_1^3 - R_0^3)} \right\} = \Delta V.$$

Es muss somit die Volumänderung bei dem dritten Versuch gleich der Summe der Volumänderungen bei dem ersten und zweiten Versuche sein, eine Relation, welche Regnault bei allen seinen Versuchen auf das genaueste bestätigt fand. Für die Compressibilität des Wassers erhält man aus den Versuchen Regnault's mit der Kupferkugel

$$x = 0,0000477,$$

aus den Versuchen mit der Messingkugel

$$\alpha = 0,0000479,$$

wobei als Einheit des Druckes derjenige einer Atmosphäre vorausgesetzt ist.

Nehmen wir auch hier als Einheit des Druckes den eines Kilogramms auf das Quadratmillimeter, so haben wir diese Zahl durch 0,010336 zu dividieren, dann wird

$$\alpha = 0,004624; E = \frac{1}{\alpha} = 216,2.$$

Später hat Grassi<sup>1)</sup> mit den Regnault'schen Apparaten eine Anzahl von Flüssigkeiten untersucht; in der folgenden Tabelle sind die von ihm gefundenen Werthe zusammengestellt. Die Werthe von  $\alpha$  beziehen sich auf den Druck einer Atmosphäre.

Name der Flüssigkeit	Temperatur	Zusammen- drückbarkeit $\alpha$ für Atm.	Druck in Atmo- sphären, aus denen die Zusammen- drückbarkeit her- geleitet.
Quecksilber . . . . .	0°,0	0,0000295	—
Wasser . . . . .	0,0	0,0000503	—
id. . . . .	1,5	515	—
id. . . . .	4,8	429	—
id. . . . .	10,1	480	—
id. . . . .	13,4	477	—
id. . . . .	18,0	463	—
id. . . . .	—	460	—
id. . . . .	25,0	456	—
id. . . . .	34,5	453	—
id. . . . .	43,0	442	—
id. . . . .	53,0	441	—
Aethyläther . . . . .	0,0	0,000111	3,408
id. . . . .	0,0	131	7,820
id. . . . .	14,0	140	1,580
id. . . . .	13,8	153	8,362
Aethylalkohol . . . . .	7,3	0,0000828	2,302
id. . . . .	7,3	853	9,495
id. . . . .	13,1	904	1,570
id. . . . .	13,1	991	8,97
Methylalkohol . . . . .	13,5	0,0000913	—
Chloroform . . . . .	8,5	0,0000625	—
Chlorcalcium Lösung 1 . . . . .	17,5	0,0000306	—
id. id. 2 . . . . .	15,8	206	—
id. id. 2 . . . . .	41,25	229	—
Kochsalz id. 1 . . . . .	18,5	321	—
id. id. 2 . . . . .	18,1	257	—
id. id. 2 . . . . .	39,6	263	—
Jodkalium id. . . . .	15,5	260	—
Natronsalpeter id. . . . .	18,1	295	—
Soda id. . . . .	16,6	297	—
Meerwasser . . . . .	17,5	436	—
SO <sup>3</sup> + 2HO . . . . .	13,6	242	—
SO <sup>3</sup> + 3HO . . . . .	14,6	250	—
SO <sup>3</sup> + 4HO . . . . .	16,5	271	—
SO <sup>3</sup> + 5HO . . . . .	14,7	279	—
SO <sup>3</sup> + 6HO . . . . .	14,2	283	—
SO <sup>3</sup> + 10HO . . . . .	14,6	315	—

<sup>1)</sup> Grassi, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXXI.

Als Elasticitätscoefficienten, bezogen wie bei den festen Körpern auf Kilogramm und Quadratmillimeter,

$$E = \frac{0,010336}{\kappa},$$

würden sich hieraus ergeben

für Quecksilber	bei 0° C.	$E = 3503$
„ Wasser	„ 0° „	. . . 205
„ „	„ 13°,4 „	. . . 217
„ „	„ 53° „	. . . 234
„ Aethyläther	„ 0° „	. . . 93
„ „	„ 14° „	. . . 74
„ Aethylalkohol	„ 7° „	. . . 124
„ „	„ 13,1 „	. . . 114
„ Methylalkohol	„ 13,5 „	. . . 113
„ Chloroform	„ 8,5 „	. . . 165.

Bei Wasser nehmen die Compressionscoefficienten mit steigender Temperatur ab, die Elasticitätscoefficienten wachsen, bei den übrigen Flüssigkeiten wachsen die Compressionscoefficienten, es nehmen also, wie bei den festen Körpern, die Elasticitätscoefficienten ab.

Aus den Beobachtungen am Aethylalkohol und Aethyläther würde sich als merkwürdige Resultat ergeben, dass die Compressibilität mit wachsendem Drucke zunähme, ein Resultat, welches die elastischen Eigenschaften dieser Flüssigkeiten wesentlich von dem der festen Körper unterscheiden würde.

Dieses Resultat scheint durch die Versuche von Amaury und Descamps<sup>1)</sup> wie Cailletet<sup>2)</sup> nicht bestätigt zu werden. Die beiden ersten Physiker haben bei Drucken, die zwischen 1 und 10 Atmosphären variirten, gleiche und nahe dieselben Compressionscoefficienten erhalten wie Grassi bei geringern Drucken, so

für Alkohol	bei 0°	$\kappa = 0,000835$
„ „	„ 15°	. . 0,000911
„ Aethyläther	„ 0°	. . 0,000109
„ „	„ 14°	. . 0,000128.

Cailletet hat die Compressionen einiger Flüssigkeiten bis zu mehreren hundert Atmosphärendrucken verfolgt. Das Verfahren Cailletets war dem von Oersted ähnlich; er comprimirte die Flüssigkeiten in einem Piézometer, welches sich im Innern eines mit Wasser gefüllten Gefässes befand. Die Compression wurde dadurch gemessen, dass die Innenfläche der engen Röhre vergoldet wurde, und nun der in die Röhre eindringende Quecksilberfaden das Gold so weit auflöste, als er in der Röhre vordrang. Nach Beendigung des Versuches konnte dann die während der Wirkung des Druckes eingetretene Volumverminderung dadurch erhalten werden, dass man das Piézometer mit Flüssigkeit einmal bis zu der Stelle füllte, bis zu welcher die Vergoldung erhalten war, das Gewicht dieser Flüssigkeit bestimmte, und nun das Piézometer bis zum Ende der Röhre füllte und nun das Gewicht

<sup>1)</sup> Amaury und Descamps, Comptes Rendus. T. LXVIII. p. 1564.

<sup>2)</sup> Cailletet, Comptes Rendus. T. LXXV. p. 77.



der so das ganze Piézometer füllenden Flüssigkeit bestimmte. Der Quotient aus der Differenz dieser beiden und dem zuletzt gefundenen Gewichte gibt dann, wie bei den Versuchen von Oersted, die scheinbare Compression. Um aus dieser den wahren Compressioncoefficienten zu erhalten, hat man zu dem Quotienten aus der gefundenen Compression und dem Drucke, der sie hervorbrachte, den kubischen Compressioncoefficienten des Glases zu addiren.

Die Drucke wurden mit einem Druckmesser bestimmt, den wir im §. 64 beschreiben werden. Cailletet begnügt sich damit, die scheinbaren Compressioncoefficienten für 1 Atmosphäre anzugeben; dieselben sind in folgender Tabelle unter  $\alpha_1$  zusammengestellt; die in der letzten Columnne der Tabelle verzeichneten Werthe des wahren Compressioncoefficienten  $\alpha$  habe ich daraus abgeleitet, indem ich den aus Regnaults Beobachtungen (§. 52) berechneten kubischen Compressioncoefficienten des Glases

$$C = 0,00000185$$

für eine Atmosphäre Druck zu  $\alpha_1$  hinzuaddirt habe.

Name der Flüssigkeit	Temperatur	$\alpha_1$	Druck in Atmosphären aus denen $\alpha$ abgeleitet ist.	$\alpha$
Wasser . . . . .	8° C.	0,000431	705	0,00004695
Schwefelkohlenstoff . . . . .	8 "	0,000980	607	0,00009285
Aethylalkohol . . . . .	9 "	0,000676	174	0,00006945
" . . . . .	9 "	0,000701	305	0,00007195
" . . . . .	11 "	0,000727	680	0,00007455
Aethyläther . . . . .	10 "	0,000440	630	0,00014585

Der für Wasser und Aethyläther erhaltene Werth stimmt sehr gut mit dem von Grassi gefundenen; der für Alkohol gefundene ist beträchtlich kleiner, was ohne Zweifel darin seinen Grund hat, dass der von Cailletet benutzte Alkohol sehr wasserhaltig gewesen ist; er gibt dessen specifisches Gewicht zu 0,858 an, was einem ziemlich wasserhaltigen Alkohol entspricht. Die drei für den Alkohol gefundenen Werthe, von denen der letzte noch dazu einer um 2° höhern Temperatur entspricht, wodurch die ganze Zunahme des dritten Werthes gegen den zweiten erklärt wird, zeigen keineswegs ein derartiges Wachsen der Compression mit steigendem Druck, wie man es aus den Beobachtungen von Grassi schliessen müsste. Man wird daher zunächst noch dieses eigenthümliche Verhalten der Flüssigkeiten in Zweifel ziehen müssen.

### §. 63.

**Hydrostatischer Druck.** Die im §. 61 abgeleitete Gleichung über die im Innern einer Flüssigkeit vorhandenen Drucke setzen uns in den Stand, das Verhalten einer Flüssigkeit in einem offenen Gefässe und die in derselben vorhandene Vertheilung der Drucke zu bestimmen.

Nehmen wir zunächst an, dass die Flüssigkeit nur der Schwere unterworfen sei, so ergibt sich als erste Folge jener Gleichung, dass die Oberfläche der Flüssigkeit eben und horizontal sein muss. Als Bedingung, dass die Oberfläche einer Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, ergibt sich nämlich

unmittelbar, dass die auf irgend einen Punkt der Oberfläche wirksamen, der Oberfläche parallelen Kräfte, sich gegenseitig aufheben müssen. Denn wenn das nicht der Fall ist, so wird die Flüssigkeit sich nach der Richtung der grössern Kraft bewegen müssen. Dieses Aufheben der der Flüssigkeitsfläche parallelen Drucke findet aber nur dann statt, wenn die vorhandenen Drucke normal sind zur Oberfläche und an allen Stellen derselben gleiche Grösse haben. Denn, sind die Drucke nicht normal, so haben sie eine der Fläche parallele Componente, welche demnach das Gleichgewicht stören würde; sind die Drucke aber an verschiedenen Stellen verschieden, so tritt ebenfalls, wegen der nach allen Richtungen gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes, eine der Oberfläche parallele Kraft auf, welche nicht durch einen Gegendruck aufgehoben wird. Diese zwei Bedingungen fallen also streng genommen in eine zusammen, da bei Flüssigkeiten immer, wenn die Drucke an allen Stellen einer Fläche dieselben sind, die Drucke normal zur Oberfläche sind. Derartige Flächen, in welchen der normale Druck an allen Stellen derselbe ist, nennt man Niveauflächen. Damit können wir also als die Gleichgewichtsbedingung einer freien Flüssigkeitsoberfläche den Satz aufstellen, dass dieselbe eine Niveaufläche sein muss.

Wir erhielten nun §. 61 ganz allgemein für den auf die Flächeneinheit im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Druck, wenn in derselben irgend eine andere Fläche einen Druck erhält, der für die Flächeneinheit  $p_0$  ist,

$$p = p_0 + d \cdot h,$$

wenn  $d$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit und  $h$  der verticale Abstand des Flächenelementes, auf welchem der Druck für die Flächeneinheit  $p$  ist, von jenem bedeutet, auf welchem der Druck  $p_0$  ist.

Es gehören nun alle diejenigen Flächenelemente zu einer Niveaufläche, für welche  $p$  einen und denselben Werth hat, für welche also

$$p = p_0 + d \cdot h = \text{const.}$$

In einer gegebenen Flüssigkeitsmasse ist demnach für alle Elemente  $p$  constant, für welche

$$h = \text{const.},$$

deren verticale Abstände von einem gegebenen Punkte alle gleich sind; das ist aber eine horizontale Ebene. Da somit die Niveauflächen die horizontalen Ebenen sind, so muss auch die freie Oberfläche einer Flüssigkeit eine horizontale Ebene sein.

Ganz dasselbe, was von der freien Oberfläche einer Flüssigkeit gilt, das gilt auch für die Grenzfläche zweier nicht mischbaren Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes, welche über einander geschichtet sind; auch diese muss eine horizontale Ebene sein. Es ergibt sich das so unmittelbar aus dem eben abgeleiteten Satze, dass die Niveauflächen in einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sein müssen, dass es überflüssig sein wird den Beweis besonders zu führen.

Den letztern Fall finden wir in der Regel in der Natur realisirt, indem auf den in unsern Gefässen vorhandenen Flüssigkeiten die Luft liegt und, wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, auf die Oberfläche einen leicht messbaren, in jedem Flächenelement gleichen Druck ausübt.

Aus dem eben bewiesenen Satze, dass die Niveauflächen im Innern

einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sind, ergibt sich ferner, dass in einer horizontalen, durch die Flüssigkeit gelegten Ebene der Druck auf jedes Flächenelement derselbe und zwar gleich dem Drucke der Flüssigkeitssäule sein muss, welche sich über diesem Flächenelement befindet. Sehen wir nämlich von dem Drucke der Luft ab, so gibt uns unsere Gleichung, dass der auf die Flächeneinheit einer Ebene, welche in dem verticalen Abstände  $h$  unter der Oberfläche der Flüssigkeit sich befindet, wirksame Druck  $p$  gegeben ist durch den Ausdruck

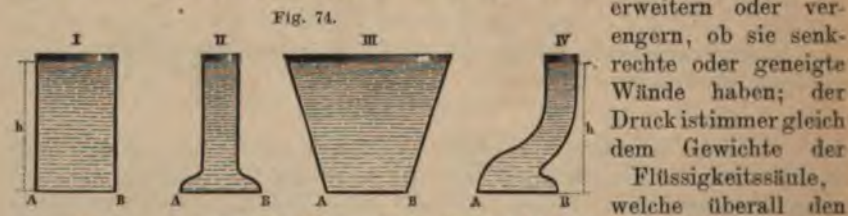
$$p = d \cdot h.$$

Hat die Fläche im Innern der Flüssigkeit die Grösse  $s$ , so hat der auf ihr lastende Druck den Werth

$$p \cdot s = s \cdot d \cdot h;$$

er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt in ihrer ganzen Höhe gleich  $s$  ist, und deren Höhe gleich  $h$  ist.

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydrostatischen Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz nämlich, dass der Druck, welcher auf dem Boden eines Gefässes wirkt, nur abhängig ist von der Grösse der Bodenfläche und von der Höhe der Flüssigkeit im Gefässe, nicht aber von der Menge der im Gefässe enthaltenen Flüssigkeit. Dieser Satz ist in der zuletzt aufgestellten Gleichung unmittelbar erhalten, welche zeigt, dass der Druck auf eine Fläche  $s$ , in einer gegebenen Flüssigkeit nur abhängig ist von der Grösse der Fläche und der Höhe  $h$  der Flüssigkeit über der Fläche. Haben wir demnach Gefässe verschiedener Form, wie etwa Fig. 74, aber stets gleicher Bodenfläche, so ist der Druck auf die Bodenfläche immer derselbe, wenn die Gefässe bis zur gleichen Höhe  $h$  mit derselben Flüssigkeit gefüllt sind, einerlei ob die Gefässe sich oben



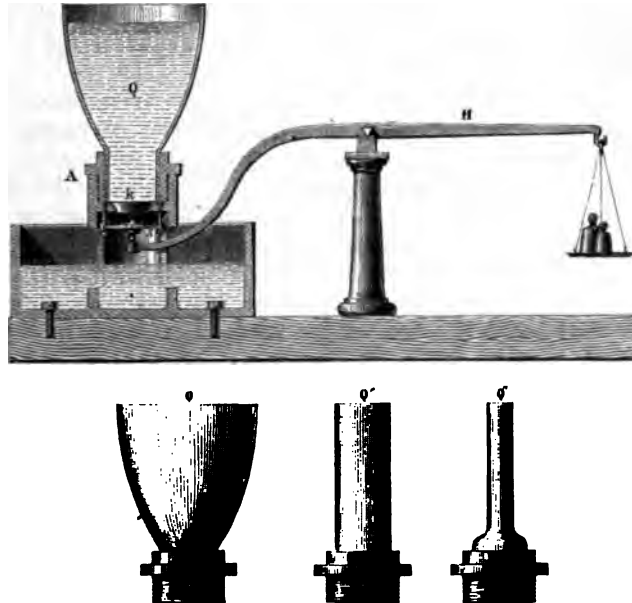
erweitern oder verengern, ob sie senkrechte oder geneigte Wände haben; der Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche überall den Querschnitt  $s$  der Bodenfläche und die Höhe  $h$  hat.

Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 75 nachweisen und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeineren Satzes liefern, dass auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche liegenden Ebene ein vertical abwärts gerichteter Druck wirkt, der gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich  $h$  ist.

Auf einem hohlen metallischen Cylinder  $A$  (Fig. 75) können Gefässe verschiedener Form  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  wasserdicht aufgeschraubt werden. Die Gefässe sind unten offen; in dem Cylinder  $A$  befindet sich aber eine Platte, auf welcher die Messingfassungen der Gefässe unten aufgepasst sind. Den Boden der Gefässe bildet dann ein in diese Platte genau eingeschliffenes konisches Ventil  $k$ , welches sich von unten nach oben öffnen kann. Wenn

nun in das Gefäss  $Q$  Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke eingefüllt ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die Platte eingedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann geöffnet werden durch einen an dem gleicharmigen Hebel  $H$  befestigten Stift  $s$ , der das Ventil berührt. Wird in die Wagschale ein Gewicht  $p$  gelegt, so treibt der Stift das Ventil mit einem dem Gewichte  $p$  gleichen Drucke in die Höhe; ist nun dieser Druck etwas grösser als der von oben nach unten gerichtete Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasselbe, und die Flüssigkeit fliesst in das den hohlen Cylinder  $A$  umgebende Gefäss.

Fig. 75.



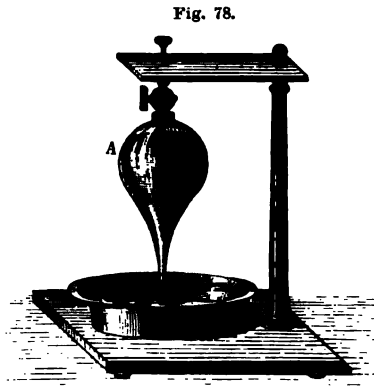
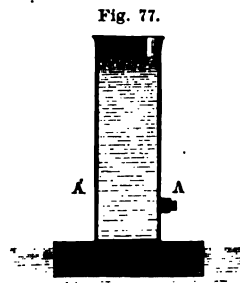
Es bedarf nun, welches der Gefässe  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  man auch anwendet, stets desselben Gewichtes  $p$ , um das Ventil zu heben, wenn man nur in allen dreien dieselbe Flüssigkeit bis zu der in gleicher Höhe über dem Boden befindlichen Marke einfüllt, und zwar ist immer das Gewicht  $p$  jenes des Flüssigkeitscylinders vom Querschnitte der Bodenfläche und der Höhe der Marke über dem Boden.

Wie wir nun schon im §. 61 zeigten, müssen im Gleichgewichtszustande die auf ein Flächenelement im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Drucke dieselben sein, welche Richtung auch die Normale des Flächenelementes besitzt. Ebenso wie demnach auf eine horizontale Fläche von der Grösse  $s$  ein vertical abwärts gerichteter Druck von der Grösse  $slh$  wirkt, ebenso muss auch ein vertical aufwärts gerichteter Druck von derselben Grösse auf diese Fläche wirken. Es lässt sich auch dieser Druck leicht durch den Versuch nachweisen. Wenn man nämlich gegen das untere gut abgeschlossene Ende einer Glasröhre (Fig. 76) eine Messingplatte mittels eines durch die Röhre hindurchgehenden Fadens fest anlegt und dann dieses

Rohr mit der Platte nach unten in ein mit Wasser gefülltes Gefäss taucht, so sieht man, dass die Platte fest an das Glas gedrückt wird, es dringt keine Flüssigkeit in die Röhre, und die Platte fällt nicht hinab, wenn man den Faden loslässt; ein Beweis, dass im Innern der Flüssigkeit ein von unten nach oben gerichteter Druck vorhanden ist. Man kann diesen Druck durch einen gleichen in entgegengesetzter Richtung angebrachten messen, indem man in die Röhre so lange Wasser schüttet, bis die Platte herabfällt. Das geschieht, wenn die Flüssigkeit in der Röhre fast genau die Höhe hat, welche die Flüssigkeit im Gefässe hat, um so genauer, je leichter die Platte ist.



Es folgt weiter, dass auch ein Flächenelement der Seitenwand eines Gefässes, sei sie vertical oder geneigt, einen Druck erfahren muss, der gleich dem Gewichte des Flüssigkeitscylinders ist, der das Flächenelement zur Basis und den verticalen Abstand des Elementes von der freien Oberfläche zur Höhe hat. Diesem Drucke hält der durch die Festigkeit der Wand bewirkte Gegendruck das Gleichgewicht. Dass ein solcher Seitendruck vorhanden ist, kann man leicht durch den Versuch nachweisen, indem man an der einen Seitenwand den Gegendruck durch eine Durchbohrung der Wand fortnimmt. Dann tritt nicht nur eine dem innern Drucke folgende Bewegung der Flüssigkeit ein, sondern, wenn das Gefäss wie in Fig. 77 be-



weglich aufgestellt ist, tritt eine dem noch übrigen Seitendruck folgende Bewegung ein. Man stellt auf einen hinlänglich starken Schwimmer von Kork ein mit Wasser gefülltes Gefäss, das an einer Stelle seiner Seitenwand eine verschliessbare Oeffnung hat. Ist die Oeffnung geschlossen, so drückt das Wasser gegen  $A$  eben so stark wie gegen  $A'$ . Wird nun aber die Ausflussöffnung bei  $A$  geöffnet, so kann das Wasser an dieser Stelle dem Druck folgen und ausfliessen; an der gegenüberliegenden Stelle bei  $A'$  dauert aber der Druck fort, und diesem Drucke folgend bewegt sich der Schwimmer mit dem Gefässe in der Richtung  $AA'$ .

Die sogenannten Reactionsräder beruhen auf dieser Wirkung des Seitendrucks; sie bestehen (Fig. 78) aus einer weitem mit Wasser gefüllten

Röhre  $A$ , welche um eine mit ihrer Axe zusammenfallende verticale Axe sich drehen kann. An dem untern Ende befinden sich zwei oder mehrere horizontale Ausflussröhren, welche in demselben Sinne gekrümmt sind. Beim Ausfliessen des Wassers aus den Oeffnungen dieser Röhren treibt der gegen die den Ausflussöffnungen gegenüberliegenden Wände gerichtete Druck das Rad herum.

Es ist nach Besprechung der einzelnen Drucke nicht schwierig den Druck zu bestimmen, welcher auf irgend ein Flächenstück, sei es im Innern, sei es an der Wand einer Flüssigkeit ausgeübt wird; es ist das nur eine Aufgabe der Rechnung. Haben wir, um das an einem einfachen Beispiel zu zeigen, eine ebene Wandfläche von rechteckigem Querschnitt, die wir uns vertical von der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  denken wollen, so erhalten wir den Druck, den die ganze Wandfläche erfährt, in folgender Weise. Denken wir uns in der Tiefe  $x$  unter der Flüssigkeit einen horizontalen Streifen der Wandfläche, dessen Höhe  $dx$  eine so kleine ist, dass wir ihn als ganz in der in der Tiefe  $x$  durch die Flüssigkeit gelegten Niveaufläche liegend ansehen können, so ist der Druck, welcher auf diesen Streifen wirkt, gleich dem Produkte des auf die Flächeneinheit der Niveaufläche wirkenden Druckes und des Flächeninhaltes des Streifens. Ersterer ist, wenn wir annehmen, dass auf der Oberfläche der Flüssigkeit kein Druck lastet, gleich  $s \cdot x$ , wenn  $s$  das specifische Gewicht der Flüssigkeit ist; letzterer ist  $b \cdot dx$ .

Der auf den Flächenstreifen wirkende Druck ist somit

$$s \cdot b \cdot x \cdot dx.$$

Der auf die ganze Fläche wirkende Druck ist die Summe der auf alle einzelnen Streifen wirkenden, welche die ganze Fläche zusammensetzen. Wir erhalten alle diese einzelnen Drucke, wenn wir  $x$  nach und nach alle Werthe annehmen lassen, von  $x = 0$  bis  $x = h$ , so dass der ganze Druck wird

$$P = \int_0^h s \cdot b \cdot x \, dx.$$

Da nun

$$x \, dx = \frac{1}{2} (x + dx)^2 - \frac{1}{2} x^2,$$

so wird

$$P = \frac{1}{2} s \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{2} h \cdot f \cdot s,$$

wenn wir mit  $f$  die Grösse der Fläche  $f = b \cdot h$  bezeichnen. Der Druck ist also gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich der Fläche  $f$  ist, und deren Höhe gleich ist der halben Höhe der Flüssigkeit.

Zu ganz demselben Satze gelangt man, wenn man eine Fläche betrachtet, welche gegen die Verticale geneigt ist; es ist immer der Druck gleich einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist der Wandfläche, und deren Höhe gleich ist der halben verticalen Entfernung des untern Randes der Wandfläche von dem Niveau der Flüssigkeit.

Ebenso wie den resultirenden normal gegen die Wandfläche gerichteten Druck, können wir auch leicht den Angriffspunkt dieser Resultirenden berechnen. Die auf die einzelnen Flächenelemente wirkenden Drucke sind sämtlich parallel, wir haben also nur den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte aufzusuchen. Zunächst ist klar, dass der Mittelpunkt der Kräfte in der

Halbirungslinie der rechteckigen Fläche liegt, welche wir erhalten, wenn wir die Fläche durch einen verticalen Schnitt in zwei gleiche Theile theilen. Es liege der Angriffspunkt in dieser Linie im Abstand  $X$  von der obern Grenzfläche der Flüssigkeit; bringen wir dann dort eine der Resultirenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft an, so ist die Fläche, dieselbe als frei beweglich gedacht im Gleichgewicht, sie nimmt weder eine fortschreitende noch um irgend eine Axe eine drehende Bewegung an. Denken wir uns deshalb etwa durch die obere Grenze der Flüssigkeit eine in der Fläche liegende horizontale Drehungsaxe gelegt, so muss in Bezug auf diese die Summe der Drehungsmomente gleich 0 sein. Die der resultirenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft liefert nun das Drehungsmoment

$$- P . X$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, dass das von dieser Kraft herrührende Moment die Fläche entgegengesetzt dreht als die vorhandenen Kräfte.

Der in der Tiefe  $x$  auf ein Flächenelement von der Höhe  $dx$  wirkende Druck ist

$$s . b . x dx;$$

das von diesem herrührende Drehungsmoment ist somit

$$x . s . b . x dx = s . b . x^2 dx.$$

Die Summe aller Drehungsmomente erhalten wir, wenn wir in diesem Ausdrucke nach und nach für  $x$  alle Werthe von 0 bis  $h$  einsetzen und dann alle die für die einzelnen Elemente erhaltenen Werthe summiren, also in der Summe

$$\int_0^h s b x^2 dx.$$

Da nun

$$x^2 dx = \frac{1}{3} \{ (x + dx)^3 - x^3 \},$$

so ist diese Summe

$$\frac{1}{3} s b h^3,$$

und somit wird die Gleichung für  $X$

$$P . X = \frac{1}{3} s b . h^3$$

oder, wenn wir nach  $X$  auflösen und gleichzeitig für  $P$  seinen Werth einsetzen,

$$X = \frac{\frac{1}{3} s b h^3}{\frac{1}{2} s b h^2} = \frac{2}{3} h.$$

Der Angriffspunkt liegt also um  $\frac{2}{3}$  der Höhe der Flüssigkeit unter dem obern Niveau derselben.

In ähnlicher Weise kann man für alle Flächen, ebene oder gekrümmte, den resultirenden Druck und dessen Angriffspunkt berechnen, wenn auch die Rechnungen zuweilen nicht so einfach sind.

#### §. 64.

**Communicirende Röhren.** Unsere Ausführungen über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten waren durchaus unabhängig von der Gestalt der

Gefäße, in denen die Flüssigkeit enthalten ist. Sie haben daher auch Gültigkeit, wenn wir dieselbe in zwei Gefäße vertheilen und diese Gefäße so durch eine Röhre mit einander verbinden, dass die Flüssigkeit in beiden gleichsam nur eine Masse bildet. Man nennt solche Gefäße, weil sie meist in Röhrenform angewandt werden, communicirende Röhren. Wenn demnach in beiden Röhren *AB*, *CD* (Fig. 79) dieselbe Flüssigkeit enthalten

Fig. 79.

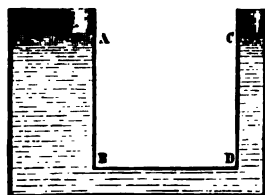
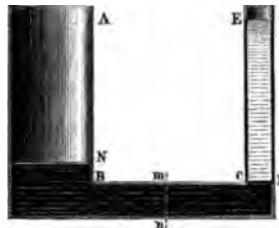


Fig. 80.



ist, so muss, da die Gefäße communiciren, die Flüssigkeiten also eine Masse bilden, die Oberfläche derselben horizontal oder in beiden Röhren genau von gleicher Höhe sein, wenn nicht auf eine derselben etwa noch ein besonderer äusserer Druck ausgeübt wird.

Enthält jedoch die eine Röhre, z. B. *AB*, eine andere Flüssigkeit von der Dichtigkeit  $\alpha'$ , während die Flüssigkeit in der Röhre *CD* die Dichtigkeit  $\alpha$  hat, so müssen die Oberflächen verschiedene Höhen haben. Sei z. B. in *AB* (Fig. 80) zuerst Quecksilber gegossen und dann in die Röhre *CDE* Wasser, so muss das Wasser höher stehen als das Quecksilber und zwar soviel mal höher, als es specifisch leichter ist wie letzteres.

Denken wir uns eine Scheidewand in *mn* und in derselben ein Element, dessen Grösse wir mit  $o$  bezeichnen wollen. Von *B* erhält dasselbe einen Druck, der gleich ist dem Gewichte einer Quecksilbersäule von der Basis  $o$  und der Höhe  $H'$ , die gleich ist dem senkrechten Abstände, der durch  $o$  gelegten Horizontalebene, von der durch *N* gelegten Ebene, also gleich  $o \cdot H' \cdot \alpha'$ , wenn wir mit  $\alpha'$  die Dichtigkeit des Quecksilbers bezeichnen. Von der andern Seite her erhält das Flächenelement  $o$  einen Druck zunächst von einer Quecksilbersäule von der Höhe  $h$ , welche vom Niveau des Flächenstückes  $o$  bis *CD* reicht, und von einer Wassersäule von ebenderselben Basis und der Höhe *CE*. Nennen wir nun die Dichtigkeit des Wassers  $\alpha$  und die Höhe *CE*,  $H$ , so ist der Druck, den das Flächenstück von dieser Seite her erfährt, gleich  $o h \alpha' + o H \alpha$ . Im Zustande des Gleichgewichtes müssen diese Drucke gleich sein, oder es muss

$$o H' \alpha' = o h \alpha' + o H \alpha,$$

oder

$$(H' - h) \alpha' = H \alpha;$$

nennen wir nun die Differenz

$$H' - h = NB = H'',$$

so muss

$$\frac{H}{H''} = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

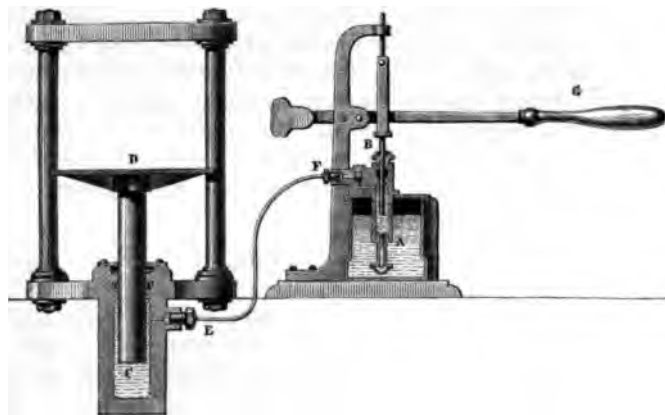


oder die beiden Höhen  $H''$  und  $H$  der Flüssigkeiten über ihrer Trennfläche müssen sich verhalten umgekehrt wie die Dichtigkeiten der Flüssigkeiten.

In Fig. 79 hält, wie wir sehen, die kleine Wassermasse in der  $CD$  der grossen Wassermenge in  $AB$  das Gleichgewicht. Würde die Wassermenge  $AB$  fortgenommen und anstatt deren ein Kolben auf die dann entstehende Flüssigkeitsoberfläche gelegt, so müsste ein der Wassersäule  $AB$  gleiches Gewicht haben, um den in der  $FI$  nach oben gerichteten Druck zu aequilibriren. Das Gewicht dieses  $F$  zu dem Gewichte der Flüssigkeit in  $CD$  verhält sich wie die Quers der Röhren, da sich so das Gewicht der Flüssigkeitssäule  $AB$  zu dem ihr das Gleichgewicht haltenden Flüssigkeitssäule  $CD$  verhält. Wenn nun auf die Flüssigkeit in der engen Röhre einen Druck  $p$  ausüben müssen wir, wenn der Kolben in der weiten Röhre diesem Druck Gleichgewicht halten soll, diesen mit einem Gewichte  $P$  belasten, welches ebensoviele mal grösser ist wie  $p$ , als der Querschnitt von  $AB$  grösser als der von  $CD$ .

In Bramah's hydraulischer Presse (Fig. 81) ist dieser Umstand genutzt, um mit kleinen Kräften grosse mechanische Effecte zu erzielen. Dieselbe besteht im Wesentlichen aus einer kleinen Druckpumpe  $AB$  welche man Wasser durch die Röhre  $EF$  in die weite, durch  $EF$  communicirende Röhre  $C$  pumpt. In diese passt wasserdicht der Kolben. Das in die Röhre  $C$  gepumpte Wasser hebt nun den Kolben, der comprimirenden Gegenstände gegen einen festen Widerhalt drückt. Kann mit einem Drucke von 1 Kilogramm einem Gewichte von 1000 gramm, wenn der Querschnitt der Röhre  $C$  zu dem der Pumpenröhre im Verhältniss von 1000 : 1 steht, das Gleichgewicht halten. Dadurch zugleich unser Satz bewiesen, den wir anfänglich ableiteten, dass bei äusseren Drucke auf die Flüssigkeit eines Gefässes der Druck auf ein Flächenstück der Wandfläche der Grösse desselben proportional

Fig. 81.

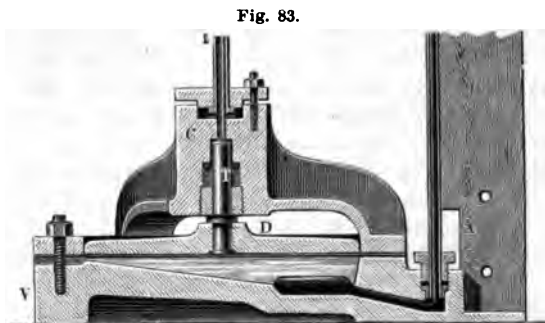


Bemerken wollen wir hier, dass bei diesen äusserst grossen Wirkungen mit kleinen Kräften doch auch nur eine Uebertragung der Arbeit

t an solcher eintritt; denn auch hier gilt der Satz wieder, was an  
 wonnen wird, geht an Zeit verloren. Denn soll der Kolben *D* um  
 imeter gehoben werden, so ist eine tausendmal grössere Bewegung  
 ens der Pumpe nöthig, da aus dem engen Pumpenrohr die Wasser-  
 das weite Rohr geschafft werden muss. Auch hier besteht die Glei-  
 ass das Produkt der Kraft in den Weg, durch welchen sie gewirkt  
 h ist dem Produkte der Last in den Weg, um welchen sie gehoben ist.  
 Prinzip der hydraulischen Presse ist in sehr sinnreicher Weise von  
 angewandt, um grosse Drucke, etwa die in der hydraulischen  
 rekt zu messen; das Manometer ist gewissermaassen die Umkehr  
 aulischen Presse. Dasselbe besteht, wie Fig. 82 in perspectivischer



Fig. 83 im Durchschnitt des untern Theiles zeigt, aus einem  
 isernen Gefässe  
 kreisförmigem  
 nitt, in welchem  
 lstempel *D* sich  
 nieder bewegen  
 as Gefäss ent-  
 ksilber und auf  
 n eine dünne  
 chicht. Zwi-  
 -Wasserschicht  
 a Stempel ist  
 ne Kautschuk-



membran ausgespannt, welche durch den aufgeschraubten Kreisring fest gehalten wird, der mit Hülfe der Schrauben so fest angezogen ist, dass die Membran das Gefäss  $V$  nach oben hin vollkommen wasserdicht absperrt. Auf der Mitte des Stempels  $D$  steht ein Stahlcylinder  $T$ , welcher durch eine Stopfbüchse in den Hohlraum des Messingcylinders  $C$  eintritt, der mit dem die Kautschukmembran befestigenden, auf das Gefäss aufgeschraubten Ringe aus einem Stücke gearbeitet ist. Der Hohlraum des Cylinders  $C$  steht andererseits durch die Röhre  $t$ , welche, wie Fig. 83 zeigt, durch die den Hohlraum des Cylinders  $C$  oben abschliessende Platte hindurchgeführt ist, mit dem Raume in Verbindung, in welchem der Druck ausgeübt wird, also etwa mit dem Hohlraum  $C$  der hydraulischen Presse Fig. 81; man gibt zu dem Ende, wenn man den Druck in der hydraulischen Presse messen will, der Wand derselben eine zweite Durchbohrung, an der man das Ende der Röhre  $t$  gerade so ansetzt, wie bei  $E$  die zur Pumpe führende Röhre angesetzt ist. Das Gefäss  $V$  communicirt mit seinem untern Theile mit der seitlich angebrachten Glasröhre  $AB$ , welche vor einer Theilung an dem an dem Gefässe  $V$  befestigten verticalen Ständer fest angebracht ist.

Die Methode der Messung des Druckes ist hiernach leicht zu übersehen; denken wir uns die Röhre  $t$  sei mit der hydraulischen Presse verbunden, und man beginne durch Handhaben der Pumpe die Presse in Thätigkeit zu versetzen. Das in  $C$  Fig. 81 eingepumpte Wasser fliesst dann gleichzeitig durch in den Hohlraum des Cylinders  $C$  (Fig. 82), füllt denselben und die Röhre  $t$ , so dass die Presse und die Röhre von einer zusammenhängenden Wassermasse gefüllt sind. Die obere Basis des Stahlcylinders  $T$  erhält deshalb einen genau ebenso grossen, vertical abwärts gerichteten Druck, wie ein ebenso grosses Stück in der Wandfläche des Cylinders der Pumpe. Ist der Druck auf die Flächeneinheit in der Presse gleich  $p$  und die obere Basis des Cylinders  $T$  gleich  $s$ , so erhält der Stahlcylinder den vertical abwärts gehenden Druck  $p \cdot s$ . Dieser Druck wirkt nun durch die untere Fläche des Cylinders auf die im Gefässe  $V$  enthaltene Flüssigkeit; bezeichnen wir den Flächeninhalt der untern auf die Flüssigkeit drückenden Fläche des Stempels  $D$  mit  $S$ , so ergibt sich für den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck  $P$  aus der Gleichung

$$p \cdot s = P \cdot S,$$

$$P = \frac{s}{S} \cdot p.$$

Ist also der Durchmesser des Stempels  $D$  etwa 10mal so gross als der des Cylinders  $T$ , so würde  $P = 0,01 p$  sein. Durch diesen Druck wird der Stempel  $D$  hinabgedrückt und dadurch in der Röhre  $AB$  das Quecksilber so hoch gehoben, dass der Druck der gehobenen Quecksilbersäule auf die Flächeneinheit gleich  $P$  wird. Ist also z. B. der Druck  $p$  gleich 100 Atmosphären, also gleich 100 . 1,033 Kilo auf das Quadratcentimeter, so wird das Quecksilber in  $AB$  um 0,76 Meter steigen, da der Druck einer Quecksilbersäule von dieser Höhe auf das Quadratcentimeter 1,033 Kilogramm beträgt. Beobachtet man also in  $AB$  eine Erhöhung des Quecksilbers um  $H$  Atmosphären, jede gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von 0,76 Meter, so ist in der Presse der Druck in Atmosphären

$$h = \frac{S}{s} \cdot H.$$

Durch das Herabdrücken des Stempels  $D$  wird die Kautschukmembran unter demselben gespannt, und auf diese mit stärkerer Ausdehnung wachsende Spannung wird ein Theil des Druckes  $p$  verwandt, so dass strenge genommen an den soeben berechneten Druck eine kleine Correction angebracht werden muss. Indess kann man den Querschnitt der Röhre  $AB$  gegenüber dem des Gefässes  $V$  so klein wählen, dass für eine beträchtliche Erhebung des Quecksilbers in  $AB$  der Stempel  $D$  nur um eine verschwindende Grösse hinabsinkt. Das von Cailletet bei seinen §. 62 erwähnten Versuchen benutzte Manometer von Desgoffe hatte ein derartiges Verhältniss der Querschnitte, dass, wenn in  $AB$  das Quecksilber um 4,3 Meter stieg, der Stempel  $D$  nur um  $\frac{1}{8}$  Millimeter sank, sodass man den Einfluss der Spannung des Kautschuks ganz vernachlässigen konnte.

§. 65.

**Gleichgewicht einer Flüssigkeit, auf welche beliebige Kräfte wirken.** Wir haben bisher bei der Untersuchung des Verhaltens der Flüssigkeiten vorausgesetzt, dass nur die Schwere auf dieselben einwirke; die im §. 61 durchgeführten Betrachtungen lassen sich aber auch sofort anwenden um die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, wenn noch andere Kräfte auf die Flüssigkeiten einwirken, wenn z. B. die Flüssigkeit sich in einem rotirenden Cylinder befindet, dessen Rotationsaxe die Axe des Cylinders ist. Wir denken uns, um die an den verschiedenen Stellen der Flüssigkeit wirksamen Drucke zu berechnen, gerade wie §. 61 einen kleinen Cylinder mit schiefen Endflächen  $s$  und  $s'$  von so kleinem Querschnitte  $\sigma$  und so kleiner Länge  $l$ , dass wir überall in diesem Cylinder die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte als gleich und gleich gerichtet ansehen können. Nennen wir die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte  $k$ , so treten diese jetzt ganz einfach an die Stelle des Gewichtes  $d$  der Volumeinheit, welches wir §. 61 als allein wirksam voraussetzten. Ganz dieselben Betrachtungen, welche wir §. 61 anstellten, liefern uns dann für den Druck  $p'$  auf der Fläche  $s'$  des Cylinders

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + k \cdot l \cdot \cos \beta,$$

wenn  $\beta$  den Winkel bedeutet, welcher die Axe unseres Cylinders mit der Richtung der resultirenden Kraft, und  $p$  den Druck auf die schiefe Endfläche  $s$  bedeutet.

Die Bedingung der Niveauflächen ist auch jetzt wieder, dass in ihnen überall der Druck für die Flächeneinheit derselbe sein muss; somit muss, wenn die beiden Endflächen des kleinen Cylinders ein und derselben Niveaufläche angehören sollen,

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s}$$

sein, eine Bedingung, welche erfüllt wird, wenn

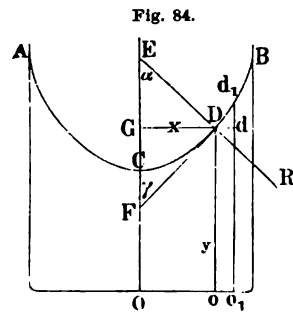
$$k \cdot l \cdot \cos \beta = 0.$$

Letztere Bedingung wird aber, da  $k$  und  $l$  von 0 verschieden sind, nur erfüllt, wenn

$$\cos \beta = 0, \quad \beta = 90^\circ.$$

Ist also die Axe unseres kleinen Cylinders senkrecht zur Richtung der resultirenden Kräfte, so liegt derselbe ganz in einer Niveaufläche, oder die Niveauflächen sind solche, welche an allen Stellen normal zu den resultirenden Kräften sind.

Können wir die Richtung der resultirenden Kräfte bestimmen, so können wir hieraus die Gleichung der Niveauflächen ableiten; wir wollen diese Ableitung für den vorhin schon erwähnten Fall einer Flüssigkeit in einem rotirenden Cylinder durchführen. Die Kräfte welche dort auf die Flüssigkeit einwirken, sind die Schwere und die Centrifugalkraft; da letztere nur abhängig ist von dem Abstand der betrachteten Flüssigkeitsmasse von der Rotationsaxe und in gleichen Abständen von der Axe dieselbe ist, so folgt, dass die Niveauflächen Rotationsflächen sind, deren Axe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Wir erhalten demnach die Flächen schon vollständig bestimmt, wenn wir einen Schnitt derselben, der durch die Rotationsaxe gelegt ist, untersuchen. Sei *ACB* Fig. 84 ein solcher Schnitt und zwar, da wir wissen, dass die Oberfläche eine Niveaufläche ist, durch die Oberfläche der Flüssigkeit, und *OC* die Rotationsaxe. Sei ferner *DR* die Richtung der aus der Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft im Punkte *D*



resultirenden Kraft, welche mit der Verticalen den Winkel  $\alpha$  bilde. An dem Punkte *D* des Schnittes der Niveaufläche legen wir dann eine Tangente *DF*, welche bekanntlich in dem Punkte *D* die Richtung der Curve angibt; dieselbe schneide die Verticale unter dem Winkel  $\gamma$ . Da *FD* senkrecht zu *ED* sein muss, so folgt weiter, dass die Winkel  $\gamma$  und  $\alpha$  sich zu einem Rechten ergänzen müssen, oder dass

$$\text{tang } \alpha = \cot \gamma$$

sein muss.

Wir beziehen nun unsere Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axe der *X* horizontal, und dessen Axe der *Y* vertical sei und mit Rotationsaxe zusammenfalle. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei der Punkt *O*, in welchem die Rotationsaxe den Boden des Cylinders schneidet. Die Coordinaten des Punktes *D* seien *x* und *y*. Da die Tangente *DF* mit der Curve auf ein unendlich kleines Stück zusammenfällt, so verbindet sie zwei unendlich nahe Punkte *D* und *d*<sub>1</sub> der Curve, deren letzterer die Coordinaten *x* + *dx* und *y* + *dy* hat. Zieher wir deshalb die dem Punkte *d*<sub>1</sub> entsprechende Ordinate *d*<sub>1</sub> *o*<sub>1</sub> und verlängert die *x* Coordinate *GD*, bis sie erstere in *d* schneidet, so erhalten wir das rechtwinklige Dreieck *Ddd*<sub>1</sub>, dessen Winkel *Dd*<sub>1</sub> *d* =  $\gamma$  ist. Demnach ist

$$\cot \gamma = \frac{dd_1}{Dd} = \frac{dy}{dx}$$

Um den Winkel  $\alpha$  zu erhalten, sei *p* das Gewicht, somit  $\frac{p}{g}$  die Masse der im Punkte *D* vorhandenen Flüssigkeit. Auf diese Masse wirkt gleichzeitig die Centrifugalkraft, welche, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit mit *v* bezeichnen, gleich  $\frac{v^2 p}{xg}$  ist. Bezeichnen wir die Rotationsdauer

des Cylinders mit  $t$ , so ist

$$v = \frac{2\pi x}{t},$$

demnach die Centrifugalkraft

$$\frac{4\pi^2}{t^2} \cdot x \cdot \frac{p}{g}$$

Da die Schwere vertical abwärts, die Centrifugalkraft horizontal von der Drehungsaxe fort wirkt, so erhalten wir die Tangente des Winkels, welchen die Resultirende mit der Verticalen bildet, wenn wir die Centrifugalkraft, die horizontale Componente der Resultirenden durch die Schwere, also das Gewicht  $p$  der Flüssigkeit dividiren. Damit wird

$$\text{tang } \alpha = \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot x.$$

Zur Bestimmung der Niveaufläche erhalten wir somit die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot x.$$

Die Gleichung liefert uns also direkt den Quotienten aus den beiden Zunahmen der Coordinaten, wenn wir von einem Punkte der Curve zum nächstfolgenden übergehen, oder den Zuwachs

$$dy = \frac{4\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot x \cdot dx,$$

welchen die Ordinate  $y$  erfährt, wenn die Abscisse  $x$  um  $dx$  zunimmt. Daraus ergibt sich aber auch eine ganz bestimmte Beziehung zwischen  $y$  und  $x$ , es muss  $y$  eine solche Function von  $x$  sein, dass

$$f(x + dx) - f(x) = \frac{4\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot x \cdot dx$$

ist. Das ist nur dann der Fall, wenn

$$y = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot x^2 + \text{const.};$$

denn berechnen wir hieraus  $dy$ , so erhält es obigen Werth. Der Werth der Constanten ergibt sich, wenn wir  $x$  gleich Null setzen, es ist jener Werth von  $y$ , in welchem die Curve die Rotationsaxe schneidet, es ist das der tiefste Punkt der Flüssigkeitsoberfläche. Nennen wir die Höhe der Flüssigkeit dort  $h$ , so erhalten wir

$$y = \frac{2\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot x^2 + h.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Gleichung einer Parabel, deren Axe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Es ergibt sich somit, dass die Oberfläche einer rotirenden Flüssigkeit ein Rotationsparaboloid ist, dessen Rotationsaxe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Die Flüssigkeit steht am höchsten dort, wo  $x$  seinen grössten Werth hat, also an der Wand des Gefässes; die Höhe  $H$  ist dort, wenn wir mit  $r$  den Radius des Gefässes bezeichnen,

$$H = \frac{2\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot r^2 + h,$$

$$H - h = \frac{2\pi^2}{g \cdot t^2} \cdot r^2.$$

Die Erhebung der Flüssigkeit an der Wand über dem tiefsten Punkt ist also um so grösser, je kleiner die Umlaufszeit  $t$  ist, je grösser somit die Rotationsgeschwindigkeit ist, eine Folgerung, die man leicht mit der Centrifugalmaschine bestätigen kann.

Da die Niveauflächen einander parallele Flächen sind, so folgt, dass auch im Innern der Flüssigkeiten dieselben Paraboide sind, welche der Oberfläche parallel sind; der auf den verschiedenen Niveauflächen wirkende Druck nimmt zu, je tiefer dieselben unter der Oberfläche liegen. Da auf jeder Niveaufläche der Druck an allen Stellen derselbe ist, so haben wir, um ihn zu bestimmen, nur den Druck aufzusuchen, welchen dieselben dort erhalten, wo die Niveauflächen die Rotationsaxe schneiden; man erkennt dann, dass der Druck dort gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich ist dem Abstände der betrachteten Niveaufläche von der Oberfläche der Flüssigkeit.

### §. 66.

**Archimedisches Prinzip.** Wenn ein Körper in eine Flüssigkeit getaucht wird, so wird die Oberfläche desselben von der Flüssigkeit ringsumher einen Druck erfahren, welcher an allen Punkten senkrecht gegen jedes Element der Oberfläche gerichtet ist, und dessen Grösse gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist dem Elemente der Oberfläche des Körpers, und deren Höhe gleich ist der Höhe der Flüssigkeit über diesem Elemente. Wenn wir nun diese rings auf alle Punkte der Körperoberfläche senkrecht wirkenden Druckkräfte in zwei auf einander senkrechte Componenten zerlegen, eine horizontale und eine verticale, so ist klar, dass erstere als von Flüssigkeitsschichten herrührend, welche gleich tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, an den entgegengesetzten Seiten des Körpers paarweise gleich und entgegengesetzt sind; sie werden daher den Körper nur mehr oder weniger zusammendrücken. Anders jedoch mit den verticalen Componenten, auch diese werden zwar auf den nach oben den Körper begrenzenden Elementen der Oberfläche vertical nach unten, auf den untern nach oben, also gerade entgegengesetzt gerichtet sein; aber sie sind sich nicht gleich, weil die obern Elemente den Druck einer weniger hohen Flüssigkeitssäule erfahren als die unteren. Mit der Differenz dieser Drucke wird deshalb der Körper in der Flüssigkeit nach oben getrieben werden.

Um die Grösse dieser Differenz zu erhalten, denken wir uns den Körper durch eine Schaar sehr naher verticaler Ebenen in eine Reihe sehr schmaler Scheiben zerlegt, und diese nochmals durch eine Schaar paralleler, ebenfalls verticaler, aber zu den erstern senkrechter Ebenen zerschnitten. Dadurch haben wir den ganzen Körper in ein Aggregat elementarer Prismen zerlegt, deren Endflächen ebenfalls sehr kleine Flächenstücke sind, die wir überdies als einander gleich betrachten können. Der Druck nun, den die obere Endfläche dieses Prismas vertical abwärts erfährt, ist gleich dem Drucke eines Flüssigkeitsprismas, dessen Basis gleich ist einem Flächenelement, und dessen Höhe der senkrechte Abstand desselben von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Auf die untere Endfläche wirkt ein nach oben gerichteter Druck, dessen Grösse gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeit-

stale mit einer der Grösse des Elementes gleichen Basis, und mit einer Höhe gleich dem senkrechten Abstände dieses Elementes von der Oberfläche. Die Differenz beider Drucke ist also das Gewicht eines Flüssigkeitsprismas mit einer jenen beiden gleichen Grundfläche und einer der Differenz der beiden Abstände gleichen Höhe oder, was dasselbe ist, das Gewicht eines jenem betrachteten Prisma an Grösse gleichen Prismas. Es wird also ein solches Prisma mit einem Drucke aufwärts getrieben, welcher dem Gewichte einer ihm an Grösse gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist. Was von einem einzelnen Prisma gilt, gilt in gleicher Weise auch von allen zusammen; wir gelangen daher zu dem Resultate, dass jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper einen von unten nach oben gerichteten Druck, einen Auftrieb, erfährt, der dem Gewichte einer ihm an Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist.

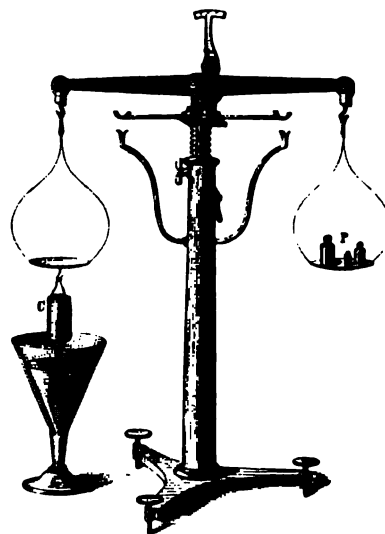
Man spricht diesen Satz auch wohl so aus: Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper verliert ein Gewicht, welches gleich ist dem Gewichte der an der Stelle gedrängten Flüssigkeit.

Es lässt sich dieser Satz noch auf eine andere Weise ableiten. Denken wir uns im Innern der Flüssigkeit eine irgendwie begrenzte Menge von der umgebenden Flüssigkeit isolirt, so wird diese von der umgebenden Flüssigkeit im Zustande des Gleichgewichtes vollkommen getragen, ihrer Schwere durch den Druck im Innern der Flüssigkeit das Gleichgewicht gehalten. Da nun aber dieser Druck unabhängig ist von der Natur und Benutzung des eingetauchten Körpers, so ist klar, dass, wenn wir anstatt dieser Flüssigkeitsmenge einen andern Körper eintauchen, der der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleiche Theil seines Gewichtes von der Flüssigkeit getragen wird, oder, was dasselbe ist, dass er einen so grossen Theil seines Gewichtes verliert.

Um diesen Satz, welcher nach seinem Entdecker Archimedes das Archimedische Prinzip genannt wird, experimentell zu beweisen, hängt man unter einem mit einem Haken versehene Wagschale (Fig. 85) einen hohlen Kupfercylinder *C* und unter diesen einen massiven Kupfercylinder *K*, der genau in den Cylinder *C* hineinpasst. Nachdem man nun mittels auf die andere Wagschale gelegter Gewichte die Wage ins Gleichgewicht gebracht hat, lässt man den massiven Kupfercylinder in ein mit Wasser gefülltes Gefäss hinab, indem man mittels des Zahngetriebes im Ständer der Wage den Wagbalken herablässt. Sowohl der Kupfercylinder einzutauchen beginnt, ist das vorhin hergestellte Gleichgewicht gestört, die mit den Gewichten belastete Schale sinkt herab.

Es folgt daraus, dass der eingetauchte Körper an Gewicht verliert, dass er einen Auftrieb erfährt. Dass derselbe nun genau gleich ist dem Gewichte

FIG. 85





der verdrängten Flüssigkeit, folgt daraus, dass wir den hohlen Kupfercylinder ganz mit Wasser anfüllen müssen, um das Gleichgewicht herzustellen, wenn der Kupfercylinder ganz in das Wasser getaucht ist.

Wenn wir umgekehrt, wie in Fig. 86, das mit Wasser gefüllte Gefäß auf die Wagschale stellen, es durch Gewichte balanciren und nun unseren



Fig. 86.

an einem festen Gestell aufgehängten Kupfercylinder in das Gefäß herablassen, so wird das Gleichgewicht wieder gestört; die mit dem Gefäß belastete Wagschale sinkt herab; sie ist also schwerer geworden und zwar, wie sich leicht nachweisen lässt, gerade um so viel schwerer, als der eingetauchte Körper leichter wird. Nehmen wir nämlich Wasser aus dem Gefäße fort und füllen es in den hohlen Kupfercylinder *C* ein, so ist das Gleichgewicht wieder hergestellt, sobald wir den Cylinder *C* vollgeschöpft haben.

Diese Thatsache erklärt sich sofort aus dem Prinzip der Gleichheit von Action und Reaction; denn es ist klar, dass wenn der eingetauchte Körper einen von unten nach oben gerichteten Druck erfährt, das Wasser entgegen einen ebenso grossen Druck von oben nach unten erfahren muss. Man kann diesen Versuch aber auch auf folgende Art erklären. Wir sahen, die Flüssigkeit trägt einen eingetauchten Körper gerade so weit, als wenn ein gleich grosses Volumen Flüssigkeit in ihr Inneres gebracht wäre. Das Eintauchen des Körpers bewirkt also ganz dasselbe, als wenn wir die Flüssigkeit um eine dem Körper an Volumen gleiche Menge vermehrt hätten; es muss sich daher das Gewicht der Flüssigkeit um das diesem Volumen gleiche Gewicht vergrössern.

Da nun ein eingetauchter Körper zwei Gruppen von Parallelkräften oder den an seinem Schwerpunkte angreifenden Resultirenden unterworfen ist, welche sich gerade entgegengesetzt sind, so folgt, dass er, wenn er frei ist, entweder der einen oder der andern Kraft folgen, aufsteigen oder niedersinken kann. Sei  $v$  das Volumen des Körpers,  $d$  seine Dichtigkeit,  $d'$  die der Flüssigkeit, so ist  $vd$  das Gewicht des Körpers,  $vd'$  das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, also die Kraft, welche ihn in die Höhe treibt;  $v(d - d')$  die Resultante aus beiden. Ist nun  $d > d'$ , so fällt der Körper; ist  $d = d'$ , so fällt er nicht und steigt nicht, er ist im Gleichgewicht; ist aber endlich  $d < d'$ , so folgt der Körper dem Auftrieb, er steigt in der Flüssigkeit auf.

### §. 67.

**Schwimmende Körper.** Wenn der eingetauchte Körper mit der Flüssigkeit die gleiche Dichtigkeit besitzt, so ist er, wie wir sahen, im Innern der Flüssigkeit im Gleichgewicht. Man kann dieses leicht durch den Versuch zeigen. Ein Ei ist dichter als Wasser, weniger dicht als eine gesättigte Kochsalzlösung; in ersterem sinkt es unter, in letztere taucht es

nur zum Theil ein; in einer passenden Mischung beider ist es an allen Stellen im Gleichgewicht. Aehnliches zeigt ein Gemisch aus 1 Theil Zinnober und 225 Theilen weissem Wachs; in Wasser getaucht, ist es an allen Stellen im Gleichgewicht. Dasselbe zeigen Oeltropfen in einem passenden Gemische von Wasser und Alkohol.

Ist die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers kleiner als die der Flüssigkeit, so steigt er in derselben auf; ist er vollständig untergetaucht, so treibt ihn die Kraft  $v(d - d')$  in die Höhe, er steigt deshalb mit beschleunigter Geschwindigkeit, jedoch nur so lange, bis ein Theil des Körpers aus der Flüssigkeit hervorragt. Von dem Augenblick an vermindert sich das Volumen der aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit und damit der Auftrieb. Ist das eingetauchte Volum nur mehr  $v'$ , so ist der Auftrieb  $v' d'$ .

Da nun das Gewicht des Körpers  $vd$  dasselbe bleibt, so wird in einem bestimmten Zeitpunkt  $vd = v' d'$ , Auftrieb und Schwere halten sich das Gleichgewicht. Wegen der bei der aufsteigenden Bewegung erhaltenen Geschwindigkeit wird jedoch der Körper über diese Lage emporsteigen, dann wieder, weil  $vd > v' d'$  wird, herabfallen und so erst nach einigen Oscillationen zur Ruhe kommen. Körper, welche leichter sind als die Flüssigkeit, in welche sie eingetaucht sind, sind also im Gleichgewicht, wenn sie zum Theil und zwar so weit eingetaucht sind, dass das aus der Stelle gedrängte Wasser ihrem Gewichte gleich ist.

Die Körper können dann zwar keine fortschreitende, wohl aber noch eine drehende Bewegung machen. Soll auch diese nicht stattfinden, so müssen die beiden auf den Körper einwirkenden Kräfte sich auch gerade entgegengesetzt sein. Das Gewicht des Körpers greift an seinem Schwerpunkte an, der Auftrieb am Schwerpunkte des aus der Stelle gedrängten Wassers. Es müssen demnach diese beiden Punkte in einer Verticalebene liegen, wenn der Körper im Gleichgewicht sein soll. Eine schwimmende homogene Kugel ist demnach in jeder Lage im Gleichgewicht, ein Ellipsoid, wenn eine seiner Axen vertical ist, ein Parallelepiped, wenn seine Kanten vertical sind.

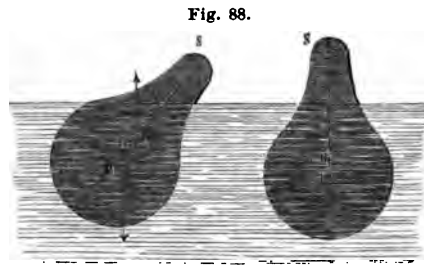
Unter diesen Bedingungen braucht aber das Gleichgewicht noch kein stabiles zu sein; damit das der Fall ist, d. h. damit der Körper bei kleinen Veränderungen seiner Lage immer wieder in seine frühere Stellung zurückkehre, dazu muss noch eine dritte Bedingung erfüllt sein. Es muss nämlich das Metacentrum des schwimmenden Körpers über dem Schwerpunkte liegen, indem dann die auf den schwimmenden Körper wirkenden Kräfte immer, bei Schwankungen, denselben in seine frühere Lage zurückdrehen. Um die Bedeutung dieses Punktes zu erkennen, sei in Fig. 87 der schwimmende Körper  $S$  aus seiner Lage gebracht, so dass die frühere Verticale  $PG$ , welche durch den Schwerpunkt des Körpers und den Mittelpunkt des Auftriebs  $P$  geht, die Lage  $P'G'$  erhalten habe.

Der Schwerpunkt des Körpers liegt dann in  $G'$ , der Mittelpunkt des Auftriebs ist dann aber nicht mehr  $P'$ , sondern  $P''$ , weil

Fig. 87.



die Gestalt des eingetauchten Körpers sich geändert hat. Bei  $P''$  greift nun der Auftrieb an, von unten nach oben gerichtet, bei  $G'$  die Schwere, von oben nach unten. Beide Kräfte suchen also dem Körper eine Drehung zu geben, welche ihn von seiner frühern Lage entfernt; er kehrt also nicht dahin zurück, er war im labilen Gleichgewicht. Die Verticallinie, die wir durch  $P''$  legen, schneidet die Linie  $P'G'$ , welche durch die beiden Schwer-



punkte in der ersten Lage ging, in dem unterhalb  $G'$  liegenden Punkte  $M$ . Dieser Punkt heisst das Metacentrum. Wäre dagegen die Lage des Körpers die in Fig. 88, und liegt nach der Drehung der Mittelpunkt des Auftriebs in  $P''$ , so ist das Metacentrum  $M$  über dem Schwerpunkte  $G$ , beide Kräfte bringen an dem Körper eine Drehung hervor, welche ihn seiner frühern Lage nähert; der

Körper schwimmt im stabilen Gleichgewicht. Die durch  $P''$  gelegte Verticale schneidet die Linie  $G'P'$  um so leichter oberhalb  $G$ , das Metacentrum liegt um so eher über dem Schwerpunkt, je tiefer dieser liegt. Es ist daher für einen Körper, der im stabilen Gleichgewicht schwimmen soll, z. B. Schiffe, das Beste, wenn ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt.

### §. 68.

**Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper.** Wir sahen in §. 66, dass, wenn die Dichtigkeit  $d$  des eingetauchten Körpers grösser ist als die Dichtigkeit  $d'$  der Flüssigkeit, der Körper dann unter-sinkt, dass er aber soviel an Gewicht verliert, als die Flüssigkeit wiegt, welche er aus der Stelle drängt. Wir haben nun in §. 24 das specifische Gewicht eines Körpers dahin defnirt, dass es das Gewicht der Volumeinheit sei, wobei als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zu Grunde ge- legt wird. Nennen wir nun das Volumen eines Körpers  $V$ , sein specifisches Gewicht  $s$ , so ist sein Gewicht  $P = V \cdot s$ . Das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist dann in der obigen Einheit ausgedrückt  $V$ , es ist demnach

$$\frac{P}{V} = \frac{V \cdot s}{V} = s.$$

Kennen wir demnach das Gewicht eines Körpers und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser, so ist der Quotient beider  $\frac{P}{V}$  das specifische Gewicht des Körpers. Da nun ein in Wasser untergetauchter Körper gerade soviel an Gewicht verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches er aus der Stelle drängt, so haben wir hier ein vortreffliches Mittel, um das Ge- wicht eines dem Körper gleichen Volumens Wasser zu bestimmen und somit sein specifisches Gewicht zu erhalten.

Das einfachste Verfahren, um das specifische Gewicht fester Körper zu bestimmen, ist die Anwendung der hydrostatischen Wage, welche sich von der gewöhnlichen Wage nur darin unterscheidet, dass die eine Wa-

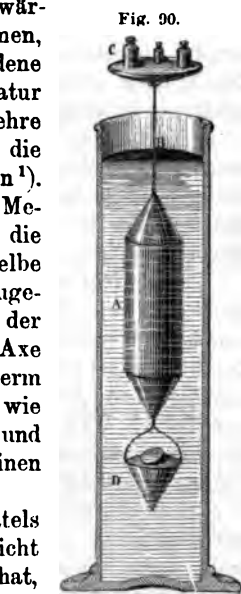
icht so tief herabhängt und in der Mitte ihrer untern Fläche mit  
 kcken versehen ist. Man hängt an dasselbe (Fig. 89) mittels  
 hr feinen Drahtes den zu untersuchenden  
 bestimmt sein Gewicht in der Luft, lässt  
 in ein mit Wasser gefülltes Gefäss hinab  
 immt sein Gewicht neuerdings. Der Ge-  
 lust ist genau das Gewicht eines dem Kör-  
 hen Wasservolumens, der Quotient beider  
 fische Gewicht des Körpers.

sind hierbei jedoch einige Vorsichtsmaass-  
 1 beachten. Zunächst haben wir schon be-  
 ass der Draht möglichst fein sein muss, da  
 h das von diesem aus der Stelle gedrängte  
 uf den Gewichtsverlust von merklichem Ein-  
 wir also nicht das Gewicht einer dem Körper  
 Volumen gleichen Wassermenge erhalten.

er ist nothwendig, dass man reines destil-  
 sser anwende, und dass dieses die Tem-  
 t° C. habe. Wir werden später sehen, dass  
 ser bei dieser Temperatur seine grösste  
 it besitzt, und das Gewicht der Volum-  
 wasser bei dieser Temperatur die gewählte  
 einheit ist. Hat das Wasser eine andere Temperatur, so be-  
 einer Correctur, welche aus der gemessenen Ausdehnung des  
 bestimmt werden kann. Einer ähnlichen Correctur bedarf es wegen

eratur der Körper, da auch diese beim Erwär-  
 ausdehnen. Man ist nun überein gekommen,  
 t für verschiedene Temperaturen verschiedene  
 e Gewicht der Körper stets auf die Temperatur  
 elzenden Eises, auf 0° zu reduciren. In der Lehre  
 Ausdehnung durch die Wärme werden wir die  
 nnen lernen, diese Reduktionen vorzunehmen<sup>1)</sup>.  
 : zweite auf demselben Prinzip beruhende Me-  
 Bestimmung des specifischen Gewichtes ist die  
 ng des Nicholson'schen Aräometers. Dasselbe  
 us einem hohlen unten und oben konisch zuge-  
 ylinder von Messingblech *A* (Fig. 90). Von der  
 s obern Kegels steigt als Verlängerung der Axe  
 ders ein feines Stäbchen *B* auf, an dessen oberm  
 Schale *C* angebracht ist, auf welche man, wie  
 Wagschale, den zu untersuchenden Körper und  
 legen kann. An dem Stäbchen ist durch einen  
 eine feine Marke bei *B* angebracht.

der Spitze des untern Kegels hängt, mittels  
 elförmigen Drahtes daran befestigt, ein Gewicht  
 das nach oben hin eine horizontale Fläche hat,  
 e man den zu untersuchenden Körper legen kann.



<sup>1)</sup> siehe im III. Band §. 8 und §. 16.

Da durch das Gewicht  $D$  der Schwerpunkt des Apparates möglichst tief liegt, so schwimmt derselbe aufrecht und zwar im stabilen Gleichgewicht. Das Gewicht des Apparates ist so bestimmt, dass ein Theil desselben, wenn er in Wasser getaucht wird, aus dem Wasser hervorragt, und dass er nur durch Auflegung von Gewichten auf die Schale  $C$  bis zu der Marke  $B$  einsinkt.

Um nun mittels dieses Apparates das specifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, verfährt man folgendermaassen. Zunächst legt man den zu untersuchenden Körper auf die obere Schale  $C$  und bewirkt durch ausserdem aufgelegte Gewichte, dass das Aräometer genau bis zur Marke eintaucht. Darauf nimmt man den Körper fort und bewirkt durch zugelegte Gewichte, dass der Apparat wieder bis  $B$  eintaucht. Da derselbe in beiden Fällen dann genau dasselbe Volumen Wasser aus seiner Stelle drängt, so ist in beiden Fällen das Gewicht dasselbe; die statt des Körpers aufgelegten Gewichte geben uns also das absolute Gewicht des Körpers  $P$ . Darauf legt man dann den Körper in die untere Schale  $D$  und nimmt die vorhin zugelegten Gewichte wieder fort. Da jetzt der Körper aber in Wasser taucht, so verliert er an Gewicht, und deshalb sinkt der Apparat nicht wieder bis  $B$  ein. Um das zu bewirken, müssen wir ein Gewicht  $P'$  auf die obere Schale legen, welches uns den Gewichtsverlust des Körpers im Wasser, also das Gewicht einer ihm an Volumen gleichen Wassermenge gibt. Der Quotient  $\frac{P}{P'}$  gibt uns also nach dem Vorigen das specifische Gewicht des Körpers.

Dass wir hier dieselben Correctionen anbringen müssen wie bei dem vorigen Verfahren, ist klar; aber selbst dann ist es äusserst schwierig, ein genau richtiges Resultat zu erhalten, besonders weil es wegen der Wirkung der demnächst zu betrachtenden Capillarität schwer ist zu bestimmen, wann der Apparat genau bis zur Marke  $B$  eintaucht. Um genaue Resultate zu erhalten, ist daher die vorige Methode vorzuziehen.

Die beiden bisherigen Methoden beruhen auf der Erfahrung, dass ein eingetauchter Körper im Wasser an Gewicht verliert. Man kann als dritte Methode noch die Umkehr der ersten hinzufügen, den Satz benutzend, dass das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefässes durch das Eintauchen eines Körpers gerade soviel an Gewicht zunimmt, als der Körper verliert.

Man wiegt ein Gefäss mit Wasser ab und bestimmt dann die Gewichtszunahme, welche es erhält, wenn der neben der Wage aufgehängte Körper von bekanntem Gewichte in das Wasser hinabgesenkt wird. Der Quotient des bekannten Gewichts des Körpers und dieser Gewichtszunahme ist dann das gesuchte specifische Gewicht des Körpers. Dieses Verfahren ist besonders bei der Untersuchung grosser und schwerer Körper anzuwenden, indem es keine besondern, an grossen Wagen schwer anzubringenden Vorrichtungen erfordert.

Alle diese Methoden können jedoch nur benutzt werden, wenn es sich darum handelt, das specifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, welche nicht porös, nicht in Wasser löslich und schwerer als Wasser sind. Sind die Körper porös, so muss man sie mit einem sehr feinen Lack überstreichen, so dass sowohl das Gewicht als auch das Volumen der Körper möglichst wenig geändert wird, und da man dadurch das Eindringen des Wassers in

den Körper gehindert hat, verfahren wie vorhin; sind die Körper in Wasser löslich oder leichter als Wasser, so wendet man statt des Wassers Flüssigkeiten an, in denen sich der Körper nicht löst, oder die ein geringeres specifisches Gewicht haben. Das Verfahren bleibt dann ungeändert dasselbe. Ist dann das Gewicht des Körpers  $P$ , sein Gewichtsverlust in der betreffenden Flüssigkeit gleich  $P''$ , sein specifisches Gewicht gleich  $s$ , das der Flüssigkeit gleich  $s''$  und das Volumen des Körpers gleich  $v$ , so ist

$$P = v s, P'' = v s'',$$

$$\frac{P}{P''} = \frac{s}{s''}, s = s'' \cdot \frac{P}{P''}.$$

Kennt man also  $s''$ , das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so lässt sich  $s$  berechnen.

Sind die zu untersuchenden Körper pulverförmig, so lassen sich die beschriebenen Methoden zur Bestimmung ihres specifischen Gewichtes nicht anwenden; in einem solchen Falle verfährt man am besten so, dass man direkt die von einer gewogenen Quantität des Pulvers aus einem Gefäss verdrängte Menge Wassers, oder im Falle das Pulver in Wasser löslich oder leichter als Wasser ist, einer andern Flüssigkeit bestimmt. Man benutzt dazu sogenannte Pyknometer, wie Fig. 91 ein solches darstellt. Es sind kleine Fläschchen, welche einen ziemlich weiten Hals haben, in welchen ein Glasstöpsel eingeschliffen ist, so dass, wenn er eingesetzt ist, ein ganz bestimmter immer gleicher Raum im Gefässe abgeschlossen ist. Da man, wie vorhin erwähnt, bei diesen Versuchen immer die Temperatur der Flüssigkeit kennen muss, so wendet man als Glasstöpsel, wie Fig. 91 zeigt, sehr bequem ein Thermometer an. An dem Gefäss ist ferner eine capillare Röhre  $c$  angebracht, welche oben ausgeweitet ist und dort ebenfalls mit einem eingeriebenen Glasstöpsel verschlossen werden kann. An der capillaren Röhre ist bei  $m$  eine Marke.

Man füllt das Gefäss zunächst mit Wasser, schliesst es, während das capillare Rohr offen ist, durch Einsetzen des Stöpsels bei  $h$  und tupft dann, während man es auf constanter Temperatur hält, das Wasser bis zur Marke  $m$  ab. Man schliesst die capillare Röhre und wiegt das Gefäss ab. Es habe das Gewicht  $P$ . Darauf öffnet man das Gefäss und schüttet eine ge-

Fig. 91.



wogene Quantität  $p$  des zu untersuchenden Pulvers hinein. Man schliesst wieder, tupft das Wasser bis  $m$  ab und wiegt wieder. Man finde jetzt das Gewicht  $P'$ . Das Gewicht  $P'$  ist dann gleich dem zuerst gefundenen Gewicht  $P$ , vermehrt um das Gewicht  $p$  des eingeschütteten Pulvers, aber vermindert um das Gewicht  $\pi$  des von dem Pulver verdrängten Wassers, oder

$$P' = P + p - \pi,$$

somit

$$\pi = P + p - P'.$$

Demnach ist das specifische Gewicht des Pulvers

$$s = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{P + p - P'}.$$

Bei diesem Verfahren muss man dafür sorgen, dass das Pulver keine Luft eingeschlossen hält; am besten ist es, dass man vor dem letzten Wägen das Wasser bis nahe zum Sieden erhitzt und dann erst, nach eingetretener Abkühlung, schliesst und nach dem Abtupfen wägt.

### §. 69.

**Bestimmung des specifischen Gewichtes der Flüssigkeiten.** Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten kann man ebenfalls eine Reihe von Methoden anwenden, von denen mehrere auf der Bestimmung des Gewichtsverlustes eingetauchter Körper beruhen, andere nicht.

Von letztern machen wir zwei namhaft. Die genaueste ist die, dass man die im vorigen Paragraphen beschriebenen Pyknometer bis zur Marke einmal mit Wasser füllt, abwägt und durch Abziehen des vorher bestimmten Gewichtes des Gläschens das Gewicht des im Gefässe enthaltenen Wassers bestimmt. Darauf füllt man dasselbe Gefäss wieder bis zur Marke mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und bestimmt auf gleiche Weise das Gewicht derselben. Man hat auf diese Weise direkt das Gewicht gleicher Volumina Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit, der Quotient beider gibt das specifische Gewicht der Flüssigkeit.

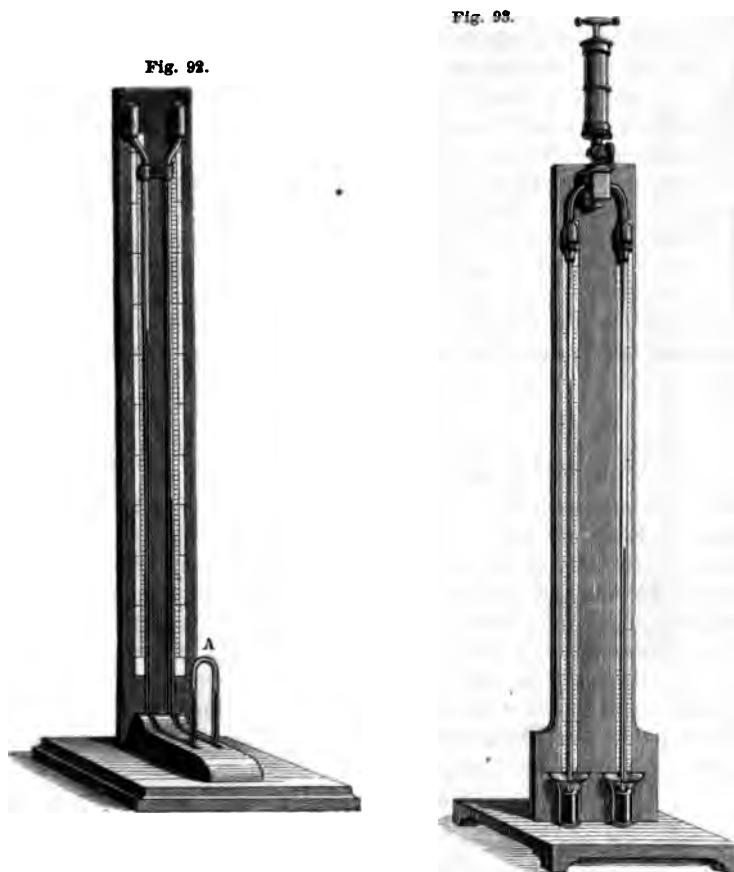
Eine zweite Methode beruht auf dem Satze, dass in zwei communicirenden Röhren die Höhen verschiedener Flüssigkeiten sich umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte verhalten. Vor einem Maassstabe (Fig. 92) sind zwei Glasröhren befestigt, welche vertical herabsteigen und unten so umgebogen sind, dass zwei kürzere aufsteigende Arme entstehen, welche bei  $A$  so vereinigt sind, dass die beiden Röhren gleichsam nur eine mehrfach gekrümmte Röhre bilden. Man giesst nun in die eine Wasser und zugleich in die andere die zu untersuchende Flüssigkeit. Auf diese Art erhält man zwei durch eine Luftschicht getrennte Flüssigkeitssäulen. Wenn man nun die Flüssigkeitsmengen so regulirt, dass das Niveau derselben in den umgebogenen Röhrenschenkeln gleich hoch und das des Nullpunktes der Theilung ist, so sind die Höhen der Flüssigkeiten in den senkrechten Röhren ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proportional. Ist die Höhe der

Wassersäule  $h$ , die der Flüssigkeit gleich  $h'$ , die Dichtigkeit der Flüssigkeit  $d$ , die des Wassers gleich 1, so ist

$$h : h' = d : 1,$$

$$d = \frac{h}{h'}.$$

Eine etwas andere Anordnung des Apparates zeigt Fig. 93. Die ver-  
 trennten Röhren tauchen unten in zwei abgedehrte Gefässe, welche mit den



mit vergleichenden Flüssigkeiten gefüllt sind. Oben communiciren sie mit-  
 tels eines gebogenen Rohres mit einander und durch einen verschliessbaren  
 Hahn mit einer kleinen Luftpumpe. Pumpt man bei geöffnetem Hahn durch  
 das Aufziehen des Kolbens etwas Luft aus, so steigen die Flüssigkeiten durch  
 den äussern Luftdruck zu Höhen, welche ihren specifischen Gewichten um-  
 gekehrt proportional sind. Schliesst man also den Hahn oben und misst  
 die Höhen, so erhält man daraus gerade wie vorhin das specifische Gewicht  
 einer Flüssigkeit, wenn das der andern bekannt ist.



Die andern Methoden zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten beruhen auf dem Gewichtsverlust eingetauchter Körper. Die einfachste und genaueste dieser Methoden ist die, dass man einen passend geformten Körper, etwa ein kleines Glasröhrchen, welches unten und oben zugeschmolzen ist, nachdem man etwas Quecksilber hineingebracht hat, an einem sehr feinen Drahte, wie in Fig. 94, befestigt. Man wiegt denselben genau und bestimmt dann seinen Gewichtsverlust einmal, wenn er in Wasser getaucht ist, und dann, wenn er sich in der zu untersuchenden Flüssigkeit befindet. Diese Gewichtsverluste geben dann die Gewichte von Flüssigkeitsmengen, deren Volumen gleich ist dem des eingetauchten Körpers, die Quotienten der Gewichtsverluste also das specifische Gewicht der zu untersuchenden Flüssigkeit.

Fig. 94.



Auch das Nicholson'sche Aräometer kann man, wie leicht ersichtlich ist, zu demselben Zwecke anwenden. Man bestimmt zunächst das Gewicht des Apparates; dasselbe sei  $A$ ; man taucht es dann in Wasser, und damit es bis zur Marke einsinke, sei ein Gewicht  $p$  erforderlich. Da das Aräometer schwimmt, so ist das Gewicht des dem eingetauchten Theile an Volumen gleichen Wassers gleich  $A + p$ . Darauf taucht man es in die zu untersuchende Flüssigkeit, und ist  $p'$  das jetzt aufzulegende Gewicht, damit es bis zur Marke einsinkt, so ist  $A + p'$  das Gewicht einer der vorigen Wassermenge an Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge. Der Quotient bei der oder

$$\frac{A + p'}{A + p} = s$$

ist gleich dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit.

Da es im praktischen Leben sehr häufig nothwendig ist, das specifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, ohne dass eine möglichst grosse Genauigkeit erfordert wird, so hat man noch ein anderes Verfahren erdonnen, um leicht und schnell das Geforderte zu leisten; man bestimmt nämlich die Dichtigkeit von Flüssigkeiten mittels Aräometer von veränderlichem Volumen. Während man mittels des Nicholson'schen Aräometers die Dichtigkeit der Flüssigkeiten aus den verschiedenen Gewichten gleicher Volumina ableitet und dann, wenn  $P$  das Gewicht der Flüssigkeit von der Dichtigkeit  $D$ ,  $p$  das der Flüssigkeit von der Dichtigkeit  $d$  ist, die gesuchte Dichtigkeit aus der Proportion erhält,

$$D : d = P : p,$$

verfährt man bei den jetzt zu betrachtenden Apparaten so, dass man ein constantes Gewicht  $P$  in verschiedene Flüssigkeiten eintaucht und das Volumen beobachtet, welches dieses aus der Stelle drängt. Der Körper sinkt stets so tief ein, dass die verdrängte Flüssigkeit seinem Gewichte  $P$  gleich ist. Sinkt er nun in die Flüssigkeit von der Dichtigkeit  $D$  so tief ein, dass er ein Volumen  $V$  aus der Stelle drängt, so ist

$$P = V \cdot D.$$

Drängt er in einer andern Flüssigkeit das Volumen  $v$  aus der Stelle, so ist

$$P = v \cdot d$$

r

$$v \cdot d = V \cdot D; d : D = V : v.$$

men wir also z. B. eine cylindrische Glasröhre, welche unten und oben etwas Quecksilber hineingebracht, zugeschmolzen ist, um zu verhindern, dass sie stets aufrecht schwimmt, und dass sie bis zu einem bestimmten Punkte in Wasser einsinkt, leicht, aus dieser ein Aräometer zu machen, bei welchem eine Theilung genügt, um die Dichtigkeit der Flüssigkeit, in die es getaucht werden soll, zu messen. Man bezeichnet die Stelle, bis zu welcher die Röhre (Fig. 95) in Wasser einsinkt, durch eine Marke, setzt daneben 100 und theilt nun die Länge der Röhre von dieser Marke bis zum Theilstriche 100 in 100 gleiche Theilstriche aus nach unten hin in 100 gleiche Theilstriche und trägt ebenso die Theilung auch noch nach oben hin fort. Der Rauminhalt zwischen zwei Theilstrichen entspricht dann, da wir die Röhre als cylindrisch voraussetzen,  $\frac{1}{100}$  des Rauminhaltes der Röhre zwischen dem Theilstriche 100. Tauchen wir nun die Röhre in eine Flüssigkeit, in welche sie bis zum Theilstriche 80 einsinkt, so schliessen wir daraus, dass ihr Gewicht gleiche Flüssigkeitsmenge zwischen dem Theilstriche 80 drängt, dass 80 Volumtheile dieser Flüssigkeit wiegen als 100 Volumtheile Wasser. Wir bezeichnen nun das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit mit  $s$ .

$$s : 1 = 100 : 80,$$

$$s = \frac{100}{80} = 1,25;$$

Die Röhre dagegen bis zum Theilstriche 120 ein,

$$s = \frac{100}{120} = 0,833;$$

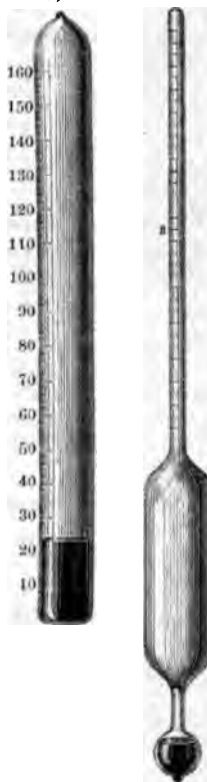
Verhaupt die Röhre in irgend eine Flüssigkeit bis zum Theilstrich  $n$  ein, so haben wir für ihr specifisches Gewicht  $\frac{100}{n}$ .

Die Aräometer bestimmen demnach das specifische Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung des Gewichtens derselben mit dem Volumen einer gleichgewichtsmenge Wasser. Sie führen daher den Namen Volumeter.

Man gibt ihnen meist eine andere Form (Fig. 96). Es ist klar, dass diese eine um so grössere Genauigkeit liefern, je weiter zwei Theilstriche einander entfernt sind. Zu dem Ende wählt man sehr dünne Röhren und damit sie dann nicht zu lang und somit zu unbeholfen werden, bringt man unten ein Stück einer weitem Röhre daran. Die Theilung kann empirisch aufgetragen werden; man verfährt folgendermaassen. Man bringt in die Röhre etwas Quecksilber, so dass das Gewicht des Aräometers  $p$  wird, taucht ihn in Wasser und bezeichnet die Stelle, bis zu welcher er einsinkt, mit 50. Darauf vermehrt man durch Hinzufügen von Quecksilber sein Gewicht auf  $2p$ ,  $3p$  und taucht ihn wieder in Wasser.

Fig. 95.

Fig. 96.



Das doppelte und dreifache Gewicht verdrängt die doppelte und dreifache Wassermenge, der Apparat sinkt also tiefer ein. Die Stelle, bis zu der er bei doppeltem Gewichte einsinkt, bezeichnet man mit 100, die bei dreifachem Gewichte mit 150 und theilt nun den Raum zwischen 50 und 100, sowohl als zwischen 100 und 150, in 50 gleiche Theile. Der Raum zwischen 50 und 100 ist die Hälfte von dem Raum, den das Instrument ausfüllt, wenn es bis zu 100 einsinkt; der Raum zwischen zwei Theilstrichen also  $\frac{1}{100}$  dieses Raumes. Man gibt nun schliesslich dem Apparate das Gewicht  $2p$  und schliesst ihn dann oben. Im Wasser taucht dann derselbe bis zum Theilstriche 100 ein; wir können ihn daher jetzt gerade so benutzen wie das einfachere Aräometer; taucht er in eine Flüssigkeit bis zum Theilstriche  $n$ , so ist  $\frac{100}{n}$  ihr specifisches Gewicht.

Aber auch so erhält der Apparat immer noch eine bedeutende Länge und wird dadurch zum praktischen Gebrauche unbequem. Man verfertigt daher selten Apparate, welche zugleich dazu dienen, das specifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, welche schwerer oder leichter sind als Wasser, sondern meist solche, welche nur für die eine oder andere Art von Flüssigkeiten bestimmt sind.

Ist das Instrument für schwerere Flüssigkeiten bestimmt, so bezeichnet man den Punkt oben an der Röhre, bis zu welchem sie beim Gewichte  $2p$  in Wasser einsinkt, mit 100, und ganz unten über der weitem Röhre beim Gewicht  $p$  mit 50, gibt dem Apparate das Gewicht  $2p$  und graduirt wie vorhin. Ist es für die Bestimmung des specifischen Gewichtes leichter Flüssigkeiten bestimmt, so richtet man das Gewicht  $p$  des Apparates so ein, dass er in Wasser getaucht bis gerade über die weite Röhre eintaucht, und bei dem Gewichte  $2p$  bis oben. Der Apparat erhält dann das Gewicht  $p$ , und der untere Punkt wird mit 100, der obere mit 200 bezeichnet; das specifische Gewicht ergibt sich dann wie vorhin.

Häufig findet man auch auf den Aräometerskalen anstatt oder neben der der Theilung entsprechenden Zahl die Angabe des specifischen Gewichtes verzeichnet, welche dem nebenstehenden Theilstriche entspricht; also neben dem Theilstriche 100—1, neben dem 120 dann 0,833, 150 — 0,666, 200 — 0,5; eine einfache Ablesung ergibt dann das gesuchte specifische Gewicht.

**Aräometer für besondere Flüssigkeiten.** Wenn zwei Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes, die sich mit einander mischen, zusammen gegossen werden, so hängt das specifische Gewicht des Gemisches von den Mengenverhältnissen der einzelnen Flüssigkeiten ab. Kennt man daher für alle Mischungen ihre specifischen Gewichte, so kann man mittels der Aräometer die Bestandtheile des Gemisches kennen lernen. Für einzelne Flüssigkeiten sind nun diese Untersuchungen durchgeführt und am genauesten für Alkohol, da es im praktischen Leben vielfach von Wichtigkeit ist, den Procentgehalt eines Weingeistgemisches mit Schnelligkeit bestimmen zu können. Auf den ersten Blick sollte man glauben, dass nichts einfacher sei, als aus dem specifischen Gewichte eines Flüssigkeitsgemisches den Gehalt desselben an der einen oder andern zu bestimmen, indem man das specifische Gewicht aus den Mengenverhältnissen berechnet. Darnach würde z. B. ein Gemisch aus 50 Volumen Wasser und 50 Volumen Alkohol

ein Gemisch von 100 Volumen geben, dessen spezifisches Gewicht gerade in der Mitte dessen des Alkohols oder des Wassers läge, also, da das des Alkohols gleich 0,794, das des Wassers bei 15° C. gleich 0,9991 ist, gleich 0,8866 sein würde.

Dem ist jedoch nicht so, und zwar deshalb nicht, weil bei der Mischung zweier Flüssigkeiten meist eine Aenderung des Volumens eintritt.

Giesst man z. B. Alkohol und Wasser zu gleichen Theilen zusammen, so ist das Volumen des Gemisches nicht gleich der Summe der Volumina, sondern kleiner. Es tritt eine Contraction der Flüssigkeiten ein; das spezifische Gewicht ist demnach grösser als das vorhin berechnete.

Nach den neuesten Versuchen von Baumhauer <sup>1)</sup> geben nun:

Volume Wasser.	Weingeist.	Mischung.	Volume Wasser.	Weingeist.	Mischung.
100	0	100	40	60	94,8
90	10	99,4	30	70	96,2
80	20	98,2	20	80	96,7
70	30	97,2	10	90	97,7
60	40	96,4	0	100	100
50	50	96,0			

Daraus ergibt sich das spezifische Gewicht  $s$  bei 15° C.:

Mischung aus Volumen

Wasser.	Weingeist.	$s$
100	0	0,9991
90	10	0,9857
80	20	0,9750
70	30	0,9645
60	40	0,9511
50	50	0,9338
40	60	0,9131
30	70	0,8897
20	80	0,8635
10	90	0,8338
0	100	0,7941

Wenn man nun ein Volumeter so einrichtet, dass es in Wasser getaucht bis zu einem mit 0 bezeichneten Punkte eintaucht, so wird es in Gemischen aus Alkohol und Wasser tiefer eintauchen. Bezeichnet man nun die Punkte, bis zu denen es in Flüssigkeiten vom spezifischen Gewichte 0,9857, 0,9750 etc. einsinkt, mit 10, 20.., so erhält man ein Alkoholometer, welches in ein Weingeistgemisch eingetaucht durch eine einfache Ablesung angibt, wie viel Volumprocente das Gemisch an reinem Alkohol enthält.

So sind die Alkoholometer von Tralles <sup>2)</sup> eingerichtet, welche in Deutschland meist gebraucht werden, um den Alkoholgehalt des käuflichen Spiritus zu bestimmen.

<sup>1)</sup> von Baumhauer, Mémoire sur la densité etc. des mélanges d'alcool et d'eau Amsterdam, 1860. Etwas von diesen verschiedene Werthe ergeben sich aus den Versuchen von Mendelejeff, Poggend. Ann. Bd. CXXXVIII.

<sup>2)</sup> Tralles, Gilbert Annalen XXXVIII. 349—431.

Es ist jedoch zu bemerken, dass die Zahlen für das spezifische Gewicht des Alkohols, wie schon erwähnt, und so auch die der Gemische nur eine bestimmte Temperatur gelten, nämlich für 15° C. Deshalb gelten auch die Angaben der Alkoholometer nur für diese oder eine andere Temperatur, bei der sie graduirt sind. Um jedoch den Apparat auch für andere Temperaturen brauchbar zu machen, hat Tralles eine Tabelle aufgestellt<sup>1)</sup>, aus welcher man für jede Temperatur den Alkoholgehalt des Gemisches entnehmen kann, wenn man beobachtet hat, bis zu welchem Punkte bei dieser Temperatur der Apparat in das Gemische eintaucht. Deshalb ist an den meisten Alkoholometern auch ein Thermometer gebracht.

Vielfach ist auch an den Alkoholometern selbst die Correction bemerkt, welche man für die verschiedenen Temperaturen anzubringen hat. In weitem Röhre am untern Theile des Apparates ist neben dem Thermometer eine Skala befestigt, auf der dann neben dem normalen Thermometerstand für welchen das Instrument graduirt ist, 0 verzeichnet ist und darunter, wieviel Procente man von der Angabe des Alkoholometers abziehen oder derselben hinzufügen muss, wenn das Thermometer einen höhern oder tiefern Stand hat.

Ausser den Alkoholometern müssen wir noch die Aräometer von Beaumé erwähnen, welche vielfach in Gebrauch sind, obwohl sie direkt weder über die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, noch über ihre Zusammensetzung aussagen. Beaumé construirte zwei Aräometer, das erste graduirte er den Punkt, bis zu dem es in Wasser eintauchte, mit 0, und bis zu welchem es in einer Lösung von 15 Theilen Kochsalz auf 85 Wasser eintauchte, mit 15 bezeichnete. Die Theilung wurde dann weiter nach unten fortgesetzt. Der Apparat gibt in Schwefelsäure-Hydrat 66 Grade und in concentrirter Salpetersäure 36.

Für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser, wurde der Punkt bis zu welchem der Apparat in eine Lösung von 10 Theilen Kochsalz auf 90 Wasser taucht, mit 0, in Wasser mit 10 bezeichnet und die Theilung nach oben hin fortgesetzt. In käuflichem, meist 80—90procentigem Spiritus zeigt der Apparat 34—38 Grade<sup>2)</sup>.

## §. 70.

### Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern

In unseren bisherigen Entwicklungen über die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper haben wir keine Rücksicht genommen auf die Wirkung von Kräften, welche an den Gefässwänden zwischen den Molekülen der festen Wand und denen des flüssigen Körpers thätig sind, also gemäss unserer Benennung in §. 59 und 48 auf die Wirkung der Adhäsion der flüssigen Körper an die festen Körper und die Cohäsion der Flüssigkeiten.

Von dem Dasein beider Kräfte kann man sich leicht überzeugen. Taucht man ein reines Glasstäbchen in Wasser und zieht es dann heraus, so

<sup>1)</sup> Tralles a. a. O.

<sup>2)</sup> Weiteres Meissner, Die Aräometrie in ihrer Anwendung auf Chemie und Technik. Wien, 1816.

man, dass eine Wasserschicht an demselben haftet. Hält man es vertical, so sammelt sich an seinem untern Ende ein Tropfen an, der nicht herabfällt, sondern der Wirkung der Schwere entgegen an dem Stübchen haften bleibt. Diese einzige Thatsache beweist das Dasein der Adhäsion des flüssigen Körpers an den festen sowohl als auch das der Cohäsion der einzelnen Theile der Flüssigkeit. Denn die zunächst am Glase anhängende Wasserschicht wird durch die Adhäsion des Wassers am Glase getragen und der übrige Theil des Tropfens durch die Kraft, mit welcher die einzelnen Wassertheile an einander haften.

Aus diesem Versuche geht zugleich hervor, dass in diesem Falle sowohl die Cohäsion der Flüssigkeit als auch die Adhäsion derselben am Glase grösser ist als die Wirkung der Schwere; denn nur dann ist es möglich, dass der Tropfen, der Schwere entgegen, getragen wird. Der Versuch zeigt aber weiter, dass hier auch die Adhäsion des Wassers am Glase grösser ist als die Cohäsion der Wassertheile unter einander; denn beim Herausziehen des Stabes wurden die an dem Stabe haftenden Wassertheile von ihrer Umgebung losgerissen, mit welcher sie durch die Cohäsion zusammenhängen.

Nicht immer ist das jedoch der Fall; denn wenn wir den Glasstab in Quecksilber tauchen, so bleibt kein Quecksilber daran haften, er wird von demselben nicht benetzt. Dass aber auch hier eine Adhäsion des Quecksilbers am Glase vorhanden ist, lässt sich durch einen andern Versuch zeigen. Hängt man nämlich eine Platte mittels dreier Fäden an dem einen Arm einer Wage horizontal auf und äquilibrirt sie durch Gewichte, welche auf die andere Wagschale gelegt werden, so bringt das geringste Uebergewicht, auf die Wagschale gelegt, eine Erhebung der Glasplatte hervor. Nähert man aber der Platte von unten ein weites mit Quecksilber gefülltes Gefäss so weit, dass die untere Fläche der Glasplatte die Oberfläche des Quecksilbers gerade berührt, so bedarf es auf der andern Wagschale bedeutender Zulage, um die Platte von dem Quecksilber loszureissen, ein Beweis, dass sie mit einer gewissen Kraft am Quecksilber haftet, dass also auch das Quecksilber am Glase adhärirt.

Die Cohäsion der verschiedenen Flüssigkeiten sowohl als die Adhäsion derselben Flüssigkeit an verschiedene feste Körper ist verschieden. Während Quecksilber Glas nicht benetzt, also an Glas nicht so stark adhärirt, dass die Cohäsion der Quecksilbertheile überwunden werden kann, wird Gold vom Quecksilber benetzt. Während reines Glas vom Wasser benetzt wird, vermag eine fettige Glasscheibe die Cohäsion der Wassertheile nicht zu überwinden.

Bei denjenigen Substanzen, bei welchen die Adhäsion an feste Körper grösser ist als die Cohäsion der flüssigen Theile, kann obiges Verfahren, welches wir anwandten, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase nachzuweisen, dazu dienen, die Cohäsion der Flüssigkeit zu messen. Gay-Lussac<sup>1)</sup> hat für einige Flüssigkeiten, welche am Glase adhäriren, dieses Verfahren angewandt und mit einer Scheibe von 118,366 Millim. Durchmesser folgende Resultate erhalten:

<sup>1)</sup> Gay-Lussac's Versuche in La Place Supplément à la Théorie de l'action capillaire. II. Supplément zum 10. Buche der Mécanique céleste. Daraus Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 320 ff.

Flüssigkeit	Specificsches Gewicht	Gewichte
Wasser . . . . . bei 8 <sup>o</sup> ,5 C.	1	59,40 <sup>gr.</sup>
Alkohol . . . . . " " "	0,8196	31,08 "
Alkohol . . . . . " 10 <sup>o</sup> "	0,8595	32,87 "
Alkohol . . . . . " 8 "	0,9415	37,15 "
Terpentin-Oel . . . . . " 8 "	0,8694	34,10 "

Die angegebenen Gewichte sind diejenigen, welche bei langsamem Auflegen der Gewichte gerade die benetzte Platte loszureissen im Stande waren. Ganz dieselben Resultate erhielt Gay-Lussac, als er die Glasscheibe der vorigen Versuche durch eine Kupferscheibe ersetzte, was einen neuen Beweis dafür liefert, dass durch diese Versuche wirklich die Cohäsion der Flüssigkeiten gemessen wird.

Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren benutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Versuche an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die Zahlen jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen 158 <sup>gr.</sup> und 296 <sup>gr.</sup>, je nachdem er die Uebergewichte rasch oder langsam auflegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Theil in der Reibung des Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

### §. 71.

**Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten.** Aus den im vorigen Paragraphen mitgetheilten Thatsachen folgt erstens, dass die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich anziehen, und zweitens, dass die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers ebenfalls die benachbarten Theile der Flüssigkeit anziehen. Bei der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Aenderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitstheile auf einander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, dass die Kräfte sich nur auf unmessbare Entfernungen erstrecken, dass sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen messbar sind<sup>1)</sup>.

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche *MN* (Fig. 97) begrenzt ist, und untersuchen die Resultirende aller auf die Moleküle *m*, *m'*, *m''* von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien *r*, welche als unendlich klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so dass also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf *m*, *m'*, *m''* wirken.

<sup>1)</sup> *La Place*, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céleste, daraus *Gilbert*, Annalen XXXIII.

Auf das Molekül  $m$  wirken die ringsum ganz gleichmässig vertheilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein; dasselbe wird also nach allen Rich-

Fig. 97.



tungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf  $m$  wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

Das Molekül  $m''$ , welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit liegt, wird jedoch nicht nach allen Richtungen mit gleicher Stärke angezogen. Nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeitsmolekülen angefüllt, die obere nicht. Die anziehenden Kräfte der die untere Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben nun, wie unmittelbar klar ist, eine zur Oberfläche  $MN$  senkrechte Resultirende  $R$ , da in den der Oberfläche parallelen Schichten die Moleküle rings um  $m''$  ganz gleichmässig vertheilt sind. Das Molekül  $m''$  und somit alle in der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsmoleküle werden durch eine gegen die Oberfläche senkrechte Kraft gegen das Innere der Flüssigkeit gedrückt.

Aehnliches gilt für das Molekül  $m'$ , welches um weniger als  $r$  unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegt. Auch dessen Anziehungssphäre ist nicht ganz mit Flüssigkeit angefüllt, und unterhalb  $m'$  wirkt eine Quantität Flüssigkeit auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach oben gerichtete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird; auch an  $m'$  greift daher eine zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte, gegen das Innere derselben gerichtete Kraft  $R'$  an, die jedoch kleiner ist als  $R$ .

Dasselbe ist nun der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als  $r$  unter der Oberfläche liegen, deren Anziehungssphären also zum Theil nicht mit Flüssigkeit angefüllt sind. Legen wir daher parallel der Oberfläche im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der Oberfläche um  $r$  absteht, so werden alle in dieser Schicht liegenden Moleküle nach innen gezogen. Diese Schicht wird also z. B. auf eine Flüssigkeitskugel wirken wie ein elastisches Häutchen, welches sich zusammen zu ziehen sucht, oder auf jede Flüssigkeit, die in einem Gefässe steht, einen rings gegen das Innere der Flüssigkeit gerichteten Druck ausüben, da sie auch an den von den Wänden begrenzten Flächen vorhanden sein muss. Man nennt daher diese Schicht das Flüssigkeitshäutchen und diesen Druck den Normaldruck.

Dieser Normaldruck der Flüssigkeiten muss verschieden sein je nach der Gestalt der Oberfläche. Während nämlich in ebenen Oberflächen die Flüssigkeit nur durch die betrachteten Molekularwirkungen nach innen gezogen wird, tritt in gekrümmten Oberflächen durch die in der Oberfläche vorhandenen Moleküle noch eine eigenthümliche Spannung hinzu, welche den Normaldruck vermehrt oder vermindert. Eine Vermehrung tritt dann



ein, wenn die Oberfläche nach aussen convex, eine Verminderung (wenn die Oberfläche nach aussen concav ist. Denn ist  $AB$  Fig. 98 Durchschnitt durch eine convexe,  $A_1 B_1$  ein solcher durch eine con-

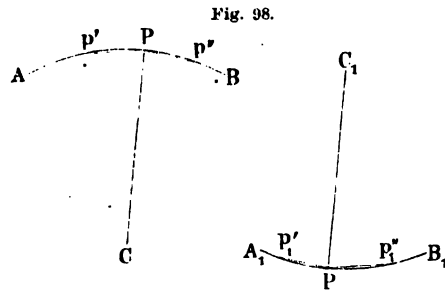


Fig. 98.

Oberfläche, so erkennt man dass die gegenseitigen Anziehungen der in der Oberflächenschichten der Normale parallele Componenten liefern, welche bei den concaven Flächen nach aussen, bei den convexen Flächen nach innen gerichtet ist. Man nennt diese von der Oberfläche abhängige Componente die Oberflächenspannung

Um die Grösse dieser Oberflächenspannung und ihre Abhängigkeit von der Gestalt der Oberfläche zu bestimmen<sup>1)</sup>, sei Fig. 98  $P$  ein Punkt der Oberflächenschicht, welche in dem Schnitt  $AB$  derselben liege, und das im Punkte  $P$  vorhandene Massentheilchen der Flüssigkeit. Ein in dem Punkte  $p'$  vorhandenes Massentheilchen  $m'$ , welches von  $m$  die kleine Strecke  $r$  entfernt ist, wird dann auf das Massentheilchen  $m$  einer Kraft wirken, welche wir dem Produkte der Massen  $m \cdot m'$  und einer Function der Entfernung  $f(r)$  proportional, also gleich  $m \cdot m' \cdot f(r)$  setzen können; von der Function  $f(r)$  wissen wir nur, dass sie verschwindet sobald  $r$  grösser als der Radius der Wirkungssphäre wird. Ein in demselben Schnitt in derselben Entfernung  $r$  bei  $p''$  gelegenes Massentheilchen  $m''$  wird dann auf das Massentheilchen  $m$  genau dieselbe Wirkung ausüben. Diese Wirkungen sind nach den Verbindungslinien  $Pp'$  resp.  $Pp''$  gerichtet.

Zerlegen wir diese Wirkungen jede in zwei Componenten, die eine senkrecht, die andere parallel der im Punkte  $P$  errichteten Normale der Oberfläche, so heben sich die senkrecht zur Normale wirkenden Componenten als einander gleich und entgegengesetzt gerichtet auf. Die dem Punkte  $P$  parallel gerichteten Componenten dagegen summieren sich, sie üben also eine auf das bei  $P$  liegende Massentheilchen  $m$  wirkende Kraft

$$2 \cdot m \cdot m' \cdot f(r) \cdot \cos p' PC.$$

In der Nähe des Punktes  $P$ , und soweit die Wirkungssphäre der Kräfte reicht, fällt nun, welches auch die Gestalt der Oberfläche ist, der Schnitt  $AB$  mit einem Kreisbogen zusammen, dessen Mittelpunkt in  $C$  dessen Radius  $\varrho$  der Krümmungsradius des Schnittes  $AB$  im Punkte  $P$  ist. Daraus folgt, da das über dem Durchmesser eines Kreises beschriebene Dreieck, dessen dritte Ecke in der Peripherie liegt, an dieser dritten Ecke rechtwinklig ist, dass

$$\cos p' PC = \frac{p' P}{2 PC} = \frac{r}{2 \varrho},$$

somit dass die aus der Wirkung von  $p'$  und  $p''$  auf  $P$  resultierende de-

<sup>1)</sup> Man sehe *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. p. 622.

male parallele Componente gleich ist

$$2mm' f(r) \cdot \frac{r}{2\varrho} = mm' f(r) \frac{r}{\varrho}.$$

Die Wirkung aller Flüssigkeitstheilchen in dem Normalschnitt  $AB$  auf das Massentheilchen  $m$  bei  $P$  erhalten wir, wenn wir für alle je zwei in gleicher Entfernung liegenden Massentheilchen, deren Abstand von  $P$  zwischen  $o$  und dem Radius der Wirkungssphäre enthalten ist, denselben Ausdruck bilden und alle diese Ausdrücke summiren, also in der Summe

$$\Sigma mm' f(r) \cdot \frac{r}{\varrho}.$$

Da jedes Glied dieser Summe den Factor  $\frac{1}{\varrho}$  hat, so können wir diesen Factor herausschreiben und erhalten dann

$$\frac{1}{\varrho} \Sigma mm' f(r) \cdot r = \frac{h}{\varrho},$$

wenn wir die Summe mit dem Zeichen  $h$  bezeichnen.

Denken wir uns jetzt einen zweiten Normalschnitt durch den Punkt  $P$  der Oberfläche gelegt, welcher senkrecht zu dem Normalschnitt  $AB$  ist und den Krümmungsradius  $\varrho'$  hat, so gilt für diesen ganz dieselbe Entwicklung. Wir erhalten deshalb für die Wirkung der in diesem Schnitt der Oberfläche liegenden Flüssigkeitstheilchen auf das Theilchen bei  $P$

$$\frac{h}{\varrho'}$$

und für die Wirkung beider Schnitte

$$h \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right).$$

Denken wir uns jetzt die ganze Oberfläche um den Punkt  $P$  durch unabhängig viele Paare von je zwei zu einander senkrechten durch den Punkt  $P$  gelegter Normalschnitte gegeben, so wird die gesammte durch die Gestalt der Oberfläche bewirkte Spannung gleich sein der Summe aller der Spannungen, die wir für jedes Schnittpaar erhalten. Für irgend ein beliebiges Schnittpaar, deren Krümmungsradien  $\varrho_n$  und  $\varrho'_n$  sind, wird die Spannung dann sein

$$h \left( \frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} \right),$$

und die ganze Summe können wir dann bezeichnen mit

$$\Sigma h \left( \frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} \right).$$

Bezeichnen wir nun mit  $R$  den Radius der stärksten Krümmung, also den kleinsten Krümmungsradius, mit  $R_1$  den Radius der schwächsten Krümmung, also den grössten bei den Schnitten vorkommenden Krümmungsradius, so ist nach einem von Euler bewiesenen Satze immer

$$\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1},$$

oder die Summe der reciproken Werthe der Krümmungsradien zweier zu einander senkrechter Schnitte hat bei einer gegebenen Oberfläche immer

denselben Werth und ist gleich der Summe der reciproken Werthe des grössten und kleinsten Krümmungsradius. Wir können demnach aus obiger die Oberflächenspannung darstellenden Summe den constanten Factor heraus schreiben und erhalten dann für dieselbe

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \cdot \Sigma h.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommende Summe  $\Sigma h$  können wir noch in folgender Weise näher definiren. Wir bezeichnen den auf die Flächeneinheit einer Kugeloberfläche vom Radius 1 in Folge der Oberflächenspannung resultirenden Druck mit  $H$ . Indem wir dann den eben abgeleiteten Ausdruck für die Oberflächenspannung auf die Einheit der Oberfläche beziehen unter der Voraussetzung, dass die Fläche überall dieselbe Krümmung hat als im Punkte  $P$ , erhalten wir aus demselben die Oberflächenspannung der Kugel vom Radius 1, indem wir  $R = R_1 = 1$  setzen, so dass

$$2 \cdot \Sigma h = H; \Sigma h = \frac{H}{2}.$$

Damit wird dann die Oberflächenspannung für eine irgendwie gekrümmte Fläche

$$\frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

In einer Ebene ist eine solche Oberflächenspannung nicht vorhanden, da dort die zur Normale parallelen Componenten gleich Null werden. Das gibt auch unser Ausdruck zu erkennen; denn bei einer Ebene werden sowohl  $R$  als  $R_1$  unendlich gross, ihre reciproken Werthe also gleich Null.

Bei einer nach aussen convexen Oberfläche tritt diese Oberflächenspannung zu dem in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit vorhandenen Normaldruck hinzu, indem der aus dieser Oberflächenspannung resultirende Druck, der in jedem Normalschnitt gegen den Mittelpunkt der Krümmung gerichtet ist, gegen das Innere der Flüssigkeit wirkt.

Bei einer nach aussen concaven Fläche  $A_1 B_1$  Fig. 98 ist der Normaldruck um diese Grösse kleiner als in der Ebene, da die auch hier gegen  $C_1$  gerichtete Oberflächenspannung nach aussen wirkt. Nennen wir nun den auf die Flächeneinheit bezogenen Normaldruck in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit  $K$ , so erhalten wir für den in einer gekrümmten Oberfläche vorhandenen Normaldruck<sup>1)</sup>

$$P = K + \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

worin das positive Vorzeichen für convexe, das negative Vorzeichen für concave Flächen gilt. Unterscheiden wir die Krümmung der Oberfläche, ob convex oder concav, dadurch, dass wir die Vorzeichen der Radien positiv

<sup>1)</sup> Der Satz wurde zuerst abgeleitet von *Thomas Young*. Philosophical Transactions of London Royal Society for 1805 p. 65; von *La Place*: Sur l'action capillaire. Supplément au X livre du traité de mécanique céleste; von *Poisson*: Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831; von *Gauss*: Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrilii. Commentat. societ. reg. Göttingen T. VII. 1832 p. 43 ff. Man sehe auch *Mousson* Poggend. Ann. Bd. CXLII. p. 405 ff.

für *convexe*, negativ für *concave* Radien wählen, so können wir in unserm Ausdrucke dem zweiten Gliede allgemein das positive Vorzeichen geben, also setzen

$$P = K + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Dass ein solcher Unterschied des Normaldruckes in nach aussen convexen und nach aussen concaven Flächen in der That vorhanden ist, zeigt eine bekannte Erscheinung an Seifenblasen. Die Wände einer kugelförmigen mit Luft gefüllten Seifenblase sind auf der äussern Seite *convex*, auf der innern *concav* gekrümmt. Auf der äussern Seite ist daher, wenn wir den Radius der Seifenblase mit  $R$  bezeichnen, der gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtete Druck

$$P = K + H \frac{1}{R},$$

auf der innern Seite der von dem Mittelpunkt fortgerichtete Druck

$$P_1 = K - H \frac{1}{R},$$

wenn wir den Radius der innern Kugelfläche wegen der sehr geringen Dicke der flüssigen Hülle gleich dem der äussern Kugelfläche setzen. Die beiden Drucke liefern als Resultirende einen gegen den Mittelpunkt gerichteten Druck

$$P - P_1 = 2 H \frac{1}{R}.$$

Man kann diesen Druck leicht wahrnehmen. Denn schliesst man das Rohr, durch welches man die Blasen dargestellt hat, mit dem Finger, so behält die Blase ihre ursprüngliche Grösse; wenn man das Rohr aber öffnet, so sieht man, wie die Kugel allmählig kleiner wird, indem jetzt die in der Blase vorhandene Luft jenem Drucke folgen und aus dem Rohr entweichen kann.

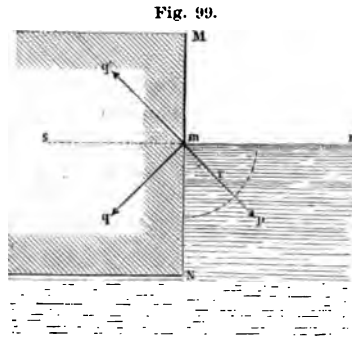
## §. 72.

**Einfluss der Wände.** Auch die festen Körper üben, wie wir sahen, auf die Flüssigkeitstheilchen eine anziehende Wirkung aus; es muss also auch an den Wänden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes zwischen den Theilen der festen Wand und den Flüssigkeitstheilchen eine Wechselwirkung stattfinden, wodurch dann eine Veränderung der freien Oberfläche der Flüssigkeit eintreten muss<sup>1)</sup>.

Sei, um dieses nachzuweisen,  $MN$  (Fig. 99) die Endfläche eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers und  $mn$  die Oberfläche der Flüssigkeit. Das gerade an der Wandfläche anliegende Flüssigkeitsmolekül wird nun von der gesammten Flüssigkeit angezogen, welche in dem vierten Theile einer mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kugel liegt, da nur dieser Theil der Anziehungssphäre des Moleküls  $m$  mit Flüssigkeit angefüllt ist. Die Resultirende dieser Anziehungen ist nach  $p$ , nach der Halbirungslinie

<sup>1) La Place, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céleste, daraus Gilbert, Annalen Bd. XXXIII.</sup>

des Winkels  $Nmn$  gerichtet. Sie sei gleich  $P$ . Das Molekül  $m$  wird nun aber auch von den Theilen der festen Wand angezogen und zwar von den



unterhalb  $ms$  gelegenen Theilen so, dass eine nach  $q$ , der Halbierungslinie des Winkels  $smN$  gerichtete Kraft  $Q$  resultirt, und von den über  $ms$  gelegenen Theilen der festen Wand so, dass ebenfalls eine Kraft von der Grösse  $Q$  resultirt, welche nach  $q'$ , der Halbierungslinie des Winkels  $smM$  gerichtet ist.

Das Theilchen  $m$  wird also ausser von der vertical abwärts wirkenden Schwere von drei Kräften angegriffen, von  $P$  nach  $p$  gerichtet, von  $Q$  nach  $q$  und von  $Q$  nach  $q'$  gerichtet.

Die Horizontal- und Verticalcomponenten sind

$$\begin{aligned} P \cdot \cos pmn &= P \cdot \cos 45^\circ \text{ horizontal nach } n \\ P \cdot \cos pmN &= P \cdot \cos 45^\circ \text{ vertical abwärts,} \end{aligned}$$

ferner senkrecht nach oben und unten

$$Q \cdot \cos qmN - Q \cdot \cos q'mM = Q \cdot \cos 45^\circ - Q \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

und horizontal nach  $s$

$$Q \cdot \cos qms + Q \cdot \cos q'ms = 2Q \cdot \cos 45^\circ.$$

Die Componente  $P \cdot \cos 45^\circ$ , welche in der Richtung der Schwere wirkt, vermehrt den verticalen Druck der Flüssigkeitstheilchen. Die drei Horizontalcomponenten setzen sich zu einer einzigen zusammen

$$(2Q - P) \cdot \cos 45^\circ.$$

Je nach der Grösse der Adhäsion der Flüssigkeit an dem festen Körper und der Cohäsion der Flüssigkeitstheile unter einander, kann nun diese Componente einen ganz verschiedenen Werth haben, sie kann gleich Null, oder gegen die feste Wand der Flüssigkeit, oder von ihr fort gerichtet sein. Denn es kann

$$2Q - P = 0, 2Q - P > 0, 2Q - P < 0 \text{ sein.}$$

Betrachten wir diese drei Fälle näher und untersuchen wir den Einfluss der verschiedenen Werthe auf die Gestalt der Oberfläche.

1) Ist zunächst  $2Q - P = 0$ , so ist die aus sämtlichen Kräften, welche auf die Oberfläche der Flüssigkeit einwirken, resultirende Kraft vertical gerichtet. Da nun im Gleichgewichtszustande die Oberfläche einer Flüssigkeit zu den wirkenden Kräften normal ist, so folgt, dass in diesem Falle die Oberfläche der Flüssigkeit auch an den Wänden der Gefässe horizontal bleibt, dass somit durch das Eintauchen des festen Körpers die Oberfläche der Flüssigkeit nicht geändert wird.

2) Ist  $2Q - P > 0$ , so wirken auf das Molekül  $m$  zwei Kräfte ein,

deren eine gegen  $s$ , die andere vertical gerichtet ist. Diese beiden Kräfte haben (Fig. 100) eine nach  $R$  gerichtete Resultante. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist im Gleichgewichtszustande zur Richtung der auf sie wirkenden Kraft normal, es muss daher die Richtung  $mn \perp mR$  mit der Oberfläche der Flüssigkeit in  $m$  zusammenfallen, oder  $mn$  muss an der Oberfläche im Punkte  $m$  Tangente sein. Die Oberfläche kann also in diesem Falle an der festen Wandfläche nicht mehr horizontal sein, sie muss dieselbe unter einem Winkel  $tmn$  schneiden. Da dieser Winkel, den wir mit  $\Theta$  bezeichnen wollen, nur von der Grösse der resultirenden Horizontalcomponente  $(2Q - P) \cdot \cos 45^\circ$  und dem um die Verticalcomponente der Oberflächenspannung vermehrten Gewichte des Moleküls  $m$  abhängt, so muss für ein und dieselbe Flüssigkeit und denselben festen Körper

$$\Theta = \text{const.}$$

sein, d. h. dieselbe Flüssigkeit muss Wände gleicher Substanz an allen Stellen unter demselben Winkel  $\Theta$  schneiden.

Die Anziehung der festen Wand wirkt nun nur auf die unendlich nahen Moleküle der Flüssigkeit. Indess dass durch Anwesenheit der festen Wand der Gleichgewichtszustand auch der weiter von der Wand entfernten Flüssigkeitsschichten geändert werden muss, ist nicht schwer einzusehen<sup>1)</sup>; denn die an der Wandfläche anliegende Flüssigkeitsschicht muss auch eine Aenderung ihrer Dichtigkeit erfahren. Wenn die Lage der einzelnen Moleküle im Innern der Flüssigkeit von den Anziehungen der umgebenden Moleküle abhängt, so ist auch klar, dass wenn an der Wandfläche eine vergrösserte Anziehung gegen die Wand hin auf die Flüssigkeit stattfindet, in der der Wandfläche nächsten Schicht mehr Flüssigkeitsmoleküle sich ansammeln als in andern vertical durch die Flüssigkeit gelegten Schichten. Die der Wand zunächst anliegende Schicht muss deshalb eine grössere Dichtigkeit haben als die folgenden Schichten. Diese Schicht muss daher auf die folgende wirken, wie die Wandfläche auf die erste Flüssigkeitsschicht. Dadurch muss also auch die zweite Schicht eine gegen die Horizontale geneigte Oberfläche erhalten, zugleich aber auch dichter werden als die übrigen Flüssigkeitsschichten. Die zweite Schicht muss demnach weiter auf eine dritte, diese auf eine vierte wirken u. s. f. Die gegen die Wand gerichtete horizontale Componente der Anziehung muss aber um so schwächer werden, je weiter eine Schicht gegen die Mitte der Flüssigkeit liegt, da die erste Flüssigkeitsschicht von der Wand eine stärkere Anziehung erfährt, als sie auf die zweite Schicht ausübt, und so jede Schicht von der der Wand näherliegenden stärker angezogen wird, als die folgende anzieht. Deshalb muss die Resultante  $R'$ , da die vertical herabziehende Kraft constant bleibt, sich immer mehr der verticalen nähern, bis sie schliesslich in einer gewissen Entfernung von der Wand, wo die Horizontalcomponente gleich Null wird,

Fig. 100.



<sup>1)</sup> Poisson, Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831. Im Auszuge von Link, Poggend. Ann. XXV u. XXVII.

mit der verticalen Richtung zusammenfällt. Die Oberfläche der Flüssigkeit muss daher eine stetig gekrümmte, nach oben concave Fläche bilden, erst in einiger Entfernung von der Wand in eine horizontale übergehen.

Der Versuch bestätigt diese Folgerungen; denn in einem Gefässen Wände von der Flüssigkeit benetzt werden, sehen wir immer, dass die Flüssigkeit an der Wand hinaufzieht, dass die Oberfläche in der Nähe der Wand gekrümmt ist.

Wenn der ersten festen Wand eine andere sehr nahe gegenüber liegt, wenn wir die Flüssigkeit z. B. in eine sehr enge Röhre, eine sogenannte Capillarröhre einschliessen, so muss sich dieselbe rings an den Wänden emporziehen, und die ganze Oberfläche muss dann, wenn die Röhre hinlänglich eng ist, gekrümmt sein. In cylindrischen Röhren muss diese Oberfläche eine Rotationsfläche sein, die wir erhalten, wenn wir den Querschnitt  $mm'$  (Fig. 100) um die Axe der Röhre rotiren lassen. Diese Oberfläche ist nahezu eine Kugelfläche, wir wollen sie als das Segment einer Kugel betrachten<sup>1)</sup>.

Fig. 101.



3) Wenn  $2Q - P$  kleiner als Null ist, so ist die horizontale Componente der aus den vereinigten Wirkungen der Adhäsion der Moleküle der Flüssigkeit und der festen Wandfläche resultirenden Kraft, welche nun aus der Wirkung der Schwere und der Horizontalcomponente hervorgeht, und auf das nächste Theilchen  $m$  wirkt, ist deshalb nach  $R$  (Fig. 101) gerichtet. Die auf der Kraft  $mR$  senkrechte Oberfläche der Flüssigkeit muss daher jetzt die Wandfläche unter einem Winkel  $mn$  schneiden, welcher kleiner als  $90^\circ$  ist. Aus diesen ähnlichen Betrachtungen wie vorhin folgt dann, dass die Schichten in der Nähe der Wand weniger dicht werden, die Oberfläche der Flüssigkeit in der Nähe der Wandflächen eine nach oben convexe Gestalt erhalten, und dass dieselbe in engen cylindrischen Röhren ein nach oben convexes Segment einer Kugelfläche bilden muss.

Die Grösse  $2Q - P$  ist die Differenz zwischen der Adhäsion der Flüssigkeit an die feste Wand und der Cohäsion der Flüssigkeitstheile. Die Oberfläche der Flüssigkeit muss daher in Gefässen, deren Wände nicht benetzt werden, eine convexe Gestalt annehmen. Dass dieses der Fall ist, ist bekannt. Man weiss z. B., dass das Quecksilber in Glasröhren stets einen Meniskus bildet.

### §. 73.

**Niveauperänderungen in capillaren Röhren.** Da, wie in §. 71 sahen, der molekulare Druck, den eine Flüssigkeitsoberfläche durch die Wirkung der Flüssigkeitsmoleküle auf sich selbst erfährt, verschieden ist je nach der Gestalt der Oberfläche, so folgt, dass durch die Veränderung der Oberfläche das Niveau einer Flüssigkeit in engen Röhren ein

<sup>1)</sup> Diese Annahme ist streng genommen nur für sehr enge Röhren gültig. Man sehe darüber ausser *Poisson* a. a. O. *Hagen*, Poggend. Annal. Bd. 1. *E. Desains*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. L1. *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. LXIII.

sein muss als in damit communicirenden weiten Röhren oder als in einem weiten mit Flüssigkeit gefüllten Gefäss, in welches die enge Röhre eingetaucht ist.

Beginnen wir mit dem Falle, wo die Röhre benetzt wird, die Flüssigkeitsoberfläche also concav ist.

Wenn die Oberfläche einer Flüssigkeit concav ist, so ist, wie wir sahen, der Druck, den die Flüssigkeitshaut nach dem Innern der Flüssigkeit ausübt, kleiner als bei ebenen Flächen. Wird daher in eine Flüssigkeitsmasse mit ebener Oberfläche  $MN$  (Fig. 102), z. B. Wasser, eine enge Röhre gestellt, deren Wände benetzt werden, so ist ausserhalb der Röhre der vertical herabgehende Druck, der aus der Schwere der Flüssigkeit und dem Normaldruck zusammengesetzt ist, grösser als im Innern der Röhre. Auswärts ist, wenn wir mit  $g$  den aus der Wirkung der Schwere hervorgehenden Druck bezeichnen, der vertical abwärts gehende Druck in jedem der Einheit gleichen Stücke der Oberfläche gleich  $g + K$ , im Innern der Röhre aber gleich  $g + K - q$ , wenn wir die Oberflächenspannung mit  $q$  bezeichnen. Legen wir durch die Flüssigkeit eine mit der Oberfläche parallele Ebene  $M'N'$ , so muss über dieser in der Röhre die Flüssigkeit soviel höher stehen als ausserhalb, dass das Gewicht der über dem äusseren Niveau gehobenen Flüssigkeit gleich ist der Differenz zwischen dem vertical abwärts gerichteten Drucke in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke des äusseren ebenen Niveaus und demselben in der Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre. Denn wir wissen, dass eine der Schwere unterworfenen Flüssigkeit nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn der Druck in allen Punkten einer horizontalen Schicht derselbe ist. Denken wir uns nun in  $c$  ein dem Querschnitt  $f$  der Röhre gleiches Flächenstück, so ist der dort wirksame Druck, wenn wir gleichzeitig mit  $s$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnen,

$$s \cdot f \cdot cd + f \cdot K.$$

Im Punkte  $b$  senkrecht unter der Röhre wirkt das Gewicht der Flüssigkeitssäule  $ba$  vom Querschnitt  $f$ , das Gewicht des Meniskus, welcher über der durch  $a$  gelegten Ebene gehoben ist, das mit  $m$  bezeichnet werde, und die Verticalcomponente der in der gekrümmten Fläche wirkenden Oberflächenspannung. Um zunächst die letztere zu bestimmen, denken wir uns ein Flächenelement  $\Delta f$  in der Oberfläche, welches mit der Horizontalebene den Winkel  $\varphi$  bildet. Der Normaldruck in diesem Elemente  $(K - q) \Delta f$  bildet dann mit der Verticalen denselben Winkel  $\varphi$ , und die verticale Componente ist somit

$$\cos \varphi (K - q) \Delta f.$$

$\cos \varphi \cdot \Delta f$  ist nun aber die horizontale Projection des Flächenelemen-

Fig. 102.





tes  $\Delta f$ ; somit ist die verticale Componente der in dem Flächenelement kenden Oberflächenspannung gleich dem Produkte aus dieser Spannung die horizontale Projection des Flächenelements. Was für dieses Element gilt, gilt für alle; somit ist die verticale Componente der Oberflächenspannung einfach gleich  $(K - q) \cdot f$ , da der Querschnitt der Röhre die horizontale Projection der Oberfläche in der Röhre ist.

Der in  $b$  wirksame Druck ist somit

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f,$$

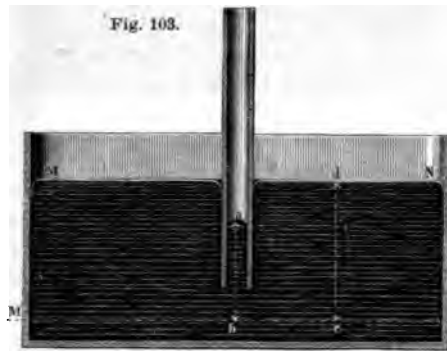
und die Bedingung des Gleichgewichts wird

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f = s \cdot f \cdot cd + f \cdot K$$

oder

$$s \cdot f (ab - cd) + m = q \cdot f.$$

Wird die Röhre von der Flüssigkeit nicht benetzt, tauchen wir eine Glasröhre in Quecksilber, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit



Röhre convex (Fig. 103) und ist nach dem Fröhe vertical abwärts gehende im Innern der Röhre grösser als ausserhalb, und es ist klar deshalb die Höhe der Flüssigkeit in der Röhre kleiner sein als ausserhalb.

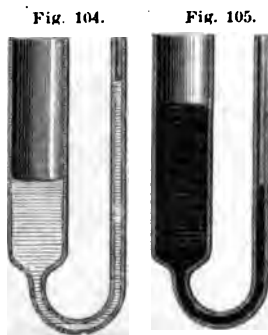
In ganz gleicher Weise vorhin folgt dann wieder der Gewichtsunterschied der Flüssigkeitssäulen  $cd \cdot s \cdot ab \cdot s \cdot f + m$  der Differenz

verticalen Drucke bei  $a$  und  $d$  gleich sein muss; es muss

$$s \cdot f (cd - ab) + m = q \cdot f$$

sein.

Diese Folgerungen lassen sich leicht durch den Versuch bestätigen. Tauchen wir eine enge Glasröhre in eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwände benetzt, so wird im Innern derselben die Oberfläche der Flüssigkeit concav, und die Flüssigkeit erhebt sich bedeutend über das Niveau der äusseren Flüssigkeit. Umgekehrt zeigt sich eine Depression bei concav



Oberfläche beim Eintauchen einer Röhre in nicht benetzende Quecksilber. Man kann diese Thatsache sehr anschaulich machen bei Anwendung U-förmig gebogener Glasröhren (Fig. 104, 105), deren einer Schenkel sehr weit, der andere sehr eng ist. Füllt man ein solches Rohr mit Quecksilber, so sieht man, wie in Fig. 104, dass das Quecksilber in dem engen Schenkel um vieles höher steht als im weiten, während die Oberfläche der Flüssigkeit in dem weiten Schenkel eine viel geringere Krümmung besitzt als in dem engen Schenkel. Umgekehrte zeigt sich, wenn man in das

ohr Quecksilber giesst. Das Quecksilber steht dann, wie Fig. 105, im Rohre viel tiefer als im weiten Rohre.

Durch einen andern Versuch kann man es sehr deutlich bestätigen, wie wir soeben nachwiesen, die Erhebung der Flüssigkeiten bei beiden, die Depression bei nicht benetzenden, nur von der Krümmung der Oberfläche abhängig ist. Versieht man ein weiteres Gefäss (Fig. 106) mit einer engen Röhre  $a$ , und taucht dieselbe so weit in Wasser, dass das

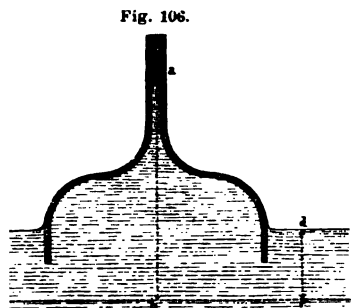


Fig. 106.



Fig. 107.

Ende der engen Röhre unter die Oberfläche des Wassers reicht, so dass das Wasser bis zu einer gewissen Höhe  $h$  über dem äussern Niveau; man nun das Gefäss aus der Flüssigkeit allmählig heraus, so muss die Höhe des Wassers in der engen Röhre das Wasser immerfort die Höhe  $h$  über dem Niveau des äussern Wassers besitzen, weil, wie wir sahen, die Höhe, bis zu der die Flüssigkeit ansteigt, proportional ist der durch die Krümmung der Oberfläche entstehenden Druckdifferenz. Und das muss selbst der Fall sein, wenn ein Theil des weiten Gefässes aus der Flüssigkeit hervorragt. Denn der Druck in  $b$  hängt, wie wir früher sahen, nicht ab von der Form des Gefässes, sondern nur von der Höhe  $ba$  der Flüssigkeit über  $b$ . Wie der Versuch zeigt, kann man auf diese Weise ziemlich grosse Flüssigkeitssäulen

erhalten. Taucht man dieses Gefäss umgekehrt, wie in Fig. 107, in Quecksilber, so ist die Depression  $ab$  des Quecksilbers dieselbe, als wenn man eine Glasröhre von der Weite der engen angesetzten Röhre in Quecksilber eintauchen würde, wie es nach dem Vorigen die Theorie verlangt.

Einen noch evidentern Versuch führt La Place in seiner „Théorie capillaire“ an.

Taucht man ein heberförmiges Glasröhrchen wie  $ABC$  (Fig. 108), senkrecht so tief in Wasser, dass der kürzere Schenkel ganz untergetaucht ist, so steigt das Wasser in dem längeren Schenkel bis zu einer gewissen Höhe  $a$  über das Niveau der äussern Flüssigkeit  $AJ$ . Wenn man nun das Röhrchen heraus, so bildet sich bei  $A$  ein convexer Tropfen, und sofort steigt die Flüssigkeit in dem längeren Schenkel höher bis  $b$ , weil jetzt in der engen Oberfläche bei  $A$  der vertical abwärts

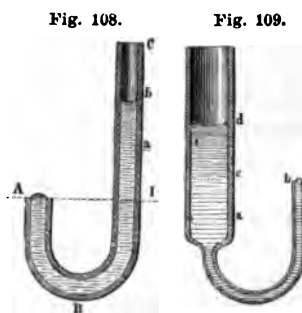


Fig. 108.

Fig. 109.

gerichtete Druck grösser ist als vorher in der ebenen Oberfläche der äusseren Flüssigkeit. Nimmt man nun den Tropfen vorsichtig fort, so wird die Convexität bei  $A$  kleiner, und man sieht dann, dass dem entsprechend die Flüssigkeit in  $BC$  sinkt; hat man schliesslich die Begrenzungsfläche der Flüssigkeit in  $A$  durch fortgesetzte Wegnahme des Tropfens eben gemacht, so ist die Höhe der Flüssigkeit in  $BC$  wieder ebenso, wie sie war, als das Röhrchen in das Wasser eingetaucht war. Wenn man dann durch vorsichtiges Zulegen von Tröpfchen in  $A$  die frühere Convexität wieder herstellt, so steigt auch das Wasser in  $BC$  wieder zu seiner frühern Höhe an.

Einen ähnlichen Versuch gibt La Place an, um zu zeigen, dass die Depression und Erhebung der Flüssigkeit der gleichen Ursache angehören.

Giesst man in eine Glasröhre (Fig. 109), bei welcher der weitere Schenkel länger ist als der enge, Alkohol, so wird zunächst der Alkohol in dem engen Schenkel höher stehen als im weiten. Durch langsames und vorsichtiges Nachtröpfeln von Alkohol bewirkt man nun, dass die Flüssigkeit in dem engen Schenkel gerade das Ende erreicht; zunächst bleibt die Oberfläche concav, und der Alkohol steht im weitem Schenkel gerade soviel tiefer als vorher. Durch weiteres vorsichtiges Nachtröpfeln kann man dann bewirken, dass die Oberfläche der Flüssigkeit bei  $b$  erst eben, dann wie bei dem vorigen Versuche ein convexer Tropfen wird. Man beobachtet dann auch, dass bei ebener Begrenzung in  $b$  die Flüssigkeit im weiten Schenkel nahezu die gleiche Höhe hat als im engen, und bei convexer, dass die Flüssigkeit in dem weiten viel höher steht; ein Beweis, dass die Erhebung oder Depression in einer Röhre nur von der Gestalt der Oberfläche und somit von der Oberflächenspannung abhängt.

#### §. 74.

**Steighöhen in verschiedenen Räumen.** Wir gelangten vorhin zu dem Resultat, dass in einer capillaren Röhre das Gewicht der gehobenen oder deprimierten Flüssigkeit gleich sein muss der Druckdifferenz in der gekrümmten Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre und in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke der ebenen Oberfläche.

Behalten wir die vorhin gebrauchte Bezeichnung bei und setzen die Differenz  $ab - cd$ , die Steighöhe der Flüssigkeit gleich  $h$ , so erhalten wir zur Bestimmung derselben

$$s f h + m = q \cdot f,$$

wobei zu beachten ist, dass  $q$  die mittlere Oberflächenspannung der flüssigen Oberfläche in der Röhre ist, das heisst die Oberflächenspannung für die Einheit der Fläche, vorausgesetzt, dass dieselbe an allen Punkten der Oberfläche die gleiche ist.

Nehmen wir cylinderförmige Röhren von solchem Querschnitt, dass die Oberfläche im Innern derselben ein Kugelsegment ist, so erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung der Oberflächenspannung

$$q = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

da in einer Kugel alle Krümmungsradien und an allen Stellen gleich und gleich dem Radius  $\rho$  der Kugel sind

$$q = \frac{H}{\rho},$$

omit für das Gewicht der in einer solchen Röhre gehobenen Flüssigkeit

$$s f h + m = \frac{H}{\rho} \cdot f \dots (1).$$

Das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit hängt somit ab von dem Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche und dem Querschnitt der Röhre. Dieser Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche lässt sich direkt aus dem Radius der Röhre bestimmen. Ist *ab* (Fig. 110) die Röhre und *u s t* die Oberfläche der Flüssigkeit, *o* der Mittelpunkt der kugelförmigen Oberfläche und der Radius der Röhre gleich *r* so ist

$$ou = \rho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{r}{\cos ouv}.$$

Legen wir nun im Punkte *u* an die Oberfläche der Flüssigkeit eine Tangente, so bildet diese mit der Röhrenwand den Winkel  $\Theta$ , welcher für dieselbe Flüssigkeit  $\Theta$  für dasselbe Material der Röhrenwand constant ist,  $\Theta$  der, wie wir sahen, unter dieser Voraussetzung constante Winkel ist, unter welchem die Oberfläche der Flüssigkeit die Wand der Röhre schneidet. Da nun *ou* senkrecht zur Tangente und *uv* senkrecht zur Röhrenwand *ua* ist, so folgt

$$ou = \rho = \frac{r}{\cos \Theta}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die oben erhaltene Gleichung für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit ein, so wird

$$s f h + m = H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r} \dots (2).$$

Da nun der Querschnitt der Röhre

$$f = r^2 \pi,$$

ist auch

$$s f h + m = H \cdot \cos \Theta \cdot \pi \cdot r,$$

oder

$$\frac{s f h + m}{2 \pi r} = \frac{H}{2} \cdot \cos \Theta \dots (3).$$

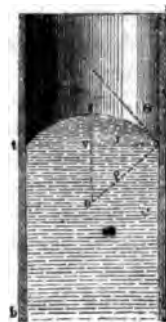
Der Nenner auf der linken Seite ist der innere Umfang der Röhre; der Quotienten aus dem Gewichte der gehobenen Flüssigkeit und dem Röhrenumfang können wir somit bezeichnen als das von der Längeneinheit der Röhrenlinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand gehobene Flüssigkeitsgewicht, und gelangen dann zu dem Satze, dass dieses Gewicht unabhängig ist von der Weite der Röhre und nur abhängt von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und derjenigen der festen Wand, da die Constanten *H* und  $\Theta$  nur von dieser abhängen.

Dividiren wir die Gleichung (2) durch *f*, so wird

$$s h + \frac{m}{f} = H \cdot \cos \Theta \frac{1}{r};$$

den vorausgesetzten engen Röhren können wir nun das Gewicht des

Fig. 110.



Meniskus vernachlässigen und erhalten dann

$$s h = H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos \Theta \cdot \frac{1}{r} = a^2 \cos \Theta \cdot \frac{1}{r},$$

wenn wir, nach der von Poisson eingeführten Bezeichnung,  $\frac{H}{s} = a^2$  setzen.

Es folgt also, dass bei hinreichend engen cylindrischen Röhren des selben Materials die Steighöhen oder Depressionen einer Flüssigkeit dem Halbmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Dieser Satz, den schon ältere Physiker aus ihren Beobachtungen ableiteten, so der Jesuit Honoratus Fabry<sup>1)</sup> um die Mitte des 17. Jahrhunderts, ist in neuerer Zeit durch sehr genaue Beobachtungen bestätigt worden, zunächst von Gay-Lussac, welcher auf Anregung von La Place Versuche zur Prüfung der Theorie anstellte<sup>2)</sup>. Die Röhren, welche Gay-Lussac anwandte, waren sorgfältig calibriert und ihr Durchmesser aus dem Gewichte eines Quecksilberfadens von gemessener Länge folgendermaassen bestimmt. Ist die Länge des Quecksilberfadens in der Röhre gemessen gleich  $l$ , das Gewicht desselben gleich  $g$ , das specifische Gewicht des Quecksilbers gleich  $s$  und der Radius der Röhre gleich  $r$ , so ist

$$g = r^2 \pi l s$$

$$r = \sqrt{\frac{g}{\pi \cdot l \cdot s}}$$

Die Röhren, in welchen die Steighöhen verglichen wurden, waren nun zugleich in einer durchbohrten Metallplatte befestigt, welche auf den eben abgeschliffenen Rand eines grossen Glasgefässes gelegt wurde. Das Gefäss konnte durch Stellschrauben so gerichtet werden, dass die Ebene, auf der die Metallplatte lag, genau horizontal und somit die Röhren genau vertical waren. Nun wurde das Gefäss mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die Röhren im Innern durch mehrmaliges Aufsaugen der Flüssigkeit vorsichtig benetzt und dann die Höhen der Flüssigkeitssäulen in den Röhren gemessen.

Die von Gay-Lussac erhaltenen Resultate sind folgende:

Flüssigkeit	Durchmesser der Röhre $2 \cdot r$	Steighöhe $h$	$2rh$
Wasser . . . . .	{ 1,294 Millim.	23,379 Millim.	30,262
	{ 1,903 „	15,903 „	30,263
Alkohol vom specif. Gew. 0,8196	{ 1,294 „	9,398 „	12,164
	{ 1,903 „	6,389 „	12,158

Man sieht, dass die Werthe für  $2rh$  bei den verschiedenen Beobachtungen fast genau dieselben sind, dass also wirklich die Steighöhen der Flüssigkeit in verschiedenen Röhren desselben Materials dem Durchmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

<sup>1)</sup> *Gehler's physikalisches Wörterbuch.* Artikel Capillarität.

<sup>2)</sup> *Gay-Lussac, Versuche in La Place Théorie capillaire.* Suppl. zum 10. Buche der *Mécanique céleste.* *Gilbert's Annalen* Bd. XXXIII. p. 316 ff.

Dasselbe Resultat bestätigen die Versuche von Brunner<sup>1)</sup>, Desains<sup>2)</sup>, Bède<sup>3)</sup> u. a. für Röhren, deren Querschnitte hinreichend klein sind, so dass die Voraussetzung einer kugelförmigen Oberfläche erfüllt ist.

Die für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit erhaltene Gleichung

$$s h f + m = q \cdot f$$

können wir immer unmittelbar anwenden, wenn in capillaren Räumen die Krümmung der Oberfläche und damit die Oberflächenspannung an allen Stellen dieselbe ist; es ist das z. B. auch der Fall zwischen zwei einander sehr nahe gegenüber gestellten parallelen Platten. Dort ist die Flüssigkeitsoberfläche ein Theil einer Cylinderfläche, indem nach der einen Richtung hin die Flüssigkeit gar keine Begrenzung hat. Ein durch die Flüssigkeitsoberfläche parallel den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche demnach in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Schnittes ist unendlich gross. Ein senkrecht zu den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche dagegen in einem Kreisbogen, dessen Radius  $\rho$  sei. Die Gleichung für die Oberflächenspannung

$$q = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)$$

geht daher in diesen Fällen über in

$$q = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{r}$$

Ist nun (Fig. 111)  $ab$  ein Durchschnitt senkrecht zur Ebene der Platten,  $os = ou = \rho$  der Krümmungsradius des Schnittes,  $d$  der Abstand der Platten, so erhalten wir auch hier wieder

$$\rho = \frac{uv}{\cos \theta} = \frac{d}{2 \cdot \cos \theta}$$

$$q = H \cdot \cos \theta \cdot \frac{1}{d}$$

und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit wird

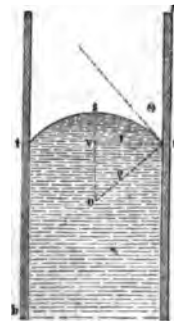
$$s h f + m = H \cos \theta \frac{1}{d} \cdot f.$$

Nehmen wir nun ein Stück von der Länge  $l$ , so ist  $l \cdot d = f$  gleich dem Querschnitt des auf dieser Länge zwischen den Platten eingeschlossenen Raumes, und es wird

$$\frac{s h f + m}{2 l} = \frac{H}{2} \cdot \cos \theta.$$

Da die Oberfläche der Flüssigkeit jede der beiden Platten in der Länge  $l$  berührt, bedeutet die linke Seite der Gleichung wieder das Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie gehobenen Flüssigkeit; es ergibt sich für diese somit derselbe Werth wie in capillaren Röhren, der nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand abhängt.

Fig. 111.



<sup>1)</sup> Brunner, Poggendorff's Annalen Bd. LXX.

<sup>2)</sup> E. Desains, Annales de chim. et de phys. III. Sér. t. LI.

<sup>3)</sup> Bède, Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles. T. XXX. 1861.

Für die Steighöhe  $h$  erhalten wir

$$h + \frac{m}{s} = \frac{H}{s} \cdot \cos \Theta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cos \Theta \frac{1}{d},$$

worin für hinreichend kleine Werthe von  $d$  das Gewicht  $m$  des Meniskus ausser Acht gelassen werden kann.

Die Steighöhe zwischen zwei parallelen Platten ist sonach umgekehrt proportional dem Abstände der beiden Platten; oder die Steighöhe zwischen parallelen Platten ist halb so gross als in Röhren gleichen Durchmessers. Der Versuch bestätigt dies; denn Gay-Lussac fand bei den schon vorhin erwähnten Messungen für einen Abstand der Platten von 1,069 Millimeter die Steighöhe des Wassers gleich 13,574 Millimeter, woraus das Produkt  $dh = 14,524$  sich ergibt, welches nur wenig von der Hälfte des Werthes von  $2rh = 30,262$  abweicht.

Ist die Krümmung der Oberfläche in einem Raume nicht an allen Stellen dieselbe, so lässt sich das Gewicht der ganzen gehobenen Flüssigkeit nicht so einfach berechnen, wohl aber die Steighöhe an irgend einer Stelle dieses Raumes. Denn ist für irgend ein Flächenelement  $df$  der grösste Krümmungsradius  $R$ , der kleinste  $R_1$ , so gilt für dieses unmittelbar die §. 72 abgeleitete Gleichung

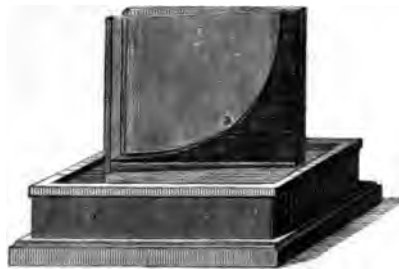
$$s h df = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) df,$$

da, wenn wir das Flächenelement uns unendlich klein denken, das Gewicht des Meniscus gleich Null ist; es ergibt sich daraus

$$s h = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \quad h = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Man kann hiernach z. B. sehr leicht die Steighöhen an den verschiedenen Stellen des Zwischenraumes zwischen zwei Platten erhalten, welche wie Fig. 112 so aufgestellt sind, dass sie sich in einer verticalen Linie schneiden, so dass also ihre einander zugewandten Flächen mit einander

Fig. 112.



einen sehr kleinen Winkel bilden. Bezeichnen wir den Abstand  $a$  eines Punktes in der Halbierungsebene des Winkels von dem Scheitel des Winkels mit  $x$ , so ist der Abstand  $d$  der Platten in diesem Punkte

$$d = c \cdot x,$$

wenn  $c$  eine Constante bedeutet, deren Werth von der Neigung der Platten gegen einander abhängt. Da wir den Winkel, den die Platten bilden,

als klein voraussetzen, so ist der Abstand der Platten überall so klein, dass wir den senkrecht zur Halbierungsebene des Winkels durch die Oberfläche geführten Schnitt als einen Kreisbogen ansehen dürfen, dessen Radius dann gerade wie bei parallel gestellten Platten gegeben ist durch

$$r = \frac{d}{2 \cos \Theta} = \frac{cx}{2 \cos \Theta}$$

Dieser Krümmungsradius ist überall der kleinste; die Halbierungsebene des Winkels schneidet die Oberfläche nach der schwächsten Krümmung, deren Radius ein überall so grosser ist, dass wir seinen reciproken Werth gegenüber dem reciproken Werth des oben bestimmten kleinsten Krümmungsradius vernachlässigen dürfen. Dann ergibt sich für die Höhe  $h$  in einem Abstände  $x$  von der Schnittlinie der Platten

$$h = \frac{a^2 \cos \Theta}{cx}$$

Es ergibt sich somit, dass die Steighöhen der Entfernung des betrachteten Punktes  $a$  von dem Scheitel des Winkels umgekehrt proportional sind, so dass die Halbierungsebene des Winkels die Oberfläche in einer gleichzeitigen Hyperbel schneidet, deren Asymptoten die Verticale, in welcher die Innenseiten der Platten sich schneiden, und die Horizontale sind, welche der Halbierungsebene der Winkel liegt. Denn es werden

$$\text{für } x = 0 \quad h = \infty \quad \text{und für } h = 0 \quad x = \infty.$$

Eine Messung der zusammengehörigen Werthe von  $h$  und  $x$  bei der g. 112 dargestellten Zusammenstellung bestätigt diese Folgerung.

In ähnlicher Weise können wir die Steighöhe an einer verticalen ebenen Wand, die Gestalt der Oberfläche der an der Wand emporgehobenen Flüssigkeit und das Gewicht dieser Flüssigkeit erhalten. Sei Fig. 113  $AB$  ein Durchschnitt der verticalen ebenen Wand, und  $CD$  ein Durchschnitt durch die Oberfläche der an der Wand emporgezogenen Flüssigkeit. Die Steighöhe  $h$  der Flüssigkeit in einem Punkte  $P$  ist

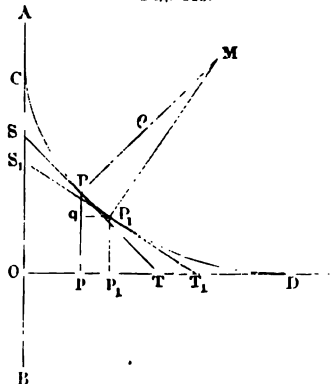
$$h = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Ist die Wand eben, so schneidet ein an der Wand parallel geführter Schnitt die Oberfläche in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Schnittes ist also unendlich gross, sein reciproker Werth somit gleich Null. Wir erhalten somit für die Steighöhe im Punkte  $P$ , wenn wir den Krümmungsradius des Schnittes  $CD$  im Punkte  $P$  mit  $\rho$  bezeichnen

$$h = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Beziehen wir nun die Schnittcurve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Punkte  $O$  liegt, wo die passend verlängerte horizontale Flüssigkeitsfläche die Wand schneiden würde, und dessen Axen die horizontale  $OD$  und die verticale  $OA$  ist, so würden wir die Gestalt der Schnittes  $CD$  und damit die der flüssigen Oberfläche erhalten, wenn wir den Krümmungsradius der Schnittcurve im Punkte  $P$  durch die Coordinaten dieses Punktes  $Pp = h$  und  $pO = x$  ausdrücken würden. Die Durchführung dieser Rechnung ist aber ohne ausgedehnte Anwendung der Differentialrechnung nicht möglich; wir begnügen uns deshalb damit, die Steighöhe

Fig. 113.





höhe in einer etwas andern Weise auszudrücken, welche uns gestattet, die Steighöhe im Punkte  $C$ , wo die Schnittcurve die Wand schneidet, und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit zu berechnen.

Wir drücken zu dem Ende den Krümmungsradius  $\rho$  aus durch den Winkel  $\chi$ , welchen die im Punkte  $P$  an die Schnittcurve gelegte Tangente  $ST$  mit der obern Seite der Axe  $OA$  bildet, also durch den Winkel  $TSA$ . Für ein unendlich kleines zwischen den Punkten  $P$  und  $P_1$  gelegenes Stück  $ds$  der Schnittcurve fällt dieselbe mit dem an  $P$  gelegten Krümmungskreise zusammen. Ist also  $M$  der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und bezeichnen wir den Winkel  $PMP_1$ , den die beiden von  $M$  nach  $P$  und  $P_1$  gezogenen Radien mit einander bilden, mit  $d\tau$ , so ist

$$ds = \rho \cdot d\tau$$

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}$$

Legen wir nun in dem Punkte  $P_1$  die Tangente  $S_1T_1$  an die Schnittcurve, so ist, da die Tangenten eines Kreises zu den Radien senkrecht sind, der Winkel  $d\tau$ , den die beiden Radien mit einander bilden, gleich dem, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber gleich der Abnahme, welche der Winkel  $\chi$  erfährt, welchen die Tangente  $ST$  mit  $OA$  bildet, wenn dieselbe anstatt an den Punkt  $P$  an den folgenden Punkt  $P_1$  gelegt wird. Denn bildet die Tangente  $ST$  mit  $OA$  den Winkel  $\chi$ , die Tangente  $S_1T_1$  den Winkel  $\chi'$ , so ist  $\chi$  der Aussenwinkel des von den Tangenten und dem Stücke  $SS_1$  gebildeten Dreiecks, dessen einer dem Aussenwinkel gegenüberliegende Winkel  $\chi$ , dessen anderer Gegenwinkel der von den Tangenten gebildete Winkel ist. Bezeichnen wir demnach die Aenderung des Winkels, wenn wir auf der Curve fortschreiten, mit  $d\chi$ , so folgt dass  $\chi' = \chi - d\chi$ , so folgt

$$d\tau = \chi - (\chi - d\chi) = d\chi,$$

somit

$$\rho = \frac{ds}{d\chi}$$

Ziehen wir nun von dem Punkte  $P_1$  die Senkrechte  $P_1q$  auf die Ordinate  $Pp$ , so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke  $PP_1q$  der Winkel  $qPP_1 = 180^\circ$ , somit

$$\frac{Pq}{PP_1} = \cos(180^\circ - \chi) = -\cos \chi.$$

$Pq$  ist nun die Aenderung der Steighöhe  $h$ , wenn wir in der Schnittcurve von einem Punkte zu dem nächstfolgenden übergehen. Setzen diese Aenderung gleich  $dh$ , so wird, da  $PP_1 = ds$ ,

$$\frac{dh}{ds} = -\cos \chi: \quad ds = -\frac{dh}{\cos \chi}$$

Damit wird dann

$$\rho = -\frac{dh}{\cos \chi d\chi}$$

und

oder

$$2 h \cdot dh = - a^2 \cos \chi \, d\chi.$$

Da sich nun  $h$  um  $dh$  ändert, wenn sich  $\chi$  um  $d\chi$  ändert, so folgt aus dieser Gleichung

$$h^2 = C - a^2 \cdot \sin \chi,$$

worin  $C$  irgend eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. Denn nach dieser letzten Gleichung ist

$$\begin{aligned} (h + dh)^2 - h^2 &= C - a^2 \sin (\chi + d\chi) - (C - a^2 \sin \chi) \\ 2h dh &= - a^2 \cos \chi \, d\chi, \end{aligned}$$

wenn wir  $dh^2$  vernachlässigen,  $\cos d\chi = 1$ ,  $\sin d\chi = d\chi$  setzen.

Die Constante  $C$  bestimmt sich, wenn wir beachten, dass dort, wo die Flüssigkeit horizontal, somit  $\chi = 90^\circ$  ist, die Steighöhe  $h = 0$  ist, somit  $0 = C - a^2$ ;  $C = a^2$ .

Damit wird

$$h^2 = a^2 (1 - \sin \chi).$$

In dem Punkte  $C$ , in welchem die Schnittcurve die Wand schneidet, ist der Winkel  $\chi$  gleich dem Winkel  $\Theta$ ; dort wird somit die Steighöhe  $h_0$

$$h_0 = a \cdot \sqrt{1 - \sin \Theta} = \sqrt{\frac{H}{s}} (1 - \sin \Theta).$$

Die Steighöhe hängt also nur ab von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand.

Das Volumen der an einer Wandstrecke von der Länge  $l$  gehobenen Flüssigkeit erhalten wir, wenn wir die Fläche  $CBO$  mit der Länge  $l$  multipliciren. Die Fläche  $CBO$  ist nun gleich der Summe aller der unendlich kleinen Vierecke  $Pp p_1 P_1$ , in welche wir die Fläche zerlegen, wenn wir uns von allen Punkten  $P$  der Curve die Ordinaten  $Pp$  gezogen denken. Nennen wir die Abstände dieser Ordinaten  $dx$ , so ist  $h \cdot dx$  der Flächeninhalt eines jeden solchen Vierecks, und die Summe aller Produkte  $h \, dx$ , wenn  $h$  von  $h_0$  dem Werthe an der Wand bis zu 0 abnimmt, liefert uns dann die ganze Fläche. Ersetzen wir in dem Produkte  $h \, dx$ ,  $h$  durch den aus der Gleichung

$$h = - \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \frac{d\chi}{dh}$$

sich ergebenden Werth, so wird

$$h \cdot dx = - \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \cdot d\chi \cdot \frac{dx}{dh}$$

In diesem Ausdrücke ist nun

$$\frac{dx}{dh} = \frac{qP_1}{qP} = \text{tang} (180 - \chi) = - \text{tang} \chi;$$

somit wird

$$h \, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \cdot \text{tang} \chi \cdot d\chi = \frac{a^2}{2} \sin \chi \, d\chi,$$

und die Fläche  $CDO$  wird

$$CDO = \int_{\chi = \Theta}^{\chi = \frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \sin \chi \, d\chi,$$

da dem Werthe  $x = 0$  oder  $h = h_0$  der Werth  $\chi = \Theta$  und dem Werthe  $h = 0$  der Werth  $\chi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$  entspricht. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen ist nun

$$\frac{a^2}{2} \sin \chi d\chi = - \left\{ \frac{a^2}{2} \cos (\chi + d\chi) - \cos \chi \right\},$$

wie man unmittelbar erhält, wenn man den Cosinus der Summe entwickelt und  $\cos d\chi = 1$ ,  $\sin d\chi = d\chi$  setzt. Deshalb wird

$$CDO = - \frac{a^2}{2} \left\{ \cos 90^\circ - \cos \Theta \right\} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos \Theta.$$

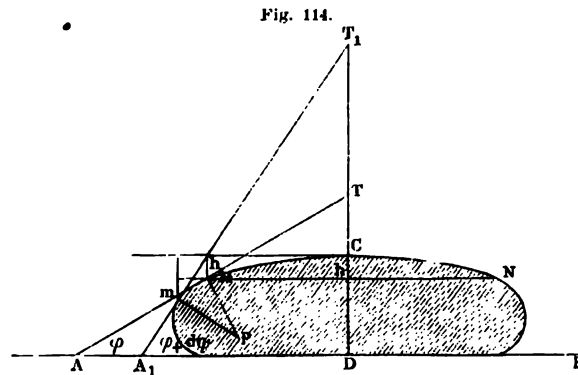
Das für die Länge  $l$  gehobene Volumen erhalten wir, wenn wir diese Fläche mit  $l$  multipliciren, und das Gewicht, wenn wir das Volumen mit der Dichtigkeit  $s$  der Flüssigkeit multipliciren. Das für die Längeneinheit gehobene Flüssigkeitsgewicht wird demnach

$$G = \frac{a^2 s}{2} \cdot \cos \Theta = \frac{H}{2} \cdot \cos \Theta.$$

Wir gelangen also auch hier zu demselben Resultat, dass das Gewicht der an der Längeneinheit gehobenen Flüssigkeit nur von den beiden Constanten  $H$  und  $\Theta$  abhängig ist, ein Satz, der ganz allgemein gilt, welches auch die Gestalt des Raumes ist, in welchem die Flüssigkeit emporsteigt.

### §. 75.

**Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene.** Wenn man auf eine horizontale Ebene eine Flüssigkeit möglichst langsam auffliessen lässt, so sammelt sich dieselbe auf der Ebene in Form von Tropfen an, deren Gestalt ebenfalls durch die Cohäsion der Flüssigkeit und ihre Adhäsion an der Substanz der Unterlage bedingt ist. Zunächst erkennt man leicht, dass ein solcher Tropfen durch der Ebene parallele Schnitte in Kreisen geschnitten werden muss, dass also seine Oberfläche eine Rotationsfläche sein muss; denn auch bei dem Tropfen ist die Bedingung des Gleichgewichts, dass in



allen Punkten der Oberfläche die normal zu derselben nach innen und nach aussen gerichteten Kräfte einander das Gleichgewicht halten müssen. Denken wir uns nun durch einen Tropfen (Fig. 114) eine mit der Unterlage  $AB$  parallele Ebene  $MN$  gelegt, so ist in den Punkten der Oberfläche, welche von dem Schnitte getroffen werden, der von innen nach aussen gerichtete Druck überall derselbe und zwar gleich dem Gewichte einer

flache, welche von dem Schnitte getroffen werden, der von innen nach aussen gerichtete Druck überall derselbe und zwar gleich dem Gewichte einer

Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich ist dem Abstände des höchsten Punktes  $C$  des Tropfens von der Ebene  $MN$ . Es muss deshalb auch in allen Punkten des Schnittes der normal nach innen gehende Druck derselbe, oder es muss die Oberfläche in allen Punkten des Schnittes  $MN$  gleich gekrümmt sein. Das ist aber nur der Fall, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe durch den Scheitel  $C$  des Tropfens geht.

Zur Untersuchung der Gestalt des Tropfens genügt es deshalb, die Gestalt einer durch die Axe  $CD$  des Tropfens gelegten Schnittcurve zu bestimmen.

Wir gelangen dazu in folgender Weise. Der im Punkte  $M$  gegen das Innere des Tropfens gerichtete Normaldruck ist bezogen auf die Flächeneinheit

$$P = K + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Diesem Drucke hält der an derselben Stelle von innen nach aussen gerichtete Druck das Gleichgewicht, der sich zusammensetzt aus dem Normaldruck in dem höchsten Punkte des Tropfens und dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, und deren Höhe gleich ist dem verticalen Abstände  $h$  des höchsten Punktes des Tropfens von dem Punkte  $M$ .

Ist der Tropfen nicht zu klein, so ist im Punkte  $C$  die Oberfläche des Tropfens eine horizontale Ebene; der Normaldruck ist somit gleich  $K$ . Ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich  $s$ , so ist der von innen nach aussen gerichtete Druck

$$P = K + h \cdot s.$$

Damit wird die die Gestalt der Oberfläche liefernde Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Ist die Tropfengrösse ziemlich beträchtlich, so kann man den reciproken Werth des Krümmungsradius jenes Schnittes, den wir in  $M$  senkrecht zu dem Schnitte  $MCND$  legen, vernachlässigen; bezeichnen wir dann den Krümmungsradius des Schnittes  $MCND$  im Punkte  $M$  mit  $\varrho$ , so wird die Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Wir können nun, gerade so wie im vorigen Paragraphen, den Werth von  $\varrho$  durch  $h$ , den Winkel  $\varphi$ , welchen die in  $M$  an den Schnitt gelegte Tangente mit der Horizontalen bildet, und den Zuwachs, welchen dieser Winkel  $\varphi$  erfährt, wenn wir vom Punkte  $M$  zu dem nachfolgenden Punkte  $m$  des Schnitts übergehen, dessen Tiefe unterhalb der an  $C$  gelegten Tangente  $h + dh$  ist, ausdrücken. Ist nämlich die Länge des Elementes  $Mm$  gleich  $ds$ , und der Winkel, den die beiden nach  $M$  und  $m$  gezogenen Krümmungsradien im Krümmungsmittelpunkte mit einander bilden,  $d\tau$ , so ist zunächst wieder

$$ds = \varrho d\tau.$$

Nun ist  $d\tau$  gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten  $AT$  und  $A_1T_1$  mit einander bilden, von denen die erste im Punkte  $M$ , die zweite im

Punkte  $m$  an den Schnitt gelegt ist. Dieser Winkel ist aber gleich dem Zuwachs  $d\varphi$  des Winkels  $\varphi$ , den die Tangente mit der Horizontalen bildet. Demnach ist

$$ds = \rho d\varphi.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{dh}{ds} = \sin \varphi;$$

somit ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin \varphi d\varphi}{dh}$$

und

$$2h dh = \frac{H}{s} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Daraus ergibt sich aber

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos \varphi + \text{const.}$$

Denn da  $h$  um  $dh$  wächst, wenn  $\varphi$  um  $d\varphi$  zunimmt, so folgt aus der letzten Gleichung

$$(h + dh)^2 - h^2 = -\left\{ \frac{H}{s} \cdot \cos(\varphi + d\varphi) - \frac{H}{s} \cdot \cos \varphi \right\},$$

da die hinzugefügte Constante durch die Aenderung von  $\varphi$  sich nicht ändert. Entwickeln wir die letzte Gleichung, so wird

$$2h dh = -\frac{H}{s} \sin \varphi d\varphi$$

gleich der von uns abgeleiteten Gleichung.

Zur Bestimmung der Constanten erhalten wir, da für den obersten Punkt des Tropfens, für welchen  $h = 0$  ist, auch der Winkel  $\varphi$  gleich  $0$  wird, da die in  $C$  an den Schnitt gelegte Tangente horizontal ist,

$$0 = -\frac{H}{s} + \text{const.}$$

$$\frac{H}{s} = \text{const.},$$

somit

$$h^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \varphi).$$

Um die Höhe des ganzen Tropfens zu erhalten, müssen wir für  $\varphi$  den Winkel einsetzen, unter welchem der Schnitt des Tropfens die horizontale Fläche schneidet. Ein genaueres Eingehen auf die Theorie der Capillarität beweist nun <sup>1)</sup>, dass nicht nur, wie wir §. 72 zeigten, eine verticale Wand von einer Flüssigkeit unter immer demselben constanten Winkel geschnitten wird, sondern dass der Schnittwinkel oder Randwinkel, wie wir ihn nennen, immer denselben Werth hat, welches auch die Neigung der Wand ist, vorausgesetzt nur, dass wir dieselbe Flüssigkeit und dieselbe Wand haben. Der Winkel, unter dem die Schnittcurve des Tropfens die Unterlage schneidet, ist somit der für diese Flüssigkeit und die Substanz der Unterlage constante Randwinkel. Als Randwinkel  $\Theta$  bezeichneten wir im vorigen Paragraphen den Winkel, welchen die Oberfläche mit der Wand ausserhalb der Flüssigkeit bildet, für den tiefsten Punkt des Tropfens ist also

<sup>1)</sup> Man sehe unter Andern: *Mousson*, Poggend. Ann. Bd. CXLII.

$$\varphi = 180^\circ - \Theta;$$

ist wird die Höhe  $T$  des Tropfens gegeben durch

$$T^2 = \frac{H}{s} (1 + \cos \Theta).$$

Für Flüssigkeiten, welche die Wand benetzen, ist der Winkel  $\Theta$  immer kleiner als  $90^\circ$ , da diese Flüssigkeiten an einer verticalen Wand eine concave Oberfläche bilden; es ist deshalb  $\cos \Theta$  negativ, somit

$$T < \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Bei Flüssigkeiten, welche die Unterlage nicht benetzen, die also an einer verticalen Wand eine nach oben convexe Oberfläche bilden, ist  $\Theta$  größer als  $90^\circ$ , somit  $\cos \Theta$  positiv und

$$T > \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Da nun bei solchen Tropfen der Winkel  $\varphi$ , welcher an der Kuppe des Tropfens gleich Null ist, stetig, wenn man auf die Schnittcurve bis zur Basis des Tropfens fortschreitet, bis zu dem Werthe  $\varphi = 180 - \Theta > 90^\circ$  wächst, so muss an einer Stelle der Schnittcurve  $\varphi = 90^\circ$  werden, also die Tangente senkrecht stehen. An dieser Stelle hat somit der Tropfen seinen grössten Durchmesser. Nennen wir den verticalen Abstand dieser Stelle von der Tropfenkuppe  $t$ , so ist dort

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

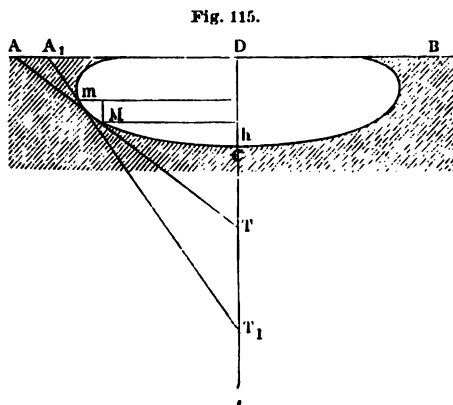
Aus den Werthen von  $T$  und  $t$  erhält man somit

$$T^2 = t^2 (1 + \cos \Theta)$$

$$\cos \Theta = \frac{T^2}{t^2} - 1.$$

Die Beobachtung der Höhen  $T$  des ganzen Tropfens und  $t$  des Abstandes der Stelle, an welcher der Tropfen den grössten Durchmesser hat, von der Kuppe des Tropfens, liefert also direct und getrennt von einander die Werthe der Grösse  $a$  und des Winkels  $\Theta$ , wenn die Flüssigkeiten die Wand nicht benetzen.

Dasselbe, was Tropfen für nicht benetzende Flüssigkeiten bilden, liefern uns Luftblasen, welche wir unter einer ebenen horizontalen Fläche in einer bestimmten Flüssigkeit bilden. Ist  $AB$  Fig. 115 etwa eine Glasfläche, welche auf Wasser sich befindet, und bringen wir eine Luftblase unter die Fläche, so muss diese Luftblase dieselbe Gestalt annehmen, welche ein die Unterlage nicht benetzender Tropfen annimmt, wie eine der im Beginne



dieses Paragraphen gemachten ganz gleiche Ueberlegung ergibt. Die Gleichgewichtsbedingung für die Oberfläche ergibt sich in ganz ähnlicher Weise. Im Punkte  $M$  ist der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Normaldruck

$$P = K - \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

In dem tiefsten Punkte  $C$  der Blase ist der Normaldruck, wenn die Blase nicht zu klein ist, gleich  $K$ ; bezeichnen wir die verticale Erhebung des Punktes  $M$  über  $C$  mit  $h$  und die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit  $s$ , so können wir diesen Druck  $K$  gleich setzen

$$K = P + h \cdot s,$$

da der Druck in  $C$  um das Gewicht der Flüssigkeitssäule von der Höhe  $h$  grösser sein muss als in dem um  $h$  höher liegenden Punkte  $M$ . Diese beiden Gleichungen liefern dann, genau wie bei dem Tropfen,

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Drücken wir nun den Krümmungsradius  $\rho$  wieder durch den Winkel  $TAD = \varphi$  aus, so wird ganz in derselben Weise wie vorhin

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos \varphi + \text{Const.}$$

Dort wo die Grenzfläche der Blase die Platte  $AB$  schneidet, wird gleich dem Randwinkel  $\Theta$ , also in diesem Falle nicht wie vorhin gleich dem Supplement von  $\Theta$ . Für den tiefsten Punkt  $C$  der Blase wird  $h = 0$  gleichzeitig  $\varphi = 0$   $\cos \varphi = 1$ .

Demnach ist auch jetzt

$$-\frac{H}{s} + \text{const.} = 0,$$

$$\text{const.} = \frac{H}{s}.$$

Daraus ergibt sich

$$h^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \varphi).$$

Da die Wand der Blase die Fläche  $AB$  unter dem Winkel  $\Theta$  schneidet, so wird die Höhe  $T$  der Blase

$$T^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \Theta).$$

An der Stelle des grössten Durchmessers wird  $\varphi = 90^\circ$ ;  $\cos \varphi = 0$ . Nennen wir den verticalen Abstand dieser Stelle von der Kuppe der Blase  $t$ , so ist

$$t^2 = \frac{H}{s},$$

somit

$$\frac{T^2}{t^2} = 1 - \cos \Theta = 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{T}{t}.$$

Wie demnach aus der Beobachtung von Tropfen der Flüssigkeiten, welche die Unterlage nicht benetzen, kann aus der Beobachtung von Luftblasen zwischen einer Ebene und einer dieselbe benetzenden Flüssigkeit, jede der Grössen  $H$  und  $\Theta$  gesondert bestimmt werden.

## §. 76.

**Capillaritätsconstanten.** Die in den letzten §§. dargelegte Theorie der Capillarerscheinungen zeigt, dass dieselben wesentlich von den Grössen  $\rho$  und  $\Theta$  abhängig sind, von denen die erstere, oder genauer das Produkt derselben in die Dichtigkeit der Flüssigkeit, die Grösse  $H$ , ein Maass für die Cohäsion dieser Flüssigkeit ist, da sie uns die Oberflächenspannung in der Flächeneinheit einer Kugelfläche gibt, deren Radius der Einheit gleich ist; während die andere Grösse, der Winkel  $\Theta$ , von dem Verhältnisse der Adhäsion der Flüssigkeit an die feste Wand und der Cohäsion der Flüssigkeiten abhängig ist. Die Bestimmung dieser Constanten aus den verschiedenen capillaren Erscheinungen ist deshalb gleichzeitig eine experimentelle Bestätigung dieser Theorie, da die verschiedenen Erscheinungen in denselben Werthen von  $a^2$  oder  $H$  und  $\Theta$  führen müssen.

Für solche Flüssigkeiten, welche die Körper vollkommen benetzen, ist der Winkel  $\Theta$  sofort gegeben, er ist gleich  $180^\circ$ . Denn bei einer Flüssigkeit, welche einen festen Körper vollkommen benetzt, haftet die letzte Flüssigkeit einfach an der Wand wie eine Haut, das letzte Flüssigkeitselement ist somit der Wand parallel. Da wir nun den Winkel  $\Theta$  von der obern, aus der Flüssigkeit hervorragenden Seite der Wand gerechnet haben, so wird demnach  $\Theta = 180^\circ$ .

Für Flüssigkeiten, welche eine feste Wand vollkommen benetzen, können wir deshalb zunächst aus den Steighöhen in Röhren oder an einer festen Wand die Constante  $a^2$  oder  $H$ , welche die Cohäsion der Flüssigkeiten misst, ableiten.

Im §. 74 erhielten wir für das Gewicht der in einer Röhre vom Radius  $r$  gehobenen Flüssigkeit den Ausdruck,

$$h \cdot s \cdot f + m = H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r},$$

worin  $m$  das Gewicht des Flüssigkeitsmeniskus ist, welcher über dem tiefsten Punkte der nach aussen concaven Flüssigkeitsoberfläche erhoben ist. Für den Fall, dass der Randwinkel  $180^\circ$  ist, lässt sich das Gewicht dieses Meniskus in solchen cylindrischen Röhren, in welchen die Oberfläche ein Kugelfragment ist, leicht bestimmen. Wenn nämlich die kugelförmige Oberfläche die Röhrenwand unter einem Winkel von  $180^\circ$  schneidet, so ist dieselbe eine Halbkugel, deren Radius gleich dem Radius der Röhre ist. Das Volumen des Meniskus ist somit gleich demjenigen eines Cylinders, dessen Querschnitt sich dem Querschnitt  $f$  der Röhre, dessen Höhe gleich ist dem Radius  $r$  der Röhre weniger dem Volumen der Halbkugel vom Radius  $r$ . Es ist somit

$$m = (f \cdot r - \frac{2}{3} r^3 \pi) s = f (r - \frac{2}{3} r) \cdot s = \frac{1}{3} f r \cdot s.$$

Damit wird die Gleichung für das gehobene Gewicht

$$h \cdot s \cdot f + \frac{1}{3} r \cdot s \cdot f = H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r}$$



oder, indem wir auf beiden Seiten durch  $s \cdot f$  dividiren,  $\Theta = 180^\circ$  setzen,

$$h + \frac{1}{3} r = -\frac{H}{s} \cdot \frac{1}{r} = -a^2 \frac{1}{r}$$

$$r(h + \frac{1}{3} r) = -a^2,$$

oder die Capillaritätsconstante  $a^2$  ist gleich dem Produkte aus der um ein Drittel des Radius vermehrten Steighöhe in den Radius der Röhre, wenn die Röhre so enge ist, dass die Oberfläche der Flüssigkeit eine Kugelfläche ist. Darin, dass die Constante hier als das Produkt zweier Dimensionen auftritt, liegt auch der Grund, dass sie als  $a^2$  bezeichnet ist. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Flüssigkeit in der Röhre höher steht als ausserhalb. Wird der Radius  $r = 1^{\text{mm}}$ , so wird

$$a^2 = -(h + \frac{1}{3}),$$

oder die Constante  $a^2$  kann auch als die um  $\frac{1}{3}^{\text{mm}}$  vermehrte Steighöhe in einem Rohre von  $2^{\text{mm}}$  Durchmesser defnirt werden, vorausgesetzt, dass dort die capillare Oberfläche eine Kugelfläche wäre.

Für die Steighöhe an einer verticalen Wand erhielten wir in §. 74 den Ausdruck

$$h_0 = \sqrt{\frac{H}{s} (1 - \sin \Theta)} = a \cdot \sqrt{1 - \sin \Theta}.$$

Ist der Winkel  $\Theta = 180^\circ$ , so ist  $\sin \Theta = 0$ ; somit wird für vollkommen benetzende Flüssigkeiten

$$h_0 = a; h^2 = a^2,$$

oder die Capillaritätsconstante  $a^2$  ist ebenfalls gleich dem Quadrate der Steighöhe der Flüssigkeit an einer verticalen ebenen Wand.

Zur Bestimmung der Constanten  $a^2$  genügt es deshalb die Steighöhe einer Flüssigkeit in einem cylindrischen Rohr von bekanntem, aber sehr kleinem Radius  $r$  oder an einer ebenen Wand, welche vollkommen von der Flüssigkeit benetzt werden, zu messen, und in dieser Weise ist dieselbe für eine nicht unbedeutliche Anzahl von Flüssigkeiten unter Benutzung von Glasröhren und Glaswänden von Frankenheim<sup>1)</sup>, Mendéléeff<sup>2)</sup>, Bède<sup>3)</sup>, Quincke<sup>4)</sup> u. a. bestimmt worden.

Für das Gewicht der von der Längeneinheit der Berührungslinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand getragenen Flüssigkeit erhielten wir im §. 74 ganz allgemein

$$G = \frac{H}{2} \cdot \cos \Theta = a \cdot \cos \Theta.$$

Ist  $\Theta$  gleich  $180^\circ$ , so wird

$$G = \frac{H}{2} = -a = -\frac{1}{2} a^2 s,$$

oder die Hälfte der die Oberflächenspannung messenden Constante  $H$  ist bei vollkommen die Wand benetzenden Flüssigkeiten gleich dem Gewichte der von der Längeneinheit der Berührungslinie über das Niveau der Flüssigkeit

<sup>1)</sup> Frankenheim, Cohäsionslehre. Breslau 1835. p. 79 ff.

<sup>2)</sup> Mendéléeff, Comptes rendus. T. L. p. 52. T. LI. p. 97.

<sup>3)</sup> Bède, Mémoires couronnés de Bruxelles. T. XXX.

<sup>4)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. Bd. CXXXIX.

igkeiten erhobenen Flüssigkeit. Das negative Vorzeichen bedeutet auch hier, dass die Flüssigkeit gehoben ist.

Man kann ebenso die Constante  $\alpha = \frac{\Pi}{2}$  als die Constante der Capillarität einer Flüssigkeit bezeichnen, wie es in neuerer Zeit besonders von Wilhelmy und Quincke geschehen ist.

Wilhelmy<sup>1)</sup> hat diese Constante  $\alpha$  nach einer sehr einfachen und gemeinen Methode bestimmt, auf welche wir etwas näher eingehen müssen, da sie auch ausserdem zu einer Reihe sehr interessanter Resultate geführt hat. Wilhelmy hing feste Körper, planparallele Platten oder Cylinder, deren Dimensionen vorher genau gemessen waren, an den einen Arm einer feinen Wage und bestimmte ihr Gewicht. Er liess diese Körper dann bis zu einer bestimmten Tiefe, so dass ein genau bekanntes Volumen derselben eintauchte, in die zu untersuchende Flüssigkeit hinab. Wegen der Art und Weise, durch die Wilhelmy dieses Volumen bestimmte, muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. Es wurde dann das Gewicht des eingetauchten Körpers beobachtet. Dieses Gewicht ist gleich dem Gewicht des Körpers in der Luft,  $P$ , weniger dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, plus dem Gewichte der capillar gehobenen Flüssigkeit. Denn diese Flüssigkeit wird von dem Körper getragen, das Gewicht des Körpers also um dieses Gewicht vergrössert. Ist demnach  $\Pi$  das Gewicht des eingetauchten Körpers,  $G$  das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit und  $\lambda$  der Umfang des festen Körpers im Niveau der Flüssigkeit, also die Länge der Berührungslinie, so ist

$$\Pi = P - G + \alpha \cdot \lambda$$

und daraus die Constante  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\Pi - P + G}{\lambda}$$

An diesem Werthe von  $\alpha$  muss indess noch eine Correction angebracht werden. Wie wir nämlich §. 72 erwähnten, hat Poisson hervorgehoben, dass an der Oberfläche der festen Körper eine Verdichtung der Flüssigkeit stattfinden müsse, da sonst die Gestaltsänderung in der Oberfläche nur in endlich kleinem Abstände von der Wand statthaben könne. Wenn nun er eine solche Flüssigkeitsverdichtung stattfindet, und dieselbe messbar, dann muss dadurch das Gewicht  $\Pi$  des eingetauchten Körpers noch vergrössert werden, da der feste Körper diese verdichtete Flüssigkeit trägt. Bezeichnen wir die Oberfläche des eingetauchten Körpertheiles mit  $O$  und  $\beta$  die an der Einheit der Oberfläche verdichtete Flüssigkeitsmenge, so wird hierdurch  $\Pi$  um  $O \cdot \beta$  vergrössert, und es wird

$$H = P - G + \alpha \cdot \lambda + O \cdot \beta$$

damit

$$\alpha = \frac{\Pi - P + G - O \cdot \beta}{\lambda} \dots \dots \dots (1).$$

Ob der Werth von  $\beta$  messbar ist, und welchen Werth dasselbe hat, ergibt sich aus den Beobachtungen selbst, indem man ein und den-

<sup>1)</sup> Wilhelmy, Poggend. Ann. Bd. CXIX, CXXI, CXXII.

selben Körper bis zu verschiedenen Tiefen eintaucht. Taucht man den Körper so weit ein, dass die untergetauchte Oberfläche  $O_1$  und dadurch das Gewicht des eingetauchten Körpers  $\Pi_1$ , das der verdrängten Flüssigkeit  $G_1$  wird, so erhält man

$$\alpha = \frac{\Pi_1 - P + G_1 - O_1}{\lambda} \cdot \beta \quad \dots \quad (2)$$

und aus den beiden Gleichungen für  $\alpha$  wird

$$\beta = \frac{\Pi - \Pi_1 + G - G_1}{O - O_1} \quad \dots \quad (3)$$

Als erstes Resultat aus den Versuchen Wilhelmy's heben wir hervor, dass sich in der That bei einer Reihe von Flüssigkeiten für  $\beta$  messbar Werthe ergaben, und dass die Werthe je nach der Natur der Flüssigkeit und des festen Körpers verschieden sind. Die von Wilhelmy bestimmte Werthe von  $\beta$  sind in Milligrammen und Quadratmillimetern folgende:

Flüssigkeiten.	Werthe von $\beta$ an					
	Glas	Platin	Silber	Messing	Zink	Aluminium
Aethylalkohol	0,01259	0,00641	0,01512	0,02326	0,00709	0,00716
Amylalkohol	0,01242	0,00449	0,01160	0,00497	0,00786	0,00657
Aether . . . . .	0,01186	0,01180	—	—	—	—
Aceton . . . . .	0,01290	0,00220	—	—	—	—
Essigsäure ..	0,00875	0,00169	—	—	—	—
Essigäther ..	0,00051	0,00521	—	—	—	—

Es zeigt sich hier keineswegs, was man zunächst hätte vermuthen sollen, dass die Verdichtung mit der Dichtigkeit des festen Körpers zunimmt, im Gegentheil sind die Verdichtungscoefficienten für den dichtesten Körper, das Platin, im allgemeinen am kleinsten.

Für die Grösse  $\alpha$  selbst ergibt sich dann weiter aus den Versuchen, dass dieselbe nicht, wie es aus der vorgetragenen Theorie folgen sollte, für eine Flüssigkeit durchaus constant ist, es nahm dieselbe für verschiedene feste Körper, ja selbst für verschiedene Formen ein und desselben Körper merklich verschiedene Werthe an. Auch die Werthe von  $\beta$  zeigen je nach der Form des festen Körpers sich unzweideutig verschieden. Besonders ausführlich hat Wilhelmy nach dieser Richtung hin den Aethylalkohol und den Amylalkohol untersucht, indem er deren Capillaritätsconstanten für die in obiger Tabelle erwähnten festen Körper und für einige derselben in Form von Platten und Cylindern bestimmte. Die von Wilhelmy erhaltenen Resultate<sup>1)</sup> enthält folgende Tabelle:

<sup>1)</sup> Wilhelmy, Poggend. Ann. Bd. CXXII.

Name der festen Körper	Capillaritäts-Coefficienten $\alpha$		Verdichtungs-Coefficienten $\beta$	
	Aethyl-Alkohol	Amyl-Alkohol	Aethyl-Alkohol	Amyl-Alkohol
Berplatte . . . . .	2,444	2,542	0,01512	0,01160
Eisenplatte . . . . .	2,410	2,396	0,00467	0,00405
Zinnplatte . . . . .	2,395	2,401	0,00641	0,00449
Wassersplatte . . . . .	2,325	2,407	0,01259	0,01242
Wassersingplatte . . . . .	2,448	2,551	0,02326	0,00497
Wassersingcylinder:				
mm				
Durchmesser 14,945 . . . . .	2,983	3,098	0,02495	0,02827
„ hohl 14,918 . . . . .	2,867	2,931	0,06833	0,05070
„ 5,009 . . . . .	2,358	2,477	0,02005	0,01623
„ 1,529 . . . . .	2,301	2,299	0,00900	0,00675
Wassersingplatte . . . . .	2,326	2,354	0,00709	0,00786
Wassersingcylinder:				
mm				
Durchmesser 15,037 . . . . .	3,327	2,475	0,04152	0,09819
„ 5,0115 . . . . .	2,443	2,355	0,02164	0,02443
„ 0,996 . . . . .	2,175	2,171	0,01651	0,01780
Wassersingplatte . . . . .	2,307	2,401	0,00716	0,00675
Wassersingcylinder:				
mm				
Durchmesser 2,521 . . . . .	2,403	2,453	0,01339	0,01431
„ 1,3305 . . . . .	2,288	2,371	0,01336	0,01068
„ 0,7205 . . . . .	2,215	2,308	0,01000	0,00392

Ähnliche Resultate betreffs des Einflusses des festen Körpers auf den Capillaritätscoefficienten  $\alpha$  lassen sich, wie Quincke<sup>1)</sup> gezeigt hat, auch aus den Versuchen von Guthrie<sup>2)</sup> über die Bildung von Tropfen ableiten. Lässt man einen Tropfen einer Flüssigkeit, die denselben festen Körper benetzt, abfließen, so liefert uns das Gewicht des abfallenden Tropfens das Gewicht, welches an einer dem Umfange des Tropfens an der Contactstelle gleichen Contactlinie zwischen festem und flüssigem Körper nicht mehr getragen werden kann. Der Quotient aus dem Tropfengewichte und dem erwähnten Umfange muss deshalb der von uns mit  $\alpha$  bezeichneten Grösse sehr nahe gleich sein. Kennt man den Umfang, so kann man aus dem Tropfengewichte den Werth  $\alpha$  berechnen. Man kann das erreichen, indem man von kleinen vollkommen benetzten Scheiben Tropfen abfließen lässt; der Umfang der Scheiben ist dann gleich dem obersten Umfange des Tropfens. Handelt es sich nur um eine Vergleichung der Capillaritäts-

<sup>1)</sup> Quincke, Berliner Berichte über die Fortschritte der Physik für 1865. Bd. XXI.

<sup>2)</sup> Guthrie, On drops. Proceeding of Royal society of London. T. XIII.

coefficienten, so braucht man den Tropfenumfang nicht zu kennen, wenn man die Tropfen verschiedener Flüssigkeiten von einem und demselben festen Körper abfließen lässt, oder indem man bei Benutzung verschiedener fester Körper dieselben in Form von Kugeln gleicher Radien benützt. Da die Umfänge der Tropfen bei benetzenden Flüssigkeiten dann gleich sind, so sind die Gewichte der Tropfen den Capillaritätscoefficienten proportional.

In dieser Weise hat Guthrie das Gewicht von Wassertropfen bestimmt, welche von Kugeln verschiedener Substanzen abfielen, deren Radien gleich  $7^{\text{mm}}$  waren. Die von Guthrie erhaltenen Zahlen enthält folgende kleine Tabelle, das Gewicht der Tropfen ist in Milligrammen gegeben.

Antimon . . . . .	119,8	Blei . . . . .	122,6
Schwefel . . . . .	120,2	Phosphor . . . . .	122,7
Cadmium . . . . .	121,8	Wismuth . . . . .	122,8
Zink . . . . .	122,5	Zinn . . . . .	124,2

Von einer Glaskugel, deren Radius  $7^{\text{mm}},1$  betrug, fielen die Tropfen im Gewicht 129,7 und von einer gleichen Messingkugel 132,2.

Die Unterschiede sind ähnlich wie bei den Versuchen von Wilhelmy; auch hier zeigt sich wie dort der Werth von  $\alpha$  bei Messing grösser als bei Glas.

Die Zahlen von Wilhelmy sowohl als von Guthrie zeigen unzweideutig, dass die Werthe von  $\alpha$  einer und derselben Flüssigkeit je nach der Form und Natur des festen Körpers verschieden ausfallen, somit dass die Erfahrung der bisherigen Theorie nicht vollständig entspricht. Wilhelmy ist der Ansicht<sup>1)</sup>, dass der Fehler der Theorie darin liegt, dass sie für alle benetzenden Flüssigkeiten den Winkel  $\theta$  gleich  $180^\circ$  setzt. Er glaubt, wie es schon Poisson annahm, dass man als die Capillarröhre, in welcher die Flüssigkeit aufsteigt, die letzte an der Wand haftende Flüssigkeitsschicht ansehen müsse, welche je nach der Natur oder Gestalt des festen Körpers mehr oder weniger verdichtet sei, wie das auch die Werthe von  $\beta$  zeigen. Der Winkel  $\theta$ , der dann massgebend ist, ist jener, unter welchem sich die capillare Oberfläche der Wandschicht anschliesst, und dieser ist dann je nach der Verdichtung der Wandschicht verschieden. Damit muss dann auch der beobachtete Werth von  $\alpha$  verschieden sein, da wir aus der Steighöhe oder dem gehobenen Gewicht die wahre Capillaritätsconstante nur erhalten, wenn  $\theta$  gleich  $180^\circ$  ist.

Diese Ansicht von Wilhelmy ist durch die Beobachtungen von Quincke bestätigt, indem er zunächst zeigte<sup>2)</sup>, dass die Steighöhe des Wassers an einer Glaswand verschieden ist, je nachdem man dieselbe gleich nach Herstellung des Meniscus oder längere Zeit nachher untersucht. Aus 5 Versuchsreihen, bei denen er die Höhe, bis zu welcher das Wasser an der verticalen Wand einer vorher luftfrei gemachten Flasche emporstieg, bestimmte, fand er im Mittel

$$h^0 = a = 4,169$$

<sup>1)</sup> Wilhelmy, Poggend. Ann. Bd. CXIX.

<sup>2)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXV.

er Temperatur von 17°. Bei Wiederholung desselben Versuches, n das Wasser mehrere Wochen mit Abschluss der Luft gestanden ergab sich bei derselben Temperatur

$$h^0 = a = 3,867,$$

merklich kleinerer Werth, der beweist, dass der Winkel  $\Theta$  kleiner geworden war.

äter hat Quincke<sup>1)</sup> dann direkt die Steighöhen in capillaren Röhren aus der Messung von Luftblasen sich ergebenden Werthen der Convergenz, und nach den im vorigen §. abgeleiteten Gleichungen rthe von  $H$  und  $\Theta$  direkt bestimmt. Nach diesen Gleichungen ist e  $T$  der ganzen Luftblase

$$T = \sqrt{\frac{H}{s}(1 - \cos \Theta)} = a \cdot \sqrt{1 - \cos \Theta}.$$

Abstand der Blasenkuppe von dem Schnitte, in welchem die Blase ststen Durchmesser hat,

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

r den Winkel  $\Theta$  ergab sich schliesslich

$$\sin \frac{1}{2} \Theta = \frac{T \sqrt{\frac{1}{2}}}{t}.$$

lgende kleine Tabelle enthält die von Quincke aus den Steighöhen laren Röhren abgeleiteten Constanten  $a$ , sowie die aus Beobachtungen fen sich ergebenden Werthe von  $a$  und  $\Theta$ .

e Beobachtung der Steighöhen geschah bei einer Temperatur von ie an Tropfen bei etwa 25 Grad Celsius.

Substanzen	Capillaritätsconstanten $a$ und $\Theta$ aus			
	Steighöhen $a = \sqrt{h \cdot r}$	Beobachtungen an Blasen		
		$a = t$	$T \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\Theta$
g von unterschweflgs.				
atron in Wasser . .	3,684	3,748	3,670	156° 40'
r . . . . .	3,804	3,062	3,834	154° 28'
felkohlenstoff . . .	2,296	4,270	2,185	147° 44'
öl . . . . .	2,675	2,868	2,817	158° 10'
rtinöl . . . . .	2,497	2,615	2,475	142° 16'
form . . . . .	1,916	—	—	—
. . . . .	2,536	2,850	2,705	143° 40'
sl . . . . .	2,379	2,564	2,503	154° 48'

r die Capillaritätsconstanten  $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot s$  ergeben sich daraus fol-  
Verthe:

Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

Substanzen	Dichte s	aus Steighöhen $\alpha_1$ Milligr.	aus Blasen $\alpha$ Milligr.	$-\alpha \cdot \cos \Theta$
Unterschweflgs. Natron .	1,1248	7,636	7,903	7,25
Wasser . . . . .	1	7,235	8,253	7,44
Schwefelkohlenstoff . . .	1,2678	3,343	3,274	2,76
Olivenöl . . . . .	0,9136	3,271	3,760	3,45
Terpentinöl . . . . .	0,8867	2,765	3,033	2,31
Chloroform . . . . .	1,4878	2,733	—	—
Steinöl . . . . .	0,7977	2,566	3,233	2,61
Alkohol . . . . .	0,7906	2,273	2,599	2,31

Wie man sieht stimmen ausser für Schwefelkohlenstoff und Terebinthinöl die Zahlen der zweiten und letzten Columne ziemlich gut überein. Dies beweist, dass man aus der Beobachtung capillarer Steighöhen und unter der Voraussetzung  $\Theta = 180^\circ$  im allgemeinen zu kleine Werthe der Constante  $\alpha$  oder  $\alpha \cos \Theta$  erhält.

Die Abweichungen bei Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl sind Quincke einer chemischen Veränderung dieser Flüssigkeiten während des Verlaufs der Versuche zuschreiben zu müssen.

In folgender Tabelle sind eine Anzahl von Capillaritätsconstanten oder vielmehr  $\alpha \cdot \cos \Theta$  zusammengestellt; die Beobachtungen von Brunner, Hagen, Frankenheim, Mendéléeff und Bède sind mit Capillarröhren gemacht, und in der vorhin angegebenen Weise aus der Steighöhe berechnet.

Tabelle von Capillaritätsconstanten  $\alpha$ .

Flüssigkeit	Specif. Gew.	$\alpha$ in Milligr.	Temp.	Beobachter
Wasser . . . . .	1,000	7,666	0°	Brunner
„ . . . . .	„	7,558	—	Hagen <sup>1)</sup>
Schwefelsäure . . . . .	1,849	6,333	14°,5	Franken
„ . . . . .	1,522	7,610	17°,5	„
„ . . . . .	1,127	7,556	„	„
Salzsäure . . . . .	1,153	7,149	„	„
Salpetersäure . . . . .	1,500	4,275	16°,0	„
„ . . . . .	1,271	6,768	19°,0	„
„ . . . . .	1,117	7,098	„	„
Lösung v. Kochsalz . . .	1,200	8,400	„	„
„ „ Kalisalpeter . . .	1,137	7,276	„	„
„ „ Natronsalpeter . . .	1,373	8,512	„	„
Aethylalkohol . . . . .	0,7933	2,325	18°—24°	Wilhelm
Wässrig. Weingeist . . .	0,810	2,361	17°	Franken
„ . . . . .	0,895	2,775	„	„
„ . . . . .	0,967	3,727	„	„
Amylalkohol . . . . .	0,8181	2,427	18°—24°	Wilhelm
„ . . . . .	„	2,445	„	Mendélé
„ . . . . .	„	2,426	„	Bède

<sup>1)</sup> Hagen, Abhandl. der Berl. Academie 1845.

Flüssigkeit.	Specif. Gew.	$\alpha$ in Milligr.	Temp.	Beobachter
Aether . . . . .	0,725	1,815	18°—24°	Wilhelmy
" . . . . .	"	1,737	20°	Brunner
" . . . . .	"	1,796	—	Mendéléeff
" . . . . .	"	1,892	—	Bède
Aceton . . . . .	0,8124	2,581	18°—24°	Wilhelmy
Essigsäure . . . . .	1,0511	2,973	"	"
Essigs. Aethyl. . . . .	0,8814	2,564	"	"

Die angegebenen Constanten gelten nur für die neben jeder angegebenen Temperaturen, indem dieselben mit steigender Temperatur beträchtlich abnehmen. Die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur ist besonders von Brunner<sup>1)</sup> untersucht und für Wasser, Aether und Olivenöl bestimmt worden. Für die Steighöhen in einer Röhre von 1<sup>mm</sup> Radius findet Brunner

Wasser 15,33215 -- 0,0286396 *u*  
 Aether 5,3536 — 0,028102 *u*  
 Olivenöl 7,4640 — 0,010486 *u*

worin *u* die Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers bedeutet.

Quincke hat ferner durch Messung von Tropfen die Capillaritätsconstanten des Quecksilbers untersucht<sup>2)</sup>. Dabei ergab sich, wie schon aus den früheren schwankenden Angaben zu schliessen war, dass der Winkel, den Quecksilber mit einer reinen Glasfläche bildet, mit der Zeit sehr variabel ist; an einem und demselben Tropfen erhielt er gleich nach dem Auflegen 37° 17', nach 8,5 Stunden 42° 22' und nach 21 Stunden 47°. Später erhielt er<sup>3)</sup> für flache Quecksilbertropfen auf reinen Spiegelglasplatten möglichst rasch nach dem Auflegen im Mittel aus 8 Beobachtungen bei 20°C.

$$T = 3^{\text{mm}},629 \quad t = 2^{\text{mm}},850$$

und daraus, die Dichte *s* des Quecksilbers gleich 13,5432 gesetzt,

$$\theta = 51^\circ 8' \quad \alpha = 55^{\text{mgr}},03.$$

In sehr ausgedehnter Weise hat schliesslich Quincke die Capillaritätsconstanten geschmolzener Substanzen, geschmolzener Salze und Metalle untersucht<sup>4)</sup>. Er bestimmte zu dem Zwecke entweder das Gewicht von Tropfen, welche von den Drähten der betreffenden Metalle, deren Enden in der Flamme eines Löthrohrs geschmolzen wurden, oder welche aus engen Glasröhren, in denen die Substanzen geschmolzen wurden, herabfielen, oder liess die geschmolzenen Substanzen auf horizontalen Unterlagen aus, welche von den Substanzen nicht benetzt wurden. In letzterem Falle bildeten die Substanzen Tropfen, welche auch nach dem Erstarren dieselbe Gestalt behielten, welche sie flüssig im Momente des Erstarrens besessen hatten. Die Gestalt dieser

<sup>1)</sup> Brunner, Poggend. Ann. Bd. LXX.

<sup>2)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CV.

<sup>3)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

<sup>4)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIV. Bd. CXXXV. Bd. CXXXVIII.



Tropfen war somit bedingt durch die Oberflächenspannung bei der Schmelztemperatur, und der Abstand der Tropfenkuppe von dem Schnitte, wo der Tropfen seinen grössten Durchmesser hatte, lieferte bei grossen Tropfen sofort die Constante  $a$ .

Für das Quadrat dieser Constanten  $a^2 = \frac{H}{s}$ , also den Quotienten aus der Oberflächenspannung und der Dichte der betreffenden Substanz, welchem Quincke den Namen der specifischen Cohäsion beilegt, ergibt sich aus diesen Versuchen das interessante Resultat, dass dieselbe für alle untersuchten Körper sich als ein einfaches Vielfaches der Zahl 4,3 darstellen liess, mit Abweichungen nur, welche innerhalb der Grenze der bei diesen Versuchen unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen. Die specifische Cohäsion des Wassers bei  $0^\circ$  ist  $17,58 = 4 \cdot 4,3 + 0,38$ ; entsprechende Werthe haben von den Metallen Platin, Gold, Silber, Kadmium, Zinn, Kupfer. Die specifische Cohäsion des Quecksilbers gibt Quincke zu  $8,65 = 2 \cdot 4,3$  an; fast gleiche Werthe zeigen Blei, Wismuth und Antimon; eine dreimal so grosse specifische Cohäsion zeigen Zink und wahrscheinlich auch Eisen und Palladium; für Zink, ergab sich der Werth  $a^2 = 25,41$ , für Palladium  $25,36$ , für einen Gusseisentropfen  $25,81$ , für einen zweiten Gusseisentropfen  $27,14$ . Für Natrium fand sich der Werth sechsmal so gross als für Quecksilber nämlich  $a^2 = 52,97$ .

Für geschmolzene chemische Verbindungen ergab sich der Satz: Geschmolzene Substanzen von ähnlicher chemischer Zusammensetzung haben dieselbe specifische Cohäsion bei einer Temperatur, die ihrem Schmelzpunkte möglichst nahe liegt.

Kohlensaure und schwefelsaure (wahrscheinlich auch phosphorsaure) Salze zeigen im geschmolzenen Zustande dieselbe specifische Cohäsion wie das Wasser.

Salpetersaure Salze, Chlormetalle, Zuckerarten und Fette zeigen dieselbe specifische Cohäsion wie das Quecksilber.

Brom- und Jod-Metalle, sowie Selen, Brom, Schwefel und Phosphor zeigen eine halb so grosse specifische Cohäsion wie das Quecksilber.

In wie weit die von Quincke direkt beobachteten Zahlen mit diesen Sätzen übereinstimmen, möge an folgender Reihe angedeutet werden, welche die Werthe  $a^2$  für die untersuchten Nitrate und Chloride angibt.

Natriumnitrat	$a^2 = 8,55$	Calciumchlorid	$a^2 = 9,49$
Kaliumnitrat	8,35	Strontiumchlorid	8,18
—	—	Bariumchlorid	8,29
Lithiumchlorid	8,53	Silberchlorid	8,18.
Natriumchlorid	8,41		
Kaliumchlorid	8,76		

Wie man sieht weichen diese Zahlen nur wenig von dem für Quecksilber gefundenen Werthe 8,6 ab.

#### §. 77.

**Grösse der Wirkungssphäre der Molekularkräfte.** Wir haben bei den Versuchen von Wilhelmy im vorigen §. das Resultat erwähnt, dass die gefundenen Werthe von  $\alpha$  nicht nur von der Substanz des eingetauchten

pers, sondern auch bei einer und derselben Substanz von der eingetauchten festen Körpers abhängig sei; die Werthe waren nicht Platten andere als für eingetauchte Cylinder und für diese je nach dem Durchmesser des Cylinders.

Erfahrung muss an der ersten Grundannahme von La Place Wirkung der Molekularkräfte eine Modification anbringen, an der nämlich, dass die molekularen Kräfte nur auf für uns unmessbaren hin wirken, sie müssen in endlichen Entfernungen wirken. nämlich die Molekularkräfte nur auf unmessbar kleine Entfernungen wirken, so würde eine gekrümmte Oberfläche eines eingetauchten Körpers an jedem Punkte so wirken, wie die an dieselbe gelegte Ebene, mit welcher sie auf unendlich kleinem Abstände zusammen Wirkung einer gekrümmten Oberfläche müsste also jener der gleich sein. Es fragt sich daher, ob sich die Entfernung, bis die Molekularkräfte wirken, oder der Radius der Wirkungsmoleküle nicht messen lässt.

Erste, der eine solche Messung versuchte, war Plateau<sup>1)</sup>. Er bezweckte Seifenblasen, welche aus der von ihm angegebenen hergestellt eine sehr grosse Dauer haben. Zur Darstellung dieser löst man 1 Gewichtstheil Marseiller Seife, die vorher in dünne geschnitten ist, bei gelinder Wärme in 40 Theilen destillirten und filtrirt die Lösung, wenn sie erkaltet ist. Hierauf mischt man in einer Flasche durch starkes und anhaltendes Schütteln 2 Volumen mit 3 Volumen der Lösung und lässt stehen. Das in der Bildung klare Gemenge trübt sich nach einigen Stunden; es entsteht ein leichter weisser Niederschlag, welcher mit ungemeyner Langsamkeit und nach mehreren Tagen eine im obern Theil der Flüssigkeit abgeschnittene Schicht bildet. Man zieht dann mit einem Heber Flüssigkeit ab, die man zu den Versuchen benutzt.

aus dieser Flüssigkeit gebildet halten sich in freier Luft stundenlang wenn man sie mit einer Glocke bedeckt, tagelang. Im §. 71 erwähnen wir schon, dass die Blase auf die in ihr eingeschlossene Luft einen Druck ausübt, den man daran erkennt, dass die Luft aus der Blase entweicht, wenn das Röhrchen, durch welches man die Blase gebildet verschlossen wird. Es gelang Plateau diesen Druck zu messen, indem er derartige Blasen an der Mündung eines kleinen umgekehrten Wassermanometers erzeugte, der mit einem Wassermanometer communicirte. Die verschiedenen Drucke haben wir damals abgeleitet. Ist  $R$  der Radius der Blase, so ist der auf der äussern Fläche gegen das Innere gerichtete Normaldruck

$$P = K + H \frac{1}{R}.$$

Die Haut der Blase gegen den Radius nur eine sehr kleine Dicke voraussetzen wir ohne merklichen Fehler auch den Radius der innern Blasenhaut gleich  $R$  setzen. Dann ist der auf die Innenfläche gegen das Innere der Haut, also von dem Centrum der Kugel

<sup>1)</sup> Mémoires de l'Acad. d. Bruxelles T. XXXIII. Poggend. Ann. Bd. CXIV.

fortgerichtete Normaldruck

$$P_1 = K - H \frac{1}{R}.$$

Der Druck, welchen die Blasenhaut auf die eingeschlossene Luft ausübt, ist die Differenz dieser beiden Drucke, somit ist derselbe

$$p = P - P_1 = 2 H \cdot \frac{1}{R}$$

$$p \cdot R = 2 H.$$

Es ist somit das Produkt aus dem Radius der Blase und dem auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke gleich der doppelten Constante  $H$ . Bezeichnen wir nun mit  $h$  die Steighöhe der Blasenflüssigkeit in einer Röhre von 1<sup>mm</sup> Durchmesser, deren Wände von der Flüssigkeit vollkommen benetzt werden, so ist nach §. 74

$$h \cdot s = 2 H,$$

wenn  $s$  das specifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet; es ist somit

$$p \cdot R = h \cdot s,$$

eine Relation, welche Plateau auch bei seinen Versuchen bestätigt fand.

Nun macht Plateau darauf aufmerksam, dass diese Relation nur so lange ihre Gültigkeit habe, als die Dicke der Blasenhaut wenigstens gleich ist dem doppelten Radius der Wirkungssphäre der Moleküle, indem die beiden für  $P$  und  $P_1$  abgeleiteten Ausdrücke für die Oberfläche einer flüssigen Masse gelten, bei der also sämtliche innerhalb des Radius der Wirkungssphäre liegenden Moleküle auf die in der Oberfläche liegenden Theilchen ihre Wirkung ausüben.

Bei einer sich mehrere Tage haltenden Blase, welche durch Verdunstung und allmähliches Herabrinnen der Flüssigkeit zur Ansatzstelle der Blase nach und nach dünner wurde, liess sich nun eine Verminderung des Druckes bis zu dem Momente, in welchem die Blase zersprang, nicht erkennen, so dass die Dicke der Blase bis zu diesem Momente nicht kleiner war als der doppelte Radius der Wirkungssphäre der Moleküle. Die Dicke der Blase ergab sich nach einer optischen, im 2. Bande zu besprechenden Methode, aus der Farbe der Blase<sup>1)</sup>, zu 0<sup>mm</sup>,0001135. Daraus folgt dann, dass der Radius der Wirkungssphäre den Werth von 0<sup>mm</sup>,0000567 nicht überschreitet. Nimmt man an, dass die Blase nicht länger bestehen kann, als die Dicke der Haut gleich ist dem doppelten Radius der Wirkungssphäre, so würde etwa dies der Radius der Wirkungssphäre für die Molekularkräfte dieser Seifenlösung sein, ein zwar kleiner, aber wie man sieht noch wohl messbarer Werth.

Quincke hat den Radius der Wirkungssphäre in anderer Weise direkt zu messen gesucht<sup>2)</sup>. Bringt man auf eine Glasplatte sehr dünne, keilförmige Schichten einer andern Substanz, so wird der Randwinkel einer Flüssigkeit an den verschiedenen Stellen verschieden sein, wenn die Dicke

<sup>1)</sup> Man sehe im 2. Band: „Farbe dünner Blättchen“.

<sup>2)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXVII.

der keilförmigen Schicht nicht so gross ist als der Radius der Wirkungssphäre, er wird constant erst von der Stelle der keilförmigen Schicht, von der ab ihre Dicke gleich dem Radius der Wirkungssphäre ist. Denn der Randwinkel hängt, wie wir sahen, ab von dem Verhältniss der Adhäsion der Flüssigkeit an den festen Körper zur Cohäsion der Flüssigkeit. Ist demnach die Adhäsion der Flüssigkeit an das Glas eine andere, als an die auf das Glas gebrachte Schicht, was immer dann der Fall sein wird, wenn die Flüssigkeit die beiden Substanzen nicht vollkommen benetzt, so muss, so lange die Schicht eine so kleine Dicke hat, dass das Glas noch durch sie hindurchwirkt, der Randwinkel ein anderer sein als dort, wo der Abstand der Flüssigkeit vom Glase gleich oder grösser ist als der Radius der Wirkungssphäre.

Derartige keilförmige Schichten lassen sich auf Glas sehr gut durch Silber erzeugen<sup>1)</sup>, indem man auf eine Glasplatte eine an verschiedenen Stellen verschieden dicke Schicht einer Versilberungsflüssigkeit bringt. Quincke brachte zwischen eine ebene Glasplatte und darauf gelegte Cylinderfläche von Spiegelglas, welche einen Radius von 120<sup>mm</sup> besass, Martin'sche Versilberungsflüssigkeit, aus welcher dann eine doppelt keilförmige Silberschicht sich absetzte, welche in der Mitte, dort wo die Cylinderfläche die Platte berührte, am dünnsten war. Zwei solcher Platten wurden vorsichtig abgespült, dann durch dünne Glasplättchen getrennt mit den versilberten Flächen einander gegenübergestellt, so dass etwa gleich dicke Schichten Silber einander gegenüberlagen. Eine schwache Metallfeder drückte die beiden Platten gegen einander. Dieselben wurden dann in einen Trog mit destillirtem Wasser so aufgestellt, dass die Schneiden der Silberkeile vertical standen. Das Wasser erhob sich in dem capillaren Raum zwischen den parallelen Silberlamellen bis zu einer Höhe  $h$ , welche an der dünnsten Stelle des Silbers am höchsten war, und immer kleiner wurde, je dicker das Silber wurde. Da der Abstand  $d$  der Platten überall der gleiche war, so folgt aus der Gleichung für die Steighöhe zwischen den Platten

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos \Theta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cdot \cos \Theta \cdot \frac{1}{d},$$

dass mit zunehmender Silberdicke der Winkel  $\Theta$  immer kleiner wird.

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quincke; die Dicke der Silberschicht wurde nach einer optischen Methode, wie sie auch von Plateau benutzt wurde, bestimmt. Die Winkel  $\Theta$  sind aus obiger Gleichung

$$\cos \Theta = \frac{hd}{a^2}$$

abgeleitet, in der Quincke  $a^2$ , die spezifische Cohäsion des Wassers gleich 15 einsetzte. Die mit  $x$  überschriebene Columne gibt die Abstände der Stellen, denen die Steighöhe  $h$  entspricht von der dünnsten Stelle der Silberschicht,  $\epsilon$  ist die Dicke der Silberschicht:

<sup>1)</sup> Man sehe darüber *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXIX. p. 44 ff.

$$d = 0^{\text{mm}},633$$

$x$	$\varepsilon$	$h$	$\Theta$
mm 0	mm 0,0000040	mm 13,74	125° 27'
1	0,0000052	13,58	124° 58'
2	0,0000080	13,33	124° 16'
3	0,0000130	13,10	123° 34'
4	0,0000142	12,82	122° 45'
5	0,0000200	11,92	120° 12'
6,5	0,0000284	9,73	114° 22'

Man sieht, wie  $h$  und  $\Theta$  mit wachsender Silberschicht ganz beträchtlich abnehmen. Diese Abnahme dauerte selbst an den dicksten Stellen der Silberschichten, die noch durchsichtig waren, fort, Stellen, welche eine Dicke bis zu  $0^{\text{mm}},0000542$  besaßen, so dass der Radius der Wirkungssphäre bei Glas-Silber-Wasser noch etwas grösser anzunehmen ist.

Mit Quecksilber kann man ähnliche Beobachtungen machen, indem man die Silberschicht durch Behandeln mit Schwefelwasserstoff in Schwefelsilber überführt, und dann direkt durch Spiegelung die Stelle aufsucht, wo der Winkel, unter welchem das Quecksilber die vertical gestellte Platte schneidet, constant wird, oder wo die Depression des Quecksilbers an der verticalen Wand einen constanten Werth erhält. Derartige Versuche lieferten Quincke für den Radius der Wirkungssphäre den Werth  $0^{\text{mm}},0000483$ . Nach Ueberführung des Silbers in Jodsilber fand Quincke den Winkel bei einer Schichtdicke von  $0^{\text{mm}},000059$  constant werden. Als die Glasplatte mit einer Collodiumschicht überzogen war, fand sich die Dicke der Schicht, wo der Randwinkel des Quecksilbers constant wurde, kleiner als  $0^{\text{mm}},00008$ , eine genauere Bestimmung war in diesem Falle wegen des optischen Verhaltens der Collodiumschicht nicht möglich.

Wenn man nach diesen Methoden wegen der Schwierigkeit, die Oberflächenbeschaffenheit der festen Körper an allen Stellen genau gleich zu erhalten, keine absolut genauen Messungen des Radius der Wirkungssphäre erwarten kann, so beweisen diese Versuche doch, dass man mit grosser Annäherung diesen Radius 50 Milliontheilen eines Millimeter gleich setzen darf, eine zwar kleine, aber sehr wohl messbare Grösse. Wir müssen daher die Annahme fallen lassen, dass die Molekularkräfte auf nur unmessbar kleine Entfernungen wirken.

### §. 78.

**Bewegungen in Folge von Capillarwirkung.** Durch die bisher betrachteten Gesetze der Oberflächenspannung erklären sich eine Anzahl auffallender Erscheinungen, von denen wir einige Bewegungserscheinungen ableiten wollen.

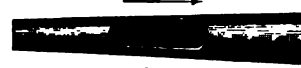
Wenn man zwischen zwei unter einem spitzen Winkel zusammenstossende Platten oder in ein konisches Glasröhrchen einen Flüssigkeitstropfen bringt, der die Röhrenwände benetzt, so sieht man, dass der Tropfen sich

gegen den Scheitel des Winkels hinbewegt; ein die Röhrenwände nicht benetzender Tropfen dagegen bewegt sich von dem Scheitel des Winkels oder der Spitze der Röhre fort. Diese Bewegung erklärt sich unmittelbar aus den vorhin erkannten Gesetzen der Oberflächenspannung. Die Begrenzungsflächen der Flüssigkeit sind in dem ersten Falle concav; an der engern Seite der Röhre (Fig. 116), oder gegen den Scheitel des Winkels hin ist wegen des kleinern Abstandes der Wände die Krümmung der Oberfläche stärker als an der entgegengesetzten Seite. Deshalb ist der Druck gegen das Innere der Flüssigkeit an der weiten Stelle der Röhre stärker und diesem Drucke folgend muss sich der Tropfen gegen das engere Ende der Röhre hin bewegen.

Fig. 116.



Fig. 117.



Umgekehrt ist es im zweiten Falle (Fig. 117), die Oberfläche ist dann convex, die Krümmung an der engen Seite, und damit der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Druck von dieser Seite her stärker. Der Tropfen muss sich daher gegen das weitere Ende der Röhre hin bewegen.

Wenn man zwei parallele ebene Platten mit ihren unteren Enden in eine Flüssigkeit vertical eintaucht, so bemerkt man, dass diese Platten sich zu nähern streben, sowohl, wenn die Wände benetzt werden, die Flüssigkeit also zwischen den Platten steigt (Fig. 118), als auch, wenn die Wände nicht benetzt werden, die Flüssigkeit zwischen den Platten tiefer steht als ausserhalb (Fig. 119). La Place<sup>1)</sup> erklärt diese Erscheinung folgendermassen. Da die Flüssigkeitssäulen zwischen den Platten und ausserhalb im Gleichgewicht sind, so ist der Druck auf die Platten unterhalb  $a$  von allen Seiten gleich, nicht aber so oberhalb  $a$  z. B. in  $b$ . In dem Punkte  $b$  wird die Platte nach innen gedrückt durch den Druck der Luft, den wir mit  $P$  bezeichnen wollen, nach aussen jedoch durch den Seitendruck der über  $b$  liegenden Flüssig-

Fig. 118.

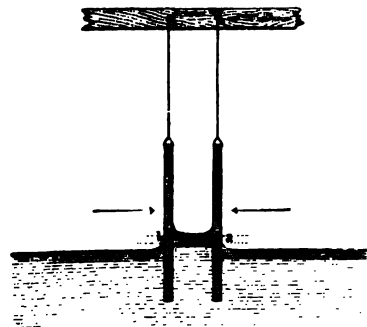
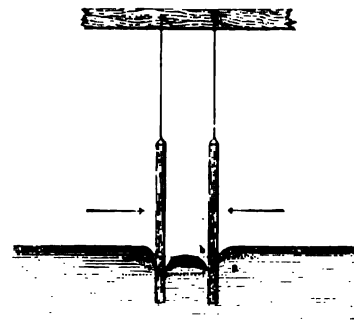


Fig. 119.



keitssäule, welcher gleich ist dem senkrechten Drucke, den ein Punkt in der durch  $b$  gelegten Horizontalebene erfährt. Dieser Druck setzt sich zu-

<sup>1)</sup> La Place, Théorie etc. Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 293.

sammen aus dem vertical abwärtsgehenden Drucke der Atmosphären Gewichte der Flüssigkeitssäule über  $b$  und dem vertical aufwärts gehenden Drucke der Differenz der Oberflächenspannung  $\frac{1}{2} \frac{H}{\rho}$  zwischen und halb der Platten, welche das Steigen der Flüssigkeit zwischen den Platten bewirkte; er ist also  $P + g - \frac{H}{2\rho}$ , wenn wir mit  $g$  das Gewicht der Flüssigkeit über  $b$  bezeichnen. Nun ist aber  $\frac{H}{2\rho}$  gleich dem Gewichte der gehobenen Flüssigkeitssäule, demnach  $\frac{H}{2\rho} > g$  und  $g - \frac{H}{2\rho} < 0 =$  wenn wir mit  $c$  eine Constante bezeichnen, welche kleiner als 1 ist, so wird die Platte nach innen und durch einen Druck  $P$  nach aussen getrieben, also durch den Ueberschuss

$$P - P(1 - c) = Pc$$

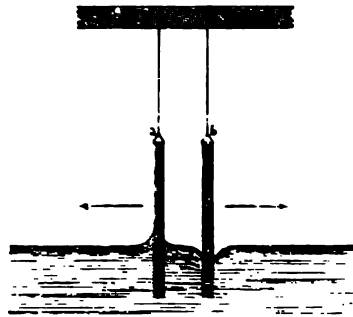
nach innen getrieben. Gleiches gilt von der zweiten, der ersten gegenüberliegenden Platte, so dass also die Platten mit einer Kraft  $2Pc$  gegen einander getrieben werden.

Dasselbe ist in der Anordnung Fig. 119 der Fall. Durch eine ähnliche Entwicklung erhält man, dass die über  $a$  liegenden Punkte die ausserhalb höher stehende Flüssigkeit einen nach innen gerichteten Druck erfahren. Unterhalb  $a$  sind die Drucke nach innen und aussen gleich; da die Flüssigkeiten innerhalb und ausserhalb der Platten im Gleichgewicht sind; bei  $b$  aber wirkt nach aussen der Druck der Luft, nach innen der Seitendruck der Flüssigkeit, welcher gleich ist dem Drucke der Luft, mehr um das Gewicht der über  $b$  vorhandenen Flüssigkeitsschicht; letztere Theil des Seitendruckes muss demnach die Platten gegen einander drücken.

Wäre der nach innen und aussen gleich wirkende Druck  $P$  der Luft auch nicht vorhanden, so bleibt doch in beiden Fällen der nach innen gerichtete Druck übrig, nur dass wir ihn im ersten Falle nicht als den Ueberschuss des äussern über den innern Druck auffassen müssten, sondern als die resultierende Anziehung zwischen Wand und Flüssigkeit, welche eben den von innen nach aussen wirkenden Druck in unserer vorigen Betrachtungsweise vermindert.

Wenn die eine der Platten von der Flüssigkeit benetzt wird, die andere nicht, so steigt sie an der einen Seite höher, wie in Fig. 120 beobachtet dann eine Abstossung. Diese lässt sich aus demselben Princip ableiten. An der benetzenden Platte muss dann die Flüssigkeit höher ansteigen als im Zwischenraume der beiden Platten, weil die Flüssigkeit hier so hoch steigen muss, dass die durch die concave Krümmung verminderte Oberflächenspannung durch die gehobene Flüssigkeit ausgeglichen wird. Im Innern dagegen zwischen  $a$  und  $b$  ist die Oberfläche der F

Fig. 120.



keit doppelt gekrümmt, indem die Flüssigkeit an *a* sich concav, an *b* aber convex anlegt. Die Oberflächenspannung wird daher in der einen Hälfte der Flüssigkeitsschicht zwar vermindert, in der andern gegen *b* liegenden dagegen verstärkt, und deshalb ist die Verminderung an *a* nicht so gross wie ausserhalb; die Flüssigkeit kann also im Innern an *a* nicht so hoch steigen. Aus eben dem Grunde muss sie an *b* aussen eine stärkere Depression erhalten als zwischen den Platten.

Aus dieser Gruppierung der Flüssigkeit ergibt sich dann nach der Entwicklung der beiden vorigen Fälle, dass sowohl *a* als auch *b* einen Antrieb von innen nach aussen erfährt; die Platten müssen sich also von einander entfernen.

Eine genauere Untersuchung der gekrümmten, zwischen den Platten vorhandenen Oberfläche der Flüssigkeit hat La Place zu dem Resultate geführt, dass bei sehr grosser Annäherung der Platten die Abstossung in eine Anziehung übergeht, ein Resultat, das Versuche von Hauy<sup>1)</sup> bestätigen.

## §. 79.

**Auflösung.** Die bisherigen Untersuchungen über die Molekularwirkungen zwischen den Molekülen fester und flüssiger Körper behandelten die zwei Fälle, dass entweder die Adhäsion des flüssigen am festen grösser war als die Cohäsion des flüssigen Körpers, oder dass die Cohäsion der flüssigen Körper grösser war als die Adhäsion derselben an die festen. In beiden Fällen blieb der feste Körper ungeändert, die Wirkung der Kräfte bestand in einer Oberflächen- und Niveauänderung des flüssigen Körpers. Noch ein dritter Fall ist möglich und in der Natur vorhanden, nämlich der, dass die Anziehung der Flüssigkeit auf die Moleküle des festen Körpers stärker ist als die Kraft, mit der letztere an einander haften, als die Cohäsion des festen Körpers. Dies muss sich in einer Trennung der Moleküle des festen Körpers und einer Vermischung derselben mit den Molekülen des flüssigen Körpers zu erkennen geben. Wir beobachten diese Erscheinung bei der Auflösung löslicher Körper. Wenn man ein Salz in Wasser bringt, so zertheilt es sich, und seine Moleküle mischen sich mit der Flüssigkeit, so dass nach einiger Zeit die ganze Flüssigkeit Salztheilchen enthält, welche durch die Anziehung des Wassers zu den Salztheilchen in dem Wasser der Schwere entgegen gehoben und verbreitet werden.

Die Auflösung eines Körpers in einer Flüssigkeit wird vielfach als eine chemische Verbindung angesehen; von den eigentlichen chemischen Verbindungen unterscheidet sie sich jedoch dadurch, dass sie nicht wie diese nach festen Verhältnissen vor sich geht. Im Gegentheil, eine Flüssigkeit kann einen in ihr löslichen Körper in allen Verhältnissen bis zu einer gewissen, bei constanter Temperatur festen Grenze aufnehmen. Jene Grenze nennt man die Löslichkeitsgrenze.

Bei der Lösung eines Salzes in Wasser zeigt sich die Anziehung der Salz- und Wassertheilchen überdies in der sogenannten Contraction der Salzlösungen. Das Volumen der hergestellten Lösung ist nämlich mit wenigen Ausnahmen kleiner als die Summe der Volumina der einzelnen Bestandtheile. So ergab sich z. B. aus einigen mit Salpeterlösungen von

<sup>1)</sup> A. a. O. Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 308.



mir angestellten Versuchen bei einer 8procentigen Lösung eine Contraction von 0,8 Procent; eine Lösung von 21,522 Kubikcentimeter (44,293<sup>o</sup>, 554,077 Kubikcentimeter Wasser von 20<sup>o</sup> C. ergab nicht 575,599 Kubikcentimeter Lösung, sondern nur 570,838, so dass also das entstandene Volumen der Lösung um 4,762 Kubikcentimeter kleiner war als die Summe der ursprünglichen Volumina.

Die genauern Gesetze dieser Contraction sind noch nicht bekannt.

### §. 80.

#### Mischung und Schichtung der Flüssigkeiten; Plateau's Versuch

Wenn man zwei Flüssigkeiten zusammenschüttet, so beobachtet man, dass ebenso, wie die anziehenden Wirkungen der flüssigen Körper auf die flüssigen Körper verschieden sind, so auch die der flüssigen Körper unter einander. Man sieht nämlich entweder, dass die Flüssigkeiten, wenn sie verschiedene specifisches Gewicht haben, einfach sich über einander lagern ihrer Schwere gemäss, oder dass die Flüssigkeiten sich mischen, dass die eine die andere vollständig durchdringt, und so die schwerere in der leichteren gehoben wird, verbreitet und die leichtere in die schwerere hinabgezogen wird. So mischen sich z. B. Wasser und Weingeist in allen Verhältnissen, während Wasser und Oel sich nicht mischen, sondern ihrer Schwere gemäss sich über einander lagern.

Ein Flüssigkeitsgemische ist eine ganz homogene Flüssigkeit, die einzelne Bestandtheile sich nicht durch mechanische Mittel, sondern nur durch eine Veränderung des Aggregatzustandes von einander trennen lassen. Man unterscheidet sich ein Gemisch wesentlich von einem Gemenge, das man es herstellen kann, wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen specifischen Gewichtes in einem Gefässe zusammengiesst und stark schüttelt.

Bei der Mischung zweier Flüssigkeiten zeigt sich in den meisten Fällen auch eine Contraction des Gemisches, indem das Volumen der Mischung kleiner und somit seine Dichtigkeit grösser ist als die Summe der Volumina der Bestandtheile und deren mittlere Dichtigkeit. Am genauesten ist die Contraction der Mischungen bei den Gemischen aus Alkohol und Wasser untersucht, wir haben einige Zahlen bei der Betrachtung der Alkoholmischungen angegeben.

Wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen specifischen Gewichtes zusammenmengt, die sich nicht mischen, so z. B. Oel in ein Gemische aus Alkohol und Wasser bringt, so beobachtet man, dass sich die Flüssigkeiten nicht unregelmässiger Weise durch einander lagern, sondern dass die eine in der andern schwimmt, so das Oel in dem Gemische in der Gestalt kugelförmiger Tropfen schwimmt.

Es folgt dieses mit Nothwendigkeit aus den in den vorigen §§. mitgetragenen Lehren über die Oberflächenspannung. Denn dadurch, dass das Oel in dem Alkohol schwimmt, ist es ganz ohne Schwere; die Gleichgewichtsgestalt, in welcher es sich ansammelt, wird daher nur durch die wirksamen Molekularkräfte bedingt. Dieselben sind die Anziehung des Alkohols auf das Oel und die Wirkung des Oeles auf sich selbst, von denen die Cohäsion des Oeles die Anziehung des Alkohols bedeutend überwiegt wie daraus hervorgeht, dass sich die Flüssigkeiten nicht mischen. Denn

nach muss das Oel eine solche Gestalt annehmen, dass die Oberflächenspannung an allen Punkten dieselbe ist. Wir hatten nun für dieselbe allgemein

$$P = K \pm \frac{H'}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right),$$

wenn wir mit  $H'$  die Oberflächenspannung des im Alkohol schwimmenden Olivenöls bezeichnen, welche eben wegen der Anziehung des Alkohols auf das Oel kleiner ist als in einer freien nur von Luft begrenzten Oberfläche des Oels.<sup>1)</sup>

Dieser Ausdruck ist nur dann constant, wenn die Summe

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{const.},$$

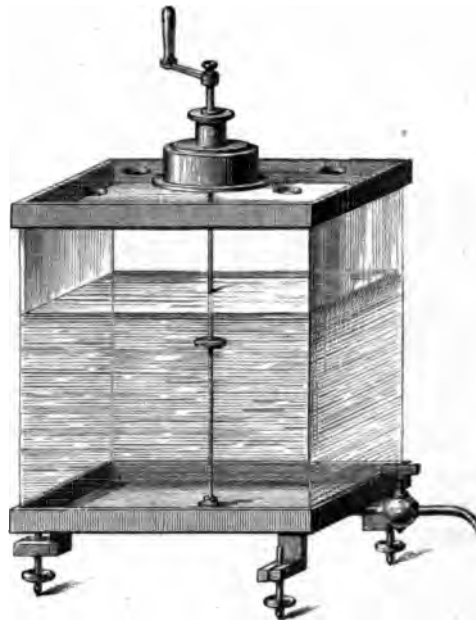
also die Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien für alle Punkte der Oberfläche dieselbe ist. Das ist der Fall, wenn die Oberfläche eine Kugel ist.

Lässt man nun auf den gewichtlosen Tropfen noch andere Kräfte wirken, indem man ihn an feste Körper adhären macht, so kann er noch eine Reihe anderer Gestalten annehmen, für deren freie Oberflächen aber die allgemeine Bedingung bestehen bleiben muss  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{const.}$

Plateau<sup>2)</sup> hat über die Gestalten, welche Flüssigkeiten in einer andern von gleichem specifischen Gewichte annehmen können, vielfache Versuche angestellt. Um zwei Flüssigkeiten gleichen specifischen Gewichtes herzustellen, wandte er ein Gemische von Alkohol und Wasser an, welches das gleiche specifische Gewicht hatte als Oel, so dass also ein Oeltropfen an jeder Stelle dieses Gemisches in indifferentem Gleichgewicht schwimmt.

Die Versuche wurden in einem parallelepipedischen Glasgefäß (Fig. 121) angestellt, dessen Wände aus ebenen Glasscheiben bestanden, die mit ihren Rändern zusammengekittet waren. In der Bodenplatte war ein Hahn ange-

Fig. 121.

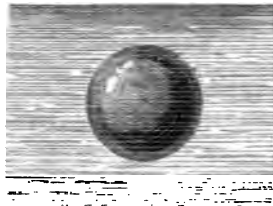


<sup>1)</sup> Ueber die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit in einer andern sehe man Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

<sup>2)</sup> Plateau, in verschiedenen Jahrgängen der Bulletins de l'Académie de Bruxelles, daraus Poggend. Ann. Bd. LV. LVI. Ergänzungsband II. 1848. LXXXIII.

bracht, um die Flüssigkeiten abzulassen, und in der Deckel verschiedene Oeffnungen, um die Flüssigkeiten und einige bei den benutzte Apparate hineinzubringen. Nachdem nun der Kast Weingeistgemische angefüllt ist, bringt man mittels einer klein welche mit einem etwas gefärbten Oele angefüllt ist, in die Flüssigkeit etwas Oel, welches sich an dem Ende der Pipette in grossen Tropfens ansammelt. Zieht man dann die Pipette, na sie oben mit dem Finger verschlossen hat, vorsichtig heraus, so Tropfen in Form einer Kugel ruhig an seinem Platze stehen, Theorie verlangt. Denn ist der Tropfen sich selbst überlassen,

Fig. 122.



die Oberflächenspannung auf ihn e muss diese an allen Stellen gleich se ist, wie wir sahen, der Fall, wenn die der Oberfläche an allen Stellen diese

Wenn man nun den Tropfen a Stellen mittels vorher mit Oel bestrich drähte fixirt, so adhärirt der Tropfe und dort wirkt dann ausser der C Oeles die Adhäsion am Eisen. Die Oberflächen muss demnach eine and

indem an gewissen Stellen die Oberflächenspannung modificirt w freien Oberflächen muss aber auch in diesem Falle  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} = c$

Legt man den Tropfen in einen Ring von Eisendraht, so n Gestalt einer biconvexen Linse an (Fig. 123), deren beide Fläc

Fig. 123.

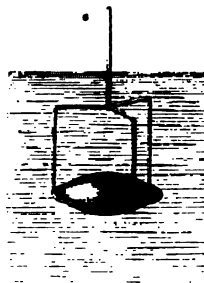
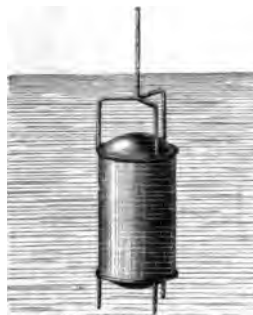


Fig. 124.



segmente von gleich sind. Für die freien ist dadurch die Be

füllt  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} = c$

man den in dem schwebenden Tropfe herablässt, bis er 1 Drahtring berührt, sich auch an dies wenn man dann d Dreifuss befestigter wieder aufzieht, wi Oel in den Tropfen

lässt, so bleibt der Tropfen unten an dem Drahte haften, und zu beiden Drähten bildet sich ein vollkommener Kreiscylinder (Fig. cher oben und unten von Kugelsegmenten gleichen Radius begr

Der eine Krümmungsradius des Cylinders in einer dur parallel derselben geführten Ebene ist unendlich, da diese Ebene d fläche in einer geraden Linie schneidet, deshalb ist

$$\frac{1}{\rho} = 0.$$

Der andere Krümmungsradius ist der Radius des Cylinder die Oberflächenspannung an allen Punkten der freien Oberfläc

sein muss, so muss, wenn wir mit  $\varrho_1$  den Radius der Kugelflächen bezeichnen,

$$K + \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = K + H \cdot \frac{1}{\varrho_1},$$

$$\frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}; \varrho_1 = 2\varrho;$$

es muss demnach der Radius der Kugelsegmente doppelt so gross sein als der Radius des Cylinders. Eine Messung der Höhe der Kugelsegmente und ihrer Krümmung ergibt in der That  $\varrho_1 = 2\varrho$ .

Mittels Drahtfiguren von verschiedener Gestalt ist es Plateau gelungen, noch eine Reihe Flüssigkeitsfiguren herzustellen, so Würfel, Octaeder u. s. f. mit convexen, ebenen und concaven Oberflächen, je nach der Oelmenge, welche er zwischen die Drahtnetze brachte.

Wenn man auf die Tropfen noch andere als die innern Kräfte der Cohäsion und Adhäsion wirken lässt, so wird auch dadurch die Gestalt der Tropfen eine andere. Plateau bewirkte zu dem Ende, dass der Tropfen sich an den in Fig. 121 abgebildeten, in der Mitte des parallelepipedischen Kastens herabgehenden Metalldraht anlegte, welcher mittels der Kurbel in Rotation versetzt werden konnte. Die in der Mitte des Drahtes befindliche Scheibe war vorher mit Oel bestrichen, und nun mittels eines Eisendrahtes die Oelkugel, von 6<sup>em</sup> Durchmesser, so an die Scheibe geführt, dass sie sich symmetrisch um Scheibe und Draht herumlegte (Fig. 125). Wenn man nun die Handhabe langsam dreht, so sieht man zunächst, wie die Kugel allmählich an den Polen, durch welche die Drehungsaxe geht, sich abplattet und am Aequator anschwillt (Fig. 126). Dreht man rascher und rascher,

Fig. 125.



Fig. 126.

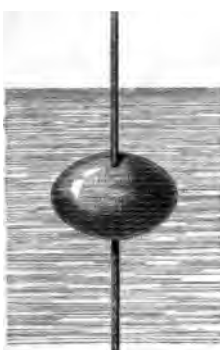
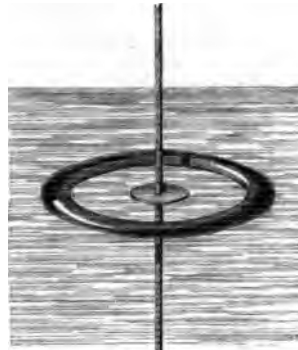


Fig. 127.



so wird die Kugel von unten und oben hohl und dehnt sich immer mehr in horizontaler Richtung aus; endlich verlässt sie die Scheibe und verwandelt sich in einen vollkommen regelmässigen Ring (Fig. 127).

Diese Erscheinungen erklären sich leicht durch die zur Molekularwirkung der Flüssigkeit auf sich selbst hinzutretende Centrifugalkraft. Der ganze an dem Drahte und der Scheibe adhärende Tropfen wird mit in Rotation versetzt, und die einzelnen Theile desselben erhalten dadurch eine von der Drehungsaxe fortgerichtete centrifugale Beschleunigung, welche in der Nähe des Aequators am stärksten ist. Dadurch suchen die Theile in

der Nähe des Aequators sich am stärksten von der Axe zu entfernen. Anfangs wird dieser centrifugalen Beschleunigung durch eine verstärkte Oberflächenspannung das Gleichgewicht gehalten, und es tritt nur eine Abplattung des Tropfens an den Polen, eine Aufhäufung und verstärkte Krümmung am Aequator ein. Ueberwiegt die Centrifugalkraft, so reisst sich die ganze Masse von der Axe los und umgibt dieselbe in Form eines Ringes, der eine Zeit lang besteht, dann aber, da die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung am Alkohol stetig vermindert wird, wieder zusammenfliesst und sich als kugelförmiger Tropfen wieder um die Axe legt.

Durch besondere Kunstgriffe gelang es Plateau<sup>1)</sup> es auch dahin zu bringen, dass sich nur ein Theil des Tropfens als Ring loslöste, während ein anderer Theil in Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids an der Axe haften blieb; also eine Erscheinung hervorzurufen, welche mit der des Saturn im Weltenraume die grösste Aenlichkeit hat.

### §. 81.

**Diffusion.** Wenn man zwei mischbare Flüssigkeiten vorsichtig so zusammengiesst, dass die leichtere anfänglich über der schwerern gelagert ist, so findet dennoch allmählich eine Mischung der Flüssigkeiten statt, indem wegen der stärkern Anziehung der einen Flüssigkeit auf die Moleküle der andern eine Mischung zunächst in der Grenzschicht der beiden Flüssigkeiten eintritt, und aus dieser dann die Moleküle der einen Flüssigkeit weiter in die andere verbreitet werden. Man bezeichnet dieses Durchdringen der verschiedenen Flüssigkeiten mit dem Namen der Diffusion. Je nachdem nun längere oder kürzere Zeit vergeht, ehe die Mischung der Flüssigkeiten auf diese Weise vollständig wird, schreibt man ihnen eine grössere oder kleinere Diffusionsgeschwindigkeit zu.

Am genauesten ist die Diffusion von Salzlösungen in Wasser untersucht. Die Versuche von Graham<sup>2)</sup>, Fick<sup>3)</sup> und Beilstein<sup>4)</sup> haben ergeben, dass die Diffusion der gelösten Salztheile in Wasser proportional ist der Dichtigkeit der Salzlösungen, wenn man die Salzlösungen in reines Wasser diffundiren lässt. Als Dichtigkeit der Lösung wird dann die in 100 Gewichtstheilen Wasser gelöste Gewichtsmenge Salz betrachtet, und als Einheit der Dichtigkeit diejenige, für welche 1 Gewichtstheil Salz in 100 Wasser gelöst ist. Der Satz bedeutet somit, dass die Mengen des unter gleichen sonstigen Verhältnissen in gleichen Zeiten aus einer Salzlösung zum Wasser übergehenden Salzes der Menge des gelösten Salzes proportional sind.

Beilstein wandte folgende Methode an, um dieses nachzuweisen. Die Lösung wurde in eine beiläufig 6<sup>cm</sup> lange Glasröhre (Fig. 128) gefüllt, welche unten umgebogen und nahe an ihrer Umbiegung so abgeschliffen war, dass das Niveau der Mündung möglichst nahe über dem tiefsten Punkte der Umbiegung war; am obern Ende war das Gläschen etwas ausgezogen und durch einen eingeriebenen Glasstöpsel verschliessbar. Um das Gläschen

<sup>1)</sup> *Poggend. Ann. Ergänzungsband II.*

<sup>2)</sup> *Graham, Ueber Diffusion der Flüssigkeiten. Liebig's Annalen LXXVII und LXXX.*

<sup>3)</sup> *Fick, Poggendorff's Annalen XCIV.*

<sup>4)</sup> *Beilstein, Ueber die Diffusion von Flüssigkeiten. Liebig's Annalen XCIX.*

1, wurde es in ein Becherglas ganz in Lösung untergetaucht, und die obere Oeffnung mit der Lösung bedeckt war, mit dem Stöpsel sen. Das gefüllte Gläschen wurde mittels eines durchbohrten Korkes in einen Becherglasrand gesteckt, welches auf dem horizontalen Rande eines mit Wasser gefüllten Becherglases lag, so dass die untere Oeffnung des Gläschens einige Millimeter unter der Oberfläche des Wassers sich befand.

Die Dichtigkeit der in dem Gläschen enthaltenen Lösung war bekannt, dieselbe wurde 48 Stunden, 48 Stunden . . . der Versuch neuerdings bestimmt, und daraus ein allgemeines Gesetz abgeleitet.

Verschiedene Salzlösungen ergaben jedoch die unter sonst gleichen Umständen tretenden Mengen verschieden, so dass für verschiedenen gelösten Salzen eine verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit zu setzen man die Salzmenge, welche in der Zeiteinheit aus der Lösung in Wasser übergeht, für Chlorkalium = 1, so sind die unter gleichen Umständen übergehenden Salz mengen

Chlorkalium . . . . .	= 1
Kalisalpeter . . . . .	= 0,948
Kochsalz . . . . .	= 0,833
Kohlens. Kali . . . . .	= 0,737
Kohlens. Natron . . . . .	= 0,543
Schwefels. Kupfer-Oxyd . . . . .	= 0,344.

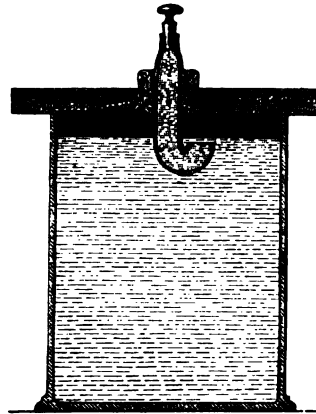
Es ist klar, dass die Diffusionsgeschwindigkeit von der Grösse der Oberfläche des Wassers auf das gelöste Salz abhängt, und dass wir hier ein Maass für diese Anziehung hätten, wenn wir annehmen dürften, dass es noch andere Umstände bestimmend einwirken. Dazu sind wir jetzt berechtigt, besonders da Beilstein aus seinen Versuchen schliesst, dass das Gesetz der Proportionalität der Diffusionsmengen und der Dichtigkeit der Lösungen nur ein angenähertes ist; ein Schluss, welchen Wild<sup>1)</sup> nicht für zulässig hält.

### §. 82.

**Endosmose.** Die Diffusion von Flüssigkeiten beschränkt sich nicht auf die oben betrachteten Fälle, wenn zwei Flüssigkeiten sich direct befeuchten, sondern sie findet auch dann statt, wenn die beiden Flüssigkeiten durch eine poröse Membran von einander getrennt sind. Füllt man z. B. ein Becherglas mit Wasser, und taucht die Membran, welche an ihrem untern Ende durch eine thierische Membran geschlossen ist, mit Alkohol, und taucht sie dann in Wasser, so dass das untere Ende der Membran berührt, so zeigt sich ein Austausch der beiden Flüssig-

<sup>1)</sup> Wild und Simmler, Poggend. Ann. C.

Fig. 128.



keiten, indem durch die Membran hindurch Wasser zum Alkohol und umgekehrt Alkohol zum Wasser übergeht. Ganz dasselbe zeigt sich, wenn man in die Röhre eine Salzlösung bringt, und sie dann in Wasser einsenkt, geht Salz zum Wasser und Wasser durch die Membran in die Röhre, lange, bis die Flüssigkeiten auf beiden Seiten der Membran gleichförmig geworden sind.

In den meisten Fällen beobachtet man dabei an der einen Seite der Membran eine Zunahme der Flüssigkeitsmenge, indem z. B. bei dem Versuch mit Alkohol und Wasser mehr Wasser durch die Membran zum Alkohol in die Röhre dringt, als umgekehrt Alkohol zum Wasser; ebenso, wenn man Wasser und eine Salzlösung durch eine poröse Zwischenwand trennt, findet man stets, dass eine grössere Quantität Wasser zur Salzlösung wandert, als umgekehrt. Enthält deshalb die Röhre Wasser, so sinkt das Niveau in ihr, enthält sie die Salzlösung, so steigt es.

Dieser Umstand deutet schon darauf hin, dass die Scheidewand von wesentlichem Einfluss ist, und dass wir hier nicht eine einfache, nur durch die Scheidewand verzögerte Diffusion der Flüssigkeiten vor uns haben, denn in dem Falle würde eine Veränderung des Niveau in der Weise nicht stattfinden können.

Noch deutlicher zeigt sich das bei Anwendung verschiedener Membranen, indem mit Aenderung der porösen Zwischenwand sich die Niveauänderungen oft geradezu umkehren. So zeigt sich z. B., wenn man Wasser und Weingeist durch eine thierische Membran trennt, dass der stärkere Strom von dem specifisch schwerern Wasser zum leichtern Weingeist geht; dass das Niveau des Weingeistes steigt, jenes des Wassers fällt. Wird dagegen Weingeist und Wasser durch Kautschuk getrennt, so zeigt sich das Entgegengesetzte, das Niveau des Weingeistes sinkt, während das des Wassers steigt.

Man unterscheidet daher die Diffusion der Flüssigkeiten durch feuchte Membranen von der vorhin betrachteten, und bezeichnet sie mit dem Namen der Endosmose.

Um die Endosmose messend zu verfolgen, und die sie bedingenden Umstände aufzufinden, bedarf es der Untersuchung, in welchem Verhältnisse der Austausch verschiedener Stoffe durch poröse Scheidewände geschieht und wie, bei Salzlösungen z. B., der Austausch erfolgt, wenn man verschiedenen dichte Lösungen derselben Substanz unter sonst gleichen Umständen der Endosmose unterwirft.

Die ältern Versuche beschränkten sich darauf, die Volumzunahme zu messen, welche auf der einen Seite der Scheidewand eintrat, und glaubten in dieser Volumzunahme ein Maass des endosmotischen Vorganges zu erkennen. Darauf hin gab Dutrochet<sup>1)</sup> einen Messapparat, das sogenannte Endosmometer an, welches in weiter nichts bestand als in einer getheilten, unten trichterförmig erweiterten und mit einer Membran geschlossenen Röhre. In diese wurde die eine Flüssigkeit, z. B. eine Salzlösung, bis zu einer bestimmten Höhe eingefüllt, und dann die trichterförmige Erweiterung der Röhre in die zweite Flüssigkeit, z. B. Wasser getaucht. Die Volumzu-

<sup>1)</sup> Dutrochet, Annales de chim. et de phys. T. XXXV.

nahme wurde an der Theilung der Röhre abgelesen. Mit diesem oder einem ähnlichen Apparate untersuchten Jerichau<sup>1)</sup>, Brücke<sup>2)</sup>, Vierordt<sup>3)</sup> die Endosmose verschiedener Stoffe durch verschiedene Membranen.

Indess kann diese Methode nicht zu genauen Resultaten führen, da sie nur die Volumänderung der einen Flüssigkeit, also nur den Diffusionsstrom nach der einen Richtung berücksichtigt. Diese Methode würde z. B. in dem Falle, wo die beiden entgegengesetzt gerichteten Ströme, welche den Austausch der Flüssigkeiten vermitteln, ganz gleiche Stärke haben, also eine Volumänderung nicht eintritt, zu dem ganz falschen Schlusse führen, dass gar keine Diffusion eingetreten sei; in diesem Falle würde sie gar nichts messen können. Aus dem Grunde waren auch die Resultate dieser Beobachter mehr qualitativer Natur, es ergaben sich aus ihnen die Thatfachen, welche wir vorhin angeführt haben.

Jedoch folgerten Dutrochet und Vierordt schon aus ihren Versuchen, dass die Stärke der Endosmose bei Lösungen unter sonst gleichen Verhältnissen der Dichtigkeit der Lösungen proportional sei, d. h., dass die Wassermengen, welche in gleichen Zeiten durch die Membran in die Röhre dringen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Dichtigkeit der Lösungen in der Röhre.

Jolly<sup>4)</sup> wandte ein anderes Verfahren an; er maass nicht die Volumänderungen, sondern die Gewichtsänderungen der Endosmometer, denen er dazu auch eine sehr einfache Form gab. Eine cylindrische Glasröhre von vielleicht 2 Decimeter Länge und 1½ Centimeter Weite wurde einfach an ihrem Ende mit einem Stücke einer feuchten thierischen Blase geschlossen, und dann mit einer abgewogenen Menge des zu untersuchenden Stoffes gefüllt, und in reines Wasser getaucht. Der leichtern Uebersichtlichkeit des Versuches wegen wurde dann dafür gesorgt, dass die äussere Flüssigkeit stets Wasser war, indem die Röhre in ein grosses Gefäss mit Wasser getaucht wurde, in welchem das Wasser von Zeit zu Zeit erneuert wurde.

Zunächst liess Jolly den endosmotischen Vorgang so lange dauern, bis im Innern der Röhre nur mehr reines Wasser vorhanden war, indem er so lange die Röhre in das Wasser tauchen liess, bis sich keine Gewichtsänderung der Röhre mehr zeigte. Da dann die eine Substanz ganz aus der Röhre verschwunden war, so erhielt er in der Gewichtszunahme der Röhre die Menge Wassers, welche den ausgetauschten Stoff ersetzt hatte.

Die Versuche ergaben, dass bei gleicher Membran und gleichbleibender Temperatur für eine gewisse Menge des der Endosmose ausgesetzten Stoffes stets die gleiche Menge Wasser eintrat, ob man nun ursprünglich eine kleinere oder grössere Menge des Stoffes in die Röhre gethan hatte. So fand sich, dass bei Anwendung derselben Membran für 1<sup>gr</sup> Kochsalz stets nahezu 4<sup>gr</sup> Wasser in die Röhre getreten waren. Bei einem Versuche zeigten sich z. B. folgende Zahlen, aus denen man auch ein Bild erhält, wie Jolly die Versuche ausführte.

<sup>1)</sup> Jerichau, Poggend. Ann. XXXIV. 613.

<sup>2)</sup> Brücke, De Diffusionum humorum per septa. Berlin. 1841. Daraus Poggend. Ann. Bd. LVIII. p. 77.

<sup>3)</sup> Vierordt in Archiv von Roser und Wunderlich. Bd. VI. 1847.

<sup>4)</sup> Jolly, Zeitschrift für die rationelle Medicin von Henle u. Pfeufer Bd. VII.



Zunächst wurde das Endosmometer leer, aber mit ganz durchfeuchteter Membran gewogen und es war:

Gewicht der Röhre leer, feucht . . . . .	37,81 <sup>gr</sup>
Gewicht des trocknen Kochsalzes . . . . .	2,00 „
Gewicht des Lösungswassers . . . . .	6,20 „
Totalgewicht 46,01 <sup>gr</sup>	
Gewicht nach 6 Tagen, nachdem alles Kochsalz	
aus der Röhre getreten war . . . . .	53,17 <sup>gr</sup>
Die Gewichtszunahme der Röhre betrug also . . .	7,16 „

Da ferner 2<sup>gr</sup> Kochsalz ausgetreten waren, die ebenfalls durch Wasser ersetzt waren, so waren im ganzen 9,16<sup>gr</sup> Wasser bei der Endosmose für die 2<sup>gr</sup> Kochsalz, oder für

1<sup>gr</sup> Kochsalz 4,58<sup>gr</sup> Wasser

eingetreten.

In einem andern Versuche wurden 2,4<sup>gr</sup> trockenes Kochsalz auf die Membran gelegt, und es traten ein 10,36 Wasser, oder für

1<sup>gr</sup> Kochsalz 4,316 Wasser.

In einem dritten Versuche traten für 0,741<sup>gr</sup> Kochsalz 3,215 Wasser ein, oder für

1<sup>gr</sup> Kochsalz 4,338<sup>gr</sup> Wasser.

Jolly wandte zu seinen Versuchen Schweinsblasen an, aber selbst für verschiedene Stücke derselben Membran fanden sich die Werthe der eintretenden Wassermengen für denselben Stoff verschieden. Nur bei Anwendung desselben Membranstückes waren sie constant, indess weichen die von Jolly für verschiedene Stücke Schweinsblase bestimmten Zahlen so wenig von einander ab, dass man wohl füglich eine Mittelzahl aus diesen als für Schweinsblase überhaupt gültig ableiten kann.

Jolly nennt die für 1<sup>gr</sup> eines Stoffes eintretenden Wassermengen das endosmotische Aequivalent des Stoffes. Das endosmotische Aequivalent ändert sich nach den neuern Versuchen von Schmidt<sup>1)</sup> nicht merklich mit der Temperatur. Jolly findet aus seinen Versuchen folgende endosmotische Aequivalente für Schweinsblase:

Kochsalz . . . . .	4,22
Glaubersalz . . . . .	11,05
Schwefels. Kali . . . . .	12,70
Schwefels. Magnesia . . . . .	11,65
Kalihydrat . . . . .	231,40
Alkohol . . . . .	4,13
Zucker . . . . .	7,25.

Für andere Membranen erhält man andere Zahlen; so fand Eckhard<sup>2)</sup> für den Herzbeutel des Rindes das Aequivalent für Kochsalz = 3,2.

<sup>1)</sup> Schmidt in Poggend. Ann. Bd. 102.

<sup>2)</sup> Eckhard, Beiträge zur Physiologie herausgegeben von C. Eckhard. II. Bd. Giessen.

Jolly weist dann in seiner Arbeit ferner nach, dass das von Dutrochet ausgesprochene Gesetz, dass die Stärke der Endosmose der Dichtigkeit der Lösung proportional sei, richtig ist; ein Resultat, welches Schmidt bestätigt.

Gegen Jolly's Annahme endosmotischer Aequivalente trat bald darauf Ludwig<sup>1)</sup> auf, indem er nachzuweisen suchte, dass dasselbe von der Concentration der Flüssigkeit abhängt, welche man der Endosmose aussetzt. So ergaben Ludwig's Versuche für Glaubersalz eine Schwankung zwischen 4 und 42. Indessen lassen sich gegen die Ludwig'schen Zahlen manche Einwendungen machen, indem die Veränderlichkeit derselben mehr auf eine Aenderung der Membran als des Aequivalents hindeutet. Es wurde z. B. auch bei derselben Temperatur ein und derselben Concentration der Lösung einmal 31,9, ein anderesmal 21,0 und bei einem andern Stück Schweinsblase gar nur 8 als endosmotisches Aequivalent des Glaubersalzes gefunden. Die Aenderungen zeigen sich hauptsächlich nach Anwendung krystallisirten Salzes. In solchen Fällen findet Schmidt für Glaubersalz etwas ähnliches, aber viel unbedeutendere Schwankungen als Ludwig, indem Schmidt für Glaubersalz und den Herzbeutel eines Rindes eine Zahl nahe gleich 8 erhält, die bei Anwendung krystallisirten Salzes etwas über 10 wird. Man ist geneigt, dieses auf eine Aenderung der Membran zu schieben.

Als durchaus constant scheint man indes nach neuern Versuchen von Eckhard<sup>2)</sup> die endosmotischen Aequivalente auch bei vollständig gleichbleibender Membran nicht annehmen zu können. Wie Eckhard angibt, bleibt der frische Herzbeutel des Rindes, nachdem derselbe einige Stunden in kaltem destillirtem Wasser ausgewässert und dann zwischen den Versuchen unter Wasser aufbewahrt ist, lange Zeit ungeändert, wie sich daraus ergibt, dass man für das endosmotische Aequivalent, wenn man es von Zeit zu Zeit unter denselben Umständen wieder bestimmt, immer denselben Werth findet.

Zur Bestimmung des Aequivalentes des Kochsalzes verfuhr Eckhard zunächst so, dass er in die Röhre gesättigte Kochsalzlösung und festes Salz brachte, und um auf beiden Seiten der Membran während der ganzen Dauer des Versuches denselben Zustand zu erhalten, den endosmotischen Process nur so lange dauern liess, als in der Röhre sich noch festes Salz befand. Die Menge des eingedrungenen Wassers wurde aus der Gewichtszunahme der Röhre und die Menge des fortgewanderten Salzes aus einer Analyse des Röhreninhalts bestimmt. Für Kochsalz ergab sich so der vorhin angegebene Werth 3,2.

Um bei verdünntern Lösungen ebenso auf beiden Seiten der Membran während des Versuches einen constanten Zustand zu erhalten, liess Eckhard während der Dauer desselben durch die Röhre einen Strom von einigen hundert Cubikcentimetern der benutzten Lösung gehen; aus deren Concentration, die immer sehr klein war, wurde dann die übergegangene Salzmenge bestimmt. Für eine Lösung, die etwa 22 Theile Kochsalz in 100 Wasser gelöst hatte, ergab sich so als Aequivalent 2,88, für eine von 12,5 Theilen Salz auf 100 Wasser 2,34, also ergab sich dasselbe mit abnehmender Concentration kleiner.

<sup>1)</sup> Ludwig in Zeitschrift für rationelle Medicin. B. VIII.

<sup>2)</sup> Eckhard, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII. p. 61.

Mit dieser Angabe Eckhard's scheint mir indess eine andere nicht vereinbar, nach welcher sich immer dasselbe Aequivalent findet, wenn eine gesättigte Lösung in andere Lösungen desselben Salzes diffundiren welches auch die Concentration der äussern Lösung ist.

Es fragt sich nun, nach Vorführung der wichtigsten, die endosmotischen Erscheinungen betreffenden Thatsachen, wie haben wir uns die Volumveränderungen der Flüssigkeiten, den Austausch nach verschiedenen Mengen zu erklären. Wir lassen hier die von Jolly gegebene Theorie folgen, da sie die einfachste ist und die wenigsten Hypothesen voraussetzt.

Wird eine poröse, mit unzählig vielen capillaren Zwischenräumen versehene Membran in eine Flüssigkeit getaucht, so beweisen uns Versuche, dass je nach der Molekularanziehung zwischen der Substanz der Membran und der Flüssigkeit verschiedene Mengen Flüssigkeit von der Membran resorbirt werden; so nehmen 100 Gewichtstheile trockne Ochsenblase in 24 Stunden auf

268	Gewichtstheile Wasser,
133	„ Kochsalzlösung (1,214 spec. Gew.),
38	„ Weingeist (84 Proc.).

Wird deshalb eine Membran in ein Gemische zweier Flüssigkeiten getaucht, so wird sie von beiden nach Maassgabe ihrer Anziehung resorbirt, also auch aus einer Salzlösung gelöstes Salz und Wasser. Jolly nimmt an, dass die Menge des resorbirten in einer Salzlösung gelösten Salzes proportional sei der Dichtigkeit der Lösung.

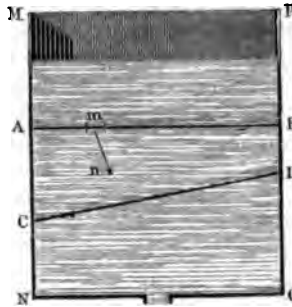
Wenn nun eine Membran zur Trennung zweier Flüssigkeiten, Wasser und Kochsalzlösung dient, so wird die Membran durch Molekularanziehung jeden der beiden getrennten Stoffe aufnehmen; die Quantität aufgenommenen Kochsalzes ist aber verschieden nach der Dichtigkeit der Lösung. Dieser nun so mit zwei Stoffen imprägnirten Blase wird auf einer Seite durch das daran liegende Wasser Kochsalz, auf der andern durch das daran liegende Kochsalz Wasser entzogen; in verschiedenen Mengen jedoch, weil die resorbirten Stoffe in verschiedenen Mengen in der Blase enthalten sind, und weil die Resultirende aller Molekularanziehungen gelöstes Salztheile auf das Wasser verschieden ist, je nach der Dichtigkeit der Lösung. Nimmt man an, dass die Resultirende proportional sei der Dichtigkeit der Lösung, so folgt hieraus, dass das Verhältniss der sich austauschenden Stoffe für alle Dichtigkeitsgrade der Lösung constant bleibt. Denn wird die Dichtigkeit der Lösung z. B. die Hälfte, so wird auch resorbirt Salzmenge die Hälfte, das Wasser entzieht also der Blase die halbe Menge Salz; ebenso entzieht aber auch die Lösung, deren Dichtigkeit die Hälfte ist, der Blase nur die halbe Menge Wasser. Sind die endosmotischen Aequivalente nicht constant, so muss man schliessen, dass die Resultirende Molekularanziehung der Lösungsdichtigkeit nicht einfach proportional zu setzen ist, sondern mit derselben in complicirterer Beziehung steht.

### §. 83.

**Ausfluss der Flüssigkeiten. Toricelli's Theorem.** Wenn man einen Boden oder die Seitenwand eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Ge-

nung macht, so fliesst die Flüssigkeit mit einer gewissen Ge-  
 schwindigkeit daraus hervor, welche um so grösser ist, je grösser das Niveau  
 der Flüssigkeit über der Ausflussöffnung ist. Um diese Geschwindigkeit zu  
 messen, wollen wir uns ein Gefäss denken, in welchem trotz des Aus-  
 flusses durch regelmässiges Nachfliessen die Flüssigkeit auf demselben Niveau  
 erhalten wird. Da die unten in der Oeffnung ausfliessende Flüssigkeit so-  
 fort durch nachsinkende Flüssigkeit wieder ersetzt wird, so muss die ganze  
 Flüssigkeit über der Ausflussöffnung befindliche Flüssigkeit in Bewegung ge-  
 bracht werden, und sich mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen die Ausfluss-  
 öffnung bewegen. Dabei muss sich dann ferner sofort nach Beginn des Aus-  
 flusses in dem ganzen Gefässe ein stationärer Zustand einstellen, das  
 heisst es muss durch jeden Querschnitt des Gefässes in gleichen Zeiten die  
 selbe Menge von Flüssigkeit hindurchgehen. Denn ist  $AB$  Fig. 129 ein  
 beliebiger Querschnitt durch die Flüssigkeit des Gefässes  $MNOP$  und  $CD$  irgend ein  
 anderer Querschnitt, so ist die zwischen diesen beiden Querschnitten vor-  
 liegende Flüssigkeitsmenge immer dieselbe; es muss daher in gleichen Zeiten  
 zwischen den Querschnitten gelegenen Raum durch  $AB$  ebensoviel  
 Flüssigkeit eintreten, wie ihn durch den Querschnitt  $CD$  wieder verlässt.  
 Wir nehmen nun die mittlere senkrecht gegen  $AB$  gerichtete Componente  
 der Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen im  
 Mittel  $u$ , wo sie  $AB$  passiren,  $u$ , und die Grösse  
 des Querschnitts  $Q$ , so ist die Menge Flüssigkeit,  
 welche in der Zeiteinheit den Querschnitt  $AB$   
 durchläuft, gleich  $Qu$ . Wir bezeichnen  $u$  als die  
 mittlere senkrecht gegen  $AB$  gerichtete Ge-  
 schwindigkeitscomponente, denn in Wirklichkeit  
 geht nicht weder alle Theilchen senkrecht gegen  
 $AB$ , noch alle mit derselben Geschwindigkeit be-  
 wegung. Aber welches auch die Richtung und  
 die Geschwindigkeit der einzelnen Theilchen sei,  
 wir können immer die in der Zeiteinheit durch  $AB$   
 tretende Flüssigkeit durch einen senk-  
 rechtlichen Cylinder darstellen, dessen Basis der  
 Querschnitt  $AB$  und dessen Höhe  $u$  ist; diese Höhe  $u$  ist dann die mittlere  
 senkrechte Geschwindigkeit der Flüssigkeit, denn wenn alle  
 Theilchen mit dieser Geschwindigkeit den Querschnitt  $AB$  durch-  
 läuferten, würde genau soviel Flüssigkeit durch  $AB$  hindurchgehen, als wirk-  
 lich durchgeht.

Fig. 129.



Es hat dieselbe Bedeutung für den Querschnitt  $CD$ , dessen Grösse  
 $Q'$  sei, so ist die in der Zeiteinheit durch diesen hindurchgehende  
 Flüssigkeitsmenge gleich  $Q' \cdot u'$ . Es ergibt sich somit

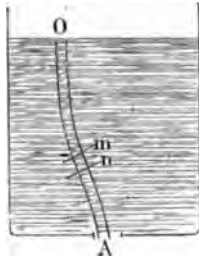
$$Q \cdot u = Q' \cdot u' \quad \dots \quad (I),$$

die mittleren Geschwindigkeiten, mit welchen die Flüssigkeitstheilchen  
 durch die verschiedenen Querschnitte passiren, verhalten sich umgekehrt wie die  
 Grössen der Querschnitte.

Der stationäre Zustand ist ferner dadurch charakterisirt, dass während  
 des Ausflusses durch irgend ein beliebiges Element eines Querschnittes die  
 Flüssigkeit immer mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Rich-

tung hindurchgeht, dass also die Flüssigkeitstheilchen sich immer in denselben Bahnen bewegen; wird also das Element  $m$  einmal von der Flüssigkeit mit einer gewissen Geschwindigkeit nach der Richtung  $mn$  durchsetzt so bewegt sich während der ganzen Dauer des stationären Zustandes die Flüssigkeit in der gleichen Weise hindurch. Es folgt das einfach daraus, dass es immer genau dieselben Kräfte sind, welche die Flüssigkeit bewegen, und dass die Bewegung immer unter denselben Umständen stattfindet. Dieser Satz gestattet uns das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Innern des Gefässes ändert und dann mit Hülfe von Gleichung (I) die Geschwindigkeit in der Ausflussöffnung zu berechnen.

Fig. 130.



Ist nämlich  $OA$  der Weg, den ein Flüssigkeitselement von der Oberfläche bis zur Ausflussöffnung zurücklegt, so werden alle bei  $O$  die Oberfläche verlassenden Flüssigkeitselemente denselben Weg mit derselben Geschwindigkeit zurücklegen, es wird also der Kanal stetig mit Flüssigkeit erfüllt sein, die sich in der Richtung dieses Kanals bewegt. Sei nun bei  $m$  in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche ein Querschnitt des Kanals gleich  $q$ , und sei  $v$  die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit den Querschnitt durchsetzt, so wird in der Zeit  $dt$  ein Flüssigkeitsvolumen  $q \cdot v \cdot dt$  durch diesen Querschnitt durchfließen. Dabei, während also jedes Flüssigkeitstheilchen den Weg  $v \cdot dt$  zurücklegt oder von dem Querschnitt  $m$  zu dem um  $v \cdot dt$  entfernten Querschnitt  $n$  gelangt, nimmt die Geschwindigkeit um  $dv$  zu, so dass der Querschnitt  $n$  mit der Geschwindigkeit  $v + dv$  passiert wird. Diesen Geschwindigkeitszuwachs, den das Flüssigkeitsvolumen  $q \cdot v \cdot dt$  in der Zeit  $dt$  erhält, können wir nun mit Hülfe der die Flüssigkeit bewegenden Kräfte bestimmen. Ist  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit,  $g$  die Beschleunigung beim freien Fall, so dass  $\frac{s}{g}$  die Masse der Volumeinheit der Flüssigkeit ist, so ist  $\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dt$  die in der Zeit  $dt$  durch  $m$  passierende Flüssigkeitsmasse, welche auf dem Wege  $mn$  in der Zeit  $dt$  den Geschwindigkeitszuwachs  $dv$  erhält. Die in der Zeit  $dt$  dieser Masse durch die wirksamen Kräfte erteilte Bewegungsgrösse ist somit

$$\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dt \cdot dv.$$

Diese Bewegungsgrösse muss nun gleich dem Produkte aus der diese Geschwindigkeitszuwachs bewirkenden Kraft in die Zeit  $dt$  sein. Diese bewegende Kraft ist zunächst die der Bewegungsrichtung parallele Componente der Schwere der herabsinkenden Masse. Das Gewicht dieser Masse ist  $s \cdot q \cdot v \cdot dt$ ; ist nun  $\alpha$  der Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Schnitte  $m$  und  $n$  mit der verticalen bildet, so ist die der Bewegungsrichtung parallele Componente des Gewichtes

$$s \cdot q \cdot v \cdot dt \cdot \cos \alpha.$$

Da  $v \cdot dt$  der Abstand der beiden Schnitte  $m$  und  $n$  ist, so ist  $v \cdot dt \cdot \cos \alpha$  der verticale Abstand des Schnittes  $n$  von  $m$ , oder der Zuwachs, den d

von der Oberfläche gerechnete Tiefe  $h$  erfährt, wenn die Flüssigkeit von dem Schnitte  $m$  zu dem Schnitte  $n$  herabsinkt; setzen wir diese gleich  $dh$ , so wird die der Bewegungsrichtung parallele Componente der Schwere

$$s \cdot q \cdot dh.$$

In der Schicht  $m$  wirkt nun ferner auf die Flüssigkeit ein gewisser Druck, der für die Flächeneinheit gleich  $p$  sei; in der tiefer liegenden Schicht  $p$  ist dieser Druck ein grösserer, setzen wir ihn  $p + dp$ . Da nun die Flüssigkeit sich von einer Stelle geringeren zu einer solchen grössern Druckes bewegt, so wirkt diese Vergrößerung des Druckes der Bewegung entgegen, und dieser auf die Fläche  $q$  wirkende Gegendruck ist  $q \cdot dp$ . Die während der Zeit  $dt$  auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ist somit

$$s \cdot q \cdot dh - q \cdot dp.$$

Da nun die durch diese Kraft der Flüssigkeit ertheilte Bewegungsgrösse dem Producte aus der Kraft in die Zeit, in welcher sie der Flüssigkeit die Bewegungsgrösse ertheilt hat, gleich sein muss, so folgt

$$\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dv \cdot dt = (s \cdot q \cdot dh - q \cdot dp) dt,$$

oder wenn wir auf beiden Seiten durch  $qdt$  dividiren,

$$\frac{s}{g} \cdot v \cdot dv = s \cdot dh - dp.$$

Diese Gleichung liefert uns die Zunahme der Geschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit um die Höhe  $dh$  herabsinkt. Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Oberfläche, in welcher  $h=0$ , der Druck  $p = p_0$  etwa gleich dem Drucke der Atmosphäre ist, verlässt, mit  $v_0$ , so erhalten wir die Geschwindigkeit  $v$  in der Tiefe  $h$ , wo der Druck gleich  $p$  ist, wenn wir für alle zwischen der Oberfläche und der Tiefe  $h$  liegenden Schichten den Werth  $dv$  bestimmen und dann alle diese Ausdrücke summiren, also in der Summe

$$\int_{v_0}^v \frac{s}{g} v \, dv = \int_{h=0}^h s \, dh - \int_{p_0}^p dp.$$

In schon mehrfach gezeigter Weise sind diese Summen

$$\frac{1}{2} \frac{s}{g} (v^2 - v_0^2) = s \cdot h - (p - p_0) \dots \dots (II),$$

eine Gleichung, welche uns, wenn wir  $v_0$ ,  $p$  und  $p_0$  kennen, die Geschwindigkeit  $v$  in der Tiefe  $h$  zu berechnen gestattet.

Wir haben bei dieser Entwicklung einen Flüssigkeitsfaden vom Querschnitt  $q$  von übrigens beliebiger Lage vorausgesetzt und für ihn nur die Bedingung gemacht, dass er die Bahn eines Elementes der Flüssigkeit von der Oberfläche bis zur Ausflussöffnung sei. Da wir über die Lage dieses Flüssigkeitsfadens keine weitere Voraussetzung gemacht haben, so gilt diese Gleichung für alle Flüssigkeitsfäden, oder für die ganze ausströmende Flüssigkeit, so dass uns obige Gleichung ganz allgemein die Geschwindigkeit  $v$  in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche liefert.

Ist nun  $H$  die Tiefe der Ausflussöffnung unter dem Niveau,  $p_1$  der Druck in derselben, welcher der Bewegung der Flüssigkeit entgegenwirkt, so erhalten wir die Ausflussgeschwindigkeit  $v_1$  aus der Gleichung

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2gH - 2 \frac{g}{s} (p_1 - p_0).$$

Um in dieser Gleichung noch den Quotienten  $\frac{v_0^2}{v_1^2}$  zu bestimmen, dient die Gleichung (I). Ist die Oberfläche horizontal, somit in ihr ein überall gleicher verticaler Druck vorhanden, so ist die Bewegung dort in allen Punkten eine vertical abwärts gerichtete, es ist also  $v_0$  gleichzeitig die mittlere senkrecht gegen den Querschnitt der Flüssigkeit gerichtete Geschwindigkeit. Setzen wir dann weiter eine Ausflussöffnung voraus, deren Querschnitt gegen den des Gefässes nur klein ist, so werden wir auch in dieser die Geschwindigkeit als senkrecht gegen die Ausflussöffnung gerichtet und als überall gleich ansehen dürfen, einerlei ob die Oeffnung im Boden oder in derselben Tiefe  $H$  unter dem Niveau der Flüssigkeit in einer Seitenwand sich befindet. Ist dann  $Q_0$  der Querschnitt des Gefässes in der Oberfläche der Flüssigkeit,  $q_1$  der der Ausflussöffnung, so ist nach Gleichung (I)

$$Q_0 \cdot v_0 = q_1 \cdot v_1, \quad \frac{v_0^2}{v_1^2} = \frac{q_1^2}{Q_0^2},$$

somit

$$v_1^2 \left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right) = 2gH - 2 \frac{g}{s} (p_1 - p_0).$$

Findet nun der Ausfluss in freier Luft statt, und wirkt auf die Oberfläche ebenfalls nur der Druck der Atmosphäre, so ist  $p_1 = p_0$ , da der Druck der Atmosphäre auf die Flüssigkeitsoberfläche und die Ausflussöffnung denselbe ist, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)}}.$$

Ist, wie wir voraussetzten,  $q_1$  gegen  $Q_0$  sehr klein, so ist der Nenner unter dem Wurzelzeichen nicht merklich von 1 verschieden, und dann gelangen wir zu dem Ausdruck

$$v_1 = \sqrt{2gH}.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe der Flüssigkeit direkt proportional, oder gleich der Geschwindigkeit, welche ein frei die Höhe der Flüssigkeit durchfallender Körper im Niveau der Ausflussöffnung erlangt hat, ein Satz, der schon von Toricelli erkannt wurde, und der den Namen des Toricelli'schen Theorems führt.

Eine wichtige Folgerung dieses Satzes ist die, dass die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durchaus unabhängig ist von der Natur derselben, gerade so wie alle Körper gleich schnell fallen, dass dieselbe nur abhängig ist von der Druckhöhe im Gefässe. Diese Folgerung hat nichts auffallendes, wenn man bedenkt, dass bei gleichen Druckhöhen bei schwerern Flüssigkeiten auch in demselben Verhältniss die Masse der zu bewegendem Flüssigkeit zunimmt, wie wegen des Gewichtes der drückenden Säule der Druck zunimmt.

dieses Gesetz experimentell zu bestätigen, genügt es, die Flüssigkeitsdruckhöhe aus einer seitlichen Oeffnung eines Gefässes zu lassen. Da jedes Flüssigkeitstheilchen dann die Oeffnung mit

antenen horizontalen

ligkeit verlässt, so

sich gerade wie

ontal geworfener

Es gelten daher

Gesetze, welche

1 für geworfene

ntwickelten. Der

de Strahl muss da-

stalt einer Parabel

g. 131), deren ein-

kte man für jede

bestimmen kann.

von dem Punkte  $a$

$s$ , und nennen den

en Abstand des Wassertheilchens von der Wandfläche zur Zeit  $t$ ,  $y$ ,

verticalen Abstand von  $a$  oder  $b$ ,  $x$ , so muss zugleich für jedes

ilchen

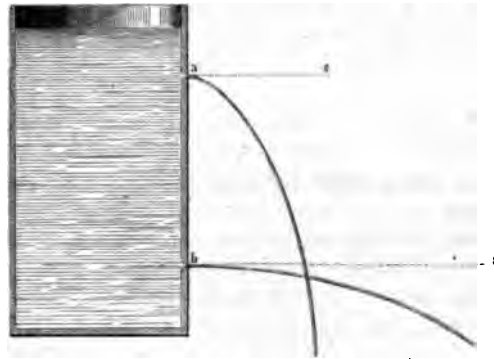


Fig. 131.

$$y = \sqrt{2gH} \cdot t, \quad x = \frac{g}{2} t^2$$

heisst, in einem horizontalen Abstand  $\sqrt{2gH} \cdot t$  muss das Theil-  
 $\frac{g}{2} t^2$  unter der Oeffnung liegen. Die zusammen gehörigen  $x$  und  $y$   
 wir dadurch, dass wir  $t$  eliminiren

$$t^2 = \frac{y^2}{2gH} \quad t^2 = \frac{2x}{g}$$

$$y^2 = \frac{4gHx}{g} = 4Hx.$$

kann sich bei Unterhaltung eines continuirlichen Wasserstrahles  
 erzeugen, dass die Gestalt desselben der Theorie entspricht.

Gleichung (II) lässt noch eine bemerkenswerthe Folgerung zu über  
 eilung des Druckes im Innern einer fliessenden Flüssigkeit, sie  
 s der Druck in derselben ein ganz anderer ist, als er in einer  
 Flüssigkeit sich nach den Gesetzen der Hydrostatik ergibt. Lösen  
 ch die Gleichung (II) nach  $p$  auf, so erhalten wir für den in der  
 rhandenen Druck  $p$

$$p = p_0 + sh - \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} (v^2 - v_0^2).$$

beiden ersten Glieder auf der rechten Seite geben den im Niveau  
 nder Flüssigkeit vorhandenen hydrostatischen Druck, man sieht  
 tteilbar, dass der Druck in der fliessenden Flüssigkeit kleiner ist,  
 rösse, die dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit propor-

Man bezeichnet diesen Druck  $p$  als den hydraulischen Druck.

Grösse dieses Druckes lässt sich leicht auswerthen in Gefässen  
 r Form, dass die Geschwindigkeit  $v$  gleichzeitig die gegen die



Querschnitte senkrechte Geschwindigkeit ist, also in nicht zu engen Röhren etwa, welche aus einem grössern Reservoir vertical absteigen. Ist  $q$  der Querschnitt des Reservoirs gegen jenen der Röhren hinreichend gross, können wir zunächst  $v_0 = 0$  setzen. Ist dann  $H$  die Tiefe der Ausflussöffnung,  $q_1$  der Querschnitt der Ausflussöffnung und  $q$  der Querschnitt der Röhre in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche, so ist

$$q \cdot v = q_1 \cdot v_1,$$

somit

$$p = p_0 + sh - \frac{1}{2} \frac{s}{g} \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 v_1^2$$

und wenn die Röhren nicht zu enge sind und der Ausfluss in freier Luft erfolgt,

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 2gH \\ p &= p_0 + sh - s \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 H \\ p &= p_0 + s \left( h - \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 H \right). \end{aligned}$$

Je nach dem Verhältniss der Querschnitte  $q_1$  und  $q$  kann das zweite Glied auf der rechten Seite positiv, Null oder negativ werden. Ist z. B.  $h = 0,25 H$  und  $q = 2q_1$ , so wird das zweite Glied Null, der dort vorhandene Druck ist also einfach gleich dem auf der Oberfläche der Flüssigkeit lastenden Drucke. Fliesst also die Flüssigkeit in freier Luft aus, so würde man an einer solchen Stelle die Gefässwand durchbohren können, ohne dass dort Flüssigkeit austräte, oder dass die Bewegung der Flüssigkeit im geringsten gestört wird.

Ist  $q_1 = q$ , fliesst also die Flüssigkeit durch hinreichend weit cylindrische Röhren, deren unterster Querschnitt die Ausflussöffnung ist aus einem grössern Reservoir aus, so wird

$$p = p_0 - s(H - h),$$

es ist also in allen Punkten dieser Röhren der Druck kleiner als der an der Oberfläche der Flüssigkeit wirkende Druck, der Druck wird um  $s$  kleiner, je grösser  $H - h$  ist. Anwendungen dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel in der Sprengel'schen Luftpumpe und den dieser ähnlich construirten Apparaten kennen lernen.

#### §. 84.

**Ausflussmenge.** Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnten, lässt sich das Toricelli'sche Theorem durch Beobachtung der parabolischen Bahn eines horizontal ausfliessenden Wasserstrahls experimentell nachweisen. Man kann indess dieses Theorem noch in anderer Weise prüfen, indem man die Menge der aus einer kleinen Oeffnung von bekanntem Querschnitt ausfliessenden Flüssigkeit misst, und diese mit der durch das Toricelli'sche Theorem gegebenen vergleicht. Ist die Ausflussgeschwindigkeit gleich  $\sqrt{2gH}$  und der Querschnitt der Oeffnung gleich  $q_1$ , so tritt in der Zeit  $t$  aus der Oeffnung ein Cylinder hervor, dessen Volumen, die in der Zeit austretende Flüssigkeitsmenge,  $m$  gleich ist

$$m = q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Bezeichnen wir mit  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist das Gewicht  $p$  der ausgeflossenen Flüssigkeit

$$p = s \cdot m = s \cdot q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Sammelt man nun aber die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge in einem Gefäss von bekanntem Gewicht, und bestimmt man die wirklich ausgeflossene Menge durch Wägung, so findet man dieselbe stets kleiner, und zwar so, dass das Gewicht derselben  $p'$

$$p' = 0,62 \cdot p,$$

die ausgeflossene Menge also nicht ganz  $\frac{2}{3}$  der theoretisch berechneten beträgt.

Dieses Resultat, welches sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt, steht demnach mit der Theorie in Widerspruch. Jedoch ist dieser Widerspruch nur scheinbar, denn die Voraussetzungen, unter denen wir die Ausflussmengen theoretisch entwickelten, sind nicht vollständig; wir haben einige störende Umstände vernachlässigt, welche uns eine genauere Betrachtung des ausfliessenden Strahles kennen lehrte.

Wenn man nämlich den aus einer Bodenöffnung ausfliessenden Strahl aufmerksam betrachtet, so findet man, dass er nicht, wie wir es voraussetzten, cylindrisch ist, sondern dass er sich sehr rasch unter der Oeffnung zusammenzieht und eine kegelförmige Gestalt annimmt (Fig. 132) und erst von  $CD$  ab mit nahezu cylindrischer Form weiter herabfällt. Diese Contraction haben wir bisher ausser Acht gelassen. Denn nach unseren bisherigen Betrachtungen dürfte nur eine geringe und während des ganzen Strahles, soweit er zusammenhängt, regelmässige Zusammenziehung des Strahles stattfinden, die sich leicht näher bestimmen lässt. Nach dem Verlassen der Ausflussöffnung wird nämlich die Bewegung der Flüssigkeit durch die Wirkung der Schwere eine gleichmässig beschleunigte.

Eine Schicht, welche die Oeffnung mit der Geschwindigkeit  $v_1$  verlassen hat, durchläuft demnach in der Zeit  $T$  die Strecke  $S$

$$S = v_1 \cdot T + \frac{g}{2} \cdot T^2.$$

Nach der Zeit  $T$  verlässt nun eine zweite Schicht die Oeffnung, welche von der ersten um  $S$  entfernt ist. Dieser Abstand muss sich aber vergrössern; denn betrachten wir ihn nach der Zeit  $t$ , so ist der Abstand der ersten Schicht von der Oeffnung zur Zeit  $T + t$  gleich  $S + S'$

$$S + S' = v_1 (T + t) + \frac{g}{2} (T + t)^2,$$

der Abstand der zweiten Schicht  $S''$  aber

$$S'' = v_1 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

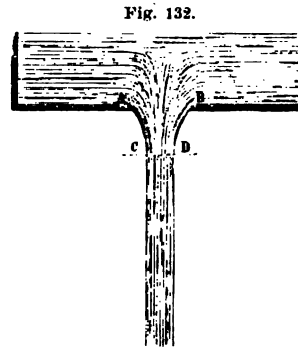


Fig. 132.

Der Abstand beider Schichten daher

$$S + S' - S'' = v_1 (T + t) - v_1 t + \frac{g}{2} \left\{ (T + t)^2 - t^2 \right\},$$

$$S + S' - S'' = v_1 \cdot T + \frac{g}{2} \cdot T^2 + g \cdot T \cdot t = S + g \cdot T \cdot t.$$

Der Abstand der Schichten wächst demnach proportional  $T$ ; soll der Strahl zusammenhängend sein, so muss er in eben dem Verhältniss eng werden, also regelmässig und nahezu in demselben Verhältniss, als er sich von der Oeffnung entfernt. Statt dessen beobachtet man sehr nahe unter der Oeffnung eine sehr rasche Zusammenziehung des Strahles, so zwar, dass der Querschnitt desselben in einem Abstände von der Oeffnung, der ungefähr dem Halbmesser der Oeffnung gleich ist, nur mehr gleich  $\frac{2}{3}$  von dem Querschnitte der Oeffnung ist. Von da an zieht sich der Strahl dann nur mehr in der Weise zusammen, wie er es nach unseren obigen Entwicklungen thun muss, bis er in Tropfen zersplittert.

Diese anormale Contraction des Strahles, welche man als Contractio venae bezeichnet, vermindert also den Querschnitt desselben so, dass weniger als  $\frac{2}{3}$  der Ausflussöffnung wird; sie ist für grössere Oeffnungen und stärkere Drucke sogar noch bedeutender.

Es ist klar, dass dadurch die Ausflussmenge eine kleinere werden muss, und die Erfahrung hat ergeben, dass diese sich gerade so verhält als sei die engste Stelle des Strahles dort, wo die Contractio venae anhört, die wirkliche Ausflussöffnung. Die Erfahrung ergibt nämlich, wie wir gesehen haben, dass die wirkliche Ausflussmenge  $m'$  ist

$$m' = 0,62 m,$$

oder

$$p' = 0,62 \cdot s \cdot q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Mannigfache Versuche, die Störungen, welche die Contraction verursachen, mit in Rechnung zu ziehen, und so auch die Menge  $p'$  theoretisch zu berechnen, haben noch zu keinem befriedigenden Resultate geführt. In demselben können wir uns doch über die Gründe Rechenschaft geben, welche die Contraction veranlassen. Es ist nicht, wie wir im vorigen Paragraphen voraussetzten, die Geschwindigkeit aller der Oeffnung passirenden Flüssigkeitstheilchen auch senkrecht gegen die Oeffnung gerichtet

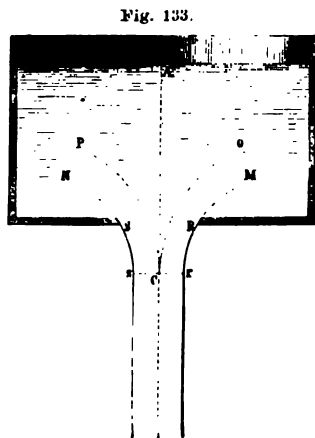


Fig. 133.

Es bewegen sich nämlich nicht nur die senkrecht über der Oeffnung  $mn$  liegenden Flüssigkeitstheile, sondern wegen der freien Beweglichkeit derselben auch die seitlich liegenden gegen die Ausflussöffnung hin. Es werden daher z. B. die Wassertheilchen recht von der Oeffnung in der Richtung  $MR$  und  $OC$ , die Theilchen links in  $NS$  und  $PC$  sich bewegen. Die zwischen  $M$  und  $O$ ,  $N$  und  $I$  gelegenen Wassertheilchen haben daher eine seitliche gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit. Der Strahl besteht demnach aus einer konischen Hülle, welche

aus convergirenden Flüssigkeitsfäden gebildet ist. Dort, wo diese von entgegengesetzter Seite kommenden Flüssigkeitsfäden sich treffen, muss die nicht von der beschleunigten Bewegung herrührende Querschnittsverminderung, die eigentliche *Contractio venae*, ihr Ende erreichen, indem dort die seitlichen Geschwindigkeiten der von entgegengesetzter Seite kommenden Wassertheilchen sich aufheben, und eine vertical herabgehende Resultirende ergeben. Demnach ist eigentlich nicht die Oeffnung *SR* der Querschnitt der Ausflussöffnung, sondern der durch die Contractionsstelle *C* geführte Querschnitt, da erst von dort an die Flüssigkeit unserer Annahme gemäss sich vertical herab bewegt, also von dort erst die Voraussetzungen unserer Berechnungen stattfinden. Da nun die Contraction an dieser Stelle so stark ist, dass der Querschnitt bei *sr* gleich ist 0,62 der Oeffnung, so kann auch die Ausflussmenge nur 0,62 der vorhin berechneten sein.

Aus dieser Erklärung lässt sich auch leicht der Einfluss von Ansatzröhren an die Ausflussöffnung ableiten. Wenn man nämlich die Flüssigkeit anstatt durch eine einfache Wandöffnung durch kurze Röhren ausfliessen lässt, so wird dadurch die Ausflussmenge je nach der Gestalt der Röhren verschieden modificirt. Hat die Ausflussröhre eine konische Gestalt, so dass sie sich der Gestalt des ausfliessenden Strahles anschmiegt, so wird dadurch, wenn wir als Ausflussöffnung die der Wand des Gefässes ansehen, die Ausflussmenge nicht modificirt; sehen wir aber als Ausflussöffnung den Querschnitt der Röhre an ihrem Ende an, so wird die Ausflussmenge vergrössert, da sie so gross ist, als das Toricelli'sche Theorem ohne weiteres sie von einer solchen Oeffnung verlangt.

Wendet man aber eine cylindrische Röhre an, welche von der Flüssigkeit benetzt wird, oder setzt man an das erste konische Rohr ein zweites konisches Rohr an, welches sich wieder erweitert und allmählich in einen Cylinder übergeht von der Weite der Ausflussöffnung, so wird die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit bedeutend gesteigert, so dass 0,8—0,9 der theoretischen Ausflussmenge ausfliesst. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn der Strahl rings an den Wänden des Cylinders adhärirt, thut er das nicht, so wird die Ausflussmenge nicht geändert.

Durch die konischen Ansatzröhren, welche sich der Gestalt des Strahles annähern, wird die Bewegung der Flüssigkeiten nicht geändert, höchstens durch Reibung an der Röhrenwand um ein geringes verzögert; in cylindrischen Ausflussröhren wird aber durch die Adhäsion der Flüssigkeit an den Wänden des Cylinders der contrahirte Strahl wieder verbreitert und nahezu cylindrisch gemacht. Dadurch würde der Strahl zerreißen und im Innern des Rohres ein leerer Raum entstehen müssen. Dem wirkt aber nun die Cohäsion des Wassers und der äussere Luftdruck entgegen, der zum Theil die Flüssigkeit in die Röhre nachtreibt, zum Theil den Ausfluss etwas verzögert. Dadurch aber, dass der ausfliessende Strahl nahezu cylindrisch wird, vermehrt sich die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit.

Wenn man sich auch zum Theil über diese die Ausflussmengen betreffenden Thatsachen Rechenschaft geben kann, so sind wir doch noch weit entfernt, dieselben vollständig verstehen und aufklären zu können. In den meisten Fällen, besonders wenn der Ausfluss anstatt aus einfachen Wandöffnungen aus Röhrensystemen erfolgt, welche noch dazu zum Theil ge-

krümmt sind, finden wir uns auf die Resultate der Erfahrung angewiesen, um die Mengen der ausfliessenden Flüssigkeit zu bestimmen, da die theoretische Behandlung zu viele Schwierigkeit bietet.

### §. 85.

**Reibung der Flüssigkeiten.** Die am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgehobene Abweichung in dem Verhalten der Flüssigkeiten gegenüber den von uns für die einfachsten Fälle abgeleiteten Gesetzen kann nicht auffallend sein, da wir bei unserer Ableitung zwei Umstände ausser Acht gelassen haben. Zunächst haben wir die Flüssigkeiten als vollkommen frei beweglich vorausgesetzt, das heisst angenommen, dass die Bewegung eines Flüssigkeitsfadens durch benachbarte Flüssigkeit nicht alterirt wird, eine Annahme, welche nur annähernd richtig sein kann. Denn da die Moleküle der Flüssigkeit einander anziehen, so muss eine bewegte an einer ruhenden oder langsamer sich bewegenden Flüssigkeit vorüberfliessende Schicht eine Reibung erfahren, welche ihre Geschwindigkeit verkleinert. Dabei wird dann gleichzeitig, wegen der sehr leichten Beweglichkeit der Moleküle, die ruhende Schicht eine Bewegung im Sinne der bewegten Schicht oder die langsamer sich bewegende eine Beschleunigung im gleichen Sinne erhalten, und die Beschleunigung der langsamern wird gleich sein der Verzögerung der schneller sich bewegenden Schicht. Die Reibung wirkt also auf die rascher bewegte Schicht wie eine die Bewegung verzögernde, auf die langsamer sich bewegende wie eine dieselbe beschleunigende Kraft. Von der Grösse dieser Kraft werden wir annehmen dürfen, dass sie der Differenz der parallelen Geschwindigkeiten proportional ist, um so mehr, da die Geschwindigkeitsdifferenz benachbarter Schichten immer nur äusserst klein sein kann. Ausserdem wird die Kraft der Flächenausdehnung proportional sein, mit der sich die Schichten berühren; Annahmen über die Wirkung der Reibung, welche schon Newton gemacht hat. Weiter nimmt man an, dass diese Kraft unabhängig ist von dem Drucke, der im Innern der strömenden Flüssigkeit vorhanden ist<sup>1</sup>.

Der zweite von uns bei der Ableitung der Ausflussgesetze ausser Acht gelassene Umstand ist die Reibung, welche die bewegte Flüssigkeit an der Wandung des Gefässes erfährt. Wir wissen, dass zwischen den festen und flüssigen Körpern stets molekulare Kräfte thätig sind, in Folge deren die Flüssigkeiten mehr oder weniger fest an den Körpern haften; in Folge dessen muss jedes an einer festen Wand vorüberbewegte Flüssigkeitstheilchen dieser Anziehung entgegen bewegt werden, es muss somit eine Verzögerung seiner Bewegung erfahren. Die diese Verzögerung bewirkende Kraft können wir der Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit der festen Wand parallel bewegt wird und der Flächenausdehnung proportional setzen, mit welcher die Flüssigkeitsschicht die feste Wand berührt. Bezeichnen wir deshalb mit  $\varepsilon$  eine Constante, so können wir die Verzögerung  $K$ , welche die an der festen Wand mit der Geschwindigkeit  $c$  die Wand

<sup>1</sup> Man sehe darüber *Hagenbach*, Poggend. Ann. Bd. CIX. *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. CXIII. *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie Bd. XLVI. *Stefan*, ebendort. *Stokes*, Cambridge Philosophical Transactions vol. VIII.

in der Fläche  $f$  berührende Flüssigkeitsschicht erfährt, setzen

$$K = \varepsilon \cdot f \cdot v.$$

Diese Constante  $\varepsilon$  bezeichnet man als den Coefficienten der äusseren Reibung; sie bedeutet die in der Flächeneinheit der Schicht wirksame Kraft, wenn die Flüssigkeitsschicht mit der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorübergeht, oder was dasselbe ist, die Kraft, welche erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht mit gleichförmiger Bewegung und der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorüber zu führen; dieselbe hängt nur ab von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, ebenso wie der Randwinkel, unter welchem die Flüssigkeit die feste Wand schneidet. In dem Falle, in welchem die feste Wand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt wird, kann man den Werth dieses Coefficienten sofort angeben; denn in dem Falle haftet die letzte Schicht einfach fest an der Wand, ohne an der Bewegung der übrigen Flüssigkeit Theil zu nehmen. Die Geschwindigkeit der Bewegung an der Wand ist also immer gleich Null, die Verzögerung ist unendlich gross, es muss also  $\varepsilon$  unendlich gross sein.

Ganz derselbe Ausdruck, der die Verzögerung an einer festen Wand darstellt, liefert uns auch die Verzögerung, welche eine Flüssigkeit erfährt, wenn sie sich an einer andern hinbewegt, wie z. B. Wasser über einer Quecksilberschicht, oder Quecksilber unter einer Wasserschicht; die Constante  $\varepsilon$  bedeutet dann die Reibung zweier Flüssigkeiten an einander.

Um ganz ebenso die Verzögerung, welche die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht durch die umgebende mit ihr, jedoch langsamer bewegte Flüssigkeit erfährt, ausdrücken zu können, denken wir uns einen Cylinder, durch welchen die Flüssigkeit fliesse. In dem ersten Querschnitt des Cylinders mögen alle Flüssigkeitstheilchen die gleiche der Cylinderaxe parallele Geschwindigkeit haben: in einiger Entfernung von diesem Querschnitt hat dann aber die zunächst an der Wand befindliche Schicht eine gewisse Verzögerung erfahren, welche sich somit langsamer bewegt als die nach der Axe des Cylinders zu folgende Schicht; diese erfährt dann ebenso eine Verzögerung und wirkt in Folge dessen wieder verzögernd auf die nächstliegende innere Schicht und so fort. Es wird sich somit die Geschwindigkeit in irgend einem zur Axe des Cylinders, also zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitte stetig ändern, sie wird, wenigstens dann, wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wahrscheinlich aber immer, von dem Rande gegen die Mitte stetig zunehmen. Daraus folgt dann weiter, dass die Geschwindigkeit zweier benachbarten, das ist nur um die Distanz der Flüssigkeitsmoleküle von einander entfernten Flüssigkeitsschichten auch nur unendlich wenig von einander verschieden sein kann. Nennen wir deshalb die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsschicht im Abstände  $x$  von der Axe des Cylinders  $v$ , die Geschwindigkeit der nächstfolgenden, von der erstern um den Abstand  $dx$  zweier Moleküle entfernten Schicht  $v + dv$ , so würde nach den vorhin gemachten Annahmen die Kraft, welche auf die schneller bewegte Schicht verzögernd einwirkt,

$$K = \varepsilon_1 \cdot f \cdot dv,$$

wenn  $f$  die Fläche ist, in welcher sich die Schichten berühren, und  $\varepsilon_1$  eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante bedeutet, welche der die äussere Reibung bedingenden Constanten  $\varepsilon$  entspricht.

Die Bestimmung dieser Constanten  $\varepsilon_1$  würde indess nicht ausführbar sein, da man den Werth von  $dv$  niemals angeben kann, ebensowenig wie den Werth von  $dx$ , den Abstand der Moleküle. Man definiert deshalb die Constante der innern Reibung etwas anders; kennen wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten als eine Function ihres Abstandes von der Axe des Cylinders, also  $v = f(x)$ , so lässt sich immer  $dv$  darstellen als das Produkt einer endlichen Function  $\varphi(x)$ , die sich nach den Regeln der Differentialrechnung aus  $f(x)$  ableiten lässt, mit  $dx$ , so dass

$$dv = \varphi(x) dx,$$

worin  $\varphi(x)$  eine endliche für jeden Werth von  $x$  einen bestimmt angebaren Werth besitzende Function von  $x$  ist. Führen wir diese in die für die Verzögerung gefundene Gleichung ein, und schreiben sie

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx},$$

so erhalten wir

$$K = \varepsilon_1 dx \cdot f \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Da  $dx$  der Abstand zweier Moleküle der Flüssigkeit bedeutet, so ist für jede Flüssigkeit  $\varepsilon_1 dx$  ebenso gut eine Constante wie  $\varepsilon_1$ , bezeichnen wir sie mit  $\eta$ , so wird

$$K = \eta \cdot f \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Diese Constante  $\eta$  bezeichnet man als den Coefficienten der inneren Reibung oder auch kurz als die Reibungsconstante<sup>1)</sup>. Ihre Bedeutung lässt sich leicht angeben, es ist die Kraft, welche auf die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht verzögernd einwirkt, wenn sie die benachbarte langsamere bewegte Schicht in der Flächeneinheit berührt, und wenn  $\frac{dv}{dx}$  der Einheit gleich ist. Da nun  $dv$  der Unterschied der Geschwindigkeiten zweier Schichten ist, so bedeutet  $\frac{dv}{dx}$  den Geschwindigkeitsunterschied zweier Schichten, welche um die Längeneinheit von einander entfernt sind, vorausgesetzt, dass jedesmal, wenn wir von einer Schicht zur nächstfolgenden um  $dx$  von ihr entfernten Schicht übergehen, der Geschwindigkeitsunterschied  $dv$  derselbe ist. Denn da  $dx$  der Abstand zweier Schichten ist, so ist  $\frac{1}{dx} = n$  die Anzahl der in der Längeneinheit vorhandenen Schichten, somit ist, wenn  $dv$  der Unterschied in der Geschwindigkeit je zweier benachbarter Schichten ist,  $dv \cdot \frac{1}{dx} = dv \cdot n$ , der Unterschied der Geschwindigkeit der ersten und  $n$ . Schicht, also der um die Längeneinheit von einander entfernten Schichten.

Man erkennt leicht, dass die innere und äussere Reibung der Flüssigkeiten die von uns berechnete Ausflussgeschwindigkeit verkleinern müssen, aber auch gleichzeitig, dass es sehr schwierig ist, dieselben in Rechnung zu ziehen, selbst wenn man die Reibungsconstanten kennt, da man das Gesetz kennen muss, nach welchem sich die einander parallelen Ge-

<sup>1)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. CXIII.

schwindigkeiten in einem zur Geschwindigkeitsrichtung senkrechten Querschnitt ändern.

In einem Falle lassen sich die Rechnungen vollständig durchführen, nämlich dann, wenn man die Flüssigkeiten durch ein horizontales cylindrisches capillares Rohr mit kreisförmigem Querschnitt unter constanter Druckhöhe ausfliessen lässt. In dem Falle fliesst nämlich die Flüssigkeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch das Rohr hindurch, und wenn das Rohr enge genug ist, so findet überhaupt nur eine der Cylinderaxe parallele Bewegung statt. In jedem zur Cylinderaxe senkrechten Querschnitt ändert sich die Geschwindigkeit mit dem Abstände des betrachteten Flüssigkeitstheilchens von der Cylinderaxe, an allen gleich weit von der Axe gelegenen Punkten der Röhre ist aber die Geschwindigkeit dieselbe. Die Flüssigkeit theilt sich also in der Röhre in concentrische Hohlcylinder, von denen jeder eine bestimmte, auf seiner ganzen der Länge der Röhre gleichen Länge dieselbe Geschwindigkeit besitzt, welche aber von Cylinder zu Cylinder sich ändert.

Da nun die Bewegung für jeden dieser Cylinder eine gleichförmige ist, so folgt, dass die Beschleunigung, welche er durch die vorhandenen Kräfte erhält, gleich sein muss der Verzögerung, welche er durch die Reibung erfährt, denn nur wenn die Beschleunigungen und Verzögerungen sich aufheben, kann die Bewegung eine gleichförmige sein.

Wir denken uns nun einen der Flüssigkeitscylinder in dem Abstände  $x$  von der Axe, die Dicke seines Mantels sei  $dx$ , von diesem Cylinder betrachten wir ein Stück von der Länge  $dl$ , welches sich im Abstände  $l$  von dem Beginne der capillaren Röhre befindet. Ist der hydraulische Druck im Punkte  $l$  gleich  $p$ , so wird er am andern Ende des von uns betrachteten Cylinderstückes gleich  $p + dp$  sein, wo wir  $dp$  setzen können, wie vorher

$$dp = \frac{dp}{dl} \cdot dl.$$

Da nun die Basis des Cylindermantels  $2\pi x \cdot dx$  ist, so ist die in Folge der Druckänderung um  $dp$  fortreibende Kraft

$$K = 2\pi x \frac{dp}{dl} \cdot dl \cdot dx.$$

Der betrachtete Hohlcylinder ist nun auf seiner innern und äussern Seite mit andern Hohlcylindern in Berührung, welche eine andere Geschwindigkeit besitzen, der der Axe näher ist um die Breite  $dx$  des Cylindermantels, welche einfach gleich ist dem Abstände der Moleküle, der Axe näher, der äussere ist um dieselbe Grösse weiter entfernt. Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen dem nächstinnern und dem betrachteten Cylinder mit  $dv$ , so ist

$$K_1 = \eta \cdot 2\pi x \, dl \cdot \frac{dv}{dx},$$

die Kraft, welche in Folge der Reibung an dem innern Cylinder die Geschwindigkeit des betrachteten Cylinders zu vermehren strebt, da die Geschwindigkeit der Bewegung von der Axe nach aussen abnimmt.

Nennen wir die Differenz der Geschwindigkeiten des betrachteten und des nächstfolgenden Cylinders  $dv'$ , so ist die Kraft, mit welcher der be-



trachtete Cylinder in seiner Bewegung verzögert wird, da der äussere Umfang des betrachteten Cylinders  $2\pi(x + dx)$  ist,

$$K_1' = \eta \cdot 2\pi(x + dx) dl \cdot \frac{dv'}{dx}.$$

Setzen wir nun  $dv' = dv + d^2v$ , wo  $d^2v$  dann angibt, um wieviel mehr oder weniger sich die Geschwindigkeit ändert, wenn man von dem betrachteten Cylinder sich zu dem nächstäussern, als wenn man zu dem nächstinnern übergeht, so wird

$$\begin{aligned} K_1' &= \eta \cdot 2\pi(x + dx) dl \left( \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) = \\ &= \eta \cdot 2\pi x dl \frac{dv}{dx} + \eta \cdot 2\pi dx dl \frac{dv}{dx} + \eta \cdot 2\pi x dl \frac{d^2v}{dx^2} dx \\ &\quad + \eta \cdot 2\pi dl \frac{d^2v}{dx^2} dx^2. \end{aligned}$$

Das vierte Glied dieses Ausdrucks ist gegen die übrigen, da es mit dem Quadrate von  $dx$  multiplicirt ist, verschwindend klein, so dass es vernachlässigt werden darf; das erste Glied ist gleich  $K_1$ , so dass wir erhalten

$$K_1' = K_1 + \eta \cdot 2\pi dx \cdot dl \left( \frac{dv}{dx} + x \frac{d^2v}{dx^2} \right).$$

Wie wir nun oben sahen, folgt daraus, dass die Bewegung in der Röhre eine gleichförmige ist, dass die beschleunigenden und verzögernde Kräfte sich aufheben; da nun  $K$  und  $K_1$  die beschleunigenden,  $K_1'$  die verzögernden sind, so ist

$$\begin{aligned} K + K_1 &= K_1' \\ 2\pi r \frac{dp}{dl} dl dx &= \eta \cdot 2\pi dx dl \left( \frac{dv}{dx} + x \frac{d^2v}{dx^2} \right) \\ \frac{dp}{dl} &= \left\{ \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right\} \cdot \eta, \end{aligned}$$

eine Gleichung, welche nach den Regeln der Differentialrechnung die hydraulischen Drucke an den verschiedenen Stellen der Röhre, und die Geschwindigkeiten  $v$  der einzelnen Schichten zu berechnen gestattet<sup>1)</sup>. Diese Berechnung würde hier zu weit führen, es genüge hier, die Resultate anzugeben. Ist der Druck am Anfange des capillaren Rohres gleich  $p_a$ , am Ende, dort wo die Flüssigkeit ausfliesst,  $p_e$ , so ist, wenn  $L$  die Länge des Rohres ist,

$$p = p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot l.$$

Um die Geschwindigkeit  $v$  zu bestimmen, ist darauf zu achten, dass an der Röhrenwand, wo also  $r = r$  gleich dem Radius der Röhre ist, ebenfalls eine Reibung stattfindet, welche die Geschwindigkeit der äussersten Schicht mit bedingt. Bezeichnen wir die Constante der äusseren Reibung wie vorher mit  $\epsilon$ , so erhält man für die Geschwindigkeit einer Schicht deren Abstand von der Cylinderaxe gleich  $x$  ist,

<sup>1)</sup> Man sehe *Hagenbach*, Poggend. Ann. Bd. CIX. *Jacobson*, *Reichert* und *Du Bois*, Archiv für Anatomie und Physiologie Jahrgang 1860, p. 80, der dort die von *Neumann* gegebene Ableitung mittheilt, welche die oben entwickelte Gleichung in ähnlicher Weise liefert; *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie Bd. XL.

$$v = \frac{p_a - p_e}{4 \eta \cdot L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2 \varepsilon \cdot L} \cdot R$$

liesslich für das Volumen der in der Zeiteinheit ausgeflossenen Flüssigkeit

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta \cdot L} \left( R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} \cdot R^3 \right)$$

er eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwand benetzt, ist, wie wir oben hervorhoben,  $\varepsilon$  unendlich gross, somit das zweite Glied der Formel gleich Null, für solche Flüssigkeiten wird somit

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4$$

das in der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsvolumen ist dem auf die Flüssigkeit lastenden Drucke und der vierten Potenz des Radius direkt, dem Radius der Röhre und der innern Reibungsconstante umgekehrt proportional.

Die letztere Beziehung ist zu einer Prüfung der Theorie, und nach Ausführung derselben durch den Versuch zur Bestimmung der Reibungsconstante sehr geeignet. Versuche über den Ausfluss lassen sich weit sicherer ausführen als solche über die Druckvertheilung, da letztere in den capillaren Röhren kaum mit Genauigkeit zu messen ist.

Die ersten Versuche über den Ausfluss durch capillare Röhren sind von Hagen (1) und Poiseuille (2) ausgeführt worden, welche beide nur aus ihren Versuchen auf die obige Beziehung geführt wurden, für welche indess Hagen eine theoretische Ableitung gab.

Poiseuille wandte zu seinen Versuchen eine mit zwei angesetzten Röhren versehene Glaskugel (Fig. 134) an, welche an den Röhren zwei Marken

angebracht zeigte. Der Raum zwischen den beiden Marken war sorgfältig kalibriert. Die untere Röhre war unter B umgebogen und in derselben ein capillares Rohr eingesetzt, dessen Länge und Durchmesser sorgfältig gemessen waren. Der Apparat wurde nun durch Aufhängen über A mit Flüssigkeit gefüllt, dann mit Gas comprimirt, welche die Oberfläche der Flüssigkeit ganz constanten Druck ausübten, der mittels passender Druckmesser gemessen wurde. Es wurden dann die Zeiten beobachtet, welche die den Raum zwischen A und B ausfüllende Flüssigkeit zum Ausströmen benötigte.

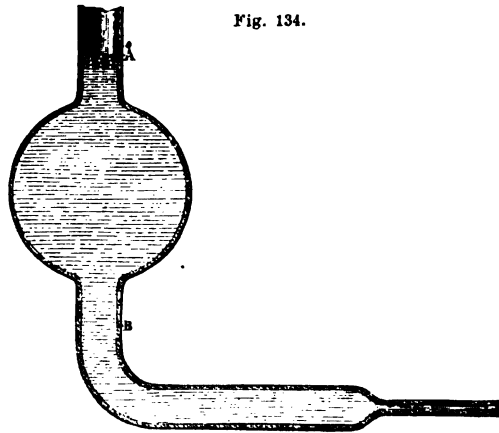


Fig. 134.

Hagen, Poggend. Ann. Bd. XLVI.

Poiseuille, Mémoires des Savants étrangers. T. IX. Annales de chim. et de physique. Série T. VII. Poggend. Ann. Bd. LVIII.

*B* ausfüllende Flüssigkeit brauchte, um bei verschiedenen Drucken  $p_a$  in Röhren verschiedener Länge und verschiedenen Durchmessers auszufließen.

Da die in gleichen Zeiten ausfließenden Volumina den Druckhöhen  $p_a - p_e$  proportional sind, wenn wir zur Herstellung der Drucke Säulen derselben Flüssigkeit anwenden, sich verhalten wie die Drucke  $p_a - p_e$ , proportional sein so müssen die zum Ausfließen gleicher Volumina erforderlichen Zeiten Druckhöhen umgekehrt proportional sein.

Eine Versuchsreihe mit Wasser gab folgende Zahlen:

Länge der Röhre 107 <sup>mm</sup> ,9. Höhe in Mm. der drückenden Wassersäule	Durchmesser 0 <sup>mm</sup> ,135. Ausflusszeit in Sekunden	
	beobachtet	berechnet
1984	5664"	5664"
7774	1445	1443
10501	1069	1070
10062	1121	1118
20561	546	546
30845	365	364
41381	273	271
47678	237	236.

Bei constanter Druckhöhe und constantem Durchmesser war die Ausflusszeit der Röhrenlänge direkt proportional.

Druck in Mm. Wasserhöhe 1472<sup>mm</sup>,45. Durchmesser 0<sup>mm</sup>,252.

Länge der Röhre	Ausflusszeit in Sekunden	
	beobachtet	berechnet
108 <sup>mm</sup> ,24	633"	633"
84 52	492	492
54 00	314	314.

Dieses Gesetz gilt jedoch nicht mehr bei zu kurzen Röhren, so war bei 9<sup>mm</sup> beobachtet 71",5, mit dem ersten Versuche verglichen so sich berechnet 52",63.

Bei gleichem Drucke und gleicher Länge sind die Ausflusszeiten 4. Potenzen der Durchmesser umgekehrt proportional.

Druck 1984<sup>mm</sup> Wasserhöhe, Länge 107<sup>mm</sup>,9.  
 Durchmesser  $D_1 = 0,136$  Zeit  $T_1 = 5664"$   
 „  $D_2 = 0,252$  „  $T_2 = 468",5$ .

In der That verhält sich fast genau

$$D_1^4 : D_2^4 = 471,57 : 5664,$$

so dass dadurch auch dieses Gesetz bestätigt ist.

Für das in der Zeiteinheit ausfließende Flüssigkeitsvolumen  $V$  sich also entsprechend der theoretischen Entwicklung

$$V = C \cdot \frac{H \cdot R^4}{L},$$

wenn wir bei Wasser, dessen Dichtigkeit gleich eins ist, den I  $p_a - p_e = Hs$ , durch die Höhe der drückenden Wassersäule ersetzen

Ist  $H, R, L$  in Millimetern ausgedrückt, das Volumen  $V$  in Cubikmillimetern gegeben, so ist für die Temperatur  $0^{\circ}$  bei Wasser

$$C = 2162,40.$$

Die Grösse  $C$  gibt das in 1" ausfliessende Volumen, wenn die Druckhöhe 1<sup>mm</sup> Wasser, der Radius der Röhre 1<sup>mm</sup> und die Länge der Röhre 1<sup>mm</sup> ist, unter der Voraussetzung, dass bei diesen Dimensionen noch das Gesetz gültig wäre. Die Constante  $C$  ist demnach

$$C = \frac{\pi}{8 \cdot \eta},$$

mit

$$\eta_0 = \frac{\pi}{8 \cdot C} = \frac{3,14159 \dots}{8 \cdot 2162,40} = 0,0001816.$$

Da die benutzten Einheiten Millimeter und, weil der Druck einer Wassersäule von 1<sup>mm</sup> Höhe auf das Quadratmillimeter ein Milligramm ist, Milligramme sind, so gibt uns die Constante in Milligrammen die auf die Fläche von ein Quadratmillimeter wirkende verzögernde Kraft der Reibung, wenn benachbarte Schichten sich mit einer solchen Geschwindigkeit an einander vorüber bewegen, dass bei gleichförmiger Aenderung der Geschwindigkeit der Geschwindigkeitsunterschied zweier 1<sup>mm</sup> entfernter Schichten der Sekunde ein Millimeter ist.

Die Constante  $C$  wächst ganz bedeutend mit der Temperatur, und erhält Poiseuille für dieselbe den Werth

$$C = 2162,40 (1 + 0,0336793 t + 0,0002209936 t^2),$$

wenn  $t$  in Graden der Celsius'schen Skala gegeben ist und der Druck immer Milligrammen pro Quadratmillimeter ausgedrückt ist.

Für den Reibungscoefficienten ergibt sich daraus eine entsprechende Annahme, er wird

$$\eta = \frac{0,0001816}{1 + 0,0336793 t + 0,0002209936 t^2},$$

o z. B. für

$$\begin{aligned} 10^{\circ} \dots \eta &= 0,0001335 \\ 20^{\circ} \dots \eta &= 0,0001029 \\ 30^{\circ} \dots \eta &= 0,0000821. \end{aligned}$$

Für absoluten Alkohol ergibt sich aus ähnlichen Versuchen Poiseuille's bei  $10^{\circ}$   $\eta = 0,0001741$ , also beträchtlich grösser als für Wasser; noch besser ist der Werth für Gemische aus Alkohol und Wasser.

Nach in ähnlicher Weise angestellten Versuchen von Reilstab<sup>1)</sup> ergibt sich unter Annahme des Poiseuille'schen Werthes für Wasser bei  $10^{\circ}$  C. für

$$\begin{array}{ll} \text{Methylalkohol } \eta = 0,00007075 & \text{Propylalkohol } \eta = 0,0002032 \\ \text{Aethylalkohol } \eta = 0,0001556 & \text{Butylalkohol } \eta = 0,0003871. \end{array}$$

Der für Aethylalkohol aus den Versuchen Reilstabs sich ergebende Werth von  $\eta$  ist etwas kleiner als der von Poiseuille gefundene; der Grund dieses Unterschiedes liegt wohl darin, dass der Aethylalkohol, den Poiseuille benutzte, nicht so wasserfrei war als der von Reilstab benutzte.

<sup>1)</sup> Reilstab, Inauguraldissertation. Bonn 1868.

Meyer<sup>1)</sup> hat die Reibungsconstante von Wasser und einer Anzahl von Salzlösungen nach einer andern Methode bestimmt; er beobachtete den Widerstand, den eine horizontal an einem Drahte aufgehängte Kreisscheibe erfuhr, wenn sie in der betreffenden Flüssigkeit durch Torsion des Drahtes in Schwingungen versetzt wurde. Die Scheibe drehte sich dabei in ihrer Ebene um eine durch ihren Mittelpunkt gehende verticale Axe. Die an der Scheibe anliegende Flüssigkeitsschicht haftet, da die Scheibe benetzt wurde, fest an derselben. Durch die Reibung dieser Schicht an der nächstfolgenden wird dann diese und damit die folgende Schicht u. s. f. in Bewegung versetzt. In Folge der Reibung dieser an einander sich vorbeischiebenden Flüssigkeitsschichten tritt eine stetige Abnahme der Schwingungsamplituden ein, und aus dieser Abnahme lässt sich in hier nicht auseinander zu setzender Weise der Reibungscoefficient der Flüssigkeiten berechnen. In dieser Weise erhielt Meyer unter andern für destillirtes Wasser die Werthe<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \text{bei } 10^{\circ}, 1 \dots \eta &= 0,0001575 \\ 15 \text{ } ^{\circ}, 5 \dots \eta &= 0,0001371 \\ 17 \text{ } ^{\circ}, 9 \dots \eta &= 0,0001299 \\ 21 \text{ } ^{\circ}, 6 \dots \eta &= 0,0001190, \end{aligned}$$

Werthe, welche etwa im Verhältnisse 1, 2 : 1 grösser sind als die aus Poiseuille's Beobachtungen abgeleiteten.

Für die Salzlösungen ergaben sich, mit Ausnahme der Lösungen von Kaliumnitrat, im allgemeinen grössere und mit dem Salzgehalt wachsende Werthe von  $\eta$ . So fand sich bei Lösungen von Natriumsulphat für eine Temperatur von 17<sup>o</sup>,9

$$\begin{aligned} \text{bei } 2,5670 \text{ Theile Salz auf } 100 \text{ Wasser } \eta &= 0,0001384 \\ \text{„ } 5,1600 \text{ „ „ „ „ „ } \eta &= 0,0001500 \\ \text{„ } 7,7795 \text{ „ „ „ „ „ } \eta &= 0,0001600 \\ \text{„ } 10,425 \text{ „ „ „ „ „ } \eta &= 0,0001763. \end{aligned}$$

Ist die Constante der Reibung der Flüssigkeiten an den festen Körpern nicht unendlich gross, so ist der Ausdruck für die durch capillare Röhren ausfliessende Menge, wie wir sahen,

$$V = \frac{\pi (p_a - p_c)}{8 \eta \cdot L} (R^4 + 4 \frac{\eta}{\rho} R^3),$$

es kommt also unter sonst gleichen Umständen ein von der dritten Potenz des Radius abhängiges Glied zu dem für benetzende Flüssigkeiten hinzu. Man sollte erwarten, dass demnach für nicht benetzende Flüssigkeiten dieses Glied in Rechnung zu ziehen sei. In der That glaubte Poiseuille beim Ausfluss des Quecksilbers durch gläserne Capillarröhren zu finden, dass das für benetzende Flüssigkeiten aufgestellte Gesetz nicht mehr gültig sei. Genauere Versuche von Warburg<sup>3)</sup> haben indess gezeigt, dass auch für Quecksilber und Glas sich die ausgeflossene Menge darstellen lässt durch die Gleichung:

<sup>1)</sup> O. E. Meyer, Crelle Journal LIX. Poggend. Ann. CXIII.

<sup>2)</sup> Meyer gibt die Werthe von  $\eta$  in Milligrammen auf den Quadratcentimeter, nicht, wie irrtümlich in der Abhandlung steht (p. 384), in Grammen auf den Quadratcentimeter.

<sup>3)</sup> Warburg, Poggend. Ann. Bd. CXL.

$$V = \frac{\pi (p_a - p_r)}{8 \eta \cdot L} R^4,$$

wie z. B. folgende Beobachtung zeigt

	$L = 871^{\text{mm}},5.$	$R = 0,22346.$	Temp. = $17^{\circ},25.$
			Ausflussmenge in Milligr. pro 1''
			beobachtet      berechnet aus 2
1.	$100^{\text{mm}},6$ Quecksilber.		126,5      127,1
2.	$193^{\text{mm}},3$ „		244,3 „

Setzen wir das specifische Gewicht des Quecksilbers bei  $17,2^{\circ}$  gleich 13,55, so ergibt sich  $\eta$  aus der 2. Beobachtung

$$\eta = \frac{\pi \cdot 193^{\text{mm}},3 \cdot 13,55}{8 \cdot \frac{244,3}{13,55} \cdot 871,5} (0,22346)^4 = 0,00016329.$$

Es ergibt sich somit, dass auch bei nicht benetzenden Flüssigkeiten unendlich sein kann.

§. 86.

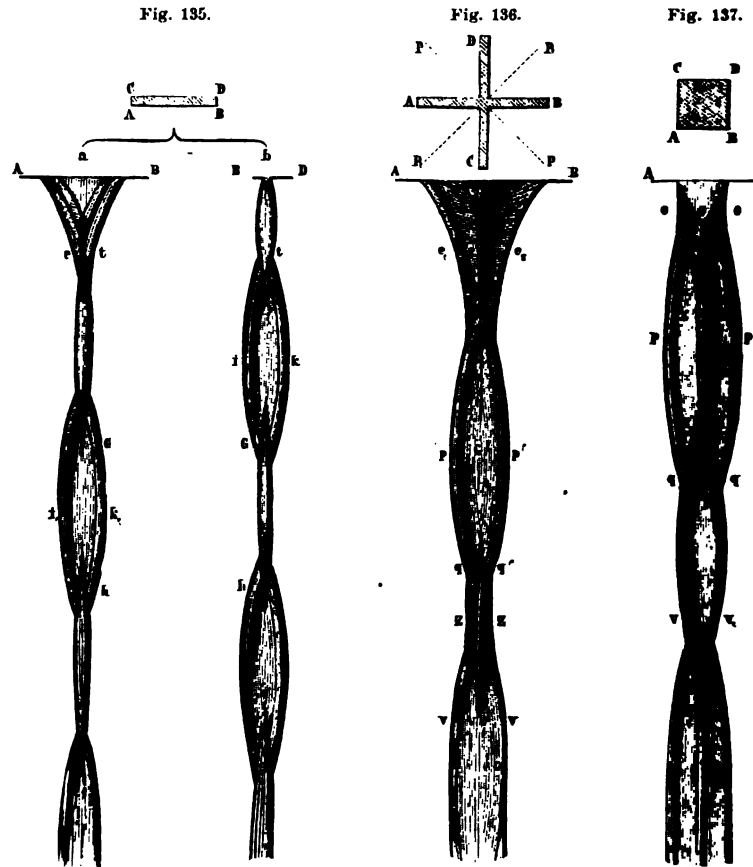
**Constitution des ausfliessenden Strahles.** Bisher haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Oeffnung, aus welcher die Flüssigkeit ausfliesst, eine kreisförmige sei, und dass somit der Strahl von der Stelle der grössten Contraction an ein merklich cylindrischer sei. Ganz anders werden jedoch die ausfliessenden Wasserstrahlen gestaltet, wenn man statt kreisförmiger Oeffnungen andere, z. B. viereckige oder kreuzförmige Oeffnungen anwendet. Die Gestalten dieser Strahlen sind vorzugsweise von Bidone<sup>1)</sup> und später von Magnus<sup>2)</sup> untersucht worden. Wir lassen hier einige der eigenthümlichen Formen der aus eckigen Oeffnungen ausfliessenden Strahlen folgen, nach der Beschreibung, welche Magnus von ihnen gibt. Fig. 135 a gibt die Ansicht eines Strahles, der aus einer viereckigen Oeffnung ausfliesst, deren eine Seite 2,6 Millim., deren andere 25 Millim. lang ist, gesehen in einer zur grössern Seite senkrechten und 135 b in einer zur andern Seite senkrechten Richtung. Fig. 136 zeigt die Gestalt eines aus einer kreuzförmigen und Fig. 137 eines aus einer quadratischen Oeffnung ausfliessenden Strahles. Das Wasser zieht sich unter der Oeffnung rasch zusammen und es bilden sich rundliche Ränder *Ae Bf* (Fig. 135a), welche sehr scharf gegen den übrigen Theil der Fläche begrenzt sind. Diese Ränder, wo sie zusammentreffen, die zur Fläche *ABfe* senkrechte Fläche *gh* (Fig. 135 b), die sich nach unten immer mehr zusammenzieht und dann in eine Fläche *jk, hi* entstehen lässt, und so fort, bis der Strahl zersplittert. Die Gestalt erhielt der Strahl, als anstatt der einfachen Ausflussöffnung eine 20 Millimeter lange Röhre von gleichem Querschnitt an das Ende gebracht wurde.

Bei den aus der kreuzförmigen Oeffnung (Fig. 136) austretenden Strahlen geht das Wasser in vier sich kreuzenden Strahlen nieder, *Be, Be', Ce etc.*, in denen jeder einen starken Rand hat. Indem diese vier Ränder zusammentreffen, erzeugen je zwei eine Fläche *ppq*; da aber das Zusammentreffen

<sup>1)</sup> Bidone, Memorie dell' Accademia di Torino. Bd. XXXIV.

<sup>2)</sup> Magnus, Poggend. Ann. Bd. XCV. p. 1.

central stattfindet, wenn die Arme der kreuzförmigen Oeffnung genau  $g$  sind, so halbirt jede Fläche den Winkel, den die Ränder mit ein



machen, so dass die vier entstehenden Flächen,  $rpq$ ,  $r'p'q'$ , die Lage zwischen  $AB$  und  $CD$  punktirten Linien  $p$  und  $q$  haben. Zwischen  $il$  ziehen sich die Ränder  $Ce$  bis gegen  $G$  hinab. In der durch diesen  $P$  gehenden Horizontalen haben die Flächen  $rpq$  ihre grösste Breite. Unhalb dieser Stelle nehmen sie wieder dicke Ränder an, durch deren Zusammentreffen neue Flächen  $zv$  entstehen. Da auch hier die Ränder  $ce$  zusammentreffen, so halbiren die Flächen  $zv$  die Winkel der vorigen. Richtung fällt also wieder mit derjenigen der Kreuzesarme zusammen.

Selten treten mehr als zwei solcher Flächensysteme auf, meist beg in dem zweiten die Zersplitterung des Strahles.

Bei dem aus der quadratischen Oeffnung  $ABCD$  (Fig. 137) hegehenden Strahle erblickt man unter der Stelle der grössten Zusamschnütrung vier Flächen  $opq$ , deren Verlängerungen durch die Mitre Seiten  $AB$ ,  $BD$  . . gehen und auf diesen senkrecht stehen.

Unter diesem liegt ein zweites Flächensystem, welches, wie in dem vorigen Falle, die Winkel des ersten halbirt, also mit der Richtung der Diagonalen des Quadrats zusammenfällt. Unter dem zweiten befindet sich ein drittes, dem ersten gleiches Flächensystem u. s. f., so dass oft neun derartiger Systeme unter einander liegen.

Diese Formen, welche die Strahlen annehmen, die aus eckigen Oeffnungen fließen, zeigen auf das deutlichste den Einfluss der seitlichen Bewegung der Flüssigkeit und der Molekularattraction der Flüssigkeitstheilchen, die wir bei den vorhin betrachteten Ausflusserscheinungen als störende Umstände ansahen. Denn diese beiden Umstände scheinen hinreichend, um die sonderbaren Gestalten der Strahlen zu erklären.

Die Flüssigkeitstheilchen haben alle bei ihrem Austritt aus der Oeffnung eine horizontale gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit, welche noch durch die früher betrachtete Oberflächenspannung an den freien Seiten des Strahles vermehrt wird. Daraus ergibt sich die von allen Seiten nach innen gerichtete Bewegung der Flüssigkeit unmittelbar unter der Oeffnung; bei kreisförmigen Oeffnungen ist die nach innen gerichtete Geschwindigkeit der Flüssigkeit sowohl als der Widerstand, den das Innere des Strahls derselben entgegensetzt, nach allen Richtungen gleich, deshalb zeigt sich dort die Einschnürung von allen Seiten ohne darauf folgende Anschwellung; anders jedoch bei eckigen Oeffnungen. Dort ist die Oberflächenspannung verschieden, und zwar ist sie am stärksten von den Ecken aus, weil dort der Krümmungsradius am kleinsten ist, während die übrige Fläche des Strahles eben, oder gar wohl concav sein kann. Unter der Oeffnung müssen daher vorzugsweise die von den Ecken der Oeffnung kommenden Flüssigkeitstheile nach der Mitte zu sich bewegen, und es muss daher der Strahl hauptsächlich von den Ecken aus zusammengeschnürt werden. Daher treten dann die von den Seiten der Oeffnung kommenden Flüssigkeitstheile über den Strahl heraus, und der Strahl muss einen der Oeffnung entgegengesetzten Querschnitt erhalten, dort seinen kleinsten Durchmesser haben, wo die Oeffnung den grössten hat, und umgekehrt. An dieser Stelle kehren sich dann die Verhältnisse um; durch die Oberflächenspannung in den jetzt stärker gewölbten Theilen des Strahles erhalten die hier befindlichen Theile des Strahles eine nach innen gerichtete Bewegung, und da, wie wir sahen, der Querschnitt des Strahles wegen der beschleunigten Bewegung abwärts immer kleiner wird, so wird jetzt die Zusammenschnürung hauptsächlich von den entstandenen Ecken des Strahles ausgehen und damit ein Heraustreiben der Flüssigkeit an den concaven Stellen des Strahles eintreten.

Die Erscheinung ist also wesentlich eine Folge der verschiedenen Oberflächenspannung des Strahles, verbunden damit, dass wegen der zunehmenden, nach unten gerichteten Geschwindigkeit der Bewegung die Theile des Strahles überhaupt, so lange der Strahl zusammenhängt, das Bestreben haben, sich der Mitte zu nähern, und dass deshalb die von den Ecken der Oeffnung niedergehenden Theile einen nur geringen Widerstand gegen ihre horizontale Bewegungg erfahren<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Buff, Poggend. Ann. Bd. C.



Auch an Strahlen, welche aus einer kreisförmigen Oeffnung hervorgehen, beobachtet man meist Anschwellungen und Erscheinungen ähnlicher Art. Von der Contractionsstelle abwärts ist der Strahl zunächst nahezu cylindrisch, und dabei massiv und ganz klar. In einiger Entfernung von derselben ändert er aber sein Ansehen vollständig, er erscheint gestört und erfährt eine merkliche Anschwellung (Fig. 138) und wird trübe, so dass es den Anschein hat, als bilde er keine continuirliche Flüssigkeits-

Fig. 138.



masse mehr. Auf diese erste Anschwellung folgt dann eine Stelle, wo der Strahl wieder zusammengeschnürt ist, auf diese wieder eine Anschwellung und so fort. Die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen nennt man nach Savart<sup>1)</sup>, der sie zuerst genau untersuchte, Bäuche und Knoten. Im Innern des Strahles scheint sich ein continuirlicher Kanal herabzuziehen, gleichsam als Fortsetzung des massiven Strahles über dem ersten Bauche.

Dass diese Anschwellungen und Einschnürungen übrigens ganz anders beschaffen sind und von ganz andern Ursachen herrühren als diejenigen, welche bei den aus eckigen Oeffnungen hervorgehenden Strahlen auftreten, lässt sich leicht zeigen.

Zunächst kann man leicht erkennen, dass der Strahl an seinen untern Stellen nicht mehr continuirlich ist, sondern aus getrennten Tropfen besteht. Wenn man nämlich ein Kartenblatt horizontal sehr rasch durch einen Bauch des vertical herabgehenden Strahles hindurchführt, so findet man auf demselben nicht einfach eine benetzte Linie, sondern statt dessen eine Reihe benetzter Stellen, welche zeigen, dass auf einander folgende Stellen des Blattes von Tropfen getroffen sind. Hält man einen Draht oder ein Blech so in der Hand, dass es ein wenig in den Strahl hinein reicht, so fühlt man, so lange es von dem glatten Theile desselben getroffen wird, einen gleichmässigen Druck. Wird dasselbe dagegen von einem Bauche getroffen, so fühlt man deutlich eine vibrirende Bewegung. Daraus folgt dann unmittelbar, dass das Aussehen des Strahles an dieser Stelle nur eine optische Täuschung sein kann, indem wir nicht die einzelnen Tropfen sehen, sondern nur den Gesamteindruck der rasch nach einander an den einzelnen Stellen erscheinenden Tropfen erhalten.

Denn die einzelnen auf einander folgenden Tropfen gehen einer nach dem andern sehr rasch vor unserem Auge vorüber, jeder muss daher auf unserer Netzhaut den Eindruck einer verticalen Linie machen, gerade wie eine leuchtende Kohle, wenn sie rasch im Kreise geschwungen wird, denselben Eindruck eines feurigen Kreises macht; oder wie wir an einem rasch sich drehenden Rade nicht mehr die einzelnen Speichen sehen, sondern eine gleichmässig den Radkranz ausfüllende Fläche. Wenn nun ein Tropfen am Auge vorüber gefallen ist, so folgt ihm sofort ein zweiter und der von dem ersten Tropfen hinterlassene Eindruck setzt sich fort, und so weiter. Wir sehen demnach die Contouren aller auf einander folgenden Tropfen als einen continuirlichen Strahl. Daraus folgt dann weiter, da wir abwechselnd Bäuche und Knoten wahrnehmen, dass die Tropfen sich abwechselnd verbreitern

<sup>1)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. T. LIII. 337.

und verlängern, dass sie in der Mitte der Bäuche am breitesten und in den Knoten am schmalsten sein müssen.

Man kann dies sehr deutlich wahrnehmen, wenn man den Strahl so beobachtet, dass man ihn immer nur eine sehr kleine Zeit wahrnimmt, so dass während dieser Zeit die Tropfen ihre Stelle fast gar nicht ändern. Es gibt dazu mehrere Mittel, welche wir später kennen lernen werden; das sicherste ist die Beobachtungsmethode von Magnus<sup>1)</sup>. In eine kreisförmige Scheibe von 250 Millimeter Durchmesser wird ein Spalt von 1 Millimeter Breite in der Richtung eines Radius eingeschnitten. Die Scheibe wird dann auf einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Axe befestigt und in eine sehr rasche Rotation versetzt, so dass sie 20 bis 25 Umdrehungen in der Sekunde erhält. Man stellt dann das Auge und die rotirende Scheibe so, dass man den Strahl sieht, wenn die Spalte dem Strahl parallel steht. Man sieht den Strahl dann nur so lange, aber jedesmal, wenn die Spalte vor dem Auge hergeht. Da die Spalte nur ein Millimeter breit ist, so beträgt sie nur  $\frac{1}{780}$  der ganzen Kreisfläche und da die Scheibe 20 bis 25mal in der Sekunde rotirt, so ist die Spalte nur  $\frac{1}{15600}$  bis  $\frac{1}{19500}$  Sekunde vor dem Auge. In dieser kurzen Zeit ändert

der einzelne Tropfen seine Stelle nicht merklich, und deshalb sehen wir sie einzeln, als wären sie unbeweglich. Da aber ferner die Spalte 20—25mal in der Sekunde an unserem Auge vorüber geht, so sehen wir das einzelne Bild 25mal in der Sekunde, wir glauben es daher ununterbrochen zu sehen.

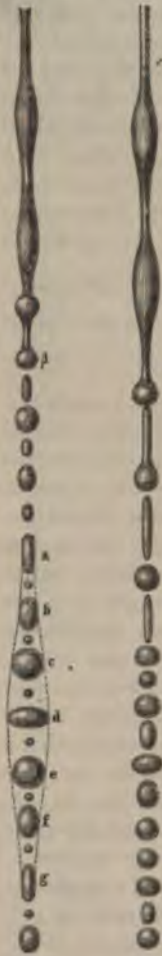
Wenn man auf diese Weise einen mit Bäuchen versehenen Strahl beobachtet, so erhält man das Bild Fig. 139. Man sieht, wie der Strahl aus einzelnen Tropfen besteht, von denen man aber zwei Arten unterscheiden kann. Die einen sind sehr klein und kugelförmig in der Axe des Strahles; sie bilden den erwähnten innern Strahl, um den sich die Bäuche herumlegen. Die andern sind viel grösser, sie wechseln mit den ersten, welche in gleichen Abständen von einander stehen, ab und haben eine sehr verschiedene Gestalt. Man sieht zunächst unter dem continuirlichen Theile des Strahles, wie die Tropfenbildung eintritt, der Strahl zeigt Schwellungen und Einschnürungen, die bei  $\beta$  in einzelne Tropfen übergehen; die Einschnürungen werden zu den vorhin erwähnten kleinen Tröpfchen, die Anschwellungen zu den grossen. Diese haben zuerst eine in die Länge gezogene Gestalt  $a$ , dann verkürzen sie sich, indem sie zugleich breiter werden  $b$ , bei  $c$  sind sie kugelförmig, bei  $d$  sind sie in verticaler Richtung abgeplattet und in der horizontalen am stärksten ausgedehnt, bei  $e$  wieder mehr kugelförmig, bei  $f$  und noch mehr bei  $g$ , wo man den Knoten wahrnimmt, in die Länge gezogen. Von da ab wiederholen sich die Gestalten  $a—g$ , bis der Strahl unterhalb der Bäuche auseinandergeht, und zwar treten dieselben Gestalten immer an derselben Stelle auf. Dass die Gestalt des Strahles deshalb die vorher beschriebene sein muss, geht unmittelbar aus dieser Gruppirung der Tropfen hervor. Es fragt sich nun, wie entsteht diese Erscheinung.

Wir erwähnten vorhin, dass nicht immer an den aus kreisförmigen Oeffnungen hervorfliessenden Strahlen diese Anschwellungen sich zeigen, sondern dass oft der Strahl eine nahezu cylindrische Gestalt habe. Aber

<sup>1)</sup> Magnus, Poggend Ann. Bd. CVI. p. 1.

auch in diesem findet, wie Magnus<sup>1)</sup> nachwies, die Tropfenbildung statt, und zwar etwas tiefer als dort, wo sie dann eintritt, wenn sich Bäuche zeigen. Ein solcher cylindrischer oder vielmehr schwach konischer Strahl

Fig. 139. Fig. 140.



bietet nach Magnus ein Bild, wie Fig. 140. Auch hier sind die Tropfen bald länger bald breiter, aber die Formen wechseln nicht regelmässig, sondern ganz unregelmässig; deshalb ist der nicht mit Bäuchen versehene Strahl auch an der untern Strecke nur breiter als an der obern. Die Tropfenbildung ist daher allen diesen Strahlen gemeinsam, betrachten wir sie zuerst.

Die Tropfenbildung ist Folge der beschleunigten Geschwindigkeit der herabfallenden Flüssigkeit; indem nicht soviel Flüssigkeit oben ausfliesst, als unten nothwendig ist, um den Strahl als ein Continuum zu erhalten, daher zersplittert der Strahl und dadurch bilden sich in Folge der Oberflächenspannung Tropfen.

Dass diese Erklärung die richtige sei, folgt aus der Beobachtung des aus einem mit einer Hahnöffnung versehenen Gefässe tropfenweise ausfliessenden Wassers. Zunächst sammelt sich das Wasser an der Hahnöffnung an, verlängert sich dann in einen Tropfen; darauf tritt eine Einschnürung ein und der Tropfen fällt herab. Der herabfallende Tropfen strebt dann eine kugelförmige Gestalt anzunehmen und dabei oscillirt er, so dass er abwechselnd in die Länge gezogen, abwechselnd abgeplattet erscheint. Die Einschnürung bildet dann mehrere kleine Tropfen. In diesem Falle, wo die Ausflussmenge von Anfang an nicht so gross ist, um einen continuirlichen Strahl zu bilden, tritt die Tropfenbildung von Anfang an auf.

Ferner, Plateau zeigte, wenn man den §. 80 beschriebenen in einem Alkoholgemische gebildeten Oeleylinder durch Entfernung der beiden Drahtkreise, zwischen denen er gebildet war, verlängert, dass er dann, wenn man eine gewisse Grenze überschreitet, zerreisst. Unmittelbar vorher bilden sich abwechselnde Einschnürungen und Anschwellungen, deren letztere grosse Tropfen bilden, während an Stelle der Einschnürungen kleine Tropfen auftreten. Also auch hier, wo die Flüssigkeit nicht mehr ausreicht, um einen continuirlichen Cylinder zu bilden, dieselbe Tropfenbildung in Folge der Oberflächenspannung. Wenn nun in allen aus kreisförmigen Oeffnungen ausfliessenden Strahlen

die Tropfenbildung das Gemeinsame ist, so müssen noch besondere Umstände auftreten, um einmal die regelmässige Folge derselben hervorzu- bringen, ein andermal nicht. Savart<sup>2)</sup> und Magnus<sup>3)</sup> haben diese nachgewiesen; sie zeigten, dass der Strahl die Gestalt Fig. 140 hat, wenn die Ausflussöffnung ganz ruhig ist und keine zitternde Bewegung besitzt, dass aber jedesmal, wenn man derselben eine zitternde regelmässige Bewegung

<sup>1)</sup> Magnus a. a. O.

<sup>2)</sup> Savart a. a. O.

<sup>3)</sup> Magnus a. a. O.

mittheil, die Bäuche auftreten. Savart hing, um dieses zu zeigen, das Gefäss an Fäden schwebend auf, so dass es nicht erschüttert werden konnte und der Strahl hatte die Gestalt Fig. 140, wurde aber durch das Anstreichen eines Violoncells in der Nähe des Gefäss und damit die Bodenplatte in regelmässige Vibrationen gebracht, so traten sofort die Bäuche in schönster Regelmässigkeit auf. Magnus zeigte dasselbe durch einen noch entscheidenderen Versuch. Die Ausflussöffnung wurde in eine Messingscheibe eingeschnitten, und diese durch eine Kautschukröhre auf eine Hülse befestigt, welche aus dem Boden des mit Flüssigkeit versehenen Gefässes herabging. Die Messingscheibe, in der sich die Ausflussöffnung befand, wurde dann auf ein Paar Kissen von Wolle gelegt, die auf eine feste Unterlage gelegt waren. Wurde nun das Gestell, auf dem das Ausflussgefäss stand, in eine regelmässige vibrirende Bewegung versetzt, so zeigten sich keine Bäuche, weil die Vibrationen des Gefässes sich nicht durch den Kautschuk zur Bodenplatte fortpflanzen konnten; wenn aber die Platte, in der die Ausflussöffnung angebracht war, mit dem Gestell in feste Verbindung gebracht war und somit vibrirte, so traten sofort die Bäuche auf.

Wie nun in Folge dieser Vibrationen das regelmässige Abreissen der Tropfen und damit die Bäuche entstehen, erklärt Magnus folgendermassen. Indem der Rand der Ausflussöffnung regelmässig auf und niedergeht, wird die Geschwindigkeit des ausfliessenden Strahles abwechselnd beschleunigt und verzögert. Durch diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen entstehen die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen, die in grösserer Tiefe die Trennung in einzelne regelmässige Tropfen zur Folge haben. Sind diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen nicht vorhanden, so fehlen die Bäuche und das Abreissen findet in grösserer Entfernung von der Oeffnung und viel weniger regelmässig statt. Wahrscheinlich trägt die geringere Entfernung, in welcher, wenn Bäuche vorhanden sind, die einzelnen Massen abreissen, nicht unwesentlich zu jener Regelmässigkeit bei, da alle Bewegungen in einem Strahl in geringerer Entfernung von der Oeffnung regelmässiger sind als entfernt davon.

Noch auffallender und interessanter zum Theil sind die Formen, welche Flüssigkeitsstrahlen bilden, wenn sie durch feste Körper oder andere entgegenkommende Strahlen gestört werden; man sieht diese Erscheinungen häufig in Gärten als Zierrath benutzt. Das Wasser wird nämlich von den festen Körpern nicht regelmässig zurückgeworfen, wie wir das bei den festen Körpern fanden, sondern breitet sich in oft höchst sonderbaren Formen aus. Es würde uns jedoch zu weit führen, darauf einzugehen, deshalb verweisen wir auf die Abhandlungen von Magnus<sup>1)</sup> und Savart<sup>2)</sup>.

### Drittes Kapitel.

#### Von den gasförmigen Körpern.

##### §. 87.

**Allgemeine Beschaffenheit der Gase.** Wir lernten in §. 48 ausser der festen und flüssigen Aggregatform noch eine dritte kennen, in welcher

<sup>1)</sup> *Magnus* a. a. O. und Poggend. Ann. Bd. LXXX. p. 1. Bd. XCV. p. 1.

<sup>2)</sup> *Savart* a. a. O. und Ann. de chim. et de phys. T. LIV. p. 55 und p. 113. T. LV. p. 257.

Körper vorkommen können, die gasförmige. Diese definirten wir dahin, dass sie weder eine selbständige Gestalt wie die festen Körper, noch ein selbständiges Volumen wie die flüssigen Körper besitzen, sondern sich so weit ausbreiten, bis ein äusseres Hinderniss sie zurückhält.

Wir können uns leicht durch Beobachtung und Versuche davon überzeugen, dass wir überall von einem Körper dieser Aggregatform, der Luft, umgeben sind; wir athmen sie ein, fühlen ihre Strömungen im Winde und ihren Widerstand bei raschen Bewegungen.

Wenn man eine scheinbar leere Glocke so in Wasser taucht, dass ihre ganze Basis zugleich die Wasserfläche berührt, so vermag nur wenig Wasser in die Glocke einzudringen, auch wenn wir sie so tief in das Wasser hineindrücken, dass sie ganz unter Wasser steht. Wir müssen daraus schliessen, dass die Glocke mit etwas erfüllt ist, was dem Eindringen des Wassers entgegensetzt. Neigen wir nun die Glocke, indem wir aber dafür sorgen, dass die Basis derselben stets unter Wasser bleibt, so weit, dass das Niveau der in die Glocke eingedrungenen Flüssigkeit an einer Stelle den Rand der Glocke nicht mehr erreicht, so sehen wir bei fernerem Niederdrücken, wie aus ihr durch das Wasser grosse Blasen aufsteigen und wie dann das Wasser höher in die Glocke einsteigt. Noch deutlicher wird dieser Versuch, wenn wir die Glocke oben mit einem Hahn versehen. So lange der Hahn geschlossen ist, kann das Wasser in die Glocke nicht eindringen, öffnen wir aber denselben, so dringt beim Niederdrücken das Wasser ein, zugleich bemerken wir aber, wie aus der Hahnöffnung die Luft hervordringt, indem wir ihren Stoss fühlen, oder sehen, wie leichte Körperchen durch den hervordringenden Luftstrom fortgerissen werden.

Dieser Versuch beweist auf das evidenteste sowohl das Vorhandensein als die Körperlichkeit der Luft, indem er uns beweist, dass in einen mit Luft erfüllten Raum ein anderer Körper nicht eindringen kann.

Durch einen ebenso einfachen Versuch können wir uns nun überzeugen, dass die Luft eine Flüssigkeit ist, dass ihre Theile frei beweglich sind. Denn kehren wir die Glocke um, so dass ihre Basis nach oben gerichtet ist, so können wir flüssige und feste Körper leicht hineinbringen. Die eingebrachten Körper verdrängen die Luft ebenso leicht, wie eine Flüssigkeit, in die man sie eintaucht, oder wie eine schwerere die leichtere Flüssigkeit verdrängt, mit welcher sie sich nicht mischt. Wir müssen daher die Luft als eine Flüssigkeit betrachten und ihren Theilen dieselbe freie Beweglichkeit zuschreiben, wie den einzelnen Theilen der Flüssigkeiten.

Dasselbe zeigt uns der geringe Widerstand, den die Bewegung der Körper in einem mit Luft erfüllten Raume erfährt, der noch um vieles geringer ist als der Widerstand, den eine Bewegung in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume findet.

Dass die Luft kein selbständiges Volumen besitzt, zeigt folgender Versuch. Man kann eine Blase leicht zum Theil mit Luft anfüllen. Bringt man sie dann in eine Glocke, aus der wir durch einen später zu beschreibenden Apparat, die Luftpumpe, die Luft fortschaffen können, so zeigt die in der Blase enthaltene Luft das Bestreben, sich auszuweiten, indem die Blase sehr bald vollständig gespannt ist, und selbst durch die ausdehnende Kraft in ihr eingeschlossenen Luft zersprengt werden kann.

Die Luft hat demnach keine selbständige Gestalt, sie dehnt sich aus, bis sich ihrer Ausdehnung ein äusserer Widerstand entgegensetzt. Da nun dieselbe eine Flüssigkeit ist, so nennt man sie dieser Eigenschaft wegen eine ausdehnsame Flüssigkeit, eine expansibele Flüssigkeit, und die bisher betrachteten Flüssigkeiten im Gegensatz dazu tropfbare.

§. 88.

**Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam haben.** Da die Gase Flüssigkeiten sind, so folgt, dass sie eine Reihe von Eigenschaften besitzen, welche wir an den Flüssigkeiten kennen gelernt haben. Zunächst sind sie schwer wie alle Körper. Um dieses durch einen einfachen ohne weiteres verständlichen Versuch nachzuweisen, nehmen wir eine mit einem Hahne versehene Glaskugel von leichtem Glase, welche vielleicht 5—10 Liter Inhalt hat (Fig. 130), hängen sie an eine empfindliche Wage und bestimmen ihr Gewicht. Wenn wir dann die Kugel auf den bereits vorhin erwähnten Apparat bringen, mittels dessen wir die Luft ab entfernen können, und die Luft aus ihr fortnehmen, so zeigt eine neue Wägung, dass nach Fortnahme der Luft die Kugel leichter geworden ist, und zwar bei einer Capacität von 10 Liter um ungefähr 10 Gramm.

Die Luft und ebenso alle Gase, welche uns die Chemie kennen lehrt, sind demnach schwer wie alle Flüssigkeiten.

Wie bei den Flüssigkeiten nur dann Gleichgewicht war, wenn der Druck auf ein Flüssigkeitselement im Innern von allen Seiten derselbe war, so auch bei den Gasen; im Zustande des Gleichgewichts erhält jedes Gasmolekül von allen Seiten den gleichen Druck; ist derselbe in einer Richtung gestört, so tritt eine Bewegung ein. Dies zeigt sich schon in dem zuerst erwähnten Versuche mit der Glocke. Als der Hahn geöffnet wurde, während dieselbe die Flüssigkeit eingedrückt war, trat sofort ein Ausströmen der Gase ein, da der von unten nach oben auf das in der Glocke befindliche Gas wirkende Druck grösser war als der von oben nach unten gerichtete Druck. Von unten nach oben drückte die über dem Flüssigkeitsniveau unter der Glocke erhobene Flüssigkeitsschicht, und vielleicht ein äusserer auf der Flüssigkeit lastender Druck; von oben nach unten nur dieser letztere; deshalb drang die Luft aus der Hahnöffnung hervor.

Wenn wir auf ein in einem Gefässe eingeschlossenes Gas durch einen dem Gefässe genau anpassenden Kolben einen Druck ausüben, so muss wegen der flüssigen Natur der Gase dieser Druck sich nach allen Richtungen gleichmässig fortpflanzen, es muss demnach jedes Flächenstück von gleicher Grösse auch einen gleichen Druck erfahren. Da nun die Gase, wie wir sahen, schwer sind, so muss sich alles das, was wir bei den der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten fanden, auch hier und besonders in der uns umgebenden atmosphärischen Luft wiederholen.

Denken wir uns zu dem Ende einen mehrere Meilen hohen Cylinder über die Erde erhoben, vollkommen verschlossen und vollständig mit Gas erfüllt, und zerlegen wir dieses Gas in lauter sehr dünne horizontale Schichten, so

Fig. 141.



können wir diese als ebensoviele Kolben betrachten, welche auf das darunter liegende Gas drücken. Der Druck wird daher von oben nach unten zunehmen; in irgend einer Schicht aber auf ein gleiches Flächenstück überall gleich sein müssen, und zwar nach allen Richtungen gleich, ebenso nach allen Seiten auf die Wände des Cylinders, als auch nach oben oder nach unten; derselbe ist gleich dem Gewichte der über dieser Fläche befindlichen Luftsäule. Dieser Druck ist ganz unabhängig von der Form oder der Grösse des Cylinders, vorausgesetzt nur, dass seine Höhe dieselbe bleibt. Dieser letztere Umstand ist von bedeutender Wichtigkeit, da wir dadurch berechtigt sind, unsere Schlüsse auf die unsere Erde umgebende Atmosphäre auszudehnen. Die Atmosphäre ist eine Luftmasse, welche sich rings um die Erde als eine Schicht von etwa 8 Meilen Dicke herumlegt, und welche, wie die Chemie uns lehrt, ein Gemenge zweier gasförmiger Körper ist, von Sauerstoff und Stickstoff. Nach den vielfachsten Analysen enthält sie um wenig mehr als 79 Theile Stickstoff (79,08) und nahe 21 Theile Sauerstoff (20,97), und ausserdem noch geringe Mengen eines andern Gases, der Kohlensäure, und etwas Wasserdampf. Man nimmt an, die Atmosphäre sei von einer letzten Schicht begrenzt, welche wegen ihrer geringen Dichtigkeit und der Centrifugalkraft auf die darunter liegenden Schichten keinen Druck ausübt. Denn die Luft nimmt an der Umdrehung der Erde Theil, sie ist, Störungen abgerechnet, welche durch Temperaturdifferenzen bewirkt, in Luftströmungen sich zeigen, in Bezug auf die Punkte der Erdoberfläche unbeweglich. Mit der Höhe über der Erde muss daher die centrifugale Beschleunigung zunehmen, und deshalb in einer gewissen leicht zu berechnenden Entfernung von der Erde der Schwere gleich werden.

Wir können demnach die Atmosphäre, indem wir von jenen Störungen absehen, als ein im Gleichgewicht befindliches Flüssigkeitsmeer betrachten, auf dessen Boden wir leben, von constanter Höhe, und welches alle jene Wirkungen hervorbringt, welche eine tropfbare Flüssigkeit von geringer Dichte hervorbringen würde. Jede Fläche erfährt demnach einen Druck, der dem Gewichte der über ihr befindlichen Luft gleich ist; derselbe ist constant in Schichten, welche mit der Erdoberfläche parallel sind; er vermindert sich, wenn wir emporsteigen, nimmt zu, wenn wir uns der Erde nähern. An jedem Orte ist der Druck auf gleiche Flächenstücke derselbe, wie sie auch gerichtet sind, und bei verschiedenen Flächenstücken ihrer Grösse proportional. Er muss ferner derselbe sein im Zimmer wie in freier Luft, und an einer und derselben Stelle bis auf die vorhin erwähnten Störungen constant sein.



Fig. 142.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Druck zu messen, wird es gut sein, vorher die den Gasen und Flüssigkeiten gemeinsamen Eigenschaften noch weiter zu betrachten.

Sowie ein in Wasser getauchter Körper an Gewicht verliert, so wird auch stets ein Theil des Gewichtes der Körper von der Luft getragen; indem der von der Luft umgebene Körper ebenso einen an seinem Schwerpunkt angreifenden nach oben gerichteten Druck erhält, der dem Gewicht der

von ihm verdrängten Luft gleich ist. Der experimentelle Nachweis dieses Satzes ist nicht schwierig, jedoch begnügen wir uns hier damit, nachzuweisen, dass überhaupt ein Gewichtsverlust vorhanden ist, und sehen die Grösse desselben als durch die frühern Lehren bewiesen an. Wir wenden zu dem Ende eine kleine Wage an (Fig. 142), deren Balken an der einen Seite eine grosse hohle Kugel von dünnwandigem Glase trägt, während an der andern Seite ein kleines Gewicht ihr das Gleichgewicht hält. Dieses kleine Gewicht ist auf seinem Wagbalken verschiebbar, und man hängt es dann so, dass es der Kugel in der Luft genau das Gleichgewicht hält. Darauf bringt man diesen Apparat unter die Glocke einer Luftpumpe, und nimmt die Luft unter der Glocke fort. Man sieht dann, wie sich allmählich der Wagbalken nach der Seite der Kugel neigt, ein Beweis, dass sie schwerer wird. Die mit dem kleinen Gewichte gleich schwere grosse Kugel verliert in der Luft, da sie eine grössere Menge Luft aus der Stelle drängt, mehr an Gewicht als das kleine Messinggewicht; die Gewichtszunahme, wenn die Luft fortgenommen wird, ist daher bei ihr grösser als bei dem kleinen Gewicht.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist die, dass uns die Wage nicht das wahre Gewicht der Körper gibt, sondern nur die Differenz zwischen dem Gewicht des Körpers und dem der verdrängten Luft. Nennen wir das wahre Gewicht des Körpers  $P$ , jenes, welches uns die Wage angibt,  $P'$ , das Volumen des Körpers  $v$ , und das spezifische Gewicht der Luft  $s$ , so haben wir

$$P = P' + v \cdot s,$$

indem  $v \cdot s$  das Gewicht der verdrängten Luft ist. Da indess auch die Gewichte, welche den Körper abwägen, ein Volumen  $v'$  Luft verdrängen, so müssen wir, um das wahre Gewicht  $P$  zu erhalten, noch das Gewicht  $v' \cdot s$  der von diesen verdrängten Luft abziehen, so dass

$$P = P' + v \cdot s - v' \cdot s = P' + (v - v') s.$$

Man sieht, darnach kann das wahre Gewicht grösser oder kleiner sein als das scheinbare, je nachdem  $v > v'$  oder  $v < v'$  ist, das heisst, je nachdem das Volumen des abzuwägenden Körpers oder das der Gewichte grösser ist.

Diese Correction, welche wir anbringen müssen, um das wahre Gewicht eines Körpers zu erhalten, können wir erst später in der Wärmelehre vollständig bestimmen, da die Grösse  $s$  sich sehr bedeutend mit der Temperatur der Luft ändert. Hier sei nur soviel erwähnt, dass bei der Temperatur des schmelzenden Eises und 760<sup>mm</sup> Barometerstand das Gewicht eines Liter (1000 Cent. cub.) Luft nach den Versuchen von Regnault 1<sup>er</sup>,293 beträgt, das spezifische Gewicht  $s$  der Luft also 0,001293 ist.

Eine weitere wichtige Folge aus obigem Satze ist die, dass in der Luft gerade so wie im Wasser Körper schwimmen können, wenn das Gewicht der von ihnen aus der Stelle gedrängten Luft grösser ist als ihr eigenes Gewicht. Nennen wir  $s$  das spezifische Gewicht der Luft,  $s'$  das eines Körpers vom Volumen  $v$ , so ist gerade wie §. 66  $v (s' - s)$  das Gewicht, welches die Körper fallen macht. Ist nun  $s' > s$ , so fällt der Körper zur Erde nieder, ist  $s' = s$ , so befindet er sich in der Luft im Gleichgewicht, ist  $s' < s$ , so steigt er in der Luft auf.



Hieraus geht hervor, dass in der Wirklichkeit nicht alle Körper gleich schnell fallen können, wie wir es im ersten Kapitel des ersten Abschnittes voraussetzten, da die Kraft, mit welcher sie zur Erde niederfallen, durch die Einwirkung der Luft modificirt, nicht einfach ihrem Gewichte proportional ist; specifisch leichtere Körper werden langsamer fallen müssen als schwerere.

Wir werden aber in der Luftpumpe ein Mittel kennen lernen, um Räume herzustellen, die keine oder nur sehr wenig Luft enthalten und zeigen, dass in diesen ein Stückchen Papier ebenso rasch fällt, als ein Stückchen Platin.

Die letzte Bedingung  $s' < s$  kann man herstellen, wenn man grosse Ballons mit dünnen und leichten Wänden mit erwärmter Luft oder einem Gase anfüllt, welches specifisch leichter ist als Luft, z. B. Wasserstoffgas oder Leuchtgas.

Um die Kraft, mit welcher der Ballon aufsteigt, zu erhalten, haben wir nur von dem Auftrieb des Ballons  $v(s - s')$  das Gewicht  $p$  aller seiner Bestandtheile abzuziehen, wir erhalten also dafür

$$v(s - s') - p.$$

Ist z. B. das Gas, mit dem der Ballon gefüllt ist, Wasserstoff, so ist

$$s = 0,0012932$$

$$s' = 0,0000895$$

bei Null Grad Temperatur, und wir erhalten

$$0,000037 v - p$$

für die Kraft, mit welcher ein solcher Ballon in der Luft emporgetrieben wird.

Die in neuerer Zeit vielfach benutzten Luftballons beruhen auf diesem Satze. Ein grosser Schlauch von leichtem und doch dichtem Zeuge wird mit einem leichten Gase gefüllt, so dass selbst nach Anhängen eines Schiffchens etc. sein Gewicht noch kleiner ist als die aus der Stelle gedrängte Luft. Ein solcher Ballon wird sich daher mit allem Zubehör in der Luft erheben.

#### §. 89.

**Das Barometer.** Wir sahen in dem vorigen Paragraphen, dass wir auf dem Boden eines Luftmeeres uns befinden, und dass deshalb jede Fläche einen ihrer Grösse proportionalen Druck auszuhalten hat, der gleich ist dem Gewichte der Luftsäule, welche die Fläche zur Basis hat, deren Höhe gleich ist derjenigen der Atmosphäre. Es bietet keine Schwierigkeit, diese Thatsache durch den Versuch nachzuweisen und die Grösse dieses Druckes zu messen.

Füllt man eine Röhre von ungefähr 1 Meter Länge ganz mit Quecksilber an, schliesst sie mit dem Finger, stellt sie in ein Gefäss mit Quecksilber wie Fig. 143 und öffnet dann durch Wegnahme des Fingers die Röhre unter Quecksilber, so sinkt das Quecksilber in der Röhre, aber nur bis zu einem gewissen Punkte, so dass das Quecksilber im Innern der Röhre ungefähr 760<sup>mm</sup> höher steht als ausserhalb.

aus folgt nach den früher erkannten hydrostatischen Gesetzen, dass die äussere Oberfläche des Quecksilbers ein Druck lastet, der im Innern nicht vorhanden ist und dem die Quecksilbersäule von 760<sup>mm</sup> im Gewicht hält. Wir erkennen in diesem Drucke auf die äussere Oberfläche des Quecksilbers den Druck der äusseren Luft; da wir durch die Hebung mit Quecksilber alle Luft aus der Röhre vertrieben, so ist dort ein äusserer Luftdrucke gleicher Gegendruck. Deshalb muss das Quecksilber gehoben werden und zwar so weit, dass der Gegendruck der gehobenen Quecksilbersäule dem Luftdrucke gleich ist. Die gehobene Quecksilbersäule misst also die Höhe einer ihr an Querschnitt gleichen Luftsäule, deshalb nennt man diesen Apparat ein Barometer.

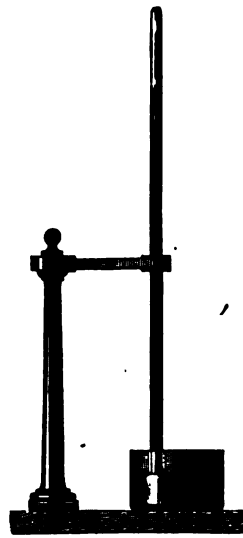
Die Idee, mittels dieses Versuches die Existenz des Luftdruckes nachzuweisen, rührt von Viviani her. Schon früh kannte man die Thatsache, dass Wasser in Röhren, aus welchen die Luft ganz oder theilweise entzogen war, Flüssigkeiten emporsteigen. Man benutzte diese Erscheinung zur Construction der ersten Saugpumpen. Die Erklärung der Erscheinung suchte man aber nicht in einem Drucke der äusseren Luft, sondern in dem horror vacui, man nahm an,

die Natur eine Abscheu vor dem leeren Raume habe und dass in Folge dieses Abscheues das Wasser in Saugpumpenröhren aufsteige, wenn durch Hebung des Wassers in denselben ein leerer Raum sich bilde.

Die Unhaltbarkeit dieser Erklärung wurde man erst durch die Erfahrung wahr, als in Florenz ein Pumpenmacher eine Saugpumpe herstellte, deren Saugrohr unter dem Himmel länger als 32 Fuss war; es gelang nicht, mit derselben das Wasser höher als nahe 32 Fuss zu heben. Nach der frühern Erklärung müsste man annehmen müssen, dass die Natur nur bis zu dieser Höhe eine Abscheu vor dem leeren Raume hätte. Galilei, an den man sich wendete, vermochte diese Schwierigkeit nicht aufzuklären; erst sein Schüler Viviani erkannte die Ursache des Steigens des Wassers. Er zeigte weiter, wenn der Luftdruck das Wasser bis zu einer Höhe von 32 Fuss oder 10,25 Meter heben kann, so kann er das Quecksilber, welches 13,5 mal schwerer ist, nur bis zu einer 13,5 mal kleinern Höhe, d. h. bis ungefähr 28 Zoll = 760<sup>mm</sup> heben. Der von Viviani's Freund, Evangelista Torricelli, ausgeführte Versuch bewies die Richtigkeit dieser Vermuthung. Er zeigte dann Pascal in der That, dass die Höhen, bis zu denen verschiedene Flüssigkeiten in so vorgerichteten Röhren gehoben wurden, ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proportional seien, ein Beweis, dass ein bestimmtes Gewicht einer Flüssigkeit in einer Röhre von gegebenem Querschnitt gehoben wird, welches dem äusseren Drucke gleich ist.

Der vorhin beschriebene Apparat, das Barometer in seiner einfachsten Form, ist jedoch zu genauen Messungen über die Grösse des Luftdruckes nicht geeignet. Dazu muss dasselbe sorgfältig hergerichtet werden.

Fig. 143.



## §. 90.

**Construction des Barometer.** Damit das Barometer seinen Zweck erfülle, ein genau bestimmbares Maass des Luftdruckes zu bieten, muss mehreren Bedingungen genügen:

1) Muss das Quecksilber vollständig rein sein, da unreines Quecksilber eine andere Dichtigkeit hat als reines und an den Wänden der Glasröhre adhärirt.

2) Die Barometerröhre muss ganz rein sein.

3) In dem über dem Quecksilber befindlichen Raume des Barometers darf keine Luft sein.

1. Um der ersten Bedingung zu genügen, muss man das käufliche Quecksilber, welches stets eine geringe Menge Oxyd und fremde Metalle enthält, reinigen. Das beste Verfahren dazu ist, dass man das Quecksilber in einer starken Glasflasche mit stark verdünnter Salpetersäure dauern und heftig schüttelt. Man setzt das so lange fort, bis sich das Quecksilber in der verdünnten Säure in ganz kleine Kügelchen zertheilt, so dass die Flüssigkeit gemengt beim Schütteln als eine gleichförmige graue Masse erscheint. Dann giesst man die verdünnte Säure ab und füllt statt ihrer destillirtes Wasser in die Flasche und schüttelt wieder. Das Wasser wird mehrmals und zwar so lange erneuert, bis das abgegossene Wasser durch Lackmuspapier. Das so gereinigte Quecksilber wird dann zunächst mit Filterpapier möglichst getrocknet und dann in eine ganz reine Porcellanschale filtrirt. Dieses geschieht am bequemsten, indem man nach gewöhnlicher Art ein Filter macht, und in dieses unten an seiner Spitze mit einer feinen und reinen Nadel mehrere sehr kleine Oeffnungen einsticht, so dass das Quecksilber in ganz feinen Strahlen durchfliesst. In der untergestellten Porcellanschale darf das Quecksilber dann durchaus keine Flecke machen. Thut es das, so muss es mehrmals filtrirt werden. In den meisten Fällen erreicht man wenigstens dadurch seinen Zweck, wenn die vorhergehenden Operationen vorsichtig durchgeführt waren. Um es vollständig zu trocknen wird es dann über einer Weingeistlampe oder Bunsen'schen Gaslampe vorsichtig gelind erwärmt.

2. Um die Röhre vollständig zu reinigen, spült man dieselbe zuerst mit kochender Salpetersäure aus und darauf mehrfach mit Wasser nach, um jede Spur von Säure aus der Röhre fortzuschaffen. Darauf wird die Röhre scharf getrocknet und an der einen Seite gut rund zugeblasen.

3. Die Füllung mit Quecksilber geschieht am besten so, dass man an die ziemlich stark erhitze Röhre einen sehr feinen Trichter aufsetzt, der nahe bis zum untern Ende der Röhre reicht, und nun trocknes und eben falls stark erwärmtes Quecksilber eingiesst. Aber selbst wenn man den Trichter in eine Capillarröhre auszieht und durch aufmerksames Nachfüllen mit Quecksilber das Mitreissen von Luftblasen verhindert, wird man fast immer zwischen Quecksilber und Glaswand eine Menge kleiner Luftblasen erblicken, welche durch vorsichtiges Schütteln und Klopfen nicht wegbringen sind. Man muss deshalb das Barometer auskochen, eine Operation die wegen der hohen Temperatur, bei welcher das Quecksilber kocht und der schlechten Wärmeleitfähigkeit des Glases ziemlich schwierig ist.

l bei der die Barometer leicht verunglücken. Hat man, wie es jetzt ist in den Städten der Fall ist, Gas zu Gebote, so kann man die Operation mlich gefahrlos und sicher mittels der Bunsen'schen Gaslampe auf folgende Weise ausführen.

Man füllt das herzustellende Barometer ungefähr bis zu einem Drittel ner Höhe in der vorhin beschriebenen Weise mit Quecksilber und klemmt selbe vertical in ein Stativ ein. Das Stativ mit dem Barometer stellt n dann in eine grosse Wanne von Porcellan oder nicht verzinnem Eisen- ech, Schwarzblech, mit ziemlich hohen Wänden; damit, wenn vielleicht s Rohr beim Kochen zerspringen sollte, das auslaufende Quecksilber in rselben angesammelt wird. Darauf erhitzt man sehr vorsichtig mit kleiner amme die untere Spitze der Röhre, indem man mit der Hand die Flamme mer unter der Wölbung des Rohres umherführt. War die Röhre und e Quecksilber vorher ziemlich warm, so hat man bei einiger Vorsicht ein ringen der Röhre nicht zu fürchten. Nach und nach macht man dann ie Flamme durch weiteres Aufdrehen des Gashahns grösser und bald egt dann das Quecksilber an der Spitze an zu kochen. Dies ist der ge- eichste Augenblick, da bei zu raschem Kochen die Dampfblasen zu as werden, die ganze Quecksilbersäule emporheben, und dann beim Zu- efallen derselben leicht die Glasröhre zerschmettert wird. Man muss ehalb, sobald man die ersten Dampfblasen, die immer klein sind, sich den sieht, die Flamme etwas kleiner machen und mit doppelter Vorsicht wärmen, um das stossweise Kochen zu verhindern. Nach einiger Uebung is es nicht schwer, ein ruhiges Kochen zu erzielen. Hat man die Spitze an ausgekocht, so geht man mit der Flamme an der Röhre hinauf, indem an sie immer um die Röhre herumführt, und kocht die höhern Theile der eile, aber nur bis ungefähr 5<sup>cm</sup> unter der Oberfläche derselben, um zu verhindern, dass das siedende Quecksilber mit der äussern Luft in Be- rührung kommt, da hierbei sonst eine theilweise Oxydation des Queck- silbers eintritt, und das gebildete Oxyd sich im Quecksilber auflöst und verunreinigt. Ist das Kochen soweit vorgeschritten, so unterbricht man und füllt das Rohr bis zum zweiten Drittel mit trockenem und heissem ecksilber. Man fängt dann etwas unter der Stelle, an der man vorhin s Kochen beendigte, wieder an vorsichtig zu erhitzen und verfährt wie vor- n. Ist auch der Theil ausgekocht, so füllt man das Barometerrohr voll- endig, bis vielleicht 2<sup>cm</sup> unter dem obern Ende an und kocht auch dieses ück in der vorhin beschriebenen Weise aus, indem man immer stoss- ises Kochen vermeidet und verhindert, dass das siedende Quecksilber mit r Luft in Berührung kommt.

Man vertreibt auf diese Weise alle Luft und alle Feuchtigkeit, welche rher noch in der Röhre waren, indem sie am Glase adhärirten, und erkennt, b das Barometer wirklich gelungen ist, daran, dass man in der ganzen usdehnung desselben keine Blase zwischen Glas und Quecksilber wahr- ähmt, und dass das Rohr wie ein vollkommener Spiegel aussieht.

Nach dieser Methode kann man es leicht dahin bringen, dass nur selten ein Barometer misslingt, und zugleich ist sie ziemlich ungefährlich. Bekanntlich sind die Quecksilberdämpfe giftig, und man muss sich hüten, sie einzuathmen. Springt das Barometer, so löscht man die Flamme augen- blicklich durch Zudrehen des Gashahns, und auf der Wanne von Blech

kühlt sich das Quecksilber fast momentan ab, so dass nur wenig Dämpfe sich entwickeln; hat man aber das Rohr nach sonstigen Methoden in eine geneigte rostartige Rinne gelegt und durch glühende Kohlen erhitzt, so ist bei einem Zerspringen des Rohres die massenhafte Entwicklung von Dämpfen wohl kaum zu vermeiden. Ueberdies hat man bei der angegebenen Methode die Erhitzung weit besser in seiner Gewalt.

Taupenot gibt eine Vorsichtsmassregel, welche das Kochen sehr erleichtert (Annal. de chim. et de phys. III. Série. Tome XLIX. p. 91). Er schlägt vor, die Röhre ungefähr 10<sup>cm</sup> länger zu nehmen, als man sie später bedarf, in dem Stücke einige Verengerungen anzubringen, an das offene Ende der Röhre eine Kautschukröhre zu befestigen, welche mit einer Luftpumpe in Verbindung steht, und dann die Luft über dem Quecksilber auszupumpen. Dann siedet das Quecksilber bei einer um 90° tiefern Temperatur und das Stossen wird noch leichter vermieden.

Nach dem Kochen lässt man die Röhre sich abkühlen, schneidet den überschüssigen Theil derselben glatt ab, und füllt dann die Röhre mit trockenem und warmem Quecksilber soweit, dass dasselbe in Form einer Kuppe über den Rändern der Röhre hervorragt. Man schliesst dann die Röhre mit dem Finger, indem man die Kuppe vorsichtig abstreift, kehrt sie um und taucht sie in ein Gefäss mit Quecksilber, wobei man darauf zu achten hat, dass beim Umdrehen keine Luftblase in den leeren Raum der Röhre über dem Quecksilber eindringt.

Ist das Barometer auf diese Weise hergestellt, so muss es fest aufgestellt und mit einer Theilung in Millimeter versehen werden, um jeden Augenblick den verticalen Abstand der beiden Quecksilberniveaus innerhalb und ausserhalb der Röhre zu messen. Da nun aber das Quecksilber in der Röhre nur steigen kann, wenn das Niveau im Gefäss eine entsprechende Strecke sinkt, so muss die Theilung so angebracht sein, dass man zugleich beide Niveaus beobachten kann.

### §. 91.

**Verschiedene Formen der Barometer.** Dient das Barometer nur zu genauen Versuchen im Laboratorium, so dass es nicht von seiner Stelle gebracht zu werden braucht, und hat man ein Kathetometer zu Gebote, so ist die Einrichtung desselben sehr einfach. Man wendet als Gefäss einen parallelepipedischen Glaskasten an, den man auf ein in der Zimmerwand, am besten vor einem Fenster angebrachtes festes Wandtischchen fest aufstellt (Fig. 144). Das Rohr wird mittels zweier Klammern an einem Brett befestigt, welches mit dem Tischchen zugleich unten in die Zimmerwand fest eingelassen ist, und welches oben an der Stelle, wo sich der leere Raum des Barometer befindet, einen Ausschnitt erhält, so dass man hinter dem Barometer die helle Fensterfläche sieht.

Man misst dann die Niveauunterschiede mittels des Kathetometers. Um diese Messungen mit möglichster Genauigkeit auszuführen, ist unten über dem Gefäss ein Stift *A* angebracht, der mittels einer Schraube in dem festen Gestell gehoben und gesenkt werden kann. Wenn man die Messung machen will, beginnt man damit, den Stift soweit herabzulassen, dass seine Spitze gerade das Quecksilber berührt. Man kann dieses mit der grössten Genauigkeit erreichen, denn beim Herablassen sieht man das Bild des

Das Quecksilber und den Stift selbst sich gegen einander bewegen. Sobald der Stift in dem Augenblicke das Quecksilber, wo die beiden genau auf einander treffen. Schraubt man

so höhl sich das Quecksilber rings um den Stift. Darauf stellt man das Kathetometer zunächst die Quecksilberkuppe in der Röhre ein, indem man den horizontalen Faden des Fadenkreuzes gerade die Quecksilberkuppe tangiren lässt. Man bemerkt den Stand des Kathetometers und stellt dann unten auf das Niveau des Quecksilbers ein, indem man die Spitze des Stiftes gerade das Fadenkreuz berühren lässt. Die Differenz der beiden Stellungen gibt die Höhe des Barometer-

Hat man vorher die Länge des Stiftes genau gemessen, so kann man auch so verfahren, dass man das Niveau des untern Quecksilbers mit dem Kathetometer zu visiren, das obere Ende des Stiftes bezogen zur Differenz der beiden Ablesungen am Kathetometer fügt man dann, um den Barometerstand zu erhalten die Länge des Stiftes.

Dieses Barometer ist das einfachste, und diese Messmethode ist die genaueste, denn man kann auf diese Weise die Niveauunterschiede am sichersten ablesen; mag das Barometer vertical stehen oder nicht, erhält man immer den verticalen Abstand der beiden Quecksilberoberflächen. Man kann leicht die Höhe des Barometers bis auf ein Fünfzigstel Millimeter erhalten.

**Barometer von Fortin.** Das soeben beschriebene Barometer kann jedoch nur an einem festen Orte benützt werden. Man bedarf aber in sehr vielen Fällen ein tragbares Barometer, theils auf Reisen, um den Luftdruck an verschiedenen Orten zu messen, theils, wie wir später zeigen werden, zu Höhenmessungen. Man muss daher dann ein tragbares Barometer anwenden, an dem der Maassstab ein für allemal fest ist. Das vorzüglichste Gefäßbarometer der Art ist das Fortin'sche.

Das Gefäß desselben (Fig. 145) besteht aus einem Glaszylinder, welcher an einem kupfernen Deckel versehen ist, der in seiner Mitte eine Oeffnung hat, um das Barometerrohr durchzulassen. Der Glaszylinder steht auf einem Buchsbaumholz Cylinder, der mittels Stangen an dem Deckel befestigt ist. Der Boden dieses Buchsbaumcylinders ist aus einem elastischen Sack gebildet, eines Beutels, dessen innere Seite aus nicht vulkanisirtem Kautschuk, dessen äussere aus Leder besteht, und der über den ganzen Rand des Cylinders von Buchsbaum fest aufgebunden ist. Der Buchsbaumcylinder ist in einem weiten Metallcylinder fest eingeklemmt, durch dessen Boden eine Schraube hindurchgeht, deren oberer Kopf gegen ein metallisches Stück drückt, welches in der Mitte des Metallcylinders befestigt ist, und in dessen nach unten gerichtete Höhlung der elastische Boden der Schraube hineinpasst.

Das Gefäß ist bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt. Wenn man nun die Schraube dreht, wird der elastische Boden des Gefäßes

Fig. 144.



und damit die Oberfläche des Quecksilbers in dem Glascylinder g oder gesenkt. Man ist daher im Stande, das Niveau des Quecksilber-

Fig. 145.



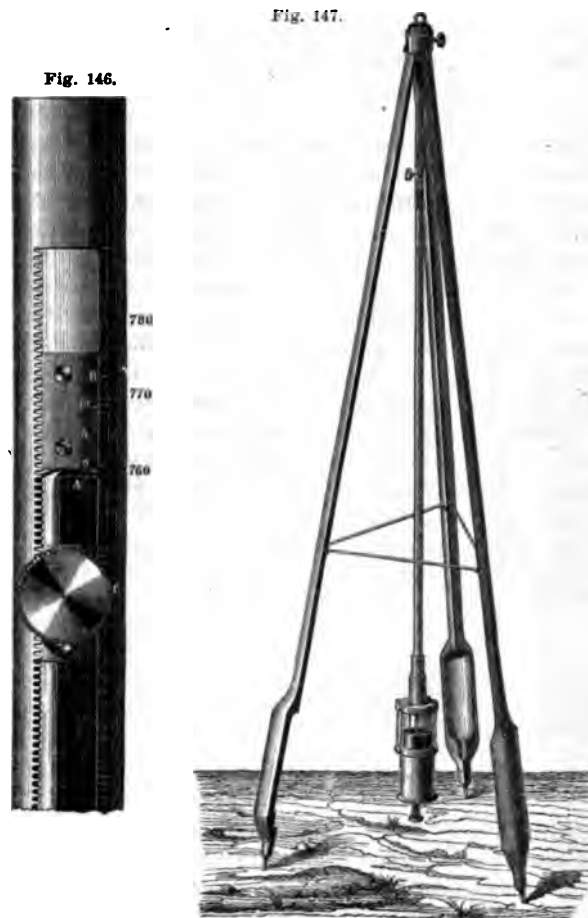
Gefässe immer auf gleicher Höhe zu erhalten. Um zu markiren, reicht von dem Deckel des Glascylinder ein Elfenbeinstift *s* in den Cylinder herab und man nur nöthig, gerade so wie bei dem vorigen Barometer dafür zu sorgen, dass die Spitze des Stiftes *s* mit der Oberfläche des Quecksilbers in Berührung kommt, indem man die Oberfläche des Quecksilbers mit Hilfe der Schraube soweit hebt. Diese ist dann der Ausgangspunkt der an dem Barometer gebrachten Theilung.

Das Barometerrohr reicht durch die in der Mitte des Deckels angebrachte Oeffnung in das Gefäss und ein Stück Leder, welches an dem Rohr und über den Deckel hervorragenden Wänden der Oeffnung angebonden ist, verschliesst dieselbe soweit, dass das Quecksilber heraustreten, aber die äussere Luft hindert nicht, mit der das Gefäss communiciren kann. Das Barometerrohr ist vollständig von einer Messinghülse umgeben, um es gegen Stösse zu schützen, in welcher Hülse zwei gegenüberliegende Spalten angebracht sind, die vielleicht 2 Decimeter unter und über den mittleren Theil des Barometers von 760 Millimeter lang sind. Die Messinghülse ist eine Millimetertheilung angebracht, welche oben neben dem Rande der Spalte stehen. Der Nullpunkt der Theilung ist die Spitze des Elfenbeinstiftes. Die untere Kante der Spalte ist gezahnt (Fig. 146) und ein Triebes ist daran ein Nonius auf und ab schiebbar. Will man eine Ablesung machen, so schiebt man damit, unten das Niveau des Quecksilbers ein zu stellen. Dann verschiebt man den Nonius, indem man das Auge in der durch den unteren Theil derselben gehenden Horizontalebene hält, so lang diese Ebene die Quecksilberkuppe tangirt, und liest die Stellung des in dieser Ebene liegenden Nullpunktes des Nonius an der Theilung zu bestimmen, um

den Stand des Barometers bis auf Zehntel Millimeter genau zu erhalten. Das Barometer wird auf einem dreibeinigen Stativ, welches beim Transport gleich als Etui dient (Fig. 147), so aufgehängt, dass es durch die Mitte des Gefässes immer vertical hängt. Dazu ist es mittels einer sogenannten Cardanischen Aufhängung befestigt, das heisst um zwei zu einander rechte Axen drehbar. Das Barometer ist an dem Durchmesser eines drehbaren Messers befestigt, der selbst um einen zu jenem senkrechten Durchmesser drehbar ist.

Dieses Barometer ist sehr leicht transportabel, und bietet so weitern Vortheil dar. Man schraubt dann das Quecksilber des Gefässes auf die Höhe, soweit, bis nicht nur das Gefäss, sondern auch das Rohr ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Die vorher in dem Gefässe befind-

ift tritt dann durch das Leder aus. Dann kann man den Apparat legen er umkehren, ohne dass Luft in das Barometer eindringt, und ohne berechnen zu müssen, dass durch etwaige Stösse Schwankungen des Queck-



bers eintreten, so dass durch den Stoss des Quecksilbers das Glas entzweit. Der zusammengelegte Dreifuss schützt dann als Etui das Barometer vor äussern Verletzungen.

### §. 92.

**Correction wegen der Capillarität.** Da in den bisher beschriebenen Barometern das Rohr stets in ein mehr oder weniger weites Gefäss mit Quecksilber taucht, so ist nach den §. 72 vorgetragenen Lehren klar, dass die Oberfläche des Quecksilbers in dem Rohre bedeutend stärker gekrümmt ist als in den Gefässen, und daraus folgt weiter, dass in den



Röhren wegen der capillaren Depression das Quecksilber nicht so steht, als es in Folge des hydrostatischen Druckes thun würde. müssen daher an den beobachteten Barometerständen eine Correctur bringen, indem wir die Depressionsgrösse bestimmen und diese der beobachteten Barometerhöhe hinzufügen. Dies ist jedoch sehr schwierig. Man hat gesehen, dass die capillare Depression abhängt von der Weite der Röhre und dem Winkel, unter dem die Flüssigkeitsoberfläche die Wandfläche schneidet. Wenn man aber nun den Winkel misst, den die Quecksilberoberfläche der Wand bildet, so findet man denselben, wie wir bereits früher erwähnt haben, keineswegs constant; ja die Schwankung ist im Barometer noch viel deutender als sonst, es kommt vor, dass der Winkel nahezu ein Grad wird, wo dann gar keine Depression eintritt. Die Depression des Quecksilbers kann demnach in Röhren gleichen Durchmessers sehr verschieden sein, und man kann keine allgemein gültigen Tabellen aufstellen, um die Depression für Röhren von bestimmtem Durchmesser zu bestimmen. Man wird für jedes Barometer den Durchmesser der Röhre und für jede Beobachtung die Höhe des Meniskus messen und daraus den Winkel bestimmen, unter dem die Quecksilberoberfläche die Wandfläche schneidet, und daraus dann die Depression berechnen. Um das leichter zu machen, hat man verschiedene Tabellen berechnet, welche nach den Formeln von Laplace die Depressionen bei verschiedenen Winkeln und Röhrendurchmessern geben. Eine solche von Delcros berechnet findet sich im XIV. Band der Mémoires der Brüsseler Akademie. Für einen Winkel von  $36^{\circ}$  gibt Bravais folgende Zahlen an:

Durchmesser der Röhre	Depression
4 <sup>mm</sup>	1 <sup>mm</sup> ,635
6	0 909
8	0 538
10	0 322
12	0 195
14	0 117
16	0 070
18	0 041
20	0 025

Man sieht, wie die Depression mit der Weite der Röhre rasch abnimmt, und dass sie bei einem Röhrendurchmesser von 20<sup>mm</sup> schon unterhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler beim Fortin'schen Barometer fällt. Wenn man die Röhre noch weiter, gegen 30<sup>mm</sup> erweitert, so ist der Fehler stets verschwindend klein. Deshalb wendet man bei festen Barometern auch Röhren von solchem Durchmesser an. Bei transportablen ist jedoch eine solche Weite wegen des zu grossen Gewichtes des darin enthaltenen Quecksilbers nicht anwendbar. Doch auch bei diesen darf der Durchmesser der Röhre füglich nicht unter 10<sup>mm</sup> klein sein.

### §. 93.

**Heberbarometer.** Von den bisher beschriebenen Barometern unterscheiden sich die Heberbarometer. Dieselben sind Gefässbarometer.

<sup>1)</sup> Bravais, Annales de chim. et de phys. III. Sér. Tome V.

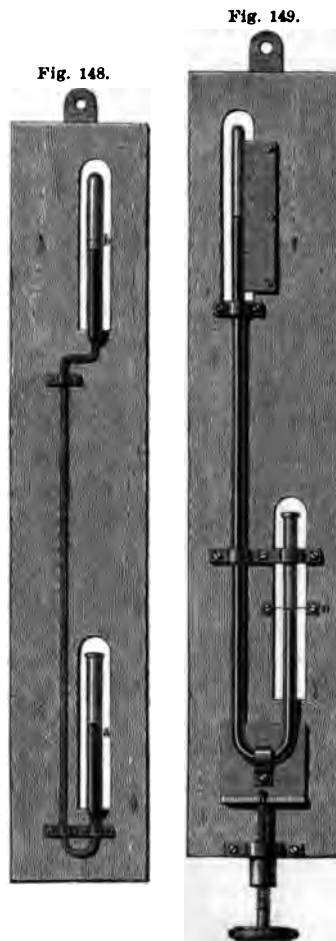
einer heberförmig gebogenen Glasröhre, deren langer Schenkel unten geschlossen und deren kurzer Schenkel oben offen ist. Sind die beiden Stellen, wo die Quecksilberoberflächen sich befinden, gleich hoch, darf es bei ihnen keiner Correction wegen der Capillarität, so dass die Unsicherheit dieser Correction mit diesen Barometern weit vermindert wird.

Im Falle aber ändern sich beide Niveaus des Quecksilbers in der Waage und deshalb muss hier die Theilung in besonderer Weise vorgenommen werden.

Um den Barometerstand mit dem Kathetometer bestimmen, so auch in diesem Falle gar keiner Theilung, eine heberförmig gebogene Glasröhre wird vor einem mit Ausschnitten versehenen starken Brettle (Fig. 148) und mittels desselben vertical aufgehängt. Um die Quecksilberoberflächen nahezu vertical unter einander zu bringen, ist die Röhre meist noch einmal doppelt gebogen. Eine einfache Ablesung mit dem Kathetometer ergibt dann den Barometerstand mit grösster Genauigkeit.

Um ein Kathetometer zu Gebote, so muss zunächst die Theilung auf dem Kathetometer vorgenommen werden. Dazu wird der Abstand zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$  genau gemessen und Punkt  $a$  als Nullpunkt der Theilung angenommen. Sei die Entfernung  $ab$  gleich  $760^{\text{mm}}$ , so wird man den Punkt  $a$  mit 0 und  $b$  mit 760 bezeichnen. Ueber und unter  $a$  sowie über und unter  $b$  werden dann eine Reihe von Theilstrichen gezogen. Um den Barometerstand zu erhalten, beobachtet man, wie hoch die obere und untere Quecksilberoberfläche über oder unter einem Punkte steht, und die Differenz der Theilstriche gibt den Barometerstand. Unserer Zeichnung würde z. B. die obere Quecksilberoberfläche am Theilstrich 10 über Punkt  $a$ , die obere bei 750 stehen und der Barometerstand wäre dann  $750 - 10 = 740^{\text{mm}}$ . Beim Ablesen hat man zu achten, dass das Auge sich in der Höhe der Kuppe in der gleichen Ebene befindet. Um dieses zu vermeiden und zugleich um die Ablesung zu erleichtern, sind bei feinem Apparate die oberen, sowie am untern Ende des Kathetometers verschiebbare, mit Theilstrichen versehene kleine Mikroskope angebracht.

Um die Theilung auf dem Barometer selbst anzubringen, kann sie



auch neben dem Rohre auf dem Brette angebracht werden. Ist das Rohr für allemal fest angebracht, und ebenso die Theilung fest, so erhält man den Barometerstand in gleicher Weise wie in dem vorigen Falle.

Häufig findet man an Barometern, um mittels einer Ablesung Barometerstand zu erhalten, das Rohr oder die Skala verschiebbar zu machen. Ist wie in Fig. 149 das Rohr vertical verschiebbar, so befindet sich auf dem Brette, auf welchem die Skala befestigt ist, der Nullpunkt der Theilung markirt. Man stellt dann mit Hilfe der Stellschraube das Rohr so, dass die untere Quecksilberkuppe gerade an dem Nullpunkte steht. Die an dem oberen Theile des Barometers angebrachte Theilung dann von diesem Punkte aus aufgetragen und eine einmalige Ablesung ergibt den Stand des Barometers.

Ist die Skala verschiebbar, so wird der Nullpunkt derselben auf die untere Kuppe eingestellt.

Man hat den Heberbarometern, um sie besser und sicherer transportieren zu können, mancherlei Formen gegeben, deren Zweck ist, den offenen Schmelzkel zu verschliessen, so dass kein Quecksilber heraus und keine Luft in den leeren Raum des Barometers hinein kann. Die in Fig. 148 und 149 dargestellten Barometer werden durch ein mit Baumwolle umwickeltes Holz-

Fig. 150.



Fig. 151.

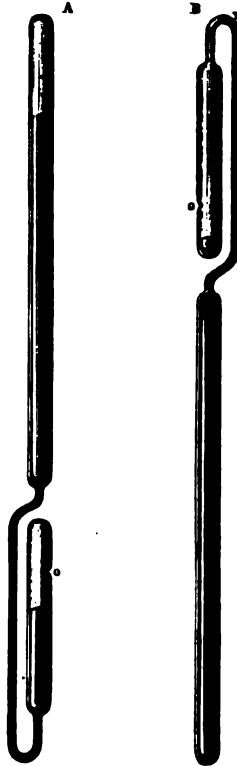


Fig. 152.



stäbchen geschlossen, nachdem man durch vorsichtiges langsames Neigen den leeren Raum ganz mit dem Quecksilber gefüllt hat. Das Stäbchen wird dann soweit herunter gedrückt, dass es ganz auf dem Quecksilber aufsteht, und dann das Barometer umgekehrt, damit das Gewicht des Quecksilbers das Stäbchen nicht herauf drücke.

Einen vortrefflichen Verschluss bietet die Vorrichtung, welche der Berliner Greiner an seinem Heberbarometer angebracht hat (Fig. 150). Die innern Wände des langen und kurzen Schenkels gehen nicht ununterbrochen in einander über, sondern der lange Schenkel ist mit dem kurzen durch den künstlichen Glasverband *aa* verbunden. Der längere Schenkel ist konisch ausgezogen und um diesen Konus liegt bei *a* angeschmolzen der ausgeweitete Theil des kürzeren Schenkels. Durch die Oeffnung *b*, welche ungefähr 2<sup>mm</sup> weit ist, communicirt der längere Schenkel mit dem kürzeren; der sie umgebende Raum ist stets mit Quecksilber gefüllt. Zum Transport wird das Barometer verschlossen, indem der Stopfen in die Verengung *c* des kürzern Schenkels hinab geschoben und dessen Stiel in der Messingfassung *d* des kürzern Schenkels festgeklemmt wird.

Fig. 151 *A* und *B* zeigt das Gay-Lussac'sche Barometer, welches ebenfalls sehr leicht und sicher transportirt werden kann. Es besteht aus zwei Stücken einer gut cylindrischen Röhre, welche durch eine mehrfach gebogene enge Röhre so verbunden sind, dass die Quecksilbersäulen in den beiden Röhren gerade unter einander liegen. Das Gefäss des Barometer hat nur eine sehr kleine Oeffnung bei *O*, die dadurch erhalten wird, dass man in die vor der Glasbläserlampe erweichte Röhrenwandung hinein sticht. Zum Transport neigt man das Barometer langsam, bis der leere Raum ganz mit Quecksilber erfüllt ist, und kehrt dann das Barometer vollständig um. Dann füllt das Quecksilber den langen Schenkel bis *r* und das überschüssige fällt in den kürzeren Schenkel unter die Oeffnung *O*, durch welche es wegen der capillaren Depression des Quecksilbers im Glase nicht austreten kann. Man sieht, dass das umgekehrte Barometer, da es vollständig bis *r* mit Quecksilber erfüllt ist, beim Transport keine Stöße erleiden kann, und zugleich, dass durch die enge Röhre nicht wohl Luft in den leeren Raum des Barometer gelangt.

Das Barometer von Buntens (Fig. 152) ist vor dem Eindringen von Luft noch mehr gesichert, indem über der untern Biegung der engern Röhre eine weitere Röhre angebracht ist, in welche sich der obere Theil der engen Röhre fortsetzt und in der er in einer feinen Spitze endigt; wenn nun doch eine Luftblase eindringen sollte, so legt sich dieselbe in den Raum, der die Fortsetzung der engen Röhre umgibt bei *R* und dringt nicht in den leeren Raum des Barometer.

Die drei letzten Barometer sind im übrigen gerade so auf einem Brette befestigt, wie die zuerst beschriebenen einfachen Heberbarometer. Die Skala befindet sich entweder auf dem Rohre, oder auf der Unterlage des Barometer mit den vorhin erwähnten Modificationen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Eine Beschreibung und Theorie der in neuerer Zeit auf den meteorologischen Observatorien vielfach als Registrirapparate benutzten Wagebarometer würde hier zu weit führen und liegt, als von speciell meteorologischem Interesse, unserm Zwecke fern. Man findet eine ausführliche Besprechung derselben in: *Schreiber*, Theorie und Praxis des Wagebarometers. *Carl*, Repertorium für Experimentalphysik Jahrg. 1872.

Bei dieser Art Barometer bedarf es keiner Correction wegen Capillarität, aber bei diesen sowohl wie bei den Gefäßsbarometern eine Correction wegen der Temperatur. Das Quecksilber dehnt sich näm wie alle Körper beim Erwärmen aus und wird dadurch leichter; es gleichen Gewichte der Luft hält daher von kaltem Quecksilber eine längere Säule das Gleichgewicht als von warmem. Die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Barometerstände sind daher nicht vergleichbar. Man muss deshalb die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Stände auf gleiche Temperatur und somit gleiche Dichtigkeit reduciren. Als solche Normaltemperatur nimmt man die Temperatur des schmelzenden Eises Null Grad. Ist der Barometerstand  $B$  bei einer Temperatur  $t$  nach Thermometerskala von Celsius, so ist, wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, der Barometerstand  $b$  bei der Temperatur Null Grad

$$b = \frac{B}{1 + 0,00018 \cdot t}$$

## §. 94.

**Aneroidbarometer.** Alle bisher betrachteten Barometer beruhen dem hydrostatischen Gesetze, dass in communicirenden Röhren die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen von verschiedenem specifischen Gewicht sich halten umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Bourdon hat zuerst ein Barometer construirt, welches auf einem ganz andern Prinzip

Fig. 153.



beruht, und welches, wenn auch zu exacten Messungen nicht so geeignet, wie die bisher betrachteten, doch in sehr einfacher Weise die Schwankungen des Luftdruckes zu erkennen gibt. Das Barometer beruht auf dem §. 55 vortragenen Satze, dass die Biegung von Stäben oder Röhren proportional ist der Kraft, welche die Biegung hervorbringt. Wenn eine elastische kreisförmig gebogene Röhre an ihren Enden fest verschlossen wird, so krümmt sie sich desto nach stärker oder schwächer, wenn bei constantem innern Druck der äussere Druck stärker oder schwächer wird. In dem Bourdon'schen Barometer ist eine solche dünne elastische Röhre bei  $F$  befestigt und bei  $A$  und  $B$  im Innern der Röhre ist die Luft sehr stark verdünnt. Wenn nun der Druck der atmosphärischen Luft stärker wird, so nähern sich die Enden  $A$  und  $B$ , und ein um die feste Axe  $C$  drehbarer Winkelhebel  $ADCEB$  dreht sich und überträgt seine Drehung mittels eines gezähnten Radstückes bei  $G$  auf einen Zeiger, der auf einer am Umfang

<sup>1)</sup> Bourdon, Baromètre métallique. Comptes rendus hebdomadaires de l'Institut de France. Bd. XXXVII. 656. Die Metallbarometer sind seitdem in sehr vielen verschiedenen Formen construirt, da sie als Reisebarometer sehr bequem sind. Gerne zu letzterem Zwecke sind die Barometer von Goldschmidt in Zürich sehr geeignet. Man muss dieselben aber ebenso wie alle übrigen Metallbarometer von Zeit zu Zeit nach einem Quecksilberbarometer reguliren.

es Barometer angebrachten Theilung einspielt. Nimmt der Luftdruck ab, gehen die Enden *A* und *B* der Röhre wieder aus einander und der Zeiger bewegt sich nach entgegengesetzter Richtung. Bei mittlerem Barometerstand steht der Zeiger über *F'*, steigt der Luftdruck, so bewegt er sich zur rechten, fällt derselbe, zur linken Seite. Die Theilung wird nach dem Quecksilberbarometer aufgetragen, und gibt den Luftdruck in Millimetern Quecksilberhöhe an.

In neuerer Zeit hat Victor Pierre<sup>1)</sup> Reductionsformeln angegeben, mittels deren das Barometer bei nicht zu grossen Schwankungen des Luftdruckes sich zu Messungen geeignet ist, wenn nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird. Die von Hempel in Paris gearbeiteten Metallbarometer sind jedoch so vorzüglich, dass man sie, wenigstens wo nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird, ohne weiteres zu Messungen benutzen kann.

### §. 95.

**Anwendung des Barometer.** Wir haben bei der Construction und Beschreibung des Barometer so lange verweilt wegen der Wichtigkeit des Apparates. Wir werden dasselbe bei sehr vielen physikalischen Untersuchungen in Anwendung finden.

Eine der wichtigsten Anwendungen findet es in der Meteorologie, da nicht nur den Luftdruck im allgemeinen misst, sondern auch die Schwankungen desselben in jedem Augenblicke angibt, und so eine der fundamentalerscheinungen der Witterungslehre auf das genaueste zu verfolgen gestattet. Wir müssen uns damit begnügen, einige Resultate hier anzuführen, deren weitere Ausführung der Witterungslehre angehört.

Beobachtet man an einem und demselben Orte regelmässig, vielleicht alle Stunden, das Barometer, so sieht man bald, dass dasselbe keineswegs immer denselben Stand hat, sondern bald höher bald tiefer steht. Bei einer genauen Untersuchung dieser Schwankungen unterscheidet man bald zwei Klassen derselben: periodisch regelmässige und unregelmässige. Erstere betragen nur wenige Millimeter, letztere können 30—40 Millimeter betragen. Betrachten wir zunächst die regelmässigen Schwankungen, welche in der Region der Tropen fast allein vorhanden sind, so erkennt man, dass das Barometer zweimal des Tages einen höchsten und zweimal einen tiefsten Stand hat. Die höchsten Stände sind kurz nach Sonnenuntergang und des Morgens zwischen 9 und 10 Uhr Vormittags, die tiefsten einige Zeit vor Sonnenaufgang und des Nachmittags gegen 4 Uhr. Die Zeiten, an denen diese Maxima und Minima auftreten, ändern sich im Laufe des Jahres etwas; der tiefste Stand des Nachmittags und der höchste Stand am Abend tritt immer sehr viel später, dagegen der tiefste Stand am Morgen im Sommer sehr viel früher ein als im Winter, nur der höchste Stand am Morgen fällt immer nahezu um dieselbe Zeit, im Sommer vielleicht  $\frac{1}{4}$  Stunde früher als im Winter.

Wenn man aus den stündlichen Beobachtungen das arithmetische Mittel nimmt, und so den mittlern täglichen Barometerstand bestimmt, so findet man bei einer Vergleichung der verschiedenen Barometerstände im

<sup>1)</sup> Ueber das Bourdon'sche Metallbarometer von Victor Pierre. Prag, 1860. Aus den Verhandl. der kgl. Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften.)

Laufe des Jahres, dass auch diese einer periodischen Aenderung un-  
worfen sind; die Barometerstände sind im Winter höher, der Luftdruck  
also grösser als im Sommer.

Nimmt man aber aus allen täglichen mittlern Barometerständen wi-  
das arithmetische Mittel, und bestimmt so den mittlern jährlichen B-  
meterstand, so findet man denselben bei fortgesetzten Beobachtungen  
verschiedenen Jahren merklich gleich gross, so dass wir schliessen müs-  
dass der Luftdruck im Grossen und Ganzen, jene Schwankungen a  
rechnet, immer derselbe bleibt.

Vergleicht man nun aber die so erhaltenen Jahresmittel, welche  
also den mittlern Luftdruck eines Ortes geben, für verschiedene Orte  
einander, so finden wir, dass der Luftdruck für verschiedene Orte eine  
schiedene Grösse hat. Zunächst ändert sich der Barometerstand mit der  
hebung eines Ortes über dem Boden, oder der Meeresfläche, nach ei-  
Gesetze, welches wir demnächst ableiten werden, nämlich so, dass  
Barometerhöhe in einer geometrischen Reihe abnimmt, wenn die Erhebu-  
in einer arithmetischen Reihenfolge wachsen; das heisst, wenn wir um

$$a, 2a, 3a \dots na$$

Meter aufsteigen, ist der Barometerstand

$$bq, bq^2, bq^3 \dots bq^n,$$

worin  $q$  eine constante Zahl bedeutet, welche kleiner als 1 ist.

Mit Hülfe dieses Gesetzes können wir alle an verschiedenen Or-  
deren Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, beobachteten Barom-  
stände auf die Meeresfläche reduciren. Thut man das, so findet man,  
auch dort der Barometerstand keineswegs an allen Orten derselbe ist,  
er vielmehr sich mit der Länge und Breite eines Ortes ändert. Um  
Aenderungen des Barometerstandes mit der Länge eines Ortes auch  
annähernd zu bestimmen, dazu reicht das vorhandene Beobachtungsmat-  
keineswegs aus. Für die Aenderungen mit der Breite eines Ortes sel-  
aber ganz allgemein das Gesetz zu herrschen, dass der Barometerstand  
Aequator bis gegen den 30. Breitengrad zunehme, von dort bis zum 65. Br-  
grad abnehme und in höhern Breiten wieder wachse. Um ein Bild d-  
Aenderungen zu geben, führen wir Schouw's Angaben hier an, der aus  
Beobachtungen verschiedener Orte auf Inseln und an den Gestaden  
atlantischen Oceans folgende Uebersicht zusammengestellt hat <sup>1)</sup>:

Breite nördlich	Barometerstand	Breite nördlich	Barometerstand
0	762,2	50	762,2
10	763,7	60	758,9
20	765,5	65	753,4
30	766,6	70	755,6
40	764,4	75	758,9

Die Barometerstände am Meeresufer, schliesst Schouw, scheinen r-  
lich das neben einander darzubieten, was in zeitlicher Reihenfolge die  
lichen und jährlichen Schwankungen zeigen.

<sup>1)</sup> Schouw, Poggend. Ann. XXVI. p. 434.

Von viel bedeutenderer Grösse als die periodischen Aenderungen des Barometerstandes sind die nicht periodischen. Dass aber auch diese einer gewissen Regelmässigkeit folgen, hat Dove auf das sicherste nachgewiesen, indem er den Begriff der barometrischen Windrose aufstellte und zeigte, dass die Barometerschwankungen auf das innigste mit den Aenderungen der Windesrichtung zusammenhängen.

Der Barometerstand ist im allgemeinen bei Nordostwind am höchsten, sinkt bei Ost-, Südost-, Südwind, ist bei Süd- oder Südwestwind am tiefsten und steigt bei West-, Nordwest- und Nordwind<sup>1)</sup>.

So ist z. B. für Carlsruhe:

Windrichtung	Barometerstand	Differenz
NO	757,74	
O	756,75	— 0,99
SO	754,50	— 2,25
S	752,92	— 1,58
SW	754,21	+ 1,32
W	754,86	+ 0,62
NW	756,26	+ 1,10
N	757,11	+ 0,88
NO	757,74	+ 0,60

Den innern Zusammenhang dieser Thatsachen weist die Meteorologie nach, sie zeigt, dass die Lufströmungen, welche ein Sinken des Barometer bewirken, uns warme, und diejenigen, welche ein Steigen des Barometer bewirken, uns kalte Luft zuführen. Die Wärmelehre wird uns den physikalischen Grund dieser Thatsachen darbieten.

Mit der Aenderung des Windes hängt nun aber auf das innigste die Aenderung des Wetters zusammen; im mittlern Europa bringt Süd- und Südwestwind im allgemeinen Regen, dagegen Nordostwind heiteres und klares Wetter, so dass der Barometerstand selbst mit dem Wetter parallel geht. Bei hohem Barometer haben wir sogenanntes gutes Wetter, bei niedrigerem Regen und Wind; der mittlere Barometerstand entspricht dem Uebergange vom guten zum schlechten und vom schlechten zum guten Wetter. Deshalb findet man auch in vielen Häusern das Barometer als sogenanntes Wetterglas, und neben den entsprechenden Barometerständen die Bezeichnungen gutes Wetter, veränderliches Wetter, Regen oder Wind u. s. f.<sup>2)</sup>.

Bei einer sehr grossen Anzahl physikalischer Erscheinungen kommt der Luftdruck in Betracht; bei allen diesen brauchen wir daher das Barometer. So erwähnten wir vorhin, dass wir bei Wägungen die Gewichte auf den luftleeren Raum beziehen müssten; wir werden sehen, dass die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche dem auf ihr lastenden Drucke proportional ist, diese Correction ändert sich demnach mit dem Barometerstand. Ebenso werden wir das Barometer benutzen, um die Volumänderungen

<sup>1)</sup> *Dove's Repertorium der Physik*. Bd. 4. Meteorologische Untersuchungen. Berlin 1835 und *Klimatologische Beiträge*. Berlin 1857.

<sup>2)</sup> Ausführlicheres in *Kämtz Lehrbuch der Meteorologie*. II. Bd. Halle 1832. *E. E. Schmidt*, Lehrbuch der Meteorologie als XXI. Bd. von *Karsten's allgemeiner Encyclopädie der Physik*. Leipzig 1860.



der Gase mit dem auf sie ausgeübten äussern Druck zu vergleichen und zu einer Reihe anderer Untersuchungen, so dass die Ausführlichkeit, mit der wir den Apparat beschrieben haben, gerechtfertigt ist.

### §. 96.

**Grösse des Luftdruckes.** Mittels des Barometer sind wir in den Stand gesetzt, auch in Kilogrammen den Druck zu bestimmen, welchen die über uns lagernde Luftmasse auf ein Flächenstück von bestimmter Grösse ausübt. Derselbe ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Querschnitt gleich ist jenem Flächenstück, und deren Höhe gleich ist der Höhe des Quecksilbers im Barometer, also im Mittel gleich 760<sup>mm</sup>. Nennen wir deshalb die Höhe des Barometerstandes  $h$ , die Grösse des Querschnittes  $q$  und das spezifische Gewicht des Quecksilbers  $s$ , so ist der Druck  $P$  gleich

$$P = h \cdot q \cdot s,$$

und setzen wir  $h = 76^{\text{cm}}$ ,  $q = 1^{\text{cm}}$  quadr., so erhalten wir, da

$$s = 13,595,$$

$$P = 1,0332 \text{ Kilogramm},$$

und für einen Querschnitt von  $q$  Quadratcentimetern

$$P = 1,0332 \cdot q \text{ Kilogr.}$$

Bei dieser Grösse des Luftdruckes ist es ersichtlich, dass er sehr kräftige mechanische Wirkungen hervorbringen kann, wenn man bewirkt, dass er nur einseitig auftritt, wenn man ihn also an der einen Seite eines Körpers fortnimmt, wie wir es z. B. im Barometer gethan haben. Wir wollen eine Reihe von Apparaten, welche auf dem Drucke der Luft beruhen, betrachten, wenn wir in der Luftpumpe ein Mittel kennen gelernt haben, um aus irgend einem Raume die Luft fortzunehmen. Die Luftpumpe beruht auf der zweiten Grundeigenschaft der Gase, durch welche sie sich von den tropfbaren Flüssigkeiten unterscheiden, nämlich darauf, dass die Gase kein selbständiges Volumen haben, sondern sich so weit ausdehnen, bis ein äusseres Hinderniss sich ihnen entgegenstellt.

### §. 97.

**Mariotte'sches Gesetz.** Da die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben, so haben sie auch eine bestimmte von dem äussern Drucke, dem sie unterworfen sind, nur in geringem Grade abhängige Dichtigkeit.

Bei den Gasen ist das jedoch durchaus anders, da wir sahen, dass ihr Volumen nur von dem äussern Drucke abhängt. Es fragt sich nun, wie hängt das Volumen und die Dichtigkeit der Gase von dem äussern Drucke ab.

Diese Frage ist schon frühzeitig untersucht und zwar gleichzeitig von dem französischen Physiker Mariotte<sup>1)</sup> und dem englischen Physiker Boyle<sup>2)</sup>. Beide gelangten zu demselben Resultate, das sich in folgendem, nach dem erstern das Mariotte'sche genannten, Gesetze aussprechen lässt.

<sup>1)</sup> *Mariotte*, De la nature de l'air. Paris 1679.

<sup>2)</sup> *Boyle*, Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris elastica. London 1662.

Wenn man eine gegebene Gasmenge in einem Gefässe abschliesst und selbe dann verschiedenen Drucken  $P$  und  $P'$  aussetzt, so verhält sich das Volumen des Gases in beiden Fällen,  $v$  und  $v'$  umgekehrt wie die Drucke oder

$$v : v' = P' : P.$$

Anstatt dieses Ausdruckes können wir auch setzen

$$v' \cdot P' = v \cdot P$$

das Produkt aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Druck, unter welchem sie steht, ist constant.

Da nun, wie wir früher sahen, die Dichtigkeit eines Körpers bei gleichem Gewicht dem Volumen desselben umgekehrt proportional ist, oder

$$v : v' = d' : d,$$

folgt aus dem Obigen, dass die Dichtigkeit einer Gasmenge den Drucken, welchen dieselbe ausgesetzt, umgekehrt proportional ist, oder

$$d : d' = P : P'.$$

Die Versuche, mittels welcher Mariotte dieses Gesetz nachwies, waren folgende. Er nahm eine lange Glasröhre, welche vor einem festen Brette befestigt nahe ihrem Ende umgebogen war, so dass ein kürzerer aufsteigender Schenkel entstand, wie bei dem Barometer. Der kürzere Schenkel war oben geschlossen, der längere oben offen (Fig. 154). Man gießt nun zunächst eine kleine Menge Quecksilber in das Rohr, so dass es in beiden Röhren bis zum Nullpunkte der Theilung reicht. Dieses schliesst dann die im kürzern geschlossenen Schenkel enthaltene Luft ab. Das Volumen der abgesperrten Luft wird gemessen durch die hinter der Röhre angebrachte Theilung. Das Gas erfüllt nun den abgesperrten Raum unter dem Drucke der äussern Luft, welche auf der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel lastet, welche nach den früher erkannten hydrostatischen Gesetzen in die geschlossene Röhre sich überträgt.

Darauf gießt man durch den Trichter in das obere Glasrohr Quecksilber nach. Das Niveau desselben steigt auf beiden Seiten, aber in dem geschlossenen Schenkel bei weitem weniger als in dem offenen, man findet, dass das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel bis zum Theilstriche 5 angestiegen ist, die eingeschlossene Luft also nur mehr die Hälfte ihres früheren Volumens ausfüllt, wenn der Unterschied der beiden Quecksilberniveaus gerade die Höhe des Barometerstandes beträgt. Dann hat aber auch das Gas den Druck zweier Atmosphären erhalten, indem ausser dem Drucke der äussern Luft noch der Druck einer dem Gewichte der Luft an Grösse gleichen Quecksilbersäule auf das eingeschlossene Gas drückt. Wenn man nun weiter Quecksilber hinzufügt, so wird der Niveauunterschied gleich 2, 3, 4... Barometerhöhen wird, so übt

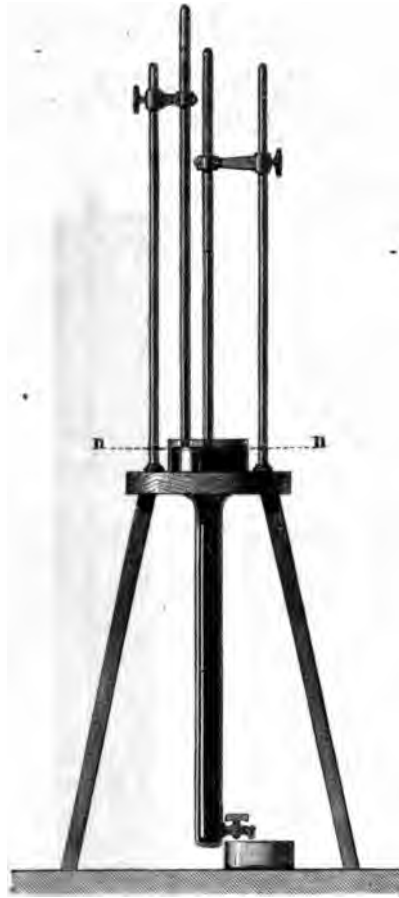
Fig. 154.



man dadurch einen Druck von 3, 4, 5... Atmosphären aus, und man kann dann, dass das Volumen der abgesperrten Luft auch  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$  ursprünglichen Volumens beträgt.

Um die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes für Drucke zu welche kleiner sind als der Druck der äussern Atmosphäre, kann man

Fig. 155.



folgenden Verfahrens bedienen. Man wählt ein Glasrohr, welches im wesentlichen schon fertig ist, und wendet eine möglichst cylindrische Barometerröhre, die ihrer Länge nach in Millimeter getheilt ist, an. Zwischen den Theilstrichen enthaltene Räume werden durch gleiche Gewichte Quecksilber abgemessen. Zu dem Ende bringt man gleiche Gewichte Quecksilber nacheinander in die Röhre.

Das erste fülle die Röhre bis zum Theilstriche  $n$ , das zweite bis zum Theilstriche  $n'$ , das dritte bis zum Theilstriche  $n''$  u. s. f., daraus, dass sich die Räume, bis zu den Theilstrichen  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$  verhalten wie 1 : 2 : 3.

Hat man auf diese Weise das fertige Rohr an allen Stellen abgemessen, so füllt man dieselbe mit Quecksilber, so, als wenn man ein vollständiges Barometer herstellen wollte, und stellt das fertige Barometer in das Gefäss (Fig. 155) um. Dasselbe besteht aus einer weiten Röhre von Glas oder besser von Gusseisen, welche unten verschlossen und mit einem Hahn versehen ist und oben in einem Gefäss von Glas endet. Dieselbe steht in einem Dreifuss vertical auf, und bis  $nn$  mit Quecksilber gefüllt. Der unten angebrachte Hahn dient dazu, um das Quecksilber leichter zu füllen zu können.

Hat man das fertige Rohr in das Gefäss umgekehrt, so bringt man durch ein Zuleitungsrohr etwas trockne Luft in dasselbe. Die Luft steigt durch das Quecksilber in den leeren Raum auf, und sofort sinkt das Quecksilber durch den Druck dieser Luft. Man hebt nun die Röhre zunächst in das Gefäss herunter, so weit, dass die beiden Flächen des Quecksilbers im Innern der Röhre und ausserhalb von derselben in gleicher Höhe sind; der Theilstrich, neben welchem das Quecksilber steht, zeigt dann den Raum, welchen die Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre einnimmt. Zieht man darauf das Rohr weiter aus dem Quecksilber

so vermehrt man dadurch das Volumen der abgesperrten Luft; aber zugleich steigt auch das Quecksilber in Folge des äussern Luftdruckes in der Röhre empor und der Unterschied zwischen der Quecksilberhöhe in dieser Röhre und der Barometerhöhe gibt uns den Druck, unter welchem sich das Gas befindet. Denn auswärts lastet auf dem Quecksilber der Druck der ganzen Atmosphäre oder ein Druck gleich dem einer Quecksilbersäule von der Höhe des Barometer, im Innern hält diesem Drucke zum Theil die gehobene Quecksilbersäule das Gleichgewicht; der Ueberschuss der Barometerhöhe über diese Quecksilbersäule drückt also das Gas zusammen; diesem Drucke hält die Elasticität des Gases, der Druck, den es in Folge des Bestrebens, sich auszudehnen, auf die Wände ausübt, das Gleichgewicht.

Um diese Unterschiede zwischen dem Barometerstande und der in unserer Röhre gehobenen Quecksilbersäule zu messen, ist neben der Röhre ein festes Barometer angebracht. Man misst dieselben dann mittels des Kathetometer.

Vergleicht man nun die von dem Gase angefüllten Räume und die Drucke  $P$ , unter welchen es steht, so findet man stets

$$P \cdot v = P' \cdot v'.$$

Füllt z. B. das Gas, wenn das Rohr so tief eingetaucht ist, dass die Oberfläche des Quecksilbers innerhalb und ausserhalb der Röhre von gleicher Höhe ist, die Röhre bis zum Theilstriche  $n$ , so füllt es die Röhre bis zum Theilstriche  $n'$ , das Volumen des Gases ist also doppelt so gross, wenn die Höhe des Quecksilbers in der Röhre gerade die Hälfte der Barometerhöhe beträgt u. s. f.

Mittels dieser schon von Mariotte angestellten Versuche kann man das aufgestellte Gesetz nachweisen; indess können sie keinen grossen Anspruch auf Genauigkeit machen, da es besonders äusserst schwierig ist, die Temperatur constant zu erhalten. Das ist aber durchaus erforderlich, da bei einer Temperaturänderung das Gas ebenfalls sein Volumen ändert, das Mariotte'sche Gesetz also nur bei constanter Temperatur der Gase gültig sein kann.

Ueberdies kann man bei diesen Methoden die Drucke, denen das Gas ausgesetzt ist, nur zwischen verhältnissmässig engen Grenzen variiren lassen. Bei der Wichtigkeit dieses Gesetzes fragt es sich jedoch, ob es streng und allgemein gültig ist.

Seit Mariotte und Boyle sind deshalb sehr vielfach Versuche darüber angestellt, ob dieses Gesetz für alle Gase und für alle Drucke gültig sei. Die ältern Versuche von Musschenbroek<sup>1)</sup>, Sulzer<sup>2)</sup>, Robison<sup>3)</sup> gelangten zu keinem entscheidenden Resultate; der erstere schloss in Uebereinstimmung mit Boyle, dass unter Drucken, welche grösser waren als vier Atmosphären, die Luft weniger, die letztern, dass sie mehr zusammengedrückt würde, als das Gesetz verlangt.

Im Jahre 1826 publicirten dann Oersted und Schwendsen<sup>4)</sup> Versuche nach einer der beschriebenen ähnlichen Methode, aber mit bessern und ge-

<sup>1)</sup> *Musschenbroek*, Cours de physique. Paris 1759. Tome III.

<sup>2)</sup> *Sulzer*, Mémoires de Berlin 1753.

<sup>3)</sup> *Robison*, System of Mech. Phil. III.

<sup>4)</sup> *Edinburgh Journal of science*. Vol. IV. p. 224.

nauern Apparaten, und nach einer zweiten ganz verschiedenen Methode. Sie comprimirten Luft in dem Kolben einer Windbüchse und bestimmten mittels einer Wage das Gewicht und somit die Dichtigkeit der in dem Kolben enthaltenen Luft. Den Druck, unter welchem die Luft stand, bestimmten sie mit Hülfe eines Sicherheitsventiles aus dem Drucke, den diese auf die Wände des Kolbens ausübte. Das Ventil wurde mit einem einarmigen Hebel festgedrückt, und das Gewicht auf demselben so lange verschoben, bis die eingeschlossene Luft es gerade zu heben im Stande war. Mit der ersten Methode dehnten Oersted und Schwendsen ihre Versuche bis zu einem Drucke von 8, mit der letztern bis auf 68 Atmosphären aus. Sie schlossen aus ihren Versuchen, dass für Luft das Mariotte'sche Gesetz bis zu diesen Drucken streng gültig sei; bei der unvermeidlichen Ungenauigkeit der letztern Methode darf man daraus jedoch nur schliessen, dass es mit grosser Annäherung unter so hohen Drucken noch besteht.

Für andere Gase als die atmosphärische Luft fanden die genannten Physiker das Gesetz jedoch nicht bestätigt, besonders wenn die Gase durch Compression flüssig zu machen sind. Sie fanden z. B., dass sich schweflige Säure bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären gerade so verhielt wie atmosphärische Luft, dass aber bei höheren Drucken das Gas stärker comprimirt wurde.

Gleiche Resultate erzielten die Versuche von Despretz<sup>1)</sup>. Er brachte mehrere graduirte oben geschlossene Röhren, deren eine Luft, die übrigen andere Gase enthielten, in einen Oersted'schen Compressionsapparat (Fig. 71 §. 62), nachdem er die offenen Enden der Röhren in ein Gefäss mit Quecksilber eingesetzt hatte (Fig. 156). Bei einer Compression des Wassers in dem Apparate wurde auch das Gas der Röhren comprimirt.

Fig. 156.



Der Druck war in dem ganzen Apparate derselbe, und da die Röhren alle ein gleiches Volumen hatten und dafür gesorgt war, dass das Niveau des Quecksilbers beim Beginne des Versuches in allen Röhren gleich war, so hätte es auch in allen Röhren dasselbe bleiben müssen, wenn die Gase alle dem Mariotte'schen Gesetze folgten. Es war das jedoch nicht der Fall, als die eine Röhre atmosphärische Luft, die zweite Ammoniakgas, die dritte Schwefelwasserstoff und die vierte Cyanogas enthielt. Das Volumen dieser Gase nahm schon bei einem Drucke, welcher wenig grösser war als der zweier Atmosphären, schneller ab, als die Drucke zunahm, schneller, als das Volumen der atmosphärischen Luft abnahm.

Despretz schloss ferner, dass Wasserstoffgas und atmosphärische Luft bis zu einem Drucke von 15 Atmosphären dem Mariotte'schen Gesetze folgen, dass aber bei einem Drucke von 20 Atmosphären und darüber die Luft stärker zusammengedrückt werde, als das Gesetz von Mariotte es verlangt.

Durch Despretz's Versuche wurde also die exakte Gültigkeit des Gesetzes von Mariotte auch für atmosphärische Luft wieder in Frage gestellt, deshalb nahmen auf Aufforderung der französischen Akademie Arago und Dulong<sup>2)</sup> die Frage wieder auf.

<sup>1)</sup> Despretz, Annales de chim. et de phys. Tom. XXXIV.

<sup>2)</sup> Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. T. X. p. 193 ff.

Diese ausgezeichneten Physiker bestimmten das Gesetz der Compression der atmosphärischen Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären nach einer Methode, die sich im Prinzipie durchaus nicht von der Mariotte's unterscheidet; die aber durch die Sorgfalt, mit welcher die einzelnen Theile des Apparates gearbeitet waren, und die Genauigkeit, mit welcher diese Physiker beobachteten, Resultate ergab, welche das höchste Vertrauen verdienen. Die zu comprimirende Luft war in einer sorgfältig ausgemessenen Röhre von 1<sup>m</sup>,70 Länge und 5<sup>mm</sup> lichtigem Durchmesser eingeschlossen. Diese Röhre war von einem weitem Cylinder umgeben, durch welchen continuirlich Wasser derselben Temperatur hindurchlief, um die in der Röhre eingeschlossene Luft auf constanter Temperatur zu erhalten. Die mit dieser Röhre communicirende offene Röhre hatte eine Länge von 27 Meter. Wegen der geringen Details der Apparate und der einzelnen Vorsichtsmaßregeln, welche diese Physiker anwandten, müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen.

Dulong und Arago unternahmen drei Versuchsreihen; in jeder derselben wurde der kurze geschlossene Schenkel ihrer Röhre mit Luft unter dem Drucke der Atmosphäre angefüllt, und diese dann immer stärker comprimirt. Nach jeder Erhöhung des Druckes wurde das Volumen der abgeschlossenen Luft und die Niveaudifferenz des Quecksilbers in der geschlossenen und offenen Röhre gemessen. Bei jeder Versuchsreihe wurde der Druck bis auf 27 Atmosphären verstärkt. Folgende Tabelle enthält von ihnen erhaltenen Zahlen in einer Versuchsreihe, bei der die Temperatur genau auf 13° erhalten war. Die erste Columne enthält den Druck in Millimeter Quecksilberhöhe, die zweite das Volumen der Luft in der abgeschlossenen Röhre, die dritte das Volumen berechnet nach dem Mariotte'schen Gesetze von dem Anfangsvolumen und dem Anfangsdrucke aus, und vierte endlich die Unterschiede zwischen dem so berechneten und dem beobachteten Volumen.

Tabelle der von Dulong und Arago erhaltenen Zahlen.

Druck in mm. Quecksilber	Beobachtetes Volumen	Berechnetes Volumen	Differenz
760,00	501,3	—	—
3612,48	105,247	105,470	0,230
3757,18	101,216	101,412	0,206
4625,18	82,286	82,380	0,094
5000,78	76,095	76,198	0,103
5737,38	66,216	66,417	0,201
8596,23	44,008	44,320	0,312
9992,36	37,851	38,132	0,281
12620,00	30,119	30,192	0,073
13245,06	28,664	28,770	0,106
14667,36	25,885	25,978	0,093
16534,9	22,968	23,044	0,076
16584,4	22,879	22,972	0,093
18438,5	20,547	20,665	0,118
20236,6	18,833	18,872	0,039
20498,6	18,525	18,588	0,063

Vergleicht man die beobachteten mit den berechneten Zahlen, so findet man dieselben sehr nahe gleich. Man muss daraus schliessen, dass die wirkliche Compression der Luft, wenn überhaupt, sich nur sehr wenig von der nach dem Mariotte'schen Gesetze berechneten unterscheidet. Mehr darf man jedoch daraus nicht schliessen, da die Unterschiede nicht gleich Null sind, und da die beobachteten Volumina immer kleiner sind als das berechnete Volumen. Es kann das seinen Grund haben entweder in der nicht vollkommenen Richtigkeit des Gesetzes oder auch in Ungenauigkeiten der Messungen. Die Art der Abweichungen spricht jedoch für das Erstere.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, ist man niemals im Stande, ganz vollkommene Messungen zu machen; wenn die Abweichungen zwischen den Beobachtungen und den nach einem vermutheten Gesetze angestellten Berechnungen nur sehr klein sind, so ist man zu der Annahme berechtigt, dass die Unterschiede gleich Null sein würden, wenn die Messungen ganz vollkommen wären, und dann auf die Richtigkeit des Gesetzes zu schliessen. Indess wird in dem Falle der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung bald positiv, bald negativ sein, das heisst, bald wird die beobachtete, bald die sich aus den Rechnungen ergebende Zahl grösser sein, da es ebenso wahrscheinlich ist, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bei einer sonst richtigen Methode, die Resultate eher vergrössern als verkleinern. Abweichungen, welche immer in demselben Sinne erfolgen und seien sie auch noch so klein, lassen entweder einen constanten Fehler in der Methode oder eine Ungenauigkeit des Gesetzes vermuthen. Da ersterer nun nicht aufzufinden ist, so dürfen wir durch diese Versuche das Gesetz nicht als bewiesen ansehen; müssen vielmehr annehmen, dass die sich zeigenden Abweichungen zum Theil allerdings in den Beobachtungsfehlern, zum Theil jedoch in einer Ungenauigkeit des Mariotte'schen Gesetzes ihren Grund haben.

Arago und Dulong schlossen anders; sie glaubten, wie man überhaupt im Anfange dieses Jahrhunderts geneigt war anzunehmen, dass die Naturerscheinungen einfachen Gesetzen folgen, dass der mathematische Ausdruck derselben stets wenig complicirt sein müsse. Deshalb übersahen diese Physiker es, dass die Abweichungen stets in demselben Sinne stattfanden, und hielten bei der geringen Grösse der Unterschiede das Gesetz für bewiesen.

Arago und Dulong konnten ihre Versuche nicht über andere Gase als die atmosphärische Luft ausdehnen, da die französische Regierung ihnen die Benutzung der Gebäude entzog, in denen ihre Apparate aufgestellt waren.

Diese Lücke suchte Pouillet<sup>1)</sup> auszufüllen. Pouillet nahm für die Luft nach den vorhergegangenen Versuchen das Mariotte'sche Gesetz als richtig an, und verglich mit den Compressionen der Luft jene der andern Gase. Seine Versuchsmethode war derjenigen von Despretz ähnlich; die Röhren in welchen er die Gase comprimirte, hatten eine Länge von zwei Meter.

Die Resultate Pouillet's sind folgende:

1) Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenoxyd folgen bis zu 100 Atmosphären dem Compressionsgesetz der atmosphärischen Luft.

<sup>1)</sup> Pouillet, *Éléments de Physique*. 4. édit. Tome I. p. 327.

2) Die Gase, schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure und Stickoxydulgas, welche bei relativ geringen Drucken schon in die tropfbar flüssige Form übergehen, werden merklich stärker comprimirt als die atmosphärische Luft, sobald ihr Volumen auf  $\frac{1}{3}$  oder  $\frac{1}{4}$  comprimirt ist.

3) Das Gleiche gilt für leichtes und schweres Kohlenwasserstoffgas, welche bei einem Drucke von 100 Atmosphären noch nicht flüssig werden.

Folgende Tabelle enthält die von Pouillet mitgetheilten Resultate. Die erste Columne enthält die Drucke, die zweite die theoretischen Volumina, die folgenden die Quotienten  $\frac{v'}{v}$  der beobachteten Volumina  $v'$  und der theoretischen  $v$  für die darüber stehenden Gase.

Druck in Atmosphären	Theoretisches Volumen $v$	$\frac{v'}{v}$ Kohlensäure	$\frac{v'}{v}$ Stickoxydul	$\frac{v'}{v}$ Leichtes Kohlenwasserstoffgas	$\frac{v'}{v}$ Schweres Kohlenwasserstoffgas
1	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,50	1,000	0,996	0,998	0,994
4	0,25	1,000	0,988	0,995	0,989
5	0,20	0,989	0,983	0,992	0,986
6,67	0,15	0,980	0,971	0,989	0,983
10	0,10	0,965	0,956	0,981	0,972
15,38	0,065	0,934	0,923	0,949	0,962
20	0,050	0,919	0,896	0,956	0,955
25	0,040	0,880	0,849	0,951	0,948
33,3	0,030	0,808	0,787	0,951	0,931
40	0,025	0,739	0,732	0,940	0,919
50	0,020	—	—	0,907	0,899
83	0,012	—	—	—	0,850

Lange Zeit nahm man nun mit Arago und Dulong an, dass die atmosphärische Luft so wie Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff dem Mariotteschen Gesetze vollständig folgen, bis Regnault die Frage 1845 wieder aufnahm. Er war durch gewisse Erscheinungen beim Ausdehnen der Gase durch die Wärme auf die Vermuthung geführt worden, dass das Gesetz von Mariotte auch für diese Gase nur ein annähernd richtiges sei. Da nun das Gesetz über die Compression der Gase ein Fundamentalgesetz der Physik ist, indem es in fast alle Bestimmungen über die Gase eingeht, so stellte Regnault eine Reihe neuer Versuche über diesen Punkt an <sup>1)</sup>.

Die Apparate, welche Regnault anwandte, waren im wesentlichen dieselben, welche auch Arago und Dulong angewandt hatten, auch er benutzte die Methode von Mariotte, ein abgeschlossenes Gasvolumen durch Quecksilbersäulen zusammendrücken zu lassen, und maass dann zugleich das Volumen des Gases und den zugehörigen Druck.

Eine Verbesserung der Methode liess jedoch eine bedeutend grössere Genauigkeit in den Messungen erzielen.

<sup>1)</sup> Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. T. XXI. p. 329.



Arago und Dulong waren bei ihren Versuchen stets davon ausgegangen die kurze geschlossene Röhre mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre zu füllen und diese nach und nach bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären zusammen zu pressen. Da nun das Anfangsvolumen des Gase unter dem Drucke einer Atmosphäre gleich 1 war, so war es unter den Drucke von 5 Atmosphären nur  $\frac{1}{5}$ , bei 10 nur  $\frac{1}{10}$ , bei 20 nur  $\frac{1}{20}$  u. s. f. So wurde bei den hohen Drucken das Volumen sehr klein und dadurch war es unmöglich, es mit der grössten Genauigkeit auszumessen, besonders wenn man beachtet, dass es äusserst schwierig ist, das Volumen der einzelnen Theile der Röhre genau zu erhalten, und dass der Meniskus des Quecksilbers nicht genau seine Gestalt beibehält.

Die sich hieraus unvermeidlich ergebenden Ungenauigkeiten der Messung vermied Regnault folgendermassen:

Eine Glasröhre von 8—10 Millimeter lichten Durchmesser und 3 Meter Länge wurde vertical aufgestellt. Die Röhre, an ihrem obern Ende durch einen Hahn verschlossen, communicirte an ihrem untern Ende mit einer zweiten vertical aufgestellten, oben offenen Röhre von 36 Meter Länge, welche die Quecksilbersäule enthielt, welche das in der ersten Röhre abgeschlossene Gas zusammendrücken sollte. Auf der oben verschlossenen Röhre von drei Meter Länge waren zwei Marken gezogen, die eine an ihrem untern Ende, welche das Volumen der ganzen Röhre bestimmte, indem zu Anfang jedes Versuches dafür gesorgt war, dass das Quecksilber in dieser Röhre bis zu dieser Marke stand; die zweite Marke war in der Mitte der Röhre gezogen, so dass sie genau das halbe Volumen der Röhre von ihrem obern Ende bis zur untern Marke bestimmte.

Man füllt nun zunächst die Röhre mit trockener Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre bis zur untern Marke, dann drückt man, indem man die Quecksilbersäule in der langen Röhre verlängert, die Luft so weit zusammen, bis sie gerade das halbe Volumen annimmt, bis also das Quecksilber in der verschlossenen Röhre bei der zweiten Marke steht. Ist das Mariotte'sche Gesetz genau richtig, so muss jetzt die Höhe der Quecksilbersäule in der offenen Röhre über der in der verschlossenen genau die Höhe des Barometer sein, der Druck muss genau gleich zwei Atmosphären sein.

Man füllt nun zu einem zweiten Versuche die ganze geschlossene Röhre bis zur untern Marke mit trockener Luft unter dem Drucke zweier Atmosphären und comprimirt wieder auf die Hälfte; der Druck muss dann gleich vier Atmosphären sein.

Füllt man dann das Volumen 1 mit trockner Luft unter dem Drucke von vier Atmosphären und comprimirt diese auf das Volumen  $\frac{1}{2}$ , so muss jetzt der Druck acht Atmosphären sein u. s. f.

Kurz, man untersucht auf diese Weise, ob der Druck, der ein Volumen Luft, welches unter dem Drucke  $h$  steht, auf die Hälfte reducirt, gleich  $2h$  ist. Die Gasvolumina sind bei diesen Versuchen stets sehr gross und deshalb der genauesten Messung fähig.

Wegen der Einzelheiten des Apparates und der Vorsichtsmassregeln bei den Messungen müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen, nur müssen wir kurz erwähnen, wie die geschlossene Röhre mit Luft unter höhern Drucken angefüllt wurde. Die Röhre communicirte mittels des an ihrem obern Ende befindlichen Hahnes mit einer Pumpe, durch welche man

bei geöffnetem Hahn Luft in die Röhre pumpen konnte. Man füllte auf diese Weise die Röhre bis zur untern Marke mit Luft an und bestimmte den Druck, unter welchem die Luft sich befand, aus der Höhe der Quecksilbersäule in der langen Röhre. Man hatte es auf diese Weise in der Hand, die Röhre, in welcher das Gas comprimirt wurde, bis zur untern Marke mit Luft unter beliebigem Drucke anzufüllen.

Um zu zeigen, wie Regnault aus diesen Versuchen die Resultate erhielt, wollen wir zunächst eine Versuchsreihe mit atmosphärischer Luft folgen lassen, bei welcher das Volumen 1 mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre angefüllt wurde. Die geschlossene Röhre communicirte beim Beginne des Versuches frei mit der atmosphärischen Luft; als sie bis zur untern Marke mit Luft angefüllt war, wurde der Hahn geschlossen und durch Einfüllen des Quecksilbers in die lange Röhre das Volumen möglichst genau auf  $\frac{1}{2}$  reducirt.

Columnne 1 enthält die Volumina  $V_0$  und  $V_1$  beim Beginne des Versuches und nach der Compression, Columnne 2 die entsprechenden Drucke in Millimeter Quecksilberhöhe, Columnne 3 die Temperaturen der Luft, Columnne 4 das Verhältniss der Volumina  $\frac{V_0}{V_1}$ , Columnne 5 das Verhältniss der Drucke  $\frac{P_1}{P_0}$  und Columnne 6 das Verhältniss  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ .

Volumina $V_0$ und $V_1$	Drucke $P_0$ und $P_1$	Temperatur °C.	$\frac{V_0}{V_1}$	$\frac{P_1}{P_0}$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
1939,69	738,72	4,44	2,001215	1,998389	1,001414
969,26	1476,25				
1939,69	738,99	4,40	1,999990	1,997076	1,001448
969,86	1475,82				
1940,21	739,07	4,40	2,000010	1,997565	1,001224
970,10	1476,34				
1939,47	739,19	4,43	2,000701	1,997863	1,001421
969,39	1476,80				

Wäre das Mariotte'sche Gesetz genau richtig, so müssten die in einer Horizontalreihe befindlichen Zahlen der Columnnen 4 und 5 genau gleich sein, da nach dem Mariotte'schen Gesetz

$$V_0 : V_1 = P_1 : P_0;$$

und da ebenso

$$V_0 \cdot P_0 = V_1 \cdot P_1,$$

so müssten die Zahlen der letzten Columnne gleich 1 sein.

Man sieht aber, während  $\frac{V_0}{V_1}$  fast genau gleich 2 ist, dass  $\frac{P_1}{P_0}$  stets kleiner als 2 und somit  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$  ist.

Es folgt also aus diesen Versuchen, dass die atmosphärische Luft schon bei einer Druckdifferenz von einer Atmosphäre von dem Gesetze Mariotte's abweicht. Gleiches fand Regnault bei allen übrigen Gasen.

In der folgenden Tabelle sind die von Regnault erhaltenen Zahlen für atmosphärische Luft, Stickgas, Kohlensäure und Wasserstoffgas zusammengestellt.

Für jedes Gas sind zwei Columnen verzeichnet; die erste enthält die Drücke  $P_0$  beim Beginne der Versuche, die zweite das Verhältniss  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ , wo  $V_1$  stets fast genau  $\frac{1}{2} V_0$  war und  $P_1$  der dem Volumen  $V_1$  entsprechende Druck ist.

Tabelle von Regnault's Versuchen über die Compression der Gase.

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
738,72	1,001414	753,62	1,000788	764,03	1,007725	—	—
2112,53	1,002765	1159,26	1,000996	1414,77	1,012313	—	—
4140,82	1,003090	2159,60	1,001381	2164,81	1,018973	2211,18	0,998584
4219,22	1,003495	3030,22	1,001955	3186,13	1,028494	3989,47	0,996961
6770,15	1,004286	4953,92	1,002860	4879,77	1,045625	5845,18	0,996121
9336,41	1,006366	5957,96	1,003271	6820,22	1,066137	7074,96	0,994697
		7297,06	1,003924	8393,68	1,084278	—	—
		8628,54	1,004768	9620,06	1,099830	9175,25	0,993136
		9775,38	1,004881			10361,78	0,992337
		10981,42	1,006456				

Man sieht, dass bei diesen vier untersuchten Gasen das Verhältniss  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  nur sehr wenig von der Einheit abweicht, so dass also das Mariotte'sche Gesetz, wenn es auch nicht genau richtig ist, doch nur wenig von der Wahrheit abweicht. Wir werden es deshalb in den meisten Fällen als richtig annehmen dürfen, ohne fürchten zu müssen, grosse oder auch nur merkliche Ungenauigkeiten zu erhalten, besonders da wir in den meisten Fällen nur kleinere Drucke anzuwenden haben, und wie die Tabelle zeigt, für Drucke, welche nur wenig von dem der Atmosphäre verschieden sind, das Verhältniss  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  sich der Einheit immer mehr nähert.

Bei aufmerksamer Betrachtung jener Tabelle findet man, dass die drei ersten Gase, Luft, Stickstoff, Kohlensäure, alle in demselben Sinne vom dem Mariotte'schen Gesetze abweichen, dass bei allen  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$ , also bei allen das Volumen im rascheren Verhältnisse abnimmt, als der Druck wächst, oder das beobachtete Volumen  $V_1$  kleiner ist, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze sein sollte. Dasselbe Resultat enthielten schon die Versuche von Arago und Dulong. Die neuen Versuche indess zeigen weiter, dass das Verhältniss  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  wächst, wenn der anfängliche Druck, unter dem das dem Versuche unterworfenene Gas steht, grösser ist, dass also die Abweichungen zwischen dem wirklichen Verhalten der Gase und dem Mariotte'schen Gesetze um so grösser werden, je mehr die Zusammendrückung des Gases wächst. Wenn nun auch die Regelmässigkeit dieser Zahlen auf das entschiedenste dafür spricht, dass die beobachteten Ab-

weichungen nicht Folge der Beobachtungsfehler sind, sondern einer Unge-  
 nauigkeit des Gesetzes zugeschrieben werden müssen, so ist es doch gut,  
 nachzuweisen, dass sie grösser sind als die Beobachtungsfehler, welche wir  
 annehmen dürfen. Sei deshalb der beobachtete Werth

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \alpha$$

und nehmen wir  $V_1$  genau  $= \frac{1}{2} V_0$ , so ist

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \frac{2 \cdot P_0}{P_1} = \alpha,$$

oder

$$\frac{2 \cdot P_0}{\alpha} = P_1.$$

Wäre nun das Mariotte'sche Gesetz genau richtig, so müsste

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \frac{2 P_0}{P_1} = 1,$$

oder

$$P_1 = 2 P_0$$

Der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung ist demnach

$$P'_1 - P_1 = 2 P_0 - 2 \frac{P_0}{\alpha} = 2 P_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Dieser Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung lässt sich nun  
 rechnen, wenn wir in diesen Ausdruck die Werthe  $P_0$  und  $\alpha$  unserer Ta-  
 bellen einsetzen, man erhält dann den Unterschied in der Höhe der Queck-  
 silbersäulen, wie sie beobachtet wurden, und wie sie nach dem Gesetze  
 von Mariotte hätten sein sollen. Für Luft erhalten wir dann

$P_0$	$P'_1 - P_1$
738 <sup>mm</sup> ,72	2 <sup>mm</sup> ,08
2112 53	11 65
4140 82	25 50
4219 05	29 36
6770 15	57 68
9336 41	118 01.

Diese Differenzen sind offenbar zu gross, als dass man sie den Beobach-  
 tungsfehlern zuschreiben könnte. Das Mariotte'sche Gesetz ist demnach  
 nicht streng richtig, wenn auch die Abweichungen so unbedeutend sind,  
 so wir sie im allgemeinen nicht zu beachten haben werden.

Stickstoff, Kohlensäure und Sauerstoff verhalten sich wie atmosphä-  
 rische Luft, sie werden stärker zusammengedrückt, als das Mariotte'sche  
 Gesetz verlangt. Sie bilden also mit den von Despretz und Pouillet unter-  
 suchten Gasen, Ammoniak, schweflige Säure, Cyan u. s. f. eine Gruppe;  
 alle diese Gase besitzen eine Zusammendrückbarkeit, welche mit dem äusseren  
 Drucke zunimmt.

Anders jedoch das Wasserstoffgas; für dieses ist das Verhältniss  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$   
 stets kleiner als 1. Dieses Gas wird also bei steigenden Drucken weniger  
 stark zusammengedrückt,  $V_1$  nimmt nicht in demselben Verhältnisse ab,

als  $P_1$  wächst; und da bei immer grössern Anfangsdrucken der Werth  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  immer kleiner wird, so folgt, dass mit wachsendem Drucke die Compressibilität abnimmt.

Folgende Tabelle, welche Zahlen enthält, welche Regnault aus seinen Versuchen berechnete, zeigt, wie die Compressibilität wächst bei den drei ersten und abnimmt bei dem letzten Gase. Sie gibt die Drucke an, welche erforderlich sind, um ein Gas, welches unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber das Volumen 1 hat, auf  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  . . . zu comprimiren.

Volume	Luft		Kohlensäure		Stickgas		Wasserstoff	
	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz
	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter
1	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	— 0,0000
$\frac{1}{2}$	1,9978	+ 0,0022	1,9829	+ 0,0171	1,9986	+ 0,0014	2,0011	— 0,0011
$\frac{1}{4}$	3,9874	+ 0,0126	3,8973	+ 0,1026	3,9919	+ 0,0081	4,0068	— 0,0068
$\frac{1}{8}$	7,9456	+ 0,0543	7,5193	+ 0,4807	7,9641	+ 0,0359	8,0339	— 0,0339
$\frac{1}{16}$	9,9162	+ 0,0838	9,2262	+ 0,7738	9,9435	+ 0,0565	10,0560	— 0,0560
$\frac{1}{32}$	11,8823	+ 0,1177	10,8632	+ 1,1368	11,9191	+ 0,0809	12,0844	— 0,0844
$\frac{1}{64}$	15,8044	+ 0,1956	13,9260	+ 2,0740	15,8597	+ 0,1403	16,1616	— 0,1616
$\frac{1}{20}$	19,7198	+ 0,2801	16,7054	+ 3,2946	19,7885	+ 0,2115	20,3087	— 0,3087

Um diese Erscheinungen zusammenzufassen, kann man sich ein Gas denken, welches genau dem Mariotte'schen Gesetze folgt, und welches die Grenze bildet zwischen den beiden Gruppen, deren eine, Luft, Stickgas, Kohlensäure, stärker comprimirt wird, deren andere, allein durch den Wasserstoff repräsentirt, jedoch in geringerem Grade zusammengedrückt wird als jenes angenommene Gas. Das Mariotte'sche Gesetz ist demnach ein Gesetz, dem sich die verschiedenen Gase mehr oder weniger annähern. Die Abweichungen hängen ab von der Natur des Gases, von den anfänglichen Drucken und von andern Umständen; in welcher Weise jedoch die Differenz zwischen dem beobachteten Werthe von  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  und dem theoretischen Werthe, der gleich 1 ist, oder

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} - 1 = \beta$$

von diesen Umständen abhängt, lässt sich bisher nicht bestimmen.

Selbst die Abhängigkeit des Werthes  $\beta$  von den anfänglichen Drucken  $P_0$  lässt sich aus den Versuchen von Regnault nicht ableiten. Um eine solche Abhängigkeit zweier Grössen von einander, wenn für dieselbe kein einfaches Gesetz erkannt ist, darzustellen, bedient man sich sogenannter Interpolationsformeln, welche in ihrer einfachsten Gestalt aus Reihen bestehen, die nach steigenden oder fallenden Potenzen der einen jener zwei Grössen geordnet sind. Die Grösse  $\beta$  stellt nun die Abweichung der Gase vom Mariotte'schen Gesetze dar, wenn man das unter dem Drucke  $P_0$  abgeschlossene Volum  $V_0$  durch Vermehrung des Druckes auf  $P_1$  auf die Hälfte reducirt, und eine die Regnault'schen Beobachtungen darstellende Formel müsste wiedergeben, wie weit dann der Quotient  $\frac{P_0}{P_1}$  von  $\frac{1}{2}$  abweicht, wenn man dem anfänglichen Drucke  $P_0$  verschiedene Werthe gibt.

Man kann indess aus den Beobachtungen noch in anderer und übersichtlicher Weise eine die Abweichungen der Gase vom Mariotte'schen Gesetze darstellende Interpolationsformel ableiten. Für eine gegebene Gasmenge hat das Produkt  $P \cdot V$  für jeden Druck einen bestimmten Werth, und nach dem Mariotte'schen Gesetze sollte dieser Werth immer derselbe sein, welches auch der Druck  $P$  ist. Die Abweichung der Gase von diesem Gesetze besteht nun darin, dass mit steigendem Drucke dieses Produkt kleiner wird, man kann dieselbe deshalb darstellen, indem man die Veränderlichkeit dieses Productes durch eine Gleichung wiedergibt, welche die Abhängigkeit des Productes von dem Drucke  $P$  ausdrückt. Man geht dazu von dem irgend einen bestimmten Druck  $P_0$ , den man als Einheit wählt, gegebenen Werthe des Productes aus und vergleicht mit dem die übrigen. Wählen wir die Einheit des Druckes den von 1 Meter Quecksilber, und stellen wir allgemein die Drucke durch Meter Quecksilber dar, so können wir setzen

$$\frac{P V}{P_0 V_0} = 1 - A (P - 1) + B (P - 1)^2 \dots$$

wenn wir  $P = P_0 = 1$  und  $V = V_0$  setzen, dieser Quotient gleich 1 werden muss.

Derartige Formeln sind mehrfach aufgestellt, zuerst von Regnault<sup>1)</sup> und Jochmann<sup>2)</sup>, der ihr eine etwas andere Form gab, dann von Schröder van der Kolk<sup>3)</sup>. Für keines der untersuchten Gase lassen sich aber alle beobachteten Werthe durch eine einzige Formel mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben, so dass, die Genauigkeit der Regnault'schen Versuche vorausgesetzt, die Abhängigkeit des Productes  $P V$  von dem Drucke  $P$  eine sehr verwickelte ist.

Innerhalb enger Grenzen, etwa bis zu dem Drucke von fünf bis sechs Atmosphären, kann man indess, wenn man aus zwei Beobachtungen die Constanten  $A$  und  $B$  der Gleichung bestimmt, die übrigen darstellen, und dann die Formel benutzen, um auch für nicht beobachtete Drucke  $P V$  zu berechnen.

Nach Schröder van der Kolk sind die Constanten der Gleichung für die untersuchten Gase bis zu einem Drucke von etwa 5 Meter Quecksilber folgende:

Luft . . . . .	$A = 0,00124351$	$B = 0,0000229842$
Kohlensäure . .	$A = 0,008567$	$B = 0,000111$
Stickstoff . . .	$A = 0,000817794$	$B = 0,0000667695$
Wasserstoff . .	$A = 0,00038969$	$B = 0,000039831.$

Später hat Regnault<sup>4)</sup> noch einige andere Gase bis zu einem Drucke von etwa 8 Atmosphären verfolgt. Die von ihm für dieselben berechneten Interpolationsformeln haben die Gestalt

$$\frac{V_0 \cdot 0,76}{V \cdot P} = 1 + A (P - 0,76) - B (P - 0,76)^2,$$

wenn die Drucke  $P$  ebenfalls in Meter Quecksilber gegeben sind. Die Constanten  $A$  und  $B$  haben, durch ihre Logarithmen ausgedrückt, folgende Werthe:

<sup>1)</sup> Regnault, Mémoires de l'Acad. des sciences etc. T. XXI. p. 418.

<sup>2)</sup> Jochmann, Schönmilch Zeitschrift für Mathematik etc. Bd. V. p. 101.

<sup>3)</sup> Schröder van der Kolk, Poggend. Annal. Bd. CXVI.

<sup>4)</sup> Regnault, Mémoires de l'Acad. T. XXVI. p. 229 ff.

Sauerstoff . . .	$\log A = 0,2699060 - 3$	$\log B = 0,6646643 - 5$
Kohlenoxyd . .	$\log A = 0,7805656 - 3$	$\log B = 0,8489327 - 4$
Stickoxydul . .	$\log A = 0,8146743 - 3$	$\log B = 0,6670487 - 4$
Stickoxyd . . .	$\log A = 0,4465181 - 3$	$\log B = 0,4395015 - 4$

In der Gleichung für Stickoxydul ist  $B$  negativ, also das dritte Glied positiv zu setzen.

Für eine Anzahl anderer Gase hat Regnault das Verhalten gegenüber dem Mariotte'schen Gesetze bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären verfolgt. Folgende Tabelle enthält die Resultate; in dieselbe sind auch die vorher erwähnten Gase aufgenommen, sie ist geordnet nach dem Grade, in welchem die Gase vom Mariotte'schen Gesetze abweichen, die Abweichung ist um so grösser, je grösser der Quotient  $\frac{P_0 V_0}{P \cdot V}$  ist. Die Zahlen gelten für eine Temperatur von  $7^{\circ},9$  C.

	$P_0$	$P$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Luft . . . . .	702,78	1457,61	2,074	1,00215
Stickoxyd . . . . .	720,08	1416,33	1,967	1,00285
Kohlenoxyd . . . . .	703,18	1457,28	2,072	1,00293
Grubengas . . . . .	706,53	1383,73	1,958	1,00634
Stickoxydul . . . . .	703,10	1448,63	2,060	1,00651
Kohlensäure . . . . .	774,03	1550,63	2,003	1,00722
Chlorwasserstoff . . . . .	708,93	1460,03	2,059	1,00925
Schwefelwasserstoff . . . . .	722,53	1409,93	1,951	1,01083
Ammoniak . . . . .	703,53	1435,33	2,040	1,01881
Schweflige Säure . . . . .	697,83	1341,58	1,922	1,02088
Cyan . . . . .	703,48	1428,58	2,031	1,02353

Die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze, stets im Sinne einer stärkern Compressibilität, sind zum Theile sehr beträchtlich, sie sind, wie wir später zeigen werden, im allgemeinen um so grösser, je leichter die Gase zu Flüssigkeiten condensirt werden.

Aus den von Regnault bis zu 30 Atmosphären Druck ausgedehnten Versuchen ergibt sich, dass soweit die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze wachsen, und zwar bei einem und demselben Gase in demselben Sinne, dass also für Luft, Stickstoff etc. die Compressibilität mit steigendem Drucke wächst. Bei höhern Drucken ist das jedoch nicht mehr der Fall, vielmehr hat Natterer<sup>1)</sup> gezeigt, dass bei sehr hohen Drucken sich Stickstoff, Sauerstoff und Kohlenoxydgas ebenso verhalten wie Wasserstoff, d. h. alle diese Gase mit höhern Drucke viel weniger zusammengedrückt werden, als es das Mariotte'sche Gesetz verlangt.

Natterer comprimirt die Gase in der Flasche seines §. 104 beschriebenen Compressionsapparates und maass den Druck, ähnlich wie Oersted und Schwendsen bei ihren vorhin erwähnten Versuchen, indem er gegen ein an der Flasche angebrachtes Ventil einen Hebel wirken liess und die Gewichte bestimmte, welche den Hebel im Gleichgewicht hielten. Das con-

<sup>1)</sup> Natterer, Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. V. Bd. VI. Bd. VII. Poggend. Ann. Bd. LXII. Bd. XCIV. Die hier angeführten Versuche finden sich in P. A. Bd. XCIV.

primirt Gas liess er dann durch eine Röhrenleitung unter eine in einer pneumatischen Wanne stehende Glocke treten, deren Kubikinhalte genau 10mal so gross war als der Kubikinhalte der Flasche des Compressionsapparates. Wenn nun die Gase dem Mariotte'schen Gesetze folgen, so muss jedesmal, wenn die Glocke einmal aus der Flasche unter dem Drucke einer Atmosphäre gefüllt wird, der Druck um 10 Atmosphären abnehmen, sind die Gase weniger compressibel, als es das Mariotte'sche Gesetz verlangt, so muss der Druck bei jeder Füllung der Glocke um mehr als 10 Atmosphären abnehmen und zwar um so mehr, je mehr die Gase in dem Sinne von dem Gesetze abweichen. Es zeigte sich, dass in hohen Drucken die Druckabnahme bis zu mehr als dem 10fachen wuchs; als Stickstoff z. B. bis auf 2790 Atmosphären comprimirt war, sank bei dem ersten Austreten von 10 Volumen Gas der Druck um 136, dann um 132 Atmosphären, erst als der Druck auf 75 Atmosphären herabgegangen war, nahm er für jede 10 Volume heraustretenden Gases um 10 Atmosphären ab.

Indem Natterer in dieser Weise die Flasche allmählig entleerte und nach jedesmaligem Ausfliessen von 10 Volumen den Druck beobachtete, liess sich auch rückwärts bestimmen, wieviel Volume Gas in der Flasche bei einem bestimmten Drucke comprimirt waren. Da nun der reciproke Werth der in der Flasche enthaltenen Anzahl Volumina das Volumen des in der Flasche unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Gases angibt, so lässt sich auf diese Weise das Produkt  $P \cdot V$  für jeden Druck angeben, jenes bei 1 Atmosphäre Druck gleich 1 gesetzt. In dieser Weise sind in folgender Tabelle einige von Natterers Angaben zusammengestellt, die erste der für jedes Gas angegebenen Columnen enthält die Drucke  $P$  in Atmosphären, die zweite die Anzahl der in der Flasche unter diesen Drucken comprimirt Volumina der Gase, deren reciproker Werth das Volumen jener Gasmenge ist, welche unter dem Drucke einer Atmosphäre die Flasche ausfüllt, die dritte Columne enthält den Quotienten  $\frac{P_0 V_0}{P \cdot V} = \frac{1}{PV}$ , dessen Abweichung von der Einheit den Grad der Abweichung vom Mariotte'schen Gesetze in derselben Weise angibt wie bei den Zahlen von Regnault.

Wasserstoff			Sauerstoff		
$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \cdot V}$	$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$
2790	1008	0,3613	1354	657	0,4582
2347	958	0,4081	1106	617	0,5578
1781	848	0,4761	923	577	0,6251
1508	778	0,5159	764	537	0,7028
1259	708	0,5615	563	467	0,8294
1015	628	0,6187	463	417	0,9006
751	528	0,7030	370	347	0,9378
505	398	0,7881	276	267	0,9674
365	308	0,8438	243	237	0,9753
248	218	0,8790	210	207	0,9857
100	98	0,9800	188	187	0,9947
78	78	1,0000	177	177	1,0000



Stickstoff			Kohlenoxyd		
$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \cdot V}$	$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$
2790	705	0,2527	2790	727	0,2606
2046	645	0,3152	2088	677	0,3242
1640	605	0,3680	1674	637	0,3805
1458	585	0,4012	1416	607	0,4286
1228	555	0,4519	1196	577	0,4824
1035	525	0,5072	1016	547	0,5383
801	475	0,5930	814	507	0,6228
600	415	0,6917	599	447	0,7462
403	335	0,8312	408	367	0,8999
206	195	0,9466	204	197	0,9657
107	105	0,9813	138	137	0,9928
85	85	1,0000	127	127	1,0000

Für geringere als die zuletzt in den Tabellen angegebenen Drucke erhält Natterer für die Produkte  $P \cdot V$  den Werth 1, da diese Methode selbstverständlich nicht im Stande ist, die kleinen Abweichungen der Gase vom Mariotte'schen Gesetze in geringeren Drucken erkennen zu lassen.

Die Versuche Natterers sind neuerdings wiederholt von Cailletet<sup>1)</sup>; das von demselben angewandte Verfahren ist dem von demselben Physiker bei der Compression der Flüssigkeiten benutzten ähnlich. Die Gase befanden sich in einer unten offenen und mit dem offenen Ende in Quecksilber tauchenden Glasröhre von etwa 50 Cc. Inhalt; an das obere Ende der Röhren war ein innen vergoldetes Capillarrohr angesetzt, welches oben geschlossen war. Diese Vorrichtung war in einen mit Wasser angefüllten Compressionsapparat gesetzt. Liess man nun auf das Wasser den durch ein Desgoffe'sches Manometer (§. 64) gemessenen Druck wirken, so pflanzte sich derselbe auf das Quecksilber fort, und dieses stieg, wenn der Druck gross genug war, in das capillare Rohr und löste das Gold an den Wänden soweit auf, als es in das Rohr eingedrungen war. Der Raum des capillaren Rohres, an dessen Wandung das Gold nicht aufgelöst war, gab dann das Volumen des comprimierten Gases, welches nach Beendigung der Compression bestimmt wurde. Die von Cailletet auf diese Weise bei einer Temperatur von 15° erhaltenen Zahlen gibt folgende Tabelle, zusammengestellt mit den Zahlen von Natterer.

Druck in Atmosphären	$\frac{V_0 P_0}{V P}$			
	Wasserstoff		Luft	
	Cailletet	Natterer	Cailletet	Natterer
60	0,9810	—	1,0137	—
80	"	—	1,0118	—
100	0,9552	0,9800	1,0098	1,0000
200	0,9158	0,9050	0,9990	0,9502
300	0,8761	0,8600	0,9405	0,9200
400	0,8374	0,8312	0,8672	0,8628
605	0,7580	0,7533	0,7215	0,7185.

<sup>1)</sup> Cailletet, Comptes Rendus T. LXX. p. 1131.

Die Beobachtungen Cailletets stimmen mit denen Natterers recht gut, auch sie beweisen, dass mit steigendem Drucke die Compression der Gase weit davon entfernt ist, dem Mariotte'schen Gesetze zu folgen, dass die Gase viel weniger comprimirt werden, als es das Gesetz verlangt.

Es ergibt sich somit, dass wir selbst für die sogenannten permanenten Gase, das heisst jene, die durch Compression nicht in den flüssigen Zustand übergeführt werden können, das Mariotte'sche Gesetz nur bis zu einem Drucke von 100 Atmosphären annähernd gültig ansehen können, dass darüber hinaus das Verhalten der Gase ein ganz anderes ist.

Die theoretische Bedeutung dieses Verhaltens wird in der Wärmelehre hervortreten, in der wir die Condensation der Gase ausführlicher besprechen werden. Hier sei nur erwähnt und an einem Beispiele gezeigt, dass das Verhalten der Gase gegen Druck wesentlich von der Temperatur bedingt ist.

In seiner Arbeit über die Dichtigkeit der Gase<sup>1)</sup>, welche wir ebenfalls in der Wärmelehre ausführlicher besprechen werden, bestimmte Regnault das Gewicht Kohlensäure, welche einen Ballon bei 100° einmal unter dem Drucke einer Atmosphäre von 755<sup>mm</sup>,15 Druck und ein andresmal unter einem Drucke von 338<sup>mm</sup>,39 füllte. Er fand

$$\begin{aligned} P_1 &= 755,65 & \text{Gewicht} &= 14,190 = s_1 \\ P_2 &= 338,39 & &= 6,3487 = s_2. \end{aligned}$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze müsste nun

$$\frac{P_2 \cdot s_1}{P_1 \cdot s_2} = 1$$

sein, und die Abweichung dieses Quotienten von 1 gibt uns die Abweichung der Kohlensäure vom Mariotte'schen Gesetze bei 100°. Jener Quotient wird nun

$$\frac{338,39 \cdot 14,190}{755,65 \cdot 6,3487} = 1,000908.$$

Diese Abweichung der Kohlensäure vom Mariotte'schen Gesetze ist aber beträchtlich kleiner als jene, welche sich aus den bei ungefähr 3° C. angestellten Compressionsversuchen ergibt. Für die Kohlensäure wird in der vorhin aufgestellten Interpolationsformel

$$\begin{aligned} \frac{P V}{P_0 V_0} &= 1 - A(P - 1) + B(P - 1)^2 \\ A &= 0,008567 \quad B = 0,000111. \end{aligned}$$

Berechnen wir darnach den Werth  $PV$  für die angegebenen Drucke, also, da hier  $P$  in Meter Quecksilber gegeben ist,

$$\text{für } P_1 = 0,75565 \text{ und } P_2 = 0,33839,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} P_1 V_1 &= 1,002157 \cdot P_0 V_0 \\ P_2 V_2 &= 1,006157 \cdot P_0 V_0 \end{aligned}$$

und daraus

$$\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = 1,003987.$$

<sup>1)</sup> Regnault, Mémoires de l'Acad. des sciences etc. T. XXI. p. 149.

Es nimmt also die Abweichung der Kohlensäure vom Mariotte'schen Gesetz mit steigender Temperatur beträchtlich ab. Aehnliches gilt, wie Schröder van der Kolk gezeigt hat, für die Luft für diejenigen Drucke, bei denen sie in demselben Sinne abweicht wie die Kohlensäure, während für Wasserstoff, der vom Mariotte'schen Gesetz von vornherein in entgegengesetztem Sinne abweicht, eine solche Abnahme nicht existirt, ja wahrscheinlich statt dessen eine Zunahme eintritt, während mit sinkender Temperatur eine Abnahme eintritt<sup>1)</sup>.

Dürfen wir diese wenigen Erfahrungssätze verallgemeinern, so würde man daraus schliessen, dass die Zusammendrückbarkeit der Gase mit steigender Temperatur abnehme, mit sinkender Temperatur hingegen wachse.

Die Gase der ersten Gruppe nähern sich demnach für kleinere Drucke dem Mariotte'schen Gesetze, wenn man sie erwärmt und bei einer gewissen, für die verschiedenen Gase verschiedenen Temperatur folgen die Gase bei kleinen Drucken dem Gesetze genau. Bei weiterer Erwärmung würden sich die Gase dann wie der Wasserstoff verhalten, ihre Zusammendrückbarkeit würde von vornherein kleiner, als das Gesetz verlangt. Der Wasserstoff würde dann den andern Gasen nicht als specifisch verschieden gegenüberstehen, sondern sich verhalten wie die andern Gase in höhern Temperaturen, derselbe würde in einer sehr tiefen Temperatur bei kleinen Drucken dem Mariotte'schen Gesetze folgen. Wir werden auf diese Fragen in der Wärmelehre zurückkommen.

### §. 98.

**Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes zur Bestimmung der Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe.** Mit Hilfe des Mariotte'schen Gesetzes sind wir nun leicht im Stande, das Gesetz zu bestimmen, nach welchem der Luftdruck bei einer Erhebung über den Boden abnimmt. Wir haben zu dem Ende nur die Barometerstände in den verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche aufzusuchen, da die Barometerstände den Druck messen, unter welchem die Luft sich dort befindet, und die Dichtigkeit der Luft diesem Drucke proportional ist.

Nehmen wir zu dem Ende an, dass die Luft überall dieselbe Temperatur habe und denken wir uns dieselbe in eine Reihe sehr dünner Schichten getheilt von der Dicke  $D$ . Die Dichtigkeit der Luft in jeder Schicht sei constant, sie ändere sich aber beim Uebergang aus einer Schicht in die andere. Nun sei der Barometerstand an der Erde gleich  $H_1$ , wenn wir um die Höhe  $D$  aufsteigen gleich  $H_2$ , um  $2D$  gleich  $H_3$ , . . . um  $nD$  gleich  $H_{n+1}$ . Wenn wir um die Höhe  $D$  aufsteigen, nimmt der Barometerstand um  $H_1 - H_2$  ab, eine Luftsäule von der Höhe  $D$  an der Erdoberfläche ist also an Gewicht gleich einer Quecksilbersäule von gleichem Querschnitt und der Höhe  $H_1 - H_2$ . Nennen wir daher die Dichtigkeit der Luft in dieser Schicht  $d$ , die des Quecksilbers  $s$ , so folgt

$$\begin{aligned} d \cdot D &= s (H_1 - H_2), \\ d : s &= H_1 - H_2 : D. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Man sehe Schröder van der Kolk, Poggend. Annal. Bd. CXVI. und CXXVI. Reye, Poggend. Ann. Bd. CXVI.

Da nun aber die Dichtigkeit der Luft proportional ist dem Drucke, unter welchem sie steht, so haben wir ebenfalls, wenn  $c$  die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke  $H = 1$  bezeichnet,

$$d = c \cdot H_1,$$

oder, wenn wir das Verhältniss der Dichtigkeit  $d$  der Luft zu derjenigen  $s$  des Quecksilbers mit  $\delta$  bezeichnen, also setzen

$$\delta = \frac{d}{s},$$

$$\delta = C \cdot H_1,$$

wo  $C$  gleich ist  $\frac{c}{s}$ .

Mit Beachtung der vorigen Gleichung haben wir nun

$$\delta = \frac{H_1 - H_2}{D} = C \cdot H_1,$$

also für den Barometerstand  $H_2$  in dem Abstände  $D$  von der Erde

$$H_2 = H_1 (1 - C \cdot D).$$

Steigen wir ein zweites mal um  $D$  auf, so nimmt der Barometerstand um  $H_2 - H_3$  ab; ist die Dichtigkeit der Luft in dieser Schicht  $d'$ , so ist jetzt

$$\frac{d'}{s} = \frac{H_2 - H_3}{D}.$$

Nun ist aber wieder nach dem Mariotte'schen Gesetze, da  $H_2$  der Barometerstand in dieser Schicht ist,

$$d' = c \cdot H_2,$$

worin  $c$  genau denselben Werth hat wie vorhin, demnach

$$\delta' = \frac{c}{s} \cdot H_2 = C \cdot H_2,$$

also

$$\frac{H_2 - H_3}{D} = C \cdot H_2,$$

$$H_3 = H_2 (1 - CD) = H_1 (1 - CD)^2.$$

In ganz gleicher Weise erhalten wir die Barometerstände in den Höhen  $3D$ ,  $4D$  ...., es ist in der Höhe

$$\begin{aligned} 3D \dots H_4 &= H_3 (1 - CD) = H_1 (1 - CD)^3, \\ 4D \dots H_5 &= H_4 (1 - CD) = H_1 (1 - CD)^4, \\ &\vdots \\ nD \dots H_{n+1} &= H_n (1 - CD) = H_1 (1 - CD)^n. \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus das Gesetz, dass, wenn die Höhen, die wir ersteigen, in arithmetischer Reihe wachsen, die Barometerstände in geometrischer Reihe abnehmen. Da nun die Dichtigkeit der Luft an irgend einer Stelle dem dort vorhandenen Barometerstande proportional ist, so folgt, dass dasselbe Gesetz für die Abnahme der Dichtigkeit der Luft besteht, oder, dass die Dichtigkeit der Luft in geometrischer Progression abnimmt, wenn die Höhen, zu denen man ansteigt, in arithmetischer Progression zunehmen.

In diesem Satze über die Abnahme der Barometerstände mit der Höhe erhalten wir ein einfaches Mittel, um Höhendifferenzen zwischen zwei Orten aus Barometerbeobachtungen abzuleiten.

Ist die Höhe eines Ortes über der Erdoberfläche, an dem wir den Barometerstand  $H$  beobachten, gleich  $m \cdot D$  und eines andern, an welchem wir den Barometerstand  $h$  finden,  $n \cdot D$ , so ist die Höhendifferenz  $X$

$$X = (n - m) \cdot D.$$

Zugleich ist aber

$$\begin{aligned} H &= H_1 (1 - CD)^m, \\ h &= H_1 (1 - CD)^n, \end{aligned}$$

somit

$$\log \frac{h}{H} = (n - m) \cdot \log (1 - CD)$$

und daraus

$$n - m = \frac{1}{\log (1 - CD)} \cdot \log \frac{h}{H}$$

und setzen wir diesen Werth für  $n - m$  in die Gleichung für  $X$

$$X = \frac{D}{\log (1 - CD)} \cdot \log \frac{h}{H},$$

oder auch da  $H > h$ , um nicht den Logarithmus eines echten Bruches zu benutzen,

$$X = \frac{-D}{\log (1 - CD)} \cdot \log \frac{H}{h}.$$

Der Coefficient von  $\log \frac{H}{h}$  ist constant und hängt nur von dem Werthe  $C$  und der Dicke  $D$  der Schichten ab. Wir nahmen nun bei der Entwicklung des Gesetzes über die Abnahme der Barometerstände an, dass in jeder Schicht von der Dicke  $D$  die Dichtigkeit der Luft constant sei. Das ist nur dann der Fall, wenn wir  $D$  als unendlich klein annehmen, so dass es nur wenig von  $o$  verschieden ist; der Coefficient von  $\log \frac{H}{h}$  nimmt dann die Form  $\frac{o}{o}$  an; wir müssen daher suchen, den Werth desselben unter dieser Voraussetzung zu bestimmen. Dazu gelangen wir folgendermaassen.

Man kann, wie in der Analysis gezeigt wird, jeden Logarithmus in eine Reihe entwickeln und hat dann in briggschen oder dekadischen Logarithmen

$$\log (1 - x) = -\frac{1}{M} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right),$$

worin  $\frac{1}{M}$  den Modulus der dekadischen Logarithmen,  $M$  also die Zahl 2,302585 bedeutet.

Wir haben demnach in unserem Falle

$$\log (1 - CD) = -\frac{1}{M} \left( CD + \frac{C^2 D^2}{2} + \frac{C^3 D^3}{3} + \dots \right)$$

und daher

$$-\frac{D}{\log(1-CD)} = \frac{D \cdot M}{CD + \frac{C^2 D^2}{2} + \frac{C^3 D^3}{3} + \dots}$$

$$= \frac{M}{C + \frac{C^2}{2} D + \frac{C^3}{3} D^2 + \dots}$$

Wenn wir nun  $D$  als unendlich klein voraussetzen, so verschwindet der ganze Nenner auf der rechten Seite bis auf das erste Glied und wir erhalten

$$\frac{-D}{\log(1-CD)} = \frac{M}{C}$$

Setzen wir nun diesen Werth in unseren Ausdruck für  $X$  ein, so wird

$$X = \frac{M}{C} \cdot \log \frac{H}{h}$$

Es handelt sich nun noch darum, in diesem Ausdrucke  $C$  zu bestimmen, um aus den Beobachtungen des Barometer an zwei Orten deren Höhen-differenz bestimmen zu können.

Um  $C$  zu erhalten, erinnern wir uns, dass wir hatten

$$\delta = CH_1,$$

worin  $\delta$  die Dichtigkeit der Luft in Bezug auf Quecksilber, oder das Verhältniss des Gewichtes von 1 Kubikcentimeter Luft unter dem Drucke  $H_1$  zu dem Gewichte eines Kubikcentimeters Quecksilber zu 13<sup>gr</sup>,59 bedeutet. Wir werden in einem spätern Abschnitte die Mittel kennen lernen, um das Gewicht  $d$  eines Kubikcentimeter Luft zu bestimmen. Von den Grössen, mit denen sich dasselbe ändert, kennen wir vorläufig nur den Druck, unter welchem das Gas steht; überdies ändert es sich aber auch mit der Temperatur  $t$ , mit der Spannkraft  $F$  des Wasserdampfes, welchen die Luft enthält, und wenn wir das Gewicht der Luft an verschiedenen Orten bestimmen, auch mit der Intensität der Schwere. Wenn wir alle diese Aenderungen in einen Ausdruck zusammenfassen, so erhalten wir für das Gewicht  $d$  eines Kubikcentimeter Luft an einem Orte von der Breite  $\varphi$  unter dem Drucke  $H$  und bei der Temperatur  $t^\circ$  C.

$$d = 0^{\text{gr}},001292673 \cdot (1 - 0,002837 \cdot \cos 2\varphi) \frac{H - \frac{3}{8} F}{(1 + \alpha t) \cdot 760},$$

worin  $\alpha$  eine constante Grösse, den Ausdehnungscoefficienten der Luft, bedeutet.

Wir erhalten daraus  $\delta = C \cdot H$ , indem wir diesen Ausdruck durch das Gewicht  $s$  eines Kubikcentimeters Quecksilber dividiren

$$\delta = C \cdot H = \frac{0,001292673}{13,59} (1 - 0,002837 \cdot \cos 2\varphi) \frac{H - \frac{3}{8} F}{(1 + \alpha t) \cdot 760}$$

und setzen wir den hieraus sich ergebenden Werth für  $C$  in unseren Ausdruck für  $X$ , so erhalten wir für den Höhenunterschied zweier Orte, deren Barometerstände  $H$  und  $h$  sind,

$$X = \frac{M \cdot 13,59}{0,001292673 (1 - 0,002837 \cdot \cos 2\varphi)} \frac{1}{1 - \frac{3}{8} \frac{F}{H}} \cdot \log \frac{H}{h},$$

$$X = \frac{18398^{\text{m}}}{(1 - 0,002837 \cdot \cos 2\varphi)} \frac{(1 + \alpha t)}{1 - \frac{3}{8} \frac{F}{H}} \cdot \log \frac{H}{h},$$

oder da

$$\frac{1}{1 - (0,002837 \cdot \cos 2 \varphi)} = 1 + 0,002837 \cdot \cos 2 \varphi + (0,002837 \cdot \cos 2 \varphi)^2 + \dots$$

und in dieser Reihe die zweiten und höhern Potenzen wegen der Kleinheit derselben vernachlässigt werden können,

$$X = 18398^m (1 + 0,002837 \cdot \cos 2 \varphi) \frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{3}{8} \frac{F}{H}} \cdot \log \frac{H}{h}$$

Dieses würde die Formel für barometrische Höhenbestimmungen sein, wenn die von uns gemachten Voraussetzungen beständen, wenn die Temperatur der Luft an allen Stellen dieselbe, die Luft überall den gleichen Gehalt an Wasserdampf hätte, und wenn nicht die Intensität der Schwere in verschiedenen Höhen verschieden wäre. Ueberdies müssen wir nach §. 93 an den Barometerständen  $H$  und  $h$  wegen der verschiedenen Temperatur auf beiden Stationen eine Correction anbringen und die Variationen des Barometerstandes §. 95 beachten. Um später nicht auf diesen Gegenstand zurückkommen zu müssen, wollen wir hier, einige Sätze aus der Wärmelehre vorgreifend, diese Correctionen anbringen.

1) Die Spannkraft  $F$  des Wasserdampfes ist an den beiden Beobachtungsstationen und in der ganzen Luftsäule zwischen denselben an den verschiedenen Punkten verschieden. Man kennt jedoch nicht das Gesetz, nach welchem sich dieselbe ändert. Da jedoch  $F$  immer nur sehr klein ist, so begnügt man sich, ein für allemal eine Correction anzubringen und dem immer nur wenig von 1 verschiedenen Coefficienten  $1 - \frac{3}{8} \frac{F}{H}$  durch einen mittlern Werth zu ersetzen und die kleinen Schwankungen, welche er zu verschiedenen Zeiten erfährt, zu vernachlässigen. Die Spannkraft  $F$  des Wasserdampfes ändert sich mit der Temperatur der Luft. Da nun erfahrungsgemäss dieselbe immer nahezu die Hälfte des bei der Temperatur der Luft gesättigten Dampfes ist, und da man als untere Station immer einen Ort wählen wird, an welchem der mittlere Barometerstand, also  $H$ , nicht sehr viel von 760<sup>mm</sup> verschieden ist, so darf man annehmen, dass in jenem Coefficienten nur  $F$  und dieses nur mit der Temperatur sich ändere; dann ist

$$1 - \frac{3}{8} \frac{F}{H} = 1 - b - ct,$$

worin  $b$  und  $c$  zwei sehr kleine Constanten bedeuten. Es wird demnach

$$\frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{3}{8} \frac{F}{H}} = \frac{1 + \alpha t}{1 - b - ct},$$

oder mit grosser Annäherung

$$\frac{1 + \alpha t}{1 - b - ct} = \frac{1 + \alpha t}{(1 - b)(1 - ct)},$$

und führt man die angedeutete Division aus, indem man alle höhern als die erste Potenz von  $t$  vernachlässigt, so wird

$$\frac{1 + \alpha t}{(1 - b)(1 - ct)} = \frac{1 + (\alpha + c)t}{1 - b}.$$

Als Werthe für  $\alpha$ ,  $b$  und  $c$  ergeben sich für diesen Ausdruck

$$\frac{1 + (0,003665 + 0,000335) t}{1 - 0,000626} = \frac{1 + 0,004 t}{1 - 0,000626}$$

und nach dieser Correction hat man

$$X = \frac{18398^m}{1 - 0,000626} (1 + 0,002837 \cdot \cos 2 \varphi) (1 + 0,004 t) \cdot \log \frac{H}{h}.$$

2) Ebenso wie man sich wegen des Wassergehaltes der Luft mit einer Annäherung begnügen muss, kann man wegen der an den verschiedenen Stellen der zwischen beiden Stationen befindlichen Luftschicht verschiedenen Temperatur auch nur eine angenäherte Correction anbringen, da man das Gesetz nicht kennt, nach welchem die Temperatur mit der Höhe abnimmt. Man nimmt daher an, dass sie der Höhe proportional abnähme, und dass deshalb das arithmetische Mittel aus den an den beiden Stationen beobachteten Temperaturen der mittlern Temperatur der Luft entspräche. Anstatt  $t$  setzt man daher  $\frac{T+t}{2}$ .

3) Man muss ferner der Aenderung der Schwere in der Höhe Rechnung tragen. Man kennt das Gesetz, nach welchem die Schwere mit der Höhe abnimmt, und kann daraus die Aenderungen berechnen, welche man in unserem Ausdrucke für  $X$  anbringen muss. In den vollständigen Formeln von La Place<sup>1)</sup> und Poisson<sup>2)</sup> ist das geschehen. Indess ist es einfacher und bequemer, hier die Beobachtung zu Hülfe zu nehmen und mittels barometrischer Beobachtung an genau auf trigonometrischem Wege gemessenen Höhen den numerischen Coefficienten so zu bestimmen, dass unser Ausdruck diese Höhen wiedergibt. Es geschieht das mit hinreichender Genauigkeit, wenn man ihm den Werth 18482<sup>m</sup> gibt. Dadurch wird unsere Formel

$$X = 18482^m (1 + 0,002837 \cdot \cos 2 \varphi) \left\{ 1 + 0,004 \frac{T+t}{2} \right\} \cdot \log \frac{H}{h}.$$

Um nun schliesslich die Correctionen wegen der Temperatur des Quecksilbers anzubringen, ist es nothwendig, die Barometerstände auf 0<sup>o</sup> zu reduciren (§. 93). Dasselbe geschieht, wie wir bereits erwähnten, dadurch, dass wir den Barometerstand  $H$  durch  $1 + 0,00018 \cdot T'$  dividiren, wenn wir die Temperatur des Quecksilbers an der untern Station mit  $T'$  bezeichnen; ist sie an der obern Station  $t'$ , so wird

$$X = 18482^m (1 + 0,002837 \cdot \cos 2 \varphi) \left\{ 1 + 0,004 \frac{T+t}{2} \right\} \left\{ \log \frac{H}{1 + 0,00018 T'} - \log \frac{h}{1 + 0,00018 t'} \right\}.$$

Um nun die Variationen des Barometerstandes mit zu beachten, muss man entweder den mittlern Barometerstand an beiden Stationen anwenden, oder wenn das, wie es meist der Fall ist, an der obern Station auf der Spitze eines Berges nicht möglich ist, muss man eine Zeit wählen, in wel-

<sup>1)</sup> La Place, Mécanique céleste. Livre X. chap. 4.

<sup>2)</sup> Poisson, Traité de Mécanique. Tome II. Livre IV. chap. 5.

Ausführliche Darstellung der verschiedenen bei barometrischen Höhenmessungen zu beachtenden Umstände siehe Brandes, Ueber Höhenmessungen in Gehler's phys. Wörterbuch. Bd. V. Theil I. R. Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen. Leipzig 1870. Man sehe auch: Baeyer, Poggend. Ann. XCVIII.



cher die Atmosphäre möglichst ruhig ist, damit sie möglichst nahe stande des Gleichgewichtes ist, den unsere Rechnung voraussetzt. muss dann ferner gleichzeitige Beobachtungen an beiden Stationen an lassen. Da die Aenderungen des Luftdruckes meist nicht so lokal dass derselbe in nahe liegenden Orten sehr verschieden ist, so kann dann ziemlich sicher sein, correspondirende Barometerstände zu erhalten. Unsere Formel ergibt dann die Höhe der zweiten Station mit dem Barometerstande  $h$  über der ersten bis auf einige Meter genau.

Kennt man die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche und den Barometerstand  $h$  an demselben, so kann man mit Hilfe dieser den Barometerstand  $H$  erhalten, welcher in dem Niveau des Meeres der Breite und Länge des Ortes stattfinden würde. Auf diese Weise die an den verschiedenen Orten beobachteten mittlern Barometerstände auf das Niveau des Meeres reducirt.

### §. 99.

**Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes auf Manometer**  
Druckmesser, welche wir bisher kennen gelernt haben, beruhen auf dem hydrostatischen Grundgesetze, dass in communicirenden Röhren das Gleichgewicht ist, wenn der Druck auf die Trennungsfäche der beiden Gase von beiden Seiten gleich gross ist. Bei diesen wird also der Druck des Gases, die Expansivkraft desselben, durch eine Flüssigkeitssäule gemessen, welche in der einen der beiden communicirenden Röhren über dem Niveau der Flüssigkeit in der andern erhoben ist. Bei hohen Drücken müssen diese aber immer eine bedeutende Länge haben, wie z. B. die von Arago und Dulong oder Regnault eine Länge von 36<sup>m</sup> besaßen. Man gründet deshalb auf das Mariotte'sche Gesetz eine andere Art von Manometern

Fig. 157.



gründet, welche den Druck eines Gases durch die Compression eines abgeschlossenen Luftvolumen bestimmen. Die Luft folgt fast genau dem Mariotte'schen Gesetze, so dass wir mit Zugrundelegung des Gesetzes nur wenig von der Wahrheit abweichende Resultate erhalten.

Die gewöhnlichste Form der Manometer ist die folgende. Eine oben geschlossene mit trockner Luft gefüllte Glasröhre (Fig. 157) taucht in ein Gefäss, welches zum Theil mit Quecksilber gefüllt ist. Das Gefäss steht in einem Cylinder von Eisen, durch dessen Deckel die geschlossene Röhre luftdicht hindurchgeführt ist. Die Röhre ist am Deckel fest eingekittet, und der Deckel luftdicht auf den Cylinder aufgeschraubt. Durch eine mit einer verschliessbaren Röhre kann das Gefäss mit dem Reservoir verbunden werden, in welchem das Gas eingeschlossen ist, dessen Druck gemessen werden soll.

Bei dem äussern Druck der Atmosphäre steht das Quecksilber in der Röhre und dem Gefässe gleich hoch; tritt man durch den Hahn das zusammengedrückte Gas in das Gefäss, so drückt es auf die äussere Quecksilberfläche, so dringt das Quecksilber in die verschlossene Röhre ein und das Volumen des abgesperrten Gases gibt die Grösse des Druckes an.

Man graduirt den Apparat auf folgende Weise.

Ist der Radius der Röhre gleich  $r$  und ihre Länge gleich  $h$ , so ist bei dem anfänglichen Drucke von  $760^{\text{mm}}$  das Volumen des abgesperrten Gases  $v$

$$v = r^2 \pi \cdot h.$$

Wenn nun der äussere Druck bis zu  $n \cdot 760^{\text{mm}}$  wächst, so steigt das Quecksilber um  $x$  in der Röhre in die Höhe und der dann von der Luft eingenommene Raum ist

$$v' = r^2 \pi (h - x).$$

Während nun das Quecksilber in der Röhre um  $x$  steigt, sinkt es in dem Gefässe um  $y$ . Nennen wir den Radius des ebenfalls als cylindrisch vorausgesetzten Gefässes  $R$ , so haben wir

$$\pi r^2 x = \pi R^2 y,$$

das in der Röhre aufgestiegene Quecksilber vorhin in dem Gefässe den Raum  $\pi R^2 y$  einnahm.

Die Spannung oder der Druck der eingeschlossenen Luft auf die Oberfläche des Quecksilbers ist nun gleich dem äusseren Drucke  $n \cdot 760^{\text{mm}}$ , doch vermindert um die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, also

$$p' = n \cdot 760 - x - y$$

$$p' = n \cdot 760 - x \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Und da nun die Volumina  $v$  und  $v'$  sich verhalten umgekehrt wie die Dichte, so haben wir

$$\pi r^2 h : \pi r^2 (h - x) = n \cdot 760 - x \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) : 760,$$

1 setzen wir

$$\frac{1}{760} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) = k,$$

ist

$$h : h - x = n - kx : 1$$

$$\frac{h}{h - x} = n - kx.$$

Diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst gibt

$$x = \frac{1}{2k} \left\{ n + kh \pm \sqrt{(n + kh)^2 - 4kh(n - 1)} \right\},$$

wir zur Berechnung von  $x$  dem Wurzel Ausdruck das negative Vorzeichen benutzen müssen.

Denn für  $n = 1$  ist  $x = 0$ , unser Ausdruck gibt

$$x = \frac{1}{2k} \left\{ 1 + kh \pm \sqrt{(1 + kh)^2} \right\},$$

2 machen wir den Wurzel Ausdruck negativ

$$x = 0.$$

Zur Graduirung eines solchen Manometers bedarf es also nur einer neuen Messung der Radien  $r$  und  $R$ ; daraus wird die Grösse  $k$  und mit

dieser dann  $x$  berechnet für  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Die so gefundenen werden von dem Niveau des Quecksilbers im Gefässe aus neben aufgetragen und mit 1, 2, 3... bezeichnet. Die Quecksilberstände dann unmittelbar die Grösse des Druckes in Atmosphären an.

Ist die Röhre sehr enge, das Gefäss, in welches sie taucht, weit, so kann man die Niveauänderung im Gefässe vernachlässigen. Unserer Formel ist dann  $R = \infty$ ,  $\frac{r^2}{R^2} = 0$ ,  $k = \frac{1}{760}$ , und wir erhalten

$$x = \frac{760}{2} \left\{ n + \frac{h}{760} - \sqrt{\left( n + \frac{h}{760} \right)^2 - 4 \frac{h}{760} n} \right\}$$

Fig. 158.



Oft gibt man diesen Manometern eine Gestalt (Fig. 158). Der offene Arm enthält in dem Räume  $NA$  über Quecksilber trockne Luft. Unter dem Drucke  $p$  steht das Quecksilber in beiden Röhren hoch. Steigt der Druck auf  $n \cdot 760^{\text{mm}}$ , so steigt das Quecksilber in dem offenen Schenkel bis  $N'$  in dem geschlossenen Schenkel um ebensoviele. Um den Apparat zu graduiren, dient unsere Formel, indem wir  $r = R$  und somit

$$k = \frac{2}{760}$$

setzen, wodurch wir erhalten

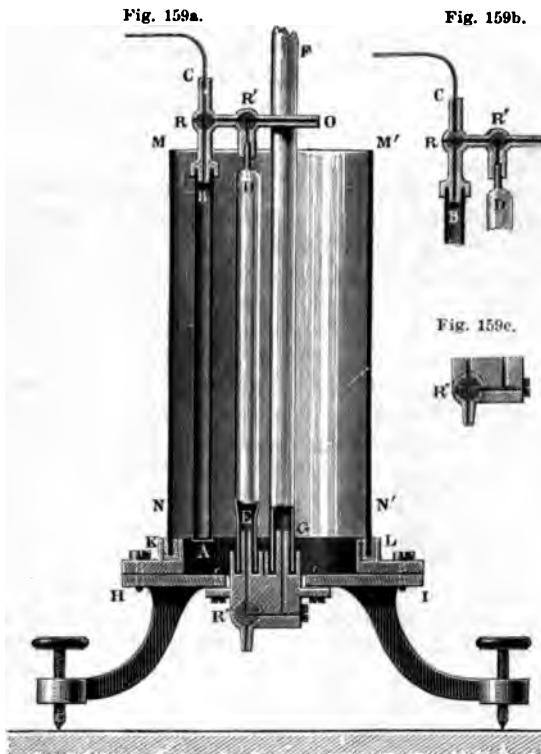
$$x = \frac{760}{4} \left\{ n + \frac{2h}{760} \pm \sqrt{\left( n + \frac{2h}{760} \right)^2 - 8 \frac{h}{760} n} \right\}$$

Es ist übrigens zu bemerken, dass bei dem Graduiren vorausgesetzt wird, dass die Röhren genau cylindrisch sind, also  $r$  überall den gleichen Werth behält. Es wird das nur selten mit aller Strenge richtig, deshalb ist es im allgemeinen besser, die Röhren durch den Versuch zu graduiren. Man bringt sie dann mit einem Quecksilbermanometer in Verbindung, wie es zum Beweise des Mariotte'schen Gesetzes angewandt wird, und vergleicht die Volumina der abgesperrten Luft mit den äusseren.

Um den Druck zu messen, welchen ein Gas in einem abgegrenzten Raum, etwa einem grössern Reservoir, ausübt, hat Regnault<sup>1)</sup> ein Manometer angegeben, welches bis zu Drucken von etwa 30 Atmosphären die Bequemlichkeit der zuletzt beschriebenen Manometer mit der Genauigkeit des einfachen Quecksilbermanometers verbindet. Die Form dieses Manometers zeigt Fig. 159a. Es besteht aus einem die Messingröhre  $AB$ , welches durch den T förmig durchbohrten Hahn  $C$  mit dem Reservoir in Verbindung gesetzt werden kann, welches das comprimirte Gas enthält. Neben der Röhre  $AB$  befindet sich ein Quecksilbermanometer, bestehend aus den communicirenden Röhren  $DE$  und  $FG$ . Diese beiden Röhren communiciren durch die in der Bodenplatte des Apparates eingesetzten Eisenstücke  $b$  und  $c$ , ebenfalls T förmig durchbohrten Hahn  $R''$ , welcher bei um  $90^\circ$

<sup>1)</sup> Regnault, Mémoires de l'Acad. T. XXVI. p. 580. Poggend. Ann. I

Stellung (Fig. c) den innern Raum des Rohres *DE* mit der untern Ausflussöffnung in Verbindung setzt. Die beiden Röhren *DE* und *GF* sind möglichst cylindrisch und beide mit einer Millimetertheilung versehen. Das oben etwas ausgezogene Rohr *ED* ist in den vertical absteigenden Theil des mit dem Hahne *R* communicirenden Rohres *RO* eingekittet. Unmittelbar über der Röhre *CD* findet sich der rechtwinklig durchbohrte Hahn *R'*, durch den das Innere des Rohres *ED* entweder mit der äussern Luft in Verbindung gesetzt (Fig. a), oder durch Drehung um  $90^\circ$  (Fig. b) mit dem Hahne *R* in Communication gebracht werden kann. Die drei Röhren sind von einem in einer Fassung der Bodenplatte eingekitteten Glaszylinder *MM* umgeben, welcher mit Wasser gefüllt wird, um den Apparat während des Gebrauches auf constanter Temperatur zu halten.



Zum Gebrauche des Apparates wird zunächst das Rohr *AB* mit dem mit Gas gefüllten Reservoir in Verbindung gesetzt, durch Stellung des Hahnes *R* wie in Fig. 159a und dann durch Einfüllen von Quecksilber durch das Rohr *FG* das Rohr *ED* soweit mit Quecksilber gefüllt, dass es aus der Oeffnung *O* hervortritt. Darauf wird der Hahn *R* in die Stellung Fig. 159b gedreht und dann der Hahn *R'* langsam so gestellt, dass der innere Raum von *AB* mit der Röhre *DE* in Verbindung steht (Fig. 159b). Die in *AB* comprimirte Luft tritt dann zum Theil in *DE* über. Man stellt dann gleichzeitig den untern Hahn *K'* so, dass sowohl aus der Röhre *DE* als aus *GF* das Quecksilber ausfliessen kann, und lässt so lange unten Quecksilber ausfliessen, bis in den beiden letztern Röhren die Quecksilber-niveaus eine bequem zu messende Höhendifferenz *h* zeigen.

Der gesuchte Druck *x* der in dem Reservoir vorhandenen Luft ergibt sich dann folgendermassen. Durch die Verbindung des Rohres *AB* mit dem betreffenden Reservoir hat sich das Volumen *V* dieses Rohres mit Gas unter dem Drucke *x* gefüllt. Nach Herstellung der Verbindung der beiden Röhren *AB* und *DE* hat sich dann dieses Gasvolumen ausgedehnt, und zwar, wenn wir mit *W* das Volumen im Rohre *DE* bezeichnen, welches nach Herstellung der Niveaudifferenz *h* von dem Gase mit angefüllt ist,

auf das Volumen  $V + W$ . Ist nun  $H$  der Barometerstand zur Zeit, als das Volumen  $V + W$  hergestellt war, so steht dieses Gas jetzt unter dem Drucke  $H + h$ . Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist deshalb

$$x \cdot V = (V + W) (H + h),$$

$$x = \frac{V + W}{V} (H + h).$$

Zur Bestimmung von  $x$  ist deshalb ausser der Kenntniss von  $H$  und  $h$  noch jene der Volumina  $V$  und  $W$  erforderlich. Zur Bestimmung von  $W$  füllt man zunächst  $ED$  wieder mit Quecksilber vollständig, bis es also bei  $O$  auszufliessen beginnt, stellt dann den Hahn  $R'$  in die Stellung Fig. 159b und den Hahn  $R$  so, dass der Raum von  $ED$  durch die beiden Hähne  $R'$  und  $R$  und die Röhre  $C$ , welche jetzt in die freie Luft mündet, mit der äussern Luft communicirt. Man stellt dann den Hahn  $R''$  in die Stellung Fig. 159c und lässt aus dem Rohre  $RD$  das Quecksilber ausfliessen. Das ausgeflossene Quecksilber sammelt man in eine Flasche und wägt dasselbe. Man bestimmt so direkt durch das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers den Rauminhalt der Röhre bis zu den verschiedenen Theilstrichen, und hat dann zur Bestimmung des Volumens  $W$  jedesmal nur nöthig den Theilstrich zu bestimmen, bis zu welchem das Quecksilber in der Röhre  $ED$  herabgedrückt ist.

Um schliesslich  $V$  zu bestimmen wird  $AB$  mit Luft unter dem Druck der Atmosphäre gefüllt und das Manometer gerade wie zur Bestimmung des Druckes  $x$  hergerichtet. Verfährt man nun gerade so wie zur Untersuchung des Druckes  $x$ , so wird auch jetzt Luft in  $DE$  übertreten, wenn man aus  $R''$  Quecksilber austreten lässt, es wird aber in  $GF$  das Quecksilber jetzt rascher sinken als in  $DE$ . Ist in  $DE$  ein Volumen  $W'$  eingetreten, und in  $GF$  das Quecksilber um  $h'$  tiefer gesunken, so ist jetzt, wenn wieder  $H$  die Höhe des Barometers ist,

$$H \cdot V = (V + W') (H - h')$$

$$V = W' \frac{H - h'}{h'}.$$

Indem man so die Luft aus  $AB$  bis zu verschiedenen Volumem  $V + W'$  sich ausdehnen lässt, erhält man eine Reihe von Werthen  $V$ , die sich gegenseitig controliren.

Weitere Werthe von  $V$  kann man erhalten, indem man zunächst das Rohr  $AB$  und das Rohr  $DE$  bis zu einem Volumen  $v'$  mit Luft füllt, und dann durch Einfüllen von Quecksilber in  $GF$  diese Luft comprimirt. Hat man sie so weit comprimirt, dass in  $DE$  noch ein Volumen  $W_1$  mit Luft gefüllt ist, und steht in Folge dessen das Quecksilber in  $FG$  um  $h_1$  höher, so ist

$$(V + v') H = (V + W_1) (H + h_1)$$

$$V = \frac{v' H - W_1 (H + h_1)}{h_1}.$$

Regnault gab bei seinem Manometer den Röhren  $AB$  und  $DE$  die Länge von 1 Meter und ersterer einen Durchmesser von  $5^{\text{mm}}$ , letzterer von  $20^{\text{mm}}$ , so dass also der Querschnitt des letztern Rohres 16 mal so gross war als der von  $AB$ . Wurde also  $AB$  mit Gas unter einem Drucke von 32 Atmosphären gefüllt, so konnte man  $V + W$  leicht so herstellen, dass es gleich  $16 V$  war, es wurde dann die Niveaudifferenz  $h$  gleich dem Barometerstande.

Man sieht leicht, wie man durch Verkleinerung von  $V$  und Vergrößerung von  $W$  auch stärkere Drucke mit nicht grössern Niveaudifferenzen messen kann; es ist dann nur auf die Bestimmung von  $V$  und  $W$  die grösste Sorgfalt zu verwenden, da je kleiner  $V$  ist, ein kleiner bei der Bestimmung dieses Volumens begangener Fehler von sehr grossem Einfluss ist.

Zur Messung sehr grosser Drucke ist das §. 64 beschriebene Manometer von Desgoffe wohl das genaueste.

## §. 100.

**Volumenometer.** Eine andere Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes ist die Messung der Volumina von Körpern und so die Bestimmung ihrer Dichtigkeit, ohne einer Wägung in Wasser zu bedürfen. Der erste Apparat der Art wurde von Say<sup>1)</sup> unter dem Namen Stereometer und etwas später von Leslie<sup>2)</sup> beschrieben. Regnault<sup>3)</sup> gab demselben folgende Form (Fig. 160 und 161). Eine Glaskugel  $A$  von 300 Kubikcentimeter Rauminhalt ist mittels einer Metallfassung auf ihrem Hals durch vier Schrauben und Zwischenlegung von eingefettetem Leder luftdicht mit dem manometrischen Apparat  $abcd$  verbunden. Das Manometer besteht aus zwei 14<sup>mm</sup> weiten Glasröhren  $b$  und  $c$ , welche in ein eisernes mit einem T förmig durchbohrten Hahn  $r$  versehenes Röhrenstück eingekittet sind. Fig. 162 und 163 zeigen einen Durchschnitt des Röhrenstückes mit zwei verschiedenen Stellungen des Hahnes. In Fig. 162 communiciren die beiden Manometerröhren mit einander, in Fig. 163  $b$  mit der äussern Luft,  $c$  ist geschlossen. In einer andern Stellung würde  $c$  ohne  $b$  und in einer vierten beide mit der äussern Luft in Verbindung stehen. Die Röhre  $cd$  ist gerade und oben offen; die Röhre  $b$ , welche oben mit der Kugel durch das enge Rohr  $aA$  in Verbindung steht, hat nahe unter der Krümmung  $a$  eine Kugel  $B$  und zwei Marken  $mn$  und  $pq$ , die eine über, die andere unter  $B$ . Durch einen Hahn  $s$  kann man nun auch die Röhre  $ab$  oben mit der freien Luft in Verbindung setzen.

Man muss nun das Volumen der einzelnen Theile der Röhre  $ab$ , von da wo sie in die Kugel  $A$  tritt bis zur Marke  $mn$ , und des zwischen den beiden Marken enthaltenen Theiles genau kennen, ebenso das Volumen der Kugel  $A$ . Um den zwischen den Marken enthaltenen Raum zu erhalten, öffnet man den Hahn  $s$ , stellt  $r$  so, dass  $ab$  und  $cd$  communiciren (Fig. 162) und füllt in  $cd$  Quecksilber ein, bis es an  $mn$  steht. Darauf dreht man den Hahn  $r$  in die Stellung (Fig. 163) und lässt soviel Quecksilber in ein untergestelltes Gefäss abfliessen, dass die Quecksilbersäule in  $ab$  gerade bis  $pq$  steht.

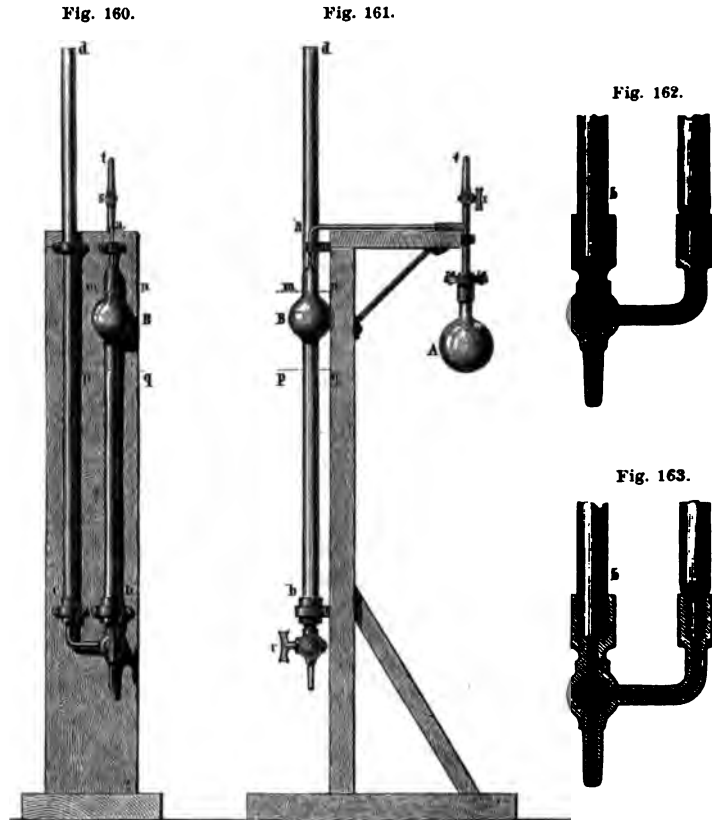
Man schliesst den Hahn, so dass die Röhren nicht mehr mit der äussern Luft in Verbindung stehen und erhält aus dem Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers das zwischen  $pq$  und  $mn$  enthaltene Volumen. Dies Volumen sei  $v$ . Die beiden andern Volumina, das der Kugel und der Verbindungsröhre, bestimmt man zusammen, da man nur die Summe der Volumina zu

<sup>1)</sup> Say, Annales de chimie par Guyton, Lavoisier etc. T. XXIII. 1797. Auch Gilbert, Annalen. Band II.

<sup>2)</sup> Leslie, Ann. of Philosoph. No. LXIV.

<sup>3)</sup> Regnault, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. XIV. Auch Poggend., Annalen. Bd. LXVI.

kennen braucht. Diese sei  $V$ . Man füllt dazu bei geöffnetem Hahn  $s$  und bei Stellung des Hahnes  $r$  wie in Fig. 162, beide Röhren bis zur Marke  $pq$ . Darauf schliesst man  $s$ , und füllt in  $cd$  soviel Quecksilber nach, bis das



Quecksilber in  $ab$  bis  $mn$  steht. Das Quecksilber steht dann in  $cd$  um eine Länge  $h$ , die man mit dem Kathetometer misst, höher als in  $ab$ . Die Luft in der Röhre  $ab$  über dem Quecksilber und in der Kugel  $A$  ist nun comprimirt durch die Quecksilbersäule  $h$ . Unter dem atmosphärischen Druck bei geöffnetem Hahn  $s$  füllte sie den Raum  $V + v$  aus; unter dem verstärkten Drucke nur mehr den Raum  $V$ . Nennen wir nun den Barometerstand  $H$ , so haben wir nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$\begin{aligned} V + v : V &= H + h : H \\ V(H + h) &= (V + v) H \\ V &= v \cdot \frac{H}{h} \end{aligned}$$

Somit kennt man den Rauminhalt der einzelnen Theile des Apparates, dessen man bedarf, um das Volumen  $x$  eines Körpers zu bestimmen.

Man legt den Körper, dessen Volumen  $x$  gefunden werden soll, in die Kugel. Derselbe verdrängt dadurch eine ihm an Volumen gleiche Luft-

menge. Wenn man nun bei geöffnetem Hahn *s* wieder Quecksilber bis zur Marke *pq* einfüllt und dann den Hahn *s* schliesst, so ist jetzt das Volumen der abgesperrten Luft nicht mehr  $V + v$ , sondern  $V + v - x$ . Füllt man dann in *cd* wieder Quecksilber nach, bis es in *ab* bei *mn* steht, so wird jetzt das Volumen  $V + v - x$  auf das Volumen  $V - x$  comprimirt und man beobachtet in *cd* eine Quecksilbersäule *h'*, welche diese Compression bewirkt. Nennen wir wieder *H* den Barometerstand, so ist

$$\begin{aligned} V + v - x : V - x &= H + h' : H \\ H(V + v - x) &= (H + h')(V - x) \\ x &= \frac{V \cdot h' - vH}{h'} \end{aligned}$$

Eine zweite Bestimmung von *x* erhält man auf dem umgekehrten Wege. Man füllt bei geöffnetem Hahn *s* soviel Quecksilber in das Manometer, dass es in *ab* bis zur Marke *mn* steht. Bei geschlossenem Hahn ist dann das Luftvolumen  $V - x$  abgesperrt. Darauf stellt man den Hahn *r* so, dass beide Röhren mit einander und mit der äussern Luft in Verbindung stehen, und lässt soviel Quecksilber abfliessen, dass es in *ab* bis zur Marke *pq* steht. Das Luftvolumen  $V - x$  hat sich dann auf das Volumen  $V + v - x$  ausgedehnt, und zugleich beobachtet man, dass das Quecksilber in der Röhre *cd* um eine Strecke *h''* tiefer steht als in *ab*. Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist dann wieder

$$\begin{aligned} V + v - x : V - x &= H : H - h'' \\ H(V - x) &= (H - h'')(V + v - x) \\ x &= V - \frac{v(H - h'')}{h''} \end{aligned}$$

Combinirt man beide Methoden, so kann man sogar die Beobachtung des Barometer unterlassen. Die erste Gleichung für *x* gibt

$$H = \frac{(V - x) h'}{v},$$

die zweite

$$H = \frac{(V - x) h''}{v} + h'' = \frac{(V + v - x) h''}{v},$$

und aus beiden

$$\begin{aligned} \frac{V + v - x}{V - x} &= \frac{h'}{h''} \\ x &= V - v \cdot \frac{h' - h''}{h''} \end{aligned}$$

Kopp<sup>1)</sup> hat schon früher ein anderes Volumenometer construirt, welches vor dem Regnault'schen den Vorzug der grössern Einfachheit hat, so dass es jeder sich leicht selbst herstellen kann, Fig. 164 stellt dasselbe dar. In einem zum Theil mit Quecksilber gefüllten Cylinder *K* bewegt sich ein quecksilberdicht schliessender Kolben mit schwacher Reibung.

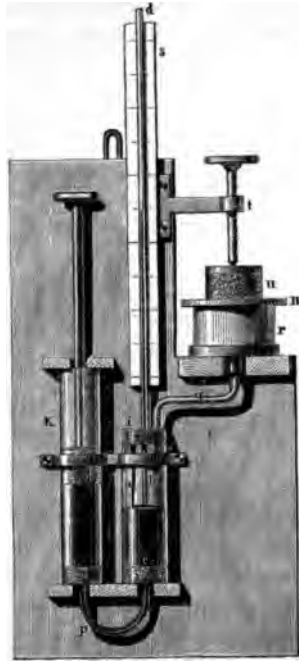
Der Cylinder ist unten mit einer Korkplatte geschlossen, und ein gekrümmtes Rohr *p* lässt ihn mit einem unten und oben geschlossenen Cylinder *ii* communiciren. Der Deckel des letzteren Cylinders ist von zwei Röhren durchbohrt *cd* und *q*.

<sup>1)</sup> Kopp, Annalen der Chemie und Pharmacie von Liebig. Bd. XXXV.



Die Röhre  $cd$  ist gerade an ihren beiden Enden offen, und gegen eine willkürliche Theilung gelegt, deren Nullpunkt etwas über dem Cylinder liegt. Die Röhre  $q$ , gekrümmt, wie die Figur zeigt, tritt durch den Boden

Fig. 164.



in ein cylindrisches Gefäß  $r$  ein. Von dem Deckel des Cylinders  $ii$  reichen mehrere Plat-  
spitzen von verschiedener Länge  $a, b$  in den Cylinder hinab. Das cylindrische Gefäß  $r$  kann ein anderes Gefäß aufnehmen, welches den untersuchenden Körper enthält. Eine Scheibe  $m$  von mattgeschliffenem Glase wird durch die Schraube  $t$  und einen zwischengelegten elastischen Körper  $u$  auf den abgeschliffenen oberem Rand des Cylinders gelegt und verschliesst ihn luftdicht. Die Cylinder  $K$  und  $ii$  sind bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt.

Man zieht nun zunächst den Kolben in so weit herauf, dass die Luft frei durch  $cd$  in  $ii$  eindringen kann. Sei bei dem Barometerstande  $H$  das Volumen der Luft, welches in  $ii, q$  und  $r$  abgesperrt ist, wenn das Quecksilber gerade bei  $c$  die Röhre  $cd$  verschliesst gleich  $V$ .

Drückt man nun den Kolben herab, steigt das Quecksilber in  $ii$ , und man kann leicht dahin bringen, dass es gerade die Spitze berührt. Dabei wird das Quecksilber in der Röhre  $cd$  um eine Höhe  $h$  steigen, und diese Höhe  $h$  misst jetzt den Druck, unter welchem die comprimirte Luft steht. Diese Höhe  $w$

bei verschiedenem Barometerstand verschieden sein, da mit  $H$  die Dichtigkeit der anfänglich abgesperrten Luft sich ändert.

Sei nun  $V'$  das Volumen der abgesperrten Luft, wenn das Quecksilber bei  $a$  steht, so haben wir

$$\begin{aligned} V : V' &= H + h : H \\ V : V - V' &= H + h : h \\ V - V' &= \frac{h}{H + h} \cdot V. \end{aligned}$$

Um nun das Volumen  $V$  zu bestimmen, bedarf es noch einer weitern Beobachtung; man legt dazu in das Gefäß  $r$  einen Körper von bekanntem Volum  $v$ , und verfährt gerade wie vorhin. Man erhält dann das Volumen auf folgende Weise. Das Volumen der anfänglich abgesperrten Luft ist  $j$   $V - v$ , beim Hinaufdrücken des Quecksilbers bis  $a$  ist es  $V' - v$ ; in der Röhre  $cd$  ist das Quecksilber dann bis zu einer Höhe  $k$  gestiegen. Man hat demnach

$$V - v : V' - v = H + k : H,$$

und wenn wir wieder gerade wie vorhin verfahren

$$V - v : V - V' = H + k : k$$

und setzen wir für  $V - V'$  den soeben erhaltenen Ausdruck ein, bringen die passenden Transformationen an:

$$V = \frac{h'}{H} \cdot \frac{H+h}{h'-h} \cdot v.$$

Ist nun  $V$  so ein für allemal bestimmt, so erhält man aus einem dem vorigen ganz gleichen Versuche das Volumen  $x$  eines zu untersuchenden Körpers. Man legt den Körper in den Cylinder  $r$ , und comprimirt die Luft, bis das Quecksilber die Spitze  $a$  berührt. In der Röhre  $cd$  steigt das Quecksilber bis zu einer Höhe  $h''$ , und es ist

$$V = \frac{h''}{H} \cdot \frac{H+h}{h''-h} \cdot x$$

und daraus, wenn wir die Gleichung nach  $x$  auflösen,

$$x = \frac{H}{h''} \cdot \frac{h''-h}{H+h} \cdot V.$$

Der Apparat ist mit mehreren Platinspitzen versehen, um zugleich mehrere Werthe für  $x$  erhalten zu können, welche sich gegenseitig controliren, und aus denen man das Mittel nimmt, wenn die einzelnen Versuche kleine Abweichungen zeigen.

Man kann diese Apparate sehr gut anwenden, um das specifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, bei denen man die gewöhnliche Methode des Eintauchens in eine Flüssigkeit nicht anwenden kann. Man bestimmt das Gewicht des Körpers in Grammen und das Volumen mittels dieses Apparates in Kubikcentimetern. Der Quotient beider gibt das specifische Gewicht.

Um sich von der Genauigkeit der Methode zu überzeugen, bestimmte Kopp zunächst das specifische Gewicht von Blei, Zinn und einigen Salzen, es stimmt, wie folgende Zahlen zeigen, sehr genau mit den von andern Beobachtern gefundenen specifischen Gewichten dieser Substanzen überein.

Es ist das specifische Gewicht von

Blei	nach Kopp	11,404,	nach gewöhnlicher Methode	11,373
Zinn	" "	7,363,	" "	7,358
Salmiak	" "	1,50,	" Wollaston.....	1,45.

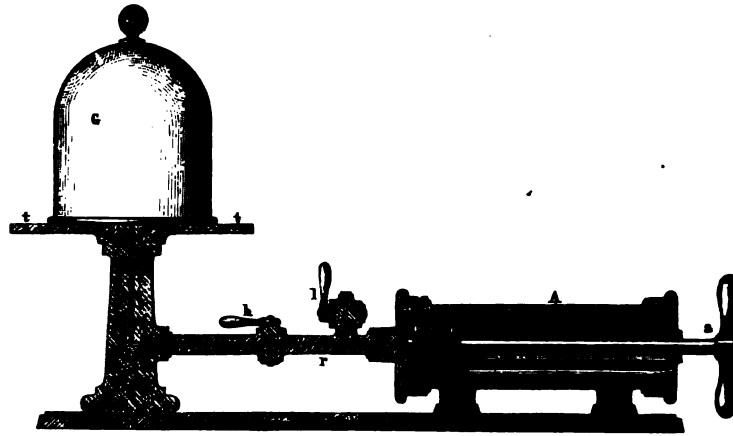
Für eine Reihe anderer Substanzen hat Kopp dann folgende Zahlen erhalten:

Substanzen	Sp. Gew.	Substanzen	Sp. Gew.
Bimstein (gepulvert) . . .	2,15	Korkrinde . . . . .	0,33
Asche von Buchenholz . .	2,85	Faser von Lindenholz . . .	1,13
Zucker (weiss. gepulvert) .	1,58	" " Tannenholz . .	1,16
Kochsalz (gepulvert) . . .	2,15	" " Nussbaumholz .	1,17
Waizenmehl . . . . .	1,49	" " Apfelbaum . . .	1,20
Stärkmehl . . . . .	1,56	" " Zwetschenbaum	1,22
Flachsfaser . . . . .	1,45	" " Birnbaum . . .	1,23
Seide (Coconfaden) . . . .	1,56	" " Eichenholz . . .	1,27
Baumwolle . . . . .	1,27	" " Buchenholz . . .	1,29
Schafwolle (verarbeitet) .	1,29		

## §. 101.

**Die Luftpumpe.** Auf der zweiten Fundamenteigenschaft der Gas dem Bestreben, jeden ihnen dargebotenen Raum auszufüllen, beruht einer der für den Physiker wichtigsten Apparate, die Luftpumpe, durch welche man im Stande ist, aus einem Raume die Luft herauszuschaffen.

Fig. 165.



Der einfachste Apparat dieser Art ist die Hahnluftpumpe, wie sie der Erfinder derselben, Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, construirte. (*Experimenta nova Magdeburgica de spatio vacuo. Amstellod. 1672. fol.*). In einem hohlen, gut gearbeiteten Cylinder *A* kann ein luftdicht schliessender Kolben *k* hin und hergeführt werden. Der Boden des Cylinders ist durchbohrt und eine Röhre *rr*, welche in der Mitte eines Tellers *tt* mündet, setzt den durch die Glocke *G* umgebenen Raum mit dem Innern des Cylinders in Verbindung.

In der Röhre *rr* sind überdies zwei einfach quer durchbohrte Hähne angebracht *h* und *l*. Wenn man nun die beiden Hähne so stellt, dass der innere Raum des Cylinders weder mit der Glocke *G*, noch mit der äusseren Luft in Verbindung steht, und nun den Kolben gegen *a* hin bewegt, so entsteht im Cylinder ein luftverdünnter Raum, da sich die vorher in einem kleinen Theile des Cylinders befindliche Luft jetzt in dem ganzen Cylinder verbreitet. Dreht man nun den Hahn *h*, so wie die Zeichnung es zeigt, dass die Glocke mit dem Cylinder *A* in Verbindung steht, so strömt die dichtere Luft aus der Glocke durch die Röhre *rr* in den luftverdünnten Raum des Cylinders, und die Luft unter der Glocke ist dünner wie vorher. Schliesst man dann durch *h* die Glocke wieder vom Cylinder ab, so kann man durch Zurückschieben des Kolbens bei geöffnetem Hahn *l* die Luft aus dem Cylinder herausdrücken. Durch mehrfache Wiederholung dieser Operationen kann man dann allmählig die Luft unter der Glocke bis auf einen gewissen Grad verdünnen.

Diese Luftpumpe ist nun zwar die einfachste, aber auch die unbequemste, da man bei jeder Verdünnung drei Operationen vornehmen muss, das Heraus-

und Hineinschieben des Kolbens und die Stellung zweier Hähne. Nächste Verbesserung, welche an den Maschinen angebracht wurde, nun die, dass man statt zweier Hähne nur einen doppelt hohrten Hahn (Fig. 166) anwandte. Die eine Durch-  
 ung geht wie bei den einfachen Hähnen quer durch den  
 n, und verbindet in der entsprechenden Stellung die  
 ke mit dem Cylinder. Die zweite bildet einen rech-  
 tlig gekrümmten Kanal *a b*, sie setzt das Innere des Cy-  
 lers mit der äussern Luft in Verbindung, sie dient also  
 , die Luft beim Zurückführen des Kolbens aus dem Cy-  
 l zu entlassen.

Fig. 166.



Um der Stellung der Hähne ganz hoben zu sein, hat man dann später elben durch Ventile ersetzt (Fig. 167).

Fig. 167.

in dem Cylinder *A* bewegliche Kol-  
*K* ist durch ein centrales Loch durch-  
 t, welches durch eine von unten

oben sich öffnende Klappe ver-  
 lassen werden kann. Eine ähnliche  
 pe ist am Boden des Cylinders vor-  
 len, die ebenfalls von unten nach oben  
 öffnet. Wenn man nun den Kolben

die Höhe zieht, schliesst sich das  
 nventil *l*; durch den stärkern Druck  
 Luft in der Glocke öffnet sich dann  
 das Ventil *h* und die Luft dringt  
 der Glocke in den Cylinder. Wird

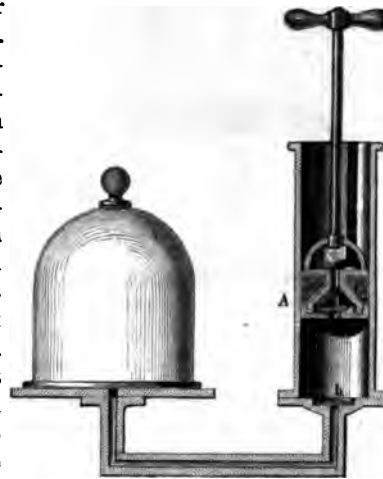
der Kolben hinabgedrückt, so  
 esst sich das Ventil *h*, da dann die  
 enthaltene Luft, welche sich vorher

der Luft der Glocke ins Gleichgewicht gesetzt hatte, stärker von oben  
 unten drückt. Bald öffnet sich dann auch das Ventil *l* des Kolbens  
 die im Cylinder *A* enthaltene Luft strömt durch die Kolbenöffnung  
 bis der Kolben wieder auf dem Boden des Cylinders aufsteht.

Indess würde bei dieser einfachsten Ventilluftpumpe die Verdünnung  
 Luft unter der Glocke bald ihre Grenze erreichen, da die Luft nur dann  
 der Glocke in den Cylinder *K* strömen kann, wenn sie das Ventil *h*  
 . Die Luft wird also aufhören, in den Cylinder einzuströmen, sobald  
 Druck der Luft in der Glocke so klein geworden ist, dass er nicht mehr  
 stande ist, das Ventil zu heben. Deshalb hat man an der Maschine  
 ere Veränderungen angebracht, und bewirkt, dass der aufsteigende  
 en das Ventil *h* öffnet, der niedergehende es schliesst.

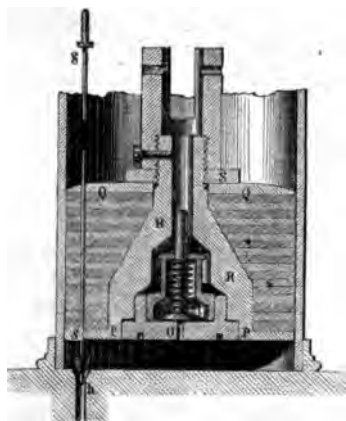
Der Kolben, wie er an den verbesserten Maschinen angewandt wird,  
 folgende Einrichtung (Fig. 168).

Der Kolben enthält im Innern einen metallischen Kern, der aus einer  
 n nach unten sich erweiternden Röhre *RR* besteht. Um diese Röhre  
 auf der Platte *PP* sind Lederscheiben gelegt, welche vollständig mit  
 getränkt sind. Diese Lederscheiben sind durch die Deckplatte *QQ*,  
 he mit der Schraube *S* dagegen gedrückt wird, zusammengedrückt.



Die Umfänge dieser Lederscheiben sind so begrenzt, dass die einen Cylinder bilden, der ganz genau in den Cylinder der Pumpe l

Fig. 168.



passt und nur mit schwacher R darin auf und ab bewegt werden k

Es ist nicht schwierig, den F genau einzupassen, denn jedesmal, man die Schraube S anzieht, wir Durchmesser des Kolbens grösser, da die zusammengepressten Scheiben na Seite sich ausdehnen. Man kann auf Weise den Kolben ganz genau luf einpassen, ohne doch die Reibun stark zu machen, und so den Gan Pumpe zu erschweren.

Im Innern der Röhre R befindet das Ventil I. Dasselbe ist eine kreisförmige Platte, welche abgesc ist, und die Oeffnung O in der I platte vollständig bedeckt. Sie wird eine Feder, welche an einem klein der weitem Stelle der Röhre befestigten Gestelle befestigt ist, geg Bodenplatte angedrückt. Die Feder ist andererseits an einen von der P aufsteigenden Stiel befestigt. Die Feder ist nur sehr schwach, da der Druck der Luft im Innern des Cylinders bald nicht mehr auswürde, um das Ventil zu heben.

Anstatt der einfachen Klappe, welche die zur Glocke führende verschliesst, hat man folgende Einrichtung angebracht. Der Kolben i einer Durchbohrung versehen, durch welche ein Messingstab ss hindurel der luftdicht eingepasst ist. An dem Stabe ist eine nach unten k abgedrehte Verdickung angebracht, welche in die konische Oeffnung i Boden des Cylinders h eingeschliffen ist und dieselbe luftdicht absch Wird nun der Kolben herabgedrückt, so nimmt er den Messingsta sich, bis die kegelförmige Verdickung die Bodenöffnung abschliesst. Verschluss dauert so lange, wie der Kolben niedergeht. Wenn nu Kolben aufgezogen wird, hebt er zunächst den Stab ss, öffnet die F öffnung h und stellt auf diese Weise die Communication der Glocke mi Pumpenstiefel her. Damit aber der Stab nicht zu hoch gehoben u nachher der rechtzeitige Verschluss beim Hinabdrücken nicht verh wird, stösst der Stab, gleich nachdem er gehoben ist, gegen den I des Pumpencylinders, und der Kolben gleitet an der Messingstange Höhe.

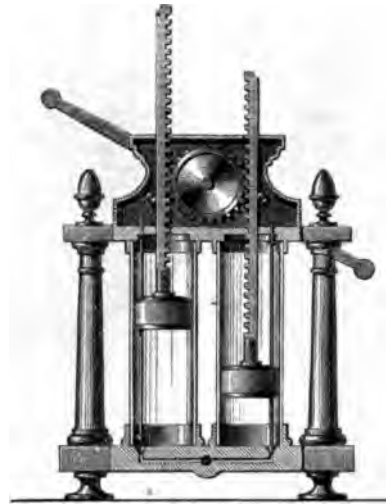
Diese Einrichtung bewirkt also, dass man beim Pumpen selbst Communication des Recipienten mit dem Pumpenstiefel herstellt und bricht, dass also die Luft aus der Glocke ohne Hinderniss in die I eintreten kann.

**Zweistiefelige Pumpen.** Bei den einstiefeligen Pumpen ist i meidlich jedesmal ein todter Gang, indem beim Herabdrücken des K nur die Luft aus der Pumpe in die freie Luft, nicht aber aus dem

panten in die Pumpe geschafft wird. Ausserdem haben sie noch eine andere Unbequemlichkeit. Wenn nämlich die Luft fast vollständig ausgepumpt ist, so muss man bei Hebung des Kolbens nicht nur die Reibung des Kolbens an den Wänden des Stiefels überwinden, sondern auch den Druck der Luft, welcher auf dem Kolben lastet und dem ihm Gegendruck das Gleichgewicht hält. Dieser Druck ist nun bei einiger Grösse des Kolbens sehr bedeutend, er übersteigt 100 Kilogramm, wenn der Querschnitt des Kolbens einem Quadratmeter gleich wird. Dieser Druck, welcher bei dem Anfang der Operation sich 0 ist, wächst sehr rasch und macht das Auspumpen von Luft bald sehr schwierig, wenn nicht unmöglich. Um diesen beiden Uebelständen zu begegnen, hat man zweistiefelige Luftpumpen (Fig. 169) construirt, bei denen man zwei solcher Pumpen unmittelbar an einander stellt und mit demselben Recipienten in Verbindung bringt. Die Kolben sind an Zahnstangen befestigt, deren Zähne in die eines gehärteten Rades eingreifen. Das Zahnrad ist auf einer metallischen Axe, an welcher zugleich ein zweiarmiger Hebel befestigt ist. Man fasst den Hebel an seinen beiden Enden angebrachten Handgriffen und hebt und senkt die Kolben durch Drehung des Rades. Man sieht, wie hier immer der eine Kolben steigt, wenn der andere herabhängt, und wie somit beide vorherhin bemerkte Uebelstände abgestellt sind. Denn hemmt jetzt der Luftdruck den aufsteigenden Kolben, so befördert er in ganz gleichem Maasse den niedergehenden; der äussere Luftdruck ist also kein Hemmniss der Operation, sie geht am Ende bei fast leerer Glocke ebenso leicht als im Anfang. Ueberdies ist aber auch der todte Gang vermieden, denn geht der eine Kolben nieder, um die Luft aus dem Körper der Pumpe fortzuschaffen, so steigt der andere Kolben auf und pumpt Luft aus dem Recipienten.

**Verbindung der Pumpen mit dem Recipienten.** Um mit den Pumpen leicht die verschiedensten Apparate in Verbindung setzen zu können, sind sie auf einem festen Tische befestigt (Fig. 170). Die Kanäle, welche die Pumpenstiefel mit dem Recipienten in Verbindung setzen, vereinigen sich gleich hinter den Pumpen in einen einzigen Kanal, der dann horizontal über dem Tische hingeführt ist, in einiger Entfernung vertical aufsteigt und in der Mitte eines Tellers von mattgeschliffenem Glase endigt. Das hervorragende Ende des Kanals ist mit einem Schraubengewinde versehen, auf welchem man die Apparate aufschrauben kann, in welchen man einen zu leereren Raum herstellen will. Diese sind zu dem Zwecke mit einer Schraubenmutter versehen, welche auf das Gewinde passt. Ueberdies sind an einer solchen Luftpumpe stets einige Glocken mit abgeschliffenem Rand, welche auf den Teller gesetzt und ausgepumpt werden können. Um den

Fig. 169.



Verschluss einer solchen Glocke vollkommen luftdicht zu machen, bestreut man den Rand derselben dann noch mit einer dünnen Schicht Fett.

Fig. 170.



**Manometer.** Um zu bestimmen, wie weit die Verdünnung der in den Apparaten vorgeschritten ist, besitzen alle Luftpumpen ein Barometer (Fig. 171). Dasselbe ist von einer Glasglocke umgeben, welche in Messingfassung eingekittet ist, die durch eine Röhrenleitung mit dem Recipienten zu den Pumpen führenden Kanal in Verbindung steht. So zugleich aus dem Recipienten und dieser Glocke die Luft ausgepumpt. sieht daher, wie bei jedem Kolbenhub das Quecksilber in dem einen Schenkel des Barometer fällt, so lange bis die Verdünnung der Luft ihren höchsten Grad erreicht hat, und das Niveau des Quecksilbers im Barometerrohr wenig mehr über das in dem offenen Schenkel erhoben ist. Der Druck noch im Recipienten vorhandenen Luft und somit ihre Dichtigkeit wird jedem Moment durch den Unterschied der Quecksilberniveaus angezeigt. Gewöhnlich wendet man anstatt eines ganzen ein abgekürztes Barometer von 30 bis 40 Centimeter Länge. Das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel beginnt dann nicht eher zu fallen, als bis der Druck der Luft auf die Hälfte reducirt und somit die Luft zur Hälfte ausgepumpt ist. Um die Verdünnung schon früher, ja überhaupt genau messen, so bindet man mit der Pumpe ein einfaches Quecksilbermanometer (Fig. 1) dessen einer Schenkel durch einen Kautschukpfropf geschlossen ist, der an dem anderen Schenkel durch eine zur Luftpumpe geführten Glasröhre durchbohrt ist. Der andere Schenkel ist offen; die Röhren sind zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. Wird nun die Luft in dem mit dem Recipienten der Luftpumpe in Verbindung gesetzten Schenkel verdünnt, so steigt das Quecksilber in

sinkt in dem andern und die Niveaudifferenz gibt den Ueberschuss  
 sern Luftdruckes über den Druck der Luft im Recipienten. Zieht  
 mnach den Niveauunterschied vom  
 erstande ab, so erhält man den Druck  
 im Recipienten.

er Niveauunterschied wird mit dem  
 neter gemessen.

**d der Verdünnung.** Wenn man die  
 ung der Luft im Recipienten durch  
 ztes Pumpen möglichst weit treibt,  
 nan doch niemals in dem abgekürzten  
 er das Quecksilberniveau in beiden  
 n gleich hoch, oder in unserem Man-  
 (ig. 172) die Niveaudifferenz dem Ba-  
 tande gleich finden. Man erhält daher  
 in dem Recipienten einen luftleeren  
 und es fragt sich, wie weit kann man  
 ünnung treiben. Es hängt das wesent-  
 von der guten Construction der  
 aber auch theoretisch betrachtet kann  
 nals einen vollkommen leeren Raum  
 wie sich leicht nachweisen lässt.

*A* die Capacität des Recipienten, *B*  
 Pumpencylinders. Nehmen wir an,  
 en eine einstieflige Pumpe und der  
 tehe auf dem Boden des Pumpency-  
 Sei ferner die dann im Recipienten  
 rte Luftmenge gleich der Einheit.

nd nun der Kolben ganz in die Höhe  
 so verbreitet sich die Luft aus dem  
 en in den Cylinder und die vorhin

n *A* einnehmende Luft nimmt jetzt den Raum  $A + B$  ein. Die  
 it der Luft ist demnach jetzt in dem Raume des Recipienten  
 ls des Cylinders

$$\frac{A}{A+B}$$

nd jetzt durch Hinabdrücken des Kolbens die Luft aus dem Cylinder  
 , so ist, wenn der Kolben den Boden wieder berührt, anstatt der  
 ge 1 in dem Recipienten, dessen Capacität gleich *A* ist, das gleiche  
 luft wie vorher abgesperrt, dieses hat aber nur die Dichtigkeit

Nach dem zweiten Kolbenhube breitet sich nun die Luft von dieser  
 it aus dem Raume *A* wieder in den Raum  $A + B$  aus, die Dich-  
 mmt demnach wieder im Verhältniss  $\frac{A}{A+B}$  ab, oder sie ist jetzt

$$\frac{A^2}{(A+B)^2}$$

Niedergang des Kolbens wird wieder das Volumen *B* dieser Luft

Fig. 172.

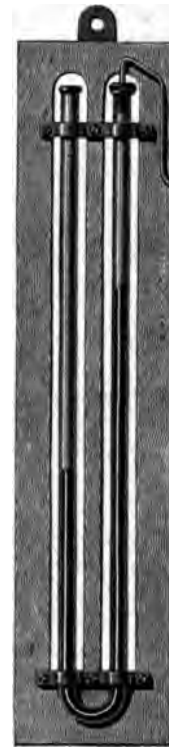


Fig. 171.





ausgestossen, berührt der Kolben den Boden, so ist im Raum  $A$  die Luftmenge  $\frac{A^2}{(A+B)^2}$  enthalten.

Nach dem dritten, vierten etc. Auf- und Niedergänge des Kolbens erhält man in gleicher Weise als im Recipienten zurückbleibende Luftmenge

$$\frac{A^3}{(A+B)^3}, \frac{A^4}{(A+B)^4}, \dots, \frac{A^n}{(A+B)^n}.$$

Nun ist

$$\frac{A^n}{(A+B)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{B}{A}\right)^n}$$

und man sieht, dass dieser Ausdruck nur dann gleich 0 wird, wenn  $n$  unendlich gross wird, wenn man also unendlich viele Kolbenhübe vornimmt.

Man kann daher mit keiner Luftpumpe einen absolut leeren Raum erhalten, sondern unter den obigen Voraussetzungen sich dem vollständig leeren Raum nur durch andauerndes Pumpen annähern. Aber selbst dieses, eine fortgesetzte Annäherung an den luftleeren Raum ist in der Praxis nicht zu erreichen, selbst bei den besten Pumpen ist es nur eine gewisse Grenze der Verdünnung, der man sich bei fortgesetztem Pumpen immer mehr nähert. Selbst die besten Maschinen reichen nicht weiter als bis zu einer Verdünnung von etwa  $1^{\text{mm}}$  Quecksilberdruck. Der Gründe dafür sind mancherlei.

Wie gut auch die Maschine gearbeitet ist, so können doch niemals die Verbindungen zwischen den einzelnen Theilen vollkommen luftdicht sein. So schliesst der Kolben nicht absolut luftdicht an den Cylinder, die Stange der Ventile nicht im Kolben, ebenso nicht das Boden- und Kolbenventil. Ferner ist durch die mancherlei Verbindungen am Apparat das Innere desselben nicht ganz vollkommen von der äussern Luft abgeschlossen. Wenn deshalb die Verdünnung einen hohen Grad erreicht hat, sickert die Luft durch diese verschiedenen sehr feinen Räume in die Pumpe hinein und alles weitere Pumpen ist vergeblich; die Luftmenge, welche wir durch das Pumpen fortnehmen, wird durch die nachsickernde Luft wieder ersetzt.

Noch ein anderer wesentlicherer Umstand ist vorhanden, der es unmöglich macht, die theoretisch mögliche Verdünnung in der Praxis zu erreichen, es ist der schädliche Raum zwischen dem Kolben und dem Boden des Pumpencylinders. Der Kolben steht nämlich auch in seiner tiefsten Stellung niemals ganz dicht auf dem Boden der Pumpe, sondern immer ist ein, wenn auch, bei sehr gut gearbeiteten Pumpen, noch so kleiner Raum zwischen beiden. Daraus folgt, dass nicht, wie wir bei unserer Berechnung annahmen, bei jedem Niedergänge das Luftvolumen  $B$  fortgeschafft wird, sondern da von dem Raume  $B$  unter dem Kolben noch ein Raum  $b$  übrig bleibt, nur das Volumen  $B - b$ . Bei weit vorgeschrittener Verdünnung wird deshalb ein Punkt eintreten, wo die Luft in dem Pumpenstiefel gar nicht mehr durch den Kolben austritt; wo sie nicht mehr im Stande ist, das Ventil zu heben, sondern nur in dem Raume  $b$  comprimirt wird. Bei weiteren Auf- und Niedergängen des Kolbens tritt daher keine Luft mehr aus dem Recipienten in den Pumpencylinder und aus diesem durch den Kolben in die äussere Luft, sondern es wird nur die in dem Raume  $b$  enthaltene Luft abwechselnd ausgedehnt und comprimirt.

**Babinet's Hahn.** Um diesen störenden Umstand auf ein Minimum zurückzuführen, hat Babinet zur Luftpumpe einen besondern nach ihm benannten Hahn hinzugefügt. Derselbe befindet sich in der Axe der Röhre, welche die von beiden Pumpenstiefeln kommenden Kanäle verbindet, unmittelbar unter denselben. Dieser Hahn hat zunächst eine T-fürmige Durchbohrung, so dass die Querdurchbohrung der beiden Pumpenstiefel mit der in der Axe des Hahnes geführten Längsdurchbohrung, und da diese die Fortsetzung des zur Glocke führenden Kanals ist, mit diesem in Verbindung setzt. In der Stellung Fig. 173a, sie ist auf dem Hahn gewöhnlich mit 2 bezeichnet, ist also die Verbindung der innern Theile der Maschine die bisher von uns angenommene. Anders aber, wenn man den Hahn um 90° dreht, ihn in die Stellung Fig. 173 b bringt. Die Durchbohrung des Hahnes ist dann so, dass der eine Pumpenstiefel noch mit der Glocke in Verbindung steht, der andere jedoch nicht mehr. Dafür steht durch eine andere Durchbohrung des Hahnes, die in der Figur durch die punktirten Linien angedeutet ist, dieser Stiefel mit dem ersten Stiefel in Verbindung. Geht nun der Kolben in dem ersten Stiefel in die Höhe, so tritt die Luft aus dem Recipienten in ihn hinein; geht er herab und der Kolben des zweiten Stiefels in die Höhe, so pumpt der letztere nicht Luft aus dem Recipienten, sondern die Luft aus dem ersten Stiefel in diesen. Dadurch wird also die Luft aus dem schädlichen Raume des mit dem Recipienten in Verbindung stehenden Stiefels ausgepumpt, und man kann die Verdünnung viel weiter treiben als vorher, so weit, dass die zurückbleibende Luft nur weniger als 1<sup>mm</sup> Druck auszuüben im Stande ist.

**Hahn zum Wiedereinlassen der Luft.** Ist unter der Glocke der Luftpumpe der verdünnte Raum hergestellt, so wird dieselbe durch den Druck der äussern Luft so festgehalten, dass es nicht möglich ist, sie aufzuheben. Es ist deshalb nöthig, eine Vorrichtung anzubringen, um die Luft in dieselbe wieder einlassen zu können. Dazu dient der unter dem Teller (Fig. 170) angebrachte Hahn. Derselbe hat ebenfalls mehrfache Durchbohrungen, um den Teller der Luftpumpe vollständig absperrern zu können, zugleich aber in die Pumpe Luft einlassen zu können.

Zunächst ist er quer durchbohrt und setzt in der

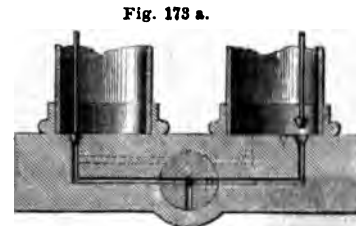


Fig. 173 a.

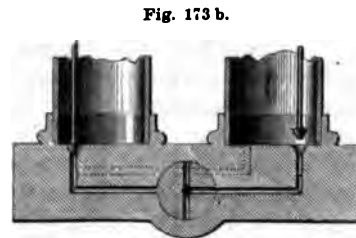
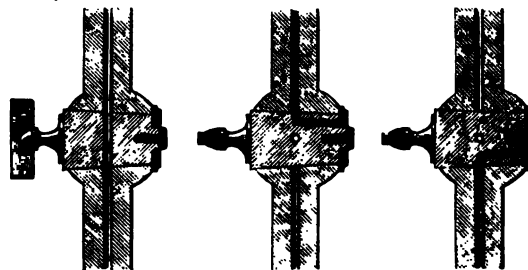


Fig. 173 b.

Fig. 174.

Fig. 175.

Fig. 176.

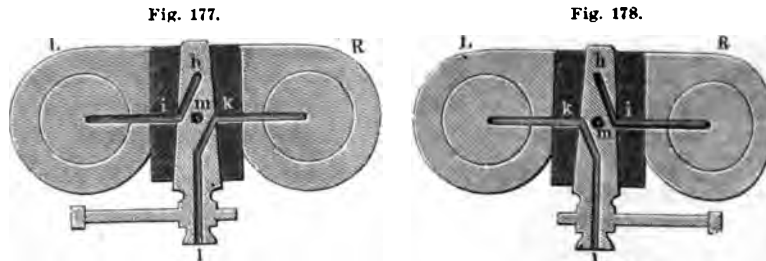


Stellung (Fig. 174) die Glocke mit der Pumpe in Verbindung. Aus dieser Durchbohrung hat er noch eine zweite (Fig. 175), welche im Innern des Kanales rechtwinklig umbiegt, und die in einem zu dem in Fig. 174 gezeichneten senkrechten Durchschnitt liegt. Dieser Kanal mündet in der äussern Luft und kann durch einen Stift luftdicht geschlossen werden, da in der Stellung Fig. 174 keine Luft durch diesen Kanal eintreten kann. In der Stellung Fig. 175 setzt der Hahn die Glocke der Luftpumpe mit der äussern Luft in Verbindung; er dient also zum Einlassen der Luft in die Glocke. In der Stellung Fig. 176, in welcher der Hahn gegen 175 um 180° gedreht ist, ist die Glocke, der Recipient, sowohl von der äussern Luft als von der Pumpe abgesperrt, dagegen communicirt jetzt die Pumpe mit der äussern Luft.

Auf dem Griffe des Hahnes sind die Stellungen gezeichnet, auf der einen Seite steht *R* und auf der andern *F*. In Fig. 175 ist der Buchstabe *R* (*rentrée*) oben, die Luft kann in die Glocke zurücktreten; in Fig. 176 ist *F* (*fermée*) oben, die Glocke ist abgesperrt.

Anstatt der zweistiefligen Ventilluftpumpen werden auch vielfach zweistieflige Hahnluftpumpen angewandt, besonders ausgezeichnet sind die von dem Berliner Mechaniker Schulze und Kleiner. Die Verbindung des Tellers mit den Pumpenstiefeln ist dieselbe wie bei den Ventilluftpumpen, die wir vorher beschrieben haben; die Kolben in diesen Pumpen sind ganz massiv und der wesentlichste Unterschied zwischen diesen und den Ventilluftpumpen besteht in der Einrichtung des Hahnes, der an der Stelle des Babinet'schen Hahnes angebracht ist, um beim Aufsteigen des Kolbens den Pumpenstiefel mit dem Recipienten, beim Niedergange aber mit der äussern Luft in Verbindung zu setzen, des nach seinem Erfinder benannten Grassman'schen Hahnes.

Die Einrichtung dieses Hahnes und seine Verbindung mit der Pumpe zeigen Fig. 177 und 178. Von dem Boden der beiden Stiefel *L* und



führt, gerade wie bei der Ventillpumpe eine Durchbohrung zu dem mittleren Kanal, der den Hahn in sich aufnimmt.

An der Stelle, wo das von dem Teller der Pumpe herkommende Rohr in den Kanal mündet, ist der Hahn quer ganz durchbohrt, bei *h*; von der Mitte dieser Querdurchbohrung geht durch den Hahn schräg hindurch ein Kanal *h i*, der in der Lage Fig. 177 dort aus dem Hahn hervortritt, wo die von dem Stiefel *L* herkommende Durchbohrung mündet. Eine zweite schräge Durchbohrung des Hahnes *k l*, welche in dem Griffe des Hahnes

in die äussere Luft mündet, verbindet dann den von dem Stiefel *R* herkommenden Kanal mit der äussern Luft.

Zieht man nun den Kolben *L* in die Höhe, wobei gleichzeitig der Kolben *R* hinabgedrückt wird, so tritt in *L* die Luft aus dem Recipienten, während aus *R* durch *kl* die Luft herausgedrückt wird. Dreht man jetzt den Hahn um  $180^\circ$  in die Lage Fig. 178, so ist durch den Kanal *hi* die Verbindung des Stiefels *R* mit dem Recipienten, durch *kl* die des Stiefels *L* mit der äussern Luft hergestellt.

Um schliesslich den Hahn auch als Babinet'schen zum Auspumpen des einen Stiefels durch den andern gebrauchen zu können, hat man den Hahn nur aus den oben angedeuteten Stellungen um  $90^\circ$  zu drehen, die dritte Durchbohrung *m*, welche einfach quer durch den Hahn geht, verbindet dann die beiden Stiefel mit einander, während weder eine Verbindung mit dem Recipienten noch mit der äussern Luft vorhanden ist.

Bei den Hahnluftpumpen muss man allerdings nach jedem Kolbenhube den Hahn umlegen, also eine Operation mehr vornehmen als bei der Ventilpumpe, da man indess jetzt Stiefel von bedeutender Grösse nimmt, ist dieser Uebelstand nicht sehr gross. Die Hahnluftpumpen haben dagegen den Vorzug der einfachern Construction und gestatten deswegen im allgemeinen die Verdünnung weiter zu treiben, als die Ventillpumpen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man statt der zweistiefligen auch doppelwirkende einstieflige sowohl Hahn- als Ventillpumpen construirt hat, bei welchen der Stiefel beim Aufsteigen des Kolbens unten, beim Niedergange oben mit dem Recipienten in Verbindung steht. Bei diesen Pumpen wird gleichzeitig das Auf- und Niedergehen des Kolbens durch die continuirliche Rotation eines Rades erzeugt, durch einen Mechanismus, der demjenigen ganz ähnlich ist, den wir später bei dem Natterer'schen Apparat beschreiben werden. Vortreffliche Pumpen dieser Art construiren Staudinger in Giessen, Schulze in Berlin und Bianchi in Paris.

Eine eigenthümliche doppelwirkende einstieflige Ventilluftpumpe hat vor kurzem Deleuil construirt<sup>1)</sup>, welche sich von den eben erwähnten dadurch unterscheidet, dass der Kolben nicht dicht an dem Stiefel anliegt, sondern dass zwischen ihm und der Stiefelwandung ein Zwischenraum von etwa  $\frac{1}{20}$  mm ist, es sind die sogenannten Pumpen à piston libre. In dem capillaren Zwischenraum zwischen Kolben und Stiefel circulirt die Luft nur sehr langsam; indem man nun den Kolben recht lang nimmt, gleich dem doppelten Durchmesser des Stiefels, und da auf dem grössten Theile des Weges, den der Kolben zurücklegt, die Luft an beiden Seiten desselben nur eine wenig verschiedene Dichtigkeit hat, kann man trotz des nicht dichten Anliegens des Kolbens verdünnte Räume herstellen, in denen die Luft nur etwa mehr  $10^{\text{mm}}$  Quecksilberdruck hat. Die Maschine geht, da der Kolben nicht reibt, leichter wie die andern Pumpen, sie hat zugleich den Vorzug, dass der Kolben nicht gefettet wird.

### §. 102.

**Fall der Körper im luftleeren Raum.** In §. 88 erwähnten wir bereits, dass wegen des Daseins der Luft nicht alle Körper gleich schnell

<sup>1)</sup> Deleuil, Comptes Rendus. T. LX. p. 571. Repertorium für physikalische Technik von Carl. Bd. I.

fallen, dass wir aber die im ersten Kapitel des ersten Abschnitts behandelte Proportionalität von Gewicht und Anziehungskraft, und so

Fig. 179.



Satz, dass alle Körper gleich schnell fallen, selbst der leichtesten Körper mit der Luftpumpe nachzuweisen könnten. Zu dem Ende wendet man eine Röhre an, die an der einen Seite in eine Metallfassung eingeklemmt ist, die in eine mit einem Hahn versehene Röhre mündet, welche in einer auf das Schraubengewinde der Luftpumpe passende Schraubenmutter endigt. Das andere Ende der Röhre ist durch eine Metallfassung luftdicht geschlossen.

In diese Röhre bringt man ein Schrotkorn und ein Stückchen Feder, oder ein Stückchen Platin und ein Stückchen Papier, und schraubt sie auf die Luftpumpe und macht sie so luftdicht wie möglich. Darauf schliesst man den Hahn, schraubt die Röhre wieder ab und kehrt sie um. Die in der Röhre enthaltenen Körper fallen dann herab, und man sieht, wie die Feder, das Platin, das Stück Papier unten ankommt als das Schrotkorn, das Stückchen Papier ebenso rasch fällt als das Platin.

Lässt man dann durch theilweises Oeffnen des Hahns allmählig wieder Luft in die Röhre eintreten, so sieht man, wie beim Fallen die leichteren Körper immer mehr zurückbleiben, je dichter die Luft wird; ein Beweis, dass die Geschwindigkeit des Falles dieser Körper nicht von dem störenden Einflusse der Luft ist.

Eine Reihe von Versuchen, welche gewöhnlich durch die Luftpumpe angestellt werden, um die Existenz des Luftdruckes nachzuweisen, als das Zersprengen einer über einen Magdeburger Halbkugeln u. s. f., genügt es, hier zu erwähnen, sie haben viel von ihrem Interesse verloren, sie früher darboten, als sie dazu dienten, den grossen Luftdruck nachzuweisen und beizutragen, das Phantom des Hori zu verbannen.

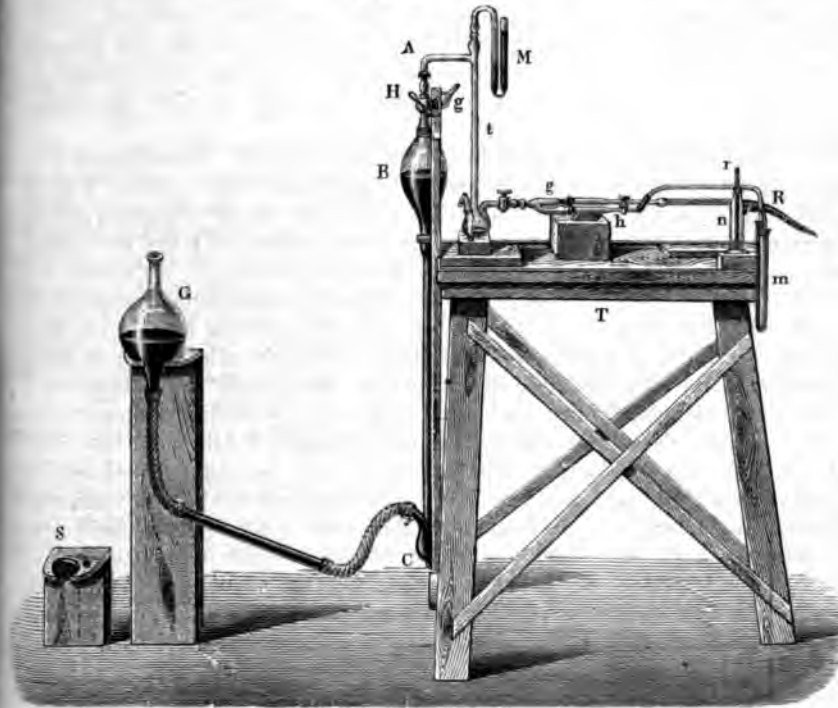
### §. 103.

**Quecksilberluftpumpen.** Eine von den bisher besprochenen verschiedenen Formen der Luftpumpen ist die zuerst von Dr. Geissler in Bonn construirte Quecksilberluftpumpe<sup>1)</sup>. Bei dieser wird die Pumpe durch eine barometerartige Vorrichtung, in welcher durch Heben und Senken von Quecksilber die Toricelli'sche Leere hergestellt wird, dann diejenigen Apparate verbunden werden, aus welchen die

<sup>1)</sup> *Poggendorff* weist zwar nach (*Poggend. Annual*, Bd. CXXV), dass die Quecksilberpumpe sehr alt, ja fast ebenso alt als die der gewöhnlichen Luftpumpe ist; man wird aber trotzdem *Geissler* als den Erfinder dieser Pumpe bezeichnen müssen, da er der Erste war, der (1857) eine praktisch nutzbare Pumpe construirte.

fert werden soll. Die Einrichtung dieser Pumpe, mit einem sehr bequemen Gestell zeigt Fig. 180. An einem festen an den Tisch *T* angeschraubten Brette ist die bei *B* mit einer etwa 1,5 Liter enthaltenden birn-

Fig. 180.



birn- förmigen Erweiterung versehene oben und unten offene Glasröhre *AC* befestigt. Unten bei *C* ist die Röhre umgebogen, und auf die Umbiegung ein dicker Kautschukschlauch gezogen, der die Röhre *AC* mit dem Gefässe *G* in Verbindung setzt. In die Röhre *AC* ist bei *H* ein Glashahn eingesetzt, der in ganz ähnlicher Weise wie der §. 101 Fig. 174 beschriebene Hahn zum Einlassen der Luft in die Pumpe durchbohrt ist. Die eine nach aussen gehende Durchbohrung mündet in das kleine an den Hahn angeschmolzene Glasgefäss *g*, die andere Durchbohrung geht quer durch den Hahn. Die Röhre *AC* ist oben konisch ausgeschliffen, und in dieses Ende ist das Ende des T-förmigen Rohres *t* luftdicht eingeschliffen. Dieses T-förmige Rohr trägt einerseits das Manometer *M*, welches luftdicht in das obere Ende des Rohres *t* eingeschliffen ist, andererseits mündet das Rohr *t* in ein kleines mit wasserfreier Phosphorsäure halb gefülltes Gefäss, von dem aus das gabelförmige Glasrohr *g* einerseits zu den Apparaten führt, welche luftleer gepumpt werden sollen, andererseits durch das U-förmig gebogene Rohr *m* und die doppelhalsige Flasche *n* in die freie Luft führt. Letztere Verbindung dient dazu, nach dem Auspumpen wieder Luft einzulassen, und zu dem Ende ist in dieselbe ein einfach durchbohrter Glashahn *h* eingesetzt.

der, so lange die Pumpe luftleer sein soll, geschlossen bleibt. Die Röhre und die Flasche  $n$  sollen die in die Pumpe eintretende Luft vollkommen austrocknen. Die Flasche  $n$  ist zu dem Ende einige Centimeter hoch concentrirter Schwefelsäure gefüllt, so dass das in den Hals der Flasche luftdicht eingesetzte an beiden Enden offene Rohr  $r$ , durch welches die Luft in den Apparat eindringen kann, unter der Schwefelsäure mündet. Alle in den Apparat eintretende Luft muss deshalb zunächst durch diese Schwefelsäure, dann durch das mit Chlorcalcium oder mit in Schwefelsäure getauchten Bimsteinstücken gefüllte Rohr  $m$ , und wird so aller Feuchtigkeit beraubt.

Um die Pumpe zu gebrauchen, wird das Gefäss  $G$ , dessen Inhalt etw. grösser ist als derjenige des Rohres  $AC$ , mit Quecksilber gefüllt. Wird der Hahn  $H$  dann so gestellt, dass das Rohr  $BC$  durch denselben mit der äussern Luft communicirt, so steigt das Quecksilber im Rohr  $BC$  zunächst bis zur Höhe des Niveaus im Gefässe  $G$ . Man hebt dann das Gefäss  $G$  hoch, dass das Niveau des in ihm vorhandenen Quecksilbers etwas höher steht als der Hahn  $H$ , das Quecksilber steigt dann in  $BC$  bis zur selben Höhe, vertreibt alle Luft aus demselben und dringt schliesslich in kleinen Tropfen durch den Hahn in die Kugel  $g$ . Man dreht dann den Hahn um einen kleinen Winkel und senkt dann  $G$  bis zu dem Schemel  $S$ , welchen man dasselbe aufsetzt. Da der Schemel  $S$  um mehr als 760 Linien tiefer steht als die birnförmige Erweiterung  $B$ , so sinkt das Quecksilber unter dieselbe hinab, und stellt in demselben ebenso einen vollkommen leeren Raum her, wie ein solcher im Barometer über dem Quecksilber sich befindet. Dreht man dann den Hahn  $H$  so, dass der Raum des Rohres  $AC$  und durch dasselbe die auszupumpenden Gefässe mit diesem leeren Raum in Verbindung gesetzt werden, so tritt aus jenen die Luft in diesen hinein. Man dreht dann den Hahn wieder zurück, so dass  $BC$  mit der äussern Luft communicirt, und wiederholt die Operationen in der angegebenen Weise.

Wegen des grossen Gewichtes des zu hebenden Quecksilbers kann eine solche Luftpumpe immer nur in kleinen Dimensionen ausgeführt werden, kaum in grössern, als sie vorhin angegeben wurden; deshalb ist die Pumpe nur geeignet, um kleinere Apparate auszupumpen. Bei diesen gestattet man aber, da in der Pumpe kein schädlicher Raum ist, und da die Glasverbindungen weit dichter hergestellt werden können, ein weit vollkommenes Vacuum herzustellen als die gewöhnlichen Luftpumpen. Wir werden die Wirksamkeit der Pumpe näher kennen lernen, wenn wir in der Elektricitätslehre die Herstellung der Geissler'schen Röhren besprechen.

Um das immerhin lästige Heben und Senken des Gefässes  $G$  bequem zu machen hat Jolly<sup>1)</sup> eine Pumpe construirt, bei welcher das Gefäss  $G$  auf einem Tische steht, welcher durch eine Kurbel und ein Zahnrad gehoben und gesenkt werden kann. Ausserdem hat Jolly die Glashähne durch Hähne von Gussstahl ersetzt, welche ebenso dicht halten als Glashähne.

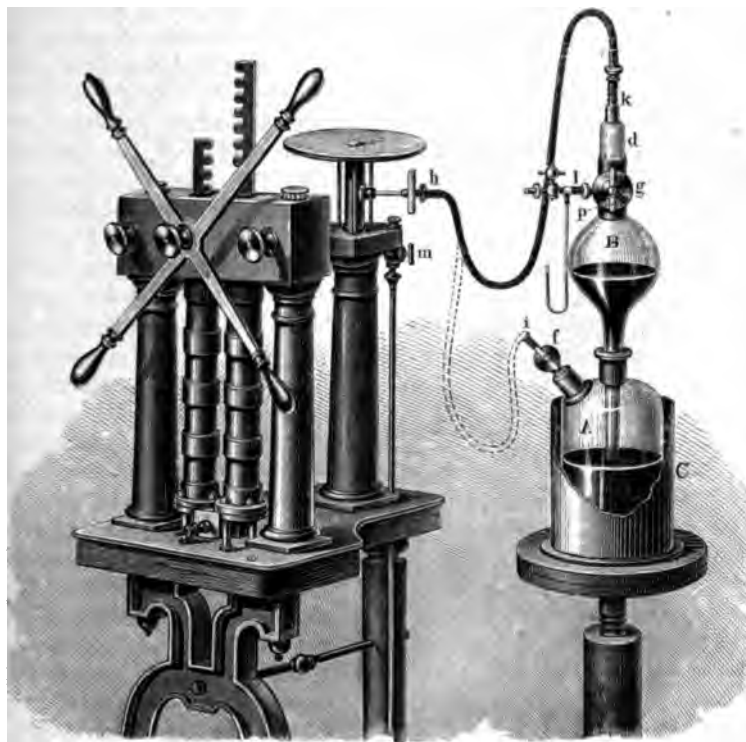
Poggendorff<sup>2)</sup> hat die Geissler'sche Pumpe mit der gewöhnlichen Pumpe

<sup>1)</sup> Jolly, Repertorium für physikalische Technik von Dr. Ph. Carl. Bd. München 1866.

<sup>2)</sup> Poggendorff, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

verbunden, um des Hebens des Quecksilbers ganz überhoben zu sein. Die Poggendorffsche Einrichtung zeigt Fig. 181. In den obern Hals der doppelt tubulirten grossen mit Quecksilber gefüllten Flasche *A*, welche in dem Holzgefässe *C* steht, ist der lange untere Hals des eiförmigen Gefässes *B*, welcher

Fig. 181.



bis fast auf den Boden von *A* reicht, luftdicht eingeschliffen. Der zweite Tubulus der Flasche *A* kann durch einen einfach durchbohrten Hahn *f* entweder luftdicht geschlossen, oder mittels eines auf die Dille *i* aufgesetzten ersten Schlauches mit der Luftpumpe verbunden werden.

Der obere kurze Hals des Gefässes *B* ist mit einer Fassung versehen, deren durch den Hahn *g* verschliessbare Durchbohrung zu dem luftdicht in die Fassung gekitteten Gläschen *d* führt, welches auf seinem Halse die aufgekittete eiserne Dille *k* trägt. Der Hahn *g* ist doppelt durchbohrt; steht der Griff, wie in der Zeichnung, vertical, so setzt er einfach das Gläschen *d* mit dem Gefäss *B* in Verbindung; wird er um  $45^\circ$  gedreht, so sperrt er *B* von *g* ab, wird er um  $90^\circ$  gedreht, so dass der Griff horizontal ist, so verbindet er das Gefäss *B* mit dem Seitenkanal *l*, an dem die Gegenstände befestigt werden, welche mit der Pumpe evacuirt werden sollen.

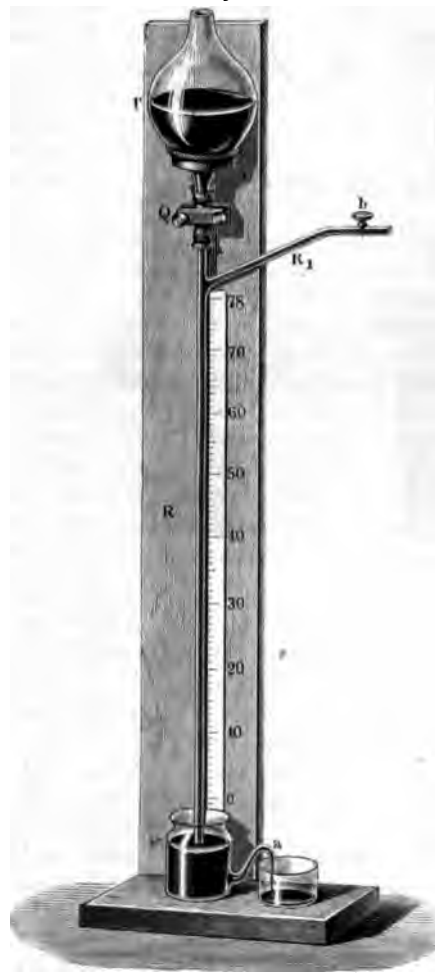
Um mit dieser Pumpe zu arbeiten, wird zunächst das Ende *k* mit der Luftpumpe verbunden, der Hahn *f* geöffnet und *g* so gestellt, dass *d* mit *B* communicirt; durch einige Kolbenhübe der Luftpumpe steigt dann das Queck-



silber bis in das Fläschchen *d*. Dann wird der Hahn *g* geschlossen anstatt der Dille *k* die mit *i* bezeichnete mit der Luftpumpe verbunden durch einige Kolbenzüge die Luft in *A* so weit verdünnt, dass das Quecksilber bis in den Hals des Gefäßes *B* hinabsinkt. Auf diese Weise ist in *B* ebenso die Barometerleere, wie in der Pumpe von Geissler durch Senken des Quecksilbergefäßes. Verbindet man dann durch Drehen des Hahnes *g* die zu evacuierenden Gegenstände mit *B*, so strömt aus dem die Luft in den leeren Raum. Das weitere Auspumpen geschieht durch Wiederholung derselben Operationen.

Die Poggendorfsche Vorrichtung unterscheidet sich, wie man von der Geissler'schen Pumpe durchaus nicht, und auch die Queck-

Fig. 182.



menge, welche zu derselben braucht wird, ist bei gleicher Capacität des Gefäßes *B* dieselbe, sie vermeidet nur das Senken des Quecksilbers Anwendung der Luftpumpe.

Eine auf einem ganz andern Prinzip beruhende Quecksilberpumpe ist die von Sprengel gebene<sup>1)</sup>; dieselbe beruht auf §. 83 abgeleiteten Sätzen über hydraulischen Druck.

An ein trichter- oder flaschenförmiges Gefäß *T* (Fig. 182) ist mit einem Kautschuk eine etwa 800 Millimeter dicke wandige Glasröhre von gleichem etwa 2<sup>mm</sup> grossem Durchmesser angehängt, deren offenes Ende in ein kleines seitliches Ausflussrohr *a* eines Gefäßes *F* mündet. Das Rohr *R* ist etwa 30<sup>mm</sup> und des Kautschukschlauches eine ähnliche Röhre *R*<sub>1</sub> angeschmolzen, welche man bei *h* passend einsetzt. Diese Vorrichtung führt zu den Apparaten, mittels der Pumpe luftleer gemacht werden sollen. Ueber den Kautschukschlauch ist ein Quetschrohr gelegt, durch welchen man den Schlauch schliessen kann. Die Pumpe wirken zu lassen, füllt den Trichter mit Quecksilber

<sup>1)</sup> Sprengel, Journal of Chemical Society II. Ser. vol. III. Poggendorfs Bd. CXXIX. p. 564.

net durch einen Druck auf den Quetschhahn den Kautschukschlauch und lässt das Quecksilber in einem stetigen Strahl ausfliessen. Die durch die Röhre  $R_1$  mit dem Apparat verbundenen Räume werden dann allmählig leer gepumpt, indem die Luft durch das bei  $R_1$  vorbeifallende Quecksilber mitgerissen und unten aus dem Rohre  $R$  ausgetrieben wird. Hat der Apparat die angeführten Dimensionen, so kann man ziemlich vollständige Barometerleere durch fortgesetztes Ausfliessen erhalten. Es ergibt sich das unmittelbar aus der letzten Gleichung des §. 83. Nennen wir  $h$  die Tiefe des Ansatzrohres  $R_1$  unter dem Niveau des Quecksilbers in  $T$ ,  $H$  den Abstand der untern Ausflussöffnung von demselben Niveau,  $p_0$  den Druck der Atmosphäre, der auf dem obern Niveau des Quecksilbers lastet und ebenso in der Ausflussöffnung wirkt, so ist der bei  $R_1$  vorhandene hydraulische Druck

$$p = p_0 - s(H - h).$$

Ist nun  $H - h$ , die Länge der Quecksilbersäule unterhalb  $R_1$ , gleich der Höhe des Barometers, so ist  $p = 0$ , es wird also aus den mit  $R_1$  verbundenen Räumen in die Röhre  $R$  die Luft gerade so hereingezogen wie in den leeren Raum des Barometers, und deshalb jeder mit  $R_1$  verbundene Raum durch fortgesetztes Pumpen ebenso weit entleert wie mit den andern Quecksilberluftpumpen.

Man kann natürlich die Verbindung des Fallrohrs mit dem Gefässe  $T$  anstatt durch einen Kautschukschlauch auch dadurch herstellen, dass man mit Zwischensetzung eines Glashahns dasselbe direkt an das Gefäss anschmilzt. Jedoch ist diese Befestigung nicht rathsam, da bei häufigem Gebrauche der Pumpe durch die Erschütterung in Folge der Stösse des fallenden Quecksilbers das Fallrohr Sprünge bekommt und erneuert werden muss.

Auf ganz demselben Prinzip wie die Sprengel'sche Pumpe beruht die Bunsen'sche Wasserluftpumpe, in welcher nur das Quecksilber durch Wasser ersetzt ist; bei dieser muss natürlich das Fallrohr der geringern Dichtigkeit des Wassers entsprechend länger sein; gibt man dem Fallrohr eine Länge von etwa 8 Meter, so kann man mit der Bunsen'schen Pumpe in den auszupumpenden Räumen den Druck bis auf etwa 0,25 Atmosphären vermindern.

#### §. 104.

**Die Compressionsmaschine.** Die Compressionsmaschinen haben eine derjenigen der Luftpumpe entgegengesetzte Aufgabe, sie dienen dazu, um in irgend einem Raume die Luft zu verdichten. Die Fig. 165 dargestellte Hahnluftpumpe kann ohne jede constructive Veränderung unmittelbar auch als Compressionspumpe benutzt werden. Bei der Benutzung muss nur das Spiel der Hähne umgekehrt werden. Oeffnen wir den Hahn  $l$ , wenn der Kolben zurückgezogen wird, so tritt von aussen her gerade so Luft in den Cylinder, wie bei der frühern Benutzung aus dem Recipienten, schliessen wir beim Rückgange des Kolbens den Hahn  $l$  und öffnen  $h$ , so wird die Luft in den Recipienten gepresst. Es ist klar, dass in diesem Falle der Recipient auf dem Teller der Pumpe befestigt werden muss, da die im Innern desselben verdichtete Luft sonst denselben aufhebt. Ebenso wie die einstieflige kann auch die zweistieflige Hahnluftpumpe mit dem Grassmann's-

schen Hahne unmittelbar als Compressionspumpe gebraucht werden, indem man einfach den Hahn bei dem Pumpen umgekehrt legt.

Die Ventilluftpumpen können nicht so unmittelbar als Compressionsmaschinen verwandt werden, bei ihnen müssen die Ventile sich in entgegengesetzter Richtung, also anstatt von unten nach oben, von oben nach unten öffnen. Wird dann (Fig. 166) der Kolben aufgezo- gen, so öffnet sich durch den Druck der äussern Luft das Ventil *l* des Kolbens, dagegen verschliesst sich durch den Druck der Luft im Recipienten das Ventil *h*, während vorher umgekehrt *l* durch den Druck der äussern Luft sich schloss und *h* durch den der im Recipienten enthaltenen Luft sich öffnete. Wird dann der Kolben herabgedrückt, so schliesst sich das Ventil *l*, weil jetzt der Druck im Cylinder *A* grösser wird als der der äussern Luft. Ist die Luft im Cylinder dann bei weiterm Niedergang des Kolbens stärker comprimirt als die Luft des Recipienten, so öffnet sich das Ventil *h* und die Luft wird aus dem Cylinder in den Recipienten gepresst. Durch Wiederholung der Operation kann man die Luft im Recipienten sehr weit verdichten; man gelangt aber auch hier zu einer Grenze, welche man mit einer gegebenen Pumpe nicht überschreiten kann.

Wegen der nicht vollkommenen Dichtigkeit des Apparates wird von einem gewissen Augenblicke an aus demselben ebensoviel Luft entweichen, als beim Aufziehen des Kolbens geschöpft wird. Wegen des Vorhandenseins des schädlichen Raumes wird man ferner bei sehr grosser Verdichtung der Luft im Recipienten dahin gelangen, dass selbst in der tiefsten Stellung des Kolbens die Luft im Cylinder nicht dichter ist als die im Recipienten angesammelte Luft, dann wird sich das Ventil *h* nicht mehr öffnen können, da dann der von innen aus auf dasselbe ausgeübte Druck gleich ist dem vom Cylinder her wirkenden. Ferner mit der Dichtigkeit der abgesperrten Luft nimmt der von unten her auf den Kolben wirkende Druck sehr rasch zu, und bald wird man dahin gelangen, dass, wenn nicht der Querschnitt des Kolbens sehr klein ist, man denselben nicht mehr ganz herabdrücken kann.

Man hat nun auch Compressionspumpen mit zwei Stiefeln construirt, welche äusserlich gerade so eingerichtet sind, als die bisher beschriebenen zweistiefeligen Luftpumpen, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Ventile sich alle in entgegengesetzter Richtung öffnen und schliessen. Indess haben sich dieselben nicht bewährt und man findet sie daher äusserst selten ausgeführt.

Die am häufigsten zur Anwendung kommenden Compressionspumpen sind einfache Röhren von starkem Eisen oder Messing, in denen ein massiver Kolben auf- und abgeht. Dieselben werden an das mit dem entsprechenden Verschlusse versehene Gefäss, welches die verdichtete Luft aufnehmen soll, angeschraubt. Zum Schöpfen der Luft dient dann ein Loch in der Röhre, welches nahe an dem andern Ende der Röhre sich befindet, so dass der Kolben in seiner äussersten Stellung sich über demselben befindet, die Luft also frei in den innern Raum des Cylinders unter dem Kolben eintreten kann. Derart sind z. B. die kleinen Compressionspumpen, deren man sich bedient, um die Luft in dem Kolben der Windbüchse zu comprimiren.

Eine etwas andere Einrichtung der Compressionspumpe zeigt Fig. 183 und Fig. 184. Sie dient zugleich, um andere Gase als atmosphärische Luft in einem Raume zu verdichten.

Fig. 183.

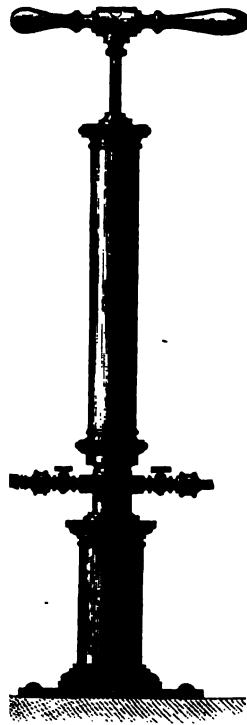
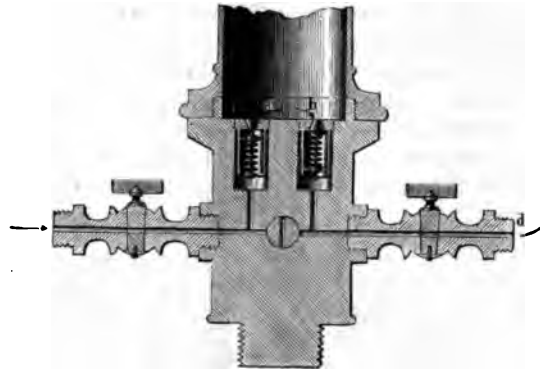


Fig. 184.

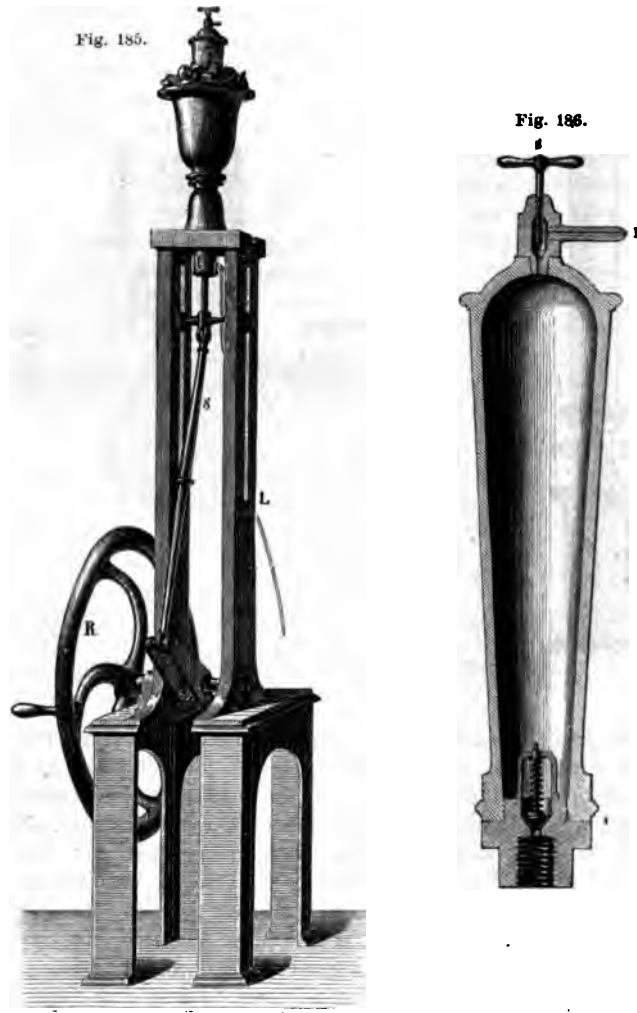


Die Pumpe ist einstieflig; sie wird auf den Boden fest aufgeschraubt. In der Stange des ganz massiven Kolbens befindet sich oben ein Handgriff, den man mit beiden Händen fasst, und an dem man den Kolben abwechselnd auf und nieder bewegt. In dem Boden der Pumpe sind zwei Ventile *a* und *b*, deren eines sich von unten nach oben öffnet und den Pumpenkörper mit der freien Luft oder mit dem Gefässe in Verbindung setzt, in welchem das zu verdichtende Gas angesammelt ist; es öffnet sich, wenn man den Kolben in die Höhe zieht. Das andere Ventil *b* öffnet sich in entgegengesetzter Richtung, wenn der Kolben niedergeht. Dieses setzt den Körper der Pumpe durch die Röhrenleitung *bd* mit dem Raume in Verbindung, in welchem das Gas comprimirt werden soll.

Man sieht, dass dieser Apparat zugleich als Luftpumpe und auch als Compressionspumpe dienen kann. Bringt man die mit dem Ventil *a* in Verbindung stehende Röhre mit einem Recipienten in Verbindung und lässt die Röhrenleitung *bd* mit der äussern Luft communiciren, so dient der Apparat als Luftpumpe, macht man die Verbindungen umgekehrt, als Compressionsmaschine.

Eine Compressionspumpe, welche sehr starke Verdichtungen herbringen im Stande ist, bietet der Apparat von Natterer. Er dient vornehmlich dazu, um Gase in den flüssigen Zustand zu versetzen.

Der Natterer'sche Apparat (Fig. 185) besteht im wesentlichen aus einem dickwandigen Rohr *l* von sehr kleinem innern Durchmesser, in we-



sich ein massiver Kolben auf und ab bewegt. Zur Sicherung der vertikalen Bewegung des Kolbens ist derselbe durch einen Ring geführt. Unter demselben ist mit dem Kolben durch ein Scharnier die Schubstange verbunden, die ihre auf und nieder gehende Bewegung durch das Schwungrad *R* bekommt, an dessen Axe sie mittels einer Kurbel excentrisch festigt ist.

Der Pumpencylinder ist durch eine Röhrenleitung *L* mit einem Gasometer in Verbindung, aus welchem beim Niedergange des Kolbens das Gas in den Pumpencylinder eingesaugt wird.

Auf den Pumpencylinder ist eine starke Flasche von Schmiedeeisen (Fig. 186) befestigt, in welche das Gas hineingepresst wird. Dieselbe ist vorher auf ihre Festigkeit geprüft, indem man mittels Wasser auf die Innenfläche derselben einen Druck von 150 Atmosphären ausübt. Das sich nach dem Innern der Flasche zu öffnende Ventil *l* (Fig. 186) lässt das Gas eintreten. Um das verdichtete Gas oder das flüssig gewordene austreten zu lassen, ist an dem obern Ende der Flasche eine kleine Oeffnung, welche in dem Röhren *r* mündet, angebracht. Dieselbe wird verschlossen durch den mit einem Schraubengewinde versehenen Stift *s*, der konisch in den engen Hals der Flasche eingeschliffen ist. Will man das flüssige Gas austreten lassen, so schraubt man die Flasche ab, kehrt sie um, so dass die Oeffnung *r* unten ist, und öffnet dieselbe durch Drehen der Schraube *s*. Der Druck des über dem flüssigen stark verdichteten Gases treibt dann die Flüssigkeit heraus. Ausser diesen Compressionspumpen kann man auch den Oersted'schen Apparat zur Compression der Gase benutzen, wie es Despretz that. (§. 97.)

Vielfach dient auch folgendes Verfahren dazu, um ganz ohne mechanische Mittel ein Gas zu comprimiren. Man schliesst in eine heberförmig gebogene Röhre von starkem Glase die Substanzen, durch deren Einwirkung auf einander das Gas entwickelt wird. Durch die Entwicklung des Gases in diesem geschlossenen Raume und die Ansammlung desselben wird der Druck des Gases in der Röhre ein ganz enormer und es bedarf grosser Vorsicht, damit der Apparat nicht springt. Einen nach diesem Principe construirten Apparat wandte Thilorier an, um flüssige Kohlensäure in grossen Mengen herzustellen<sup>1)</sup>.

Fig. 187.



## §. 105.

**Flüssigmachen der Gase.** Im §. 97 haben wir das Verhalten der sogenannten permanenten Gase, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd unter hohen mit der Compressionsmaschine herstellbaren Drucken besprochen, und gesehen, dass dieselben von gewissen schon ziemlich starken Drucken an sehr viel weniger zusammengedrückt werden, als es das Mariotte'sche Gesetz verlangt, wenn man die Compression bei gewöhnlicher Temperatur oder auch bei derjenigen des schmelzenden Eises vornimmt.

Unter denselben Umständen verhalten sich die übrigen Gase ganz anders; bei diesen zeigt sich vielmehr, dass mit steigendem Drucke die Compressibilität stetig wächst bis zu einem gewissen für die verschiedenen Gase verschiedenen Drucke. Ist dieser Druck erreicht, so kann man das Volumen des Gases beliebig, bis zu einer bestimmten Grenze, weiter vermindern, ohne dass die Spannung des Gases zunimmt, ohne dass man also den äussern

<sup>1)</sup> Thilorier, Annales de chim. et de phys. T. LX. 1835.

Druck vermehren muss. Bei diesem Drucke ändert nämlich das Gas seinen Aggregatzustand, es hört auf Gas zu sein, es wird tropfbar flüssig, jede Volumverminderung, welche nach Erreichung jenes Grenzdruckes dem Gase zu Theil wird, führt die dem verminderten Volumen entsprechende Gasmenge in die flüssige Form über.

Diese Zustandsänderung geht plötzlich vor sich, sie bereitet sich aber durch stetiges Wachsen der Compressibilität vor. Daraus ergibt sich schon, dass man die vier genannten permanenten Gase durch Vermehrung des Druckes nicht flüssig machen kann. Es würde, nach der schon §. 97 gemachten Bemerkung über den Einfluss der Temperatur auf die Compressibilität der Gase, indess voreilig sein, daraus zu schliessen, dass dies ein in der Natur der Gase begründeter wesentlicher Unterschied zwischen den permanenten und nicht permanenten Gasen wäre. Es ist im Gegentheil höchst wahrscheinlich, dass die Fähigkeit flüssig zu werden wesentlich von der Temperatur abhängt, bei der man das Gas comprimirt.

Eben wegen des Einflusses, den der Wärmezustand des Gases auf dieses Verhalten hat, wollen wir die Frage nach der Condensation der Gase in die Wärmelehre verweisen. Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben, welche Gase man bei gewöhnlicher Temperatur flüssig machen kann, und welche Drucke dazu erfordert werden<sup>1)</sup>.

Bei nicht viel von der des schmelzenden Eises verschiedenen Temperaturen werden flüssig:

Namen der Gase	Druck, unter welchem sie flüssig werden
Schweflige Säure . . . . .	1,5 Atmosphären.
Cyan . . . . .	2,4 „
Ammoniak . . . . .	4,4 „
Arsenwasserstoff . . . . .	8,6 „
Schwefelwasserstoff . . . . .	9,9 „
Chlorwasserstoff . . . . .	25,3 „
Stickstoffoxydul . . . . .	31,1 „
Kohlensäure . . . . .	37,2 „
Oelbildendes Gas . . . . .	42,5 „

Alle diese Flüssigkeiten besitzen sehr merkwürdige Eigenschaften, welche wir in der Wärmelehre weiter betrachten werden. Es sind im allgemeinen sehr flüssige, ungefärbte Flüssigkeiten, welche sich in Wasser nicht, in Alkohol und Aether aber sehr gut lösen.

#### §. 106.

##### Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern.

Wenn man in einen mit Gas erfüllten Raum einen festen Körper bringt, so zieht derselbe die ihm zunächst umgebenden Gasmoleküle an, und die Folge davon ist eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des festen Körpers. Je grösser nun die Oberfläche des festen Körpers ist, an um so mehr Punkten ist er mit dem Gase in Berührung, um so mehr Punkte desselben ziehen

<sup>1)</sup> Faraday, Philos. Transactions of London. R. S. for the year 1845; auch Poggend. Ann. Ergänzungsband II.

daher dann Gastheile an sich, um so mehr Gas wird an der Oberfläche des Körpers verdichtet werden. Man kann diese Thatsache leicht durch den Versuch beweisen. Füllt man eine oben geschlossene und mit ihrem offenen Ende in Quecksilber tauchende Glasröhre mit Kohlensäure, und bringt dann über das Quecksilber in die Glasröhre eine frisch in Quecksilber abgelöschte Kohle von Buchsbaumholz, so sieht man, wie sich sofort das Volumen des Gases vermindert, indem das Quecksilber in die Glasröhre aufsteigt. So wie die Kohle Kohlensäure, so absorbirt sie sowohl als auch andere Körper andere Gase.

Die ausgedehntesten Versuche über die Absorption der Gase durch feste Körper rühren von Theodor von Saussure her<sup>1)</sup>.

Zunächst wies derselbe nach, dass nur geglühte und frisch abgelöschte Körper zu den Absorptionsversuchen brauchbar sind. Der Grund dafür liegt darin, dass Körper, die längere Zeit an der Luft gelegen haben, bereits atmosphärische Luft und Wasserdampf an ihrer Oberfläche verdichtet haben. Die ausgeglühten Körper brachte Saussure unter eine Glocke, in welcher über Quecksilber ein gemessenes Gasvolum aufgefangen war, und maass die eintretende Volumänderung. Er fand dann, dass ein und derselbe Körper verschiedene Gase und verschiedene Körper dasselbe Gas in verschiedener Menge absorbirten. So erhielt er z. B. für Buchsbaumkohle und Meerschaum von Valecas folgende Zahlen, welche angeben, wieviel mal ihr eigenes Volum Gas unter dem darunter angeführten Drucke die Körper absorbiren.

	Kohle	Meerschaum
Ammoniak . . . . .	90	15
Chlorwasserstoff . . . . .	85	—
Schweflige Säure . . . . .	65	—
Schwefelwasserstoff . . . . .	55	11,7
Stickstoffoxydul . . . . .	40	3,75
Kohlensäure . . . . .	35	5,26
Elayl . . . . .	35	3,7
Kohlenoxyd . . . . .	9,42	1,17
Sauerstoff . . . . .	9,25	1,49
Stickstoff . . . . .	7,5	1,60
Wasserstoff . . . . .	1,75	0,44
	Druck $p = 724^{\text{mm}}$	$730^{\text{mm}}$

Die Dauer des Versuches war 24—36 Stunden, nach denen keine Aenderung des Volumens mehr eintrat; nur bei dem Sauerstoff dauert die Absorption mehrere Jahre.

Man sieht, dass im allgemeinen die absorbirten Gasmengen bei den verschiedenen Körpern in derselben Reihe folgen, und dass die Gase, welche man durch Druck flüssig machen kann, in weit höherm Maasse absorbirt werden als die permanenten Gase. Das spricht auf das entschiedenste für die Annahme, dass wir es hier nur mit einer Molekularanziehung der Moleküle des festen Körpers auf die ihn zunächst berührende Gasschicht zu thun haben. Dabei ist es jedoch möglich, wie aus der nicht vollständigen

<sup>1)</sup> Saussure, Gilbert's Annalen Band XLVII.



Uebereinstimmung der beiden Reihen zu schliessen ist, dass auch chemische Einflüsse mit wirksam sind.

Feuchte Kohle absorbiert weniger Gas als trockne; so fand Saussure für Buchsbaumkohle

	trocken	feucht
Kohlensäure . . . . .	33	17
Stickstoff . . . . .	7,5	6,5
Sauerstoff . . . . .	9,25	3,25.

Auch über die Gasmenge, welche von den festen Körpern unter verschiedenen Drucken absorbiert wird, hat Saussure Versuche angestellt, indess haben dieselben nichts gesetzmässiges ergeben. Bei gemindertem Drucke vermindert sich das Volum des absorbierten Gases.

Ebenso wie Kohle zeigen alle Körper, wenn sie nur eine hinreichende Oberfläche besitzen, die Fähigkeit, grosse Mengen Gas zu verdichten, so gepulverte Körper, Platinschwamm etc.

Auf der grossen Verdichtung des Sauerstoffes der Luft in Platinschwamm beruht die Wirkung der Döbereiner'schen Zündmaschine und überhaupt die Fähigkeit des Platins, Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser zu verbinden. Bei der Verdichtung der Gase tritt nämlich, wie bei jeder Compression, Wärmeentwicklung ein. Wird nun Platin in ein Gemisch von Sauerstoff und Wasserstoff gebracht, oder auf Platinschwamm, der mit verdichtetem Sauerstoff erfüllt ist, Wasserstoffgas geleitet, so ist die entwickelte Wärmemenge gross genug, um das Knallgas zu entzünden.

Wir werden später bei Betrachtung des Siedens nochmals Gelegenheit haben, auf die Verdichtung des Gases an der Oberfläche fester Körper zurückzukommen.

Quincke<sup>1)</sup> leitet aus einer Reihe von Erscheinungen, welche verschiedene mit solchen Atmosphären verdichteten Gases erfüllte Körper in mancherlei Beziehung zeigen, die uns grösstentheils im weitern Verlaufe unserer Aufgabe begegnen werden, den Satz her, dass die Menge des absorbierten Gases nicht nur mit der Grösse der Oberfläche, sondern auch mit der Dichtigkeit des condensirenden Körpers zunimmt; ein Satz, der allerdings aus theoretischen Gründen viel Wahrscheinlichkeit für sich hat.

### §. 107.

**Moser'sche Bilder.** Moser<sup>2)</sup> hat zuerst beobachtet, dass, wenn man mit einem Holzstäbchen über eine glatte Fläche, sei es Metall oder Glas oder irgend eine andere Substanz, hinführt und dann die Stelle behaucht, dass dann durch eine Verschiedenheit in dem Beschlagen der Fläche die Züge auf der Fläche deutlich hervortreten. Noch deutlicher zeigen sie sich, wenn man die Fläche Quecksilberdämpfen aussetzt, indem sich die Quecksilberdämpfe entweder vorzugsweise an den berührten Stellen niederschlagen oder an den nicht berührten.

Ebenso zeigte Moser, dass, wenn man auf eine beliebige Platte eines geschnittenen Stein, einen gravirten Metallstempel oder irgend einen andern

<sup>1)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CVIII.

<sup>2)</sup> Moser, Poggend. Ann. Bd. LVI und LVII.

Körper legt, nach einiger Zeit, wenn man die Platte behaucht oder sie dem Einflusse von Quecksilberdämpfen aussetzt, ein Bild des Steines oder Stempels auf der Platte sichtbar wird, indem die Dämpfe sich an den berührten Stellen mehr oder weniger niederschlagen, oder doch ein anderes Aussehen bieten, als an den nicht berührten Stellen. Selbst wenn der Stempel die Metallplatte nicht berührte, sondern durch zwei an der Seite untergelegte Glimmerblättchen in einem geringen Abstände davon gehalten wurde, trat nach dem Behauchen das Bild desselben auf der Platte hervor.

Waidele<sup>1)</sup> hat diese Bilder auf das vollständigste aus der Gasatmosphäre erklärt, welche, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, an der Oberfläche der Körper verdichtet ist, und seine Erklärung durch eine grosse Reihe von Versuchen bestätigt.

Durch das Hinüberführen eines Holzstäbchens oder das Aufsetzen eines Stempels, selbst wenn er die Platte nicht unmittelbar berührt, wird eine Aenderung in der Gasatmosphäre bewirkt, und diese Aenderung bewirkt an den verschiedenen Stellen eine verschiedene Condensation der Dämpfe.

Um dieses nachzuweisen, versah Waidele Platte oder Stempel mit Gasatmosphären, oder nahm sie ihnen und zeigte, dass er dadurch im Stande war, die Bilder willkürlich zu ändern.

Dass eine Aenderung der Gasatmosphäre eine verschiedene Condensation der Dämpfe bewirkt, wies Waidele zunächst durch folgenden Versuch nach.

Wenn man auf eine mit einer Gasatmosphäre versehene Platte einen Körper von sehr grosser Oberfläche bringt, dem durch Glühen seine Gasatmosphäre genommen ist, so muss nach dem Vorigen der Platte ihre Gasatmosphäre genommen werden. Wenn man daher eine Daguerre'sche Platte, eine mit Silber plattirte Kupferplatte, mit frisch geglühtem und dann unter Abschluss der Luft erkaltetem Trippel oder Kohlenpulver belegt, und dann das Kohlenpulver mit reiner Baumwolle abkehrt, so ist der Platte ihre Gasatmosphäre genommen. Beim Behauchen zeigt diese Platte eine bläuliche Färbung, während eine an freier Luft gelegene Platte beim Behauchen eine bräunliche Färbung zeigt.

Bringt man die Platte aber mit einem Körper in Berührung, der bei grosser Oberfläche eine dichte Gasatmosphäre besitzt, so wird die Platte an ihrer Oberfläche von dem Körper Gas aufnehmen und verdichten.

Waidele nahm nun eine Daguerre'sche Platte und belegte die eine Hälfte derselben mit frisch geglühtem und unter Abschluss der Luft in einem Platintiegel erkaltetem, die andere Hälfte mit frisch geglühtem, aber in einem Strome von Kohlensäure erkaltetem Kohlenpulver und wischte dann die Platte mit reiner Baumwolle ab. Beim Behauchen zeigte die eine Hälfte eine bläuliche, die andere eine bräunliche Färbung.

In Quecksilberdampf gebracht, condensirte sich derselbe nur auf der nicht mit Gas bedeckten Hälfte, die andere Hälfte blieb frei.

Versieht man eine Platte mit einer Atmosphäre von Kohlensäure, indem man sie mit Kohlenpulver bedeckt, welches in der angegebenen Weise präparirt war, und legt dann eine kleine flache Scheibe frisch geglühter

<sup>1)</sup> Waidele, Poggend. Ann. Bd. LIX.

Buchsbaumkohle auf dieselbe, so wird an der Stelle in sehr kurzer Zeit die Gasatmosphäre fortgenommen; behaucht man die Platte nach Entfernung der Scheibe, so zeigt sie an der Stelle, wo diese lag, eine bläuliche, im Uebrigen eine bräunliche Färbung.

Erhitzt man einen Stempel, putzt ihn mit einer durch Alkohol befeuchteten Bürste, so kann man ihn von seiner Gasatmosphäre befreien. Setzt man ihn so frisch gereinigt auf eine mit Kohlensäure überzogene Platte, so nimmt er das Gas von derselben fort. Wird die Platte nach Abheben desselben Quecksilberdämpfen ausgesetzt, verdichten sich letztere vorzugsweise an den vom Stempel berührten Stellen.

Legt man den Stempel in kohlenstoffhaltiges Kohlenpulver und setzt ihn auf eine von ihrer Gasatmosphäre befreite Platte, so nimmt die Platte von dem Stempel Kohlensäure auf. Wird die Platte nach Fortnahme des Stempels behaucht oder Quecksilberdämpfen ausgesetzt, so zeigt sich das Bild des Stempels, indem vorzugsweise an den Stellen sich der Dampf condensirt, welche mit dem Stempel nicht in Berührung waren.

Stellt man dagegen einen frisch gereinigten Stempel auf eine frisch gereinigte Platte, so zeigt sich so gut wie kein Bild, die Dämpfe werden gleichmässig condensirt. Dasselbe ist der Fall, wenn man einen mit Kohlensäure versehenen Stempel auf eine mit Kohlensäure bedeckte Platte legt.

Waidele stellte ferner einen mit Kohlensäure bedeckten Stempel nach einander auf sechs verschiedene frisch gereinigte Silberplatten. Auf der ersten und zweiten liess er ihn 30 Minuten, es zeigte sich beim Behandeln mit Quecksilberdampf ein deutliches Bild, auf die dritte und vierte Platte stellte er ihn eine Stunde, die dritte zeigte ein Bild, wenn auch schwach, die vierte beim Behauchen nur die Spur eines Bildes. Auf der fünften und sechsten Platte liess er den Stempel zwei Stunden stehen; sie zeigten gar keinen Unterschied beim Behauchen, es zeigte sich gar kein Bild.

Dieser Versuch beweist auf das allerentschiedenste die Richtigkeit der Waidele'schen Erklärung, dass es eine Aenderung der Gasatmosphäre auf den Platten sei, welche die Moser'schen Bilder erzeugt. Denn bei den ersten Versuchen war der Stempel mit der dichten Atmosphäre versehen, und in der kurzen Zeit von 30 Minuten condensirte die Platte rings umher nicht viel Luft an ihrer Oberfläche, die Bilder wurden deutlich und scharf; je mehr aber die Gasatmosphäre am Stempel abnahm und die Verdichtung der Luft auf der übrigen Platte grösser wurde, um so undeutlicher wurde das Bild.

Wir sind also berechtigt, die Moser'schen Bilder als eine Folge der an einzelnen Stellen geänderten Gasatmosphäre anzusehen; denn im Allgemeinen werden die Gasatmosphären an den verschiedenen Körpern immer verschieden dicht sein, eine Berührung zweier Körper also auch an der Berührungsstelle eine Aenderung der Dichtigkeit hervorbringen.

Das wird selbst dann der Fall sein, wenn sich die Körper nicht unmittelbar berühren, da die Gasatmosphären eine gewisse Dicke haben müssen, und selbst wenn sie nicht so dick sind, dass sie in einander übergehen, doch ein Austausch zwischen denselben stattfinden muss<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CVIII.

## §. 108.

**Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten.** In gleicher Weise, wie die festen Körper die Gase anziehen und absorbiren, thun es auch die Flüssigkeiten.

Füllt man z. B. eine oben geschlossene Glasröhre, welche in Quecksilber taucht, mit Ammoniakgas, und bringt dann über das Quecksilber in die Röhre ein wenig Wasser, so steigt das Quecksilber sofort in der Röhre in die Höhe; ein Beweis, dass das Gas vom Wasser verschluckt ist.

Ein und dieselbe Flüssigkeit verschluckt von verschiedenen Gasen bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur verschiedene Mengen; verschiedene Flüssigkeiten von demselben Gase, unter sonst gleichen Umständen ebenfalls verschiedene Mengen, so dass die Menge des absorbirten Gases bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur von der Natur des Gases sowohl, als auch der absorbirenden Flüssigkeit abhängt.

Seit Priestley, der zuerst die Absorption der Gase untersuchte, indem er nachwies, dass unter gewöhnlichem Barometerdrucke ein gegebenes Volumen Wasser ein gleiches Volumen Kohlensäure absorbire, haben sich viele Physiker und Chemiker mit den Absorptionserscheinungen beschäftigt, und zu bestimmen gesucht, welche Gasmengen verschiedene Flüssigkeiten aufzunehmen im Stande sind, und wie die aufgenommene Menge desselben Gases bei gleicher Flüssigkeit sich mit dem äussern Drucke, unter welchem das Gas steht, ändert.

Was die letztere Frage betrifft, so haben die Versuche von Henry<sup>1)</sup> ergeben, dass das Volumen des von einer Flüssigkeit aufgenommenen Gases stets dasselbe ist, welches auch der äussere Druck ist, unter welchem sich das Gas über dem Wasser befindet. So absorbirt ein gegebenes Wasservolumen bei gewöhnlicher Temperatur (15° C.) ein nahezu gleiches Volumen Kohlensäure, ob nun die Kohlensäure in dem Raume, in welchem die Absorption vor sich geht, unter dem Drucke von einer oder mehreren Atmosphären steht. Da nun nach dem Mariotte'schen Gesetze die Dichtigkeit eines Gases sich direkt verhält, wie der äussere Druck, so folgt daraus, dass die Gewichtsmengen des absorbirten Gases sich direkt verhalten, wie die äusseren Drucke, unter denen das Gas steht.

Kennt man darnach die Gasmenge, welche unter einem bestimmten Drucke absorbirt wird, so kann man daraus leicht für alle andern Drucke die absorbirten Gasmengen berechnen.

Bunsen<sup>2)</sup> nennt deshalb das auf 0° und den Druck von 760<sup>mm</sup> reducirte Gasvolumen, welches die Volumeinheit der Flüssigkeit unter dem Drucke von 760<sup>mm</sup> absorbirt, den Absorptionscoefficienten des Gases für die Flüssigkeit.

Diese Zahl gibt dann sogleich das Volumen an, welches unter irgend einem Drucke  $P$  absorbirt wird, und wir erhalten für die Gasmenge, welche diesem Volumen entspricht,

$$g = \frac{a \cdot P}{760},$$

<sup>1)</sup> Henry, Philos. Transact. for 1803. Part. I. p. 29. Gilbert, Ann. XX.

<sup>2)</sup> Bunsen, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857. Liebig's Annalen Bd. XCIII.

wenn wir mit  $\alpha$  den Absorptionscoefficienten bezeichnen und als Gasmenge das Volumen, welches eine gegebene Gasmenge unter dem Barometerdruck von 760<sup>mm</sup> einnimmt. Für die von dem Wasservolum  $h$  absorbirte Gasmenge erhalten wir dann

$$g = \frac{\alpha \cdot h \cdot P}{760}.$$

Kennt man nun in einem dem Eingang erwähnten ähnlichen Versuche das Volumen des in der Röhre enthaltenen Gases  $V$  und den Druck  $P$ , unter dem es steht, die Differenz zwischen der Barometerhöhe und dem Niveauunterschied des Quecksilbers in und ausser der Röhre; lässt man dann ein Flüssigkeitsvolumen  $h$  in die Röhre eintreten und bestimmt das Volum  $V'$  und den Druck  $P'$  des nach der Absorption übrigbleibenden Gasvolumens, so kann man den Absorptionscoefficienten leicht erhalten.

Die vor dem Versuche in dem Rohre enthaltene Gasmenge ist

$$\frac{V \cdot P}{760},$$

die nach dem Versuche noch vorhandene  $\frac{V' \cdot P'}{760}$ , die absorbirte also

$$\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760}.$$

Da der endliche Druck  $P'$  ist, so ist die Flüssigkeit unter diesem Drucke gesättigt. Nach dem Henry'schen Gesetze verhalten sich nun die absorbirten Gasmenngen wie die Drucke; unter dem Drucke 760<sup>mm</sup> würde demnach die absorbirte Gasmenge

$$\left( \frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760} \right) \frac{760}{P'} = \left( V \frac{P}{P'} - V' \right)$$

gewesen sein.

Diese Gasmenge würde beim Drucke 760 von der Flüssigkeitsmenge  $h$  absorbirt sein, das Flüssigkeitsvolumen 1 hätte demnach die Menge

$$\alpha = \frac{1}{h} \left( V \frac{P}{P'} - V' \right)$$

absorbirt. Diese Größe  $\alpha$  ist es nun, welche wir den Absorptionscoefficienten nannten.

Zur Bestimmung des Absorptionscoefficienten der verschiedensten Gase für mehrere Flüssigkeiten wandte Bunsen das Absorptiometer an, welchem er folgende Einrichtung gab (Fig. 188). Ein seiner ganzen Länge nach in Millimeter getheiltes kalibriertes Rohr  $c$ , welches oben geschlossen ist, ist mit seinem untern offenen Ende in eine Schraubenhülse  $b$  (Fig. 189) eingekittet, welche der Schraubenmutter des kleinen Stuhles  $aa$  entspricht. Die Bodenplatte des Stuhles  $a$  ist mit Kautschuk überzogen, so dass beim Hinabschrauben des Rohres  $c$ , dessen unterer abgeschliffener Rand gegen den Kautschuk drückt, und damit das Rohr geschlossen wird. Die zwei Federn  $c'$  am Stuhle  $aa$  (Fig. 189) passen in zwei Rinnen des Fusses  $f$  (Fig. 188) so, dass wenn man das Rohr  $c$  in den Fuss  $f$  einsetzt, der Stuhl  $aa$  nur auf und ab bewegt, nicht aber gedreht werden kann. Eine Drehung des Rohres  $c$  bewirkt deshalb ein Lösen oder fester Ziehen der

e *b* und damit eine Erhebung von der Bodenplatte und Oeffnung  
 res *e*, oder ein festes Drücken gegen dieselbe, den dichten Ver-  
 von *e*. Das Rohr *e* dient als Absorptionsrohr. Das Rohr ist seiner  
 Länge nach von dem  
 nder *gg* umhüllt. Der  
 ist mit seinen abge-  
 en Rändern, auf denen  
 ukraine liegen, in den  
 und gegen den untern  
 s eisernen Ringes *h* mit-  
 Schrauben *ii* fest an-  
 . Die Röhre *r*, welche  
 innern Raume des Cy-  
*gg* communicirt, dient  
 agiessen und Ablassen  
 cksilber, um den Druck  
 rn des Absorptionsroh-  
 guliren zu können. Der  
 Cylinder ist über dem  
 lber mit Wasser ange-  
 m das Absorptionsrohr  
 stanter Temperatur zu  
 , welche mit dem Ther-  
*r k* bestimmt wird. Der  
 Cylinder kann mittels  
 kels *p* fest verschlossen  
 in dessen Mitte eine  
 r Kautschukplatte über-  
 iserne Platte gegen den  
 s Absorptionsrohres *e*  
 um dasselbe unverän-  
 fest zu stellen.

e Versuche werden nun  
 rmaassen angestellt. In  
 uecksilberwanne lässt  
 das zunächst ganz mit  
 lber gefüllte Absorp-  
 r das zu untersuchende  
 steigen, und misst das  
*V* des Gases und den  
*p*, unter dem es steht,  
 Gasmenge (das auf  $0^0$   
 $760^{\text{mm}}$  Druck reducirte Vo-  
 erhalten. Darauf lässt  
 er das Quecksilber ein-  
 nes Volum *h* völlig luft-  
 Wassers eintreten, schliesst das Rohr mittels des Stuhles *a* und  
 in den Boden *f* des mit Quecksilber und darüber vollständig mit  
 gefüllten Cylinders *g* ein.

Fig. 188.



Durch eine kleine Drehung öffnet man dann das Absorptionsrohr, setzt dadurch den Druck im Innern desselben mit dem äussern Druck ins Gleichgewicht, verschliesst es wieder und schüttelt dann den ganzen Apparat eine Minute lang auf das heftigste, öffnet dann wieder das Absorptionsrohr, um die Drucke neuerdings auszugleichen, schliesst und schüttelt wieder und so fort, so lange bis beim Oeffnen des Absorptionsrohres keine Volumänderung des Gases mehr eintritt.

Darauf wird das Volum  $V_1$  des rückständigen Gases und sein Druck  $P_1$  bestimmt, und wir haben alle Daten zur Bestimmung des Absorptionscoefficienten  $\alpha$ .

Um  $V_1$  und  $P_1$  zu bestimmen, bedarf es ausser der Beobachtung des Barometer und Thermometer  $k$  folgender Ablesungen, die mit dem Kathetometer gemacht werden.

1. Bestimmung des Quecksilberniveau  $b$  im Absorptionsrohr.
2. Bestimmung des obern Wasserniveau im Absorptionsrohr  $c$ .
3. Bestimmung des Quecksilberniveau  $a$  (Fig. 188) und
4. Bestimmung des Wasserniveau  $d$  im äussern Cylinder  $gg$ .

Um den Gang des Versuches und der Berechnung deutlich zu machen, wird es am besten sein, einen Versuch Bunsen's vollständig vorzuführen, es ist ein Versuch über Absorption des Stickstoffes.

Um  $V$  und  $P$  zu bestimmen, dienen folgende Daten. Ehe Wasser in das Absorptionsrohr eingelassen war, fand sich:

Der Unterschied der Quecksilberniveaus im Absorptionsrohr und der Quecksilberwanne . . . . .	315 <sup>mm</sup> , <sub>1</sub>
Barometerstand . . . . .	744 , <sub>4</sub>
Druck des trocknen Stickstoffs . . . . .	$P = 429^{\text{mm}}$ , <sub>3</sub>
Volumen des Gases unter diesem Drucke . . . . .	$V = 32$ , <sub>608</sub>

Darauf wurde Wasser eingelassen und in der vorhin beschriebenen Weise operirt; es fand sich am Schlusse des Versuchs

Barometerstand . . . . .	$\delta = 743,8$
Quecksilberniveau bei $b$ . . . . .	$b = 350,7$
Quecksilberniveau bei $a$ . . . . .	$a = 352,2$
Differenz der Niveaus . . . . .	$\delta_1 = 1,5$
Höhe der Wassersäule in $c$ , $cb =$ . . . . .	$w = 285,2$
Höhe der Wassersäule im Cylinder $ad =$ . . . . .	$w_1 = 344,2$
Differenz beider, also auf das Gas in $c$ drückende Wassersäule $w_1 - w =$ . . . . .	$59,0$
Diese Differenz auf Quecksilberdruck reducirt . . . . .	$q = 4,1$

Somit ist der innere Druck des Gases im Absorptiometer stärker als der Druck der äussern Atmosphäre, da der Unterschied der Quecksilberniveaus nur 1<sup>mm</sup>,<sub>5</sub> beträgt, dagegen durch die höhere Wassersäule in  $gg$  nach dem Innern von  $c$  hin ein Druck ausgeübt wird, der gleich 4<sup>mm</sup>,<sub>4</sub> Quecksilberdruck ist. Um  $P_1$  zu erhalten, müssen wir demnach zu dem Barometerstande  $\delta$  die Differenz dieser Drucke oder 2<sup>mm</sup>,<sub>9</sub> addiren. Darnach würde

$$P_1 = 746^{\text{mm}},_8.$$

An diesem Drucke müssen wir aber noch eine Correction anbringen. Wir werden später in der Wärmelehre sehen, dass ebenso wie die Gase, so auch die Dämpfe auf die Wände der Gefässe, in denen sie eingeschlossen

sind, einen Druck ausüben, der sich mit der Temperatur ändert. Das Wasser im Absorptionsrohre verdampft nun und füllt den Raum über dem Wasser mit Dampf an. Dieser Dampf drückt das Quecksilber herab, und zwar bei der zu  $19^{\circ},2$  beobachteten Temperatur des Absorptiometers um  $16^{\text{mm}},3$ . Wäre demnach kein Wasserdampf im Absorptiometer, so würde das Niveau des Quecksilbers im Absorptiometer um  $16^{\text{mm}},3$  höher stehen. Der Druck  $P_1$  des trockenen Stickstoffgases ist demnach um diese Grösse kleiner, oder

$$P_1 = 730^{\text{mm}},5.$$

Das Volumen  $V_1$  des nicht absorbirten Gases war auf  $0^{\circ}$  reducirt

$$V_1 = 16,52.$$

Und schliesslich das absorbirende Wasservolumen

$$h = 182,37.$$

Darnach wird der Absorptionscoefficient

$$\alpha = \frac{1}{h} \left( V \frac{P}{P_1} - V_1 \right) = \frac{1}{182,37} \left( 32,608 \frac{429,33}{730,5} - 16,52 \right)$$

$$\alpha = 0,01448,$$

das heisst, das Wasservolumen 1 absorbirt bei der Temperatur von  $19^{\circ},2\text{C}$ .  $0,01448$  seines Volumens an Stickstoff.

Bunsen fand nun, dass der Absorptionscoefficient sich mit der Temperatur der absorbirenden Flüssigkeit ändert. Ein Gesetz dieser Aenderung liess sich nicht erkennen, man musste sich begnügen, eine empirische Formel aufzustellen, um die Werthe von  $\alpha$  zu bestimmen.

Die Formeln von Bunsen haben alle die Gestalt

$$\alpha = a + bt + ct^2,$$

worin  $t$  die Temperatur in Graden nach der hunderttheiligen Skala  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $t$  für jedes Gas und jede Flüssigkeit verschiedene Constanten sind, welche nach einer Anzahl, wenigstens drei Versuche bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen sind.

Für Stickstoff in Wasser ist z. B.

$$\alpha = 0,020346 - 0,00053887 t + 0,000011156 . t^2.$$

Für Stickstoff in Alkohol aber

$$\alpha = 0,126338 - 0,000418 t + 0,0000060 t^2.$$

Diese Formeln gelten jedoch nur bis zu ungefähr  $20^{\circ}$ , bis wohin die Versuche reichen.

Wir lassen hier eine Reihe der Absorptionscoefficienten der wichtigsten Gase, welche Bunsen untersuchte, folgen, für Wasser und Alkohol bei der Temperatur  $15^{\circ}$ .

Namen der Gase	$\alpha$ in Wasser	$\alpha$ in Alkohol
Stickstoff . . . . .	0,01478	0,12142
Wasserstoff . . . . .	0,01930	0,06725
Sauerstoff . . . . .	0,02989	0,28397
Kohlensäure . . . . .	1,0020	3,1993
Kohlenoxydgas . . . . .	0,02432	0,20443



Namen der Gase	$\alpha$ in Wasser	$\alpha$ in Alkohol
Stickoxydul . . . . .	0,7778	3,2678
Grubengas . . . . .	0,03909	0,48280
Elayl ' . . . . .	0,1615	2,8825
Aethyl . . . . .	0,02147	—
Methyl . . . . .	0,0508	—
Schwefelwasserstoff . .	3,2326	9,539
Schweflige Säure . . .	43,564	144,55
Ammoniak . . . . .	727,2	—
Atmosphär. Luft . . .	0,01795	—

Mit Hülfe des Henry'schen Gesetzes und der von Bunsen bestimmten Absorptionscoefficienten ist man nun auch im Stande, die Absorption eines Gasgemisches oder die Mengen zu bestimmen, welche von den einzelnen Gasen eines Gemisches absorbiert werden, umgekehrt aber auch, wenn man die Zusammensetzung des absorbierten Gases bestimmen kann, daraus die Zusammensetzung des Gasgemisches zu berechnen, welches der Absorption ausgesetzt wurde.

Ein Volumen atmosphärischer Luft besteht z. B. aus 0,79 Stickstoff und 0,21 Sauerstoff. Uebt dasselbe den Druck  $p$  aus, so ist der Druck des Stickstoffes  $0,79 p$  und der des Sauerstoffes  $0,21 p$ . Ist nun der Absorptionscoefficient des Stickstoffes  $\alpha_1$ , der des Sauerstoffes  $\alpha_2$ , so ist die von einem Wasservolumen  $h$  aus der Luft absorbirte Menge Stickstoff

$$g_1 = \frac{\alpha_1 \cdot h \cdot 0,79 p}{760}$$

und des Sauerstoffes

$$g_2 = \frac{\alpha_2 \cdot h \cdot 0,21 p}{760}$$

Setzen wir nun  $h = 1$ ,  $p = 760$ , so muss  $g_1 + g_2$  gleich dem Absorptionscoefficienten für atmosphärische Luft sein. Die Rechnung gibt mit dem Versuche übereinstimmend

$$g_1 + g_2 = 0,79 \cdot 0,01478 + 0,21 \cdot 0,02989 = 0,01795$$

als Absorptionscoefficient für atmosphärische Luft bei  $15^\circ$ .

Hat man allgemein ein Gasgemisch unter dem Drucke  $p$ , welches  $r_1$  Theile eines Gases,  $r_2$  eines zweiten,  $r_3, r_4 \dots r_n$  Theile eines 3, 4  $\dots n$  Gases enthält, so sind die von jedem Gase absorbierten, in der Volumeinheit enthaltenen Gasmengen

$$g_1 = \alpha_1 \cdot r_1 \frac{p}{760}$$

$$g_2 = \alpha_2 \cdot r_2 \frac{p}{760}$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$g_n = \alpha_n \cdot r_n \cdot \frac{p}{760}$$

Kennt man die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases nicht, aber kann man die Zusammensetzung des absorbierten Gases und somit  $g_1, g_2, g_3 \dots$  bestimmen, so kann man daraus  $r_1, r_2 \dots$  oder die Zusammen-

setzung des zur Absorption verwandten Gases berechnen. Auf diese Weise hat Bunsen der Absorptometrie in der Analyse der Gase eine wichtige Anwendung gegeben.

## §. 109.

**Ausströmen der Gase.** Wenn in die Wand eines mit Gas unter dem Drucke  $p$  gefüllten Gefässes eine Oeffnung gemacht wird und vor der Oeffnung weniger dichtes Gas oder ein leerer Raum ist, so strömt das Gas aus der Oeffnung hervor, um so rascher, je höher der Druck ist, unter welchem das Gas im Gefässe steht und je geringer die Spannung des äusseren Gases ist. Wegen der freien Beweglichkeit der Theile, welche die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemein haben, müssen auch die Ausströmungsgesetze der Gase mit denen der Flüssigkeiten übereinstimmen.

Wir gelangen daher zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas aus einer Oeffnung in der Wand eines Gefässes, in welchem es unter stärkerem Druck steht, als der Druck ausserhalb des Gefässes ist, ausfliesst, durch Anwendung ganz derselben Principien, welche wir auch §. 83 anwandten. Wir denken uns zunächst das Gas im Innern des Gefässes unter einem constantem Drucke  $p_0$  und ebenso werde der Druck ausserhalb auf constanter Höhe erhalten, so dass ein stationärer Strömungszustand eintritt. Das Kennzeichen dieses stationären Zustandes ist dann, dass durch jeden Querschnitt, durch welchen das Gas hindurchtritt, in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Gases hindurchgehen müssen. Haben wir deshalb zwei Querschnitte  $Q$  und  $Q_1$  und sind die mittlern gegen diese Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten  $u$  und  $u_1$ , so sind die durch die Querschnitte in der Zeiteinheit hindurchtretenden Gasvolumina  $Q \cdot u$  und  $Q_1 \cdot u_1$ . Diesen Volumina entsprechen aber nur dann gleiche Mengen, wenn in diesen Querschnitten die Drucke, welchen die Gase dort ausgesetzt sind, gleich sind, da nur dann die Dichtigkeit des Gases dieselbe ist. Sind die Drucke nicht gleich, sondern ist der Druck im Querschnitt  $Q$  gleich  $P$ , im Querschnitt  $Q_1$  gleich  $P_1$ , so ist die Dichtigkeit im Querschnitt  $Q$  gleich  $s$ , im Querschnitt  $Q_1$  gleich  $s_1$ , und die durch diese Querschnitte hindurchfliessenden Gasmenngen, die einander gleich sein müssen, sind

$$s Q u = s_1 Q_1 u_1.$$

Da nun, bei der von uns als überall gleich vorausgesetzten Temperatur, nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$s : s_1 = P : P_1,$$

so können wir die Gleichung schreiben

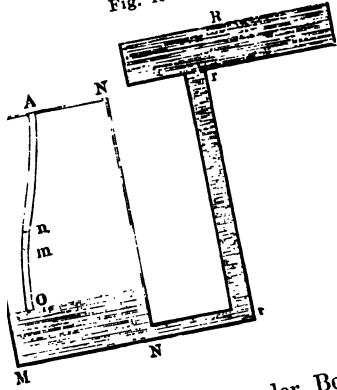
$$P \cdot Q \cdot u = P_1 \cdot Q_1 \cdot u_1.$$

Eine weitere Beziehung erhalten wir auch hier wieder durch die Bemerkung, dass bei dem stationären Zustande die Gase sich in constanten Bahnen bewegen; denken wir uns deshalb wieder, wie in §. 83 einen Kanal  $OA$  von überall gleichem Querschnitt  $q$  durch das Gas gelegt, so können wir in diesem die Geschwindigkeitsänderung bestimmen. Sei Fig. 190  $MMNV$  das Gefäss, aus dem das Gas aus einer engen Oeffnung ausfliesst, in welchem der constante Druck etwa dadurch erhalten wird, dass das Gefäss mit

Ausströmen der Gase.

näher gelegenen Wasser-Reservoir  $R$ , welches auf constantem Niveau  $n$  wird, in Verbindung steht. Sei  $OA$  der betrachtete Kanal, und seien  $m$  und  $n$  zwei unendlich nahe Querschnitte. Tritt das Gas durch den Querschnitt  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , so ist die in der Zeit  $dt$  durch denselben hindurchfließende Gasmenge gleich  $s \cdot q \cdot v \cdot dt$ . In derselben Zeit erreicht das Gas den Querschnitt  $n$ , den es mit der Geschwindigkeit  $v + dv$  passiert, so dass die in der Zeit  $dt$  durch den Querschnitt  $n$  fließende Gasmenge in derselben Zeit den Geschwindigkeitszuwachs  $dv$  erfährt; die Bewegungsgröße nimmt also zu um

Fig. 190.



Diese Zunahme der Bewegungsgröße wird durch die in der Zeit  $dt$  wirksame Kraft ertheilt; als solche haben wir hier nur die Aenderung  $dp$  des Druckes zu betrachten, da dieser gegenüber die Wirkung der Schwere wegen des geringen Gewichtes der Gase vernachlässigt werden darf. Aendert sich von  $m$  bis  $n$  der Druck um  $dp$ , so ist  $q dp$  die Größe der wirksamen Kraft, so dass wir die Gleichung erhalten

$$\frac{s}{g} q v dt dv = - q dp dt,$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil wachsendem Druck abnehmende Geschwindigkeit, abnehmendem Druck wachsende Geschwindigkeit entspricht. Bezeichnen wir nun die Dichtigkeit des Gases bei dem Drucke  $\pi$  der Atmosphäre mit  $\sigma$ , so ist, wenn  $p$  den Druck im Querschnitt  $m$  bedeutet,

$$s = \frac{\sigma}{\pi} p,$$

somit wird unsere Gleichung

$$\frac{\sigma}{\pi g} p q v dt dv = - q dp dt$$

oder

$$v dv = - \frac{\pi g dp}{\sigma p}.$$

Ist nun die Geschwindigkeit an der Grenze des Gases bei  $O$  gleich  $v_0$  der Druck dort  $p_0$ , so erhalten wir die Geschwindigkeit, welche das Gas bei  $m$ , wo der Druck  $p$  ist, besitzt, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung summiren, wie im §. 83, auf der linken von  $v_0$  bis  $v$ , auf der rechten von  $p_0$  bis  $p$ . Diese Summe auf der linken Seite ist  $\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2)$ , da  $v dv = \frac{1}{2} \{ (v + dv)^2 - v^2 \}$ .  
Der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Ausdruck ist, wie Differentialrechnung nachgewiesen wird,

$$\frac{dp}{p} = \log(p + dp) - \log p,$$

liche Logarithmen zu nehmen sind, somit wird die Summe dort

$$- \frac{\pi g}{\sigma} (\log p - \log p_0)$$

ere Gleichung zwischen  $v$  und  $p$  wird

$$v^2 - v_0^2 = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p}.$$

wir über die Lage des gedachten Gaskanals gar keine besondere  
tzung gemacht haben, so gilt, wie wir schon §. 83 für die aus-  
: Flüssigkeit bemerkten, diese Gleichung für die ganze ausströmende  
z, es ist überall dort die Geschwindigkeit der strömenden Gasmasse  
wo der Druck gleich  $p$  ist.

eichnen wir nun den Druck in der Ausströmungsöffnung mit  $p_1$ ,  
hwindigkeit des Gases dort mit  $v_1$ , so erhalten wir

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}.$$

nun schliesslich das Verhältniss  $\frac{v_0}{v_1}$  zu bestimmen, setzen wir wieder  
lass in der Fläche bei  $O$ , wo die Bewegung des Gases beginnt und  
öffnung bei  $A$ , die wir als sehr klein nehmen, die Geschwindig-  
o und  $v_1$  die mittlern gegen die betreffenden Querschnitte senk-  
Geschwindigkeiten seien. Ist dann  $Q$  der Querschnitt des Ge-  
der der Oeffnung, so ist

$$p_1 q_1 v_1 = p_0 Q \cdot v_0$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1 q_1}{p_0 Q}$$

it

$$v_1^2 = \frac{2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}.$$

der Querschnitt der Oeffnung gegen jenen des Gefässes hinreichend  
können wir da auch  $p_1 < p_0$  sein muss, wenn überhaupt ein Aus-  
stattfindet, das zweite Glied des Nenners vernachlässigen, und dann

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}.$$

· Ausdruck für  $v_1$  wird einfacher, wenn der Druck  $p_0$  nur wenig  
· Drucke  $p_1$  in der Ausflussöffnung verschieden ist. Wir erhalten

$$\log \frac{p_0}{p_1} = - \log \frac{p_1}{p_0} = - \log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right).$$

n ist, wie in der Analysis bewiesen wird,

$$\left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right) = \frac{p_0 - p_1}{p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)^3 + \dots$$

Wenn nun  $p_0$  nur wenig grösser als  $p_1$  ist, so können in dieser alle Glieder nach dem ersten vernachlässigt werden, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Es ergibt sich somit, dass bei kleinen Ueberdrucken die Geschwindigkeit des Ausströmens bei einem und demselben Gase der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Ueberdruckes  $p_0 - p_1$  und des Druckes im Behälter proportional ist; bei gleicher Druckdifferenz  $p_0 - p_1$  nimmt die Ausflussgeschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus dem Druck  $p_0$  ab.

Für Luft von der Temperatur  $0^\circ$  wird der Werth des Coefficienten  $\sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma}}$ , da die Dichtigkeit der Luft bei dem Drucke der Atmosphäre  $0^m,76$  Quecksilber, gleich  $0,001293$  ist, und die Dichtigkeit des Quecksilbers gleich  $13,59$  ist,

$$\sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,76 \cdot 13,59 \cdot 9,808}{0,001293}} = 396^m,002,$$

somit

$$v_1 = 396^m,002 \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Bezeichnen wir nun das spezifische Gewicht irgend eines andern Gases der Luft gleich  $1$  gesetzt, mit  $d$ , so erhalten wir für die Ausflussgeschwindigkeit desselben

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma \cdot d} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}} = \frac{396^m,002}{\sqrt{d}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}$$

oder bei gleichen Drucken  $p_0$  und  $p_1$  ist die Ausflussgeschwindigkeit verschiedener Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional.

Eine Prüfung dieser Sätze durch Messung der Geschwindigkeit ist nicht möglich, da die Geschwindigkeit des Gases in der Ausflussöffnung nicht messen lässt. Dieselbe ist dagegen möglich, indem man die Menge ausgeflossenen Gases misst.

Man kann das am besten, indem man bei einer der in Fig. 190 deuteten ähnlichen Vorrichtung die Volumverminderung des Gases in Gefässe misst, welche sich unmittelbar aus dem Volumen oder Gewicht nachströmenden Flüssigkeit ergibt. Ist der Querschnitt der Oeffnung  $w$  so ist das in der Sekunde ausfliessende Gasvolumen

$$w_1 = q_1 \cdot v_1.$$

Da dieses Volumen aus der Oeffnung bei dem Drucke  $p_1$  hervorkommt, so entspricht in dem Gefässe, in welchem der Druck, wenn wir dasselbe als ein cylindrisches Reservoir voraussetzen, überall gleich  $p_0$  ist, ein Volumen  $w$ , welches nach dem Mariotte'schen Gesetze sich ergibt

$$w : w_1 = p_1 : p_0$$

$$w = \frac{w_1 p_1}{p_0} = q_1 \frac{p_1}{p_0} \cdot \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma \cdot d} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Lässt man die Gase in die freie Luft ausströmen, und wendet nur einen kleinen Ueberdruck an, so kann man für den Druck in der Ausflussöffnung den Druck der äussern Atmosphäre einsetzen, und erhält dann, wenn  $q_1$  in Quadratmetern gegeben ist, das Volumen der ausgeflossenen Gasmenge in Kubikmetern.

Die Versuche ergeben indess auch hier, wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten, dass die wirkliche Ausflussmenge kleiner ist als die theoretische; während indess bei den tropfbaren Flüssigkeiten der sogenannte Erfahrungskoeffizient constant war, scheint er bei den Gasen mit wachsendem Drucke etwas abzunehmen, schon innerhalb der Grenze, bei welcher die angeführte Formel noch ausreicht, was bis etwa 1<sup>m</sup> Wasserdruck als Ueberdruck der Fall ist. Bei sehr geringen Differenzen der Drucke  $p_0 - p_1$ , zwischen 0<sup>m</sup>,028 und 0<sup>m</sup>,14 Wasserdruck fand D'Aubuisson<sup>1)</sup> den Erfahrungskoeffizienten bei Oeffnungen in dünner Wand

$$\mu = 0,65,$$

Weisbach<sup>2)</sup> erhielt bei ähnlichen Verhältnissen

$$\mu = 0,671,$$

so sehr nahe mit dem übereinstimmend, mit welchem man die theoretisch berechnete Ausflussmenge der Flüssigkeiten multipliciren muss, um die beobachtete Ausflussmenge zu erhalten.

G. Schmidt<sup>3)</sup> erhielt für eine Druckhöhe von 0<sup>m</sup>,913 als Coefficienten

$$\mu = 0,52$$

und einen nicht viel davon verschiedenen Werth bestimmte Koch<sup>4)</sup> für das Ausströmen der Luft aus Oeffnungen in dünner Wand.

Diese Verschiedenheit der Resultate aus den Beobachtungen und der Theorie weist darauf hin, dass bei der theoretischen Entwicklung der Ausflussgesetze nicht alle Umstände in Betracht gezogen sind, welche auf die Bewegung des Gases von Einfluss sind. Wir erkennen dieselben leicht in ähnlichen Verhältnissen wie bei den Flüssigkeiten, das Gas bewegt sich an allen Seiten gegen die Oeffnung hin und dadurch wird die gegen die Oeffnung senkrechte Geschwindigkeit des ausfliessenden Gases gestört.

Den experimentellen Beweis dafür liefert uns der Einfluss von Ansatzröhren an die Gefässöffnung auf die Menge des ausfliessenden Gases. Nach den Versuchen von D'Aubuisson, Schmidt, Koch und Weisbach wird die Länge des ausfliessenden Gases durch solche Röhren ähnlich wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten grösser, so lange die Röhren nicht zu enge und zu lang sind. Nach den Versuchen von D'Aubuisson ist für kurze cylindrische Röhren, deren Länge gleich ist dem fünffachen Durchmesser  $\mu = 0,92$  und für kurze konische Ansatzröhren, den engern Durchmesser nach aussen geht,  $\mu = 0,93$ , Weisbach findet für cylindrische Ansatzrohre  $\mu = 0,839$ , für konische 0,833.

<sup>1)</sup> D'Aubuisson, Annales de chim. et de phys. XXXII.

<sup>2)</sup> Weisbach, Experimental-Hydraulik p. 184 ff.

<sup>3)</sup> G. G. Schmidt, Gilbert Annalen LXVI.

<sup>4)</sup> Fr. L. Koch, Versuche und Beobachtungen über die Geschwindigkeit und Quantität verdichteter Luft, welche aus Oeffnungen etc. ausströmt. Götting. 1824.

Schmidt findet für konische Ansatzröhren, wenn der grössere Durchmesser nach aussen gekehrt ist,  $\mu$  noch um vieles grösser, nämlich 1,122, so dass also die beobachtete Ausflussmenge selbst grösser ist als die theoretisch berechnete.

Wendet man anstatt kurzer verhältnissmässig weiter Ansatzröhren lange und enge Röhren an, so zeigt sich auch hier ähnliches wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten; der Ausfluss der Gase folgt ganz andern Gesetzen als bei Anwendung von Oeffnungen in dünnen Wänden. Nach den ausgedehnten Versuchen von Girard<sup>1)</sup> verhalten sich die Ausflussmengen bei nicht zu engen Röhren direkt wie die Drucke, unter welchen das ausfliessende Gas steht, und umgekehrt wie die Quadrate der Röhrenlängen, durch welche das Gas abfliesst.

Dass die Ausflussgeschwindigkeit der Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, kann man am bequemsten dadurch nachweisen, dass man gleiche Volume verschiedener Gase unter denselben Druckverhältnissen aus einer engen Oeffnung ausströmen lässt, und die dazu erforderliche Zeit beobachtet. Die Quadrate dieser Zeiten müssen sich dann verhalten wie die Dichtigkeiten der Gase. Bunsen hat diese Methode angewandt und darauf ein Verfahren gegründet, die specifischen Gewichte der Gase mit einander zu vergleichen<sup>2)</sup>, ein Verfahren, welches besonders für technische Zwecke, wie zu Dichtigkeitsbestimmungen von Leuchtgas, sehr bequem ist.

Lässt man verschiedene Gase durch lange Röhrenleitungen gehen, so hängt nach den Versuchen von Girard die Ausflussgeschwindigkeit nicht mehr von der Dichtigkeit des Gases ab; unter Voraussetzung gleicher Druckverhältnisse ist die Ausflussgeschwindigkeit für die verschiedenen Gase dieselbe.

Noch in einer andern Weise können wir die abgeleiteten Gleichungen prüfen, indem wir aus ihnen die Vertheilung des Druckes in der strömenden Gasmasse berechnen. Bezeichnen wir in irgend einem Querschnitt  $q$  der strömenden Gasmasse den Druck mit  $p$ , die Geschwindigkeit mit  $v$ , so erhalten wir für die Ausflussgeschwindigkeit  $v_1$ , wenn in der Ausflussöffnung der Druck gleich  $p_1$  ist, aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$v dv = - \frac{\pi g}{\sigma} \frac{dp}{p},$$

indem wir jetzt von  $v$  bis  $v_1$  und von  $p$  bis  $p_1$  summiren

$$v_1^2 \left( 1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p}{p_1},$$

eine Gleichung, welche uns mit Hülfe der Beziehung

$$p q v = p_1 q_1 v_1,$$

welche gilt, wenn wir eine derartige Form des Gefässes und der Ausflussöffnung voraussetzen, dass wir die Geschwindigkeiten als senkrecht zu den

<sup>1)</sup> Girard, Mémoires de l'Académie de l'Institut de France. T. V.

Neuere Versuche:

Saint-Venant und Wantzel, Comptes rendus de l'Acad. de Paris. T. XVII.

<sup>2)</sup> Bunsen, Gasometrische Methoden. p. 128 ff.

betreffenden Querschnitten annehmen dürfen, den in den verschiedenen Querschnitten des Gefässes vorhandenen Druck  $p$  zu berechnen gestattet. Zunächst erhalten wir

$$v_1^2 \left( 1 - \left( \frac{p_1}{p} \right)^2 \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 \right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p}{p_1}.$$

Setzen wir nun voraus, dass das Ausfliessen überhaupt nur unter kleinen Drucken erfolge, so können wir zunächst setzen

$$\log \frac{p}{p_1} = \log \left( 1 + \frac{p - p_1}{p_1} \right) = \frac{p - p_1}{p_1}$$

und weiter

$$\left( \frac{p_1}{p} \right)^2 = \left( \frac{p}{p_1} \right)^{-2} = \left( 1 + \frac{p - p_1}{p_1} \right)^{-2} = 1 - 2 \frac{p - p_1}{p_1} + 3 \left( \frac{p - p_1}{p_1} \right)^2 + \dots$$

und können in dieser Reihe schon das dritte Glied vernachlässigen. Dann erhalten wir

$$v_1^2 \left\{ 1 - \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 + 2 \frac{p - p_1}{p_1} \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 \right\} = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \frac{p - p_1}{p_1}$$

und daraus

$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{2 \frac{\pi g}{\sigma} v_1^2 q^2 - 2q_1^2}$$

oder, indem wir im Nenner rechts  $v_1^2$  durch seinen Werth

$$v_1^2 = \frac{2\pi g}{\sigma} \frac{p_0 - p_1}{p_1}$$

setzen,

$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{p_0 - p_1}{p_1} q^2 - q_1^2}.$$

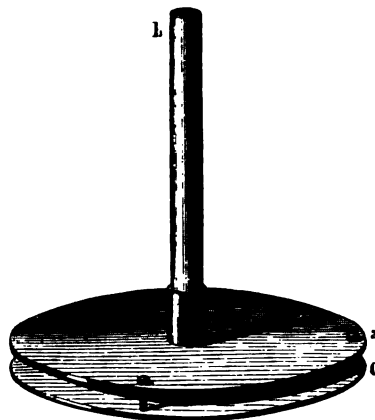
Das Vorzeichen auf der rechten Seite hängt davon ab, ob  $q > q_1$  oder  $q < q_1$ , denn da unsere ganze Entwicklung nur gilt, so lange  $p_0 - p_1$  gegen  $p_1$  sehr klein ist, so ist der Nenner der rechten Seite bei allen in der Praxis herzustellenden Vorrichtungen als positiv zu nehmen. Dann ergibt sich, dass in allen Querschnitten, welche grösser sind als die Ausflussöffnung,  $p > p_1$ , in allen, welche kleiner sind als die Ausflussöffnung, dagegen  $p < p_1$ . Lässt man deshalb Gas oder Luft in die äussere Atmosphäre ausströmen, so dass in der Ausflussöffnung der Druck  $p_1$  gleich dem der äusseren Atmosphäre ist, so wird an allen Stellen, an welchen das ausströmende Gas einen Querschnitt passirt, der kleiner ist als die Ausströmungsöffnung, der Druck kleiner als derjenige der Atmosphäre.

Mit Hülfe des kleinen Apparates Fig. 191 kann man diesen geringeren Druck leicht nachweisen. Eine Glasröhre mündet in der Mitte einer Scheibe und in einiger Entfernung von letzterer ist eine zweite nicht durchlöchernte Scheibe mittels dreier Drähte festgehalten, welche sich der Mündung der Röhre nähern kann. Bläst man nun kräftig in die Röhre bei  $b$  hinein, so sieht man, wie sich die Scheibe  $c$  der Schwere entgegen zur Scheibe  $a$  hin-



bewegt, einen Moment die Oeffnung der Röhre verschliesst, dann abgestossen wird, wieder sich gegen *a* hinbewegt, und so auf und

Fig. 191.

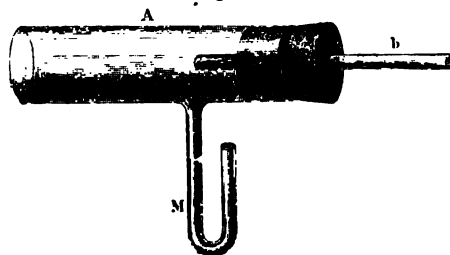


sich bewegt, so lange man in die hineinbläst. Die Ausflussöffnung: die ringförmige Spalte zwischen den der beiden Scheiben, nach von der Mitte aus die Luft sich in Radien hinbewegt. Die einzelnen Mittelpunkt der Scheibe *a* zur Scheibe *a* und *c* senkrechten förmigen Schnitte bilden also verschiedene Querschnitte, welche alle kleiner sind als die Ausflussöffnung so dass auf die ganze Scheibe von nach oben ein stärkerer Druck wirkt von oben nach unten. In dem blicke aber, in welchem in Folge Druckes die Platte *c* sich vor die Röhre legt, die Luft a

Ausfliessen gehindert wird, tritt der statische Druck der in der Röhre verdichteten Luft in Wirksamkeit, und treibt die Platte fort, welche wieder gegen *a* bewegt wird, und so fort.

Mit der Anordnung Fig. 192 kann man diesen kleinern Druck

Fig. 192.



direkt sichtbar machen. Man in ein weiteres Glasrohr *A*, welches ein kleines Manometerrohr angeschmolzen ist, mit einem engeren Rohr *b* und dasselbe soweit hinein, das Ende sich in dem Querschnitt findet, in welchem das Manometerrohr angeschmolzen ist. Füllt dann das Manometer mit Wasser und bläst dann durch das

Rohr *b*, so steigt das Wasser in dem Schenkel des Manometerrohres, welches mit der Röhre *A* in Verbindung steht. Die Niveaudifferenz beider Röhren gibt dann die Differenz der Drucke in der Mündung des Rohres und an der Ausflussöffnung.

Die bisher abgeleiteten Beziehungen gelten nur für das Ausströmen durch eine Oeffnung in dünner Wand oder durch Röhren, welche ein Verhältnis zu ihrer Länge nicht zu kleinen Querschnitt haben; lässt die Gase durch capillare Röhren ausfliessen, so werden, wie das sich aus ausgedehnten Versuchen Grahams<sup>1)</sup> ergab, die Gesetze des Ausströmens wie bei den Flüssigkeiten, ganz andere, welche beweisen, dass auch den Gasen eine innere Reibung vorhanden ist, und ebenso eine Reibung an den Wänden der Röhre, durch welche die Gase fließen. Wenn n

<sup>1)</sup> Graham, Philosophical Transactions of London R. S. for the year 1849.

immt, dass die Constante der innern Reibung von der Dichtigkeit der Gase unabhängig ist, so lassen sich die Gesetze des Ausflusses der Gase durch capillare Röhren in ähnlicher Weise ableiten, wie es §. 85 für Flüssigkeiten geschehen ist<sup>1)</sup>. Misst man das Volumen  $V$  des unter constanten Druckverhältnissen, das heisst während des ganzen Versuches constantem Drucke  $p_a$  beim Anfange und  $p_e$  am Ende der capillaren Röhre, durch die Röhre geströmten Gases unter dem arithmetischen Mittel der Drucke  $p_a$  und  $p_e$ , also unter dem Drucke  $\frac{p_a + p_e}{2}$ , so liefert die Theorie für dieses Volumen den Ausdruck

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \cdot \eta \cdot L} \left( R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right),$$

also genau denselben Ausdruck, welchen wir für das Volumen der ausgeflossenen Flüssigkeiten fanden, wenn wie dort  $\eta$  die Constante der innern,  $\varepsilon$  jene der äussern Reibung,  $L$  die Länge und  $R$  den Radius der capillaren Röhre bedeutet.

Misst man das Volumen des ausfliessenden Gases unter einem andern Drucke, etwa  $p_a$  oder  $p_e$ , so ändert sich diese Gleichung etwas, da dann das Volumen nach dem Mariotte'schen Gesetze ein anderes wird; messen wir z. B. das Volumen unter dem Drucke  $p_a$ , so wird dasselbe  $V_a$

$$V_a \cdot p_a = V \frac{p_a - p_e}{2},$$

mit

$$V_a = \frac{\pi (p_a^2 - p_e^2)}{16 \eta L \cdot p_a} \left( R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right).$$

An den im Jahre 1846 und 1849 von Graham angestellten Versuchen (O. E. Meyer<sup>2)</sup>) die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung abgewiesen. Unter den vielen Versuchsreihen Grahams ist eine, bei welcher die Drucke  $p_a$  und  $p_e$  constant erhalten wurden; es wurde unter constantem Drucke  $p_a$  ein bestimmtes unter dem Drucke  $p_a$  gemessenes Volumen  $V$  in die Glocke einer Luftpumpe strömen gelassen, in der durch fortgesetztes Pumpen ein luftleerer Raum erhalten wurde, und die Zeit beobachtet, welche bei verschiedenen Drucken  $p_a$  dazu erforderlich war. Bestimmen wir die dazu erforderliche Zeit mit  $t$ , so wird, da wir  $p_e = 0$  annehmen,

$$V_a = p_a t \cdot \frac{1}{16 \eta L} \left( R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right),$$

ist

$$p_a t = \frac{16 \eta L}{V_a} \frac{1}{R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist, da immer dasselbe Volumen  $V_a$  dieselbe Röhre benutzt wurde, constant, es muss also bei diesem Verhältnisse das Produkt aus dem Drucke  $p_a$  und der Zeit  $t$  constant sein. Das

<sup>1)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXVII. p. 262 ff.

<sup>2)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXVII.

zeigen in der That die Versuche Grahams; bei 3 Versuchsreihen ergaben sich folgende Werthe

$p_a$	$t$	$p_a \cdot t$
1 Atmosph.	799,5	799,5
0,75 „	1050	787,5
0,5 „	1543	771,75,

Werthe, welche so wenig von einander abweichen, dass man sie in Anbetracht der Schwierigkeit der Versuche als eine Bestätigung des abgeleiteten Satzes ansehen muss.

Bei den übrigen Versuchen liess Graham entweder nur  $p_a$  oder  $p_c$  constant; indem Meyer aber aus obiger für den stationären Zustand geltenden Gleichung jene ableitete, welche für ein nur constantes  $p_a$  oder für ein constantes  $p_c$  gültig sind, konnte er zeigen, dass alle Versuche Grahams mit der Voraussetzung der theoretischen Entwicklung übereinstimmen, dass die Reibung der Gase ist, welche die Ausflusserscheinungen durch capillare Röhren bedingt, und dass die Reibungsconstante von der Dichtigkeit des Gases unabhängig ist.

Dass letzteres der Fall ist, ergibt sich auch aus der von Maxwell<sup>1)</sup>, Stefan<sup>2)</sup>, O. E. Meyer<sup>3)</sup> und andern entwickelten Theorie der Reibung, welche wir im dritten Bande nach Darlegung der dynamischen Gastheorie besprechen werden, und ausserdem ergibt es sich aus direkten Versuchen von Maxwell<sup>4)</sup> und O. E. Meyer<sup>5)</sup>. Die Versuche zur Bestimmung der Reibungsconstante der Luft waren ähnlich angeordnet wie die im §. 85 erwähnten Versuche zur Bestimmung der Reibungsconstante des Wassers; es wurde die Abnahme der Schwingungsbögen horizontal schwingender horizontaler Scheiben beobachtet, welche durch Torsion eines dünnen Drahtes, an welchem die Scheiben hingen, in Schwingung versetzt wurden. Gerade wie die in Wasser schwingenden Scheiben durch die Reibung der mit bewegten an der Scheibe haftenden Schicht an den entferntern weniger rasch bewegten Schichten eine stete Abnahme der Schwingungsbögen erfahren, so auch die in der Luft schwingenden Scheiben, und aus dieser Verkleinerung der Schwingungsbögen lässt sich in hier nicht durchzuführender Weise, wie wir schon bei den Flüssigkeiten erwähnten, der Reibungscoefficient berechnen. Es ergibt sich nun in der That aus diesen Versuchen, dass bei constanter Temperatur der Reibungscoefficient von der Dichtigkeit der Luft unabhängig ist, und als Werth des Reibungscoefficienten der Luft bezogen auf Milligramm, Millimeter und Sekunde, gerade wie wir es bei den Flüssigkeiten gethan, ergibt sich nach Maxwell und Meyer<sup>6)</sup>

$$\eta = 0,0000200.$$

Kennt man so den Werth der Reibungsconstante für ein Gas, so lässt sich derselbe aus den Beobachtungen Grahams für die übrigen von Graham

<sup>1)</sup> Clerk Maxwell, Philosophical Magazin 4. Series vol. XIX. p. 19 — vol. XXXII. vol. XXXV.

<sup>2)</sup> Stefan, Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. XLVI.

<sup>3)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

<sup>4)</sup> Clerk Maxwell, Philosophical Transactions of London R. S. for 1866.

<sup>5)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

<sup>6)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXLIII.

zu seinen Versuchen benutzten Gase ableiten. Lässt man nämlich aus einer Röhre vom Radius  $R$  und der Länge  $L$  ein unter dem Drucke  $p_a$  gemessenes Volumen  $V_a$  Luft ausfliessen, so ist die dazu erforderliche Zeit  $t_a$  nach der obigen Gleichung gegeben durch

$$V_a = t_a \cdot \frac{\pi (p_a^2 - p_e^2) \cdot R^4}{16 \cdot L \cdot p_a} \cdot \frac{1 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon R}}{\eta}$$

Lässt man das gleiche Volumen eines andern Gases unter genau denselben Umständen ausfliessen, so ist die dazu erforderliche Zeit  $t$  eine andere, wenn der Reibungscoefficient ein anderer ist; bezeichnen wir denselben mit  $\eta'$  und den Coefficienten der äussern Reibung mit  $\varepsilon'$ , so wird

$$V_a = t \cdot \frac{\pi (p_a^2 - p_e^2) \cdot R^4}{16 \cdot L \cdot p_a} \cdot \frac{1 + 4 \frac{\eta'}{\varepsilon' R}}{\eta'}$$

und aus diesen beiden Ausdrücken folgt

$$\frac{t}{t_a} = \frac{\eta'}{1 + 4 \frac{\eta'}{\varepsilon' R}} : \frac{\eta}{1 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon R}}$$

Diese selbe Beziehung gilt nun auch für die Ausflusszeiten gleicher Volumina verschiedener Gase, wenn der Ausfluss unter den von Graham gewählten Umständen, also constantem Drucke  $p_a$  oder  $p_e$  erfolgt. Verhalten sich nun die Gase den festen Körpern gegenüber wie benetzende Flüssigkeiten, so dass  $\varepsilon$  unendlich gross ist, so ergibt sich, dass die Nenner der rechten Seite gleich 1 sind, und es wird

$$\frac{t}{t_a} = \frac{\eta'}{\eta}$$

oder die Ausflusszeiten verhalten sich direkt wie die Reibungscoefficienten der Gase.

Letzteres scheint nun in der That der Fall zu sein, da Graham angibt, dass die Transpirationszeiten, so bezeichnet er die Ausflusszeiten durch capillare Röhren, verschiedener Gase immer in denselben Verhältnisse stehen, welches auch die Röhrenweite ist, durch welche man die Gase unter sonst gleichen Umständen transpiriren lässt. Man muss daraus schliessen, dass wenn  $\varepsilon$  nicht unendlich gross ist, wenigstens die Coefficienten  $\frac{\eta}{\varepsilon}$  für alle Gase denselben Werth haben, dass also die Constanten der äussern Reibung in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie jene der innern Reibung.

Für die Reibungscoefficienten ergeben sich dann nach Meyer aus den Versuchen von Graham folgende Werthe<sup>1)</sup> für die Temperatur von 18° C.

Sauerstoff	$\eta = 0,0000223$
Luft	$0,0000200$
Stickstoff	$0,0000196$
Kohlenoxyd	$0,0000194$
Kohlensäure	$0,0000168$
Wasserstoff	$0,0000098$

<sup>1)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXLIII.

Auf die Theorie der Reibung der Gase werden wir im dritten Ban bei Entwicklung der dynamischen Theorie der Gase zurückkommen, w dort diese Zahlen zur Berechnung der mittlern Weglänge der Moleküle l nutzen, wir werden dann auch die Abhängigkeit der innern Reibung v der Temperatur der Gase besprechen.

### §. 110.

**Diffusion der Gase.** Bisher haben wir angenommen, wenn Gas einen nicht leeren Raum strömte, dass im letztern dasselbe Gas enthalten sei, welches aus dem Gefässe ausfloss. Für diesen Fall war die Ausflus geschwindigkeit gleich 0, wenn keine Differenz im Drucke des Gases inne halb und ausserhalb des Gefässes vorhanden war. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn in den beiden durch eine Oeffnung in Verbindung stehenden Räumen verschiedene Gase vorhanden sind. Zwar lässt sich durch den Versuch nachweisen, dass substantiell verschiedene Gase denselben Druck auf einander ausüben, wie die Theilchen gleichartiger Gase, aber dennoch tritt stets eine Vermischung ein, wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke durch eine Oeffnung mit einander in Verbindung stehen. Dass ersteres der Fall ist, zeigt folgender Versuch<sup>1)</sup>. Wenn man eine mit Luft gefüllte unten verschlossene Glasröhre vom Boden aus mit einem gefärbten Gase zur Hälfte anfüllt, welches schwerer ist als Luft, z. B. mit unterchloriger Säure, so ruht in dem obern Theile der Röhre anfänglich eine farblose Luftsäule auf dem gefärbten Gase. Bringt man dann rasch das obere Ende der Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und pumpt einen Theil der Luft aus, so rückt die an der Farbe erkenntliche Grenzfläche beider Gase mit der zunehmenden Verdünnung aufwärts, der Druck der Gase ändert sich aber in der ganzen Ausdehnung der Röhre in gleicher Weise, denn seitlich angebrachte Manometer zeigen in jedem Momente an allen Stellen der Röhre den gleichen Druck. Aber ungeachtet dessen, dass die verschiedenen Gase auf einander denselben Druck ausüben, als die einzelnen Theile desselben Gases, vermag ein Gas ein anderes nicht in einem Raume abzusperren.

Der erste, welcher diese Vermischung verschiedener Gase nachwies, war Dalton<sup>2)</sup>, er wandte zwei Flaschen von gleicher Capacität an, welche durch einen Hahn mit einander in Verbindung gesetzt werden konnten. Die eine füllte er mit Kohlensäure, die andere mit atmosphärischer Luft unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur, und stellte sie so auf, dass die Kohlensäure in der untern, die Luft in der obern Flasche sich befand. Auf diese Weise konnte durch die verschiedenen specifischen Gewichte der Gase eine Mischung derselben nicht eintreten, da die Kohlensäure als das specifisch schwerere Gas unten und die leichtere Luft darüber war. Nach geöffnetem Hahne war der Druck im Innern der Flaschen ungeändert derselbe geblieben, nach mehreren Stunden waren aber beide Gase gleichmässig in beiden Flaschen vertheilt, ungeachtet, dass die Schwere dieselben getrennt zu erhalten suchte. Es folgt daraus, dass jedes der bei-

<sup>1)</sup> *Bunsen*, Gasometrische Methoden p. 209.

<sup>2)</sup> *Dalton*, Gilbert Annalen Bd. 27.

den Gase sich in dem ganzen Raume verbreitet hatte, als wenn es in demselben allein vorhanden gewesen wäre. Jedes der Gase dehnte sich dadurch auf den doppelten Raum aus, sein Druck musste dadurch die Hälfte des frühern werden, die Unveränderlichkeit des äussern Druckes zeigt daher ebenfalls, dass auch die Drucke verschiedener Gase sich summiren.

Diese Mischung der Gase ihrem Gewichte entgegen bezeichnet man mit dem Namen der Diffusion der Gase. Das ausgedehnteste und wichtigste Beispiel derselben zeigt uns unsere Atmosphäre, welche, wie wir bereits früher erwähnten, ein Gemische zweier Gase, Sauerstoff und Stickstoff, ist. Obwohl nämlich der Sauerstoff schwerer ist als der Stickstoff und zwar im Verhältniss von 110 zu 97, so zeigt die Luft doch an allen Stellen, wo sie auch geschöpft wird, ganz dieselbe Zusammensetzung von 79 Theilen Stickstoff und 21 Theilen Sauerstoff.

Wir müssen uns hier damit begnügen, die Thatsache der Diffusion zu erwähnen; eine genauere Besprechung dieser Erscheinung ist erst im dritten Bande, in der Wärmelehre, möglich.

Trennt man zwei Gase durch eine poröse Scheidewand, z. B. durch eine poröse Thonplatte oder durch ein Gypsiaphragma, dessen Poren so enge sind, dass in Folge selbst bedeutender Drucke die Gase nur mit geringer Geschwindigkeit hindurchfliessen, so zeigt sich, dass auch durch solche Scheidewände hindurch die Gase sich mit grosser Geschwindigkeit mischen. Sorgt man nun dafür, dass der Druck auf beiden Seiten der Scheidewand während der ganzen Dauer des Versuches genau gleich ist, so sieht man, dass die in entgegengesetzter Richtung durch die Scheidewand hindurchtretenden Gasvolumina keineswegs gleich sind, dass also die chemisch verschiedenen Gase die Scheidewand mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchdringen.

Die ersten genauern Versuche über die Diffusion der Gase durch trockene poröse Scheidewände rühren von Graham<sup>1)</sup> her. Derselbe liess verschiedene Gase, die er in Röhren, welche mit einem trockenen Gypsproppf verschlossen waren, über Quecksilber abspernte, in atmosphärische Luft diffundiren, und fand, dass das gegen Luft unter constantem Drucke ausgetauschte Gasvolumen nahezu der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Gase umgekehrt proportional war. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Luft zu der des Wasserstoffes wie

$$1,000 : 0,06926,$$

oder wie

$$14,43 : 1;$$

für 1 Volumen Luft, welches in die Diffusionsröhre durch den Gypsproppf eingetreten war, traten nun 3,1 Volumina Wasserstoff aus; die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten der Luft und des Wasserstoffes verhalten sich aber wie 3,8 : 1; man sieht, dass die ausgetauschten Gasmengen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten stehen.

Da die sich austauschenden Gasmengen diejenigen sind, welche in gleichen Zeiten durch die Scheidewand hindurchtreten, so messen sie zu-

<sup>1)</sup> Graham, Poggend. Annalen Bd. XVII und XXVIII.

gleich die Geschwindigkeiten, mit denen die verschiedenen Gase durch die Scheidewand hindurchfliessen.

Vorhin sahen wir, dass die Ausflussgeschwindigkeiten verschiedener Gase aus Oeffnungen in dünner Wand unter gleichem Drucke den Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind. Die Diffusionsgeschwindigkeiten verhalten sich also nahezu wie die Ausflussgeschwindigkeiten aus dünner Wand.

Graham nahm nun an, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten mit den Ausflussgeschwindigkeiten genau übereinstimmen, und gründete darauf eine Erklärung der Diffusionserscheinungen. Nach dieser verbreitet sich ein Gas in ein anderes gerade so wie in den leeren Raum und die Bewegung erfolgt mit derselben Geschwindigkeit. Die Poren der Thonplatte sind man dann an als Oeffnungen in dünner Wand und dann folgt unmittelbar, dass die ausgetauschten Gasmengen sich verhalten müssen wie die reciproken Werthe aus den Quadratwurzeln der Dichtigkeiten.

Bunsen<sup>1)</sup> machte jedoch später darauf aufmerksam, dass die Erklärung nicht zulässig sei, da nur bei Anwendung von Oeffnungen in dünner Wand die Ausflussgeschwindigkeiten in dem erwähnten Verhältnisse stehen, nicht aber bei der Anwendung enger und besonders capillarer Röhren. Wenn nun auch bei der Anwendung poröser Diaphragmen die Gesetze des Auströmens nicht einfach diejenigen der Transpiration durch lange capillare Röhren sein werden, so ist es doch wahrscheinlich, dass die Gase durch solche Diaphragmen nicht wie aus Oeffnungen in dünner Wand fliessen.

Letzteres hat Bunsen dann zunächst nachgewiesen; eine mit einer Theilung versehene und kalibrierte Glasröhre wurde oben mit einem Gypspfropf, der bei 60° getrocknet war, geschlossen, mit Quecksilber gefüllt, und dann mit dem Gypspfropf nach oben in ein tiefes Quecksilbergefäss gesenkt. Dann wurde das obere durch den Gypspfropf geschlossene Ende der Röhre mit einem Raume in Verbindung gesetzt, der mit den verschiedenen Gasen unter dem während des ganzen Versuches constant erhaltenen Drucke einer Atmosphäre gefüllt werden konnte. Wurde dann das Rohr allmählig aus dem Quecksilber herausgezogen, so strömte durch das Diaphragma das Gas in die Röhre. War dann der Druck in der Röhre nur wenig mehr von dem Drucke einer Atmosphäre verschieden, so hielt man durch langsames Heben der Röhre den Druck des Gases eine Zeit lang auch im Innern der Röhre constant, und beobachtete dann die Zeit, welche erforderlich war, dass eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in die Röhre einströmte.

Dabei ergab sich, dass die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die immer unter demselben Drucke von 1<sup>m</sup> in der Zeit 1" einströmende Gasmenge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorhandenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und dass die Einströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reciproken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten stehen. So erhielt Bunsen unter andern folgende Werthe:

<sup>1)</sup> Bunsen, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857.

Sauerstoff			
Einströmungsgeschwindigkeit $V_1$ . . . . .	0,09187	0,1977	0,3058
Druckdifferenz $p$ in M. Quecksilber . . .	0,0167	0,0335	0,0520
$\frac{V_1}{p}$ . . . . .	5,893	5,901	5,881.
Wasserstoff			
Einströmungsgeschwindigkeit $V_1$ . . . . .	0,2665	0,5369	0,8431
Druckdifferenz $p$ in M. Quecksilber . . .	0,0167	0,0338	0,0520
$\frac{V_1}{p}$ . . . . .	15,96	15,89	16,21.

Während also die Druckdifferenzen von 16,7<sup>mm</sup> bis 52<sup>mm</sup> Quecksilber wachsen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf proportional.

Das Verhältniss der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff ist im Mittel 1 : 2,71, während das Verhältniss der reciproken Quadratwurzeln der Dichten 1 : 3,995 ist.

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also mit dem durch capillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verhältniss der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht auch nicht sehr von dem Verhältniss der reciproken Werthe der Reibungscoefficienten ab, wie sie sich im vorigen Paragraphen aus Grahams Beobachtungen der Transpirationszeiten, 1 : 2,2, ergaben.

Wollte man nun im Uebrigen die Graham'sche Theorie beibehalten, also die Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch capillare Röhren ansehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume absperrern kann, so müssten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch capillare Röhren verhalten, das ist aber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt fand, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten Luft : Wasserstoff wie 1 : 3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1 : 3,345, Zahlen, welche dem Verhältniss der reciproken Werthe der Quadratwurzeln aus den Dichten näher kommen als dem Verhältniss der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Ausserdem nimmt Bunsen an, dass die Verhältnisse der Diffusionsgeschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch eine weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der Gase bedingt wäre.

Leider sind die Versuche Bunsens, welche in den aus ihnen zu ziehenden Schlüssen in manchen Punkten wesentlich von den Resultaten Grahams abweichen, zu wenig zahlreich und zu wenig variirt, um die Verhältnisse der Gasdiffusion durch poröse Diaphragmen schon vollständig übersehen zu können; es wäre daher sehr wünschenswerth, wenn diese Frage neuerdings einer gründlichen experimentellen Untersuchung unterzogen würde.

### §. 111.

**Stoss und Widerstand der Luft.** Wenn die bewegte Luft gegen einen festen Körper stösst, so verliert sie wie jeder bewegte Körper, wenn er auf einen ruhenden trifft, an Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit



wird auf den getroffenen Körper übertragen, und ist der Anstoss hinreichend gross, so kann letzterer durch den Stoss der Luft in Bewegung versetzt werden. So ist es der Stoss der Luft, welcher die Segelschiffe treibt oder die Flügel der Windmühlen dreht. Die Kraft, welche die bewegte Luft ausübt, lässt sich nach den frühern Gesetzen bestimmen, sie ist proportional dem Produkte aus der Masse der bewegten Luft in das Quadrat der Geschwindigkeit der Bewegung. Je rascher die Bewegung der Luft ist, um so kräftiger sind daher auch die Wirkungen, welche ihr Stoss hervorbringt; die zerstörenden Wirkungen der Orkane sind bekannt.

Ebenso wie die bewegte Luft einen Theil ihrer Geschwindigkeit verliert, wenn sie gegen andere Körper stösst, so muss auch die Geschwindigkeit eines in ruhender Luft bewegten Körpers abnehmen, da er gegen die ruhenden Luftmassen stösst und diese aus der Stelle drängen muss. Dass die Grösse dieses Widerstandes von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängig sein muss, das erkennt man leicht, da je grösser die Geschwindigkeit ist, um so mehr ruhende Luft von dem Körper getroffen wird. Newton nahm an, dass der Luftwiderstand dem Quadrate des bewegten Körpers proportional sei. Man kann diese Annahme in folgender Weise plausibel machen.

Ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit  $t$  und während der unendlich kleinen Zeit  $dt$  gleich  $v$ , und verdrängt er während dieser Zeit die Luftmasse  $m$ , so überwindet er den Luftwiderstand dadurch, dass er dieser Luftmenge die Geschwindigkeit  $v$  ertheilt. Die dazu erforderliche Kraft ist aber nach §. 14 Gleichung I gleich  $\frac{mv}{dt}$ , oder auch, wenn wir den in der Zeit

$dt$  zurückgelegten Weg mit  $ds$  bezeichnen, da dann  $v = \frac{ds}{dt}$ , gleich  $\frac{m \cdot ds}{dt^2}$ .

Die Masse  $m$  ist nun aber dem in der Zeit  $dt$  zurückgelegten Wege proportional, so dass wir dieselbe setzen können  $m = \mu \cdot ds$ . Setzen wir diesen Werth in obigen Ausdruck ein, so erhalten wir für die zur Ueberwindung des Widerstandes erforderliche Kraft  $\mu \cdot \frac{ds^2}{dt^2}$  oder  $\mu v^2$ . In Folge des Luftwiderstandes ist es also gerade so, als wenn an dem Körper eine seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung entgegengesetzte, dem Quadrat seiner Geschwindigkeit proportionale Kraft angriffe. Daraus folgt aber, dass sein Verlust an Geschwindigkeit in jedem Augenblicke dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist.

Dieses Newton'sche Widerstandsgesetz schliesst sich jedoch der Erfahrung nicht genau an, dieselbe zeigt vielmehr, dass das Widerstandsgesetz für verschiedene Geschwindigkeiten selbst verschieden ist. Ein Umstand ist bei der Ableitung jenes Gesetzes auch ganz ausser Acht gelassen, nämlich die Reibung der Luft, wodurch, wie wir im §. 109 sahen, selbst die Bewegung solcher Körper verzögert wird, welche keine Luft aus der Stelle verdrängen, wie etwa um eine verticale Axe rotirende oder schwingende horizontale Kreisscheiben. Dieser Widerstand ist der Geschwindigkeit der Bewegung direkt proportional, wie wir §. 85 bei den Flüssigkeiten specieller durchführten, welche Bemerkungen wir dann §. 109 direkt auf Gase anwenden konnten. Wir müssen deshalb den Widerstand der Luft nicht nur dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers, sondern auch

der ersten Potenz derselben proportional setzen. Ja letzteres Glied ist sogar bei langsamen Bewegungen, wie Pendelschwingungen, das überwiegende. Für sehr rasche Bewegungen nimmt der Widerstand in einem noch raschern Verhältnisse zu, als das Quadrat der Geschwindigkeit. Der Grund davon ist der, dass bei jeder Bewegung vor dem bewegten Körper eine Verdichtung der Luft entsteht. Bei langsamer Bewegung gleicht sich nun diese Verdichtung, da sie sich rasch auf die entferntern Luftschichten überträgt, bald aus, so dass der Körper bei seinem Vorschreiten die Luft schon wieder in der gewöhnlichen Dichtigkeit vorfindet; bei raschern Bewegungen ist das nicht der Fall, da findet die Ausweichung der Lufttheilchen nicht so rasch statt, so dass vor den bewegten Körpern eine Schicht verdichteter Luft sich befindet. Hinter denselben dagegen ist die Luft verdünnt; denn bei sehr rascher Bewegung kann die Luft nicht rasch genug in den vorher von dem Körper eingenommenen Raum eindringen, um dort, gleich nachdem der Körper sich fortbewegt hat, die normale Dichtigkeit wieder herzustellen. Es tritt also zu der vorhin betrachteten Ursache eines Geschwindigkeitsverlustes bei sehr raschen Bewegungen noch die hinzu, dass der Körper in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung einen stärkern Druck erfährt als in der Richtung derselben.

Ausser von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers hängt der Widerstand der Luft auch wesentlich ab von der Gestalt desselben, besonders von dem Flächeninhalt des auf der Bewegungsrichtung senkrechten Querschnittes des Körpers, denn mit diesem ändert sich in obigem Ausdruck der Coefficient  $\mu$ . Je grösser dieser Querschnitt ist, eine um so grössere Luftmenge muss der Körper aus der Stelle drängen. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass diese zu verdrängende Luftmenge und damit der von dieser abhängige Widerstand der Luft der Grösse dieses Querschnitts proportional ist. Ausserdem übersieht man leicht, dass bei gleichem Querschnitt der Widerstand auch von der Gestalt abhängt, dass also ein vorn keilförmig zugespitzter Körper einen kleinern Widerstand findet als ein vorn flacher.

Bei gleicher Gestalt und gleicher Geschwindigkeit zweier bewegter Körper mit verschiedener Masse erfährt der Körper kleinerer Masse eine stärkere Verzögerung als der Körper mit grösserer Masse, weil er bei kleinerer lebendiger Kraft denselben Widerstand zu überwinden hat. Daraus folgt dann unmittelbar, dass bei dem freien Fall in der Luft leichte Körper langsamer fallen müssen als schwere, so dass wir in dem Widerstande der Luft neben dem früher erwähnten Gewichtsverlust der Körper in der Luft den Grund der beobachteten Abweichung vom Fallgesetz erkennen.

## Dritter Abschnitt.

### Von der Wellenbewegung.

#### Erstes Kapitel.

#### Theoretische Principien der Wellenbewegung.

##### §. 112.

**Schwingende Bewegung eines Punktes.** Wenn ein materieller Punkt  $A$  (Fig. 193), welcher durch irgend welche Kräfte in einer bestimmten Lage so festgehalten wird, dass er, sobald er aus derselben fortgeschoben ist, wieder in seine frühere Lage zurückgezogen wird, durch eine äussere Kraft aus seiner Gleichgewichtslage nach  $B$  entfernt und dann der Wirkung der

Fig. 193.



ihn in die Ruhelage zurückziehenden Kräfte überlassen wird, so wird er zunächst wieder in seine frühere Lage zurückkehren. Da aber die Kräfte, welche den Punkt zurückziehen, so lange auf ihn wirken, bis er die Lage in  $A$  wieder erreicht hat, so ist die ihm ertheilte Bewegung eine beschleunigte, und der Punkt ist in  $A$  mit einer gewissen gegen  $C$  gerichteten Geschwindigkeit begabt. In Folge dieser Geschwindigkeit muss nun der Punkt, gerade wie das bewegte Pendel über die verticale Lage, sich über die Ruhelage hinaus gegen  $C$  hin bewegen. Von der Zeit an aber, wo er die Ruhelage nach der andern Seite verlassen hat, wirken die ihn nach  $A$  ziehenden Kräfte wieder auf den Punkt ein. Diesmal aber sind sie der Bewegung entgegengerichtet, bewirken also, dass die Bewegung des Punktes eine verzögerte wird, bis er in dem Abstände  $AC$  von  $A$  auf einen Augenblick in Ruhe kommt, wenn durch die Wirkung der nach  $A$  gerichteten Kräfte die dem Punkte auf dem Wege  $BA$  ertheilte Geschwindigkeit vernichtet ist.

Der Abstand  $AC$  ist gleich dem Abstände  $AB$ , da der bewegte Punkt die Geschwindigkeit in  $A$  nur in Folge der gegen  $A$  gerichteten Kräfte erhalten hatte, und dieselben Kräfte es sind, welche die Bewegung desselben hemmen. Von  $C$  aus wird dann der betrachtete Punkt gerade so nach  $A$  zurückkehren, wie vorher von  $B$ , wird ebenso in Folge der auf diesem Wege erlangten Geschwindigkeit sich über  $A$  hinausbewegen nach  $B$  hin, weiter von  $B$  wieder über  $A$  nach  $C$  und so fort. Kurz der Punkt wird eine hin und her

gehende Bewegung um den Punkt  $A$  vollführen, indem er in Folge der ihn gegen  $A$  hinziehenden Kräfte sich abwechselnd der Gleichgewichtslage nähert und von ihr entfernt.

Eine solche hin und her gehende Bewegung eines Punktes um eine bestimmte Lage nennt man eine schwingende Bewegung, sie wird überall dort eintreten, wo ein Punkt aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, ohne in eine neue Gleichgewichtslage übergeführt zu sein; ein specielles Beispiel einer solchen haben wir bereits früher beim Pendel kennen gelernt, welches in Folge der Schwerkraft Schwingungen um die Verticale vollführt. Andere Arten von schwingenden Bewegungen der einzelnen Theile fester, flüssiger und gasförmiger Körper werden wir demnächst zu betrachten haben.

Den Abstand der äussersten Punkte der Bahn des Beweglichen von der Ruhelage, die Länge  $AB$ , nennen wir die Schwingungsweite oder Amplitude der Schwingung, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen einer ganzen Schwingung gebraucht, das heisst, um den Weg von  $B$  nach  $C$  und wieder zurück zu durchlaufen, die Schwingungsdauer. Den Bewegungszustand des Punktes zu irgend einer Zeit, oder an einer Stelle  $a$  der Bahn desselben nennt man die Oscillationsphase, so dass also die Phase durch den Abstand  $Aa$  von der Ruhelage, die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Punktes in dem betrachteten Augenblicke bestimmt wird. Während einer ganzen Oscillation ist der bewegte Punkt in allen möglichen Phasen, d. h., er nimmt alle überhaupt bei den Schwingungen möglichen Bewegungszustände an. Zugleich sieht man, dass die Zeit, welche verfliesst, bis der Punkt wieder in derselben Phase ist, ebenfalls der ganzen Oscillationsdauer gleich ist. Die um eine halbe Schwingungszeit von einander entfernten Phasen nennt man entgegengesetzte. Der bewegte Punkt befindet sich dann in gleichen, aber der Richtung nach entgegengesetzten Bewegungszuständen; die Abstände von der Ruhelage sind dann gleich, aber auf verschiedenen Seiten, und die Geschwindigkeiten sind gleich, aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wir nahmen vorhin an, dass die schwingende Bewegung des Punktes dadurch eingeleitet wurde, dass äussere Kräfte denselben nach  $B$  entfernten und dann ihn der Wirkung der nach  $A$  gerichteten Kräfte überliessen; es ist doch klar, dass die schwingende Bewegung auch dadurch eingeleitet werden kann, dass dem Punkt  $A$  durch einen Stoss eine gewisse nach  $B$  gerichtete Geschwindigkeit ertheilt wird. Er wird sich dann in der Richtung nach  $B$  bewegen, bis durch die Wirkung der ihn nach  $A$  zurückziehenden Kräfte die dem Punkte ertheilte Geschwindigkeit aufgehoben wird, dann sich mit beschleunigter Bewegung nach  $A$  zurückbewegen, darüber hinaus gegen  $C$  hin und von da an ganz in der vorhin betrachteten Weise über  $A$  nach  $B$ , um die soeben betrachteten Schwingungen zu vollführen.

### §. 113.

**Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes.** Um die schwingende Bewegung eines Punktes zu bestimmen, ist es nothwendig, in jedem Augenblicke den Ort sowohl als die Geschwindigkeit des Punktes der Phase und Richtung nach zu kennen. Wir werden daher eine Gleichung aufzusuchen haben, worin der Abstand des beweglichen Punktes von der

Ruhelage, ferner die Geschwindigkeit desselben als abhängig von dem Abstande dargestellt wird. Es ist nun klar, dass beides wesentlich davon abhängt, nach welchem Gesetze die Kraft, welche den Punkt gegen die Gleichgewichtslage hinzieht, sich mit dem Abstande desselben von der Ruhelage ändert.

Wir setzen voraus, dass die auf den Punkt in jedem Augenblicke wirkende Kraft dem Abstande desselben von der Gleichgewichtslage proportional ist. Bezeichnen wir dann die Kraft, welche den Punkt zieht, wenn er sich im Abstande  $y$  von der Gleichgewichtslage befindet, mit  $\psi$ , und mit  $p$  eine Constante, so ist unsere Voraussetzung dargestellt durch

$$\psi = - p \cdot y.$$

Wir müssen dem Ausdrucke für  $\psi$  das negative Vorzeichen geben, die Richtung, nach welcher der Punkt gezogen wird, immer der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher derselbe aus der Gleichgewichtslage entfernt ist; befindet sich der Punkt rechts von  $A$  in  $a$  (Fig. 193), so wird er nach links hin gezogen, befindet er sich aber zur Linken von  $A$ , so wird er nach rechts hin gezogen. Setzen wir in unserer Gleichung für  $\psi$  den Abstand  $y = 1$ , so wird

$$\psi = - p,$$

so dass  $p$  die Kraft bedeutet, welche den beweglichen Punkt gegen die Gleichgewichtslage zieht, wenn er sich in der Einheit des Abstandes von derselben befindet.

Wir messen die Kraft  $p$  nun am bequemsten durch die Beschleunigung, welche sie dem betrachteten Punkte ertheilt; nennen wir diese  $k$  und die Masse des Punktes  $m$ , so ist nach §. 14

$$k = \frac{p}{m}$$

und ist nun  $\varphi$  die Beschleunigung, welche die im Abstande  $y$  wirkende Kraft ertheilt, so ist

$$\varphi = - k \cdot y.$$

Bei dieser speciellen Voraussetzung erkennt man nun leicht, dass die Grösse der Amplitude auf die Oscillationsdauer ohne Einfluss ist. Da die wirkende Kraft dem Abstande des Punktes von der Ruhelage proportional ist, so wächst in eben demselben Verhältnisse, in welchem die Amplitude der Schwingung zunimmt, auch die Beschleunigung und somit die Geschwindigkeit der Bewegung. Der grössere Raum wird aber bei demselben Verhältnisse grössere Geschwindigkeit in derselben Zeit durchlaufen als der kleinere Raum mit der kleineren Geschwindigkeit.

Nehmen wir deshalb eine Oscillation, nach welcher der Punkt in seiner Ruhelage wieder ankommt, wenn er im Anfange derselben davon ausgeht, als geschlossenes Ganzes, und bezeichnen die Zeit, welche der Punkt braucht, um dieselbe zurückzulegen, mit  $T$ , so wird es am bequemsten sein, die Zeit  $t$ , von welcher wir den Abstand  $y$  des Punktes von der Ruhelage, die diesem Abstande entsprechende Geschwindigkeit abhängig darstellen wollen, von dem Anfange einer solchen Oscillation zu rechnen und sie in Theilen der Oscillationsdauer zu messen.

Nennen wir nun die Amplitude der Schwingung  $\alpha$ , so leitet die analytische Mechanik für den von uns angenommenen Fall aus der Gleichung für die beschleunigende Kraft

$$\varphi = -k \cdot y$$

als Gleichung zwischen  $y$  und  $t$  ab

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T},$$

und als Gleichung für die Geschwindigkeit  $v$  des bewegten Punktes zur Zeit  $t$

$$v = \alpha \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} = \beta \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wenn wir annehmen, dass zur Zeit  $t = 0$  oder zu Anfang der Bewegung der bewegliche Punkt sich in der Ruhelage befindet, er also durch einen Stoss in Bewegung gesetzt wird.

Wir müssen es uns versagen, die Ausdrücke für  $y$  und  $v$  aus der Gleichung für  $\varphi$  herzuleiten, da es nicht ohne zu weit gehende Anwendung der Integralrechnung geschehen kann. Wir wollen dagegen nachweisen, dass aus der ersten Gleichung

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

für den Abstand des Punktes von der Ruhelage zur Zeit  $t$  die Gleichung, welche die Geschwindigkeit darstellt, hervorgeht, und dass diese Gleichung auf einen Ausdruck für die beschleunigende Kraft der durch die Gleichung (1) dargestellten Bewegung führt, welche mit dem von uns angenommenen übereinstimmt. Dann wollen wir weiter zeigen, dass die durch Gleichung (1) dargestellte Bewegung diejenige ist, welche wir im vorigen §. beschrieben haben.

Wir sahen früher, §. 1, dass wir bei ungleichförmigen Bewegungen die Geschwindigkeit des bewegten Körpers an irgend einer Stelle der Bahn erhalten durch den Quotienten

$$v = \frac{dy}{dt},$$

wo  $dy$  ein sehr kleines Stück des von dem Körper durchlaufenen Raumes bedeutet, so klein, dass wir die Geschwindigkeit des Körpers, während er dasselbe durchläuft, als constant annehmen dürfen, und  $dt$  die Zeit ist, in welcher der Körper den Raum zurücklegt.

Ist nun der Abstand des Punktes  $y$  von seiner Ruhelage zur Zeit  $t$

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so erhalten wir, da der Punkt in der kleinen Zeit  $dt$  den Weg  $dy$  zurücklegt, für den Abstand  $y + dy$  zur Zeit  $t + dt$

$$y + dy = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{dt}{T} \right).$$

Drücken wir nun den Sinus der Summe nach der bekannten trigonometrischen Formel durch Sinus und Cosinus der einzelnen Summanden aus,

so wird

$$y + dy = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{dt}{T} + \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{dt}{T}.$$

Subtrahiren wir nun auf beiden Seiten  $y$ , so wird

$$dy = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{dt}{T} + \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{dt}{T} - \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Zeit  $dt$  ist so bestimmt, dass während derselben die Geschwindigkeit constant sei; das ist dieselbe aber nur für eine verschwindend kleine Zeit. Deshalb können wir ohne Ungenauigkeit setzen

$$\begin{aligned} \cos 2\pi \frac{dt}{T} &= 1, \\ \sin 2\pi \frac{dt}{T} &= 2\pi \frac{dt}{T}. \end{aligned}$$

Dadurch wird dann

$$dy = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} + \alpha \cdot 2\pi \frac{dt}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} - \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

oder

$$dy = \alpha \cdot 2\pi \frac{dt}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

und wenn wir an beiden Seiten durch  $dt$  dividiren, schliesslich

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \dots \quad \text{(II)}$$

Wir sehen also, dass bei einer Bewegung, bei der die Abstände  $y$  des Beweglichen von der Ruhelage durch die Gleichung (I) dargestellt werden, die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  durch die Gleichung (II) dargestellt wird.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich nun nachweisen, dass diese Bewegung durch eine Kraft veranlasst wird, welche den Abständen  $y$  proportional ist, oder dass

$$\varphi = -k \cdot y = -k \cdot \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ist.

Wir sahen im §. 1, dass bei ungleichförmigen Bewegungen, bei welchen die Geschwindigkeit sich stets ändert, die Beschleunigung der Bewegung in jedem Augenblicke dargestellt wird durch den Quotienten

$$\frac{dv}{dt},$$

worin  $dv$  die Grösse ist, um welche die Geschwindigkeit  $v$  des Körpers während der sehr kleinen Zeit  $dt$  zunimmt, indem dieser Quotient angibt, um wieviel die Geschwindigkeit in der Einheit der Zeit zunehmen würde, wenn sie in jedem Zeithheilchen  $dt$  um die gleiche Grösse  $dv$  zunähme. Wir haben nun vorhin die Beschleunigung des Punktes in dem Abstände  $y$  von der Gleichgewichtslage  $\varphi$  genannt, es ist daher

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

der Ausdruck, welcher uns in den Stand setzt, aus der in jedem Augenblicke vorhandenen Geschwindigkeit der Bewegung die Beschleunigung derselben zu erhalten.

Nehmen wir nun an, dass in unserem Falle in der Zeit  $dt$  sich die Geschwindigkeit um  $dv$  ändere, so ist nach Gleichung (II), welche uns die Geschwindigkeit  $v$  zu jeder Zeit  $t$  angibt,

$$v + dv = \alpha \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{dt}{T} \right)$$

und gerade wie vohin

$$v + dr = \alpha \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{dt}{T} - \alpha \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{dt}{T}.$$

Da wir hier ebenfalls  $dt$  verschwindend klein setzen müssen, so ist wieder

$$\cos 2\pi \frac{dt}{T} = 1,$$

$$\sin 2\pi \frac{dt}{T} = 2\pi \frac{dt}{T}$$

und somit

$$v + dv = \alpha \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} - \alpha \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot dt \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Ziehen wir an beiden Seiten  $v$  ab, so wird

$$dv = -\alpha \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot dt \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und dividiren wir durch  $dt$ , schliesslich

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = -\alpha \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \dots \quad \text{(III)},$$

ein Ausdruck, der vollständig mit unserer Voraussetzung

$$\varphi = -k \cdot y$$

übereinstimmt, wenn wir die constante Grösse

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

oder

$$\varphi = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y$$

setzen.

Wir sehen somit, dass die durch Gleichung (I) dargestellte Bewegung eine Kraft zur Voraussetzung hat, welche dem Abstände des bewegten Punktes von der Ruhelage proportional ist. Da wir nun im vorigen §. gesehen haben, dass, wenn auf einen Punkt, der aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, derartige Kräfte einwirken, eine schwingende Bewegung entstehen muss, so folgt, dass die durch Gleichung (I) dargestellte Bewegung mit der im vorigen §. beschriebenen übereinkommt. Indess ist es leicht, durch eine nähere Betrachtung der Gleichung nachzuweisen, dass sie eine schwingende Bewegung darstellt.

Zunächst übersieht man sofort, dass die durch die Gleichung

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$



dargestellte Bewegung eine periodische ist; denn wir erhalten

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ für } t = 0, \frac{1}{2} T, \frac{2}{2} T, \frac{3}{2} T, \frac{4}{2} T, \frac{5}{2} T \dots \\ y &= \alpha \text{ für } t = \frac{1}{4} T, \frac{5}{4} T, \frac{9}{4} T \dots \\ y &= -\alpha \text{ für } t = \frac{3}{4} T, \frac{7}{4} T, \frac{11}{4} T \dots \end{aligned}$$

Denn im ersten Falle ist

$$y = \alpha \cdot \sin n\pi = 0,$$

im zweiten

$$y = \alpha \cdot \sin(4n + 1) \frac{\pi}{2} = \alpha$$

und im letzten

$$y = \alpha \cdot \sin(4n + 3) \frac{\pi}{2} = -\alpha.$$

Für alle übrigen Werthe von  $t$  erhalten wir Werthe für  $y$ , welche von 0 verschieden zwischen  $+\alpha$  und  $-\alpha$  liegen.

Dies stimmt nun vollständig mit der von uns betrachteten Bewegung überein, denn für  $t = 0$  befindet sich der bewegte Punkt in der Ruhelage und ebenso nach jeder Anzahl von halben Oscillationen, da der Punkt die halbe Oscillationsdauer braucht, um sich von  $A$  nach  $B$  oder  $C$  und wieder zurückzubewegen. Am Ende des ersten Viertel der Oscillationszeit befindet sich der Punkt an dem äussersten Punkte seiner Bahn und ebenso am Ende jeder ungeraden Anzahl von Vierteln, der Werth von  $y$  ist also gleich  $+\alpha$ . Am Ende des 1, 5, 9... überhaupt jedes  $(4n + 1)$  Viertels befindet er sich in  $B$ , am Ende jedes 3, 7, 11... überhaupt jedes  $(4n + 3)$  Viertels dagegen in  $C$  an der entgegengesetzten Seite der Gleichgewichtslage, die Zeichen der Abstände müssen also für diese Fälle sich entgegengesetzt sein.

Zu allen übrigen Zeiten sind die Abstände bald an der positiven, bald an der negativen Seite von  $A$  grösser als 0 und kleiner als  $\alpha$ , wie unsere Gleichung es darstellt.

Ferner nehmen in der Gleichung

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

die Werthe von  $y$  erst rascher, dann langsamer zu, von  $t = 0$  bis  $t = \frac{1}{4} T$  da der Ausdruck  $2\pi \frac{t}{T}$  während dieser Zeit alle Werthe von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  durchläuft, und die Sinus der Bögen anfangs in demselben, später aber viel langsameren Verhältnisse wachsen als die Bögen. Von der Zeit  $t = \frac{1}{4} T$  bis  $t = \frac{1}{2} T$  nehmen dann die Werthe von  $y$  erst langsamer, dann rascher ab, aber sie haben von  $t = 0$  bis  $t = \frac{1}{2} T$  dasselbe Vorzeichen. Für alle Werthe zwischen  $t = \frac{1}{2} T$  und  $t = T$  erhält dann  $y$  das entgegengesetzte Zeichen sein Werth wird aber von  $t = \frac{1}{2} T$  bis  $t = \frac{3}{4} T$  in derselben Weise grösser als von  $t = 0$  bis  $t = \frac{1}{4} T$  und von  $t = \frac{3}{4} T$  bis  $t = T$  nach demselben Gesetz kleiner als von  $t = \frac{1}{4} T$  bis  $t = \frac{1}{2} T$ .

Dasselbe Gesetz befolgen aber auch die Abstände  $y$  des bewegten Punktes von der Ruhelage in den verschiedenen Phasen der Oscillation. In dem ersten Viertel der Schwingung entfernt sich der Punkt mit abnehmender Geschwindigkeit nach  $B$  hin, so dass also die Abstände anfangs rascher, dann langsamer wachsen; in dem zweiten Viertel kehrt der Punkt mit beschleunigter Geschwindigkeit nach  $A$  zurück, die Abstände desselben nehmen

also anfangs langsamer, dann rascher ab. In der ganzen zweiten Hälfte der Oscillation befindet sich der Punkt auf der entgegengesetzten Seite von A, die Abstände haben also entgegengesetztes Vorzeichen; im dritten Viertel wachsen sie, im vierten nehmen sie ab in derselben Weise, wie im ersten und zweiten Viertel.

Man sieht somit, wie durch unsere Gleichung die Abstände des bewegten Punktes auf das vollständigste bestimmt werden, da wir mittels derselben den Ort des Beweglichen in jedem Augenblicke erhalten können.

Ebenso ist durch eine Betrachtung der einzelnen Phasen leicht ersichtlich, dass die Gleichung (II)

$$v = \beta \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{t}{T}$$

die Geschwindigkeit des bewegten Punktes zu jeder Zeit wiedergibt.

Die Geschwindigkeit  $v$  nimmt ab, wenn die Abstände des bewegten Punktes wachsen, da die auf den Punkt wirkenden Kräfte ihn stets nach der Ruhelage hinziehen; ist der Abstand gleich der Amplitude der Schwingung, so ist die Geschwindigkeit gleich 0, da sich dort die Richtung der Bewegung umkehrt. Während dann der Punkt nach der Ruhelage zurückkehrt, ist die Bewegung eine beschleunigte, die Geschwindigkeit hat das entgegengesetzte Zeichen wie vorhin, sie nimmt aber zu bis zu dem Augenblicke, wo  $y = 0$ , der Punkt also wieder in der Gleichgewichtslage angelangt ist. Während des dritten Viertels der Oscillation entfernt sich dann der Punkt wieder von der Gleichgewichtslage, die Geschwindigkeit nimmt ab, bis sie am Ende dieser Zeit gleich 0 geworden ist. Von da ab kehrt sich die Geschwindigkeit wieder um und wird grösser, während  $y$  kleiner wird, bis sie für  $y = 0$  wieder ihren grössten Werth erreicht. Ganz dieselben Werthe durchläuft die Gleichung (II). Der Cosinus ist 1 für  $t = 0$  und nimmt ab von  $t = 0$  bis  $t = \frac{1}{4} T$ . Zwischen  $t = \frac{1}{4} T$  und  $t = \frac{1}{2} T$  wächst er von 0 bis  $-1$  und dann von  $t = \frac{1}{2} T$  bis  $t = \frac{3}{4} T$  geht er von  $-1$  bis 0. In der folgenden Zeit wächst er dann wieder von 0 bis 1, während  $t$  von  $\frac{3}{4} T$  bis  $T$  zunimmt.

Man sieht also, wie durch die Gleichungen (I) und (II) die Gesetze der oscillirenden Bewegung eines Punktes, welcher durch Kräfte bewegt wird, die seinem Abstände von der Ruhelage proportional sind, vollständig dargestellt werden, da sie uns in jedem Augenblicke den Ort wie die Geschwindigkeit des bewegten Punktes nach Grösse und Richtung wiedergeben.

Die Gleichung (III) setzt uns auch in den Stand, die Dauer einer ganzen Oscillation zu bestimmen, wenn wir die beschleunigende Kraft der Bewegung kennen. Denn wir hatten

$$\varphi = -k \cdot y,$$

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

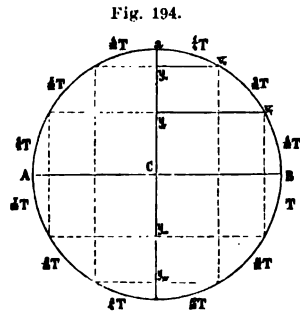
und daraus

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p}{m}\right)}}$$

Können wir demnach  $k$  auf irgend eine Weise unabhängig von  $T$  bestimmen, so können wir daraus  $T$  berechnen. Wir werden demnächst diesen Ausdruck zu dem Zwecke benutzen.

§. 114.

**Geometrische Darstellung der Schwingungen eines Punkte**  
 Wenn wir mit einem Radius  $r$ , den wir der Amplitude der schwingende Bewegung  $\alpha$  gleich setzen, einen Kreis beschreiben und annehmen, dass die Dauer einer Oscillation  $T$  durch den Umfang des Kreises dargestellt wird



so geben uns die Sinus und Cosinus der Böge dieses Kreises die Abstände des Punktes von der Gleichgewichtslage und die diesen Abständen entsprechenden Geschwindigkeiten.

Nehmen wir an, der bewegliche Punkt befinde sich zur Zeit  $t = 0$  im Mittelpunkte des Kreises und er bewege sich auf dem Durchmesser  $Ca$  hin und her, so wird er sich nach  $\frac{1}{12}$  Undulation in  $y_1$  befinden, denn

$$y_1 = \alpha \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{1/12 T}{T}$$

und die in diesem Augenblicke stattfindende Geschwindigkeit ist dem Cosinus des Bogens  $\frac{1}{12} T$  oder der Länge  $y_1$  proportional. Nach  $\frac{1}{4} T$  ist der Punkt in  $a$ , der Abstand hat den größten Werth erreicht, und die entsprechende Geschwindigkeit ist gleich 0, gleich  $\cos 2\pi \cdot \frac{3/12 T}{T} = \cos \frac{\pi}{2}$ . So auch in den folgenden durch die Bögen des Kreises gemessenen Zeiten, die Sinus  $y''$ ,  $y'''$  der entsprechenden Bögen geben die Abstände des Punktes und die zugehörigen Cosinus sind den Geschwindigkeiten desselben in den verschiedenen Phasen der Bewegung proportional.

§. 115.

**Schwingende Bewegung eines Punktes unter Annahme eines andern Kraftgesetzes.** Für die meisten der von uns zu untersuchenden schwingenden Bewegungen reicht das von uns angenommene Gesetz der Kraftwirkung, welches in der Gleichung

$$\varphi = -ky$$

ausgedrückt ist, aus. Indess werden wir einige Fälle von schwingenden Bewegungen zu besprechen haben, bei denen das Gesetz der Kraftwirkung auf die schwingenden Punkte ein complicirteres ist. So ist sofort das Gesetz der Kraftwirkung ein anderes, wenn der betrachtete Punkt in einem Medium sich bewegt, welches seiner Bewegung in jedem Augenblicke einen Widerstand entgegensetzt. Ein solcher Widerstand wirkt, wie wir §. 111 bemerkten, in jedem Augenblicke wie eine der augenblicklichen Bewegungsrichtung entgegengesetzte Kraft; wir wollen nun den Fall untersuchen, wenn dieser Widerstand der augenblicklichen Geschwindigkeit des bewegten Punktes proportional ist. Nennen wir die Verzögerung, welche der Punkt bei der Geschwindigkeit 1 erfährt,  $2\varepsilon$ , so ist die Verzögerung  $\varphi_2$ , die er erfährt, wenn er die Geschwindigkeit  $v$  hat,

$$\varphi_2 = 2\varepsilon \cdot v.$$

Wurde nun die Beschleunigung in einem widerstandslosen Medium durch das bisher angenommene Gesetz dargestellt

$$\varphi_1 = -k \cdot y,$$

so erhalten wir jetzt für die Beschleunigung des Punktes in dem widerstehenden Medium

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -k y - 2 \varepsilon v, \quad . . . . . (a)$$

da wir, um die resultirende Beschleunigung zu erhalten, von der Beschleunigung, welche der Punkt ohne Widerstand erhalten würde, die Verzögerung in Folge des Widerstandes abziehen müssen.

Um nun die Bewegung des Punktes bei diesem Beschleunigungsgesetze darzustellen, müssen wir auch hier wieder aus der Gleichung (a) eine Gleichung zwischen  $y$  und der Zeit  $t$  und zwischen  $v$  und  $t$  ableiten. Wir können indess in diesem ebenso wenig wie in dem vorhin betrachteten einfachern Falle eine solche Beziehung ohne Hülfe der Integralrechnung ableiten; deshalb begnügen wir uns auch hier wieder damit, den Nachweis zu führen, dass die von der höhern Analysis abgeleitete Beziehung zwischen  $y$  und  $t$  für die Beschleunigung  $\varphi$  die Gleichung (a) liefert, dass sie somit das durch dieselbe dargestellte Beschleunigungsgesetz zur Voraussetzung hat.

Die von der Analysis aus der Gleichung (a) abgeleitete Beziehung zwischen  $y$  und  $t$  ist

$$y = A e^{-\varepsilon t} \sin t \sqrt{k - \varepsilon^2}, \quad . . . . . (I)$$

worin  $e$  wie immer die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet.

Um die bei dieser Bewegung in jedem Augenblicke stattfindende Geschwindigkeit  $v$  und Beschleunigung  $\varphi$  zu erhalten, haben wir gerade wie in §. 113 die Quotienten  $\frac{dy}{dt} = v$  und  $\frac{dv}{dt} = \varphi$  zu bilden, unter der Voraussetzung, dass  $dt$  ein verschwindend kleines Zeittheilchen ist.

Wächst in Gleichung (I)  $t$  um  $dt$ , so wächst  $y$  um  $dy$ , somit erhalten wir zunächst

$$y + dy = A \cdot e^{-\varepsilon(t+dt)} \sin(t + dt) \sqrt{k - \varepsilon^2}.$$

Entwickeln wir den Sinus und beachten, dass

$$e^{-\varepsilon(t+dt)} = e^{-\varepsilon t} \cdot e^{-\varepsilon \cdot dt},$$

sowie dass, weil  $dt$  verschwindend klein ist,

$$\cos \sqrt{k - \varepsilon^2} dt = 1, \quad \sin \sqrt{k - \varepsilon^2} dt = \sqrt{k - \varepsilon^2} \cdot dt,$$

so erhalten wir

$$y + dy = e^{-\varepsilon dt} \left\{ A e^{-\varepsilon t} \cdot \sin t \sqrt{k - \varepsilon^2} + A e^{-\varepsilon t} \cdot \sqrt{k - \varepsilon^2} dt \cos t \sqrt{k - \varepsilon^2} \right\}.$$

Den Exponentialausdruck  $e^{-\varepsilon dt}$  kann man nun in eine Reihe entwickeln und schreiben

$$e^{-\varepsilon dt} = 1 - \varepsilon dt + \frac{\varepsilon^2 dt^2}{2} - \dots$$

Schon das mit dem Quadrat von  $dt$  behaftete Glied und ebenso alle folgenden kann man als gegen  $\varepsilon dt$  unendlich klein vernachlässigen. Behalten wir die beiden ersten Glieder bei und führen die angedeutete Multi-

plication aus, wobei wir wieder das mit  $d^2$  behaftete Glied vernachlässigen, so wird

$$y + dy = A \cdot e^{-\epsilon t} \cdot \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} \\ - \left\{ \epsilon \cdot A e^{-\epsilon t} \cdot \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} - A \cdot e^{-\epsilon t} \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\} dt$$

Das Glied vor der Klammer ist gleich  $y$ . Ziehen wir auf beiden Seiten  $y$  ab und dividiren durch  $dt$ , so erhalten wir

$$\frac{dy}{dt} = v = -A \cdot e^{-\epsilon t} \left\{ \epsilon \cdot \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} - \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\}. \quad (II)$$

Lassen wir nun, um  $\varphi$  zu entwickeln, in dem Ausdrücke für  $v$  die Zeit  $t$  um  $dt$  wachsen, so wächst  $v$  um  $dv$ , und es ist zuerst

$$v + dv = -A \cdot e^{-\epsilon(t+dt)} \\ \left\{ \epsilon \sin (t + dt) \sqrt{k - \epsilon^2} - \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos (t + dt) \sqrt{k - \epsilon^2} \right\}.$$

Verfahren wir gerade wie vorhin und beachten, dass auch jetzt wieder

$$\cos \sqrt{k - \epsilon^2} dt = 1, \quad \sin \sqrt{k - \epsilon^2} dt = \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot dt,$$

so wird

$$v + dv = -e^{-\epsilon dt} \cdot \epsilon A e^{-\epsilon t} \left\{ \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} + \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot dt \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\} \\ + e^{-\epsilon dt} A e^{-\epsilon t} \left\{ \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} - (k - \epsilon^2) \cdot dt \cdot \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\}.$$

Setzen wir auch jetzt wieder  $e^{-\epsilon dt} = 1 - \epsilon dt$ , führen die angedeutete Multiplication aus, und ordnen so, dass die nicht mit  $dt$  versehenen Glieder für sich stehen, so wird

$$v + dv = -A e^{-\epsilon t} \left\{ \epsilon \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} - \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\} \\ + A e^{-\epsilon t} \left\{ \epsilon^2 \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} - 2\epsilon \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} - (k - \epsilon^2) \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\} dt.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist gleich  $v$ ; ziehen wir deshalb  $v$  auf beiden Seiten ab, dividiren durch  $dt$  und ziehen die Glieder passend zusammen, so wird

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = 2 \epsilon \cdot A e^{-\epsilon t} \left\{ \epsilon \sin t \sqrt{k - \epsilon^2} - \sqrt{k - \epsilon^2} \cdot \cos t \sqrt{k - \epsilon^2} \right\} \\ - k \cdot A e^{-\epsilon t} \cdot \sin t \sqrt{k - \epsilon^2}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist aber nach Gleichung (II)  $-2 \epsilon v$ , das zweite nach Gleichung (I)  $-k y$ , so dass wir also erhalten

$$\varphi = -k y - 2 \epsilon v \quad \dots \quad (III).$$

Wie man sieht, ist die Gleichung (III) mit der Gleichung (a) identisch, und somit stellt die Gleichung (I) die Bewegung des Punktes dar, wenn seine Beschleunigung durch Gleichung (a) gegeben ist. Ob nun, wie wir zunächst annahmen, die der Geschwindigkeit proportionale Verzögerung daher rührt, dass der Punkt sich in einem widerstehenden Medium bewegt, oder ob es eine andere Kraft ist, welche in jedem Momente dem Punkte eine seiner Geschwindigkeit proportionale Verzögerung gibt, das ist gleichgültig; sobald durch irgendwelche Umstände das Beschleunigungsgesetz das

durch Gleichung (a) gegebene ist, stellt Gleichung (I) die Bewegung des Punktes dar.

Dass auch diese Bewegung eine schwingende ist, ergibt die Form der Gleichung unmittelbar, denn es folgt aus

$$y = A e^{-\epsilon t} \cdot \sin t \sqrt{k - \epsilon^2},$$

dass für

$$t \sqrt{k - \epsilon^2} = n \cdot \pi \text{ immer } y = 0$$

und dass jedesmal, wenn die Zeit  $t$  alle Werthe von  $t \sqrt{k - \epsilon^2} = 2 n \pi$  bis  $t \sqrt{k - \epsilon^2} = (2 n + 2) \pi$  durchläuft, alle Phasen der Oscillation vorkommen, gerade wie bei dem vorhin betrachteten Fall. Führen wir auch hier die Oscillationsdauer  $T$  ein, so ist dieselbe nach der eben gemachten Bemerkung gegeben durch

$$T \cdot \sqrt{k - \epsilon^2} = 2 \pi,$$

somit

$$\sqrt{k - \epsilon^2} = \frac{2\pi}{T},$$

und damit

$$y = A \cdot e^{-\epsilon t} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

In dieser Form tritt es deutlich hervor, dass sich die Bewegung von der im §. 113 betrachteten nur dadurch unterscheidet, dass die Amplituden nicht constant sind, sondern mit der Zeit stetig abnehmen. Wir erhalten die Amplituden, wenn wir die Werthe von  $y$  zur Zeit

$$t = \frac{T}{4} \dots 3 \frac{T}{4} \dots 5 \frac{T}{4} \dots (2n + 1) \frac{T}{4}$$

bestimmen; dieselben sind

$$A e^{-\epsilon \frac{T}{4}} \dots A e^{-\epsilon \frac{3T}{4}} \dots A e^{-\epsilon \frac{5T}{4}} \dots A e^{-\epsilon \frac{(2n+1)T}{4}}.$$

Das Verhältniss zweier auf einander folgender Amplituden ist

$$q = \frac{A \cdot e^{-\epsilon \frac{(2n+1)T}{4}}}{A \cdot e^{-\epsilon \frac{(2n+3)T}{4}}} = e^{\epsilon \frac{T}{2}}.$$

Die auf einander folgenden Amplituden nehmen somit in geometrischer Progression ab, da der Werth von  $q$  constant ist. Schreiben wir

$$\log q = \frac{\epsilon T}{2} \log c,$$

so folgt, dass die Differenzen der Logarithmen der auf einander folgenden Amplituden constant sind. Diese Differenzen nennt man nach Gauss<sup>1)</sup> die logarithmischen Decremente der Schwingungen. Wie man sieht, sind diese logarithmischen Decremente der verzögernden Kraft proportional und können als Maass derselben dienen. Auf der Beobachtung dieser logarithmischen Decremente in Wasser oder in der Luft schwingender Scheiben

<sup>1)</sup> Gauss, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837. p. 58 ff.

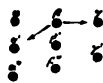
beruht die früher erwähnte von Maxwell und Meyer benutzte Methode zur Bestimmung der innern Reibung von Flüssigkeiten und Gasen. Wir werden sie ebenfalls später zur Messung von derartigen verzögernden Kräften benutzen.

## §. 116.

**Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen.** Wenn wir in einer Reihe von Punkten, welche durch Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten thätig sind, in einer bestimmten Lage, der Gleichgewichtslage, festgehalten werden, einen Punkt in eine schwingende Bewegung setzen, so wird dadurch nicht nur das Gleichgewicht dieses einen Punktes gestört, sondern das der ganzen Reihe. Da die Gleichgewichtslage durch die Wirkung der übrigen Punkte bedingt wird, so muss dadurch, dass der eine Punkt seine Lage ändert, zunächst die der angrenzenden Punkte gestört werden, und von diesen sich die Gleichgewichtsstörung auf immer weitere übertragen.

Wir nehmen an, dass die einzelnen Punkte sich anziehen, und dass die Anziehungskraft sich ändert mit der Entfernung der Punkte von einander. Ueberdies setzen wir voraus, dass der vollständigen Annäherung der Punkte abstossende Kräfte entgegenwirken, die ebenfalls mit der Entfernung der Punkte, aber nach einem andern Gesetze als die anziehenden Kräfte sich ändern. Nehmen wir an, dass mit einer Annäherung der Punkte die abstossenden Kräfte viel rascher wachsen als die anziehenden, so ist durch ein System solcher Kräfte die Gleichgewichtslage der Punkte vollständig bestimmt. In dieser sind die an jedem einzelnen Punkte nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte gleich. Wird nun der Punkt  $\alpha$

Fig. 195.



(Fig. 195) aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und z. B. nach  $\alpha'$  versetzt, so wird dadurch der Abstand zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  grösser.

Durch die Aenderung des Abstandes  $\alpha\beta$  in  $\alpha'\beta$  werden nun die auf  $\beta$  von  $\alpha$  wirkenden Kräfte geändert, sowohl die anziehenden als die abstossenden werden kleiner. Da aber die Abstossungen sehr viel rascher abnehmen als die Anziehungen, so ist der Erfolg dieser Aenderungen, dass  $\beta$  jetzt stärker nach  $\alpha'$  gezogen wird. Da nun in der Gleichgewichtslage die Wirkung der an  $\beta$  angreifenden Kräfte sich aufhebt, so muss jetzt, da die Anziehung nach  $\alpha'$  zugenommen hat, der Punkt  $\beta$  sich  $\alpha$  zu nähern suchen, aber nicht in der Richtung  $\beta\alpha'$ , sondern in einer andern Richtung  $\beta\beta'$ . Denn mit der Bewegung von  $\beta$  nach unten hin ändert sich ebenfalls der Abstand  $\beta\gamma$ , und auch hier muss wegen der raschern Abnahme der abstossenden Kräfte die Anziehung überwiegen. Auf den Punkt  $\beta$  wirkt daher eine nach  $\alpha'$  und eine nach  $\gamma$  gerichtete Anziehung ein,  $\beta$  wird sich also in der Richtung der Resultirenden nach  $\beta'$  bewegen.

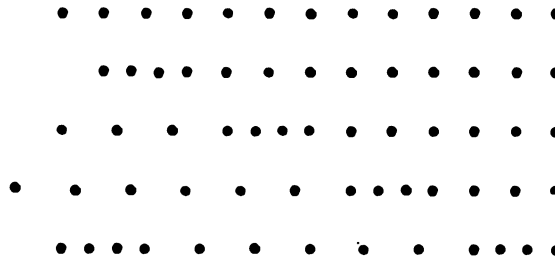
Bewegt sich nun der Punkt  $\alpha$  nach  $\alpha''$ , so muss  $\beta$  aus eben den Gründen folgen und sich nach  $\beta''$  bewegen, zugleich muss aber  $\gamma$  seine Ruhelage verlassen, da jetzt die Anziehung von  $\beta$  auf  $\gamma$  die Abstossung überwiegt, und von  $\gamma$  sich nach  $\gamma'$  bewegen.

die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit  $t$  um die Länge  $x$  fortgepflanzt, und ist die Zeit  $t = n \cdot T$ , wo  $T$  wie vorhin die Oscillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge  $x$  in  $n$  Theile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen  $\alpha$  und  $\nu$  gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oscillationsdauer immer dieselbe ist, so muss, da während der Zeit  $T$  die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung constant sein.

Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten. Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt  $\alpha$  anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Bewegt sich der Punkt  $\alpha$  anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort, dass dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und her gehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen oder longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdichtung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und von einander entfernen (Fig. 199).

Fig. 199.



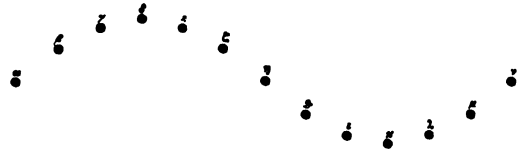
Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des zuerst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die Resultirende sämtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

Möglich ist es ferner, dass die longitudinale und transversale Bewegung sich combinirt und dass die einzelnen Punkte dadurch geneigte oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei einer Art Wasserwellen finden.



überschritten;  $\eta$  ist wie  $\alpha$  von der äussersten Lage in dieselbe zu kehrt;  $\vartheta$  und  $\iota$  haben ähnliche Wege zurückgelegt, wie  $\beta$  und  $\gamma$ ; der P

Fig. 198.



der am Ende der Zeit seine Bewegung, hat den grössten Stand erreicht, und  $\mu$  haben eine Bewegung erhalten, wie  $\beta$  und  $\zeta$  in der folgenden

$\vartheta$  und  $\iota$  in der letzten unmittelbar vorhergehenden Zeit. Die Bewegung hat sich also bis zum Punkte  $\nu$  fortgepflanzt, der gerade im Begriffe seine Bewegung zu beginnen.

Dadurch also, dass einem Punkte  $\alpha$  einer Punktreihe, welche anziehende und abstossende Kräfte der einzelnen Punkte im Gleichgewicht erhalten wird, eine oscillirende Bewegung ertheilt wird, erhalten die folgenden Punkte eine oscillirende Bewegung, welche sich von Punkt zu Punkt in der Reihe fortpflanzt. Dauert die Bewegung des Punktes  $\alpha$  so dauert ebenso die Bewegung der folgenden Punkte fort. Fortpflanzt sich die Bewegung gerade so weiter fort, und zwar wenn  $\nu$  voraussetzt, dass alle Verhältnisse auf der ganzen Punktreihe dieselben, während der ersten Oscillation von  $\nu$ , welche mit der zweiten gleichzeitig ist, um eine der Länge  $\alpha\nu$  gleiche Strecke und so weiter. Ebenso wie nach der einen Richtung pflanzt sich die Bewegung auch in der entgegengesetzten in ganz gleicher Weise fort, so dass nach und nach alle Punkte unserer Punktreihe eine oscillirende Bewegung erhalten.

Wenn die Punkte bei ihrer oscillirenden Bewegung die Punkte verlassen, wie wir es der Deutlichkeit wegen in unseren Figuren annehmen haben, so erhält die Punktreihe im Laufe der Bewegung eine wellenförmige Gestalt, deshalb nennt man die Bewegung eine Wellenbewegung.

Die Strecke, über welche sich die oscillirende Bewegung während einer ganzen Oscillation des Punktes  $\alpha$  verbreitet, hat die Gestalt einer Sinuskurve, deshalb nennt man sie eine Welle oder Wellenlänge. Auf dieser Sinuskurve sind alle Oscillationsphasen, welche der einzelnen oscillirenden Punkte entsprechen, und nach annimmt, neben einander vorhanden, weil jeder Punkt auf der Strecke seine Oscillation um ein wenig später beginnt, und dann gerade zurücklegt als der Punkt  $\alpha$ .

Die einzelne Welle besteht aus zwei congruenten Theilen, einem vordern und einem hintern, dem Wellenberge und dem Wellenthale, in welchem die homologen Punkte, das heisst diejenigen, welche gleich weit vom Wellenberge jeder Wellenhälfte entfernt sind, mit gleichen aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten begabt sind. Die gleich weit vom Wellenberge jeder Wellenhälfte liegenden Punkte befinden sich daher in entgegengesetzten Phasen. Um diesen Gegensatz auszudrücken, ist auch der Wellenberg und Wellenthal gewählt worden, jeder der Hälften kann den Namen Wellenberg oder Wellenthal beilegen.

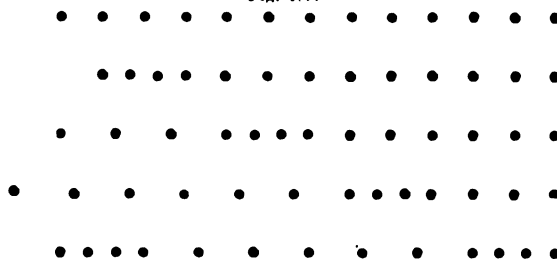
Bei der fortschreitenden Bewegung theilt sich die Reihe in eine Anzahl solcher Wellenlängen, und wenn die Verhältnisse in der ganzen Reihe dieselben sind, so ist auch die Länge der Wellen in der ganzen Reihe

die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit  $t$  um die Länge  $x$  fortgepflanzt, und ist die Zeit  $t = n \cdot T$ , wo  $T$  wie vorhin die Oscillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge  $x$  in  $n$  Theile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen  $\alpha$  und  $\nu$  gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oscillationsdauer immer dieselbe ist, so muss, da während der Zeit  $T$  die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung constant sein.

Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten. Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt  $\alpha$  anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Bewegt sich der Punkt  $\alpha$  anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort, dass dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und her gehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen oder longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdichtung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und von einander entfernen (Fig. 199).

Fig. 199.



Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des erst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die resultirende sämtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

Möglich ist es ferner, dass die longitudinale und transversale Bewegung sich combinirt und dass die einzelnen Punkte dadurch geneigte oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei einer Art Wasserwellen finden.

## §. 117.

**Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe.** Um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Reihe vollständig darzustellen, müssen wir für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punktes der Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach bestimmen können. Wir müssen demnach auch hier, wie bei der oscillirenden Bewegung eines Punktes, eine Gleichung aufsuchen, welche uns die zu bestimmenden Grössen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage in der Punktreihe wiedergibt.

Aus dem Vorigen geht nun zunächst hervor, dass alle Punkte der Reihe eine eben solche oscillatorische Bewegung besitzen, als der erste Punkt, von welchem aus die Bewegung sich der Reihe mittheilte, dass jedoch jeder der entferntern Punkte etwas später seine Bewegung beginnt.

Ist nun die Oscillationsamplitude des zuerst bewegten Punktes  $\alpha$ , so ist der Abstand  $y$  desselben zur Zeit  $t$  von der Gleichgewichtslage nach §. 113

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

worin  $T$  die Dauer der ganzen Schwingung bedeutet.

Ein in der Punktreihe um die Strecke  $x$  von  $\alpha$  entfernter Punkt beginnt nun seine Schwingung um die Zeit  $t'$  später; nennen wir nun  $\tau$  die Zeit, die von dem Augenblicke an verflossen ist, wo dieser Punkt seine oscillirende Bewegung begonnen hat, so ist der Abstand  $y$  dieses Theilchens von der Gleichgewichtslage durch die Gleichung gegeben

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{\tau}{T},$$

da dieser Punkt zur Zeit  $\tau = 0$  seine Bewegung beginnt. Für  $\tau$  können wir nun einsetzen

$$\tau = t - t',$$

da die Zeit  $\tau$  von dem Augenblicke anfängt, wo seit Beginn der Zeit  $t$  die Zeit  $t'$  verflossen ist. Wir haben sonach

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t-t'}{T}$$

als Abstand des um  $x$  von dem ersten entfernten Punktes von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$ .

Nennen wir nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung, den Weg, um welchen sie sich in einer Sekunde fortpflanzt,  $c$ , so ist

$$x = c \cdot t',$$

da der um  $x$  vom Anfange entfernte Punkt zur Zeit  $t'$  seine Bewegung beginnt, in dieser Zeit also die Bewegung sich durch die Strecke  $x$  fortgepflanzt hat.

Daraus folgt

$$t' = \frac{x}{c},$$

und setzen wir das in unseren Ausdruck für  $y$  ein, so wird

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right).$$

Während der Zeit  $T$  pflanzt sich nun, wie wir sahen, die Bewegung um eine Wellenlänge fort; bezeichnen wir diese mit  $\lambda$ , so ist

$$c \cdot T = \lambda$$

und

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Dieser Ausdruck gibt uns den Abstand  $y$  jedes Punktes der Reihe von seiner Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$ , indem wir den entsprechenden Abstand  $x$  des betreffenden Punktes von dem Anfangspunkte der Bewegung einsetzen.

Man sieht sofort, wie dieser Ausdruck den Zustand der Punktreihe so darstellt, wie wir ihn im vorigen Paragraphen abgeleitet haben. Fixiren wir einen Zeitpunkt, in welchem der Punkt, von welchem aus sich die Bewegung fortpflanzte, gerade eine ganze Oscillation zurückgelegt hat, wofür  $t = nT$  ist. Für den ersten Punkt selbst ist  $x = 0$ , demnach

$$y = \alpha \cdot \sin 2n\pi = 0.$$

Das Gleiche ist der Fall für alle Punkte, welche um irgend eine Anzahl ganzer Wellenlängen vom Anfangspunkt entfernt sind; denn für diese ist

$$x = m \cdot \lambda; \quad \frac{x}{\lambda} = m$$

$$y = \alpha \cdot \sin 2(n - m)\pi = 0.$$

Auch diejenigen Punkte, welche vom Anfangspunkte um irgend eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen entfernt sind, befinden sich in der Gleichgewichtslage; für diese ist

$$x = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}; \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{(2m + 1)}{2}$$

$$y = \alpha \cdot \sin (2n - (2m + 1))\pi = 0.$$

Die letztern Punkte besitzen aber eine den vorigen entgegengesetzte Geschwindigkeit. Wir erhalten die Geschwindigkeit der oscillirenden Punkte nach §. 113 durch die Gleichung

$$v = \beta \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Setzen wir nun hier die beiden Werthe

$$\frac{x}{\lambda} = m \text{ und } \frac{x}{\lambda} = \frac{2m + 1}{2}$$

ein, so wird im ersten Falle

$$v = \beta \cdot \cos 2(n - m)\pi = \beta \cdot \cos 2\pi = \beta,$$

im zweiten

$$v = \beta \cdot \cos (2n - (2m + 1))\pi = \beta \cdot \cos \pi = -\beta.$$

Die vom Anfangspunkte um  $m \cdot \lambda$  entfernten Punkte besitzen demnach dieselbe Geschwindigkeit und nach derselben Richtung wie der Anfangspunkt, die von diesen um  $\frac{1}{2} \lambda$  entfernten der Grösse nach zwar dieselbe der Richtung nach aber die entgegengesetzte Geschwindigkeit.

Die übrigen Punkte der Reihe, so weit sich die Bewegung fortgepflanzt hat, befinden sich ausserhalb der Gleichgewichtslage.

Setzen wir z. B.  $x = (m + \frac{1}{4}) \lambda$ , so wird

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi (n - m - \frac{1}{4}) = \alpha \sin - \frac{\pi}{2} = -\alpha,$$

und machen wir  $x = (m + \frac{3}{4}) \lambda$

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi (n - m - \frac{3}{4}) = \alpha \cdot \sin - \frac{3}{2} \pi = \alpha.$$

Auf den Strecken von  $x = m\lambda$  bis  $x = (m + \frac{1}{2}) \lambda$  befinden sich also die Punkte auf der einen Seite auf den Strecken  $x = (m + \frac{1}{2}) \lambda$  bis  $(m + 1) \lambda$  auf der entgegengesetzten Seite der Gleichgewichtslage.

Es wird überflüssig sein, die Vergleichung unseres Ausdruckes mit der Darstellung des vorigen Paragraphen weiter durchzuführen, da das Angeführte hinreichend zeigt, dass dieser Ausdruck die Bewegung der Punkte in der Reihe vollständig wiedergibt.

### §. 118.

**Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen. Interferenz.**  
Werden zugleich an verschiedenen Stellen einer Punktreihe Punkte in Bewegung gesetzt, so pflanzen sich die Bewegungen von jeder Erregungsstelle in der Reihe fort; es fragt sich nun, wie wird die Bewegung derjenigen Punkte sein, welche zugleich von beiden Bewegungen afficirt werden. Jeder dieser Punkte, an welchem z. B. zwei Bewegungen zugleich ankommen, erfährt dann zwei Impulse, und es ist klar, dass seine Bewegung durch beide Impulse bestimmt wird.

Nun sahen wir früher, dass zwei Kräfte, welche zugleich einen Punkt angreifen, ganz unabhängig von einander wirken, dass der Punkt jeder der beiden Kräfte gerade so folgt, als wenn die andere nicht vorhanden wäre. Wirken demnach die Kräfte in derselben Richtung, so summiren sie sich und ebenso die Geschwindigkeiten und die in Folge der Wirkung der Kräfte durchlaufenen Räume. Wirken die Kräfte aber in verschiedenen Richtungen, so gab uns der Satz vom Parallelogramm der Kräfte der Grösse und Richtung nach die resultirende Kraft, und durch diese die resultirende Geschwindigkeit, sowie den in Folge der letztern durchlaufenen Raum. Gerade so muss nun auch die Geschwindigkeit und der in einer Zeit  $t$  bei der schwingenden Bewegung zurückgelegte Raum aus den einzelnen Impulsen, oder aus den Geschwindigkeiten und durchlaufenen Wegen bestimmt werden. Sind die Bewegungen einander parallel, also entweder in allen einzelnen Wellen longitudinal oder in allen transversal und parallel, so summiren sich die Bewegungen; die beschleunigende Kraft sowohl als die Geschwindigkeit des von den sämtlichen Bewegungen getroffenen Theilchens ist die algebraische Summe der beschleunigenden Kräfte und Geschwindigkeiten, welche das Theilchen einzeln besitzen würde, wenn jede Bewegung ohne die andere auf das Theilchen eingewirkt hätte. Entgegengesetzt ge-

setzte Bewegungen sind bei der Bildung dieser Summe mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

Würde nun das Theilchen in Folge der einzelnen Impulse in der Zeit  $t$  um  $y, y', y'' \dots y_n$  versetzt, so folgt aus dem Vorigen, dass der wirkliche Abstand des Punktes  $Y$  auch die Summe der einzelnen Abstände, und dass

$$Y = y' + y'' + y''' + \dots y_n$$

erhalten wird.

Betrachten wir nun zunächst diesen Fall und nehmen an, dass in einer Reihe zwei Bewegungen zu gleicher Zeit ihren Anfang nehmen und sich der Reihe nach der gleichen Richtung fortpflanzen. Die Anfangspunkte der Bewegungen seien um  $a$  von einander entfernt.

Nennen wir die Entfernung irgend eines Punktes der Reihe von dem Mittelpunkte der beiden Punkte  $x$ , so haben wir für den Abstand  $y$  dieses Punktes in der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

wo wir mit  $\alpha$  die Amplitude, mit  $T$  die Oscillationsdauer und mit  $\lambda$  die Wellenlänge dieser Bewegung bezeichnen.

Nennen wir nun die Entfernung desselben Punktes von dem Anfangspunkte der zweiten Bewegung  $x'$ , so erhalten wir als Abstand des Punktes in seiner Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$ , wenn nur die zweite Bewegung wirksam wäre, den Ausdruck

$$y' = \alpha' \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda} \right),$$

wo wir mit  $\alpha'$  die Amplitude der zweiten Bewegung bezeichnen und annehmen, dass die Oscillationsdauer  $T$  und somit die Wellenlänge  $\lambda$  in beiden Fällen dieselbe sei.

Die Entfernung des zweiten Mittelpunktes der Wellenbewegung vom ersten nennen wir  $a$ , wir können demnach für  $x'$  einsetzen

$$x' = x - a,$$

erhalten somit für  $y'$

$$y' = \alpha' \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x-a}{\lambda} \right).$$

Der Abstand  $Y$  des Punktes, der zugleich von diesen Bewegungen getroffen wird, ist nun, wie wir eben sahen, die Summe der beiden Abstände  $y$  und  $y'$ , somit

$$Y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha' \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x-a}{\lambda} \right)$$

erhalten

$$= \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \left\{ \alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \right\} + \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \left\{ \alpha' \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \right\}.$$

Bestimmen wir nun zwei Grössen  $A$  und  $D$  so, dass

$$\begin{aligned} A \cdot \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} &= \alpha + \alpha' \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \\ A \cdot \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} &= \alpha' \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}, \end{aligned}$$

so erhalten wir für  $Y$  den Ausdruck

$$Y = A \cdot \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cdot \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

oder

$$Y = A \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{D}{\lambda} \right).$$

Es resultirt somit aus den beiden einzelnen Wellenbewegungen eine neue, deren Amplitude gleich  $A$  ist und deren Phase gegen die erste um  $D$ , gegen die letzte um  $a - D$  verschieden ist. Die Schwingungsdauer  $T$  und somit die Wellenlänge  $\lambda$  haben sich nicht geändert.

Für  $A$  erhalten wir aus den obigen Ausdrücken

$$\begin{aligned} A^2 \cdot \cos^2 2\pi \frac{D}{\lambda} &= \alpha^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \alpha'^2 \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \\ A^2 \cdot \sin^2 2\pi \frac{D}{\lambda} &= \alpha'^2 \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \end{aligned}$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

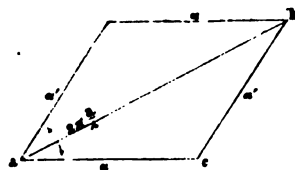
$$A = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{a}{\lambda}}$$

und für  $D$  erhalten wir dann

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{A} \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}.$$

Diese Ausdrücke geben uns ein sehr bequemes Mittel, um mittels geometrischer Construction sowohl den Werth für  $A$  als  $D$  zu erhalten.

Fig. 200.



Wenn wir aus  $\alpha$  und  $\alpha'$  ein Parallelogramm construiren, und den Winkel, den diese beiden Seiten einschliessen, gleich  $2\pi \frac{a}{\lambda}$  machen

(Fig. 200), so ist die den Winkel  $2\pi \frac{a}{\lambda}$  theilende Diagonale  $ab$  des Parallelogrammes die neue Amplitude  $A$ . Denn bekanntlich ist

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cdot \cos c$$

$$c = 180^\circ - 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

$$\cos c = -\cos 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = A^2.$$

Und der Winkel, den  $ab$  mit  $\alpha$  einschliesst, ist der zu bestimmende Winkel  $2\pi \frac{D}{\lambda}$ . Denn es ist

$$ab : \alpha' = \sin c : \sin bac$$

$$\sin bac = \frac{\alpha'}{A} \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}.$$

Der Ausdruck für  $A$  zeigt, dass die Amplitude der resultirenden Wellenbewegung ausser von den Amplituden der Theilbewegungen wesentlich von der Grösse  $a$  abhängt, dem Abstände der erregenden Mittelpunkte, oder was dasselbe ist, der Phasendifferenz der beiden componirenden Bewegungen. Der Ausdruck

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

hat je nach dem Werthe des dritten Gliedes verschiedene Werthe, welche zwischen einem Maximum und einem Minimum liegen.

Ist  $a = n \cdot \lambda$ , so ist

$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \cos 2n\pi = 1,$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' = (\alpha + \alpha')^2,$$

$$A = \alpha + \alpha'.$$

Wenn also der Phasenunterschied der Theilstrahlen 0, oder ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge beträgt, so ist die resultirende Amplitude die Summe der Theilamplituden. Es folgt das auch unmittelbar aus der Natur der Bewegung, denn in diesem Falle wird jeder Punkt, der von den beiden Bewegungen getroffen wird, zugleich nach derselben Richtung getrieben, und da sich die Impulse dann einfach addiren, so muss auch die Amplitude der resultirenden Bewegung gleich der Summe der Theilamplituden sein.

Ist aber  $a$  gleich einer halben Wellenlänge, oder einem ungeraden Vielfachen derselben, so ist

$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \cos 2\pi \frac{(2n+1)\frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \cos (2n+1)\pi = -1,$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' = (\alpha - \alpha')^2,$$

$$A = \alpha - \alpha'$$

und in dem Falle, wo

$$\alpha = \alpha',$$

ist

$$A = 0.$$

Durch das Zusammenwirken beider Bewegungen wird die Bewegung der Punktreihe gestört, die Punkte bleiben in Ruhe.

Auch dieses ersieht man unmittelbar, denn in diesem Falle treffen die beiden Wellenbewegungen in entgegengesetzter Phase zusammen, die Impulse, welche die einzelnen Punkte treffen, sind, im Falle  $\alpha = \alpha'$  an Grösse genau gleich, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzt; die Bewegungen müssen sich also aufheben. Sind die Impulse nicht gleich, so bewegt sich der Punkt mit der Differenz der Geschwindigkeiten in der Richtung des stärkern Impulses.

Für alle übrigen Werthe von  $a$  liegt die resultirende Amplitude zwischen der Summe und Differenz der Theilamplituden. Setzen wir z. B.

$$a = (n + \frac{1}{4}) \lambda,$$



so ist

$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \cos (2n + \frac{1}{2}) \pi = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2,$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}.$$

Ist  $\alpha = \alpha'$ , so wird das Parallelogramm (Fig. 200) ein Quadrat und

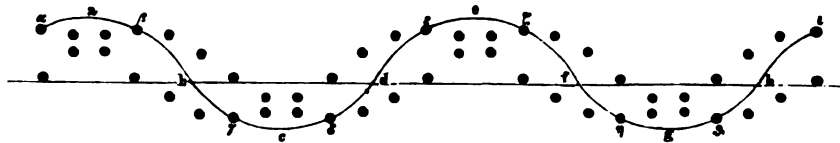
$$A = \alpha \cdot \sqrt{2},$$

$$2\pi \cdot \frac{D}{\lambda} = 45^\circ = \frac{1}{4} \pi,$$

$$D = \frac{1}{8} \lambda.$$

Die resultirende Wellenbewegung ist also gegen die erste, und somit gegen beide um  $\frac{1}{8}$  Wellenlänge verschoben. Man sieht (Fig. 201), wie

Fig. 201.



auch dieses unmittelbar aus der Natur der betrachteten Bewegung folgt, die beiden punktierten Linien gehören den componirenden Bewegungen an, die ausgezogene stellt die resultirende dar; an jeder Stelle der Reihe ist der resultirende Abstand gleich der Summe der Theilabstände; daraus ergibt sich, wie man sieht, für diesen Fall die grössere Amplitude, sowie die Verschiebung der resultirenden Bewegung um  $\frac{1}{8}$  Wellenlänge.

Lassen wir nun  $a$  von  $(n + \frac{1}{4}) \lambda$  bis  $(n + \frac{1}{2}) \lambda$  wachsen, so nimmt die Amplitude der resultirenden Bewegung bis auf 0 ab, während sie bis  $\alpha + \alpha'$  wächst, wenn die Phasendifferenz von  $(n + \frac{1}{4}) \lambda$  bis  $n\lambda$  abnimmt.

Derselbe Wechsel findet statt zwischen  $(n + \frac{1}{2}) \lambda$  und  $(n + 1) \lambda$ , die Amplitude nimmt zu, ist bei  $(n + \frac{3}{4}) \lambda$  gleich  $\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}$  und bei  $(n + 1) \lambda$  wieder gleich  $\alpha + \alpha'$ .

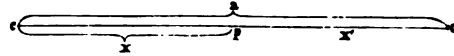
Die durch Interferenz mehrerer Wellenzüge entstehende Bewegung in einer Reihe von Punkten hängt somit wesentlich von der Phasendifferenz der Theilbewegungen ab, je nach dieser kann sich die Bewegung schwächen oder stärken, sie kann vollständig aufgehoben werden oder gleich der Summe der Theilbewegungen sein.

### §. 119.

**Interferenz sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzender Wellenbewegungen; Bildung stehender Wellen.** In dem vorigen Paragraphen haben wir die resultirende Bewegung betrachtet, welche aus der Zusammensetzung zweier Wellenbewegungen hervorgeht, welche in einer Punktreihe sich nach gleicher Richtung verbreiten. Wie wir aber sehen, pflanzt sich von jedem Anfangspunkte einer Wellenbewegung die Bewegung in ganz gleicher Weise nach beiden Seiten fort. Wenn daher die Anfangspunkte zweier Wellenbewegungen um die Strecke  $a$  von einander entfernt

sind, so müssen in dieser Strecke sich zwei Wellenbewegungen nach entgegengesetzter Richtung fortpflanzen, es fragt sich daher, wie sich die Punkte dieser Strecke bewegen. Es ist klar, dass auch für diese Strecke das im vorigen Paragraphen allgemein aufgestellte Interferenzgesetz gültig bleibt; die resultierende Bewegung ist gleich der Summe der Theilbewegungen; wir haben daher, um den Bewegungszustand der in dieser Strecke enthaltenen Punkte zu erhalten, gerade wie vorhin die Bewegung der Punkte in Folge der einzelnen Wellen zu bestimmen und diese zu summiren.

Seien zu dem Ende  $C$  und  $C'$  die beiden um  $a$  entfernten Punkte (Fig. 202), und pflanze sich die Bewegung von  $C$  nach  $C'$  und von  $C'$  in entgegengesetzter Richtung nach  $C$  fort. Sei nun der Abstand eines um  $x$  von  $C$  entfernten Punktes  $p$  von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  in Folge der von  $C$  ausgehenden Bewegung gleich  $y$ , so haben wir



$$y = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Nehmen wir ferner an, der Punkt  $C'$  beginne seine Bewegung zu derselben Zeit und die Bewegung habe dieselbe Amplitude und dieselbe Oscillationsdauer. Bezeichnen wir nun den Abstand des Punktes  $p$  von  $C'$  mit  $x'$ , so erhalten wir für den Abstand  $y'$  dieses Punktes von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  in Folge der von  $C'$  ausgehenden Bewegung

$$y' = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda} \right).$$

Um nun  $x'$  durch  $x$  auszudrücken, haben wir

$$\begin{aligned} x + x' &= a, \\ x' &= a - x \end{aligned}$$

und setzen wir das in unseren Ausdruck für  $y'$  ein,

$$y' = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda} \right).$$

Man sieht, wie dieser Ausdruck die Fortpflanzungsrichtung als der ersten Bewegung entgegengesetzt darstellt, da  $x$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen ist.

Für den Abstand des Punktes  $p$  von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  in Folge der beiden zusammenwirkenden Bewegungen erhalten wir dem Interferenzgesetz gemäss

$$Y = y + y',$$

$$Y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda} \right).$$

Setzen wir nun anstatt der Summe der beiden Sinus nach der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$$

das doppelte Produkt des Sinus der halben Summe und des Cosinus der halben Differenz der beiden Bögen, so wird

$$Y = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right) \cos \pi \frac{a - 2x}{\lambda},$$

oder unter Beachtung, dass  $\cos - p = \cos p$

$$Y = 2\alpha \cdot \cos \frac{2x - a}{\lambda} \pi \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right).$$

In diesem Ausdrucke für  $Y$  ist nun  $x$  nicht mehr in der frühern Weise mit  $t$  verbunden, es ist deshalb nicht mehr für die Phase, das heisst für die Richtung und Geschwindigkeit der Punkte in der frühern Weise bestimmend. Die Abstände von der Gleichgewichtslage, welche die einzelnen Punkte zu den verschiedenen Zeiten  $t$  erlangen, werden durch den letzten Factor der Gleichung für  $Y$  bestimmt

$$\sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right),$$

aus diesem ist  $x$  verschwunden, die verschiedenen Punkte der Reihe durchlaufen daher nicht nach und nach die einzelnen Phasen der Bewegung.

Der Coefficient

$$2\alpha \cdot \cos \frac{2x - a}{\lambda} \pi$$

bestimmt die Amplitude der Bewegung, diese erhält je nach dem Werthe von  $x$  verschiedene Werthe, sie kann, je nachdem  $\cos \frac{2x - a}{\lambda} \pi$  positiv oder negativ ist, verschiedene Vorzeichen haben. Alle Punkte, die so liegen, dass dieser Coefficient positiv ist, befinden sich immer zugleich an der einen, alle, für welche derselbe negativ ist, zugleich an der entgegengesetzten Seite der Gleichgewichtslage.

Die Punkte der einzelnen Gruppen befinden sich alle zugleich in derselben Phase, die Punkte der verschiedenen Gruppen in entgegengesetzter Phase. Die einzelnen Gruppen sind getrennt durch Punkte, für welche einen solchen Werth hat, dass  $\cos \frac{2x - a}{\lambda} \pi = 0$ , die also, welchen Werth auch  $t$  hat, immer in der Gleichgewichtslage bleiben.

Die Punktreihe zerfällt demnach in eine Anzahl von Theilen, welche zwischen je zwei ruhenden Punkten eingeschlossen sind; die einzelnen Punkte dieser Theile befinden sich alle in derselben Phase, ihre Amplitude ist jedoch nach dem Werthe von  $x$  verschieden. Man nennt die Schwingung daher eine stehende, und die Strecke zwischen zwei ruhenden Punkten eine stehende Welle.

Um den Zustand der Reihe näher zu untersuchen, nehmen wir an, der Abstand  $a$  der beiden Punkte sei irgend ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge, also

$$a = n \lambda.$$

Dann wird unser Ausdruck für  $Y$

$$Y = 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{2x}{\lambda} - n\right) \pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{n}{2}\right),$$

$$Y = 2\alpha \left\{ \cos n\pi \cos \frac{2x}{\lambda} \pi + \sin n\pi \sin \frac{2x}{\lambda} \pi \right\}$$

$$\left\{ \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos n\pi - \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin n\pi \right\}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \cos n\pi &= \pm 1, \\ \sin n\pi &= 0, \end{aligned}$$

mit

$$Y = 2\alpha \cos \frac{2x}{\lambda} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Man sieht, wie zur Zeit  $t = 0, t = T, t = 2T \dots t = nT,$

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = 0$$

ist, also alle Punkte zu gleicher Zeit durch die Gleichgewichtslage hindurchgehen.

Ferner zur Zeit  $t = (2n + 1) \frac{T}{2}$  ist

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin (2n + 1) \pi = 0.$$

Wiederum befinden sich alle Punkte der Reihe in der Gleichgewichtslage.

Zur Zeit  $t = (4n + 1) \frac{T}{4}$ , dagegen ist

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin (4n + 1) \frac{\pi}{2} = 1.$$

Die Punkte befinden sich alle an der äussersten Stelle ihrer Bahn, der grössten Auslenkung. Der Abstand ist jedoch an den verschiedenen Punkten der Reihe verschieden. Suchen wir diese Werthe auf.

Unser Ausdruck für  $Y$  wird dann

$$Y = 2\alpha \cdot \cos \frac{2x}{\lambda} \pi.$$

Ist nun  $x = 0$ , so ist  $y = 2\alpha$

$$x = \frac{\lambda}{4} \quad y = 0$$

$$x = \frac{\lambda}{2} \quad y = -2\alpha$$

$$x = \frac{3\lambda}{4} \quad y = 0$$

$$x = \lambda \quad y = 2\alpha$$

$$x = \frac{5}{4} \lambda \quad y = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \lambda \quad y = -2\alpha \text{ u. s. f.}$$

Unsere vorigen Entwicklungen werden also durch die Betrachtung der einzelnen Punkte bestätigt, welche zugleich ergibt, dass die Länge der ein-

zelen stehenden Wellen, der Abstand der ruhenden Punkte gleich ist der halben Länge der Wellen in der fortschreitenden Bewegung.

Wir erhielten soeben den Zustand der Reihe zur Zeit  $t = \frac{1}{4} T$ , oder  $\frac{(4n+1)}{4} T$ , wächst nun die Zeit von  $\frac{1}{4} T$  bis  $\frac{1}{2} T$ , oder  $\frac{(4n+1)}{4} T$  bis  $\frac{(4n+2)}{4} T$ , so nehmen die Werthe von  $Y$  alle gleichzeitig und gleichmäßig bis auf 0 ab, da in jedem Zeitmomente die Abstände sämtlicher Punkte mit demselben Coefficienten zu multipliciren sind und wenn  $t = \frac{1}{2} T$ , dann befinden sich alle Punkte wieder in der Gleichgewichtslage. Nimmt der Werth von  $t$  weiter zu, so wird der Coefficient

$$\sin 2\pi \frac{t}{T}$$

negativ, da dann  $2\pi \frac{t}{T} > \pi$ . Die Punkte befinden sich dann an der entgegengesetzten Seite der Gleichgewichtslage, und zwar am weitesten entfernt, wenn

$$t = \frac{3}{4} T \text{ oder } \frac{4n+3}{4} T; \sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin \frac{(4n+3)}{2} \pi = -1.$$

Es wird dann für

$$\begin{aligned} x &= 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, 3 \frac{\lambda}{4}, \lambda, 5 \frac{\lambda}{4} \dots \\ Y &= -2\alpha, 0, 2\alpha, 0, -2\alpha, 0 \dots \end{aligned}$$

so dass also die den Abständen  $\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda \dots (2n+1) \frac{\lambda}{4}$  von  $C$  entsprechenden Punkte immerfort in Ruhe sind, und nur die zwischen diesen Punkten liegenden Punkte eine hin und her gehende Bewegung vollführen. Die Punkte der Reihe, welche sich immerfort in der Gleichgewichtslage befinden, nennt man die Schwingungsknoten, und es ist ersichtlich, dass diese deshalb immer in Ruhe sind, weil stets gleichzeitig durch sie nach entgegengesetzten Richtungen ein Wellenberg und ein Wellenthal hindurchgeht. Die mitten zwischen den Schwingungsknoten liegenden Punkte sind Schwingungsmaxima, dort treffen immer gleichzeitig zwei Wellenberge oder Thäler zusammen. Die Gestalt der Punktreihe ist demnach (Fig. 203) zur Zeit  $t = 2n \frac{T}{4}$

Fig. 203.



eine gerade Linie  $MN$ , zur Zeit  $t = (4n+1) \frac{T}{4}$ , wenn wir annehmen dass die Bewegung eine transversale sei, die punktirte Wellenlinie  $M'N'$ , zu Zeit  $(2n+1) \frac{T}{2}$  wieder die gerade Linie  $MN$ , und zur Zeit  $t = (4n+3) \frac{T}{4}$  die ausgezogene Wellenlinie  $M''N''$ .

Durch die Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung for

schreitender Wellenbewegungen theilt sich somit die Punktreihe in lauter Strecken von der Länge einer halben Wellenlänge, in deren jeder alle Punkte in derselben Phase der Oscillation sind, von denen aber die Punkte der abwechselnden Strecken in entgegengesetzter Phase der Bewegung sich befinden. Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Schwingung ist gleich der Oscillationsdauer der beiden Wellenbewegungen, deren Resultirende die stehende Schwingung darstellt.

## §. 120.

**Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.** Wir sahen in §. 116, dass eine Wellenbewegung in einer Punktreihe sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt und weiter, dass sie sich während der Dauer einer Oscillation gerade um eine Wellenlänge fortpflanzt. Bezeichnen wir demnach die Oscillationsdauer der Bewegung mit  $T$ , die Länge der Wellen mit  $\lambda$ , und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, das heisst die Strecke, durch welche sich die Bewegung während einer Sekunde ausbreitet mit  $c$ , so besteht zwischen diesen drei Grössen die Beziehung

$$\lambda = c \cdot T; T = \frac{\lambda}{c}; c = \frac{\lambda}{T}.$$

Diese Beziehung genügt jedoch noch nicht, um die absolute Länge einer Welle oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu bestimmen, welche jedenfalls von der Natur der in einer Punktreihe thätigen Kräfte abhängt. Könnten wir aber noch eine andere Beziehung zwischen jenen Grössen auffinden, die es gestattet, eine derselben zu eliminiren, so würde es in einem bestimmten Falle nur der Beobachtung einer jener drei Grössen bedürfen, um die andern zu ändern, und somit die Wellenbewegung vollständig zu bestimmen. In Hülfe der im vorigen Paragraphen entwickelten Sätze über die stehenden Wellen können wir nun eine solche Beziehung zwischen  $T$  und  $\lambda$  erhalten.

Die Schwingungsdauer  $T$  einer stehenden Welle ist nämlich nach den Ableitungen des vorigen Paragraphen gleich der Schwingungsdauer der Punkte in der fortschreitenden Welle, durch deren Interferenz die stehenden Wellen sich gebildet haben; die Länge  $L$  der stehenden Welle ist gleich der Hälfte einer fortschreitenden Welle.

Die Dauer der Schwingung einer stehenden Welle ist deshalb ebenfalls gegeben durch die Gleichung

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{k}},$$

wenn wir mit  $p$  die einen Punkt der Welle bewegende Kraft im Abstände 1 von der Gleichgewichtslage und mit  $m$  die in dem Punkte bewegte Masse bezeichnen,

$$k = \frac{p}{m},$$

so die dem betrachteten Punkte im Abstände 1 ertheilte Beschleunigung bedeutet.

Für die in der stehenden Welle schwingenden Punkte können wir nun den Werth von  $k$  mit Hülfe der Elasticitätsgesetze ableiten, somit den Werth

von  $T$  und mit diesem dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bestimmen, deren Interferenz die stehenden Wellen ergeben hat.

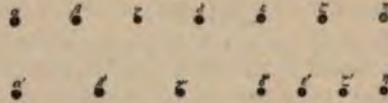
Die Kraft, welche in einer schwingenden Punktreihe die einzelnen Punkte bewegt, ist die Anziehung und Abstossung der einzelnen Punkte auf einander, welche dadurch entsteht, dass die Punkte bei der Bewegung sich in andern Abständen von einander befinden, als wenn sie in der Ruhelage sind. Da wir nun in der stehenden Welle einen stationären Zustand hergestellt haben, da alle zu einer Welle gehörigen Punkte immer gleichzeitig in derselben Phase der Bewegung sind, so können wir dort die Veränderung in den Abständen der Punkte leicht ableiten.

Es stelle  $\alpha \delta \eta$  (Fig. 204) die Lage der Punkte einer stehenden Welle dar, entweder einer transversal schwingenden oder einer longitudinal schwingenden Punktreihe. Schwingt die Welle transversal, so sind die senkrechten Abstände der Punkte  $\beta, \gamma$  von  $\alpha \eta$  in der That die Abstände der einzelnen Punkte von der Gleichgewichtslage. Schwingen die Punkte longitudinal, so stellen die Abstände der Punkte von  $\alpha \eta$  die Verschiebungen der Punkte aus der Gleichgewichtslage (Fig. 205) dar, in welchem die Verschiebungen in dem Orte der Gleichgewichtslage, z. B.  $\alpha \beta' - \alpha \beta$   $\alpha \gamma' - \alpha \gamma$ , etc. senkrecht aufgetragen sind.

Fig. 204.



Fig. 205.



Betrachten wir nun drei Punkte,  $\delta, \epsilon, \zeta$  (Fig. 204), welche unmittelbar neben einander liegen, die also in der Gleichgewichtslage, wenn wir dieselbe, wie in den letzten Paragraphen durch die Abstände  $x$  der Punkte von einem festen Punkte bestimmen, um die sehr kleine Grösse  $dx$  von einander entfernt sind, so ist die durch die Bewegung eingetretene Veränderung in den der Gleichgewichtslage entsprechenden Abständen der Punkte  $\epsilon$  und  $\zeta$  dem Unterschied  $\epsilon b$  der beiden senkrechten Abstände der Punkte  $\zeta$  und  $\epsilon$  von  $\alpha \eta$ , und ebenso die Verschiebung von  $\epsilon$  gegen  $\delta$  der Differenz  $d\delta - a\epsilon = \epsilon b'$  proportional. Wenn die Punkte longitudinal schwingen, so ist  $\epsilon b$  die Verschiebung der Punkte gegen einander selbst, wie aus der soeben angegebenen Construction der Welle für diesen Fall sich ergibt. Schwingen die Punkte transversal, so wird, wenn wir voraussetzen, dass die Länge der Wellen gegen den Abstand der Punkte sehr gross ist, eine merkliche Veränderung der Abstände der Punkte nicht stattfinden; es bildet aber dann die Verbindungslinie zweier Punkte mit der Verbindungslinie derselben, wenn sie sich in der Gleichgewichtslage befinden, einen Winkel  $\epsilon \zeta b$ . Die Tangente dieses Winkels, oder, da nach unserer Voraussetzung der Winkel immer äusserst klein ist, der Verschiebungswinkel selbst ist dann gleich dem Quotienten  $\frac{\epsilon b}{b c}$ , also gleich dem Quotienten aus der Verschiebung dividirt durch den ursprünglichen Abstand der Moleküle.

In der Lehre von der Elasticität haben wir nun den Nachweis geliefert, dass wenn die der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstände der

Moleküle geändert werden, Kräfte zwischen den Molekülen thätig werden, welche dieselben wieder in die Gleichgewichtslage zurückführen wollen, Kräfte, denen wir eben den Namen Elasticitätskräfte beilegten. Von diesen Kräften haben wir gezeigt, dass sie der Verschiebung der Moleküle gegen einander proportional sind. Als Maass derselben führten wir den Elasticitätscoefficienten ein, die Kraft, mit welcher die Moleküle gegen ihre Gleichgewichtslage hingetrieben werden, wenn ihre Verschiebung gegen einander ihrem ursprünglichen Abstände gleich geworden ist. Ist demnach der ursprüngliche Abstand der Moleküle gleich  $dx$ , und werden sie um die Grösse  $x$  gegen einander verschoben, so ist die Kraft, mit der sie dann in ihre relative Gleichgewichtslage zurückgezogen werden,

$$f = \frac{\xi}{dx} \cdot e,$$

wenn wir den Elasticitätscoefficienten der betreffenden Substanz mit  $e$  bezeichnen.

Ebenso wiesen wir im §. 54 nach, dass wenn eine Verschiebung zweier Molekülschichten gegen einander stattfindet, ohne dass die Schichten auseinander genähert oder von einander entfernt werden, eine dem Verschiebungswinkel proportionale Kraft auftritt, welche die Moleküle in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht. Diese Kraft ist für die Einheit des Verschiebungswinkels ein bestimmter Bruchtheil des Elasticitätscoefficienten, so dass wir die einem Verschiebungswinkel  $\alpha$  entsprechende Kraft

$$f_1 = a \cdot e \cdot \alpha$$

bezeichnen können, worin  $a$  eine Constante bedeutet.

Diese Sätze dürfen wir direkt auf unsere Punktreihen anwenden, wir setzen dann voraus, dass zwischen den Punkten des Systems, in welchem wir betrachten Punkte eine Reihe bilden, Kräfte thätig sind, welche nach denselben Gesetzen wirken, wie die zwischen den Molekülen der Körper thätigen Kräfte.

In unserer Punktreihe ist nun die Verschiebung des Punktes  $\epsilon$  gegen den Punkt  $\delta$  gemessen nach dem ursprünglichen Abstände der Punkte in der Gleichgewichtslage, resp. bei transversaler Bewegung der Verschiebungswinkel gleich  $\frac{\epsilon b'}{dx}$ ; die Kraft, mit welcher der Punkt  $\epsilon$  gegen seine Gleichgewichtslage in Bezug auf  $\delta$ , also nach  $b'$  gezogen wird, ist demnach gegeben durch

$$a \cdot \frac{\epsilon b'}{dx} \cdot e,$$

wenn wir mit  $e$  die Elasticität der Punktreihe bezeichnen, und  $a$  die oben schon eingeführte Constante bedeutet, welche gleich 1 zu setzen ist, wenn die Bewegung eine longitudinale ist.

Die Verschiebung des Punktes  $\epsilon$  gegen  $\xi$  bewirkt, dass  $\epsilon$  gegen  $b$  hingetrieben wird, gegen die Stelle, an welcher er in Bezug auf  $\xi$  in der Gleichgewichtslage ist; die Grösse der Kraft, welche in diesem Sinne auf den Punkt wirkt, ist

$$a \cdot \frac{\epsilon b}{dx} \cdot e.$$

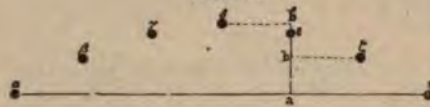


Diese beiden auf den Punkt wirkenden Kräfte wirken gerade nach entgegengesetzter Richtung, die den Punkt  $\varepsilon$  wirklich bewegende Kraft ist also die Differenz beider oder

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{dx} \cdot c.$$

Der Punkt  $\varepsilon$  wird nun vorzugsweise, ja wir dürfen sagen allein durch die ihm benachbarten Punkte gezogen, der eben gefundene Ausdruck ist daher in der That die den Punkt  $\varepsilon$  bewegende Kraft. Um dieselbe vollständig bestimmt zu erhalten, bedarf es noch der Berechnung der Differenz  $\varepsilon b' - \varepsilon b$ . Wir gelangen dazu auf folgende Weise. Die senkrechten Ab-

Fig. 206.



stände der einzelnen Punkte  $\beta, \gamma \dots$  (Fig. 206) von der Linie  $a\eta$  werde nach dem vorigen Paragraphen bestimmt durch die Gleichung

$$y = 2\alpha \cdot \cos \frac{2x}{\lambda} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

worin  $x$  den Abstand des gerade betrachteten Punktes von dem Anfangspunkte der Wellenbewegung bedeutet. Wir erhalten durch diese Gleichung zu jeder Zeit  $t$  die Abstände  $y$  der einzelnen Punkte von  $a\eta$ , indem wir denselben entsprechenden Werthe von  $x$  einsetzen. Bezeichnen wir nun den Abstand der Gleichgewichtslage des Punktes  $\delta$  von dem Anfangspunkte der Wellenbewegung mit  $x$ , so ist der Abstand des Punktes  $\varepsilon$  von demselben Punkte  $x + dx = x'$  und derjenige des Punktes  $\zeta$  gleich  $x' + dx = x''$ . Die senkrechten Abstände  $\delta d = y$ ,  $a\varepsilon = y'$ ,  $c\zeta = y''$  erhalten wir nun, indem wir in die Gleichung für  $y$  die Werthe  $x, x', x''$  einsetzen. Dann ist  $\varepsilon b = y' - y''$ ;  $\varepsilon b' = y - y'$  und die von uns gesuchte Differenz

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = (y - y') - (y' - y'').$$

Führen wir diese Rechnungen durch, so ist, wenn wir zugleich  $\frac{\lambda}{2}$ , die Länge der stehenden Welle mit  $L$  bezeichnen,

$$y = 2\alpha \cdot \cos \frac{x}{L} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y' = 2\alpha \cdot \cos \frac{x + dx}{L} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y'' = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \left\{ \cos \frac{x}{L} \pi \cdot \cos \frac{dx}{L} \pi - \sin \frac{x}{L} \pi \cdot \sin \frac{dx}{L} \pi \right\}.$$

Da nun nach unserer Annahme die Abstände  $dx$  zweier Punkte sehr klein sind, so werden wir ohne merkliche Ungenauigkeit setzen können

$$\cos \frac{dx}{L} \pi = 1, \quad \sin \frac{dx}{L} \pi = \frac{dx}{L} \pi$$

und somit

$$y' = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \left\{ \cos \frac{x}{L} \pi - \frac{dx}{L} \pi \cdot \sin \frac{x}{L} \pi \right\}$$

und

$$\varepsilon b' = y - y' = \frac{dx}{L} \pi \cdot \sin \frac{x}{L} \pi \cdot 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Den Werth von  $y''$  erhalten wir, wenn wir in dem Werthe für  $y'$  wieder für  $x$  einsetzen  $x + dx$ , da  $y''$  der Abstand des Punktes von der

Gleichgewichtslage ist, der von dem Punkte, von welchem aus die Abstände  $x$  gerechnet sind, wieder um  $dx$  weiter entfernt ist als der Punkt  $\varepsilon$ . Dadurch wird

$$y'' = 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} \left\{ \cos \frac{x+dx}{L} \pi - \frac{dx}{L} \pi \cdot \sin \frac{x+dx}{L} \pi \right\}.$$

Entwickeln wir wieder die in der Klammer stehenden  $\cos$ . und  $\sin$ . und beachten, dass auch jetzt wieder

$$\cos \frac{dx}{L} \pi = 1; \sin \frac{dx}{L} \pi = \frac{dx}{L} \pi,$$

so wird

$$y'' = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \left\{ \cos \frac{x}{L} \cdot \pi - 2 \frac{dx}{L} \pi \sin \frac{x}{L} \pi - \frac{dx^2}{L^2} \cdot \pi^2 \cos \frac{x}{L} \cdot \pi \right\}.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\varepsilon b = y' - y'' = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \left\{ \frac{dx}{L} \pi \cdot \sin \frac{x}{L} \pi + \frac{dx^2}{L^2} \pi^2 \cdot \cos \frac{x}{L} \pi \right\}.$$

und schliesslich

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = -2\alpha \frac{dx^2}{L^2} \cdot \pi^2 \cdot \cos \frac{x}{L} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

oder schliesslich

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = -\frac{dx^2}{L^2} \cdot \pi^2 \cdot y.$$

Setzen wir die so bestimmte Differenz der Verschiebungen in den vorhin gefundenen Ausdruck ein, welcher uns die Kraft gibt, mit welcher der Punkt  $\varepsilon$  bewegt wird, so erhalten wir daraus

$$-a \frac{\pi^2 dx^2}{L^2 \cdot dx} y \cdot e = -a \frac{\pi^2 dx}{L^2} \cdot y \cdot e,$$

ein Ausdruck, in welchem das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Punkt gegen seine wirkliche Gleichgewichtslage, gegen  $a$  hingetrieben wird. Diese Kraft ist dem augenblicklichen Abstände des Punktes von der Gleichgewichtslage, dem Werthe von  $y$  proportional. Wir erhalten somit die vorhin mit  $p$  bezeichnete Grösse, die Kraft, welche den Punkt treibt, wenn er sich im Abstände 1 von der Gleichgewichtslage befindet, wenn wir  $y = 1$  setzen, somit

$$p = a \frac{\pi^2 dx}{L^2} \cdot e.$$

Um nun den Werth von  $k$ , die gegen die Gleichgewichtslage gerichtete Beschleunigung zu erhalten, wenn der Punkt sich in der Einheit des Abstandes von der Gleichgewichtslage befindet, haben wir nur den Werth von  $p$  durch die Masse  $m$  des Punktes  $\varepsilon$  zu dividiren; damit wird

$$k = \frac{p}{m} = a \frac{\pi^2 dx}{L^2 \cdot m} \cdot e.$$

Die Grösse  $dx$  bezeichnet den Abstand zweier Punkte unserer Punktreihe in der Gleichgewichtslage; der reciproke Werth derselben oder

$$\frac{1}{dx} = n$$

bedeutet daher die Anzahl von Punkten, welche in der Längeneinheit der

Reihe enthalten sind. Führen wir diesen Werth ein, so wird die Beschleunigung des Punktes gegen  $b$  hin

$$k = a \cdot \frac{\pi^2 \cdot e}{L^2 mn}$$

Die Grösse  $mn$ , das Produkt aus der Masse eines Punktes und der Anzahl von Punkten in der Längeneinheit ist die Masse der Längeneinheit der Punktreihe; wir können sie füglich die Dichtigkeit der Punktreihe nennen. Bezeichnen wir sie mit  $d$ , so wird schliesslich

$$k = a \cdot \frac{\pi^2 \cdot e}{L^2 \cdot d}$$

Mit Hülfe des so bestimmten Werthes von  $k$  erhalten wir nun die Schwingungsdauer des betrachteten und damit aller Punkte der stehenden Welle nach der vorhin abgeleiteten Relation

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{a \cdot \frac{\pi^2 \cdot e}{L^2 \cdot d}}} = \frac{2L}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{d}{e}}$$

Die Schwingungsdauer der stehenden Welle ist somit der Länge derselben und der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Punktreihe direkt, der Quadratwurzel aus der Elasticität der Reihe umgekehrt proportional. Da nun die Schwingungsdauer der stehenden Welle gleich ist jener der fortschreitenden Welle, aus deren Interferenz sie entstanden ist, so gilt derselbe Ausdruck auch für die fortschreitende Welle; für diese ist also, wenn wir für  $2L$  das Zeichen  $\lambda$ , die Länge der fortschreitenden Welle, wieder einsetzen,

$$T = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{d}{e}}$$

Zwischen der Wellenlänge  $\lambda$ , der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Oscillationsdauer der fortschreitenden Welle besteht nun die Beziehung

$$c = \frac{\lambda}{T};$$

demnach erhalten wir für  $c$

$$c = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{e}{d}} = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}},$$

wenn wir  $\sqrt{a} = C$  setzen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist somit der Quadratwurzel aus der Elasticität direkt, der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit umgekehrt proportional, sie ist unabhängig von der Wellenlänge. Letztere Unabhängigkeit gilt aber ganz allgemein nur für die longitudinalen Wellen, nicht ebenso für die transversalen, für letztere nur bei der ausdrücklich von uns gemachten Voraussetzung, dass die Länge der Wellen gegen die Verschiebungen, oder was dasselbe ist, gegen die Abstände der Punkte sehr gross ist. Denn nur unter dieser Voraussetzung dürfen wir dort die Verschiebungswinkel der Moleküle gegen einander der Differenz ihrer Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage proportional setzen. Wenn das nicht der Fall ist, und wir werden später in den Lichterscheinungen Wellen kennen lernen, deren Längen möglicher Weise einen mit den Abständen der

Punkte vergleichbaren Werth haben, so hängt die Geschwindigkeit der Fortpflanzung von der Länge der Welle ab. Für diese Wellen erhält Cauchy<sup>1)</sup> für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen Ausdruck von der Form

$$c^2 = a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} + \frac{a_2}{\lambda^4} \dots$$

eine Reihe nach fallenden Potenzen von  $\lambda$ , in welcher die Zähler Constante sind, die von der Beschaffenheit des Mittels abhängen, in dem die Schwingungen stattfinden. Wir werden in der Lehre vom Licht auf diese Frage zurückkommen; hier möge nur bemerkt werden, dass für alle Schwingungen, die wir in diesem Abschnitte zu betrachten haben, die Wellenlängen gegen die Abstände der Moleküle als unendlich gross betrachtet werden können.

§. 121.

**Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen.** Wir haben im Bisherigen den besondern Fall der Zusammensetzung der Wellenbewegungen betrachtet, in dem die Vibrationen alle gleich gerichtet sind. Es können nun ebenso gut in einer Punktreihe sich zwei Bewegungen fortpflanzen, deren Richtungen nicht zusammenfallen, eine Wellenbewegung longitudinaler Schwingungen und eine transversaler Schwingungen, oder zwei zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrechte Schwingungen, welche jedoch irgend einen Winkel mit einander bilden.

Wie wir im §. 118 sahen, erhalten wir in diesem Falle die aus dem Zusammenwirken der beiden Bewegungen resultirende Kraft durch den Satz vom Parallelogramm der Kräfte; in jedem Augenblicke wird uns die Diagonale des aus den beschleunigenden Kräften der Theilbewegungen construirten Parallelogramms der Grösse und Richtung nach die resultirende Kraft geben und somit die Geschwindigkeit und die Bahn des bewegten Punktes.

Nehmen wir an, dass die beiden Wellenbewegungen gleiche Oscillationsdauer und somit gleiche Wellenlängen besitzen, so muss die resultirende Bewegung ebenfalls die gleiche Oscillationsdauer haben; die Bahn, welche die Punkte beschreiben, kann aber weder mit der einen noch mit der andern Bewegung zusammenfallen, sie muss jedoch nothwendig in dieselbe Ebene fallen, welche durch die Richtung der Bewegungen in den einzelnen Wellen gelegt wird. Um die Gestalt der Bahn zu erhalten, wird es am bequemsten sein, von dem mathematischen Ausdrücke für die Bewegung des Punktes in Folge jeder einzelnen Bewegung auszugehen und das erhaltene Resultat dann näher zu betrachten.

Zugleich ist klar, dass wir die Bahn nur eines Punktes zu bestimmen haben, und dass diejenigen aller übrigen Punkte der Reihe damit übereinstimmen. Denn da der Voraussetzung nach jede der Theilbewegungen sich mit gleicher Geschwindigkeit in der Punktreihe fortpflanzt, so sind die Bahnen aller Punkte dieselben.

Nennen wir nun den Abstand eines Punktes der Reihe, welcher vom Anfangspunkte der Bewegung um  $x$  entfernt ist, von seiner Gleichgewichts-

<sup>1)</sup> Cauchy, Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prag 1835.

lage zur Zeit  $t$ ,  $y$ , so haben wir

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (1).$$

In Folge der zweiten Bewegung, wenn sie allein wirkte, würde der Punkt in einer andern Richtung sich von der Gleichgewichtslage entfernen, sei der Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  gleich  $z$ ; nehmen wir ferner an, der Anfangspunkt dieser Bewegung sei von dem der ersten um  $a$  entfernt, die Bewegung habe aber auch dort im Anfange der Zeit  $t$  begonnen, so haben wir für  $z$  den Ausdruck

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x - a}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (2).$$

Entwickeln wir nun aus diesen beiden Ausdrücken für die Abstände  $y$  und  $z$  eine Gleichung zwischen  $y$  und  $z$ , so gibt uns diese die zu einander gehörigen Abstände in der einen und in der andern Richtung, oder den Ort des Punktes in jedem Augenblicke, wenn wir den Abstand des Punktes nach der einen Richtung aus einer der obigen Gleichungen bestimmen. Diese Gleichung gibt uns somit die Bahn des bewegten Punktes.

Aus den beiden obigen Gleichungen erhalten wir nun unmittelbar die beiden folgenden

$$\frac{y}{\alpha} = \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{z}{\beta} = \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots (4).$$

Multiplizieren wir nun die Gleichung (3) mit  $\cos 2\pi \frac{a}{\lambda}$ , so wird

$$\frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots \dots (5)$$

und subtrahieren wir jetzt die Gleichung (5) von (4), so erhalten wir

$$\frac{z}{\beta} - \frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots \dots (6).$$

Quadriren wir nun die Gleichung (6) und addiren zugleich

$$\left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \frac{z}{\beta} \right)^2 + \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \left\{ \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \right\} - 2 \frac{z}{\beta} \cdot \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \\ = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \left\{ \sin^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}, \end{aligned}$$

oder

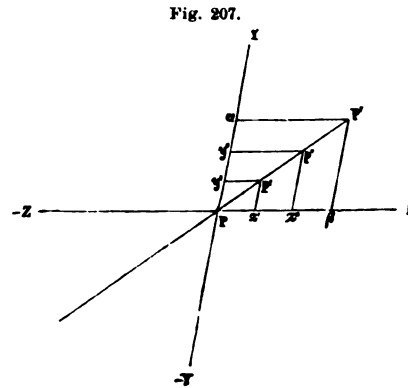
$$\left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{z}{\beta} \right)^2 - 2 \frac{y}{\alpha} \cdot \frac{z}{\beta} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots (7).$$

Die Gleichung (7) gibt uns den Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage parallel der Richtung der ersten Bewegung für jeden Werth, den der Abstand des Punktes parallel der zweiten Bewegung erhalten kann.

Die analytische Geometrie zeigt nun, dass alle Punkte, deren zusammengehörige Abstände parallel zwei festen Richtungen, von einem festen Punkte durch die Gleichung (7) dargestellt werden, auf einer bestimmten krummen Linie, der Ellipse, liegen, deren Mittelpunkt eben jener feste Punkt ist, von welchem die Abstände  $y$  und  $z$  gerechnet sind. Wenn sich zwei Wellenbewegungen in einer Punktreihe fortpflanzen, in denen die Schwingungen verschieden gerichtet sind, so bewegen sich demnach die Punkte in Ellipsen um ihre Gleichgewichtslage.

In unseren Ausdruck (7) für die Bahn der Punkte geht nun auch die Phasendifferenz ein, und je nach dem verschiedenen Werthe von  $a$  kann die Beziehung zwischen  $y$  und  $z$  immer eine andere werden; man erhält je nach dem Werthe von  $a$  für ein bestimmtes  $z$  einen immer andern Werth von  $y$ . Zwar erfüllen alle diese Werthe die Bedingung, dass sie einer Gleichung von der Form (7) genügen, die Bahnen der Punkte sind daher immer Ellipsen, aber die Lage und Gestalt der Ellipsen ist je nach dem Werthe von  $a$  eine andere. Untersuchen wir die Gestalt der Ellipsen für einige Werthe von  $a$ .

Setzen wir voraus, dass die Schwingungsrichtungen einen Winkel  $\varphi$  mit einander bilden, und dass die Richtung der positiven Abstände  $z$  (Fig. 207) des Punktes  $P$ , der um  $x$  von dem Anfangspunkte der Bewegung entfernt ist, von der Ruhelage, nach rechts hin, und die Richtung der positiven  $y$  nach oben gerechnet werde, d. h., dass die Bewegung in gleicher Phase in beiden Theilbewegungen ist, wenn der Punkt sich zugleich nach rechts und oben, in verschiedener, wenn er sich zugleich nach rechts und unten bewegt. Ist nun die Phasendifferenz der beiden componirenden Bewegungen gleich 0, oder einer geraden Anzahl von halben Wellenlängen, so ist



$$\begin{aligned} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} &= 1; \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0, \\ \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{2yz}{\alpha\beta} + \frac{z^2}{\beta^2} &= 0, \\ \frac{y}{\alpha} - \frac{z}{\beta} &= 0, \\ \frac{y}{z} &= \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

In diesem Falle stehen also stets die zusammengehörigen Werthe von  $y$  und  $z$  in dem constanten Verhältnisse der Amplituden  $\alpha : \beta$ . Bestimmen wir demnach die den Zeiten  $t'$ ,  $t''$ ,  $T$  entsprechenden Abstände  $z'$ ,  $z''$ ,  $\beta$  und ziehen von  $z'$ ,  $z''$ ,  $\beta$  mit  $Py$  parallel  $z'p'$ ,  $z''p''$ ,  $\beta P'$  so, dass

$$z'p' : z'P = z''p'' : z''P = \beta P' : \beta P = \alpha : \beta,$$

so sind die Längen  $z'p'$ ,  $z''p''$  etc. die zu diesen Werthen von  $z$  gehörigen Werthe von  $y$ , und die Punkte  $p'$ ,  $p''$ ,  $P$  gehören der Bahn des Punktes

an. Aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber, dass die Punkte  $P, p', p'', P'$  auf einer geraden Linie liegen; die Bahn des Punktes ist demnach eine gerade Linie, welche durch die Gleichgewichtslage des Punktes  $P$  geht, deren Richtung zwischen die Richtungen der Theilbewegungen fällt.

Für die Amplitude  $PP'$  der resultirenden Bewegung erhalten wir nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte

$$PP' = \sqrt{P\beta^2 + P'\beta^2 - 2P\beta \cdot P'\beta \cdot \cos P\beta P'},$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot \cos \varphi}$$

und für den Winkel, welchen die Bahn des Punktes mit  $z$  bildet, wenn wir ihn mit  $\psi$  bezeichnen, erhalten wir aus der Proportion

$$PP' : P'\beta = \sin P\beta P' : \sin P'P\beta,$$

$$\sin \psi = \frac{\alpha}{A} \cdot \sin \varphi.$$

Grösse und Richtung der resultirenden Amplitude hängt somit von der Grösse der Theilamplituden ab und von dem Winkel, welchen die Theilbewegungen mit einander bilden. Die resultirende Amplitude erhält den grössten Werth für  $\varphi = 0$

$$A = \alpha + \beta.$$

Die Bewegungsrichtung aller drei Bewegungen ist dieselbe, und die resultirende Amplitude ist die Summe der Theilamplituden.

Wir hätten in diesem Falle, um die Bahn des Punktes zu erkennen, nicht nöthig gehabt, die Gleichung (7) zu entwickeln, da dieses Resultat sich unmittelbar aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt, denn ist  $a = 0$ , oder  $2n \cdot \frac{\lambda}{2}$ , so wird

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

und daraus

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist die Phasendifferenz nicht gleich 0, oder ein gerades Vielfaches

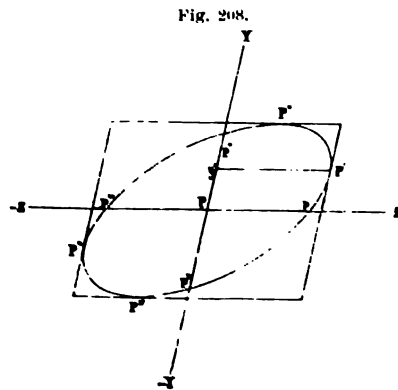


Fig. 208.

einer halben Wellenlänge, so wird die Bahn des Punktes eine Ellipse. Die Bewegungen beginnen dann zu verschiedenen Zeiten, und wachsen nicht wie im vorigen Falle gleichmässig; bald nimmt  $y$  rascher, bald  $z$  rascher zu, ja es kann  $y$  selbst abnehmen, wenn  $z$  wächst. Ist  $a$  kleiner als  $\frac{1}{4} \lambda$ , so hat (Fig. 208) der Punkt  $P$  bereits einen Theil seines Weges in der Richtung der  $z$  zurückgelegt, wenn die Bewegung nach  $y$  beginnt, er befindet sich in  $p'$ , denn ist  $y = 0$ , so gibt Gleichung (2) oder

Gleichung (7)

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

und ist  $a$  z. B.  $= \frac{3}{16} \lambda$ , so wird

$$z = \beta \cdot \sin 67^{\circ},5 = 0,923 \beta.$$

Während jetzt der Punkt in der Richtung nach  $z$  den letzten Theil seines Weges zurücklegt, bewegt er sich aber schon in der Richtung  $y$ , er beschreibt daher den Weg  $p'P'$ . Er ist in  $P'$  angekommen, hat also in der Richtung  $z$  seinen grössten Abstand erreicht, wenn nach Gleichung (7)

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{\alpha^2} + 1 - 2 \frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} &= \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda}, \\ \frac{y^2}{\alpha^2} - 2 \frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda} &= 0, \\ y = y' &= \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda}, \end{aligned}$$

also bei dem von uns angenommenen Werthe  $a = \frac{3}{16} \lambda$ ,  $y = \alpha \cdot \cos 67^{\circ},5$ , oder gleich  $0,382\alpha$  ist. Während dann der Punkt in der Richtung der  $y$  sich weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, kehrt er in der Richtung  $z$  schon wieder zurück, er beschreibt den Weg  $P'P''$  und ist in  $P''$  angelangt, wo  $y = \alpha$  wird, wenn sich der Punkt in der Richtung der  $z$  schon wieder bis auf

$$z = \beta \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,382 \beta$$

dem Anfangspunkte genähert hat.

Von da ab nehmen  $y$  und  $z$  gleichzeitig ab,  $z$  aber, da der Punkt in dieser Richtung der Ruhelage näher ist, rascher als  $y$ ; der Punkt bewegt sich, bis  $z = 0$  wird, nach  $p''$ , wo  $y = 0,923 \alpha$  ist. Weiter bewegt sich der Punkt dann in der Richtung der  $z$  nach der negativen Seite bis  $p'''$ , während der Abstand  $y$  bis zur 0 abnimmt u. s. f., so dass der Punkt sich über  $p'''$ ,  $P'''$ ,  $P^{IV}$ ,  $p^{IV}$  wieder nach  $p'$  bewegt, wenn  $y$  wieder gleich 0 geworden ist. Dauern die Impulse nach beiden Richtungen fort, so legt der Punkt in der folgenden Zeit dieselbe Bahn zurück, die, wie Gleichung (7) uns zeigt, eine Ellipse ist.

Ist  $a = \frac{1}{4} \lambda$ , so befindet sich der bewegte Punkt nach der Richtung der  $z$  in seinem äussersten Abstand von der Gleichgewichtslage und beginnt seine zurückgehende Bewegung, wenn er in der Richtung der  $y$  seine Bewegung beginnt. Während er dann in der Richtung der  $z$  zur Ruhelage zurückkehrt, erreicht er nach  $y$  seinen grössten Abstand oder für  $z = 0$  ist  $y = \alpha$ . Wird dann  $z = -\beta$ , so wird  $y = 0$ , und wird  $z$  wiederum 0, so wird  $y = -\alpha$ , so dass also die zusammengehörigen Werthe von  $y$  und  $z$  für diese vier Stellungen sind

$$\begin{aligned} y = 0, y = \alpha, y = 0, y = -\alpha, y = 0 \\ z = \beta, z = 0, z = -\beta, z = 0, z = \beta. \end{aligned}$$

Die Ellipse geht demnach in diesem Falle durch die Endpunkte der Theilamplituden, ihre Lage und Gestalt ist anders als in dem vorigen Falle, aber die Bewegung des Punktes erfolgt in demselben Sinne wie vorher.



Es geht dies auch aus der Form hervor, welche die Gleichung der Bahn dann annimmt,

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Schwingungsrichtungen bestimmen dann ein Paar conjugirte Durchmesser der Ellipse.

Wenn im Besondern in diesem Falle die beiden Amplituden gleich und die Bewegungsrichtungen zu einander senkrecht sind, so wird die Bahn des Punktes ein Kreis. Denn in dem Falle wird unsere Gleichung der Bahn

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} &= 1, \\ y^2 + z^2 &= \alpha^2. \end{aligned}$$

Da nun die beiden Richtungen  $x$  und  $y$  zu einander senkrecht sind, = bedeutet  $\alpha$  den Abstand des Punktes von dem festen Punkte, von dem  $a$  — die Richtungen  $y$  und  $z$  gerechnet sind.

Die Punkte der Bahn liegen also alle auf einer Linie, die dadurch bestimmt ist, dass der Abstand aller ihrer Punkte von einem festen Punkte eine constante Grösse und zwar gleich  $\alpha$  ist; das ist aber bekanntlich eine Eigenschaft des Kreises.

Die Gleichungen (1) und (2) geben auch dieses unmittelbar, ~~obz~~ dass die Gleichung (7) zu Hülfe genommen wird, denn wenn  $\alpha = \frac{1}{4} \lambda$ , so werden sie

$$\begin{aligned} y &= \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ z &= \alpha \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

und daraus

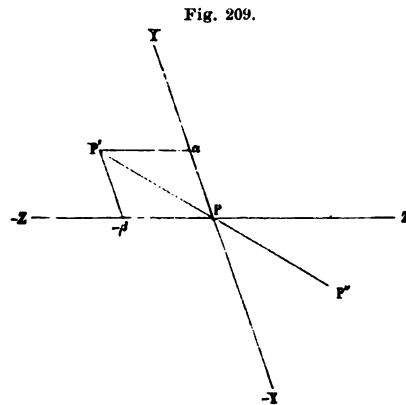
$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Wenn nun die Phasendifferenz grösser ist, ist die Bahn, bis  $a = \frac{1}{2} \lambda$  wird, wieder in allen Fällen eine Ellipse, deren Lage und Gestalt leicht nach dem Bisherigen zu erhalten ist.

Ist dann  $a = \frac{1}{2} \lambda$  geworden, so liefern die Gleichungen (1) und (2) oder (7) als zusammengehörige Werthe von  $y$  und  $z$

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z.$$

Die Gestalt der Bahn ist also wieder eine gerade Linie, welche jedoch anders liegt, wie in dem Falle, wo  $a = 0$  war. Sie liegt jetzt (Fig. 209) in dem Winkel, den die Richtung der negativen  $z$  mit derjenigen der positiven  $y$  bildet. Denn jetzt beginnt der Punkt  $P$  zugleich sich nach der Richtung der negativen  $z$  und der positiven  $y$  zu bewegen, und zwar so,



er

$$\frac{y}{\alpha} = -\frac{z}{\beta}$$

wegt sich demnach von  $P$  nach  $P'$ , dann über  $P$  nach  $P''$  u. s. f., nie  $P'P''$  hin und her, so lange die beiden Impulse dauern.

einem noch grössern Werthe von  $a$  geht die Bahn wieder in eine ber, in welcher jedoch der Punkt jetzt sich in entgegengesetzter bewegt als vorher. Betrachten wir den Fall, wo  $a = \frac{11}{16} \lambda$  ist.  $x$  Punkt  $P$  (Fig. 210)

wegung nach der Rich-  
gung, wenn also

$$\sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,$$

$$\sin \frac{11}{8} \pi = -0,923 \beta.$$

ist  $P$  befindet sich in  $p'$ .

end nun  $z$  bis  $-\beta$  wächst,  
ch der Punkt zugleich in  
ung der positiven  $y$ , bis

$$-\alpha \cdot \cos \frac{11}{8} \pi = 0,382 \alpha$$

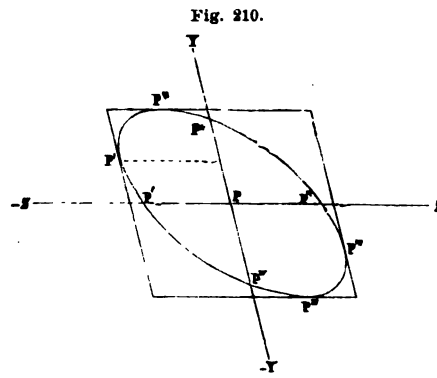
Punkt bewegt sich von  $p'$  nach  $P'$ .

während sich dann weiter der Abstand  $y$  vergrössert, nähert sich der der Richtung  $z$  wieder der Ruhelage. Ist  $y = \alpha$ , so ist  $z = \beta \cdot \cos \frac{11}{8} \pi = 0,32 \beta$ , der Punkt befindet sich in  $P''$ , hat also den Weg  $P'P''$  durch-  
m weitem Verlaufe nähert sich der Punkt anfangs sowohl in der der  $y$  als  $z$  der Gleichgewichtslage, bis er in  $p''$  ist. Dann ent-  
der in der Richtung der positiven  $z$ , während er sich in der Rich-  
em Ausgangspunkte der Bewegung noch nähert; er bewegt sich  
 $P'''$  u. s. f., so dass der Punkt die Bahnellipse in der Richtung  
''' ,  $P^{IV}$  durchläuft, also in entgegengesetzter Richtung wie Fig. 208,  
hasendifferenz gleich  $\frac{3}{16} \lambda$  war.

schon der Phasendifferenz  $\frac{1}{2} \lambda$  und  $\lambda$  durchläuft der Punkt die je-  
Bahnellipse, die nach Lage und Gestalt für jeden Werth von  $a$   
en ist, immer in der zuletzt betrachteten Richtung. Die Gestalt  
se nimmt dabei dieselben Aenderungen an, wie in der vorhin be-

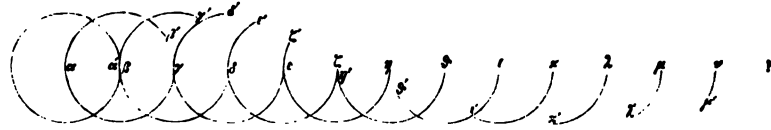
1 Periode der Phasendifferenzen, sie wird anfangs bis  $a = \frac{3\lambda}{4}$  ge-  
und von da ab bis  $a = \lambda$  wieder flacher, bis sie für den letzten  
 $x$  Phasendifferenz wieder eine gerade Linie wird, welche wieder  
egt, wie in dem Falle, wo  $a = 0$  war.

Falle also die componirenden Bewegungen gleiche Perioden haben,  
Bahnen der einzelnen Punkte der Reihe Ellipsen, und zwar für  
te dieselben Ellipsen. Die Verschiedenheiten in den gleichzeitigen  
zuständen der einzelnen Punkte der Reihe bestehen dann darin,  
an verschiedenen Punkten der Ellipse sich befinden und dort mit  
ener Geschwindigkeit sich bewegen.



Die Gestalt, welche die Punktreihe in Folge der Bewegung der Punkte annimmt, ist verschieden je nach der Richtung, in der die componirenden Bewegungen erfolgen. Ist die eine Bewegung longitudinal, die andere transversal, so beschreiben die Punkte Ellipsen, deren Ebenen die Richtung, in der die Bewegung sich fortpflanzt, in sich aufnehmen. Die Punktreihe wird also eine ähnliche Gestalt haben, wie bei einer transversalen Wellenbewegung. Sei z. B. eine Punktreihe zugleich in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt; die longitudinale Bewegung sei der transversalen um eine viertel Wellenlänge voraus und die Amplituden haben gleiche Grösse, so stellt Fig. 211 die gegenseitige Lage der Punkte in einer Wellen-

Fig. 211.



länge dar.  $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$  ist die Lage der Punkte in der Ruhelage. Der Punkt  $\alpha$  ist im Begriffe, eine neue Bewegung in transversaler Richtung zu beginnen, in longitudinaler hat er das erste Viertel seiner Oscillation zurückgelegt; er befindet sich in  $\alpha'$ . Der Punkt  $\delta$  hat in longitudinaler Richtung gerade eine Oscillation vollendet, dagegen befindet er sich in transversaler erst am Ende des dritten Viertels einer Oscillation, in seinem grössten Abstände nach negativer Richtung. Für den Punkt  $\eta'$  ist, um unsere vorige Bezeichnung beizubehalten,  $y = 0, z = -\beta$ , für  $\kappa$  ist  $y = \alpha, z = 0$  und für  $\nu'$  wieder  $y = 0$  und  $z = \beta$ . Die einzelnen Kreisbögen zeigen die Bahnen der Punkte an, welche von  $t = \frac{1}{4} T$  an, in welchem Momente die transversale Bewegung der Punkte ihren Anfang nahm, durchlaufen sind.

Sind beide Bewegungen transversal, so stehen die Ebenen der elliptischen Bahnen auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht, die Reihenfolge der Bahnebenen bildet einen elliptischen Cylinder, dessen Axe die Punktreihe in der Ruhelage ist. Eine auf dem Cylinder gezogene Schraubenlinie, deren Höhe gleich ist der Länge der Welle, nimmt, wie man leicht übersieht, die Punkte in den verschiedenen Phasen auf.

### §. 122.

**Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge.** Wir haben im Bisherigen die Zusammensetzung der Schwingungen in ihrem einfachsten Falle betrachtet, unter der Voraussetzung nämlich, dass die Schwingungen sämtlich dieselbe Periode, dieselbe Schwingungsdauer und somit auch dieselbe Wellenlänge haben. Es fragt sich nun, ob sich in einer Punktreihe gleichzeitig Schwingungen fortpflanzen und zu einer resultirenden Schwingung zusammensetzen können, welche eine verschiedene Schwingungsdauer besitzen, und welches die resultirende Bewegung dann sein wird.

Die Möglichkeit der gleichzeitigen Fortpflanzung von Bewegungen verschiedener Periode erkennen wir daran, dass die unter Voraussetzung der

Möglichkeit sich ergebende resultirende Bewegung mit unserer fundamentalen Bedingung

$$\frac{dv}{dt} = \varphi = -k \cdot y.$$

in Übereinstimmung ist, also mit diesem Kraftgesetz bestehen kann. Denn jede Bewegung, welche dieses Kraftgesetz zur Voraussetzung hat, kann in den Punktreihen bestehen.

Um diese Untersuchung bequemer führen zu können, wollen wir dem Kraftgesetz zunächst eine etwas andere Form geben, die Form nämlich, welche wir schon §. 120 ableiteten, und von der wir leicht zeigen können, dass sie auch für die einfach fortgepflanzte Bewegung gilt. Für die Differenz der Verschiebungen  $\varepsilon b' - \varepsilon b$  dreier auf einander folgender Punkte erhielten wir dort

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = -\frac{4\pi^2 dx^2}{\lambda^2} \cdot y$$

der wenn wir  $\varepsilon b' - \varepsilon b = d^2y$  setzen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot y.$$

Dass wir diesen Werth für die Differenz der Verschiebungen dreier auf einander folgender Punkte auch bei der einfach fortschreitenden Bewegung bekommen, lässt sich leicht zeigen.

Für den Abstand eines Punktes zur Zeit  $t$ , welcher um  $x$  von dem Anfangspunkt der Bewegung entfernt ist, haben wir

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

den des nächstfolgenden um  $dx$  weiter entfernten Punktes zur selben Zeit  $t$

$$y' = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+dx}{\lambda} \right)$$

er wenn wir in gewohnter Weise unter Beachtung, dass  $dx$  sehr klein, so

$$\cos 2\pi \frac{dx}{\lambda} = 1 \quad \sin 2\pi \frac{dx}{\lambda} = 2\pi \frac{dx}{\lambda}$$

den Werth von  $y'$  berechnen,

$$y' = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - 2\pi \frac{dx}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

mit

$$y' - y = dy = -2\pi \frac{dx}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Die gleichzeitige Verschiebung  $y''$  des noch einmal um  $dx$  weiter entfernten Punktes erhalten wir, wenn wir in dem für  $y'$  gefundenen Werthe auch  $x + dx$  ersetzen, also

$$y'' = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+dx}{\lambda} \right) - 2\pi \frac{dx}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+dx}{\lambda} \right)$$

wenn wir die Rechnung wieder durchführen:

$$y'' = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - 2\pi \frac{dx}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ - 2\pi \frac{dx}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - 4\pi^2 \frac{dx^2}{\lambda^2} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

somit

$$y'' - y' = dy' = -2\pi \frac{dx}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - 4\pi^2 \frac{dx^2}{\lambda^2} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

und weiter

$$(y'' - y') - (y' - y) = dy' - dy = d^2y = -4\pi^2 \frac{dx^2}{\lambda^2} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

oder auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot y;$$

wir erhalten somit bei der fortschreitenden Bewegung dieselbe Beziehung zwischen dem Abstände eines Punktes aus der Gleichgewichtslage  $y$  der Differenz der Verschiebungen der auf einander folgenden Punkte. der letzten Gleichung erhalten wir

$$y = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

und indem wir diesen Werth für  $y$  in die erste Gleichung einsetzen

$$\frac{dv}{dt} = \varphi = \frac{k \cdot \lambda^2}{4\pi^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

Da nun, wie wir früher sahen,

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

so wird unser Kraftgesetz

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\lambda^2}{T^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn wir nach der Beziehung  $\lambda = c \cdot T$  den Quotienten durch das Quadrat der in einer gegebenen Punktreihe für alle Wellen constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit ersetzen.

Diese Beziehung zwischen der Beschleunigung  $\varphi$  und der Differenz der Verschiebungen sagt also ebenfalls aus, dass die Beschleunigung Abstände der Punkte von der Gleichgewichtslage proportional, alle Bewegungen also, welche auf diese Beziehung zwischen Beschleunigung eines Punktes und der Differenz der Verschiebungen führen, können in der Punktreihe bestehen und sich ausbreiten.

Dass darnach Wellen verschiedener Länge sich zu einer Resultirenden zusammensetzen können, ergibt sich leicht, wir haben nur nöthig, es gleichgerichtete Schwingungen zu zeigen. Für diese folgt aus der Allgemeinheit des §. 118 aufgestellten Interferenzprinzips, dass auch bei ihr die Bewegung jedes Punktes der Reihe zur Zeit  $t$  einfach gleich sein wird der algebraischen Summe aller der Theilbewegungen, welche durch einzelnen Wellen in demselben Augenblicke dem Punkte ertheilt werden. Würden die Abstände des Punktes von der Gleichgewichtslage in Folge einzelnen Bewegungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sein, so ist der wirkliche Abstand des Punktes  $y$  gegeben durch

$$Y = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Nehmen wir zunächst an, in der Punktreihe pflanzen sich eine Reihe von Wellen fort, deren Ausgangspunkt für alle der gleiche sei, und deren Gleichungen seien

$$\begin{aligned} y_1 &= a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) \\ y_2 &= b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) \\ &\vdots \\ y_n &= p \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right), \end{aligned}$$

so muss die resultirende Bewegung gegeben sein durch

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) + \dots + p \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right).$$

Dass diese Bewegung der Punktreihe bestehen und in ihr sich ausbreiten kann, erkennt man unmittelbar, wenn man die Beschleunigung  $\frac{dv}{dt}$  und den Quotienten  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  berechnet. Man erhält dann in der vielfach angewandten Rechnungsweise

$$\frac{dv}{dt} = - \left\{ \frac{4\pi^2}{T_1^3} \cdot a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \frac{4\pi^2}{T_2^3} \cdot b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) + \dots + \frac{4\pi^2}{T_n^3} \cdot p \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right) \right\}$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \left\{ \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} \cdot a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} \cdot b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) + \dots + \frac{4\pi^2}{\lambda_n^2} \cdot p \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right) \right\}.$$

Da nun

$$\lambda_1 = c T_1, \lambda_2 = c T_2, \dots, \lambda_n = c T_n,$$

folgt

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

wie vorher für die Möglichkeit der Bewegung abgeleitete Bedingung.

Schon die Form der für die resultirende Bewegung abgeleiteten Gleichung zeigt, dass dieselbe in diesem Falle nicht, wie bei der Interferenz von Schwingungen gleicher Periode, eine einfach periodische sein kann, bei der sich die schwingenden Punkte ebenso weit und ebenso lange an der einen Seite der Gleichgewichtslage bewegen wie an der andern. Denn es lässt sich kein Werth  $T$  und  $\lambda$  angeben, der für alle Werthe von  $t$  und  $x$  den Abstand  $Y$  durch eine einfache Gleichung von der Form

$$Y = A \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

in einem von  $x$  und  $t$  unabhängigen Werthe der Amplitude  $A$  wiedergeben lässt. Die Bewegung ist vielmehr eine zusammengesetzt periodische, indem jeder Punkt während der durch den ersten Ausdruck der den Werth  $Y$  gebenden Summe dargestellten hin und her gehenden Bewegung auch nach andern Perioden bewegt wird. In Folge dessen bewegt sich der

Punkt bald rascher bald langsamer nach der einen Seite als nach der andern, bald ist die Amplitude nach der einen Seite grösser bald kleiner nach der andern, je nach der Grösse der Perioden und der Amplituden componirenden Schwingungen. Ein allgemeines Gesetz dieser periodischen Bewegungen lässt sich ausser dem angegebenen nicht auf wir wollen nur, um ein Bild derselben zu bekommen, einige Fälle betrachten, und zwar den einfachsten Fall, dass sich zwei Wellen Punktreihe fortpflanzen, deren Schwingungsdauern und Wellenlängen wie 1 : 2 verhalten. In dem Falle wird, wenn wir die grössere der Schwingungsdauern mit  $T$  und die grössere Wellenlänge mit  $\lambda$  bezeichnen der Ausdruck für  $Y$

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda} \right)$$

oder

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \cdot \sin 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Entwickeln wir die beiden Sinus, so wird

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} - a \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \\ + b \cdot \sin 4\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} - b \cdot \cos 4\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 4\pi \frac{x}{\lambda}$$

und fixiren wir den Moment, in welchem  $t = nT$  ist, somit sind  $\sin 4n\pi = 0$ ,  $\cos 2n\pi = \cos 4n\pi = 1$ , so erhalten wir

$$Y = -a \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - b \cdot \sin 4\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Hiermit werden dann die Werthe von  $Y$  für

$x = \frac{1}{8}\lambda \dots$	$Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{2}{8}\lambda \dots$	$-a \quad \quad \quad \pm 0$
$\frac{3}{8}\lambda \dots$	$-a \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \quad \quad \pm b$
$\frac{4}{8}\lambda \dots$	$\pm 0 \quad \quad \quad \pm 0$
$\frac{5}{8}\lambda \dots$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{6}{8}\lambda \dots$	$+a \quad \quad \quad \pm 0$
$\frac{7}{8}\lambda \dots$	$+a \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \quad \quad \pm b$
$\frac{8}{8}\lambda \dots$	$\pm 0 \quad \quad \quad \pm 0$

Fig. 212 zeigt die Wellenform, welche diesen Werthen von  $Y$  entspricht, und zwar für  $b = 2a$ ;  $b = a$ ;  $b = \frac{1}{2}a$ .

Die punktirten Linien deuten die einzelnen Wellen an, die aus ihnen geben die resultirenden Wellen. Die Figuren zeigen, dass die Bewegung eine doppelperiodische ist, und dass je nach dem Verhältnis der Amplituden die Art der Bewegung eine sehr verschiedene sein kann. Man kann sie im allgemeinen dahin charakterisiren, dass die Bewegung der grössten Amplitude der resultirenden Bewegung ihre Periode als charakteristisch ausdrückt, und dass dann durch die übrigen Bewegungen in dieser Periode wieder periodische Verschiedenheiten auftreten. Man kann die Welle (Fig. 212a) als eine solche von der Periode  $\frac{\lambda}{2}$  betrachten, in welcher durch die zweite Bewegung innerhalb  $2 \cdot \frac{\lambda}{2}$  jedesmal d

Wellenberg und das letzte Wellenthal verstärkt erscheinen, während die Welle (Fig. 212 c) entschieden als schwingende Bewegung von der Periode

Fig. 212 a.

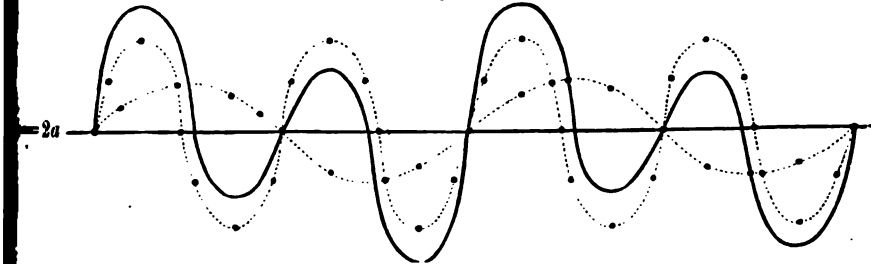


Fig. 212 b.

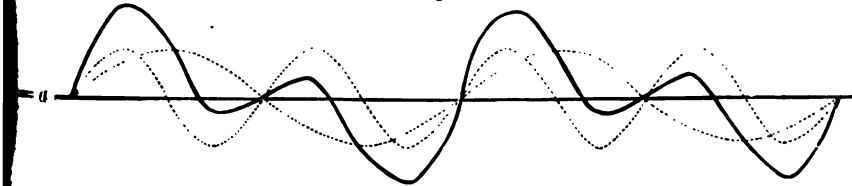
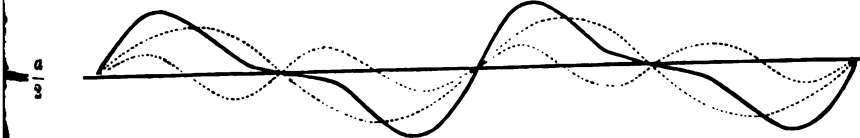


Fig. 212 c.



erscheint, welche von der einfachen Schwingung sich dadurch unterscheidet, dass der schwingende Punkt mit grosser Geschwindigkeit sich nach der positiven Seite von seiner Gleichgewichtslage entfernt, dann aber sehr viel langsamer sich derselben wieder nähert und sich über dieselbe hinaus bis zu seinem grössten Abstände an der negativen Seite bewegt.

In derselben Weise setzen sich die Bewegungen zusammen, wenn die componirenden Wellen in weniger einfachem Verhältniss stehen; in jedem Falle kann man in der angegebenen Weise die resultirende Bewegung construiren.

Mit einer Verschiebung der Phase der einen der componirenden Wellen ändert sich die resultirende Welle ebenfalls, wenn auch im übrigen die componirenden Bewegungen ganz ungeändert bleiben. Die oben für die resultirende Bewegung hingeschriebene Gleichung lässt das auch sofort erkennen; wird die zweite Bewegung um ein Viertel Wellenlänge verschoben, so wird der Ausdruck für  $Y$

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - b \cdot \cos 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

wird die zweite Bewegung um eine halbe Wellenlänge verschoben, so wird



$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - b \cdot \sin 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Darnach sind die Werthe von  $Y$  für diese beiden Fälle folgende, wenn wir wieder den Moment  $t = n T$  fixiren

	Phasendifferenz = $\frac{1}{8} \lambda$	= $\frac{1}{4} \lambda$
$x = \frac{1}{8} \lambda \dots$	$Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm b'$
$\frac{2}{8} \lambda \dots$	$-a \pm b$	$-a \pm 0$
$\frac{3}{8} \lambda \dots$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{4}{8} \lambda \dots$	$0 \pm b$	$0 \pm 0$
$\frac{5}{8} \lambda \dots$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$+a \sqrt{\frac{1}{2}} \pm b$
$\frac{6}{8} \lambda \dots$	$+a \pm b$	$+a \pm 0$
$\frac{7}{8} \lambda \dots$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{8}{8} \lambda \dots$	$\pm 0 \pm b$	$\pm 0 \pm 0$

Die Figuren 213a und b stellen diese Bewegung dar, erstere für die Differenz  $\frac{1}{8} \lambda$ , letztere für  $\frac{1}{4} \lambda$ , unter der Annahme, dass  $b = \frac{1}{2} a$ . Die Zeichnungen zeigen also, wie sich die Fig. 212c dargestellte Bewegung durch eine Verschiebung der einen Bewegung ändert.

Fig. 213 a.

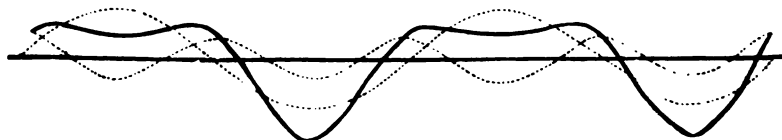
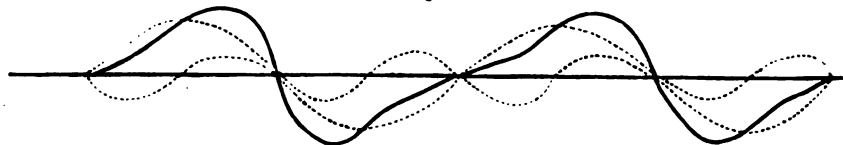


Fig. 213 b.



Wie man sieht, ist Fig. 213b gewissermassen das Umgekehrte von Fig. 212c, die Punkte der Reihe bewegen sich sehr langsam nach oben, dagegen sehr rasch nach unten, während bei einer Verschiebung um eine viertel Wellenlänge der kleinern Bewegung die Form der Schwingung eine ganz andere wird; der schwingende Punkt bewegt sich aus der Gleichgewichtslage mit grosser Schnelligkeit zu seiner einen äussersten Lage, bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit von dort zurück bis zu einer ersten grössten Ausweichung nach der andern Seite, kehrt langsam bis zu einem gewissen Abstände von der Gleichgewichtslage zurück, entfernt sich wieder bis zu einem dem vorherigen gleichen Abstände und schwingt dann mit grosser Schnelligkeit wieder bis zu dem äussersten Abstände an der andern Seite der Gleichgewichtslage.

In ganz gleicher Weise würde man verfahren, um die Wellenformen zu erhalten, wenn drei oder mehr Schwingungen verschiedener Wellenlängen sich in der Punktreihe ausbreiten, die Form der Wellen wird dann immer

complicirter, indem jede einzelne Bewegung in der resultirenden als bestimmte Periode auftritt. Wir werden später derartig complicirte Schwingungen kennen lernen.

Ebenso wie gleich gerichtete Schwingungen verschiedener Wellenlänge können auch verschieden gerichtete Schwingungen verschiedener Wellenlänge sich zusammensetzen. Die resultirende Bewegung unterscheidet sich dann in doppelter Weise von den im vorigen Paragraphen erhaltenen, indem einmal die von den Punkten der Reihe beschriebenen Kurven nicht mehr Ellipsen, sondern complicirtere Linien sind und ferner indem im allgemeinen die von den einzelnen Punkten nach einander und die von den auf einander folgenden Punkten der Reihe gleichzeitig beschriebenen Kurven verschieden sind. Dass letzteres der Fall ist, ergibt sich daraus, dass bei gleichzeitiger Ausbreitung von Schwingungen verschiedener Periode die einzelnen Punkte von den componirenden Wellen nicht immer in derselben Phase getroffen werden. Denken wir uns z. B. in einer Punktreihe zwei zu einander senkrechte transversale Schwingungen fortgepflanzt, deren Phase nur sehr wenig verschieden ist, so dass durch den Unterschied der Phase der Charakter der Kurven nicht alterirt wird, dass dieselben Ellipsen bleiben; nehmen wir z. B. an, die Schwingungsdauern der Punkte verhalten sich wie 100 : 101 und die beiden Bewegungen beginnen gleichzeitig. Ist die Amplitude beider Bewegungen gleich, so wird die erste Schwingung im Anfangspunkte eine lineare sein, welche mit jeder der componirenden einen Winkel von  $45^\circ$  bildet. Bei der zweiten Schwingung ist die eine der andern aber schon 0,01 Schwingung voraus, die Bahn des Punktes wird schon elliptisch, und nach 19 Schwingungen ist die Phasendifferenz der Schwingungen gleich  $\frac{3}{16}$  Oscillation, die Bahn des Punktes wird eine Ellipse wie Fig. 208. Nach 25 Schwingungen ist die Phasendifferenz  $\frac{1}{4}$  Oscillation, die Bahn wird ein Kreis, nach 50 Oscillationen ist sie  $\frac{1}{2}$  Oscillation, die Bahn wird wieder eine Linie, welche zu der ersten Schwingung senkrecht steht; kurz man sieht, dass nach 100 Schwingungen der Punkt nach und nach alle die Bahnen durchlaufen hat, welche wir im vorigen Paragraphen besprochen haben. Alle diese Bahnen, welche der erste Punkt nach einander durchläuft, sehen wir dann in den ersten 100 Wellenlängen gleichzeitig neben einander. Denn jeder Punkt durchläuft nach einander dieselben Bahnen wie der erste Punkt. Macht nun der erste Punkt der 100. Welle die erste Schwingung, so findet in der 75. Welle die 25. Schwingung statt, diese schwingt also geradeso wie der Anfangspunkt bei der 25. Schwingung u. s. f.

In einem Falle tritt diese Verschiedenheit der Schwingungen nicht ein. Stehen die Schwingungen in einem einfachen rationalen Verhältniss, also etwa 1 : 2 oder 1 : 3, 2 : 3 etc., so sind die Bahnen jedes Punktes der Reihe immer dieselben. Wir wollen auch hier nur den einfachsten Fall betrachten, um zu zeigen, in welcher Weise die Frage nach der resultirenden Bewegung zu behandeln ist, da wir an einer andern Stelle nochmals auf diesen Punkt zurückkommen werden. Wir denken uns in einer Punktreihe zwei zu einander senkrechte Bewegungen sich fortzupflanzen, deren Wellenlängen sich verhalten wie 1 : 2. Die Gleichung der einen Bewegung sei

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \dots \dots \dots (1)$$

jene der zweiten hierzu senkrechten

$$z = b \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x-d}{\frac{1}{2}\lambda} \right),$$

oder was dasselbe ist

$$z = b \cdot \sin 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right). \quad \dots \quad (2)$$

worin  $d$  die Phasendifferenz der componirenden Bewegungen bedeutet.

Gleichung (2) können wir schreiben

$$\frac{z}{b} = \sin 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 4\pi \frac{d}{\lambda} + \cos 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \sin 4\pi \frac{d}{\lambda},$$

und weiter, indem wir sinus und cosinus des doppelten Bogens durch sinus und cosinus des einfachen Bogens ausdrücken,

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{b} &= 2 \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \cos 4\pi \frac{d}{\lambda} \\ &+ \left( \cos^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \sin^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right) \sin 4\pi \frac{d}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Nun ist

$$\sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \frac{y}{a}; \quad \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}};$$

setzen wir diese Werthe in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir als Gleichung zwischen  $y$  und  $z$

$$\frac{z}{b} = 2 \frac{y \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{a^2} \cdot \cos 4\pi \frac{d}{\lambda} + \left( 1 - 2 \frac{y^2}{a^2} \right) \cdot \sin 4\pi \frac{d}{\lambda} \dots (4).$$

Dieser Ausdruck liefert uns für jedes  $y$  das zugehörige  $z$ , und man sieht, wie der Werth von  $z$  sich gleichzeitig mit der Phasendifferenz  $d$  ändert.

Nehmen wir an, die Wellen haben denselben Anfangspunkt, so ist für diesen Fall  $d = 0$ , damit wird das zweite Glied auf der rechten Seite = 0, und es wird, wenn wir noch  $a = b$  setzen,

$$z = \pm 2 \cdot \frac{y}{a} \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Die hierdurch dargestellte Kurve zeigt Fig. 214a. Der schwingende Punkt bewegt sich vom Anfangspunkte aus gleichzeitig nach  $y$  und  $z$ , aber rascher nach  $z$  als nach  $y$ , denn es ist  $z = a$ , wenn  $y = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Indem  $y$  dann von  $a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$  bis  $a$  wächst, nimmt  $z$  von  $a$  bis 0 ab; nimmt  $y$  dann wieder bis  $a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$  ab, so wächst  $z$  negativ wieder bis  $a$  und wird wieder mit  $y$  gleich 0. Diese Hälfte der Kurve besteht also aus zwei congruenten Stücken. Ganz ebenso ist die andere Hälfte der Kurve für die negativen Werthe von  $y$  beschaffen.

Ist die zweite Bewegung der ersten um den achten Theil ihrer Schwin-

ung voraus, so haben wir, da wir mit  $\lambda$  die Wellenlänge der Schwingungen der grössern Periode bezeichnet haben, für  $d$  einzusetzen  $\frac{1}{16} \lambda$ . Damit wird die Gleichung der resultirenden Kurve, indem wir für  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{1}}{2}$  ihren Werth einsetzen,

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2y}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2}\right).$$

Fig. 214.

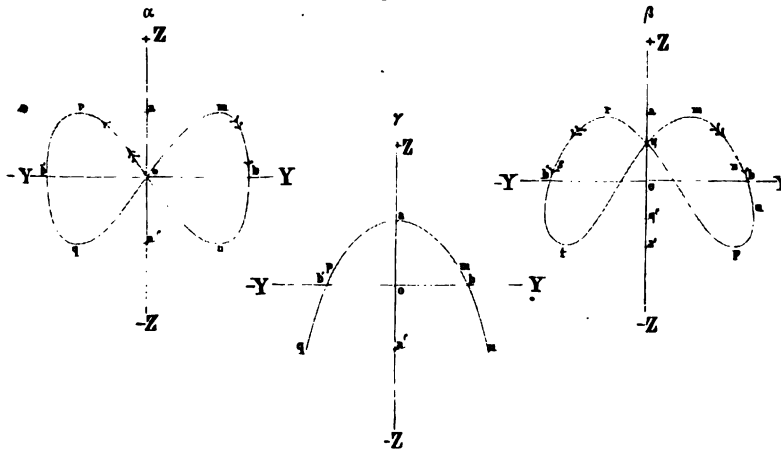


Fig. 214  $\beta$  zeigt die durch diese Gleichung dargestellte Kurve; wir erhalten der Kurve entsprechend aus der Gleichung die Werthe

$$z = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ für } y = 0$$

$$z = a \quad \text{,, } y = \pm a \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1/2}}{2}} = \pm 0,38268 a$$

$$z = 0 \quad \text{,, } y = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} = \pm 0,92385 a \text{ und } \pm 0,38268 a$$

$$z = -a \sqrt{\frac{1}{2}} \text{,, } y = \pm a$$

$$z = -a \quad \text{,, } y = \pm \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{2} - 1} = 0,75698 a.$$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Kurve von der vorigen nur dadurch, dass der Schnittpunkt der einzelnen Kurvenäste nach der Seite der positiven  $z$  verschoben ist, und die Kurve in ihren beiden Hälften mehr abgeflacht ist. Je mehr die zweite Bewegung der ersten voraus ist, um so weiter rückt der Schnittpunkt nach oben, bis er für ein Vorseilen um  $\frac{1}{4}$  Schwingung in den Werth  $z = a$  fällt, wo dann gleichzeitig die Kurve die Gestalt Fig. 214  $\gamma$  annimmt, der Punkt bewegt sich in der Linie  $qau$  hin und her. Die Gleichung der Kurve erhalten wir, wenn wir in Gleichung (4)  $d = \frac{1}{8} \lambda$  setzen

$$z = a \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2}\right).$$

Darnach ist

$$\begin{aligned} z &= a \quad \text{für } y = 0 \\ z &= 0 \quad \text{,, } y = \pm a \cdot \sqrt{1/2} \\ z &= -a \quad \text{,, } y = \pm a, \end{aligned}$$

wie es auch obige Kurve zeigt.

Nimmt die Phasendifferenz der Bewegungen weiter zu, so tritt zunächst wieder die Kurve Fig. 214 $\beta$  auf; sie behält diese Gestalt, jedoch so, dass der Punkt  $q$  immer näher an  $O$  heranrückt, bis die zweite Bewegung der ersten um  $1/2$  Schwingung voraus,  $d$  also  $1/4 \lambda$  wird. Der Unterschied gegen vorher ist nur der, dass der Punkt die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Ist  $d = 1/4 \lambda$ , so tritt wieder die Kurve Fig. 214 $\alpha$  auf, welche von dem Punkte aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird wie vorher, als  $d = 0$  war.

Bei noch weiterer Zunahme der Phasendifferenz tritt wieder die Kurve Fig. 214 $\beta$  auf, aber in umgekehrter Lage, wir erhalten z. B. die Kurve für  $d = 5/16 \lambda$ , wenn wir uns Fig. 214 $\beta$  und für  $d = 3/8 \lambda$ , wenn wir uns Fig. 214 $\gamma$  einfach auf den Kopf gestellt denken.

Sind die Schwingungsverhältnisse der beiden Bewegungen nicht genau  $1 : 2$ , sondern etwa  $50 : 99$ , so durchläuft jeder Punkt nach und nach die soeben abgeleiteten Bahnen, und ebenso sehen wir dann in der Punktreihe innerhalb  $50 \lambda$  alle die Kurven neben einander.

Sind die Verhältnisse der Schwingungsdauern weniger einfach, so werden die Kurven verwickelter, ihre Bestimmung gelingt indess immer auf dem angedeuteten Wege.

### §. 123.

**Schwingungen eines Systems von Punkten.** Wenn in einem im Raum vertheilten System von Punkten das Gleichgewicht eines Punktes gestört wird, so muss auch das aller übrigen gestört werden, wenn wir voraussetzen, dass auch hier, wie in den in den vorigen Paragraphen betrachteten Punktreihen, das Punktsystem durch anziehende und abstossende Kräfte, welche zwischen den einzelnen Punkten thätig sind, im Gleichgewicht gehalten wird. Man kann jedes System von Punkten, welche irgendwie im Raume vertheilt sind, als aus Punktreihen zusammengesetzt betrachten, die man erhält, wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes nach allen möglichen Richtungen gerade Linien legt. Diese Linien laufen dann von dem Punkte aus, wie die Radien einer Kugel von dem Mittelpunkte, und jeder dieser unendlich vielen Radien stellt eine Punktreihe dar. Wird nun der erste Punkt in eine oscillirende Bewegung versetzt, so muss sich diese in allen den Punktreihen nach den bisherigen Gesetzen fortpflanzen, da der Punkt allen Reihen gleichzeitig angehört.

Je nach der Art und Weise, wie die Punkte im Raum vertheilt sind, kann die Fortpflanzung der Bewegung im Systeme verschieden sein. Wie wir sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung nur ab von dem Quotienten  $\sqrt{\frac{e}{d}}$ , der Elasticität der Punktreihe und ihrer Dichtigkeit. Sind nun die Punkte in dem Systeme so vertheilt,

dass nach den einzelnen Richtungen hin auf der ganzen Länge der Radien dieser Quotient denselben Werth hat, wie wir es bei Betrachtung der Punktreihen voraussetzten, so nennt man das System ein homogenes. In einem solchen System pflanzt sich eine Wellenbewegung nach jeder Richtung hin mit constanter Geschwindigkeit fort, auf der ganzen Länge jedes Radius ist die Wellenlänge dieselbe. Die schwingende Bewegung in einem solchen Systeme können wir unmittelbar mit Hülfe unserer Entwicklungen über die Schwingungen von Punktreihen erhalten.

Behalten auf den einzelnen Radien in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte Elasticität und Dichtigkeit der Punktreihen nicht denselben Werth, ändert sich die Elasticität allein oder die Dichtigkeit, oder ändern sich beide in einem verschiedenen Verhältnisse, so ist das Punktsystem ein nicht homogenes oder ein heterogenes.

In einem solchen System pflanzt sich die Bewegung in verschiedenen Entfernungen nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, die Wellenlängen sind nicht auf der ganzen Länge der Radien gleich, sondern ändern sich überall dort, wo auf derselben eine Aenderung der Elasticität oder Dichtigkeit eintritt, denn überall dort findet eine Aenderung des Quotienten  $\sqrt{\frac{e}{d}}$  statt.

Die homogenen Punktsysteme können entweder isotrop oder anisotrop sein. Isotrope Punktsysteme sind solche, bei denen für sämtliche Schwingungen der Quotient  $\sqrt{\frac{e}{d}}$  derselbe ist, also nicht nur auf jedem Radius des Systems für sich betrachtet, sondern auch auf allen verschiedenen Radien, einerlei nach welcher Richtung auf demselben die Schwingungen erfolgen. Gleichartige Schwingungen, also auf allen Radien longitudinale, oder auf allen Radien transversale, pflanzen sich nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit fort. Ein derartiges Punktsystem würden wir z. B. erhalten, wenn wir nach drei zu einander senkrechten Richtungen des Raumes die Punkte in ganz gleichen Abständen vertheilt denken und annehmen, dass überall in gleichen Abständen die Punkte mit gleichen Kräften auf einander wirken. Die Punkte würden also auf Ecken von Würfeln liegen, welche im ganzen System gleiche Seiten haben.

Ist der Quotient  $\sqrt{\frac{e}{d}}$  nicht nach allen Richtungen hin derselbe, so nennt man das System ein anisotropes oder heterotropes, es ist das der Fall, wenn die Dichtigkeit der verschiedenen Punktreihen oder die Elasticität derselben verschieden ist, wenn also die Punkte in einer Richtung sich näher liegen oder mit stärkerer Kraft in ihrer Gleichgewichtslage gehalten werden als in einer andern, oder auch, wenn in einer und derselben Reihe der Werth von  $e$  verschieden ist, je nach der Richtung, nach welcher der Punkt aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist. In jeder Punktreihe pflanzt sich dann eine gegebene Schwingung mit constanter Geschwindigkeit fort, welche aber von Punktreihe zu Punktreihe verschieden ist.

Betrachten wir die Fortpflanzung der Wellenbewegung in isotropen Mitteln etwas genauer und nehmen wir an, die Schwingungen haben überall in Bezug auf die Punktreihen die gleiche Richtung.

Bezeichnen wir wie früher die Oscillationsdauer der schwingenden Bewegung mit  $T$  und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung mit  $c$ , so hat sich nach Verlauf der Zeit  $T$  die schwingende Bewegung allen Punkten einer Kugel mitgetheilt, welche mit dem Radius  $R = c \cdot T$  um den Anfangspunkt  $\alpha$  der Bewegung beschrieben wird, da sich in diesem Systeme die schwingende Bewegung nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Die auf der Kugelfläche befindlichen Punkte beginnen gerade ihre schwingende Bewegung, während der Punkt  $\alpha$  eine ganze Schwingung vollbracht hat, und die Punkte, welche die einzelnen Radien der Kugel bilden, sich in den verschiedensten Oscillationsphasen befinden, diejenigen, welche um  $\frac{cT}{4}$  von  $\alpha$  entfernt sind, haben  $\frac{3}{4}$  ihrer Schwingung vollbracht, die um  $\frac{cT}{2}$  entfernten die Hälfte u. s. f. Man ersieht, wie alle Punkte, welche auf einer um  $\alpha$  beschriebenen Kugel liegen, in der gleichen Phase sich befinden.

Der Bewegungszustand, der innerhalb der Kugel, die mit dem Radius  $R = cT$  beschrieben war, am Ende der Zeit  $T$  stattfindet, pflanzt sich nun in der folgenden Zeit  $T$  in der Richtung der Radien weiter fort, so dass am Ende der Zeit  $2T$  alle Punkte einer Kugel vom Radius  $2cT$  an der Bewegung Theil nehmen. Die Punkte, die auf der Fläche dieser Kugel liegen, sind im Begriffe, ihre schwingende Bewegung zu beginnen, und die Punkte auf der Kugel vom Radius  $cT$  haben ihre erste Oscillation zurückgelegt. Die Punkte, welche in der von diesen beiden Kugeln eingeschlossenen Schale sich befinden, haben alle einen grösseren oder kleineren Theil einer Oscillation zurückgelegt; sie befinden sich in derselben Phase, wie die entsprechend liegenden Punkte innerhalb der Kugel vom Radius  $cT$  zur Zeit  $T$ . Die von  $\alpha$  um  $\frac{5}{4}cT$  entfernten Punkte haben  $\frac{3}{4}$ , die um  $\frac{3}{2}cT$  entfernten  $\frac{1}{2}$  Undulation zurückgelegt.

Die Punkte innerhalb der Kugel vom Radius  $cT$  befinden sich, wenn die Erregung im Mittelpunkt der Bewegung fortdauert, in denselben Oscillationsphasen wie zur Zeit  $T$ , jetzt aber bei Zurücklegung ihrer zweiten Oscillation.

In der folgenden Zeit  $T$  pflanzt sich der Bewegungszustand der Kugelschale, die zwischen den Kugeln vom Radius  $2cT$  und  $cT$  enthalten ist, in der Richtung der Radien auf die Punkte fort, welche weniger als  $3cT$  von dem Punkte  $\alpha$  entfernt sind; eine Kugel vom Radius  $3cT$  ist die Grenze der Bewegung. Dort beginnen die Punkte ihre erste Oscillation, während sie auf der Kugelfläche, welche zur Zeit  $2T$  die Grenze der Bewegung war, ihre zweite Oscillation beginnen; alle zwischen diesen Kugeln befindlichen Punkte haben grössere oder kleinere Theile ihrer Oscillation vollführt, je nach ihren Abständen vom Anfangspunkte oder von der Kugel, die in der vorigen Zeit die Grenze der Bewegung bildete.

Man sieht, wie nach und nach der Raum rings um den Punkt  $\alpha$  sich in eine Reihe von Kugelschalen theilt, deren Dicke jedesmal gleich  $cT$  ist, und in denen die gleichweit von der Grenze der Schalen entfernten Punkte in den gleichen Phasen der Oscillation sich befinden. Jeder Radius, den wir von dem Punkte  $\alpha$  nach der äussersten Grenze der Bewegung ziehen, hat sich ebenso in eine Anzahl Wellenlängen getheilt, wie wir es früher für

die einzelnen Punktreihen gesehen haben. Deshalb nennt man auch hier die Dicke der einzelnen Kugelschalen, welche durch Kugeln vom Radius  $n \cdot cT$  und  $(n - 1)cT$  begrenzt werden, die Wellenlänge, und diese Kugelschalen selbst Wellen.

Es geht demnach aus dem Gesagten hervor, dass in einem isotropen Punktsystem die schwingende Bewegung sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzt.

Hört nach einiger Zeit die schwingende Bewegung des Punktes  $\alpha$  auf, so gelangen dadurch auch die auf  $\alpha$  folgenden Punkte auf allen einzelnen Radien zur Ruhe, da die schwingende Bewegung des Punktes  $\alpha$  es ist, welche die Bewegung der folgenden Punkte veranlasst, indem er bei seiner Bewegung die folgenden Punkte nach sich zieht. Dadurch entsteht neben der äussern Grenze der Wellenbewegung eine innere, an der die Bewegung der Punkte aufhört.

Diese innere Grenze muss ebenso eine Kugel sein, deren Mittelpunkt  $\alpha$  ist und deren Radius stetig mit der Zeit  $t$  gerade so wächst, wie der Radius der äussern Grenze. Daraus folgt, dass von der Zeit an, wo  $\alpha$  aufhört sich zu bewegen, eine Kugelschale die sämtlichen bewegten Punkte umfasst, deren Dicke gleich ist  $ct$ , wenn wir mit  $t$  die Zeit bezeichnen, während welcher der Punkt  $\alpha$  sich bewegte. Zur Zeit  $t'$  werden die Grenzen dieser Kugelschale die beiden Kugeln vom Radius  $ct'$  und  $c(t' - t)$  sein, erstere die äussere, letztere die innere. Mit wachsender Zeit erweitert sich diese Schale immer mehr, aber die Dicke derselben ist immer

$$ct' - c(t' - t) = ct,$$

also constant.

In nicht isotropen Systemen kann eine Wellenbewegung sich auch nicht in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, dort hängt der Abstand, bis zu welchem sich in den verschiedenen Richtungen die Bewegung in gleichen Zeiten überträgt, ab von der Dichtigkeit der einzelnen Radien sowie von der Elasticität dieser Reihen. Um demnach die Grenzen der Bewegung in diesem Falle zu erhalten, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem sich die Eigenschaften der Punktreihen ändern. Wir werden später, in der Lehre vom Lichte, die Fortpflanzung von schwingenden Bewegungen in solchen Systemen zu betrachten haben.

Die nicht homogenen Punktsysteme können wir als eine Verbindung an einander grenzender homogener Punktsysteme ansehen. Die Fortpflanzung der schwingenden Bewegungen in denselben können wir demnach auf die Fortpflanzung der Bewegung in homogenen Punktsystemen zurückführen, nur ist es nothwendig, die Aenderungen zu untersuchen, welche die schwingende Bewegung erfährt beim Uebergange aus einem homogenen System in ein anderes ebenfalls homogenes System.

#### §. 124.

**Huyghens'sches Princip.** Man kann sich von der Fortpflanzung einer Wellenbewegung noch eine etwas andere Vorstellung bilden, welche zuerst von Huyghens angewandt ist und die auf dem von uns in §. 118 bereits zum Theil ausgesprochenen und angewandten Princip der Coexistenz

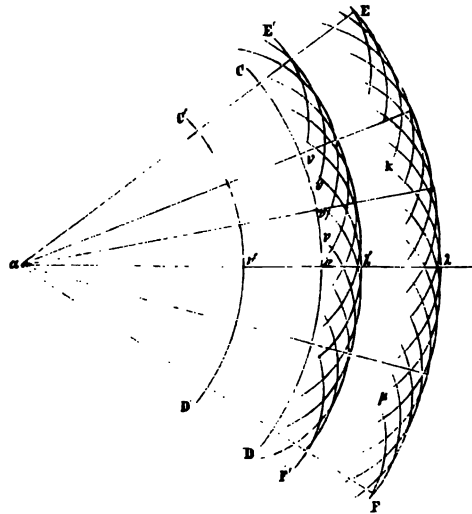


kleiner Bewegungen beruht. Dieses Princip lässt sich vollständig so aussprechen: Ein Punkt eines Systemes, der durch mehrere Impulse erregt wird, vollführt eine Bewegung, die sich als Resultante nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte bestimmen lässt. Wenn nun durch die Bewegung dieses Punktes auch benachbarte Punkte des Systemes bewegt werden, die Bewegung der letztern aber nur Folge ist einer der componirenden Bewegungen des zuerst bewegten Punktes, so bewegen sich dieselben gerade so, als besäße der ursprünglich bewegte Punkt nur diese Theilbewegung.

Wenn nun in einem Punktsystem eine Wellenbewegung vorhanden ist und die Bewegung bis zu einer gewissen Fläche fortgeschritten ist, so ist die Bewegung irgend eines nicht in dieser Fläche liegenden Punktes des Systems die Resultante aller jener Theilbewegungen, welche die verschiedenen Punkte der Welle zu ihm hinsenden.

Sei nun  $CD$  (Fig. 215) die äussere,  $C'D'$  die innere Grenze einer Welle, welche von dem Punkte  $\alpha$  ausgegangen ist. Wir können nun alle Punkte, welche zwischen den

Fig. 215.



Grenzen  $CD$  und  $C'D'$  liegen, als neue Wellenmittelpunkte betrachten, von denen aus sich eine schwingende Bewegung nach allen Richtungen hin fortpflanzt, gerade wie vom Punkte  $\alpha$  aus.

Diese von den einzelnen Punkten ausgehenden Wellen sind bei der Voraussetzung, dass das System ein isotropes ist, ebenso kugelförmig, wie die Flächen, deren Durchschnitte  $CD$  und  $C'D'$  sind.

Von dem Punkte  $\nu$  wird sich z. B. die Bewegung während einer Zeit  $t$  auf die mit dem Radius  $\nu\lambda = c \cdot t$  beschriebene Kugel fortpflanzt haben, deren Mittelpunkt der

Punkt  $\nu$  ist. Gleiches gilt für alle Punkte der Kugeloberfläche  $CD$ , von allen gehen nach allen Richtungen Bewegungen aus in der Form von kugelförmigen Wellen, deren Radien gleich  $c \cdot t$  sind.

Die äussere Grenze, bis zu der sich auf diese Weise die Wellenbewegung fortpflanzt hat, wird nun die Fläche sein, welche alle diese einzelnen Kugeln berührt, welche also alle diese Kugeln einhüllt. Diese Fläche ist nun aber offenbar eine Kugel  $EF$ , welche den Punkt  $\alpha$  zum Mittelpunkt hat, und deren Radius gleich ist  $\alpha\nu + c \cdot t = \alpha\lambda$ . Denn die von  $\alpha$  am weitesten entfernten Punkte der einzelnen Kugeln sind diejenigen, wo deren Radien  $\nu\lambda$  mit dem Radius  $\alpha\nu$  gerade Linien bilden; diese liegen aber auf einer Kugeloberfläche, deren Radius gleich  $\alpha\lambda$  ist.

Gleiches gilt auch von den Bewegungen aller übrigen zwischen  $CD$  und  $C'D'$  liegenden Punkte, auch von diesen gehen Bewegungen nach

allen Richtungen aus, und der Schwingungszustand der auf irgend einer zwischen  $CD$  und  $C'D'$  liegenden Kugelfläche befindlichen Punkte hat sich so auf eine um  $c.t$  von  $\alpha$  weiter entfernte Kugelfläche übertragen. Die innere Grenze der Welle ist demnach die Kugelfläche  $E'F'$ , welche mit dem Radius  $\alpha\nu' + \nu'\lambda'$  um  $\alpha$  beschrieben ist, da diese Kugelfläche alle jene einzelnen Kugeln berührt, welche von allen  $\nu'$  der Kugelfläche  $C'D'$  mit den Radien  $\nu'\lambda'$  beschrieben werden.

Wir erhalten somit durch Anwendung der Huyghens'schen Construction, indem wir jeden Punkt einer Welle als Bewegungsmittelpunkt ansehen, von dem aus sich die Bewegung weiter fortpflanzt, ganz dieselbe Wellenfläche, als wenn wir von dem bewegenden Mittelpunkte  $\alpha$  aus in der Richtung der Radien fortgeschritten wären.

Wir haben jedoch nicht nur zu zeigen, dass die jedesmalige Begrenzung der Welle nach dieser Construction dieselbe ist, als wenn wir eine einfache Verbreitung nach den durch den Bewegungsmittelpunkt gelegten Radien annehmen, sondern auch nachzuweisen, dass die Bewegung der einzelnen Punkte in diesen abgeleiteten Wellen dieselbe ist, als nach unserer ersten Vorstellung und somit die dort stillschweigend gemachte Voraussetzung der geradlinigen Verbreitung von Wellen in einem Punktsystem zu rechtfertigen.

Sei zu dem Ende die um den Mittelpunkt  $\alpha$  beschriebene Kugel  $ABCD$  die Wellenfläche zu irgend einer Zeit  $t$ , und  $\mu$  ein Punkt des Systemes, der eine Strecke  $\delta$  von dem Punkte  $\nu$  auf dem Radius  $\alpha\nu$  entfernt liegt. (Fig. 216.)

Der Punkt  $\mu$  hat nun, wenn die Bewegung sich fortpflanzt, nach einer gewissen Zeit  $\tau$  zunächst eine Bewegung durch die von  $\nu$  in der Richtung des Radius  $\nu\mu$  sich fortpflanzende Bewegung. Nehmen wir an, dass der Punkt  $\nu$  am Ende der Zeit  $t'$  oder im Beginne der Zeit  $\tau$  seine Bewegung gerade beginnt, so ist die Phase der Oscillation des Punktes  $\mu$  bestimmt durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{\tau}{T} - \frac{\delta}{\lambda} \right),$$

wenn wir mit  $a$  die Amplitude, mit  $T$  die Oscillationsdauer und mit  $\lambda$  die Wellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen.

Nach unserer Annahme sind nun aber alle Punkte der Wellenfläche Mittelpunkte der Bewegung, von denen sich Schwingungen nach allen Richtungen hin fortpflanzen. Zur Zeit  $\tau$  ist daher von allen Punkten der Wellenfläche  $ABCD$  eine Bewegung auf den Punkt  $\mu$  übertragen. Da aber die Abstände der einzelnen Punkte  $\nu'$  von  $\mu$  unter sich sowohl als von  $\nu\mu$  verschieden sind, so sind die gleichzeitig in  $\mu$  ankommenden Bewegungen zu verschiedenen Zeiten von der Welle  $ABCD$  ausgegangen, es folgt daraus, dass die Phasen aller gleichzeitig auf den Punkt  $\mu$  wirkenden Bewegungen unter sich sowohl als von der von  $\nu$  ausgehenden Bewegung verschieden

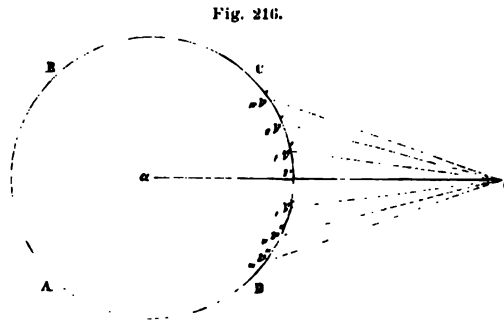


Fig. 216.

sind. Nennen wir den Abstand eines Punktes  $v'$  von  $\mu$  nun  $\delta'$ , so erhalten wir als Abstand des Punktes  $\mu$  von der Gleichgewichtslage in Folge dieser Bewegung

$$y' = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{r}{T} - \frac{\delta'}{\lambda} \right)$$

und als Phasendifferenz der beiden Bewegungen die Differenz

$$\frac{\delta' - \delta}{\lambda}.$$

Je nach der Lage des Punktes  $v'$  hat nun diese Differenz immer andere Werthe, sie wächst stetig, je weiter der Punkt  $v'$  von  $v$  entfernt liegt, so dass also gleichzeitig Bewegungen in allen möglichen Phasen auf den Punkt  $\mu$  einwirken. Um die Resultirende aus diesen sämtlichen Bewegungen zu erhalten, denken wir uns durch Kreise, deren Mittelpunkte auf  $au$  liegen, und die zu  $au$  senkrecht sind, die Wellenfläche  $CD$  in eine Reihe von Zonen  $v', v'', v''', v''''$  zerlegt, so zwar, dass die Abstände der auf einander folgenden Punkte  $v$  und  $\mu$  sich immer um  $\frac{1}{2}\lambda$  unterscheiden, so dass also

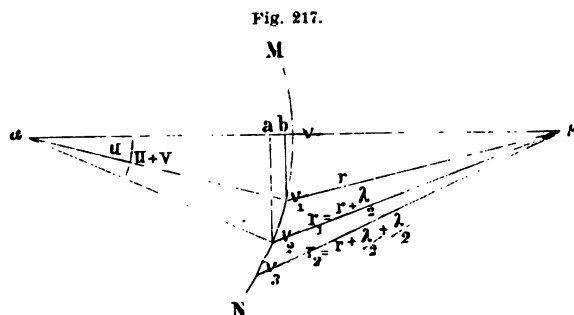
$$v'a - v'u = v'u - v\mu = v''a - v''\mu = v'''\mu - v'''\mu = v''''\mu - v\mu = \frac{1}{2}\lambda.$$

Die sämtlichen Bewegungen, welche von den auf der zunächst um  $v$  liegenden Zone befindlichen Punkten ausgehen, treiben zur Zeit  $r$  den Punkt  $\mu$  nach derselben Richtung, da die Phasendifferenz dieser Bewegungen kleiner als  $\frac{1}{2}\lambda$  ist. Die von den Punkten der zweiten Zone  $v'', v''', v''''$  ausgehenden Bewegungen treiben den Punkt  $\mu$  dagegen nach entgegengesetzter Richtung, da alle Strahlen dieser Zone gegen die entsprechend liegenden der vorigen, zunächst um  $v$  liegenden Zone um eine halbe Wellenlänge verschoben sind. Die von der dritten Zone ausgehenden Bewegungen sind nun gegen die der ersten um eine ganze Wellenlänge verschoben, sie besitzen also keine Phasendifferenz gegen jene und bewegen demnach den Punkt  $\mu$  wieder in demselben Sinne. Ihnen entgegen wirken aber nun die Strahlen der vierten Zone, welche eine Phasendifferenz von  $\frac{1}{2}\lambda$  mit den von den Punkten der dritten Zone herrührenden Bewegungen besitzen.

Ebenso ist es mit allen folgenden Zonen, so dass die abwechselnden Zonen stets Bewegungen in  $\mu$  erzeugen, welche eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge besitzen, welche sich also gegenseitig schwächen.

Die resultirende Bewegung in  $\mu$  wird also wesentlich von der Amplitude abhängig sein, welche jede der Zonen in  $\mu$  erzeugt. Diese aber hängt von zwei Umständen ab, einmal nämlich von der Anzahl der in jeder Zone schwingenden Punkte, und dann von der Neigung der in jeder Zone stattfindenden Schwingungen gegen die in  $\mu$  durch den Punkt  $v$  des Radius-erregte Schwingung. Denn betrachten wir nur transversale Schwingungen, so kann z. B. von der sechsten Zone her nur die Componente in Betracht kommen, welche zu  $va$  senkrecht ist. Zur Berechnung der Resultirenden müssten wir also die Summe der von allen Zonen kommenden Schwingungen bilden, jede multipliziert mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den sie mit der Schwingung bei  $v$  bildet. In dieser Form würde die Lösung des Problems die grösste Schwierigkeit bieten. Glücklicherweise kann man das Problem auch anders anfassen, indem man nur die Wirkungen der unmittelbar benachbarten Zonen vergleicht, also die der zweiten mit jenen der

ersten und dritten, die der vierten mit jenen der dritten und fünften. Da die Neigungen der unmittelbar benachbarten Zonen nur äusserst wenig verschieden sind, so können wir bei dieser Betrachtungsweise die Verschiedenheit derselben vernachlässigen und die von jeder Zone in  $\mu$  erregte Bewegung der Grösse der Zone, der Anzahl der in ihr schwingenden Punkte proportional setzen. Wir haben deshalb nur die Grösse der einzelnen Zonen zu berechnen; sei zu dem Ende  $MN$  der Durchschnitt durch ein Stück der



primären Welle, welche nach  $\mu$  ihre Schwingungen sendet, und seien  $v_1 v_2, v_2 v_3$  die Durchschnitte durch zwei benachbarte Zonen, so dass die Abstände ihrer Grenzen von  $\mu$  sich um  $\frac{\lambda}{2}$  unterscheiden, so dass also

$$r_1 = r + \frac{\lambda}{2}, r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2}$$

seien. Denken wir uns den Durchschnitt um  $\alpha\mu$  als Axe rotirt, so beschreibt der Bogen  $MN$  das betreffende Stück der primären Welle, und der Bogen  $v_1 v_2$  die zwischen  $r$  und  $r + \frac{\lambda}{2}$  liegende Zone. Um die Grösse derselben zu erhalten, denken wir uns bei  $v_1$  ein unendlich kleines Stück des Schnittes, dessen Länge im Bogenmaass wir mit  $du$  bezeichnen, dessen Länge in Linienmaass also  $a \cdot du$  ist, wenn wir den Radius der primären Welle mit  $a$  bezeichnen. Der Abstand dieses Elementes von der Drehungsaxe ist  $v_1 b$ , die Grösse der von demselben beschriebenen Zone somit gleich  $2\pi \cdot v_1 b \cdot a \cdot du$ . Setzen wir jetzt den Winkel  $v_1 \alpha \mu$  gleich  $u$ , so ist  $v_1 b = a \cdot \sin u$  und damit die Grösse der von dem Element  $du$  beschriebenen Zone  $2\pi a^2 \cdot \sin u \cdot du$ . Jedes Element  $du$  des Durchschnittes  $v_1 v_2$  beschreibt eine solche Zone, und die Summe aller dieser Elementarzone ist die gesuchte Zone. Die einzelnen Elementarzone erhalten wir, wenn wir in dem eben abgeleiteten Ausdrücke nach und nach für  $u$  alle Werthe einsetzen von  $u = v_1 \alpha \mu = u$  bis  $u = v_2 \alpha \mu = u + v$ , wenn wir den Winkel  $v_2 \alpha \mu = v$  setzen. Wir können diese Summe in der schon mehrfach benutzten Schreibweise schreiben, wenn wir die Grösse der Zone gleich  $Z_n$  setzen

$$Z_n = \int_u^{u+v} 2\pi a^2 \cdot \sin u \cdot du = 2\pi a^2 \int_u^{u+v} \sin u \cdot du,$$

da wir den jedem Gliede der Summe angehörigen Factor  $2\pi a^2$  vor das

Summenzeichen setzen können. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen ist nun gleich der negativen Differenz  $-\{\cos(u+du) - \cos u\}$ . Der entwickeln wir  $\cos(u+du)$  und bedenken, dass  $du$  unendlich klein, somit  $\cos du = 1$ ,  $\sin du = du$ , so ist

$$-\{\cos u - \sin u du - \cos u\} = \sin u du.$$

Daraus folgt aber, dass die gesuchte Summe die Summe aller Differenzen der auf einander folgenden Werthe  $\cos u$  ist, wenn  $u$  nach und nach alle Werthe von  $v_1$   $\alpha$   $\mu$  bis  $v_2$   $\alpha$   $\mu$  annimmt, somit dass diese Summe gleich der Differenz der äussersten Werthe oder

$$-\{\cos(u+v) - \cos u\}$$

ist. Damit ist die Grösse der Zone

$$Z_n = 2\pi a^2 \{\cos u - \cos(u+v)\}.$$

Setzen wir nun den Abstand der primären Welle von  $\mu$  gleich  $b$ , also  $a \mu = a + b$ , so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cdot \cos u$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cdot \cos(u+v)$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r^2 = r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} = 2a(a+b) \{\cos u - \cos(u+v)\}$$

$$\cos u - \cos(u+v) = \frac{1}{2a(a+b)} \left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right),$$

so dass schliesslich die gesuchte Grösse der Zone wird

$$Z_n = \frac{\pi a}{a+b} \left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Die Grösse der folgenden Zone erhalten wir aus diesem Ausdruck sofort, indem wir für  $r$  einsetzen  $r_1 = r + \frac{\lambda}{2}$ , dieselbe wird damit

$$Z_{n+1} = \frac{\pi a}{a+b} \left(r\lambda + 3\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

und die Grösse der auf diese folgenden Zone, wenn wir zu  $r$  nochmals  $\frac{\lambda}{2}$  addiren, also

$$Z_{n+2} = \frac{\pi a}{a+b} \left(r\lambda + 5\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Wir sehen also, dass die Grössen der auf einander folgenden Zonen nicht gleich sind, dass aber

$$Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n + Z_{n+2}),$$

oder die Grösse jeder einzelnen Zone ist genau gleich der halben Summe der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone. Mit diesem Satze ist unsere Aufgabe gelöst, denn es folgt nach der vorhin gemachten Bemerkung,

dass die Wirkung der zweiten Zone durch die halbe erste und halbe dritte, die der vierten durch die halbe dritte und halbe fünfte Zone aufgehoben wird, und so fort über die ganze primäre Welle, soweit von derselben Bewegung nach  $\mu$  kommt. Es bleibt somit nur die von der halben unmittelbar um  $\nu$  liegenden Zone ausgehende Bewegung übrig; die Bewegung des Punktes  $\mu$  ist also ganz dieselbe, als wenn nur in der Richtung  $\alpha\nu\mu$  die Bewegung sich fortgepflanzt hätte, also in der Richtung des durch  $\alpha$  und  $\nu$  gelegten Radius.

Wir gelangen demnach durch die Huyghens'sche Construction ganz zu denselben Resultaten wie nach der im vorigen Paragraphen dargelegten Anschauung über die Fortpflanzung der Wellenbewegung; wir werden daher in spätern Fällen sowohl die eine als die andere Anschauungsweise anwenden können.

### §. 125.

**Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen.** Ein nicht homogenes Punktsystem können wir, wie bereits erwähnt, als aus homogenen Punktsystemen zusammengesetzt ansehen. In den einzelnen Theilen des Systems wird daher die Fortpflanzung der Wellenbewegung denselben Gesetzen folgen, wie in einem homogenen System. Die Bewegung wird sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, wenn die einzelnen Systeme isotrop sind, in anders geformten, wenn sie anisotrop sind. Um demnach die Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen vollständig zu bestimmen, haben wir nur die Erscheinungen zu untersuchen, welche beim Uebergange einer Wellenbewegung aus dem einen Punktsysteme in ein anderes sich darbieten.

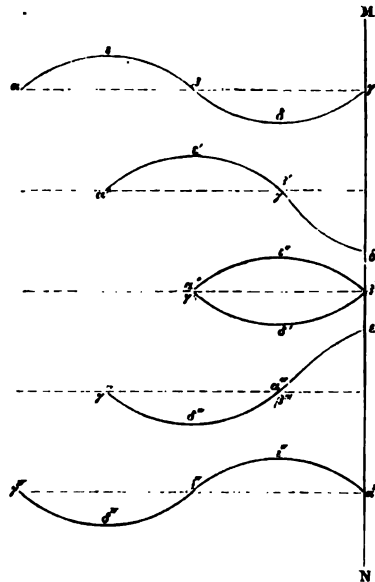
Wenn eine Wellenbewegung sich in einem homogenen Mittel, das heisst in einem von gleichförmiger Dichte und Elasticität fortpflanzt, so kann sie niemals zurückkehren, vielmehr lässt sie beim Uebergange auf neue Schichten die vorhergehenden in absoluter Ruhe zurück. Ebenso wie eine Kugel, wenn sie auf eine zweite von gleicher Masse stösst, an diese ihre ganze Geschwindigkeit abgibt und nach dem Stosse in Ruhe zurückbleibt, so überträgt auch jeder schwingende Punkt auf den ihm an Grösse genau gleichen folgenden seine ganze Geschwindigkeit. In der Ruhelage angekommen, verlässt er dieselbe daher nicht mehr, wenn nicht ein neuer Impuls von dem bewegenden Mittelpunkt her ihn trifft. Die Wellenbewegung schreitet daher in einem homogenen Punktsystem einfach voran, ohne je zurückzukehren.

Anders jedoch, wenn eine Wellenbewegung die Grenze zweier verschiedener Punktsysteme trifft. Wenn eine Kugel auf eine zweite stösst, welche mehr oder weniger Masse als die erste besitzt, so bleibt sie in beiden Fällen nach dem Stosse noch in Bewegung. Hat die zweite Kugel mehr Masse als die erste, so wird die erste Kugel zurückgeworfen, die getroffene Kugel bewegt sich vorwärts, die stossende ihrer frühern Bewegung entgegen zurück. Hat die zweite Kugel eine geringere Masse, so fährt die stossende Kugel fort, sich in gleichem Sinne wie vorhin zu bewegen. So muss es auch bei der Wellenbewegung sein, wo die Bewegung der einzelnen Punkte Folge der Einwirkung der benachbarten Punkte ist. Kommt

eine Bewegung an der Grenze zweier Mittel an, so wird die Bewegung das zweite Mittel übergehen und dort eine Wellenbewegung erzeugen, sich nach den für dieses System gültigen Gesetzen fortpflanzt. Zugleich bleiben aber auch die in der letzten Schicht des ersten Mittels liegenden Punkte in Bewegung.

Ist das zweite System weniger dicht, so werden die in der Grenzschicht liegenden Punkte einfach ihre Bewegung fortsetzen, nur wird die Amplitude der folgenden Bewegung kleiner sein. Dadurch werden nun diese Punkte Mittelpunkte neuer Wellen, welche sich rückwärts im ersten Systeme ausbreiten, und da die Bewegungen der Mittelpunkte dieser neuen Wellen gerade so erfolgen, als wären sie Folge neuer Impulse von ankommenden Wellen, so müssen auch die von der Grenze zurückkehrenden Wellen einfach die Fortsetzung der ankommenden Wellen sein, d. h. die Phasen der Schwingungen in den zurückkehrenden Wellen sind in irgend einem Abstände von der Grenze ganz dieselben, als wenn sich die Bewegung in ihrer ursprünglichen Richtung um eine gleiche Strecke weiter fortpflanzt hätte.

Fig. 218.



Stelle nun  $\alpha\beta\gamma$  (Fig. 218) eine Stelle an der Grenze zweier Mittel, von denen das zweite Mittel weniger dicht ist als das erste, ankommende Welle vor. Der Punkt  $\gamma$  wird in Folge der einfallenden Welle bewegt und nach  $\frac{1}{4}$  Undulation sich in  $\delta'$  befinden. Da derselbe aber an die weiter liegenden Punkte des zweiten Mittels nur einen Theil seiner Geschwindigkeit abgibt, so behält er einen Theil der an ihn übertragenen Bewegung bei. Dieses ist nun dasselbe, als wenn er seine ganze Bewegung abgibt, zugleich aber einen neuen Impuls in derselben Richtung, in der er sich bewegt,

erhalten hätte, deshalb pflanzt sich in dem Augenblicke, wo sich der Punkt  $\gamma$  bewegt, die nach unten gerichtete Bewegung, das Wellenthal, auch nach rückwärts fort. Da sich nun die Bewegung in der Punktreihe nach rückwärts mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, mit der sie ankommt, ist die reflectirte Bewegung nach  $\frac{1}{4}$  Undulationszeit bis  $\gamma'$  vorgeschritten, so dass die vordere Hälfte des reflectirten Thales und die hintere Hälfte des ankommenden Thales in  $\beta'\delta'$  oder  $\gamma'\delta'$  zusammenfallen; die Tiefe des an der Grenze entstehenden Wellenthal ist also die Summe der Tiefen des ankommenden und des reflectirten Thales. Weiter nach  $\frac{1}{4}$  Schwingungsdauer ist  $\gamma$  wieder in seiner Ruhelage angekommen, in  $\beta''$ , und der Wellenberg  $\alpha\beta$  ist bis an die Grenze in  $\alpha''\epsilon''\beta''$  vorgeschritten. Das reflectirte Thal hat sich aber ebenfalls um  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge nach rückwärts fortpflanzt und befindet sich in  $\gamma''\delta''\beta''$ . An der Grenze wird daher für einen Augenblick die Bewegung gestört, indem durch Interferenz der ankomen-

und reflectirten Welle die zwischen  $\alpha''$  und  $\beta''$  befindlichen Punkte nur durch die Differenz der entgegengesetzten Impulse bewegt wird.

Nach einer weitem  $\frac{1}{4}$  Schwingungszeit ist das reflectirte Thal bis  $\delta''' \beta'''$  fortgeschritten, der in der Grenze befindliche Punkt hat in Folge des eingetroffenen Wellenberges sich nach der entgegengesetzten Seite, nach rechts bewegt. Wieder aber hat sich die Bewegung dieses Punktes an die rückwärts liegenden übertragen, da er wegen der geringern Dichtigkeit des dichteren Mittels nicht einen so grossen Theil seiner Geschwindigkeit an die folgenden Punkte abgegeben hat. Die Höhe des Wellenberges an der Grenze ist daher viel bedeutender als diejenige in den fortschreitenden Wellen, und die an der Grenze aus pflanzt sich dem vorher reflectirten Thale folgend ein Wellenberg fort. Nach einer weitem viertel Undulation befindet sich das reflectirte Thal in  $\gamma^{IV} \delta^{IV} \beta^{IV}$  und ihm folgend vollständig der reflectirte Berg  $\beta^{IV} \epsilon^{IV} \alpha^{IV}$ .

Gerade also wie in der ankommenden Wellenbewegung das Wellenthal an dem Wellenberge vorausgeht, so auch im reflectirten, die Bewegung ist in dem reflectirten Welle dieselbe, wie wenn sie ungestört nur mit kleinerer Amplitude fortgeschritten wäre. Gerade wie das Wellenthal fortschreitend der nächsten Strecke der Punktreihe ein Wellenthal und der Wellenberg an dem Wellenberg erzeugt, so erzeugt auch bei der Reflexion das ankommende Wellenthal ein rückkehrendes Wellenthal und der ankommende Wellenberg einen zurückkehrenden Berg.

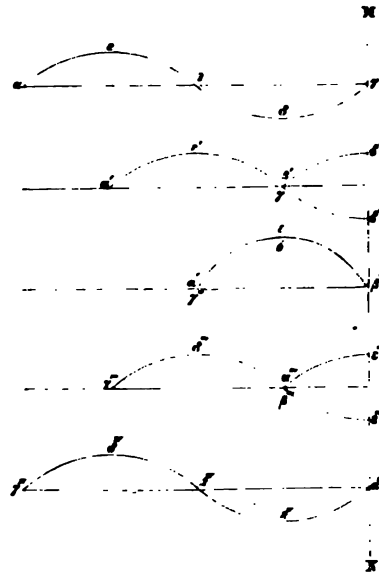
Anders verhält es sich, wenn das zweite Mittel eine grössere Dichtigkeit besitzt. Die bei der longitudinalen Schwingung sich gegen das zweite Mittel bewegenden Punkte werden zurückgestossen, und die sich von der Grenze entfernenden zurückgezogen, in jedem Falle also wird die ankommende Bewegung in die entgegengesetzte verwandelt; so auch bei der transversalen Bewegung; die sich in dem einen oder andern Sinne von der Gleichgewichtslage entfernenden Punkte werden von den folgenden Punkten des dichteren Mittels stärker zurückgezogen, als wenn die folgenden Schichten die gleiche Dichtigkeit hätten. Die Wirkung des dichteren Mittels ist also dieselbe, als wenn die in der Grenze befindlichen Punkte, weil ihre Bewegung gehemmt wird, einen ihrer Bewegung entgegengesetzten Impuls erhalten hätten. Dadurch werden sie Mittelpunkte einer neuen, in dem Augenblick, wo die erste ankommt, beginnenden Bewegung, welche der Richtung nach rechts ankommenden entgegengesetzt ist. Diese der ankommenden entgegengesetzte Bewegung pflanzt sich in dem ersten Punktsystem rückwärts fort.

Stellt demnach  $\alpha\beta\gamma$  (Fig. 219) eine an der Grenze zweier Mittel, deren rechtes von  $MN$  dichter ist, ankommende Welle dar, so wird das ankommende Wellenthal als Wellenberg reflectirt; nach der Zeit von  $\frac{1}{4}$  Schwingung ist daher die Stellung der zwischen  $\beta'$  und der Grenze gelegenen Punkte durch die Differenz der ankommenden und reflectirten Welle bestimmt, das Wellenthal hat eine viel kleinere Tiefe, als es bei ungehinderter Fortpflanzung der Bewegung haben würde. Nach einer folgenden Schwingungszeit ist der aus dem ankommenden Thal reflectirte Berg in die Stellung  $\gamma'' \delta'' \beta''$  fortgepflanzt, und ebenso ist der Wellenberg  $\alpha\epsilon\gamma$  bis  $\epsilon'' \beta''$  vorgeückt, an der Wand bildet sich ein aus beiden Bergen resultirender stärkerer Wellenberg. In der folgenden Zeit rückt der reflectirte Berg nach  $\gamma''' \delta''' \beta'''$ , der ankommende ist zur Hälfte in  $\alpha''' \epsilon'''$ , zur Hälfte



als Thal reflectirt  $\beta''' \varepsilon'''$ , an der Wand besteht ein Berg von geringerer Höhe. Nach weiterm Verlauf einer  $\frac{1}{4}$  Undulationszeit ist schliesslich der

Fig. 219.



aus dem Wellenthal reflectirte Wellenberg nach  $\gamma^{IV} \delta^{IV} \beta^{IV}$  vorgedrückt und der zuletzt an der Grenze angekommene Wellenberg ist als Wellenthal reflectirt und hat die Lage  $\beta^{IV} \varepsilon^{IV} \alpha^{IV}$ .

Während also bei der ankommenden Bewegung das Wellenthal dem Wellenberg vorausging, geht in der reflectirten umgekehrt der Wellenberg dem Wellenthal voraus. Die reflectirte Bewegung hat also mit der ankommenden entgegengesetzte Phasen: bei ungestörter Fortpflanzung wäre das ankommende Thal in der nächsten Strecke wieder Anlass zur Bildung eines Thales geworden, hier hat es einen Berg hervorgerufen. Durch die Reflexion ist also der reflectirte Strahl gegen den einfallenden um eine halbe Wellenlänge verschoben.

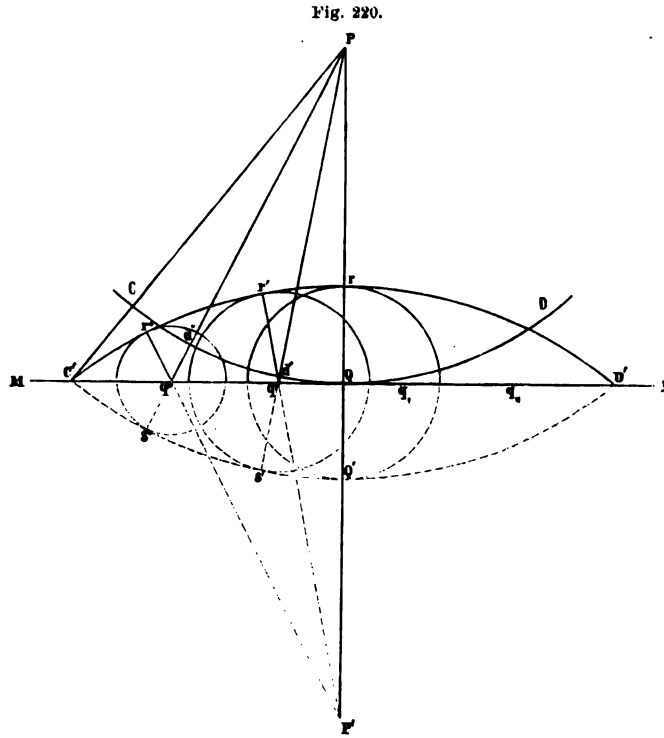
Die in beiden Fällen reflectirten Bewegungen sind demnach ebenfalls in gleichen Abständen von der Grenze in entgegengesetzter Phase, wo in dem ersten Wellenthal ist, ist in dem zweiten Wellenberg und umgekehrt.

Es folgt also, wenn eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Systeme ankommt, in denen der Coefficient  $\sqrt{\frac{e}{d}}$  verschiedene Werthe hat, so bewirkt sie immer, dass von der Grenzstelle aus sich zwei Wellensysteme weiter bewegen, eine in das erste Mittel zurück, eine reflectirte oder zurückgeworfene Welle, und eine zweite, welche in dem zweiten Mittel sich weiter bewegt.

Nehmen wir an, die beiden Punktsysteme seien isotrop, so erhält man mit Hülfe der Huyghens'schen Construction leicht die fortschreitende und zurückgeworfene Welle. Beginnen wir mit der letztern, und setzen wir voraus, dass eine kugelförmige Welle an der ebenen Grenze zweier Mittel antreffe.

Es sei nun  $P$  (Fig. 220) der Mittelpunkt der Welle im ersten Mittel,  $CD$  sei ein Durchschnitt der Welle und  $MN$  ein Durchschnitt der das erste Mittel begrenzenden Ebene. Ferner sei  $PQ$  senkrecht zu  $MN$ , also  $Q$  der erste Punkt, welcher von der Wellenbewegung getroffen wird. Jeder Punkt der Grenze wird ein Mittelpunkt einer neuen in das erste Mittel zurückkehrenden Welle, sowie er von der ankommenden Bewegung getroffen wird. Es wird sich demnach zunächst von dem Punkte  $Q$  eine Bewegung in das erste Mittel ausbreiten. Da nun, wie wir sahen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem elastischen Punktsystem nur abhängt von dem

ienten  $\sqrt{\frac{e}{d}}$ , so verbreitet sich die zurückgeworfene Welle mit eben  
 eben Geschwindigkeit, mit welcher sich die einfallende Welle verbrei-



in der Zeit also, in welcher von den Punkten  $D$  oder  $C$ , von denen  
 der Symmetrie halber annehmen, dass sie gleichweit von  $Q$  entfernt  
 sich die schwingende Bewegung bis  $D'$  oder  $C'$  fortgepflanzt hat, wo  
 von diesen Punkten aus die Wellenbewegung reflectirt zu werden be-  
 t, pflanzt sich von  $Q$  aus die Bewegung bis zu einer Halbkugel fort,  
 1 Radius  $Qr = CC'$  ist. Die neben  $Q$  liegenden Punkte der Grenz-  
 ht  $q', q'', q, q''$  werden immer später von der Wellenbewegung ge-  
 en, und zwar so viel später, als die Bewegung der ankommenden Welle  
 cht, um die Strecke  $d'q', d''q''$  zu durchlaufen. In derselben Zeit  
 r, in welcher sich die Bewegung von  $Q$  bis zu einer Halbkugel vom  
 us  $Qr$  fortpflanzt, verbreitet sie sich von  $q'$  bis zu einer Halbkugel  
 Radius  $q'r' = Qr - q'd'$  von  $q''$  bis zu einer Halbkugel vom Radius  
 ' =  $Qr - q''d''$  und so von allen übrigen Punkten bis zu einer Halb-  
 1, deren Radius um die Länge kleiner ist als  $Qr$ , welche die Wellen-  
 gung noch hat durchlaufen müssen, um den betreffenden Punkt in  
 ingungen zu versetzen.

Die Grenze, bis zu der sich demnach die Wellenbewegung in dem er-  
 Mittel rückwärts ausgebreitet hat, ist die Fläche, welche alle diese

einzelnen Kugeln berührt. Es ist nun leicht ersichtlich, dass diese Fläche  $C' r'' r' rD'$  eine Kugelfläche sein muss, deren Mittelpunkt  $P$  ebenso weit hinter  $MN$  liegt, als der Punkt  $P$ , von welchem die ankommende Welle ausging, vor  $MN$  liegt. Denn denken wir uns, dass die Welle ungehindert hätte fortschreiten können, so geben die andern Hälften der von uns um  $Q, q', q'' \dots$  beschriebenen Kugeln, nach der Huyghens'schen Construction, die Wellenfläche  $C' Q' D$ , bis zu der sich die Bewegung in derselben Zeit fortgepflanzt hätte, in der sie in der Richtung  $PC$  sich bis  $CC'$  fortgepflanzt. Die diese Kugeln nach der einen Seite einhüllende Fläche ist aber, wie wir sahen, eine Kugel vom Radius  $PC' = PQ' = PD'$ . Die Fläche, welche diese Kugeln von der andern Seite einhüllt, muss daher eine Kugel von demselben Radius sein, die ihre Convexität jedoch nach der entgegengesetzten Seite richtet, deren Mittelpunkt also in  $P'$  liegt, so dass  $PQ' = P'r$ , oder da  $Qr = QQ', P'Q = PQ$  ist.

Von einer ebenen Grenze zweier Punktsysteme wird demnach eine ankommende Welle gerade so reflectirt, als ginge sie von einem Mittelpunkt aus, welcher ebenso weit hinter dieser Grenze, als der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor der Grenze liegt.

Dieser Satz lässt sich in etwas anderer Form aussprechen, in welcher er in manchen Fällen leichter angewandt wird.

Aus der Gleichheit  $P'Q = PQ$  folgt, dass die Dreiecke  $P'C'Q$  und  $PC'Q, P'q''Q$  und  $Pq''Q, P'q'Q$  und  $Pq'Q$  etc. sich decken und daraus, dass die Winkel

$$\begin{aligned} P'q''Q &= Pq''Q, \\ P'q'Q &= Pq'Q \text{ etc.} \end{aligned}$$

oder da die Winkel  $P'q''Q = r''q''C'$  und  $P'q'Q = r'q'C'$  sind als Scheitelwinkel, dass die Winkel

$$\begin{aligned} Pq''Q &= r''q''C', \\ Pq'Q &= r'q'C', \end{aligned}$$

oder die Winkel, unter welchen die Radien der ankommenden und reflectirten Welle die Grenzfläche schneiden, einander gleich sind. Nach unserer ersten Anschauung von der Art der Fortpflanzung der Wellenbewegung in einem Punktsystem waren die Radien der Wellenfläche die einzelnen Punktreihen, in welchen sich die Bewegung fortgepflanzt. Nennen wir mit Rücksicht darauf die Radien die Wellenstrahlen, so können wir obigen Satz auch so aussprechen, dass bei der Reflexion einer Wellenbewegung die reflectirten Strahlen und die ankommenden mit der reflectirenden Fläche gleiche Winkel bilden.

Man bezeichnet nun gewöhnlich die Verticale, welche in dem Punkte der Trennungsfläche beider Mittel errichtet wird, als das Einfallslot und den Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben bildet, als Einfallswinkel, den hingegen, welchen der reflectirte Strahl mit ihm einschliesst, als Reflexionswinkel.

Sind nun die Winkel, welche der ankommende und der reflectirte Strahl mit der reflectirenden Fläche einschliessen, einander gleich, so sind auch diejenigen, welche sie mit dem Einfallslot bilden, woraus dann dass eine Wellenbewegung so reflectirt wird, dass der einfallende

reflectirte Strahl mit dem Einfallslot in einer Ebene liegen, und dass Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

Diese Form unseres Satzes ist besonders bequem, um die Gesetze der Reflexion an krummen Flächen zu erhalten. Wir können diese als eine unendliche Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, deren Normalen nicht bei einer Ebene einander parallel, sondern immer anders gerichtet sind. In jeder noch so kleinen Ebene gilt nun unser Reflexionsgesetz; kennt man aber das Gesetz, nach welchem die Normalen der auf einander folgenden Ebenen geneigt sind, so hat man darin dann zugleich an allen Punkten die Richtung, nach welcher ein einfallender Strahl und somit eine kommende Wellenbewegung reflectirt wird.

Ist z. B. die Grenze zweier Mittel eine Kugelfläche, so fallen die in einem Punkte der Fläche errichteten Senkrechten mit den Radien der Kugel zusammen. Eine an der Grenze ankommende Wellenbewegung wird daher zurückgeworfen, dass die an jedem einzelnen Punkte reflectirten Strahlen die ankommenden mit den Radien der Grenzfläche gleiche Winkel bilden. Kommt die Wellenbewegung aus dem Mittelpunkte der Kugel, also in jeder Richtung der Radien an, so wird jeder Strahl nach dem Mittelpunkte zurückgeworfen, die Bewegung kehrt in den Mittelpunkt der Kugel zurück.

#### §. 126.

**Brechung der Wellen.** Von der Grenze zweier Punktsysteme pflanzt sich, wie wir sahen, ausser in das erste System zurück, auch eine Wellenbewegung in das zweite System fort. Jeder Punkt der Grenzschicht wird, sobald als die ankommende Bewegung ihn trifft, Mittelpunkt einer Welle, welche sich in das zweite System fortpflanzt, mit einer andern Geschwindigkeit, als sich die Bewegung in dem ersten Systeme fortpflanzt. Ist das zweite System dichter als das erste, d. h. ist der Quotient  $\sqrt{\frac{e}{d}}$  kleiner für das zweite System als für das erste, so pflanzt sich die Bewegung im zweiten Systeme langsamer, ist derselbe grösser, so pflanzt sich dieselbe rascher fort.

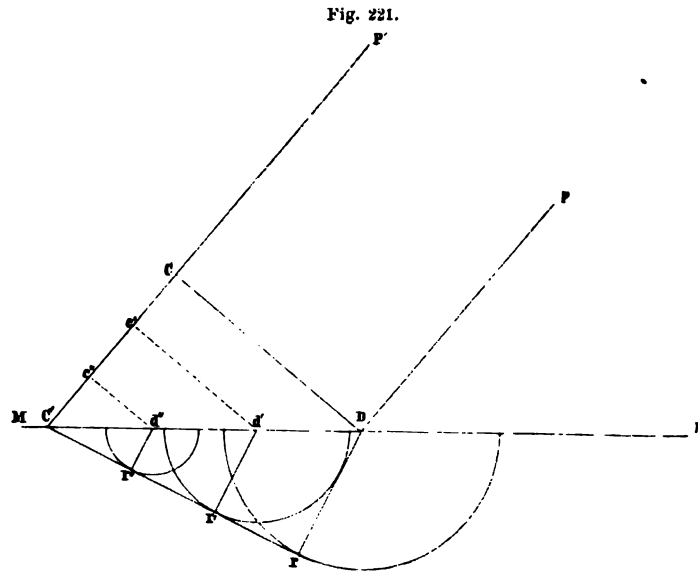
Sei nun  $CD$  (Fig. 221) ein sehr kleines Stück einer Wellenfläche, welche in dem ersten System sich in der Richtung  $PD$  gegen die Grenze  $MN$  in dem zweiten Mittel bewegt. Nehmen wir ferner an, dass der Mittelpunkt der ankommenden Welle, von der  $CD$  ein Stück ist, so weit entfernt sei, dass  $CD$  als eine zur Ebene  $NDP$  senkrechte Ebene und die Wellenstrahlen  $CD$  und  $P'C$  als parallel ansehen können. In dem Augenblicke, in welchem das Wellenstück  $CD$  bei  $D$  die Grenze  $MN$  berührt, verbreitet sich von  $D$  eine Welle in dem zweiten Systeme.

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ersten Systeme  $v$  und in dem zweiten  $v'$ , so verhalten sich die Strecken, durch welche sich die Wellenbewegung in gleichen Zeiten fortpflanzt, wie  $v$  zu  $v'$ .

Der Radius  $Dr$  der Kugel, über welche sich die Wellenbewegung im zweiten Mittel ausbreitet, während dieselbe im ersten sich von  $C$  bis  $C'$  fortpflanzt, ist daher

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v}.$$

Von den zwischen  $D$  und  $C'$  gelegenen Punkten verbreiten sich ebenfalls Wellenbewegungen in das zweite Mittel, aber um so später, als sie



selbst von der fortschreitenden Wellenbewegung getroffen werden. Von irgend einem Punkte  $d'$  beginnt sich die Bewegung erst zu verbreiten, wenn die Bewegung im ersten Mittel bis  $c'd'$  fortgeschritten ist. Hat sich die Bewegung im ersten Mittel bis  $C'$  fortgepflanzt, so hat sich von  $d'$  dieselbe im zweiten Mittel über eine Kugel ausgebreitet, deren Radius  $\rho$  gleich

$$\rho = c'C' \cdot \frac{v'}{v}$$

Die Grenze, bis zu der sich die Bewegung im zweiten Mittel fortgepflanzt hat, wenn sie im ersten Punktsystem bis  $C'$  fortgeschritten ist, ist dann die Fläche, welche alle Kugeln, die um die verschiedenen Punkte beschrieben sind, berührt.

Diese Fläche erhalten wir nun, wenn wir durch  $C'$  eine Tangente an den um  $D$  beschriebenen Halbkreis ziehen und durch diese eine zur Ebene  $C'Dr$  senkrechte Ebene legen. Denn diese Ebene berührt nicht nur die um  $D$  mit dem Radius  $Dr$  beschriebene Kugel, sondern auch sämtliche mit den betreffenden Radien um die Punkte  $d$  beschriebenen Kugeln. Denn ziehen wir von  $d'$  aus  $d'r'$  senkrecht zu  $C'r$ , so sind die Dreiecke  $C'r'd'$  und  $C'r'd$  ähnlich, somit

$$d'r' : Dr = C'd' : C'D.$$

Ebenso sind aber auch die Dreiecke  $CDC'$  und  $c'd'C'$  ähnlich, somit

$$C'd' : C'D = c'C' : CC'.$$

Da nun ferner

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v},$$

so ist

$$d'r' : CC' \cdot \frac{v'}{v} = c'C' : CC',$$

oder

$$d'r' = C'c' \cdot \frac{v'}{v},$$

das heisst die von  $d'$  auf  $C'r$  herabgelassene Senkrechte ist der Radius der Kugel, die mit dem Radius  $\rho$  um  $d'$  beschrieben ist, oder  $C'r$  ist Tangente an dem Durchschnitt der Kugel mit der Ebene  $NDP$  und somit die durch  $C'$  gelegte Ebene Tangentialebene an die um  $d'$  beschriebene Kugel. Ebenso gilt es für alle um die Punkte  $d'$  beschriebenen Kugeln.

Bezeichnen wir nun die Winkel  $CDC'$  und  $DC'r$ , welche die ankommende und die in das zweite System übergegangene Welle mit der Grenzfläche bilden, mit  $\varphi$  und  $\varphi'$ , so haben wir

$$\sin \varphi = \frac{CC'}{C'D},$$

$$\sin \varphi' = \frac{Dr}{C'D} = \frac{\frac{c'}{v'} \cdot CC'}{C'D}$$

und daraus

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{v}{v'}.$$

Der Winkel, welchen die in das zweite Mittel übergegangene Welle mit der Grenzfläche bildet, ist also ein anderer als derjenige, welchen die ankommende Welle mit der Grenzfläche bildet, oder was dasselbe ist, die in das zweite Mittel übergegangenen Wellenstrahlen bilden mit dem Einfallslothe andere Winkel als die ankommenden Strahlen. Da aber das Verhältniss  $\frac{v}{v'}$  für zwei Mittel constant ist, so folgt, dass die ankommende Welle unter einem Winkel ankommen kann, unter welchem sie will, sie bewegt sich stets unter einem solchen Winkel gegen die Grenzfläche weiter, so dass das Verhältniss der Sinus des Winkels, unter welchem sie ankommt, zu dem Sinus des Winkels, unter dem sie weiter geht, constant ist. Zugleich sieht man, dass der einfallende und gebrochene Wellenstrahl und das Einfallslothe derselben Ebene liegen.

Jede an der Grenzfläche ankommende kugelförmige Welle können wir uns als eine Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, die alle verschiedenen Neigungen gegen die Grenzfläche haben, deren Neigung gegen die Grenzfläche durch den Winkel, welchen die zu ihnen gehörenden Wellenstrahlen, die einzelnen Radien, mit dem Einfallslothe bilden. Mit Hilfe des obigen Satzes ist es leicht, die fortgepflanzte Welle im zweiten Medium zu construiren.

Wir erhalten als unmittelbare Folge aus unserem Satze, dass beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Punktsystem in ein zweites, der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslothe bildet, kleiner ist als der Winkel, welchen der ankommende Wellen-

strahl mit demselben einschliesst. Ist dagegen dieser Quotient grösser für das zweite wie für das erste Mittel, so ist der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslothe bildet, grösser. Beim Uebergange einer Wellenbewegung aus einem Mittel in ein zweites werden daher die einzelnen Wellenstrahlen stets gebrochen; beim Uebergange in ein Mittel von grösserer Dichtigkeit werden sie zum Einfallslothe hingebrochen, beim Uebergange in ein Mittel von geringerer Dichtigkeit werden die Strahlen vom Einfallslothe fortgebogen.

Jede krumme Fläche können wir, wie schon bemerkt wurde, als eine Reihenfolge unendlich kleiner Ebenen betrachten, welche in steter Folge gegen einander geneigt sind. Für krumme Begrenzungen zweier Mittel muss daher das Brechungsgesetz dasselbe sein; um den Weg der einzelnen Strahlen zu bestimmen, muss man aber das Gesetz kennen, nach welchem die einzelnen, unendlich kleinen Ebenen oder deren Einfallslothe gegen einander geneigt sind<sup>1)</sup>.

## Zweites Kapitel.

### Von der Wellenbewegung fester Körper.

#### §. 127.

**Schwingende Bewegung einzelner Theile fester Körper in Folge der Elasticität.** Die im vorigen Kapitel aus den früher erkannten Gesetzen

<sup>1)</sup> Die in diesem Kapitel vorgetragene Sätze finden sich vorzugsweise in den Abhandlungen von *Fresnel* und andern über die Undulationstheorie des Lichtes zuerst in ähnlicher Form entwickelt. Es gilt das besonders von der Ableitung der Gleichungen für die schwingende Bewegung §. 114, bis §. 117. Die selben befinden sich in:

*Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. de France Tome V. Poggend. Ann. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I.

Die Sätze über Interferenz der Wellen §. 118 in derselben Abhandlung von *Fresnel*, und *Schwerd*, die Beugungserscheinungen des Lichtes. Mannheim 1836.

Die stehenden Wellen durch Interferenz entgegengesetzter Wellenzüge wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen leitet *Fresnel* ähnlich ab in seiner Abhandlung über die Doppelbrechung des Lichtes: Mémoires de l'Acad. de France. Tome VII. Poggend. Ann. XXIII. Oeuvres complètes. T. II. p. 479.

Auf die elliptischen Schwingungen machte zuerst aufmerksam *Fresnel* in seiner Abhandlung über Reflexion des polarisirten Lichtes: Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Ann. XXII. *Airy*, Ueber die Doppelbrechung im Bergkrystall im 4. Bande der Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Poggend. Ann. XXIII. Die von uns gegebene Ableitung ist im wesentlichen die von *Neumann* in der Abhandlung über die Reflexion an Metallen. Poggend. Ann. XXVI. Man sehe darüber auch *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig, 1853. Die Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge ist besonders von *Lissajous* studirt und für akustische Zwecke nutzbar gemacht. Annales de chim. et de phys. 3. Sér. t. LI.

Die Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen und das Huyghens'sche Prinzip ist zuerst von *Huyghens* in seinem Werke Traité de la lumière, Leiden 1690. entwickelt, ebenso die Ableitung des Reflexions- und Refractions-Gesetzes. Vollständiger von *Fresnel* in der erwähnten Abhandlung über die Beugung des Lichtes und in einem Zusatz derselben: Erklärung der Refraction des Lichtes nach der Undulationstheorie. Auf den Unterschied der Reflexion an dichtern und dünneren Systemen machte zuerst *Thomas Young* aufmerksam. On the theory of light and colours. Philosoph. Transact. of the Royal Society for 1802.

Virkung von Kräften theoretisch abgeleiteten Bewegungserscheinungen wir in der mannigfachsten Weise in den Körpern hervor. Alle Körper bestehen nach den Entwicklungen des §. 48 aus Theilen, welche durch anziehende und abstossende Kräfte zwischen ihnen zusammengehalten werden. Kräfte entweder allein wie bei den festen Körpern oder mit Hilfe anderer Kräfte wie bei den flüssigen und gasförmigen Körpern im Gleichgewicht erhalten werden.

1. Eine Aenderung der auf die Körper wirkenden Kräfte wird eine Aenderung dieses Gleichgewichtszustandes herbeigeführt, Gestaltsänderungen der festen Körper oder Bewegungen in den gasförmigen Körpern hervor, welche wir in dem zweiten Abschnitt betrachten werden.

Wir wenden uns zunächst auf die festen Körper, so sahen wir, durch angehängte Gewichte verlängert, oder durch Druck verformt, wie durch Drehung um eine im Innern derselben liegende Achse einzelnen Schichten der Stäbe gegen einander verschoben wurden, durch Biegung denselben eine andere Gestalt gegeben werden

Wir sahen wir aber stets bei der Aenderung des Gleichgewichtszustandes eines Körpers eine Reaction auftreten, die uns zeigte, dass in jeder Aenderung eine gewisse Spannung zwischen den Molekülen auftritt, durch welche sie sich bestreben, in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Diese Rückkehr trat ein, wenn die Aenderung in den Kräften aufhörte; überschritt die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes in Folge der angebrachten Gewichte nicht die Elasticitätsgrenze, so kehrte der Stab nach Abnahme der Gewichte zu seiner ursprünglichen Gestalt zurück, war die Biegung nicht so stark, dass die Theilchen des Stabes ihre Gleichgewichtslage angenommen hatten, so nahm der Stab seine ursprüngliche Gestalt wieder an.

Während bei dieser Rückkehr in den Gleichgewichtszustand treten Bewegungen auf, welche wir damals, wo wir unser Augenmerk auf den endlichen Zustand der Körper richteten, ausser Acht liessen, die wir zu erkennen uns aber nach dem Vorigen leicht ist.

Wir hielten einen Stab von gegebener Länge und gegebenem Querschnitt ein Gewicht verlängerten, so ergab der Versuch, dass seine Verlängerung proportional war der wirksamen Kraft. Diese Verlängerung ist ein elastischer Zustand, in welchen der Körper durch die dauernde Wirkkraft übergeführt wurde, er trat ein, wenn die durch die Entfernungen der Theile von einander auftretende Elasticitätskraft dem ziehenden Kraft gleich wurde. Die Verlängerung ist eine Entfernung der Enden des Stabes von einander, deshalb sind jedenfalls die Enden der Verlängerungen proportional, das heisst, bei doppelter, dreifacher, überhaupt  $n$ -facher Verlängerung des Stabes haben sich auch die Enden der Schichten des Stabes um die doppelte, dreifache, überhaupt  $n$ -fache Entfernungen von einander, oder was dasselbe ist, von ihrer Gleichgewichtslage entfernt.

Die Verlängerungen des Stabes den spannenden Gewichten proportional, und da bei dem endlichen Zustande die Kräfte, mit denen die Schichten sich rückwärts anziehen, den spannenden Gewichten



an Grösse genau gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind, so folgt, dass die Kraft, mit der irgend eine Schicht des Stabes, wenn sie ausserhalb der Gleichgewichtslage sich befindet, gegen diese hingezogen wird, dem Abstände derselben von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Bei der Rückkehr jeder Schicht in ihre Gleichgewichtslage ist daher die Bewegung derselben eine beschleunigte, in derselben angekommen, besitzt sie eine gewisse Geschwindigkeit, vermöge welcher sie sich über die Gleichgewichtslage hinaus bewegt. Wenn sie dieselbe überschritten hat, wirken aber die Kräfte in entgegengesetztem Sinne auf sie ein und vernichten so allmählich die der Schicht vorher ertheilte Geschwindigkeit. Dann aber tritt, da jetzt wieder dieselben Elasticitätskräfte auf die Schicht einwirken, eine rückgängige Bewegung ein, bei der sich dasselbe wiederholt; die Schicht erhält also eine schwingende Bewegung. Da nun das Gesetz, nach welchem die wirkenden Kräfte mit der Entfernung der Schicht von der Gleichgewichtslage sich ändern, dasselbe ist, welches wir der Ableitung der schwingenden Bewegung von Punkten zu Grunde legten, so können wir die dort erhaltenen Resultate unmittelbar auf die so entstehenden Schwingungen der festen Körper übertragen.

Ganz das Gleiche gilt von den Bewegungen, welche ein Körper, der durch Biegung oder Torsion aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, bei der Rückkehr in dieselbe vollführt; auch in diesem Falle ist die Biegung und Torsion der wirkenden Kraft, also die bei der Biegung oder Torsion auftretende elastische Kraft dem Abstände der einzelnen Theile von der Gleichgewichtslage proportional. Bei der Rückkehr in dieselbe muss demnach der Körper schwingende Bewegungen vollführen, welche den vorhin entwickelten Gesetzen folgen.

### §. 128.

**Longitudinale Schwingungen der Stäbe.** Wenn man einen Stab in seiner Mitte oder an einem oder beiden Enden festhält und ihn an einem Ende rasch mit einem Hammer schlägt, oder seiner Länge nach mit der Hand, nachdem sie mit etwas Colophonium eingerieben ist, oder mit einem nassen Tuche stark reibt, so gerathen die Theile des Stabes in longitudinale Schwingungen, das heisst sie bewegen sich in der Richtung der Längsaxe des Stabes hin und her. Bei dieser Bewegung ändert der Stab seine äussere Gestalt nicht merklich, sondern es bilden sich in seinem Innern nur abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen, die sich in der §. 116 dargestellten Weise durch den Stab verbreiten, in einem begrenzten Stabe an der Grenze reflectirt werden und dadurch zu stehenden Schwingungen des Stabes Anlass geben.

Die longitudinalen Schwingungen eines Stabes sind nicht unmittelbar sichtbar, indess hat Savart<sup>1)</sup> sie auf folgende Weise sichtbar gemacht. Er befestigte Glas- oder Metallstäbe von verschiedenen Dimensionen auf einer 80 Kilogramm schweren Bleimasse. Ein Sphärometer mit horizontaler Schraube wurde mit dem einen Ende des Stabes zur Berührung gebracht und die Stellung der Schraube abgelesen, dann wurde die Schraube zurück-

<sup>1)</sup> Savart in Annales de chim. et phys. LXV. p. 337.

gedreht und der Stab in Schwingungen versetzt. Darauf wurde die Schraube dem Stabe wieder vorsichtig genähert und bei einer bestimmten Stellung zeigte sich, dass die Schraube von dem Stabe in bestimmten Zwischenräumen gestossen wurde, ein Beweis, dass der Stab sich in seiner Längsrichtung abwechselnd ausdehnte und zusammenzog.

Es bedarf übrigens nicht einmal solcher Methoden, um die longitudinalen Schwingungen wahrnehmbar zu machen; sie sind am deutlichsten erkennen durch den Ton, welchen sie hervorbringen. Diesen können wir doch erst im nächsten Abschnitte betrachten, in welchem wir auch die ersten der sofort abzuleitenden Gesetze experimentell nachweisen werden.

Ueber die Fortpflanzung der Bewegung in einem unbegrenzten Stabe haben wir hier nichts hinzuzufügen, sie muss nach den Gesetzen erfolgen, welche wir §. 116 ff. ganz allgemein über die Fortpflanzung schwingender Bewegungen in Punktreihen abgeleitet haben. Zwar haben wir es hier nicht mit einfachen Punktreihen zu thun, indess kann man die dort abgeleiteten Gesetze deshalb einfach übertragen, weil alle Punkte einer zur Längsaxe parallelen Schicht dieselbe Bewegung haben, wir also die Stäbe als ein Bündel paralleler Punktreihen betrachten können.

Auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem solchen Stabe muss der §. 120 entwickelte Ausdruck gelten

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Setzen wir für  $e$ , die Elasticität, den Elasticitätsmodulus  $E$  der betreffenden Substanz ein, wie wir ihn im zweiten Abschnitt bestimmten, und  $d$  die Masse der Längeneinheit des Stabes für den Querschnitt von Quadratmillimeter, da  $E$  das Gewicht ist, welches einen solchen Stab um seine eigene Länge ausdehnt, so ist nach unserer Ableitung §. 120 die constante Grösse  $C = \sqrt{a}$  gleich 1 zu setzen, da die dort von uns mit  $c$  bezeichnete Grösse den von uns §. 50 mit  $E$  bezeichneten Elasticitätscoefficienten bedeutet, und es wird<sup>1)</sup> für einen Stab vom Querschnitte  $q$

$$c = \sqrt{\frac{Eq}{dq}} = \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Da somit aus dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Querschnitt verschwindet, so folgt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen von dem Querschnitte der Stäbe, in denen sie stattfinden, unabhängig ist.

Der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit findet sich häufig unter einer andern Form. Setzen wir für  $E$  seinen Werth nach §. 50, so ist

$$E = \frac{Pl}{q\epsilon},$$

wenn wir mit  $P$  das Gewicht bezeichnen, welches einen Stab von der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $q$  um die Länge  $\epsilon$  ausdehnt. Setzen wir nun gleich 1 Meter und das Gewicht eines Stabes vom Querschnitte  $q$  und der

<sup>1)</sup> Man sehe auch *Poisson* in Mémoires de l'Acad. Royale de France VIII. p. 441.  
WOLLNER, Physik. I. 3. Aufl.

Länge eines Meter gleich  $\pi$ , so wird

$$E = \frac{\pi}{q\delta},$$

wenn  $\delta$  die Verlängerung eines 1<sup>m</sup> langen Stabes durch ein dem Gewichte des Stabes gleiches Gewicht bedeutet.

Setzen wir nun das specifische Gewicht des Stabes gleich  $s$ , so erhalten wir

$$\pi = qs; E = \frac{qs}{q\delta} = \frac{s}{\delta}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für  $E$  in unsere Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so wird

$$c = \sqrt{\frac{s}{\delta d}},$$

$d$  ist nun nach obiger Angabe die Masse der Volumeinheit des bewegten Stabes, wir haben daher, da  $s$  das Gewicht desselben, das Gewicht des 1<sup>m</sup> langen, 1<sup>mm</sup> im Querschnitt haltenden Stabes bedeutet,

$$d = \frac{s}{g}$$

und daraus schliesslich

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Um demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung in einem Stabe zu bestimmen, bedarf es nur der Kenntniss der Beschleunigung  $g$  beim freien Fall und der Verlängerung, welche ein Stab derselben Substanz von 1 Meter Länge erfährt, welcher durch ein Gewicht gezogen wird, das seinem eigenen Gewichte gleich ist.

Wir werden im nächsten Abschnitte in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in langen Stäben den experimentellen Beweis für die Richtigkeit dieser Ausdrücke erhalten.

#### §. 129.

**Schwingungsdauer von Stäben.** Wenn wir einen an seinem einen Ende befestigten, an dem andern freien Stab durch Schläge eines Hammers an seinem freien Ende oder durch Reiben in longitudinale Schwingungen versetzen, so ist der einfachste Fall, dass alle Theile des Stabes sich gleichzeitig nach der einen oder andern Richtung bewegen. Um die Schwingungsdauer zu erhalten, haben wir uns nur daran zu erinnern, dass diese stehenden Schwingungen durch Interferenz der an dem freien Ende erregten und der an dem festen Ende reflectirten Bewegungen entstehen. Die Schwingungsdauer eines solchen Stabes ergibt sich daher aus unseren Ausdrücken des §. 120. für die Schwingungsdauer stehender Wellen.

Sei zu dem Ende  $ab$  (Fig. 222) ein in einen Schraubstock bei  $a$  fest eingespannter, bei  $b$  freier Stab. Wird derselbe durch Schläge bei  $b$  in longitudinale Schwingungen versetzt, so verlängert und verkürzt er sich abwechselnd, und es ist klar, dass das Ende  $b$  die grössten Schwingungen vollführt, während das feste Ende in Ruhe bleibt. Mit den stehenden

Wellen verglichen, macht daher der Stab die Hälfte einer stehenden Welle aus, indem das eine Ende desselben wie die Mitte der stehenden Wellen die grössten Excursionen macht. Die Dauer der Schwingungen stimmt daher mit derjenigen einer stehenden Welle von doppelter Länge überein.

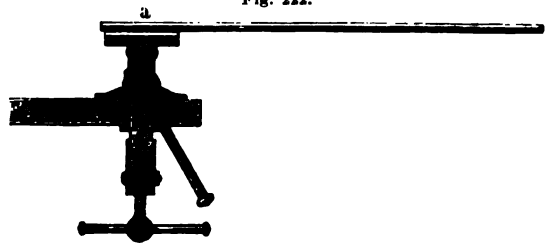
Um diese Uebereinstimmung deutlicher hervortreten zu lassen, können wir die Bildung der

stehenden Welle genauer verfolgen. Durch die Schläge des Hammers wird zunächst das Ende  $b$  in Schwingungen versetzt, und diese Schwingungen pflanzen sich von Theilchen zu Theilchen fort. An dem festen Ende  $a$  angekommen, tritt eine Reflexion ein, und zwar, da das Ende fest ist, also an  $a$  gewissermassen ein dichteres System grenzt, so, dass die Phasen der reflectirten Welle das entgegengesetzte Vorzeichen haben mit denjenigen der ankommenden Welle.

Nennen wir nun den Theil der fortgepflanzten longitudinalen Welle, in welchem alle Theile sich nach der einen Seite von der Gleichgewichtslage entfernt haben, den Wellenberg und die andere Hälfte, in welcher sie sich an der entgegengesetzten Seite befinden, das Wellenthal. Nun komme zur Zeit  $t$ , vom Anfange der Bewegung bei  $b$  gerechnet, der erste Wellenberg in  $a$  an, so wird nach dem Fröhern ein Wellenthal als reflectirte Bewegung nach  $b$  zurückkehren.

Ist nun  $ab = \frac{1}{4}\lambda$ , wenn wir mit  $\lambda$  die Wellenlänge bezeichnen, so gelangt der erste Wellenberg nach  $a$  zur Zeit  $t = \frac{T}{4}$ , wo das Theilchen  $b$  gerade seinen grössten Abstand von der Gleichgewichtslage erreicht hat und im Begriffe ist, in dieselbe zurückzukehren. Zur Zeit  $t$  pflanzt sich daher von  $b$  nach  $a$  die zweite Hälfte des Wellenberges fort, während sich von  $a$  nach  $b$  das Wellenthal fortzupflanzen beginnt, oder es schreiten von den Punkten  $a$  und  $b$ , die um  $\frac{1}{4}\lambda$  von einander entfernt sind, durch den Stab nach entgegengesetzter Richtung zwei Wellen fort, welche eine Phasendifferenz von  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge besitzen.

Denken wir uns nun die Bewegung des Punktes  $b$  herkommend von einem Punkte  $b'$ , der um  $\frac{1}{4}\lambda$  rückwärts von  $b$  entfernt liegt, in einem Abstände gleich  $ab$ , so würde der Punkt  $b'$  um die Zeit  $\frac{T}{4}$  früher angefangen haben sich zu bewegen, als der Punkt  $b$ , er würde also zur Zeit  $t = \frac{T}{4}$ , wo  $b$   $\frac{1}{4}$  Schwingung zurückgelegt hat,  $\frac{1}{2}$  Schwingung zurückgelegt haben. Von dem Punkte  $b'$  würde sich demnach zur Zeit, wo von  $b$  sich die zweite Hälfte des Wellenberges nach  $a$  fortpflanzt, das Wellenthal nach  $a$  fortpflanzen. Die Bewegung des Stabes  $ab$  ist also die aus der Interferenz der beiden Wellen resultirende, welche aus  $a$  und  $b'$ , also zwei Punkten, welche um  $\frac{1}{2}\lambda$  von einander entfernt sind, ohne Phasendifferenz sich gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen.



Dadurch entsteht eine stehende Welle. Denn nach §. 119 ist die resultierende Bewegung an irgend einer von  $a$  um  $x$  entfernten Stelle, welche aus zwei Wellen hervorgeht, die sich gleichzeitig von zwei um  $\delta$  entfernten Punkten gegen einander fortpflanzen,

$$Y = 2\alpha \cdot \cos \pi \frac{2x - \delta}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\delta}{2\lambda} \right)$$

und setzen wir darin  $\delta$  unserem Falle entsprechend

$$\delta = \frac{1}{2} \lambda,$$

$$Y = -2\alpha \cdot \sin \pi \frac{2x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

oder die Oscillationsphase der verschiedenen Punkte ist für den ganzen Stab dieselbe, der Punkt  $a$ , für den  $x = 0$  ist, bewegt sich gar nicht, der Punkt  $b$ , für den  $x = \frac{1}{4} \lambda$  ist, vollführt die grössten Schwingungen, da für ihn

$$\sin \pi \frac{2x}{\lambda} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

ist. Für alle übrigen Punkte ist die Amplitude kleiner, da für alle Werthe

$$x < \frac{1}{4} \lambda, \quad \sin \pi \frac{2x}{\lambda} < 1$$

ist.

Es ist übrigens zu beachten, dass in diesem Ausdrucke die Zeit  $t$  nicht von dem Anfange der Bewegung des Punktes  $b$  gerechnet ist, sondern von dem Momente an, wo sich von  $a$  aus die reflectirte Welle gegen  $b$  hinbewegt, also um  $\frac{1}{4} T$  später. Um demnach in unserem Ausdrucke für  $Y$  die Zeit vom Anfange der Bewegung des Punktes  $b$  zu rechnen, haben wir für  $t$  einzusetzen  $t + \frac{T}{4}$ .

Dadurch wird

$$Y = 2\alpha \cdot \sin \pi \frac{2x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wodurch die schwingende Bewegung des Stabes vollständig wiedergegeben wird. Für den Punkt  $b$  erhalten wir z. B. für

$$t = 0, Y = 0, \quad t = \frac{1}{4} T, Y = 2\alpha, \quad t = \frac{1}{2} T, Y = 0 \text{ u. s. f.}$$

Die Schwingungsdauer des Stabes ist somit gleich der Schwingungsdauer einer stehenden Welle von der doppelten Länge des Stabes, da der Stab selbst wie die Hälfte einer solchen Welle sich bewegt. Nennen wir die Länge des Stabes  $l$ , so erhalten wir für die Schwingungsdauer  $T$  nach §. 120, und da die dort mit  $L$  bezeichnete Länge der stehenden Welle gleich  $2l$  ist,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{4l}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}.$$

Die Anzahl der Schwingungen, welche der Stab in einer Sekunde vollführt, ist dann

$$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 4l \cdot \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Die constante Grösse  $\sqrt{a}$  ist hier durch die Angabe des vorigen Paragraphen, wonach

$$C = \sqrt{a} = 1,$$

erits bestimmt.

Damit wird dann

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}, \quad N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist nun

$$\sqrt{\frac{E}{d}} = c,$$

sich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung, wir erhalten mit

$$N = \frac{c}{4 \cdot l}.$$

Die Anzahl der longitudinalen Schwingungen, welche ein an dem einen Ende fester, an dem andern Ende freier Stab in einer Sekunde vollführt, gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung und der vierfachen Länge des Stabes<sup>1)</sup>.

Die Schwingungsdauer von Stäben ist eine andere, wenn sie an beiden Enden frei und in der Mitte nur locker gehalten werden, oder wenn sie an den Enden fest sind<sup>1)</sup>. In beiden Fällen ist die Oscillationsdauer nur

Hälfte von derjenigen eines an einem Ende befestigten Stabes. Im ersten Falle rührt es daher, dass in der Mitte des Stabes ein Schwingungsknoten entsteht, und jede Hälfte desselben so schwingt, wie in dem eben betrachteten Falle der ganze Stab, im zweiten weil der Stab seiner ganzen Länge nach nur eine stehende Welle von der Länge des Stabes bildet. In beiden Fällen ist also die Länge der stehenden Welle, mit welcher der Stab gleichzeitig schwingt, gleich der Länge des Stabes, und mit

$$T = 2l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}$$

$$N = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}} = \frac{c}{2l}.$$

Es ist nicht schwierig, dieses in ähnlicher Weise abzuleiten, wie wir für den Fall gethan haben, wenn der Stab an seinem einen Ende festgemmt ist; deshalb wird es genügen, wenn wir die schwingende Bewegung eines an beiden Enden freien Stabes, der in seiner Mitte lose festgehalten wird, aus der Interferenz entgegenkommender Wellen ableiten, um die Bildung des Schwingungsknoten in der Mitte des Stabes nachzuweisen.

Sei zu dem Ende wieder  $ab$  ein Stab von der Länge  $l$ , der in seiner Mitte bei  $c$  locker mit der Hand festgehalten wird, und werde durch eine schnelle Folge von Hammerschlägen oder Streichen mit einem nassen Tuche am Ende  $b$  in longitudinale Schwingungen versetzt. Von  $b$  aus pflanzen sich die Schwingungen ungehindert durch den Stab fort nach  $a$ , und in  $a$

<sup>1)</sup> *Poisson*, Mémoires de l'Académie Royale de France. T. VIII. p. 452.  
*Cauchy*, Exercices de Mathématiques. T. III. p. 269 ff.

werden sie nach  $b$  hin reflectirt, jetzt jedoch, da das Ende  $a$  frei ist, also an  $a$  ein dünneres Mittel grenzt, so, dass die Phasen der reflectirten Bewegung mit denen der ankommenden gleiches Vorzeichen haben. Kommt nun zur Zeit  $t$  nach dem Beginne der Bewegung beim

Fig. 223.



Punkte  $a$  ein Wellenberg an, so geht derselbe sofort als Wellenberg nach  $b$  zurück. Ist nun die Länge  $ab$  gleich  $\frac{1}{2} \lambda$ , so befindet sich zur Zeit  $t$  der Punkt  $b$  gerade in der Gleichgewichtslage, er hat die Hälfte seiner Oscillation vollendet und ist im Begriffe, sich nach der entgegengesetzten Seite von derselben zu entfernen, oder es pflanzt sich zur Zeit  $t$  von  $b$  aus ein Wellenthal nach  $a$  fort. Von den beiden um  $\frac{1}{2} \lambda$  von einander entfernten Punkten pflanzen sich also nach entgegengesetzten Seiten zwei Wellen in dem Stabe fort, welche eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge besitzen.

Es würde nun ein Leichtes sein, die resultirende Bewegung hieraus zu berechnen, um die Rechnung aber möglichst unseren frühern Rechnungen anzuschliessen, denken wir uns wieder die Bewegung herkommend von einem Punkte  $b'$  rückwärts von  $b$  und eine halbe Wellenlänge von dem Punkte  $b$  entfernt. Von dem Punkte  $b'$  geht dann zur Zeit  $t$ , wenn von  $b$  nach  $a$  sich ein Wellenthal fortpflanzt, ein Wellenberg aus; die resultirende Bewegung in  $ab$  können wir demnach ansehen als hervorgehend aus der Interferenz zweier Wellenzüge, welche gleichzeitig und ohne Phasendifferenz von zwei Punkten ausgehen, welche um eine Wellenlänge von einander entfernt sind.

Für die resultirende Bewegung eines um  $x$  von  $a$  entfernten Punktes haben wir dann wie früher

$$Y = 2\alpha \cdot \cos \pi \frac{2x - \delta}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\delta}{2\lambda} \right).$$

und setzen wir für  $\delta$  seinen Werth

$$\delta = \lambda$$

$$Y = 2\alpha \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

oder unter Beachtung, dass die Zeit  $t$  in diesem Ausdruck von  $t + \frac{T}{2}$  gerechnet ist auf die ursprüngliche Zeit  $t$  bezogen

$$Y = -2\alpha \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Aus diesem Ausdrucke ergibt sich unmittelbar erstens, dass bei  $c$  sich ein Schwingungsknoten bildet und zweitens, dass die stehende Welle, mit welcher beide Hälften des Stabes isochron schwingen, die Länge des Stabes hat.

Denn fixiren wir den Zeitpunkt  $t = (4n + 3) \frac{T}{4}$ , wo die einzelnen Punkte ihren grössten Abstand nach der einen Seite erreicht haben, also

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = -1$$

ist, so erhalten wir als Werthe von  $Y$

$$\begin{aligned} \text{für } x &= 0, & Y &= 2\alpha \\ x &= \frac{\lambda}{4}, & Y &= 0 \\ x &= \frac{\lambda}{2}, & Y &= -2\alpha. \end{aligned}$$

Die Mitte des Stabes, der Punkt  $c$ , ist also immer in Ruhe, oder es steht dort ein Schwingungsknoten. Da nun ferner zugleich an den Enden des Stabes zwei entgegengesetzte Schwingungsmaxima sich befinden, welche, wie wir sahen, immer um die Länge einer stehenden Welle von einander entfernt sind, so folgt, dass die Länge der stehenden Welle gleich ist der Länge  $l$  des Stabes.

Die Schwingungsdauer  $T$  ist somit

$$T = 2l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}; \quad N = \frac{c}{2l},$$

wie wir vorhin angaben.

§. 130.

**Theilung der schwingenden Stäbe; Knotenpunkte.** Die im vorigen Paragraphen entwickelten Schwingungsdauern oder Schwingungszahlen sind diejenigen, welche den langsamsten longitudinalen Schwingungen entsprechen, in welche die Stäbe versetzt werden können. Durch passendes stärkeres Streichen und Festhalten derselben an gewissen Punkten können wir bewirken, dass sie in raschere Schwingungen mit kürzeren Wellenlängen versetzt werden. Dadurch entstehen ebenfalls kürzere stehende Wellen und den Stäben bilden sich Knotenpunkte. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall eines an beiden Enden freien Stabes.

Nehmen wir an, dass die erregte Welle gerade die Länge des Stabes habe, so wird der im Punkte  $a$  nach der Zeit  $t = T$  ankommende Wellenberg als Wellenberg zurückkehren. Zur selben Zeit geht also von  $a$  ein Wellenberg reflectirt nach  $b$ , wenn von  $b$  der zweite Wellenberg nach  $a$  sich fortpflanzt.

Für die resultirende Bewegung eines um  $x$  von  $a$  entfernten Punktes haben wir also gerade wie vorhin

$$Y = 2\alpha \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

Während aber vorhin  $\lambda = 2l$  war, ist jetzt  $\lambda = l$ .

Die stehende Welle, welche der Gleichung entspricht, hat die Länge  $= \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2} l$ , die Schwingungsdauer des Stabes wird somit

$$\begin{aligned} T &= 2l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}} = l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}} \\ N &= \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}} = \frac{c}{l} = 2 \cdot \frac{c}{2l}, \end{aligned}$$

die Schwingungsdauer ist also die Hälfte derjenigen, welche der Stab bei seiner langsamsten Bewegung besitzt.



Um den Schwingungszustand des Stabes und die Schwingungsknoten zu erhalten, brauchen wir nur die Werthe von  $Y$  für

$$t = (4n + 1) \frac{T}{4}, \quad \sin 2\pi \frac{t}{T} = 1$$

aufzusuchen.

Wir erhalten als Werthe von  $Y$

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0; & \quad Y = 2\alpha \cdot \cos 0 = 2\alpha \\ x = \frac{1}{4}l; & \quad Y = 2\alpha \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ x = \frac{1}{2}l; & \quad Y = 2\alpha \cdot \cos \pi = -2\alpha \\ x = \frac{3}{4}l; & \quad Y = 2\alpha \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ x = l; & \quad Y = 2\alpha \cdot \cos 2\pi = 2\alpha. \end{aligned}$$

Der Stab hat sich also in drei schwingende Theile zerlegt, welche durch Schwingungsknoten von einander getrennt sind; dieselben liegen von den Enden des Stabes um  $\frac{1}{4}$  der Länge des Stabes entfernt.

Ist die Wellenlänge der schwingenden Bewegung gleich  $\frac{2}{3}l$ , so erhält man in ganz gleicher Weise wie vorhin für die resultirende Bewegung

$$Y = -2\alpha \cdot \cos 2\pi \frac{x}{l} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

worin  $\lambda = \frac{2}{3}l$ . Die sich bildende stehende Welle hat die Länge  $L = \frac{1}{3}l = \frac{1}{3}l$  und die Schwingungsdauer des Stabes wird

$$\begin{aligned} T &= 2L \cdot \sqrt{\frac{d}{E}} = \frac{2}{3}l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}} \\ N &= \frac{3}{2}l \cdot \sqrt{\frac{E}{d}} = 3 \cdot \frac{c}{2l}. \end{aligned}$$

Die Schwingungsdauer ist ein Drittel, die Schwingungszahl die dreifache derjenigen, bei welcher der Stab am langsamsten schwingt. Für die Lage der Schwingungsknoten erhalten wir

$$x = \frac{1}{6}l, \quad x = \frac{3}{6}l, \quad x = \frac{5}{6}l.$$

Der Stab hat sich in vier schwingende Theile getheilt, welche durch drei Schwingungsknoten von einander entfernt sind. Die beiden äußersten Knoten liegen jeder um  $\frac{1}{6}$  der Stablänge von den Enden des Stabes entfernt, und der Abstand der Knoten ist gleich  $\frac{1}{3}$  Länge des Stabes.

In gleicher Weise kann sich der Stab in 5, 6... schwingende Theile zerlegen, deren Schwingungsdauern dann, da die Länge der stehenden Wellen respective  $\frac{1}{4}l, \frac{1}{5}l...$  ist, werden

$$T = \frac{1}{2}l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}, \quad T = \frac{2}{5}l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}$$

und deren Schwingungszahlen werden

$$N = \frac{4}{2l} \sqrt{\frac{E}{d}} = 2 \frac{c}{2l}, \quad N = \frac{5}{2l} \sqrt{\frac{E}{d}} = 5 \frac{c}{2l}.$$

Die möglichen Schwingungszahlen sind also

$$N \dots \frac{c}{2l}, 2 \frac{c}{2l}, 3 \frac{c}{2l}, 4 \frac{c}{2l}, 5 \frac{c}{2l} \dots$$

oder allgemein

$$N = n \cdot \frac{c}{2l},$$

wenn  $n$  die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet.

Dieselben Schwingungszahlen erhalten wir für die Stäbe, welche an beiden Enden befestigt sind. Die stehenden Schwingungen dieser können wir uns entstanden denken durch die Interferenz der beiden von den festen Enden reflectirten Wellen. Durch das Reiben des Stabes in der Mitte pflanzt sich nach beiden Seiten ein Wellenberg fort, dieser wird an beiden Seiten als Wellenthal reflectirt; dadurch entsteht, wenn die Länge des Stabes gleich der halben Wellenlänge ist, eine stehende Welle von der Länge des Stabes, ist sie gleich einer Wellenlänge, so bilden sich zwei stehende Wellen mit einem Schwingungsknoten in der Mitte des Stabes. Die Schwingungsdauer ist die Hälfte, die Schwingungszahl die doppelte. Bei einer Wellenlänge gleich  $\frac{2}{3} l$  bilden sich 3 stehende Wellen mit 2 Schwingungsknoten u. s. f., kurz die Schwingungsdauer kann auch hier allgemein gesetzt werden

$$T = \frac{2l}{n} \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}$$

und die Schwingungszahl

$$N = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}} = n \frac{c}{2l}.$$

Anders ist es jedoch, wenn der Stab an dem einen Ende frei, an dem andern befestigt ist; für den einfachsten Fall war

$$T = 4l \sqrt{\frac{d}{E}}, \quad N = \frac{c}{4l}$$

und die Länge des Stabes war gleich ein Viertel Wellenlänge der oscillirenden Bewegung oder gleich einer halben stehenden Welle. Es ist nun klar, dass bei Stäben mit einem freien Ende nur solche Schwingungstheilungen entstehen können, bei denen das freie Ende, der Ursprung der Bewegung, der Mitte der stehenden Welle entspricht. Denn da das freie Ende der Bewegungsmittelpunkt ist, so muss die Bewegung des ganzen Stabes aufhören, wenn durch Interferenz mit der reflectirten Bewegung die in jedem Augenblicke neu erzeugte vernichtet wird.

Deshalb kann der an seinem einen Ende freie Stab keine Schwingungen vollführen, bei denen der Stab die Länge einer stehenden Welle hat, sondern die zweite mögliche Schwingungsbewegung ist die, deren Wellenlänge gleich  $\frac{4}{3}$  Stablänge ist. Entwickeln wir den Schwingungszustand des Stabes in ganz gleicher Weise wie vorhin, so finden wir, dass sich der Stab in zwei schwingende Theile zerlegt hat, welche durch einen Knoten von einander getrennt sind, der von dem freien Ende um  $\frac{1}{3}$  Stablänge entfernt ist. Das zwischen dem festen Ende und dem Knotenpunkt liegende Stück des Stabes bildet eine ganze Welle, das zwischen dem Knotenpunkte und dem freien Ende liegende eine halbe stehende Welle. Die Länge der stehenden Welle ist also  $\frac{2}{3}$  der Stablänge, die Schwingungsdauer somit

$$T = \frac{4}{3} l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}}$$

und die Schwingungszahl

$$N = \frac{3}{4l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}} = 3 \frac{c}{4l}.$$

Die weiteren möglichen Schwingungszahlen kann man in ganz gleicher Weise ableiten und findet dann als nächste diejenige, wo die Länge des Stabes  $\frac{5}{4}, \frac{7}{4} \dots$  Wellenlängen beträgt

$$N = 5 \frac{c}{4l}; 7 \frac{c}{4l}; 9 \frac{c}{4l}$$

überhaupt als mögliche Schwingungszahlen, die langsamsten als 1 gesetzt die Reihe der ungeraden Zahlen oder ganz allgemein

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l},$$

worin  $n$  die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet.

Die soeben als möglich erkannten Theilungen der Stäbe bei longitudinalen Schwingungen sind ziemlich schwierig herzustellen; man kann sie dadurch hervorrufen, dass man die vorher bestimmten Stellen festhält, indess gelingt es selten, willkürlich eine ganz bestimmte Theilung des Stabes mit vielen Knotenpunkten zu erhalten. Die Theilung tritt aber häufig auch ohne Festhalten der verschiedenen Stellen ein durch fortgesetztes Reiben des Stabes der Länge nach oder mehrfaches Schlagen an seinen Enden; wir werden im nächsten Abschnitt das an den verschiedenen Tönen erkennen, welche der Stab gibt.

Die in den letzten Paragraphen für an beiden Enden feste Stäbe abgeleiteten Sätze gelten unmittelbar auch für zwischen zwei festen Punkten ausgespannte Saiten, da dieselben nichts anders sind, als Stäbe von sehr geringem Querschnitt.

### §. 131.

**Transversale Schwingungen der Saiten.** Spannt man eine dünne, möglichst vollkommen biegsame Schnur von grosser Länge aus und versetzt dieselbe durch rasches Auf- und Abbewegen des einen Endes in transversale Schwingungen, so sieht man, wie diese an der Stelle, an der man sie hervorbrachte, verschwinden, sofort aber an immer andern Stellen derselben auftreten; sie pflanzen sich als Wellenberg und Wellenthal auf der Schnur fort, nach und nach erhalten immer andere Theile der Schnur die Gestalt einer Welle, wie wir sie in dem vorigen Kapitel bei den transversalen Schwingungen einer Punktreihe abgeleitet haben.

Die transversalen Schwingungen einer Schnur bestehen in auf- und abgehenden gegen die Längsrichtung senkrechten Bewegungen der einzelnen Punkte, sie haben demnach eine Gestaltsänderung derselben zur Folge, welche unmittelbar sichtbar ist und bei nicht zu raschen Bewegungen recht gut beobachtet werden kann.

Die Gesetze der Fortpflanzung transversaler Wellen in dünnen Schnüren oder Saiten, die an sich nicht elastisch aber durch Gewichte schwach gespannt sind, so dass jeder Punkt eine bestimmte Ruhelage hat, müssen mit den im vorigen Kapitel abgeleiteten Gesetzen über die Fortpflanzung transversaler Wellen in Punktreihen übereinstimmen, so lange die Schnüre oder

ten nur so dick sind, dass wir annehmen dürfen, alle Punkte eines erschnittes bewegen sich in ganz gleicher Weise, und die Ausbiegungen klein sind, dass wir die bei einer Ausbiegung stattfindenden Verlängerungen vernachlässigen können.

Denn bei einer durch Gewichte gespannten Schnur werden alle Schichten, die zur Länge der Schnur senkrecht sind, durch die Spannung in einer bestimmten Gleichgewichtslage gehalten, sie werden durch das spannende Gewicht ebenso stark nach der einen Seite gezogen, wie durch die feste Verbindung nach der andern Seite. Bringen wir durch die seitliche Ausbiegung eine oder eine Anzahl Schichten aus der Gleichgewichtslage, so werden sie durch die Spannung in dieselbe zurückgezogen.

Haben wir die Schnur an der einen Seite befestigt und an der andern ein Gewicht  $P$  angehängt, so vertritt demnach das Gewicht  $P$  die Masse  $c$  in unserem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen.

Unser Ausdruck war

$$c = C \sqrt{\frac{c}{d}},$$

und setzen wir für  $c$  das spannende Gewicht  $P$

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{P}{d}}.$$

Die Grösse  $d$  ist die Masse der Längeneinheit der Schnur, bezeichnen wir daher das Gewicht derselben mit  $p$ , so ist

$$d = \frac{p}{g}.$$

Bezeichnen wir nun den Querschnitt der Schnur mit  $q$  und ihr spezifisches Gewicht mit  $s$ , so erhalten wir

$$p = q \cdot s,$$

und indem wir diesen Ausdruck in unsere Gleichung für  $c$  einsetzen

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}}.$$

Diesen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen in Saiten, welche durch Gewichte gespannt sind, hat schon Leonhard Euler<sup>1)</sup> abgeleitet, und aus seinen Rechnungen geht zugleich hervor, dass wir die constante Grösse  $C$  gleich 1 setzen müssen, und dass mit

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}}.$$

Dieser Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen in gespannten Saiten ist durch die Versuche der Gebrüder W. und E. H. Weber auf das vollständigste experimentell bestätigt worden.

Sie wendeten zu ihren Versuchen eine runde aus sehr feinem Baumwollenfaden auf Maschinen geklöppelte Schnur an, welche sehr gleichförmig gesamt, wenig elastisch war und bei einer Länge von 16,058 Meter, 612 Gramm wog. Dieselbe wurde dadurch horizontal aufgespannt, dass

<sup>1)</sup> Euler in Actis Petropolitanis pro 1779. Tom. I. Petrop. 1782.

man sie an ihrem einen Ende mit einer Schraube und mit ihrem andern Ende an einem Rade befestigte (Fig. 224). Das Rad hatte einen Durchmesser von über 30 Centimeter und war in einer sehr genau gearbeiteten Achse aufgehängt, um recht frei beweglich zu machen. Die Schnur wurde bei *a* in einem Abstände von 14,4 Centimeter von der Achse der Rolle befestigt, so dass sie nach der Tangente des Rades zog. Bei *b* war eine Schraube befestigt, an der sich ein Körbchen befand, bei dem die spannenden Gewichte aufzunehmen.

Fig. 224.



Die Wellen wurden 15 Centimeter vom Ende der Schnur durch einen raschen Stoss erregt, und man sah sie dann zu dem einen Ende der Schnur hinlaufen und als reflectirte Wellen, die Berge als Täler und umgekehrt, da die Schnur bei *a* fest war, also an ein dichteres Mittel grenzte, wieder zurückkehren.

Die Wellen wurden 15 Centimeter vom Ende der Schnur durch einen raschen Stoss erregt, und man sah sie dann zu dem einen Ende der Schnur hinlaufen und als reflectirte Wellen, die Berge als Täler und umgekehrt, da die Schnur bei *a* fest war, also an ein dichteres Mittel grenzte, wieder zurückkehren.

Die Zeit, welche die Welle brauchte, um die Schnur zu durchlaufen, wurde mittels einer Uhr gemessen, welche noch  $\frac{1}{40}$  einer Sekunde anzeigt, und stets die Zeit beobachtet, in welcher die vom Rade ausgehende Welle einmal oder zweimal oder viermal zum Rade zurückkehrte.

Die Versuche ergaben nun erstens, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen unabhängig ist von der Grösse der Wellen, denn stets brauchte eine Welle dieselbe Zeit zum Durchlaufen der Schnur, mochte sie durch ein kurzes und schwaches Schnellen mit dem Finger oder durch ein länger dauerndes und stärkeres Schlagen erzeugt werden. Im erstem Fall muss aber die Welle kürzer sein, wie es auch die Beobachtung ergab.

Ferner fanden die Gebrüder Weber, dass die Wellen, wie es auch unsere Theorie verlangt, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, denn um die Schnur 2, 3, 4 . . mal zu durchlaufen, brauchte die Welle auch die doppelte, drei- und vierfache Zeit.

Nach diesen Vorversuchen machten sie nun genaue Messungen und fanden auf das Genaueste die von Euler gegebene Formel bestätigt. Die Schnur wurde nach einander durch drei verschiedene Gewichte gespannt, nämlich mit 610,5 — 2027,5 — 4226,4 Gramm<sup>1)</sup>.

Es ergab sich nun, dass im ersten Falle die Welle einen Raum von 33,244 Meter in 46 Sechzigstel, im zweiten denselben Raum in 24,8 Sechzigstel und im dritten Falle in 16,25 Sechzigstel Sekunden durchlief. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder die in diesen drei Fällen in einer Sekunde durchlaufenen Räume sind demnach

$$\text{im ersten Falle } c_1 = \frac{60 \cdot 33^{\text{m}},244}{46} = 43^{\text{m}},361,$$

$$\text{im zweiten Falle } c_2 = \frac{60 \cdot 33^{\text{m}},244}{24,8} = 80^{\text{m}},429,$$

$$\text{im dritten Falle } c_3 = \frac{60 \cdot 33^{\text{m}},244}{16,25} = 122^{\text{m}},713.$$

<sup>1)</sup> E. H. und W. Weber, Wellenlehre, auf Experimente gegründet etc. von den Brüdern E. H. und W. Weber. Leipzig 1825. p. 464 ff.

Um diese Zahlen mit unserer Formel zu vergleichen, haben wir in unserem Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}}$$

die betreffenden Spannungen, für  $q \cdot s$  das Gewicht der Längeneinheit der Schnur und für  $g$  die Beschleunigung der Schwere, 9,808 einzusetzen.

Das Gewicht der ganzen Schnur von 16,622 Meter Länge war 52,612 Gramm, daher das Gewicht der Längeneinheit

$$q \cdot s = \frac{52,612}{16,622}$$

und setzen wir die betreffenden Zahlenwerthe in die Formel ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 610,5 \cdot 16,622}{52,612}} = 43^m,483,$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 2027,5 \cdot 16,622}{52,612}} = 79^m,254,$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 4226,4 \cdot 16,622}{52,612}} = 114^m,434.$$

Man sieht, die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Zahlen ist so gross, dass sie der schönste Beweis für die Richtigkeit der Theorie sowie für die Genauigkeit der Messungen ist.

Vergleichen wir den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen mit dem für die longitudinalen Wellen, so ergibt sich eine merkwürdig einfache Beziehung<sup>1)</sup>.

Für die longitudinalen Wellen hatten wir

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}}$$

da  $d = \frac{s}{g}$ , wenn wir mit  $s$  das spezifische Gewicht bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}},$$

für die transversalen

$$c' = \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}},$$

daraus ergibt sich

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}} : \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}} = \sqrt{\frac{P}{q \cdot E}}$$

Wir sahen nun früher, dass die Verlängerung  $C$  eines Stabes von der Länge  $l$ , dem Querschnitt  $q$ , durch ein Gewicht  $P$ , wenn  $E$  der Elasticitätsmodulus ist, gleich ist

$$C = \frac{1}{E} \cdot \frac{P \cdot l}{q},$$

<sup>1)</sup> Poisson, Mémoires de l'Académie de France. Tome VIII. p. 422 und 442.

demnach

$$\frac{c}{l} = \delta = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{q}$$

Es folgt also

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\delta}$$

oder das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen und derjenigen der longitudinalen Wellen in einem durch Spannung elastischen fadenförmigen Körper ist gleich der Quadratwurzel aus der Verlängerung, welche die Längeneinheit des Körpers durch das spannende Gewicht erfährt, vorausgesetzt, dass durch dasselbe die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist.

### §. 132.

**Stehende Schwingungen von fadenförmigen durch Spannung elastischen Körpern.** Wenn man eine Saite in ihrer Mitte langsam aus ihrer Ruhelage zieht und dann sich selbst überlässt, so schwingt sie ihrer ganzen Länge nach transversal hin und her. Alle Punkte der Saite bewegen sich zugleich in dem einen oder andern Sinne, sie bildet eine stehende Schwingung von der Länge der Saite.

Wir können auch hier wieder die stehende Schwingung als ein Resultat der beiden von den festen Enden in entgegengesetzter Richtung durch die Saite sich fortplanzenden reflectirten Wellen ansehen und darnach die Schwingungsdauer der stehenden Welle erhalten. Denn dadurch, dass wir die Saite in ihrer Mitte emporziehen, pflanzt sich von der Mitte aus ein Wellenberg nach beiden Seiten hin fort; dort angekommen, verwandelt sich durch Reflexion jeder Wellenberg in ein Wellenthal, da die Saite an ihren Enden befestigt, dort also von einem dichtern Mittel begrenzt ist; die beiden Thäler werden, an den entgegengesetzten Enden angekommen, wieder als Berge reflectirt u. s. f., so lange die Bewegung fort dauert.

Ist nun die Länge der Saite gleich der halben Länge der fortgepflanzten Wellen, so schwingt die Saite nach dem Früheren ihrer ganzen Länge nach hin und her, denn in dem Falle erhalten wir als resultirende Phase eines um  $x$  von dem einen Ende der Saite entfernten Punktes zur Zeit  $t$ , wenn wir die Zeit  $t$  von dem Augenblicke an rechnen, in welchem wir die nach oben gezogene Saite losliessen,

$$Y = 2a \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

da der Abstand der beiden Punkte, von welchen sich ohne Phasendifferenz gleichzeitig zwei Wellen in entgegengesetzter Richtung durch die Saite fortbewegen, gleich einer halben Wellenlänge ist.

Dieser Ausdruck zeigt unmittelbar, dass die Saite ihrer ganzen Länge nach hin und her schwingt, indem wir als Werthe für  $Y$  in den Punkten  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2} \lambda$  den Werth 0 erhalten, für alle andern Punkte ist er, wenn nicht  $t = \frac{T}{4}$  oder  $\frac{3T}{4}$  etc. ist, von 0 verschieden, er wächst von  $x = 0$  bis  $x = \frac{\lambda}{4}$  und nimmt dann wieder ab,

Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Welle ist aber, wie wir sahen, gleich der Schwingungsdauer eines Punktes in der fortgepflanzten Welle

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{2l}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Setzen wir für  $d$  und  $c$  die im vorigen Paragraphen bestimmten Werthe ein, so wird für die Schnur oder Saite von der Länge  $l$

$$T = \frac{2l}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot s}{g \cdot P}},$$

also da, wie vorher nach den Untersuchungen von Euler erwähnt wurde,  $\sqrt{a} = 1$  ist,

$$T = 2l \cdot \sqrt{\frac{g \cdot s}{g \cdot P}}$$

oder für die Schwingungszahl, die Anzahl Schwingungen in einer Sekunde

$$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot P}{g \cdot s}}.$$

Die Schwingungsdauer einer Saite ist also der Länge der Saite, der Quadratwurzel aus ihrem Querschnitte und ihrem specifischen Gewichte direkt, dagegen der Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte umgekehrt proportional.

Bei hinlänglich langen Saiten und nicht zu grossem spannenden Gewichte lassen sich die Schwingungsdauern oder Schwingungszahlen direkt beobachten. Die Gebrüder Weber<sup>1)</sup> haben an der vorhin erwähnten Schnur dieses ausgeführt, indem sie dieselbe in Schwingungen versetzten, welche sich über die ganze Länge der Schnur erstreckten, und haben mit grosser Uebereinstimmung die von der Theorie verlangten Zahlen erhalten.

Setzen wir für den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck gemäss dem vorigen Paragraphen ein

$$\sqrt{\frac{g \cdot P}{g \cdot s}} = c,$$

so wird

$$N = \frac{c}{2l} \cdot T = \frac{2l}{c}.$$

Die Schwingungsdauer ist gleich der Zeit, in welcher die fortschreitende Welle, aus welcher die stehende Schwingung entstanden ist, die doppelte Länge der Schnur durchlaufen würde.

Diese Zeit war in den Weber'schen Versuchen resp. 46; — 24,8 und 16,25 Tertien (Sechzigstel Sekunden). In dem ersten der drei Fälle, wo die Schnur mit 610,5 Gramm gespannt war, erhielten sie als Schwingungsdauer

$$T = 46,375 \text{ Tertien}$$

als Mittel aus vielen Versuchen; eine Zahl, welche so genau mit der Theorie übereinstimmt, wie es nur möglich ist.

<sup>1)</sup> Wellenlehre, auf Experimente gegründet von E. H. Weber und W. Weber. Leipzig 1825. p. 466.



Eine weitere experimentelle Bestätigung dieses Satzes werden uns besonders für kürzere und stärker gespannte Saiten im nächsten Abschnitt die durch die Schwingungen der Saiten entstehenden Töne liefern.

Ebenso wie bei den longitudinalen Schwingungen ein Stab sich in mehrere durch einen Schwingungsknoten getrennte schwingende Theile zerlegen kann, so kann es auch eine transversal schwingende Saite.

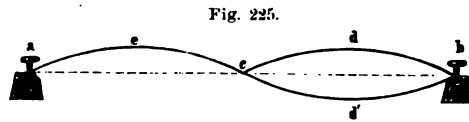


Fig. 225.

Zunächst kann die Saite gleich einer ganzen Wellenlänge sein. Denken wir uns die Saite in der Mitte festgehalten und die eine Hälfte  $cb$  (Fig. 225) in die Lage  $cdb$  gebracht, also

dort einen Wellenberg erzeugt und dann die Saite sich selbst überlassen und auch in der Mitte losgelassen.

Nach der Zeit  $\frac{T}{2}$  wird der Wellenberg bis  $cea$  fortgeschritten und zugleich bei  $b$  als reflectirtes Thal  $cd'a$  erscheinen. Am Ende der Zeit  $\frac{T}{2}$  wird dann von  $a$  aus ein reflectirtes Thal sich gegen  $b$  fortpflanzen und von  $b$  ein auf das Thal  $cd'b$  folgender Berg. Es pflanzen sich also zugleich von  $a$  ein Wellenthal und von  $b$  ein Wellenberg durch die Saite fort. Man übersieht nach dem Fröhern unmittelbar, dass die Phase eines von  $a$  um  $x$  entfernten Punktes gegeben ist durch

$$Y = -2\alpha \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Denn da  $a$  und  $b$  der Annahme nach um eine Wellenlänge von einander entfernt sind, so ist es, wenn sich zwei Wellen von diesen Punkten mit einer Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge gegen einander fortpflanzen, als wenn sie von zwei Punkten, welche um  $\frac{3}{2}$  Wellenlängen von einander entfernt sind, zur selben Zeit sich ohne Phasendifferenz gegen einander bewegen.

Die Gestalt der schwingenden Saite ergibt sich unmittelbar aus den gleichzeitigen Werthen von  $Y$ . Für  $t = \frac{T}{2}$  z. B. ist

$$Y = 0 \text{ für } x = 0, x = \frac{\lambda}{2}, x = \lambda$$

$$Y = 2\alpha \text{ für } x = \frac{\lambda}{4}, Y = -2\alpha \text{ für } x = \frac{3\lambda}{4}.$$

Man sieht, die Saite hat sich in zwei stehende Wellen von der Länge  $\frac{1}{2}\lambda$  oder, da die Länge der Saite  $l = \lambda$  ist, von der Länge  $\frac{1}{2}l$  getheilt. Die Schwingungsdauer ist daher

$$T = 2l \cdot \sqrt{\frac{q \cdot s}{g \cdot P}} = l \cdot \sqrt{\frac{q \cdot s}{g \cdot P}}$$

und die Schwingungszahl

$$N = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}} = 2 \cdot \frac{c}{2l}.$$

Die Saite schwingt also doppelt so rasch wie in dem vorigen Falle.

In ähnlicher Weise kann man die Saite in drei schwingende Theile zerlegen mit zwei Schwingungsknoten, welche um  $\frac{1}{3}$  der Saitenlänge von einander und den Enden der Saite liegen, die Schwingungsdauer und Schwingungszahl sind dann

$$T = \frac{2}{3} l \cdot \sqrt{\frac{q \cdot s}{g \cdot P}}; N = 3 \cdot \frac{c}{2l}.$$

Ueberhaupt kann die Saite in  $n$  schwingende Theile mit  $n - 1$  Schwingungsknoten zerlegt werden, wie man leicht durch eine Fortsetzung dieser Betrachtungen erhält. Die Schwingungsdauer und Schwingungszahl irgend einer Ordnung lässt sich daher allgemein darstellen durch den Ausdruck

$$T = \frac{2}{n} \cdot l \cdot \sqrt{\frac{q \cdot s}{g \cdot P}}; N = n \cdot \frac{c}{2l},$$

worin  $n$  jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann.

Man kann die Theilung der Saite bei transversalen Schwingungen leicht hervorrufen und beobachten.

Man unterstützt die Saite  $ab$  (Fig. 226) in einem Punkte  $c$ , so dass die Länge  $bc$  gleich  $\frac{1}{n}$  der Länge der Saite ist, z. B.  $\frac{1}{4}$ , und hängt dann auf die Saite eine Anzahl sogenannter Reiterchen, kleiner leichter Häkchen von Papier. Streicht man dann die Saite in der Nähe von  $b$ , oder drückt man sie in der Mitte zwischen  $b$  und  $c$  nieder und überlässt sie dann sich selbst, so werden die Reiterchen überall von der Saite abgeworfen, nur an den Stellen der Schwingungsknoten bei  $d$  und  $e$  bleiben sie hängen, ohne eine bedeutende Bewegung zu zeigen.

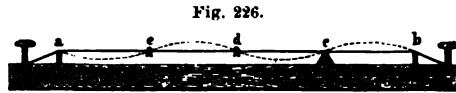


Fig. 226.

Es folgt daraus, dass die Saite sich in eine Anzahl für sich schwingender Stücke,  $ac$ ,  $ed$ ,  $dc$ ,  $cb$  getheilt hat, welche durch nicht bewegte Punkte, die Schwingungsknoten, getrennt sind. Wendet man möglichst biegsame Fäden bei diesen Versuchen an, so findet man die Lage der Knoten, also die Theilung der Saite der Theorie entsprechend, man findet immer  $n - 1$  Knotenpunkte, welche um  $\frac{1}{n}$  Saitenlänge von den Enden der Saite und von einander entfernt sind.

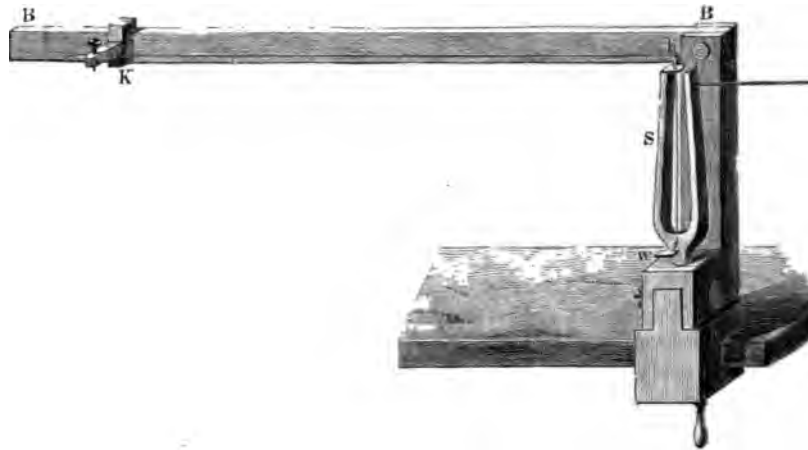
Der in Fig. 226 dargestellte Versuch ist auch deshalb interessant, weil er zeigt, dass bei einer gespannten Saite der Knotenpunkt die Quelle der Bewegung für dieselbe werden kann. Der Punkt  $c$  (Fig. 226) ist durch einen Steg unterstützt, und trotzdem pflanzt sich die Bewegung durch ihn hindurch auf den andern Theil der Saite fort. Man sieht leicht, dass diese Ausbreitung der Bewegung über  $c$  hinaus durch die periodischen longitudinalen Impulse veranlasst wird, die der Punkt  $c$  in Folge der Bewegung des Stückes  $bc$  erfährt.

Die Theilung der Saiten und die Entstehung der stehenden Wellen aus der Interferenz der fortgepflanzten und reflectirten Wellen lässt sich sehr hübsch durch eine von Melde<sup>1)</sup> zuerst benutzte Versuchsanordnung

<sup>1)</sup> Melde, Poggend. Ann. Bd. CIX und CXI.

zeigen, welche Fig. 227 darstellt. Auf einem Fussbrett ist vertical eine gebogene Stahllamelle, eine sogenannte Stimmgabel *S* (Fig. 227) aufgestellt.

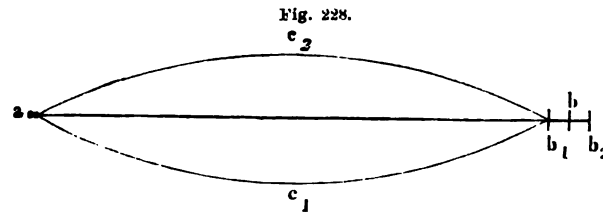
Fig. 227



Die eine Zinke der Gabel trägt ein kleines Hütchen *h*, durch welches ein Seidenfaden gezogen ist, welcher an dem in der Biegung der Gabel befestigten Wirbel *w* befestigt ist. Das Hütchen *h* befindet sich vertical über dem Stiele der Gabel, so dass, wenn die Gabel um den Stiel gedreht wird, das in dem Hütchen befindliche Ende des Fadens sich in der Drehungsaxe befindet. Das andere Ende des Fadens ist an dem auf dem Holzstabe *BB* befindlichen Schieber *K* befestigt. Der Holzstab *BB* wird von dem hinter der Stimmgabel befindlichen Brette getragen; derselbe ist dort auf eine Axe gesetzt, dass er in verticaler Ebene drehbar, in jeder Neigung gegen den Horizont festgeklummt werden kann.

Ist der Faden am Stabe horizontal ausgespannt, und ist die Stimmgabel, wie es die Figur zeigt, so aufgestellt, dass die beiden Zinken in der durch den Faden gelegten Verticalebene sich befinden, so sieht man bei einer bestimmten Spannung des Fadens denselben in der Form einer stehenden Welle schwingen, wenn man die Zinken der Gabel in Schwingung versetzt. Die Schwingungen der Gabel kann man entweder dadurch hervorrufen, dass man in der Nähe ihres obren Endes die Gabel mit einem Violinbogen in einer dem gespannten Faden parallelen Richtung streicht, oder dass man, in der Weise, wie wir es später bei dem Vokalapparate von Helmholtz beschreiben werden, die Zinken zwischen die Arme eines Elektromagnetes stellt, der in rascher Folge periodisch magnetisirt wird. Die Bildung dieser stehenden Schwingung ergibt sich am einfachsten folgendermaassen. Ist Fig. 228 *ab* der Faden, welcher bei *b* an der Stimmgabel befestigt ist, so bewegt sich, wenn die Gabel schwingt, der Befestigungspunkt *b* zwischen *b<sub>2</sub>* und *b<sub>1</sub>* hin und her. Wenn sich der Punkt nach *b<sub>1</sub>* bewegt hat, ist der Abstand *ab<sub>1</sub>* kleiner als die Länge des Fadens, der Faden ist nicht mehr gespannt und die Theile des Fadens sinken durch ihr Gewicht hinab. Das Hinabsinken beginnt bei *b*, und bei einer gewissen

Spannung des Fadens wird es sich bis  $a$  fortgepflanzt haben, wenn  $b$  bis  $b_1$  gekommen ist. Geht nun  $b$  zurück bis  $b_2$ , so verlängert sich der Abstand



$ab$  und der Faden nähert sich, indem die Theile desselben nach und nach emporgezogen werden, wieder der geraden Linie, die er bei der angenommenen Spannung des Fadens erreicht, wenn  $b$  in  $b_2$  angekommen ist. Geht nun der Befestigungspunkt das zweite Mal von  $b_2$  nach  $b$ , so muss der dann nicht mehr gespannte Faden sich krümmen, aber, da seine Theilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage eintreten, jetzt nach oben hin, und der Faden nimmt bei der vorausgesetzten Spannung die Lage  $ac_2b_1$  an, wenn der Befestigungspunkt sich bis  $b_1$  bewegt hat. Geht  $b_1$  dann wieder bis  $b_2$  zurück, so kommt der Faden wieder in die Lage  $ab_2$ . Es ergibt sich somit, dass der Faden eine ganze Schwingung macht, wenn die Gabel zwei Schwingungen vollführt.

Die Entstehung der schwingenden Bewegung der Saite bei dieser Anordnung ist ganz analog der in Fig. 226 dargestellten, denn auch hier ist der Punkt  $b$  für diese Bewegung ein Knotenpunkt, gerade wie der durch den Steg gestützte Punkt der Saite Fig. 226, und wie dort sind es auch hier die longitudinalen Impulse, welche die schwingende Bewegung veranlassen.

Vermindert man die Spannung der Saite auf  $\frac{1}{4}$  derjenigen, welche sie bei dem ersten Versuche hatte, so pflanzt sich die Bewegung in ihr nur halb so rasch fort; da die nur von der Bewegung der Gabel abhängige Schwingungsdauer aber dieselbe bleibt, so zerlegt sich die Saite in zwei schwingende Abtheilungen, welche durch einen Knotenpunkt in der Mitte von einander getrennt sind. Die Amplituden der Schwingungen sind bei diesen Versuchen so gross, dass die Theilung der Saite in ihre Abtheilungen weithin sichtbar ist.

Vermindert man die Spannung auf  $\frac{1}{9}$  der anfänglichen, so pflanzt sich die durch die erste Schwingung der Gabel erzeugte Halbwelle nur durch  $\frac{1}{3}$  der Saite fort, und der Faden zerlegt sich in Folge der Interferenz der von  $b$  ausgehenden und von  $a$  reflectirten Schwingungen in drei stehende Wellen, deren jede  $\frac{1}{3}$  der Fadenlänge hat.

Bei hinreichend langen Fäden kann man die Theilung derselben noch beträchtlich weiter treiben.

Da die Anzahl der stehenden Wellen in einem solchen Faden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung umgekehrt proportional ist, so kann man durch Anwendung verschiedener Fäden von ungleichem Querschnitt und verschieden dichtem Material die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen unmittelbar anschaulich machen.

Eine derartige Bildung der stehenden Wellen tritt nicht nur ein, wenn die Ebene der Gabelzinken der durch den Faden gelegten Verticalebene parallel ist, sondern auch wenn die Gabel zu dieser Ebene senkrecht steht. Die Schwingungen der Gabel, die dann senkrecht zur Längsrichtung des Fadens geschehen, übertragen sich dann unmittelbar als Transversalschwingungen auf den Faden, bei der Kleinheit der Excursionen der Gabel gegenüber denen des Fadens verhält sich aber auch dann das an der Gabel befestigte Ende im allgemeinen wie ein Knotenpunkt. Bei gleicher Spannung des Fadens ist aber in diesem Falle die Anzahl der stehenden Wellen immer die doppelte von der bei der vorhin besprochenen Befestigungsweise. Der Grund hierfür liegt darin, dass jetzt die Schwingungen der Saite jener der Gabel isochron sind, indem jede Schwingung der Gabel eine Schwingung des Fadens veranlasst, während, wie wir vorhin sahen, bei der andern Befestigungsweise zwei Schwingungen der Gabel erforderlich waren, um eine ganze Schwingung des Fadens zu geben. Ist demnach bei beiden Befestigungen die Spannung des Fadens und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe, so muss bei der zweiten Stellung der Gabel die Wellenlänge halb so gross, die Zahl der Wellen also doppelt so gross sein als bei der ersten. Damit bei der zweiten Stellung dieselbe Anzahl von Wellen entstehe, muss die Spannung des Fadens viermal so gross sein als bei der ersten Stellung.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten wir die zuerst von Poisson angegebene Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und der transversalen Schwingungen der gespannten Saiten; dieselbe Beziehung muss, wie sich unmittelbar ergibt, zwischen den transversalen und longitudinalen Schwingungszahlen bestehen.

Die Schwingungszahl einer longitudinal schwingenden, an ihren beiden Enden befestigten Saite ist allgemein

$$N = \frac{n}{2} \frac{c}{l},$$

für die transversalen Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2} \frac{c'}{l}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{N'}{N} = \frac{c'}{c} = \sqrt{\delta},$$

wo wie vorhin  $\delta$  das Verhältniss der Verlängerung der schwingenden Saite in Folge des spannenden Gewichtes  $P$  zur Länge der Saite, oder die Ausdehnung eines Stückes der Saite von der Längeneinheit durch das spannende Gewicht bedeutet.

Dieses von der Theorie geforderte Resultat ist durch einen Versuch von Cagniard Latour, den Poisson in seinem Mémoire sur les mouvements des corps élastiques mittheilt, bestätigt worden <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Poisson, Mémoires de l'Acad. royale de France. Tome VIII. p. 436. An der Stelle dieser Abhandlung, wo dieser Versuch mitgetheilt ist, hat sich eine Verwirrung eingeschlichen, da anfänglich  $\frac{N'}{N} = \frac{7}{188}$  und  $\frac{\alpha}{l} = \sqrt{\frac{N'}{N}}$  gesetzt ist.

Eine Saite von 14,8 Meter Länge wurde einmal in longitudinale, einmal in transversale Schwingungen versetzt, und die Schwingungszahlen bestimmt. Es fand sich

$$\frac{N'}{N} = 0,0593.$$

Die Verlängerung  $\delta$  der Längeneinheit der Saite ist gleich dem Quotienten aus der Verlängerung der ganzen Saite  $\alpha$  und der Länge  $l$  derselben, wir erhalten demnach

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{l}},$$

$$\alpha = l \left( \frac{N'}{N} \right)^2 = 14^m,8 \cdot 0,003513 = 0^m,052.$$

Aus dem Verhältniss der longitudinalen und transversalen Schwingungen berechnet sich somit die Verlängerung der Saite zu  $0^m,052$  in Folge des spannenden Gewichtes. Die Messung Cagniard Latour's ergab

$$\alpha = 0^m,05,$$

die Zahl, welche sich nur um  $\frac{1}{25}$  von der berechneten unterscheidet.

### §. 133.

**Einfluss der Steifigkeit der Saiten.** Wenn man die Versuche über die Lage der Schwingungsknoten und die Schwingungszahlen der Saiten mit grosser Sorgfalt anstellt, so findet man besonders bei Metallsaiten merkwürdige Abweichungen des Resultates von der Theorie. Diese Abweichungen werden um so grösser, je kürzer und dicker die Saiten werden. Der Grund dieser Abweichungen ist leicht einzusehen, er liegt besonders darin, dass die Saiten nicht, wie es bei den theoretischen Entwicklungen vorausgesetzt wurde, absolut biegsam sind und nur durch die spannenden Gewichte Elastizität erhalten haben, sondern dass sie selbst an sich schon steif sind. Es wird also durch die gegenseitige Anziehung der einzelnen Moleküle diesen schon eine gewisse Gleichgewichtslage gegeben.

Es ist nun leicht ersichtlich, dass die eigene Steifheit der Saiten gerade so wirkt, als wäre die Saite absolut unelastisch, aber durch ein stärkeres Gewicht gespannt als das angehängte und in Rechnung gezogene. Die Schwingungszahlen werden daher grösser sein als die aus der Theorie abgeleiteten.

Dieses Resultat haben nun auch die Versuche N. Savart's<sup>1)</sup> ergeben,

Die erste Zahl ist fehlerhaft, da sie auf ein ganz anderes Resultat führt, und die Gleichung für  $\frac{\alpha}{l}$  ist, wie man sieht, falsch. Da die Gleichung nicht mit der Angabe für  $\frac{N'}{N}$  auf  $\alpha = 0,052$  führt, so habe ich letztere von Poisson als das berechnete  $\alpha$  angegebene Zahl als richtig genommen und daraus  $\frac{N'}{N}$  berechnet. Das berechnete Verhältniss ist  $\frac{7}{118}$ .

<sup>1)</sup> N. Savart, Ann. de chim. et de phys. III. Série. T. VI; auch Poggend. an. Bd. LVIII.

der es sich zur Aufgabe gestellt hatte, das Gesetz aufzusuchen, nach welchem die Schwingungszahlen durch die eigene Steifheit der Saiten sich ändern.

N. Savart befestigte die Saiten an einem festen eisernen Schraubstock, nachdem er sie in Klemmen eingeklemmt hatte, die mit Blei gefüllt waren. Durch ein angehängtes Gewicht  $P$ , welches nach und nach geändert wurde, wurde die Saite gespannt und nun von der Saite ein Stück von  $80^{\text{mm}}$ ,<sup>5</sup> Länge mittels zwei weitem Schraubstöcken an seinen beiden Enden ganz fest eingelegt.

Die Schwingungszahlen der Saite von unveränderlicher Länge bei verschiedenen spannenden Gewichten wurden mittels der beobachteten Töne, welche durch die Schwingungen entstanden, bestimmt, und zugleich nach der Formel

$$n = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \cdot P}{l \cdot p}},$$

wenn wir mit  $p = q \cdot l \cdot s$  das Gewicht der schwingenden Saite bezeichnen, theoretisch berechnet.

Bezeichnen wir die wirklich beobachteten Schwingungszahlen mit  $N$ , so fand N. Savart in der That, dass  $N$  stets grösser war als  $n$ .

Er zog weiter aus seinen Versuchen den Schluss, dass die Differenz zwischen den Quadraten der Schwingungszahlen constant sei, oder

$$N^2 - n^2 = C$$

sei. Die Constante  $C$  soll nach Savart das Quadrat der Schwingungszahl sein, welche der Saite zukommt, wenn sie nur in Folge ihrer eigenen Steifheit schwingt. Bezeichnen wir die Schwingungszahl in dem Falle mit  $n_0$ , so soll also

$$N^2 = n^2 + n_0^2$$

sein.

Duhamel<sup>1)</sup> hat es versucht, diese von Savart aus seinen Versuchen abgeleitete Regel durch eine einfache Betrachtung theoretisch zu erklären.

Bezeichnet man nämlich mit  $n$  und  $P$  die Schwingungszahl und die Spannung einer absolut biegsamen Saite, so ist nach dem Vorigen

$$n^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P,$$

wenn  $g$  die Beschleunigung der Schwere,  $l$  die Länge und  $p$  das Gewicht der Saite bedeutet.

Hat man nun eine wirkliche Saite von eben der Länge  $l$  und demselben Gewichte  $p$ , so hat dieselbe durch ihre Steifigkeit eine gewisse Elasticität, vermöge welcher sie ohne spannendes Gewicht eine Schwingungszahl  $n_0$  hat. Der absolut biegsamen Saite können wir nun durch ein Gewicht  $P_0$  eine Spannung ertheilen, so dass sie genau dieselbe Bewegung annimmt, welche bei der steifen Saite aus der Elasticität hervorgeht und bei der sie  $n_0$  Schwingungen zurücklegt. In dem Falle hat man für dieselbe

$$n_0^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P_0.$$

<sup>1)</sup> Duhamel, Comptes rendus. Tome XIV. Poggend. Ann. Bd. LVII.

Fügt man nun zur Spannung  $P_0$  der biegsamen Saite noch die Spannung  $P_1$  hinzu, so befindet sie sich in demselben Zustande wie die steife Saite, wenn sie durch das Gewicht  $P_1$  gespannt ist. Die Spannung der absolut biegsamen Saite ist dann aber  $P_0 + P_1$  und ihre Schwingungszahl  $N$  gegeben durch

$$N^2 = \frac{g}{2lp} (P_0 + P_1),$$

oder da für eine Saite von gegebener Länge und gegebenem Gewichte die Schwingungszahl bei der constanten Spannung  $P_0$  constant ist,

$$N^2 = n^2 + n_0^2.$$

Ist es nun gleichgültig, ob eine Saite durch eigene Elasticität oder durch ein angehängtes Gewicht eine gewisse Spannung erhält, so muss auch für die steife Saite, welche in Folge ihrer eigenen Elasticität  $n_0$  Schwingungen vollführt, die wirkliche Schwingungszahl  $N$  bei der Spannung  $P$  sein

$$N = \sqrt{n^2 + n_0^2}.$$

August Seebeck<sup>1)</sup> hat indess nachgewiesen, dass die letztere Annahme Duhamel's nicht strenge und nur für einen bestimmten Fall richtig ist, da dieser Satz auf eine bestimmte Gestalt der schwingenden Saite führt. Wenn man nämlich auch durch ein Gewicht  $P_0$  der unelastischen Saite dieselbe Schwingungszahl geben kann, so lässt sich derselben doch nicht im allgemeinen in allen Theilen dieselbe Bewegung ertheilen, wie die Theile der steifen Saite sie annehmen. Zur Herleitung der Savart'schen Regel darf er deshalb nicht angewandt werden, weil die Saiten in dem Versuche von Savart nicht der Bedingung entsprechen, die aus dem Satze von Duhamel folgt.

Die Savart'sche Regel darf daher auch nur als eine angenäherte gelten.

Seebeck gibt für die Schwingungszahlen der steifen Saiten einen andern Ausdruck, den er theoretisch ableitet und durch Versuche bestätigt. Für gewöhnliche Saiten, deren Steifheit nur sehr gering ist, wird dieser Ausdruck ziemlich einfach, nämlich

$$n = n_1 \left( 1 + \frac{r^2}{l} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \pi}{P}} \right),$$

worin  $n_1$  die Schwingungen der absolut biegsamen Saite bei der Spannung  $P$ ,  $r$  den Radius,  $l$  die Länge und  $E$  den Elasticitätscoefficienten der Saite, wie wir ihn §. 50 bestimmten, bedeutet.

Man sieht, wie das Verhältniss der beiden Schwingungszahlen sich immer mehr der Einheit nähert, je grösser das spannende Gewicht wird, oder je kleiner der Quotient der beiden Gewichte  $\frac{E}{P}$  ist. Es ist das zu erwarten, da der Einfluss der Steifheit, also der eigenen Elasticität der Saite, um so mehr zurücktreten muss.

#### §. 134.

**Transversalschwingungen von Stäben.** Wenn man irgend einem elastischen prismatischen oder cylindrischen Stabe eine Biegung ertheilt

<sup>1)</sup> A. Seebeck, Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1846—47, auszügl. von Seebeck selbst. Dove, Repertorium. Bd. VIII.



und ihn dann sich selbst überlässt, so gelangt derselbe in stehende Schwingungen. Auch in diesem Falle können wir die stehenden Wellen als ein Resultat der mit einander interferirenden nach entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzenden an den beiden Enden reflectirten Wellen betrachten.

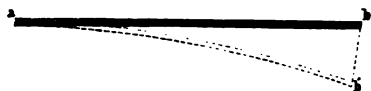
Die Schwingungsdauer solcher Stäbe lässt sich demnach ebenso wie die Schwingungsdauer der stehenden Wellen bestimmen, oder wir haben wieder

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

wie im §. 120. Wir haben hier indess die Grösse  $k$  etwas anders zu bestimmen, da wir es hier nicht mit der Bewegung von Punktreihen, wie in den bisherigen Fällen zu thun haben.

Sei  $ab$  (Fig. 229) ein Stab, der an seinem Ende  $b$  durch ein Gewicht gebogen wird, so sahen wir früher im zweiten Abschnitte, dass die Biegung, der Abstand  $bb'$ , abhängt von der Grösse des Gewichtes, ferner der Länge, Breite und Dicke des Stabes. Setzen wir denselben als prismatisch voraus und setzen wir seine Länge gleich  $l$ , die Breite gleich  $\beta$  und die Dicke gleich  $h$ , so war, wenn wir das biegende Gewicht mit  $P$  bezeichnen<sup>1)</sup>,

Fig. 229.



$$bb' = \frac{4}{E} \cdot \frac{P \cdot l^3}{\beta h^3},$$

oder die elastische Kraft  $P$ , welche den gebogenen Stab in die Gleichgewichtslage zurücktreibt,

$$P = \frac{E \beta h^3}{4 l^3} \cdot bb',$$

worin, wie immer,  $E$  den Elasticitätscoefficienten des Stabes bedeutet.

Da nun die elastische Kraft der Biegung proportional ist, so folgt, dass der einmal gebogene und dann sich selbst überlassene Stab um seine Gleichgewichtslage isochrone Schwingungen vollführen wird.

Nennen wir nun die bewegende Kraft bei einer Biegung, bei welcher  $bb' = 1$  ist,  $p$ , so haben wir

$$P = p \cdot bb',$$

$$p = \frac{E \beta h^3}{4 l^3}.$$

Dies ist somit die Kraft, welche den gebogenen Stab von der Länge  $l$  wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, wenn das Ende  $b'$  sich im Abstände 1 von der Gleichgewichtslage befindet. Diese Kraft ist am Ende  $b$  angebracht. Um nun die Schwingungsdauer des Stabes zu erhalten, haben wir

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}},$$

wo  $k$  die beschleunigende Kraft der Bewegung bedeutet, also

$$k = \frac{p}{m}$$

<sup>1)</sup> Man sehe §. 55.

ist, wenn  $m$  die bewegte Masse bedeutet. Bezeichnen wir die Masse des Stabes mit  $m'$ , so werden wir haben

$$m = f' \cdot m',$$

worin  $f'$  eine Constante bedeutet; denn um die beschleunigende Kraft zu erhalten, müssen wir für  $m$  die im Punkte  $b$  anzubringende Masse einsetzen, welche dort die Masse des Stabes ersetzt, da die Kraft  $p$  im Punkte  $b$  angreift. Diese Masse ist aber jedenfalls derjenigen des Stabes proportional.

Für die beschleunigende Kraft der Bewegung erhalten wir somit

$$k = \frac{p}{m} = \frac{E \cdot \beta \cdot h^3}{4 f' \cdot m' l^3}.$$

Bezeichnen wir nun das spezifische Gewicht des Stabes mit  $s$ , so haben wir

$$m' = \frac{\beta \cdot h \cdot l \cdot s}{g}$$

und somit

$$k = \frac{h^2}{4 f' l^4} \cdot \frac{g \cdot E}{s}$$

und daraus für die Schwingungsdauer eines solchen Stabes

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{h^2}{4 f' l^4} \cdot \frac{g \cdot E}{s}}} = A \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \sqrt{\frac{s}{g \cdot E}},$$

wenn wir setzen

$$2\pi \sqrt{4 f'} = A.$$

Für die Schwingungszahlen der Stäbe erhalten wir daraus

$$N = \frac{1}{T} = A' \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}}.$$

Derselbe Ausdruck gilt für cylindrische Stäbe, wenn wir anstatt der Dicke  $h$  den Radius  $r$  derselben einsetzen, jedoch wird dann die Constante  $A'$  eine andere, wie sich aus dem Ausdrucke ergibt, den wir für  $P$  erhalten, wenn wir anstatt parallelepipedischer Stäbe cylindrische Stäbe anwenden.

Wir haben diesen Ausdruck zunächst entwickelt unter der Voraussetzung, dass der Stab an seinem einen Ende fest sei, indess ergibt die Theorie der Elasticität, dass er auch, mit verschiedenen Werthen von  $A'$ , gültig ist, im Falle beide Enden fest oder frei sind, da der Ausdruck für  $P$  sich in den Fällen nur durch andere Constanten unterscheidet.

Es ergibt sich daraus, dass allgemein die Schwingungszahl elastischer Stäbe dem Quadrate ihrer Länge umgekehrt proportional ist, während sie der Dicke derselben oder dem Radius derselben direkt proportional, von der Breite derselben jedoch unabhängig ist.

Gerade wie wir bei den longitudinalen Schwingungen nun eine Reihe von Fällen unterscheiden mussten, je nach der Befestigungsweise des Stabes, so auch hier wieder.

Wir können jedoch hier nicht wie in den frühern Fällen die Schwingungszahlen und Theilungen der Stäbe theoretisch ableiten, sondern müssen

uns begnügen, die von Euler, Poisson, Cauchy, Seebeck u. a., theils theoretisch, theils experimentell erhaltenen Resultate mitzutheilen. Wir unterscheiden folgende Fälle<sup>1)</sup>.

1) Ein Ende des Stabes ist frei, das andere fest, der Stab schwingt seiner ganzen Länge nach hin und her, er bildet eine halbe stehende Welle. Es ist unter Annahme eines cylindrischen Stabes

$$N = 0,28 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}}.$$

2) Beide Enden des Stabes sind fest, oder beide Enden des Stabes sind frei; die Zahl der langsamsten Schwingungen wird in beiden Fällen:

$$N = 1,78 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}}.$$

3) Es kann ferner das eine Ende des Stabes auf eine Unterlage gelegt werden und das andere ganz fest, in einen Schraubstock eingeklemmt werden, oder ganz frei sein. In beiden Fällen erhält man für die langsamsten Schwingungen, welche der Stab vollführen kann,

$$N = 1,23 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}}.$$

4) Schliesslich können beide Enden des Stabes nur aufgelegt sein, dann ist für die langsamsten Schwingungen

$$N = 0,785 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}}.$$

Seebeck vereinigt die Ausdrücke für alle diese Fälle in folgenden<sup>2)</sup>

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}},$$

worin dann nur  $\varepsilon$  seinen Werth von einem Falle zum andern ändert, und zwar ist

- $\varepsilon = 0,59686$ , wenn ein Ende des Stabes fest, das andere frei ist,
- $\varepsilon = 1,50562$ , wenn beide Enden des Stabes fest oder frei sind,
- $\varepsilon = 1,24987$ , wenn ein Ende aufgelegt, das andere fest oder frei ist,
- $\varepsilon = 1$ , wenn beide Enden des Stabes aufgelegt sind.

In allen diesen Fällen können noch eine Reihe von Schwingungszahlen auftreten, die alle häufigern Schwingungen der Stäbe entsprechen; die Stäbe zerlegen sich dann in eine Reihe selbständig schwingender Theile, welche durch Knotenpunkte von einander getrennt sind.

Seebeck gibt folgende Tabelle der Werthe von  $\varepsilon$  in allen vier Fällen:

1. Fall. Das eine Ende des Stabes ist fest, das andere frei. Die Reihenfolge der Schwingungszahlen ergibt sich aus den Werthen

$$\varepsilon = 0,59686; 1,49418; 2,50025; 3,4999 \dots \frac{2n-1}{2}.$$

<sup>1)</sup> *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 484 ff.

*Cauchy*, Exerc. de Math. Tome III. 270 ff.

*Seebeck*, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1846—47. p. 159. Dove, Rep. Bd. VIII. p. 46.

<sup>2)</sup> *Seebeck* a. a. O.

Wie man sieht, werden die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes von der Länge  $l$  und dem Radius  $r$  von der dritten an dargestellt durch

$$N = \left( \frac{2n-1}{2} \right)^2.$$

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  weichen die Schwingungszahlen hiervon ab, indem die hiernach berechneten Zahlen für  $n = 1$  zu klein, für  $n = 2$  zu gross werden.

2. Fall. Die beiden Enden des Stabes sind entweder fest oder frei. Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Werthen

$$\varepsilon = 1,50562; 2,49975; 3,5001; 4,5000 \dots \dots \frac{2n+1}{2}.$$

Setzen wir also für die langsamsten Schwingungen  $n = 1$ , so werden auch hier die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes dargestellt durch

$$N = \left( \frac{2n+1}{2} \right)^2,$$

jedoch ebenfalls erst von der dritten Schwingungszahl an, und zwar um so genauer, je weiter man in der Ordnung der Schwingungszahlen aufsteigt.

3. Fall. Ist das eine Ende des Stabes aufgelegt, das andere ganz fest oder ganz frei, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn für  $\varepsilon$  eingesetzt wird

$$\varepsilon = \frac{4n+1}{4},$$

worin wieder  $n$  die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet, und für die langsamsten Schwingungen  $n = 1$  zu setzen ist. Für diese gaben wir an  $\varepsilon = 1,2498$ ; man sieht, wie schon dieser Werth nur äusserst wenig von dem nach der Formel berechneten abweicht.

4. Fall. Sind beide Enden des Stabes einfach aufgelegt, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn wir für die langsamsten  $\varepsilon = 1$  und für die folgenden die Reihe der natürlichen Zahlen einsetzen, also  $\varepsilon = n$ . Die Schwingungszahlen verhalten sich also wie 1, 4, 9 . . . .

In diesem Falle erhält also die Gleichung für die Schwingungszahlen ihre einfachste Gestalt, sie wird

$$N = \frac{n^2 \cdot \pi \cdot r}{4l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}},$$

worin nach und nach für  $n$  die Werthe 1, 2, 3 . . einzusetzen sind.

Die Schwingungszahlen eines und desselben Stabes können also sehr verschieden sein, je nach der Art seiner Befestigung; setzen wir die langsamsten Schwingungen bei der ersten Befestigungsart gleich 1, so erhalten wir als Schwingungszahlen

1. Fall . . 1;	6,26; 17,54; 34,38; 56,84;
2. „	6,36; 17,54; 34,38; 56,84; 84,91;
3. „	4,38; 14,21; 29,50; 50,70; 77,22;
4. „	2,807; 11,23; 25,26; 44,91; 70,17.

Um aus dieser kleinen Tabelle die wirklichen Schwingungszahlen zu erhalten, haben wir bei cylindrischen Stäben dieselben nur mit

$$\frac{0,35624 \cdot \pi \cdot r}{4l^2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}}$$

zu multipliciren.

Auch die Schwingungszahlen parallelepipedischer Stäbe können wir ganz auf dieselbe Weise erhalten, wir haben in die Formel anstatt des Radius  $r$  des Cylinders nur  $\frac{h}{\sqrt{3}}$  einzusetzen, wenn wir wie vorhin mit  $h$  die Dicke der Stäbe bezeichnen<sup>1)</sup>.

Die grössern Schwingungszahlen haben auch hier ihren Grund in einer Theilung der Stäbe in eine Anzahl stehender Wellen, indess theilen sich hier die Stäbe nicht in eine Anzahl gleicher Theile, sondern die Englieder sind verschieden von den Abständen der Knoten im Stabe selbst. Die Lage der einzelnen Knoten lässt sich indess ebenso berechnen, wie die der Schwingungszahlen. So findet Seebeck z. B. für die Entfernung der Knoten von den nächsten Enden eines an beiden Enden freien Stabes:

des ersten	des zweiten	des dritten	des $m$ -ten
$\frac{1,322}{4n+2} \cdot l$	$\frac{4,9820}{4n+2} \cdot l$	$\frac{9,0007}{4n+2} \cdot l$	$\frac{4m-3}{4n+2} \cdot l$

Bei der langsamsten Schwingung bilden sich also zwei Knoten, die um 0,2242 von den Enden liegen und um 0,5516 der Stablänge von einander entfernt sind. Bei der zweiten, schnellern Schwingung bilden sich drei Knoten, einer in der Mitte, wie sich aus dem Ausdruck für den zweiten Knoten ergibt, der für den Abstand von dem nächsten freien Ende 0,498 ergibt, die beiden andern sind um 0,132 von den Enden des Stabes entfernt. Bei der dritten Schwingungszahl bilden sich vier Knoten, welche um 0,0944 und 0,3558 von den Enden des Stabes entfernt sind. Der Abstand der beiden mittlern Knoten ist 0,2888 und der mittlern von den äussern 0,2614.

In dem folgenden Falle bilden sich fünf Knoten, deren Lage sich ebenso berechnen lässt und so fort.

Man kann diese theoretischen Resultate experimentell nachweisen. Dass die Schwingungszahlen mit den angegebenen übereinstimmen, werden wir im nächsten Abschnitte zeigen.

Die Lage der Knotenpunkte lässt sich am besten auf einem dünnen Streifen von ziemlicher Breite und Länge bestimmen. Strehlke<sup>2)</sup> wandte Stahlstäbe von 1<sup>m</sup>—1<sup>m</sup>,3 Länge, 12—15 Millimeter Breite und 4 Millimeter Dicke an und bestreute sie auf der obern Fläche nach dem Vorgange von Chladni<sup>3)</sup> mit trockenem, staubfreiem Sand. Der Sand wird von den schwingenden Stellen des Stabes fortgeworfen und an den ruhenden Stellen angesammelt, so dass man dadurch die Lage der Knoten sichtbar machen kann. Man spannt nun diese Stäbe zwischen zwei konischen Spitzen an der Stelle zweier Knoten ein und bringt die Stäbe durch Anstreichen mit dem Violinbogen in Schwingung. Der Sand wandert dann nach den Knotenlinien hin und bleibt dort in Ruhe.

Die Knotenlinien stellen sich als feine, zur Längsaxe des Stabes senk-

<sup>1)</sup> Cauchy a. a. O.

<sup>2)</sup> Strehlke, Poggend. Ann. XXVII. Dove, Repert. Bd. III. p. 111.

<sup>3)</sup> Chladni, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787.

rechte Linien dar, und ihre Lage ist nach den Messungen von Strehlke genau der Theorie entsprechend.

In seiner Abhandlung über die Bewegung elastischer Körper macht Poisson auf die einfache Relation auch der transversalen und longitudinalen Schwingungen von Stäben aufmerksam, wenn sie ihre langsamsten Schwingungen vollführen<sup>1)</sup>. Ist der Stab an beiden Enden frei oder fest, so haben wir für die Zahl der transversalen Schwingungen

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4l^2} \cdot \sqrt{\frac{gE}{s}}$$

Für die longitudinalen Schwingungen der langsamsten Art hatten wir §. 129

$$N' = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{gE}{s}}$$

Man erhält demnach

$$\frac{N}{N'} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \pi \frac{r}{l} = 3,5608 \frac{r}{l}$$

F. Savart hat durch Versuche diese von Poisson zuerst aufgestellte Relation nachgewiesen. Es wurden die longitudinalen Schwingungen eines nahezu 1<sup>m</sup> langen cylindrischen homogenen Stabes beobachtet und darauf die transversalen Schwingungen eines Stückes des Stabes, welches genau  $\frac{1}{8}$  der Länge des Stabes betrug. Die Schwingungszahlen wurden nach einer im nächsten Abschnitte auseinander zu setzenden Methode aus den Tönen der Stäbe bestimmt.

Um vergleichbare Zahlen zu haben, wurde dann die beobachtete Zahl der longitudinalen Schwingungen des ganzen Stabes mit 8 multiplicirt, wodurch man die Schwingungszahl eines Achtel des Stabes erhielt. Aus diesen Zahlen wurde dann nach obiger Gleichung die Schwingungszahl der transversalen Schwingungen berechnet und die so berechnete Zahl

$$N = 3,5608 \frac{r}{l} \cdot N'$$

mit der beobachteten Schwingungszahl verglichen. Die Resultate der Versuche sind folgende<sup>2)</sup>:

Stab von	$N$ beobachtet	$N$ berechnet	Differenz
Messing . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} l = \frac{1}{8} \cdot 0,825 \\ r = 2^{\text{mm}},4 \\ N' = 17066 \end{array} \right.$	1422	1415	— 7
Kupfer . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} l = \frac{1}{8} \cdot 0,825 \\ r = 1^{\text{mm}},7 \\ N' = 18432 \end{array} \right.$	1067	1082	+ 15
Eisen . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} l = \frac{1}{8} \cdot 0,88 \\ r = 2^{\text{mm}},25 \\ N' = 22757 \end{array} \right.$	1843	1842	— 1

<sup>1)</sup> Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 486.

<sup>2)</sup> Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 487.

Transversale ...  
 Grenzen zwischen Rechnung und Beobachtung.  
 kommen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen  
 liegen.

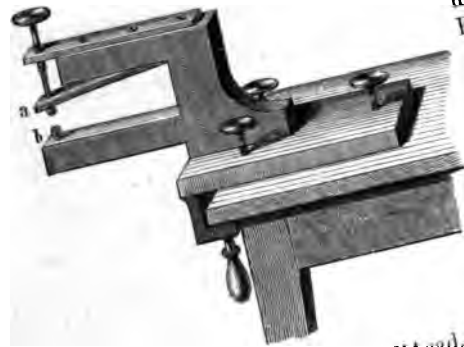
§. 135.

**Transversale Schwingungen von Platten. Chladni's Klangplatten.**

Wenn man eine dünne Platte von Glas oder Metall oder eine Membran anschlägt oder an einem Ende durch Gewichte gespannt Membran anschlägt oder an einem Ende streicht, so kann man dieselbe ebenso wie Streifen oder Platten Schwingungen versetzen. Eine theoretische Ableitung dieser Schwingungen aus den Principien der Wellenbewegung ist uns hier nicht worden. Die Bewegung ist erst für einige specielle Fälle entwickelt worden<sup>1)</sup> und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff<sup>2)</sup> hat indess von der Poisson'schen eine neue Theorie der Schwingungen abgeleitet, dass sie nicht in allen Punkten richtig ist und stellt sie nachher mit den Versuchen zusammen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen, oder sich in schwingende Theile zerlegen, welche durch Knotenlinien getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere Theile durch Knotenlinien getrennte schwingende Theile. Theorie und Versuch beweisen, dass die Theilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Theil der Platte sich schwingt, und um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die Platte mit trockenem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Theilen der Platte fortgeworfen und sich auf den ruhenden Knotenlinien, ansammeln und sich so auf der Platte mässige Figuren, welche Klangfiguren genannt sind, zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer Stelle mit der von uns gegebenen Gabel (Fig. 1) man sie mittels derselben schen die beiden mit Eisen beschlagenen Köpfe *a* und *b* über diese Köpfe gehend

Fig. 230.



<sup>1)</sup> Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 264 ff.  
<sup>2)</sup> Kirchhoff, Crelle's Journal f. Mathematik Bd. XL. M. s.  
<sup>3)</sup> Strehlke, Poggend. Ann. Bd. IV.

stückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht ritzen. Die Platte wird dann mit einem mit Colophonium versehenen Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten. Der Bogen muss senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen so lange fortgesetzt werden, bis keine vereinzelt Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Theile, welche gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen schwingen; es geht daraus hervor, dass die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Theilen zerlegen muss, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abtheilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Grösse und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgetheilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q'}{q} \cdot \frac{d}{d'}$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2 \pi, \quad q' = r'^2 \pi,$$

dennach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2}{r^2} \cdot \frac{d}{d'}$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schliesst das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heisst bei denen die homologen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich bei gleicher Theilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen.

Ist nämlich bei kreisrunden Platten, z. B. der Radius der einen Platte  $r$ , der andern  $a \cdot r$ , und ebenso die Dicke der einen  $d$ , der andern  $a \cdot d$ , so ist nach dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2 \cdot r^2}{r^2} \cdot \frac{d}{a \cdot d} = a$$

und wie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem ersten Satze gezogene Folgerung.

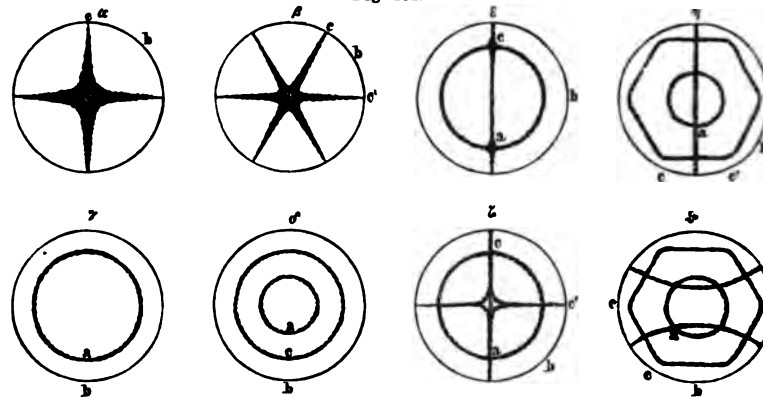
Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu den Versuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese die Theorie von Kirchhoff, dass in ihnen eine grosse Zahl verschiedener



Theilungen möglich sind, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder theilt sich die Platte in eine Reihe concentrischer Zonen, oder in eine stets gerade Anzahl von gleich grossen Sektoren, welche durch diametrale Knotenlinien von einander getrennt sind, oder endlich beide Theilungsarten treten gleichzeitig auf.

Alle diese Theilungsarten hat schon Chladni beobachtet; um sie hervorzubringen, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem andern Punkte ein und berührt sie ausserdem an einem oder mehreren Punkten und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungspunkten. Fig. 231 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungspunkte sind in allen einzelnen Figuren mit  $a$  bezeichnet, der Punkt, an dem die Platte zu streichen ist, mit  $b$ , und die Berührungspunkte mit  $c$ . Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radiale Figur (231  $\alpha$  und  $\beta$ ) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit 2 oder 3 Durchmessern; klemmt man die Platte excentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 231  $\gamma$  und  $\delta$ ).

Fig. 231.



Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur Bestimmung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, dessen numerischer Werth wesentlich von dem Werthe des von uns mit  $\mu$  bezeichneten Verhältnisses der Quercontraction zur Längendilatation abhängt. Setzen wir dieses Verhältniss der Wertheim'schen Annahme gemäss gleich  $\frac{1}{3}$ , welche Annahme, wie wir sahen, der Wahrheit im allgemeinen ziemlich nahe kommt, so erhält man nach Kirchhoff für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231  $\gamma$ ) den Werth 0,679411 des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von F. Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mittheilt, fand sich derselbe

$$0,6819; 0,6798; 0,6812$$

des Scheibendurchmessers. Strehlke fand bei zwei äusserst sorgfältig gearbeiteten Glasscheiben nach der Angabe Kirchhoff's

$$0,6792; 0,6782,$$

Zahlen, welche mit der Theorie sehr nahe übereinstimmen.

Die Figuren 231  $\epsilon$  und  $\zeta$  zeigen die beiden Theilungsarten gleichzeitig. Für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231  $\epsilon$ ) gibt die Theorie den Werth 0,78088 des Scheibendurchmessers; Strehlke fand bei den beiden erwähnten Scheiben

0,7811 und 0,7802.

Für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231  $\zeta$ ) ergibt die Theorie den Werth 0,82274, Strehlke fand denselben an drei weniger sorgfältig als die vorigen gearbeiteten Scheiben zu 0,79; 0,81; 0,82 des Scheibendurchmessers.

Die Figuren 231  $\eta$  und  $\theta$  zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, welche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei  $a$  einklemmt und bei  $b$  anstreicht, während die Punkte  $c$  berührt werden.

Ausser den gezeichneten können noch viele Figuren hervorgebracht werden, Chladni<sup>1)</sup> gibt in seiner ersten Mittheilung 80 an, dieselben sind aber alle mit Kreisen und Radien zusammengesetzt oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl als aus den Versuchen ergibt sich, dass die Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Theile, in welche sich die Platte theilt, in einem sehr complicirten Verhältnisse zunimmt. Die langsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Theilung Fig. 231  $\alpha$ , dann folgt Fig. 231  $\gamma$ , 231  $\beta$ , 231  $\epsilon$ , 231  $\zeta$ , 231  $\delta$ . Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt für die angegebenen und noch einige andere Theilungen nach der Theorie von Kirchhoff und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit  $K$  überschriebene Columne enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl von Durchmessern durchschnitten werden.

Tabelle der Schwingungszahlen kreisförmiger am Rande freier Platten.

$K$	ohne Durchmesser		mit 1 Durchmesser		mit 2 Durchmesser		mit 3 Durchmesser	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0	0	0	0	0	1	1	2,245	2,378
1	1,587	1,681 +	3,563	4,000 -	5,993	6,726	9,513	10,079 -
2	6,348 +	7,126 +	10,079 +	11,313 +				

Die Schwingungen wurden in später zu besprechender Weise aus den Tönen bestimmt<sup>2)</sup>; die in der Tabelle angegebenen Zahlen sind diejenigen der von Chladni angegebenen Töne: auch Kirchhoff gibt statt der Zahlen die Töne an, und die Zeichen + oder - neben den Zahlen deuten an, dass der wirklich beobachtete Ton oder der der genauen Schwingungszahl entsprechende Ton etwas höher oder tiefer ist als die in der Tabelle an-

<sup>1)</sup> Chladni, Entdeckungen zur Theorie des Kluges. Leipzig 1787. Man sehe auch Strehlke, Poggend. Annalen Bd. IV. Savart, Annales de chim. et de phys. Tome XXXVI.

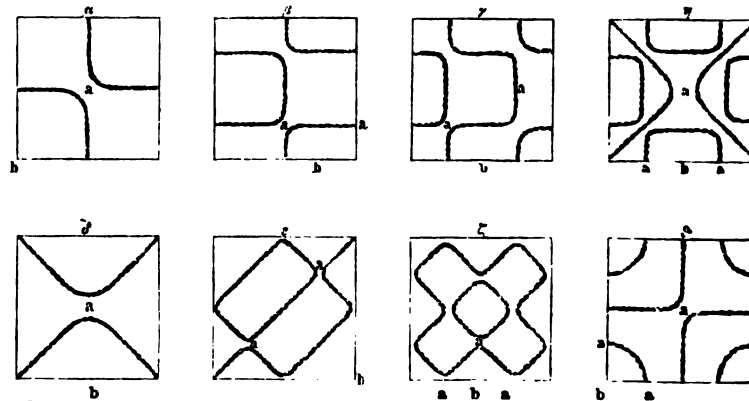
<sup>2)</sup> Man sehe §. 153 dieses Theiles.

gegebenen. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, inde ist einmal die Bestimmung der Töne mit einiger Schwierigkeit verknüpft; dann aber beruht auch hier die Rechnung auf der Voraussetzung  $\mu = 1$ , die nicht vollständig genau ist.

Die Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nicht experimentell bestimmen; die Theilungen quadratischer Platten und damit die auf denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als diejenigen auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systemen von Knotenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel den Seiten des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und schliesslich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

So erhält man Fig. 232  $\alpha$ , wenn man die Platte in der Mitte unterstützt und an einer Ecke z. B. bei  $b$  anstreicht, Fig. 232  $\beta$ , wenn man in den beiden Punkten  $a$  die Platte unterstützt und bei  $b$  anstreicht. Eben bei allen übrigen Figuren sind die zu unterstützenden Punkte mit  $a$  und jene, an denen zu streichen ist, mit  $b$  bezeichnet.

Fig. 232.



Diese Figuren sind nach der Angabe von Strehlke<sup>1)</sup> gezeichnet, da nachgewiesen hat:

1) Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfiguren zusammensetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren  $\alpha$  und  $\delta$  durch zwei hyperbolische Aeste gebildet.

2) Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Durchschneiden in den meisten Fällen rührt daher, dass man zu viel Sand auf die Scheibe gebracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen zu schwach werden, als dass der Sand fortgeworfen werden kann.

Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen.

In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, welche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen theilen sich die Glocken in vier Theile, die ruhenden Linien liegen um einen Bogen von  $90^\circ$  von einander entfernt und durch-

<sup>1)</sup> Strehlke, Poggend Ann. Bd. IV. Dove's Repertorium. Bd. III.

die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Theilung sehr sichtbar machen dadurch, dass man die Glocke bis etwas über ihre Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung das Wasser stark zurückgestossen und in wellenförmige Bewegung ist, während es an den  $45^\circ$  davon entfernten Stellen der Knoten in bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten Schwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine Zeitlang halten und in regelmässigen Figuren angesammelt werden können. Eine eigenthümliche Art von Figuren hat Savart<sup>1)</sup> auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit feinem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut. Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Platte von beiden Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, ausser den eigenthümlichen Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von Sand (Fig. 233), jedoch immer so, dass der zugespitzte Theil der

Fig. 233.

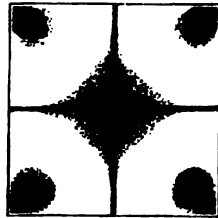
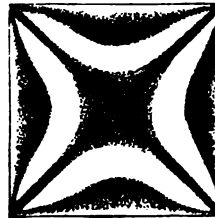


Fig. 234.



er Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Platte schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe von höckerförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 234 erscheint, wenn man die Platte festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, dass diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken zeigen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Theilungsart der Platte. Nach ihm ist die Platte der Sitz vieler über einander stehender Theilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, dass in der Mitte der schwingenden Abtheilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf denen die Theilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Um gegen diese Erklärung wandte Faraday<sup>2)</sup> ein, dass selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von  $6$  bis  $10^\circ$ , die jedenfalls viel kleiner sei als die Neigung der schwingenden Theile, ein Aufsteigen des

<sup>1)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. Tome XXXVI.

<sup>2)</sup> Faraday, Philosophical Transact. for the year 1831. Poggend. Annal. VI.

Lycopodium der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten finde und der Staub so lange sich dort halten kann, als die Platte erschüttert werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung. Damit stimmt es überein, dass nur bei Anwendung des leichten Stäubes diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stücke von Winkelform in der Nähe der Vibrationscentra so befestigt wurden, dass der Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe Fig. 234 parallel und der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den Knoten der Karte aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach oben, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen Erklärung bildet aber das Verhalten der mit Lycopodium bestreuten Platte im luftverdünnten Raum. Eine Glasscheibe wurde auf vier Füßen unter die Glocke der Luftpumpe gelegt und mittels eines an der Platte senkrecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Spalte aus der Glocke herausgeleitet war und ausserhalb der Glocke in die horizontale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibriren gebracht. Die Platte senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitudinale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. So zeigt die Platte die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft. In verdünnter Luft zeigte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise, aber die Luft bis auf 5—3 Centimeter Quecksilberdruck verdünnt, das Pulver quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, es der Sand in freier Luft thut, und die Wolken an den Vibrationspunkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, dass die Staubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu thun haben, dass sie also nicht, wie Savart sie nannte, secundäre Klangfiguren sind, sondern Folge einer zweiten Theilung der Scheibe sind, sondern dass zur Bildung das Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung sind, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte auf die umgebende Luft. So wie der schwingende Theil der Platte aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle weggedrückt und zwar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn die Platte beim Anfange der zweiten Hälfte der Oscillation in ihre ursprünglichen Lage zurückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung befindliche Luft, welche eine von der Platte fortgerückt, nicht so schnell als die Platte zurückkehrt, bildet sich daher ein leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe ist, über die Platte hin eindringt. Dadurch entsteht ein Luftstrom, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der stärksten Schwingung gerichtet ist und die Platte mit sich an diese Stelle hinführt. Natürlich muss diese

den andern Wege zu den Knotenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oscillation stauen sich die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender Luftstrom, der sich daran erkennen lässt, dass das Lycopodium über den Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte wieder seitwärts geführt wird.

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die Platte einer Flüssigkeit bedeckte. Durch die entstehenden Ströme konnte die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilichtes oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

#### §. 136.

**Drehende Schwingungen von Stäben.** Ausser den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir lernten sie damals, um mit Hülfe der Pendelgesetze den Torsionsmodul von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versahen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heisst, bei einer denselben Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Theil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einproportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so muss an dieser Grenze Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der directen und der reflectirten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.

Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsaxe parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab gedreht, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, die auf einem Cylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Axe des Stabes. Ueberlassen wir dann den Stab sich selbst, so kehrt der gedrehte Theil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurück, indem jeder Punkt der Faser auf dem eben angegebenen Cylinder einen Bogen beschreibt, geht über die Gleichgewichtslage hinaus u. s. f. Ist der Stab unbegrenzt, und wird sein eines Ende stetig hin und her hin- und hergedreht, so dass dieses Ende in der Zeit  $T$  eine Schwingung macht, so können sich diese Torsionsschwingungen nach den §. 116 abgeleiteten Gesetzen fortpflanzen, und setzen wir den Stab als cylindrisch voraus, so können wir die Auslenkung eines Punktes um  $x$  von dem Ende des Stabes entfernt, auf dem zu der Faser gehörigen Cylindermantel zur Zeit  $t$  aus seiner Gleichgewichtslage verschoben ist, darstellen durch

$$\varphi = \alpha \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

wenn  $\alpha$  die Maximalverschiebung der zum untersten Querschnitt  $g$  Punkte der Fasern, die Amplitude der Schwingungen bedeutet,  $\lambda$  immer die Wellenlänge, das heisst die Strecke des Stabes ist, bisher die Gleichgewichtstörung während einer Schwingung des  $u$  Querschnittes fortgeschritten ist.

Kommt nun der ersten Welle eine andere entgegen, deren  $U$  von demjenigen der ersten Schwingungen um  $a$  entfernt ist, so auch hier nach §. 119 stehende Wellen sich bilden, und die Verschiebung des soeben betrachteten Punktes wird dargestellt durch

$$\varphi = 2\alpha \cdot \cos \frac{2x-a}{\lambda} \pi \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right),$$

oder wenn wir  $a$  gleich einer Anzahl von Wellenlängen setzen,

$$\varphi = 2\alpha \cdot \cos \frac{2x \cdot \pi}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Um nun die Schwingungsdauer dieser stehenden Wellen zu bestimmen haben wir gerade so zu verfahren wie §. 120, das heisst wir haben die Beschleunigung zu bestimmen, mit welcher irgend ein Querschnitt des Stabes, zu welchem der Punkt der betrachteten Faser gehört, von der Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, wenn die Verschiebung der Punkte im Bogen oder  $r \cdot \varphi$  gleich 1 wird. Ist diese Beschleunigung  $k$ , so ist

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Zur Bestimmung der beschleunigenden Kraft erinnern wir uns an die Entwicklungen des §. 54, nach welchen die durch die Torsion in den Punkten der Faser, oder in einem Elemente  $dq$  eines Querschnittes entwickelte Kraft, mit welcher dieses Element von einem benachbarten Querschnitte gegen die Gleichgewichtslage zurückgezogen wird, gleich

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \psi \cdot dl$$

ist, wenn  $\psi$  den Verschiebungswinkel dieses Querschnittes gegen den nachbarten Querschnitt bedeutet. Das Drehungsmoment, welches ein betrachtetes Element des Querschnittes in Folge dieser Kraft erhält,

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot r \cdot \psi \cdot dq.$$

Um dann das Drehungsmoment für den ganzen Querschnitt zu bestimmen haben wir für jedes Element des Querschnittes den analogen Ausdruck bilden, und alle diese zu summieren. Um nun diese Summe zu bilden haben wir zunächst die Verschiebungswinkel  $\psi$  bei den drehenden Schwingungen zu bestimmen.

Sei zu dem Ende  $AB$  Fig. 235 ein Stück des tordirten Cylinders,  $aC$  ein Stück der Faser auf dem Cylindermantel von dem Radius  $r$  in gedrehter Lage dar, während  $ab$  die Lage der nicht tordirten Faser darstellt. Sei ferner  $op$  der betrachtete Querschnitt, der in der Entfernung  $x$  von den Anfangspunkten  $A$  der Bewegung sich befindet, und seien schliesslich

*qr* die diesem benachbarten Querschnitte, von denen der eine weniger der andere mehr verschoben ist. Der Winkel, um welchen *op* gegen den unmittelbar vorhergehenden Querschnitt verschoben ist, ist dann *oms*, und die Kraft, mit der das Element der Faser *o* in Folge dieser Verschiebung gegen die Gleichgewichtslage zurückgedreht wird, ist demnach

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot dq \cdot r \cdot oms.$$

Nennen wir nun den Bogen *op*, um welchen dieser Querschnitt gedreht ist,  $\varphi'$ , gegeben durch die Gleichung

$$\varphi' = 2\alpha \cdot \cos \frac{2x'}{\lambda} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und den Bogen, welchen der dem Anfangspunkte um die unendlich kleine Grösse *dx* nähere Querschnitt beschrieben hat,  $\varphi$ , so ist die Differenz der beiden Bögen  $os = r(\varphi' - \varphi)$  in Längenmaass gegeben. Nun ist ferner

$$\frac{os}{sm} = \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx} = \text{tang } oms$$

und da der Winkel *oms* immer äusserst klein ist, so können wir statt seiner die Tangente setzen, und erhalten dann für die von der Verschiebung des betrachteten Elementes herrührende den Querschnitt gegen die Gleichgewichtslage zurückdrehende Kraft

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot dq \cdot r \cdot \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx} \dots \dots \dots (a).$$

Gegen den Querschnitt *op* ist aber auch der folgende Querschnitt *qr*, der um *dx* weiter vom Anfang entfernt ist, verschoben, und der Verschiebungswinkel ist hier *qov*. Nennen wir den Bogen  $rq = \varphi''$ , so erhalten wir auch hier wieder

$$\text{tang } qov = \frac{r(\varphi'' - \varphi')}{dx} = qov$$

und für das in Folge dieser Verschiebung dem Querschnitt ertheilte Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot dq \cdot r \cdot \frac{r(\varphi'' - \varphi')}{dx} \dots \dots \dots (b).$$

Letzteres Drehungsmoment sucht den Querschnitt von der Gleichgewichtslage weiter zu entfernen, das den Querschnitt zurücktreibende Drehungsmoment ist also die Differenz der beiden Momente *a* — *b*, oder

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot r^2 dq \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Für das ganze Drehungsmoment erhalten wir die Summe aller einzelnen für jedes Element *dq* des Querschnittes bestimmten Drehungsmomente, und dieses ist, da der erste und letzte Factor des für das Element *dq* entwickelten Ausdrucks allen einzelnen Momenten gemeinsam ist, gleich

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx} \int r^2 dq = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx} \cdot \frac{q^4 \pi}{2},$$

Fig. 235.





wie die Integralrechnung lehrt, wenn wir mit  $\varrho$  den Radius des Stabes bezeichnen.

Es erübrigt in diesem Ausdrücke noch die Bestimmung der Differenz  $(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')$ . Wir erhalten dieselbe, indem wir gerade so verfahren, wie im §. 120. Setzen wir den Abstand des ersten Querschnitts vom Anfangspunkt gleich  $x$ , so ist

$$\varphi = 2\alpha \cos \frac{2x}{\lambda} \pi \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Den Werth von  $\varphi'$  erhalten wir, indem wir für  $x$  einsetzen  $x' = x + dx$ , nämlich da  $dx$  unendlich klein, somit  $\cos \frac{2dx}{\lambda} \pi = 1$   $\sin \frac{2dx}{\lambda} \pi = \frac{2dx}{\lambda} \pi$

$$\varphi' = 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} \left( \cos \frac{2x}{\lambda} \pi - \frac{2dx}{\lambda} \pi \cdot \sin \frac{2x}{\lambda} \pi \right)$$

und daraus

$$\varphi' - \varphi = - \frac{2dx}{\lambda} \pi \cdot \sin \frac{2x}{\lambda} \pi \cdot 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Den Werth von  $\varphi''$  erhalten wir, indem wir in dem Ausdrücke für  $\varphi'$  wieder  $x$  durch  $x + dx$  ersetzen, wir erhalten dann

$$\varphi'' = 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} \left\{ \cos \frac{2x}{\lambda} \pi - \frac{4dx}{\lambda} \pi \cdot \sin \frac{2x}{\lambda} \pi - \frac{4dx^2}{\lambda^2} \pi^2 \cos \frac{2x}{\lambda} \pi \right\},$$

somit

$$\varphi'' - \varphi' = - \left\{ \frac{2dx}{\lambda} \pi \cdot \sin \frac{2x}{\lambda} \pi + \frac{4dx^2}{\lambda^2} \pi^2 \cos \frac{2x}{\lambda} \pi \right\} 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und daraus schliesslich

$$(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi') = \frac{4dx^2}{\lambda^2} \pi^2 \cdot \cos \frac{2x}{\lambda} \pi \cdot 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{4dx^2}{\lambda^2} \pi^2 \cdot \varphi.$$

Setzen wir diesen Werth der Differenzen in den oben abgeleiteten Ausdruck für das Drehungsmoment, so erhalten wir für das einer Drehung  $\varphi$  des Querschnitts entsprechende, denselben gegen die Gleichgewichtslage zurückführende Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{4dx}{\lambda^2} \pi^2 \cdot \frac{\varrho^4 \pi}{2} \cdot \varphi$$

und setzen wir hierin schliesslich  $\varphi = 1$ , so erhalten wir das Drehungsmoment des Querschnittes, wenn der Drehungsbogen desselben der Einheit gleich ist.

Um nun die gesuchte Beschleunigung  $k$  des Querschnitts zu erhalten, haben wir diesen Ausdruck durch das Trägheitsmoment des Querschnitts zu dividiren, durch die Masse, welche den Querschnitt in der Einheit des Abstandes von der Axe ersetzt, da uns das Drehungsmoment die in der Einheit der Entfernung von der Axe des Stabes angreifende Kraft liefert. Nennen wir die Dichtigkeit des Stabes, das heisst die Masse der Volumeneinheit,  $d$ , und die Dicke des Querschnittes, die wir dem Abstände zweier benachbarter Querschnitte gleich setzen können,  $dx$ , so erhalten wir nach §. 21 für dieses Trägheitsmoment

$$d \cdot \frac{\varrho^4 \cdot \pi}{2} \cdot dx.$$

Damit wird dann schliesslich

$$k = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2 \cdot d}$$

und die gesuchte Schwingungsdauer der stehenden oder fortgepflanzten Wellen

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \sqrt{2(1+\mu)} \cdot \lambda \cdot \sqrt{\frac{d}{E}},$$

ein Ausdruck, welcher sich von dem für die longitudinalen Schwingungen nur durch den Factor  $\sqrt{2(1+\mu)}$  unterscheidet, der somit zeigt, dass die Schwingungsdauer nur von der Beschaffenheit des Stabes, seinen beiden Elasticitätsconstanten und seiner Dichtigkeit, sowie von der Länge der Wellen abhängig ist.

Die Gesetze der drehenden Schwingungen cylindrischer Stäbe fallen daher vollständig mit denen der longitudinalen Schwingungen zusammen, so dass es überflüssig sein wird, dieselben im einzelnen zu entwickeln. Es wird genügen, die Resultate kurz anzudeuten. Ein an seinem einen Ende fester Stab kann danach als Ganzes schwingen, und ganz analog den Entwicklungen des §. 129 ist dann die Länge des Stabes gleich  $\frac{1}{4}\lambda$ , also  $\lambda = 4l$ , somit wird die Schwingungsdauer des Stabes

$$T = \sqrt{2(1+\mu)} \cdot 4l \cdot \sqrt{\frac{d}{E}},$$

die Schwingungszahl

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}},$$

und setzen wir

$$\frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}} = c,$$

da dieser Ausdruck nach dem Früheren und den vorigen Entwicklungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der drehenden Schwingungen bedeutet, so wird

$$N = \frac{c}{4l},$$

Analog den Entwicklungen des §. 130 kann ein solcher Stab ausser diesen noch eine Reihe von Schwingungszahlen erhalten, je nachdem er sich in zwei oder mehrere Unterabtheilungen zerlegt. Die Schwingungszahlen sind gegeben durch

$$N_n = (2n-1) \frac{c}{4l},$$

wenn man für  $n$  eine ganze Zahl setzt.

Ist der Stab an beiden Enden fest oder frei, so entsprechen die langsamsten Schwingungen denen, bei welchen der Stab gleich  $\frac{1}{2}\lambda$  ist, gleich der Länge einer stehenden Welle, die folgenden, bei denen er gleich  $\lambda$  oder zwei stehenden Wellen ist. Die Schwingungszahlen sind

$$N_n = n \cdot \frac{c}{2l},$$

worin  $n$  jede ganze Zahl sein kann.

Zwischen den gleichen Theilungen cylindrischer Stäbe entsprechenden Schwingungszahlen der longitudinalen und drehenden Schwingungen ergibt sich eine äusserst einfache Beziehung<sup>1)</sup>. Dividiren wir die einer gleichen Theilung entsprechende Anzahl longitudinaler Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}}$$

durch jene der drehenden Schwingungen, so wird

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{2(1 + \mu)}.$$

Eine Vergleichung der Schwingungszahlen kann also ebenfalls über den Werth von  $\mu$ , des Verhältnisses von Quercontraction zur Längendilatation Aufschluss geben. Nach den Versuchen von Chladni<sup>2)</sup> soll das Verhältniss der Schwingungszahlen wie 3 zu 2 sein, danach wäre  $\mu = 0,125$ ; nach Versuchen von Savart<sup>3)</sup> wäre  $\frac{N'}{N} = \frac{10}{6}$ , somit  $\mu = 0,39$ . Ausführlichere Versuche zur Bestimmung dieses Verhältnisses hat Wertheim ange stellt<sup>4)</sup>. Folgende kleine Tabelle enthält die Resultate der Versuche.

Stab von	Länge	Radius	Schwingungszahl		$\frac{N'}{N}$	$\mu$
			longit. $N'$	drehend. $N$		
Eisen . . . . .	2 <sup>m</sup> ,061	8 <sup>mm</sup> ,220	1255,6	766,5	1,637	0,339
Eisen . . . . .	2,005	5,501	1267,3	771,1	1,643	0,349
Gussstahl . . . .	2,000	5,055	1286,4	787,7	1,633	0,333
Messing . . . . .	2,000	5,031	864,5	531,1	1,628	0,325

Nahezu stimmen diese Werthe von  $\mu$  mit der Annahme von Wertheim, dass  $\mu = \frac{1}{3}$  sei, indess zeigt sich doch auch hier nicht volle Constanz übereinstimmend mit den früher von uns erhaltenen Resultaten.

### §. 137.

**Zusammengesetzte Schwingungen.** Wenn man einen Stab seiner Länge nach reibt, so sahen wir, dass er in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Diese longitudinalen Schwingungen treten indess, wie zuerst F. Savart<sup>5)</sup> gezeigt hat, fast niemals allein auf, sondern stets in Verbindung von transversalen Schwingungen. Bestreut man nämlich einen longitudinal schwingenden parallelepipedischen oder cylindrischen Stab mit Sand, so ordnet sich nach den Beobachtungen Savart's der Sand auf den Stäben in gewissen Linien, indem er nicht hüpfend wie bei der transversalen Schwin-

<sup>1)</sup> Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tom. VIII. p. 456.

<sup>2)</sup> Chladni, Akustik. p. 110.

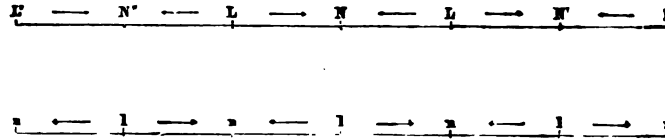
<sup>3)</sup> Savart in dem citirten Mémoire von Poisson. p. 456.

<sup>4)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. L. p. 262.

<sup>5)</sup> F. Savart, Annales de chim. et de phys. XIV. XXV. Dovo's Repertorium. Bd. VI.

gung der Stäbe, sondern der Oberfläche parallel sehr rasch verschoben wird. So bilden sich solche Knotenlinien schon auf Stäben, welche an beiden Enden frei ihre langsamsten longitudinalen Schwingungen vollführen, in grosser Zahl, während doch der Stab in Bezug auf die longitudinalen Schwingungen nur eine Knotenlinie in der Mitte besitzt. Der Sand verschiebt sich auf der Oberfläche,  $L' L''$  Fig. 236, wie die Pfeilstriche es angeben, von den Punkten  $L$  zu den Punkten  $N$ .

Fig. 236.



Ferner fand Savart, wenn man auf der oberen Seite des Stabes die Linien der Sandanhäufungen markirt, dann den Stab umkehrt, und ihn mit Sand bestreut, nachdem man ihn in Schwingung versetzt hat, dass dann die Linien der Sandanhäufung auf dieser Seite zwischen denen der obern Seite liegen, dass sie (Fig. 236) von den Punkten  $l$ , welche gerade den Punkten  $N$  der obern Seite gegenüber liegen, sich nach den Punkten  $n$  bewegen.

Auf Stäben mit quadratischem oder kreisförmigem Querschnitt liegen sie auf einer schraubenförmigen Linie, die sich entweder rechts oder links gewunden, oder von der Mitte aus nach der einen Seite rechts, nach der andern links gewunden um den Stab herumlegt.

Durch viele Versuche an Stäben, welche an beiden Enden frei waren, gelangte Savart zu folgenden die Zwischenräume zwischen den Sandanhäufungen bedingenden Gesetzen<sup>1)</sup>.

Die Zwischenräume der Sandanhäufungen sind

- 1) in Stäben von rechteckigem Querschnitte constant bei verschiedener Breite, wenn nur die Länge und Dicke der Stäbe ungeändert bleibt;
- 2) proportional der Quadratwurzel aus der Dicke bei gleicher Länge;
- 3) proportional der Quadratwurzel aus der Länge bei gleicher Dicke.

Schon aus diesen Gesetzen folgt, dass diese Sandanhäufungen von Transversalschwingungen des Stabes herrühren, welche die longitudinalen begleiten und ihnen isochron sind.

Denn nach dem ersten Gesetze sind sie von den Breiten der Stäbe unabhängig, wir wissen, dass das sowohl für die longitudinalen als die transversalen Schwingungen der Fall ist.

Nach dem zweiten Gesetze sind sie proportional den Quadratwurzeln aus den Dicken. Die longitudinalen Schwingungen sind von der Dicke der Stäbe unabhängig, die transversalen derselben umgekehrt proportional. Sollen daher die Schwingungen isochron sein, so müssen sich die transversalen stehenden Wellen bei dickern Stäben soviel verlängern, dass sie wieder in demselben Verhältnisse langsamer werden, als sie wegen der ge-

<sup>1)</sup> *F. Savart*, Annales de chim. et de phys. LXXV. Dove's Repertorium. Bd. VI. p. 60. (Dargestellt von *Scebeck*.)

änderten Dicke bei gleicher Länge rascher geworden wären. Die Schwingungsdauer der transversalen Schwingungen ist nun dem Quadrate der Längen proportional. Verhalten sich demnach die Längen der stehenden Wellen bei verschiedener Dicke der Stäbe wie die Quadratwurzeln aus den Dicken, so sind die Schwingungen isochron.

Ebenso stimmt das dritte Gesetz, denn da die Dauer einer longitudinalen Schwingung der Länge des Stabes, die einer transversalen Schwingung aber dem Quadrate derselben proportional ist, so müssen bei verschiedener Länge des Stabes die Längen der Transversalwellen proportional der Quadratwurzel dieser Länge geändert werden, um den longitudinalen Schwingungen isochron zu sein.

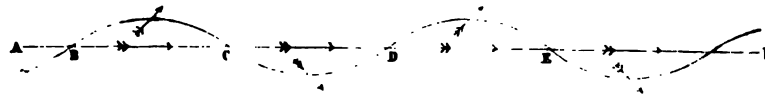
So findet auch Savart bei gespannten Streifen oder Saiten die Zwischenräume jener Knoten proportional der Länge und der Quadratwurzel aus der Spannung in Uebereinstimmung mit der Annahme, dass die Linien von einer isochronen Transversalbewegung herrühren.

Ferner auch, wenn man auf einem Stabe die Sandstellen bezeichnet und ihn sodann mit dem Bogen in gewöhnliche transversale Schwingungen versetzt, so dass die Länge der stehenden Welle gleich ist dem Abstände von einer Sandstelle der obern Seite bis zur nächsten Sandstelle der untern Fläche, so sind die Schwingungszahlen in der That dieselben, als die der longitudinalen Schwingungen; dasselbe ist der Fall bei gespannten Saiten oder Streifen. Die Erklärung, welche Savart von diesen Linien gibt, anzuführen, wollen wir hier unterlassen, da Seebeck die Unrichtigkeit derselben nachgewiesen hat und statt dessen die Seebeck'sche Erklärung folgen lassen<sup>1)</sup>.

In Folge der coexistirenden transversalen und longitudinalen Schwingungen der Theilchen der Stäbe beschreiben die Theilchen derselben die Resultante aus beiden Bewegungen, im allgemeinen elliptische Bahnen, §. 121. Ist nun die Resultante gegen die Sandkörner gerichtet, so stößt sie dieselben in ihrer Richtung, das heisst unter einem spitzen Winkel gegen die wagerechte Fläche des Stabes fort; ist sie aber während der nächsten Halbschwingung von den Sandkörnern weggerichtet, so lässt sie dieselben liegen. Daraus ergibt sich ganz einfach, dass der Sand auf die abwechselnden Knoten der transversalen Wellen getrieben werden müsse.

Es sei z. B.  $AF$  ein Stück des Stabes (Fig. 237), welches in longitudinaler Schwingung nach rechts gedacht werde, während die Ordinaten der

Fig. 237.

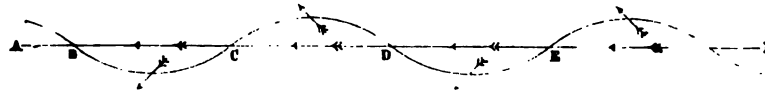


gezeichneten Wellenlinien die transversalen Geschwindigkeiten darstellen mögen, so dass also die zwischen  $B$  und  $C$  liegenden Punkte sich zugleich nach rechts und oben, die zwischen  $C$  und  $D$  liegenden nach rechts und unten bewegen u. s. f. Alsdann haben die aus beiden Bewegungen resultirenden Geschwindigkeiten zwischen  $B$  und  $C$  sowohl als in den andern

<sup>1)</sup> Seebeck in Dove, Repertorium. Bd. VIII. p. 53.

Strecken die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile und man sieht leicht, dass der über  $BC$  liegende Sand nach  $C$ , der über  $DE$  liegende nach  $E$  getrieben wird, während der über  $CD$  und  $EF$  liegende Sand jetzt liegen bleibt. In der folgenden Zeit gehen beide Bewegungen in die entgegengesetzten über (Fig. 238). Die longitudinale Bewegung ist auf der

Fig. 238.



ganzen Strecke  $AF$  von der Rechten zur Linken gerichtet, die transversale zwischen  $BC$  und  $DE$  nach unten, zwischen  $CD$  und  $EF$  nach oben. Die resultierende Bewegung hat die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile, und man sieht, wie jetzt der Sand von  $CD$  nach  $C$ , von  $EF$  nach  $E$  geschoben wird, während er jetzt zwischen  $BC$  und  $DE$  liegen bleibt. Daher wird sich der Sand in  $C$  und  $E$  ansammeln, dagegen die Stellen  $B, D, F$  leer werden, oder die alternirenden Schwingungsknoten der transversalen Schwingungen müssen mit Sand bedeckt werden.

Kehrt man den Stab um, so dass die vorhin untere Seite zur obern wird, so ergibt sich aus obiger Entwicklung unmittelbar, dass jetzt die vorher unbedeckten Knotenlinien bedeckte werden, und die vorhin bedeckten leer werden müssen, d. h. auf der untern Seite sammelt sich der Sand in  $B, D, F$ , und  $C$  und  $A$  werden leer.

Diese Erklärung hat Seebeck durch einen Versuch bestätigt. An einem circa  $1^m$  langen Spiegelglasstreifen entsprach die Dauer der langsamsten Longitudinalschwingungen den Transversalschwingungen, bei denen der Streifen 14 bis 15 Knoten erhielt, etwas näher den letztern als den erstern. Nachdem nun Seebeck die Sandanhäufungen auf dem longitudinal schwingenden Stabe bezeichnet hatte, versetzte er durch Streichen mit dem Bogen denselben in die Transversalschwingungen mit 15 Knoten, und fand so, dass die Sandanhäufungen bei den longitudinalen Schwingungen auf der einen Seite dem 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, auf der andern Seite dem 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15 Knoten der transversalen Schwingungen entsprachen.

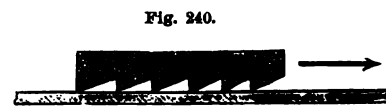
Die weniger hüpfende als gleitende Bewegung des Sandes zeigt an, dass die transversale Bewegung schwächer ist als die longitudinale, womit auch die geringere Energie der Bewegung und die Störung der Regelmäßigkeit der Sandanhäufungen in der Mitte, in der Nähe des Schwingungsknotens der longitudinalen Bewegung übereinstimmt.

Auf die mit den longitudinalen stets gleichzeitig auftretenden transversalen Schwingungen hat Kundt auch die zuerst von W. Weber<sup>1)</sup> beobachteten eigenthümlichen Bewegungen zurückgeführt, welche elastische Körper, wie Korkpfropfen, in longitudinal schwingenden Röhren annehmen. W. Weber nahm eine 1 bis 1,5 Meter lange cylindrische Glasröhre von 6 bis  $10^{mm}$  lichtigem Durchmesser und  $1^{mm}$  Glasdicke, verschloss das eine Ende mit einem Korkpfropfen, der genau an der Röhre abgeschnitten wurde, hielt die Röhre in verticaler Stellung, das verschlossene Ende abwärts ge-

<sup>1)</sup> W. Weber, Schweigger's Journal für Chemie und Physik. LIII. 308.

kehrt, locker in der Mitte und rieb die obere Hälfte mit einem nassen Tuche stark von oben nach unten; er sah dann den Stöpsel in die Höhe rücken, bis er in der Mitte der Röhre, in der sich der Schwingungsknoten befindet, stehen blieb.

Kundt<sup>1)</sup> zeigte nun zunächst, dass eine derartige Bewegung des Korks nur eintrat, wenn derselbe eine konische Gestalt hat, und dass dann der Pfropf stets in der Richtung von der breitem Basis zur spitzern Endfläche sich bewegt. Ein und derselbe Kork wandert in der Röhre vom Ende gegen die Mitte, wenn die breitere Basis nach aussen, von der Mitte gegen das Ende, wenn dieselbe gegen das Innere der Röhre hin liegt. Ebenso wie ein in der Röhre befindlicher Kork wandert ein auf die Röhre gesetzter Ring, der konisch durchbohrt ist, und zwar stets von der Spitze seiner konischen Oeffnung gegen die breitere Grundfläche hin. Genau cylindrische Pfropfen in der Röhre oder genau und glatt cylindrisch durchbohrte Ringe nehmen keine Bewegung an. Sehr viel energischer wird die Bewegung, wenn man dem Kork in der Röhre eine sägenförmige Gestalt gibt wie Fig. 239; und wenn man ein viereckiges Korkstück auf seiner untern Fläche sägenförmig zuschneidet wie Fig. 240, so kann man die Bewegung eben-



falls auf einem schwingenden Glasstreifen beobachten. Die Bewegung geschieht dann stets in der Richtung der Pfeile, also von den Berührungstellen der Sägezacken nach den hohlen Stellen der Säge. Bei dem Kork Fig. 240 konnte Kundt die Bewegung noch mit ungeminderter Energie beobachten, als er denselben mit Gewichten im Betrage von 200<sup>gr</sup> belastete.

Dass diese Bewegung Folge ist der die longitudinale begleitenden Transversalschwingung, zeigte Kundt bei der Anordnung (Fig. 240), indem die Bewegung sich ganz ebenso zeigte, als der Glasstreifen in transversale Schwingungen versetzt wurde. Der Glasstreifen wurde an zwei Punkten unterstützt, horizontal hingelegt und durch einen verticalen Schlag mit einem Hammer oder verticaleles Streichen mit einem Bogen in transversale Schwingungen versetzt. Der Kork wanderte dann von einem Ende des Streifens bis zum andern, über alle Knotenpunkte der transversalen Schwingungen fort. Da in diesem Falle die longitudinalen Schwingungen ausgeschlossen waren, so können nur die transversalen Schwingungen die Bewegung hervorgebracht haben, und da die Bewegung ganz dieselbe ist, wie bei den longitudinalen Schwingungen des Streifens, so darf man schliessen, dass auch dort die transversalen Schwingungen es sind, welche die Bewegung erzeugen.

Da die Form des Körpers für die Bewegung überhaupt und besonders für die Richtung derselben allein massgebend ist, so muss dieselbe in etwas anderer Weise zu Stande kommen als die Bewegung des Sandes in den Versuchen von Savart. Kundt denkt sich den Vorgang folgendermassen.

<sup>1)</sup> A. Kundt, Poggend., Ann. Bd. CXXVI.

Durch die nach aussen gerichtete transversale Bewegung wird der auf dem Streifen liegende elastische Körper etwas zusammengedrückt. Sobald der Stoss aufhört, suchen die zusammengedrückten Theilchen ihre Gleichgewichtslage wieder anzunehmen und stossen bei ihrer Ausdehnung auf die feste Unterlage. Da diese nicht nachgibt, so wird der Körper ein wenig in die Höhe geschleudert, und zwar nach einer Richtung, welche jener, nach welcher der Rückstoss erfolgt, entgegengesetzt ist. Diese Richtung hängt aber wesentlich ab von der Gestalt des gestossenen Körpers. Hat der Körper eine zur verticalen symmetrische Form, so werden die Zusammendrückungen der Theilchen um die verticale herum ganz gleichmässig sein und in Folge dessen der aus der Ausdehnung resultirende Rückstoss vertical sein, ein solcher Körper hüpfet also einfach in die Höhe und erhält keinen seitlichen Antrieb. Deshalb wird ein glattes Korkstück von parallelepipedischem Querschnitt auf einem Streifen oder ein glatter Cylinder in einer Röhre nicht verschoben. Ein konischer Kork dagegen oder ein wie Fig. 240 gearbeitetes Stück wird vermöge seiner Form schief zusammengedrückt und deshalb auch einen schiefen Rückstoss erfahren, und die vielfach immer in derselben Richtung wiederholten Stösse müssen ein solches Stück in horizontaler Richtung verschieben. Würde der Kork die schwingende Fläche nur in einer Linie berühren, so ginge die Bewegung nur bis zur nächsten Knotenlinie der Transversalschwingungen. Da er aber den Stab immer in einiger Ausdehnung berührt, so treffen ihn, auch wenn er sich über einer Knotenlinie befindet, die Stösse der benachbarten Wellen, und er bewegt sich über die Knotenlinien fort, bis zur longitudinalen Knotenlinie, wo die Theile des Stabes in grösserer Ausdehnung in Ruhe sind.

Nach dieser Erklärung der besprochenen Bewegung ist die Natur des bewegten Körpers bei der Bewegung von wesentlichem Einfluss; harte Körper dürfen nach derselben keine Bewegung annehmen; in der That zeigte Kundt, dass Stücke von Holz oder Metall sich nicht bewegen, dass nur solche Körper sich bewegen, welche wie Kork und Kautschuk leicht zusammendrückbar sind.

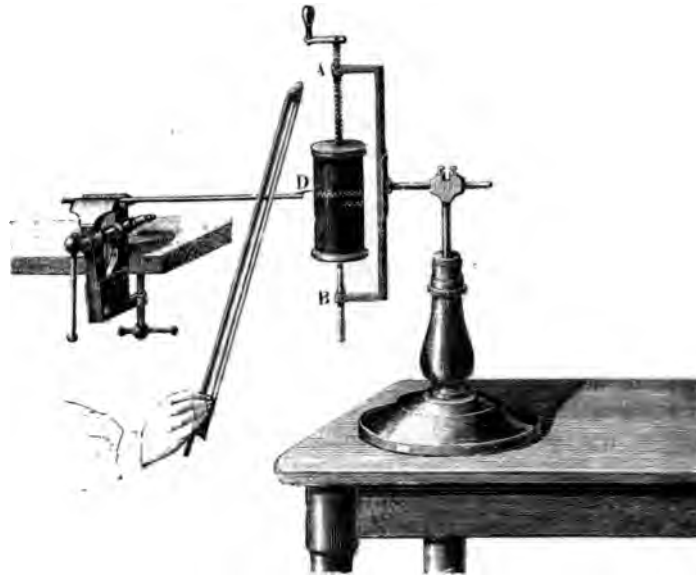
Ebenso wie die Longitudinalschwingungen immer von Transversalschwingungen begleitet sind, so treten auch in den meisten Fällen bei Transversalschwingungen einer bestimmten Periode solche anderer Perioden hinzu. Wirklich einfach periodische Schwingungen entstehen in den seltensten Fällen. So ist auch die Bewegung schwingender Saiten, wenn dieselbe durch Zupfen oder Streichen erregt wird, fast stets eine aus sehr verschiedenen Schwingungen zusammengesetzte. Um die Schwingungen der Saiten zu analysiren, bedient man sich entweder der graphischen Methode, welche zuerst von Savart und Duhamel<sup>1)</sup> angewandt ist, oder des Vibrationsmikroskopes von Lissajous. Erstere Methode beruht darauf, dass man den schwingenden Körper mit einem feinen Stift versieht und vor demselben einen Cylinder dreht, der mit Russ geschwärzt ist (Fig. 241). Die Spitze berührt den Cylinder nur ganz leicht. Die Axe des Cylinders ist mit einem Schraubengewinde versehen, so dass er beim Drehen sich gleichzeitig hebt oder senkt. Wird der Cylinder gedreht, wenn der schwingende Körper, etwa ein Stab, sich nicht bewegt, so zieht die Spitze auf dem Cylinder

<sup>1)</sup> Duhamel, L'Institut. 1840. p. 19 u. p. 41.



eine einfache Spirallinie, wenn aber der Stab schwingt, so erhält die Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des

Fig. 241.



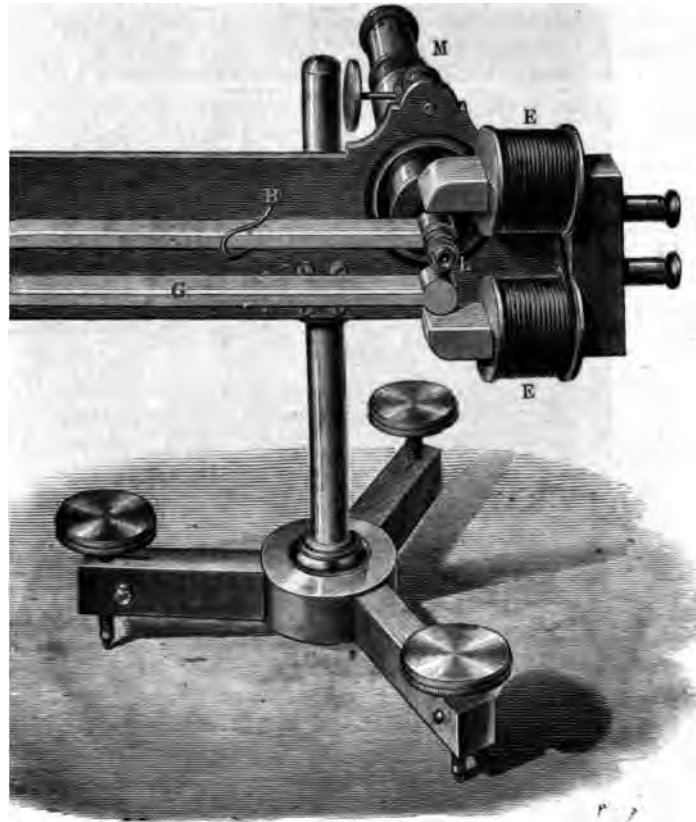
Stabes. Wenn der Stab in einer complicirten Form schwingt, wenn gleichzeitig Schwingungen verschiedener Periode vollführt werden, so prägen sich dieselben in der Welle vollständig aus, da die nach einander stattfindenden Bewegungen sich auf dem Cylinder neben einander darstellen. Man bekommt auf dem berussten Cylinder genau die Form, welche bei einer schwingenden Punktreihe die Reihe bis zu dem Punkte, bis zu welchem sich dieselbe fortgepflanzt hat, annimmt<sup>1)</sup>.

Das Vibrationsmikroskop benutzt zur Erkenntniss der Schwingungen ein anderes Mittel. Sieht man durch eine ruhende Lupe einen ruhenden glänzenden Punkt an, so erscheint der letztere in Ruhe; wird aber die Lupe rasch bewegt, so scheint sich der Punkt in einer der Bewegungsrichtung der Lupe parallelen Richtung zu bewegen, eine Erscheinung, die wir im zweiten Theile besprechen und erklären werden. Wird deshalb eine solche Lupe in eine einfach schwingende Bewegung versetzt, so scheint der Punkt in derselben Richtung hin und her zu schwingen und man sieht statt des Punktes eine glänzende Linie. Wird nun der Punkt gleichzeitig in einer zu der erstern senkrechten Richtung bewegt, so combinirt sich die wirkliche Bewegung mit der scheinbaren, und man sieht den Punkt die Kurve beschreiben, welche sich als die resultirende der beiden einzelnen Bewegungen nach den Sätzen des §. 122 ergibt.

<sup>1)</sup> R. König in Paris verfertigt unter dem Namen Phonautographie derartige Apparate, welche zur Abbildung der verschiedenen Schwingungen vorzüglich geeignet sind.

form, welche Helmholtz<sup>1)</sup> dem Vibrationsmikroskop gegeben, 242. Die zur Beobachtung dienende Lupe ist an dem Ende der Stimmgabel *G* befestigt; dieselbe besteht aus Sammellinsen, Objectivlinsen von Mikroskopen gebraucht werden. In der Oeffenmetallplatte, welche die Stimmgabel trägt, ist ein Rohr *M* angebracht, in welchem sich eine Ocularlinse befindet, und die so eingestellt man, während die Stimmgabel nicht schwingt, den auf dem Körper angebrachten glänzenden Punkt scharf sieht. Durch einen Elektromagneten *E*, der durch intermittirende elektrische Ströme perio-

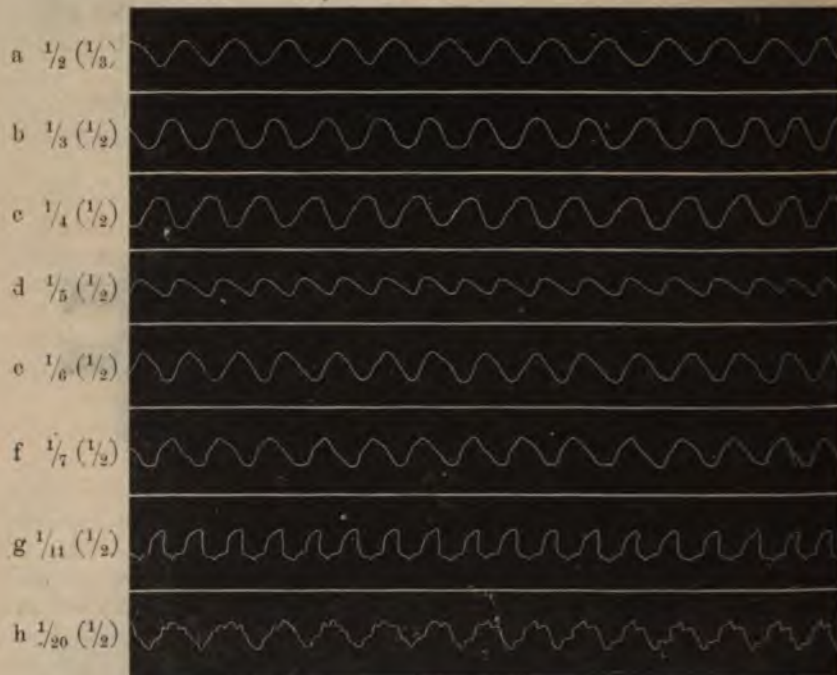
Fig. 242.



de wird, wird die Stimmgabel in verticale Schwingungen versetzt. Eine Saite, etwa eine Saite, wird dann vor dem Mikroskop so aufgestellt, dass sie in horizontaler Richtung schwingt und auf demselben gerade vor dem Mikroskop etwa durch Aufkleben eines Stärkekrörnchens ein glänzender Punkt.

Mit Hilfe des Phonautographen kann man sich nun leicht überzeugen, dass die Schwingungen einer Saite, wenn sie durch einen einfachen verticalen Schlag bewegt wird, sehr zusammengesetzter Natur sind. Dass stets ausser den langsamsten Schwingungen noch eine Reihe anderer auftreten, und zwar je nach der Stelle, wo geschlagen wird, verschiedene. Fig. 243 zeigt eine Anzahl von schwingenden Saiten beschriebener Curven, welche

Fig. 243.



ich meinem Freunde Quincke verdanke; dieselben entstehen, wenn die Saiten an der durch den ersten Bruch angegebenen Stelle, also  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  etc. von dem einen Ende geschlagen oder gezupft werden, und wenn der Schreibstift an der durch den eingeklammerten Bruch angedeuteten Stelle befestigt wird. Nur die erste Kurve (Fig. 243a), welche erhalten wird, wenn man die Saite in der Mitte zupft und den Schreibstift in  $\frac{1}{3}$  der Saitenlänge bringt, entspricht nahezu einfachen Schwingungen, alle übrigen sind mehr oder weniger zusammengesetzt; die Anzahl der gleichzeitigen Schwingungen, die in der Saite vorhanden sind, ist um so grösser, je näher dem Ende man die Saite zupft, wie eine Betrachtung der gezeichneten Kurven b, c etc. ergibt, bei denen allen der Schreibstift sich in der Mitte der Saite befand. Es ergibt sich das auch aus der Ueberlegung, dass bei dem Schlagen einer bestimmten Stelle alle die Schwingungen auftreten, welche an der geschlagenen Stelle keinen Knotenpunkt haben, und dass der Schreibstift von allen in der Saite vorhandenen Schwingungen nur diejenigen nicht aufzeichnet, welche an der Befestigungsstelle einen Knotenpunkt haben.

Das ist auch der Grund, weshalb die Kurve a fast nur eine einfache Sinuskurve ist; denn wird die Saite in der Mitte geschlagen, so kann sich keine Schwingung mit der Zahl  $2n$  bilden, wenn wir jene der langsamsten mit 1 bezeichnen. Da der Schreibstift nun in  $\frac{1}{3}$  angebracht ist, so kann derselbe keine der Schwingungen  $3n$  angeben, da alle diese an der Stelle einen Knotenpunkt haben. Nur die Schwingungen  $5n, 7n, 11n$  etc. können gezeichnet werden; dieselben sind indess so schwach, dass sie an der Kurve kaum mehr zu erkennen sind.

Die Kurve b enthält im wesentlichen dieselben Schwingungsarten; hier können die Schwingungen  $3n$  nicht auftreten, die  $2n$  nicht gezeichnet werden.

Eine weitere Besprechung der Kurven im einzelnen wird nicht erforderlich sein, da die oben aufgestellten Sätze leicht die in jeder vorhandenen Schwingungen erkennen lassen.

Helmholtz<sup>1)</sup> hat über die zusammengesetzten Schwingungen der Saiten, wenn sie geschlagen oder gezupft werden, ausführliche theoretische und experimentelle Untersuchungen angestellt. Als allgemeines Resultat hat sich dabei ergeben, dass die Intensität und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen ausser von der Stelle, wo die Saite angeschlagen ist, von der Art und Dauer des Anschlags, sowie von der Dicke, Steifigkeit und Elasticität der Saite abhängt. Wir werden auf diese Fragen im nächsten Abschnitte nochmals zurückkommen. (Man sehe §. 153.)

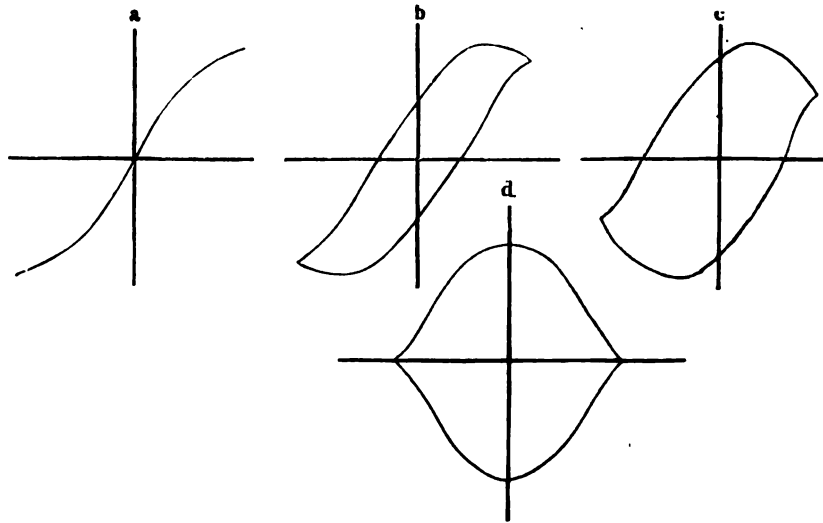
Sehr viel complicirter sind die Schwingungen einer Saite, wenn dieselbe nicht geschlagen oder gezupft, sondern mit einem Bogen gestrichen wird. Helmholtz<sup>2)</sup> hat das Vibrationsmikroskop vorzugsweise benutzt, um die Schwingungen einer Violine saite zu studiren, welche in gewöhnlicher Weise in der Nähe des Steges mit dem Bogen gestrichen wird. Die Schwingungsfigur, welche die Mitte der Saite dann zeigte, wenn die Saite einen reinen vollen Ton gab, ein Beweis, dass die Schwingungen ganz regelmässig waren, ist in Fig. 244 abgebildet, für den Fall, dass die Schwingungszahlen der Saite und der Gabel ganz genau gleich waren. Fig. 244a zeigt die Figur, wenn die Schwingungen ohne Phasendifferenz stattfanden, b wenn die vertical schwingende Gabel  $\frac{1}{12}$ , c wenn sie  $\frac{2}{12}$ , d wenn sie  $\frac{3}{12}$  Schwingung voraus ist. Dabei ist die Bewegung als ohne Phasendifferenz vorausgesetzt, wenn dieselbe gleichzeitig nach rechts und oben geht, und angenommen, dass beide Amplituden gleich sind. Die Figuren zeigen ohne Weiteres, dass die Schwingung der Saite keine einfache ist, denn dann müssten nach §. 121 die Fig. a eine gerade um  $45^\circ$  gegen die horizontale geneigte Linie, b und c Ellipsen, d ein Kreis sein. Welcher Art die Bewegung der Saite hiernach ist, das ergibt die Untersuchung, wie die Bewegung beschaffen sein muss, welche mit einer einfachen Schwingung zusammengesetzt, obige Schwingungsfiguren liefert. Dabei ergibt sich das überraschende Resultat, dass die Saite zwischen ihren äussersten Lagen

<sup>1)</sup> Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 128 ff. und p. 563. Man sehe auch Braun: Ueber den Einfluss von Steifigkeit, Befestigung und Amplitude auf die Schwingungen der Saiten. Poggend. Annalen Bd. CXLVII.

<sup>2)</sup> Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 140.

sich mit ganz constanter Geschwindigkeit hin und her bewegt. Dass in der That obige Schwingungsfiguren aus einer verticalen einfachen Schwingung

Fig. 244.



und einer horizontalen mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und her gehenden Bewegung sich ergeben, das zeigt die Construction Fig. 245 a, welche die Fig. 244 a und b, und Fig. 245 b, welche Fig. 244 c und d liefert. Die Construction ist der in §. 114 angewandten ganz analog. Um

Fig. 245 a.

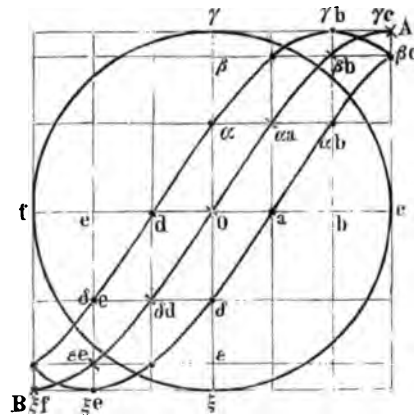
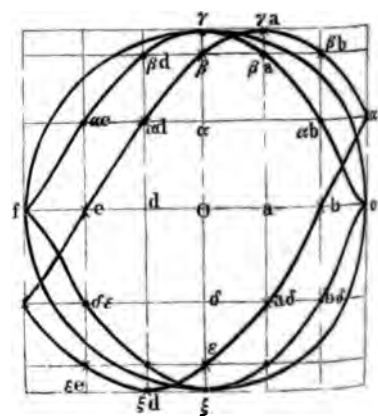


Fig. 245 b.



die einfachen Schwingungen in ihrer einzelnen Phase darzustellen, ist um den Mittelpunkt O mit der Amplitude der Schwingungen ein Kreis gezogen und dieser in zwölf gleiche Theile getheilt. Entsprechend der Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Man dann auf dem verticalen Durchmesser die Sinus dieser Bögen  $O\alpha$ ,  $O\beta$ .. von dem Vibrationsmikroskope in  $\frac{1}{12} T$ ,  $\frac{2}{12} T$ .. zurückgelegten Wege,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .. die Lage des einfach schwingenden Punktes in den angegebenen Momenten. Der horizontale Durchmesser ist in sechs gleiche Theile theilt, so dass  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Lage des mit gleichförmiger Bewegung horizontal schwingenden Punktes nach  $\frac{1}{12} T$ ,  $\frac{2}{12} T$ .. angibt. Bewegt sich der Punkt nach beiden Richtungen, so ist die Lage, wenn keine Phasendifferenz vorhanden ist, zu den Zeiten  $\frac{1}{12} T$ ,  $\frac{2}{12} T$ .. durch  $O$ ,  $\alpha a$ ,  $\beta b$  etc. gegeben, wenn die Phasendifferenz  $\frac{1}{12} T$  beträgt, durch  $\alpha$ ,  $\beta a$ ,  $\gamma b$ ,  $\beta c$  etc., er ist dann der verticalen jedesmal  $\frac{1}{12} T$  voraus. Die Verbindungslinien der so erhaltenen einzelnen Punkte geben dann die Bahn desselben, und man sieht, dass die so in Fig. 245 construirten Kurven mit den in Fig. 244 abgebildeten identisch sind.

Man kann auch direkt durch die graphische Methode nachweisen, dass die Mitte einer nahe ihrem Ende gestrichenen Saite mit gleichförmiger Geradigkeit hin und her geht. Die Schwingungskurven müssen dann die horizontale gleichgeneigte auf und ab steigende gerade Linien sein. Dass das, abgesehen von kleinen durch Unregelmässigkeiten der Bewegung herrührenden Kräuselungen, der Fall ist, zeigt Fig. 246, welche von der Mitte der Saite aufgezeichnete Figur gibt, als der Bogen  $\frac{1}{20}$

Fig. 246.



Saitenlänge von dem einen Ende aufgesetzt war. Auch diese Zeichnung dankte ich meinem Freunde Quincke. Auf die Kräuselungen werden wir später an anderer Stelle zurückkommen.

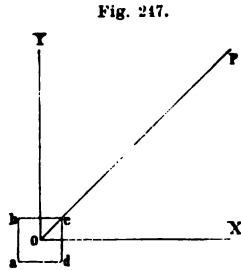
Welche Schwingungen alle in der Saite vorhanden sein müssen, und welches Verhältniss zwischen den einzelnen Amplituden vorhanden sein muss, (Helmholtz<sup>1)</sup>) untersucht. Wir begnügen uns, das Resultat der Untersuchung mitzutheilen, nach welchem gleichzeitig alle Schwingungen, die an der Saite möglich sind, auftreten. Ist die Amplitude der langsamsten Schwingungen 1, so ist die der folgenden, deren Zahl gleich 2 ist, gleich  $\frac{1}{4}$ , der dritten mit der Schwingungszahl 3 gleich  $\frac{1}{9}$ , allgemein die der  $n$ . der Schwingungszahl  $n$  gleich  $\frac{1}{n^2}$ . Das Zusammenwirken aller dieser Schwingungen erzeugt eben die gleichförmige Bewegung.

Die in §. 121 und 122 besprochenen Schwingungsformen, wenn zwei transversale zu einander senkrechte Bewegungen gleichzeitig auf einen Punkt wirken, kann man leicht an transversal schwingenden Stäben erhalten, an deren Ende man mit einem glänzenden Punkte versieht. Nimmt man einen Stab mit quadratischem Querschnitt, so kann man die Schwingungsfiguren §. 121 leicht willkürlich herstellen.

Sei  $ac$  (Fig. 247) der quadratische Querschnitt des Stabes; stossen wir in der Richtung  $OX$  an, so wird er in dieser Richtung schwingen, und

<sup>1)</sup> *Helmholtz*, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 142 p. 575.

der glänzende Punkt eine Linie parallel  $OX$  zeigen. Stossen wir ihn parallel  $OY$ , so erhalten wir die glänzende Linie parallel  $OY$ . Da die Dicke des Stabes  $ab = bc$  ist, so sind die Schwingungen nach beiden Richtungen isochron. Stossen wir nun das Stäbchen in irgend einer andern Richtung, so können wir die dann stattfindende Bewegung als zusammengesetzt ansehen aus einer parallel  $OX$  und einer parallel  $OY$ ; wir erhalten, da dann die beiden Bewegungen ohne Phasendifferenz sind, eine gerade Linie, welche unter irgend einem Winkel gegen  $OX$  geneigt ist.



Ertheilen wir dagegen dem Stäbchen eine Bewegung parallel der einen Richtung, etwa  $OY$ , und geben dann dem schwingenden Stabe einen Stoss nach  $OY$ , so treten Ellipsen auf, deren Gestalt von der Phasendifferenz abhängt, welche die beiden Bewegungen dann haben. Wir erhalten dann z. B. die Ellipse Fig. 208 und, von oben angesehen, eine Bewegung des Knöpfchens entgegengesetzt der des Zeigers einer Uhr, wenn wir das Stäbchen in der Richtung nach  $Y$  stossen, wenn es nach  $X$  hin  $\frac{3}{4}$  seines Weges zurückgelegt hat, einen Kreis, wenn wir es in dem Augenblicke, wo es den grössten Abstand nach  $X$  erreicht hat, ebenso stark nach  $Y$  stossen, wie vorher nach  $X$  hin. Stossen wir das Stäbchen nach  $Y$  hin, wenn es  $\frac{3}{4}$  seines Weges nach der entgegengesetzten Seite, nach  $X$  hin zurückgelegt hat, so erhalten wir die Ellipse (Fig. 210) und die Bewegung ist von der Linken zur Rechten im Sinne des Zeigers einer Uhr.

Wenn das Stäbchen nach der einen Richtung  $ab$  dicker ist als nach der andern, so geschehen die Schwingungen nach  $Y$  rascher als nach  $X$ . Ist der Unterschied nur sehr unbedeutend, so dass die Schwingung nach  $Y$  nur sehr wenig rascher ist, so hat das, wenn wir den Stab in einer gegen  $OX$  und  $OY$  geneigten Richtung stossen, denselben Erfolg, als wenn wir bei gleicher Oscillationsdauer nach und nach die verschiedenen Phasendifferenzen hervorbrächten; wir sehen deshalb nach und nach alle die Figuren entstehen, die wir §. 121 ableiteten. Bei der ersten Schwingung, wenn wir den Stab nach  $P$  hinstossen, sehen wir eine Linie parallel  $OP$ . Die Schwingung nach der positiven Seite der  $Y$  beginnt dann zum zweiten Mal etwas früher als die nach  $X$ , die gerade Linie geht daher in eine sehr flache Ellipse über, der Punkt dreht sich wie der Zeiger einer Uhr, die grosse Axe der Ellipse liegt im Quadranten  $YOX$ .

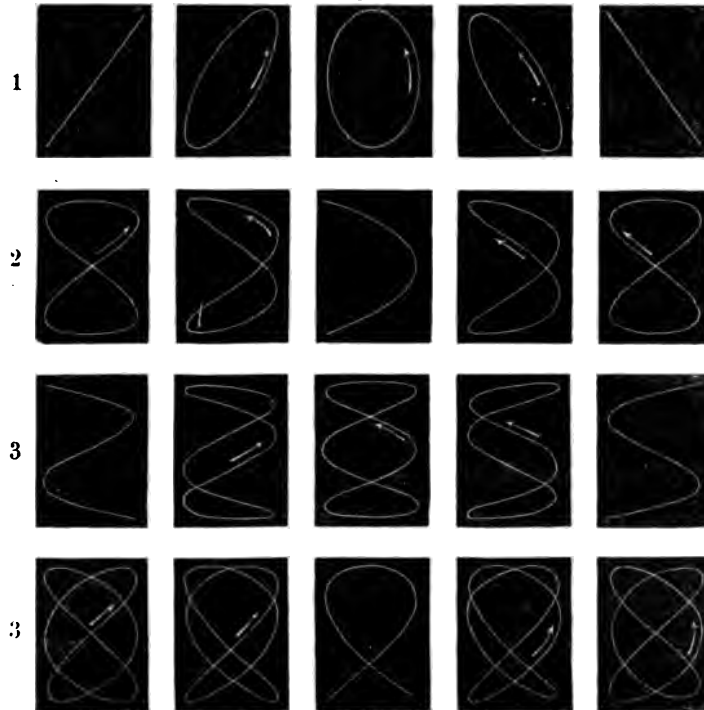
Bei den folgenden Schwingungen wird die Phasendifferenz immer grösser, da die Schwingung nach  $Y$  immer mehr voreilt, die Ellipse wird daher anfangs immer weniger flach, geht einen Augenblick in einen Kreis über und flacht sich dann wieder ab, aber so, dass jetzt die grosse Axe in dem Quadranten  $YO - X$  sich befindet. Bei weiterer Phasendifferenz wird die Ellipse wieder eine gerade Linie, die senkrecht zu  $OP$  ist u. s. f. es treten alle die Figuren nach einander auf, welche, wie wir sahen, bei Stäben mit quadratischem Querschnitt durch verschiedenes Stossen erzeugt werden können.

Ist der Unterschied der Dicke bedeutend, so erhält man die in §. 122 besprochenen Figuren; macht der Stab nach  $Y$  z. B. zwei Schwingungen,

1  $X$  eine, so erhält man je nach der Phasendifferenz die Kurven Fig. 214, ist das Verhältniss nicht genau 1 : 2, so bekommt man nach und nach dort besprochenen Kurven.

Das Kaleidophon oder phonische Kaleidoskop von Wheatstone<sup>1)</sup> zeigt 3 Kurven und ausser diesen manche aus andern Schwingungsverhältnissen zusammengesetzte; der Apparat besteht aus mehreren Stäbchen mit zenden Spitzen, die nach den beiden Richtungen ihres Querschnitts von chiedenen Dimensionen sind. Eine recht hübsche Verbesserung des atstone'schen ist das Universalkaleidophon, welches fast gleichzeitig Melde und von Lippich<sup>2)</sup> angegeben ist. Dasselbe besteht aus zwei

Fig. 248.



nden Metallstreifen; der eine grössere wird an einen Tisch angeklemt, der kleinere wird mit einer Klemme an das obere Ende des grössern efestigt, dass seine Ebene senkrecht ist zur Ebene des grössern. Am 1 Ende des kleinern ist ein hell polirtes Metallknöpfchen angebracht. kleinere Streifen ist in seiner Klemme verschiebbar, so dass man die e des frei schwingenden obern Endes und damit die Schwingungsdauer big variiren kann. Lässt man nun die untere Feder allein schwingen,

) *Wheatstone*, Quarterly Journal of science etc. new series Nr. 11. *Weber* hweigger-Seidel's Jahrbuch. Bd. 50.

) *Lippich*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. XLV. Poggend. Ann. XVII. *Melde*, Poggend. Ann. Bd. CXV.



so bewegt sich das Knöpfchen mit derselben nach der einen, bewegt sich die obere allein, so schwingt das Knöpfchen nach der zur ersteren senkrechten Richtung. Lässt man die untere Feder schwingen, und stösst gleichzeitig die obere, so erhält man die aus beiden Bewegungen resultirende Kurve, deren Form von dem Schwingungsverhältniss und der Phasendifferenz der Einzelbewegungen abhängt.

Schliesslich bietet das Vibrationsmikroskop ein vorzügliches Mittel zur Beobachtung der Schwingungskurven, indem man als schwingenden Körper eine Stimmgabel anwendet, deren Schwingungszahlen zu der des Mikroskops in irgend einem Verhältniss stehen. Diese Beobachtungsweise ist im Prinzip derjenigen von Lissajous<sup>1)</sup> gleich bei seiner grossen Untersuchung über die Schwingungen, auf welche wir im nächsten Abschnitt nochmals zurückkommen. In Fig. 248 sind eine Anzahl der von Lissajous gegebenen Kurven mitgetheilt; die Verhältnisse der componirenden Einzelschwingungen sind neben jeder Reihe angegeben. Sind die Schwingungsverhältnisse nicht ganz genau die angegebenen, so sieht man die in jeder Reihe dargestellten Kurven nach einander auftreten.

### Drittes Kapitel.

#### Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

##### §. 138.

**Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen.** Gase und Flüssigkeiten haben, wie wir sahen, keine selbständige Gestalt; in ihnen können daher in Folge der Elasticität keine schwingenden Bewegungen entstehen, welche mit einer Gestaltsänderung des Körpers verbunden sind, keine transversalen Schwingungen. Da aber die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben und, wie wir früher sahen, elastisch sind, und da ebenso die Luft in Folge des Druckes, unter dem sie an der Erdoberfläche steht, eine bestimmte Dichtigkeit und Elasticität hat, so können in beiden longitudinale Wellen bestehen und sich fortpflanzen.

Da das Wasser sowohl als die Luft, als Typus der tropfbar und elastisch flüssigen Körper, homogen und isotrop sind, so müssen nach dem Früheren die an einer Stelle im Innern derselben erregten Wellen sich in der Form von Kugeln ausbreiten.

Um von der Entstehung und Fortpflanzung dieser Wellen ein deutliches Bild zu erhalten, denken wir uns eine Kugel *C* (Fig. 249) im Innern einer Flüssigkeit in longitudinale Schwingungen versetzt, so dass also die Kugel sich in rascher Folge abwechselnd vergrössere und verkleinere. Eine Vergrösserung der Kugel wird nun alle die Kugel rings umgebenden Flüssigkeitstheile in der Richtung der Radien fortstossen, also diesen Theilchen eine rings von der Kugel fortgerichtete Bewegung ertheilen. In Folge dieser nach aussen gerichteten Bewegung tritt nun rings um die Kugel eine

<sup>1)</sup> *Lissajous*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. LI.

Verdichtung der Flüssigkeit ein, und in Folge dieser Verdichtung übt diese Flüssigkeitsschicht auf die folgenden einen stärkern Druck von innen nach aussen als umgekehrt die umgebende Flüssigkeit von aussen nach innen entgegenedrückt. Daraus ergibt sich dann, dass diese fortschreitende Bewegung sich rings um die Kugel immer weiter ausbreitet.

Hat die Kugel das Maximum ihrer Ausdehnung erreicht, so zieht sie sich wieder zusammen. In den durch diese Zusammenziehung entstehenden leeren Raum wird nun wegen des Druckes der Umgebung die Flüssigkeit von allen Seiten her sich hineinbegeben; die Flüssigkeitsschicht erhält also rings um die Kugel eine rückgängige Bewegung. Dadurch tritt nun rings um die Kugel eine Verdünnung ein, und wegen dieser Verdünnung erhalten auch die folgenden Schichten eine rückgängige Bewegung. Die Verdünnung und somit die rückgängige Bewegung pflanzt sich, auf die Verdichtung und fortschreitende Bewegung folgend, somit gerade so um die Kugel fort wie die letztere.

Durch die Vibrationen der Kugel gelangen also zunächst die Flüssigkeitstheile, welche unmittelbar an der Kugel anliegen, in eine schwingende Bewegung und diese schwingende Bewegung pflanzt sich auf jedem Radius der Kugel, die wir um den Mittelpunkt der Kugel  $C$  uns gelegt denken, fort wie die Schwingungen in den früher betrachteten Punktreihen, wie die longitudinalen Schwingungen in den Stäben der festen Körper.

Die longitudinalen Schwingungen in einer Flüssigkeit, sei sie tropfbar oder elastisch flüssig, sind also ein Fall der früher betrachteten Fortpflanzung einer Wellenbewegung in einem elastischen Punktsysteme. Bezeichnen wir in einer continuirlichen Schwingung die Kreise  $a$  und  $a'$  die Stellen, in denen die Punkte in den gleichen Phasen der Bewegung sind, wo sie z. B. ihre fortschreitende Bewegung, in  $a$  zum ersten Male, in  $a'$  zum zweiten Male beginnen, so ist der Abstand der beiden Kreise eine Wellenlänge, und auf der Strecke  $aa'$  sind alle Oscillationsphasen vertreten. Der Kreis  $b$  bezeichnet dann alle die Punkte rings um die Kugel, welche eine halbe Oscillation zurückgelegt haben und gerade im Begriffe sind, von der Gleichgewichtslage aus ihre rückschreitende Bewegung zu beginnen. Bezeichnen wir demnach auch hier jene Strecke der Radien, in denen sich die Flüssigkeitstheilchen auf der einen Seite ihrer Gleichgewichtslage befinden, als Wellenberg, jenen Theil, wo sie sich auf der andern befinden, als Wellental, so sind die Strecken  $ba$ ,  $b'a'$  Wellenberge, die Strecken  $ba'$ ,  $b'c$  Wellenthäler.

Da diese longitudinalen Wellen nur in der Elasticität der Flüssigkeiten ihren Grund haben und durch die zwischen den einzelnen Flüssigkeitstheilen thätige elastische Kraft fortgepflanzt werden, so können wir zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unmittelbar unsere früher erhaltene Gleichung anwenden:

Fig. 249.



$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin  $e$  die elastische Kraft und  $d$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit in der früher erwähnten Weise bedeuten.

Um demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten, haben wir nur diese beiden Grössen für diese speciellen Fälle zu bestimmen. Beginnen wir mit den tropfbaren Flüssigkeiten.

Die Grösse  $e$  bedeutet die elastische Kraft, mit der die in der Richtung der Radien genäherten Theile sich einander abstossen, oder die von einander entfernten Theile sich wiederum anziehen. Denken wir uns demnach eine Flüssigkeitssäule in einem Gefässe eingeschlossen, dessen Wände sich nicht ausdehnen können, und durch äussern Druck die Flüssigkeitstheilchen sich genähert, so wird die elastische Kraft in diesem Falle das Maass der Grösse  $e$  sein, da auch hier nur eine Ausdehnung und Zusammendrückung nach der Richtung der Radien stattfinden kann, weil jeder Flüssigkeitsfaden von der umgebenden Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Wir sahen nun früher, dass die Flüssigkeiten compressibel sind, und dass die Volumverminderung in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens ausgedrückt,  $v$ , proportional ist dem äussern Drucke. Nennen wir den Compressionscoefficienten, die Volumverminderung für die Zunahme des Druckes einer Atmosphäre  $\mu$ , so ist für  $P$  Atmosphären

$$v = \mu P.$$

Ist die Flüssigkeit in einem Gefässe mit unausdehnensamen Wänden eingeschlossen, so tritt die Volumverminderung nur als eine Verkürzung der Flüssigkeitssäule auf. War nun die ursprüngliche Länge der Flüssigkeitssäule  $l$  und ist ihre Länge nach der Compression gleich  $l'$ , so ist, wenn der Querschnitt der Flüssigkeitssäule gleich  $q$  ist,

$$v = \frac{lq - l'q}{lq} = \frac{l - l'}{l} = \delta,$$

wenn wir die Aenderung der Länge in Bruchtheilen derselben mit  $\delta$  bezeichnen.

Wir erhalten somit

$$\delta = \mu P.$$

Die elastische Kraft, mit der diese verkürzte Flüssigkeitssäule sich wieder um  $\delta$  zu verlängern sucht, ist nun der zusammendrückenden Kraft an Grösse genau gleich, oder

$$P = \frac{1}{\mu} \delta$$

gibt uns in Atmosphären den Druck an, mit welchem die verkürzte Säule sich wieder ausdehnen will. Wir sehen, diese Kraft ist der Verkürzung, welche die Säule erlitten hat, proportional, der Coefficient  $\frac{1}{\mu}$ , mit dem die Verkürzung zu multipliciren ist, um die Kraft zu erhalten, mit welcher die verkürzte Säule sich auszudehnen sucht, ist daher das Maass der elastischen Kraft der Flüssigkeit, oder

$$e = \frac{1}{\mu}$$

in Atmosphären. Um dieselbe in Gewichten auszudrücken, sei  $H$  die Höhe einer Quecksilbersäule, welche denselben Druck ausübt als die Atmosphäre, und  $\sigma$  das spezifische Gewicht des Quecksilbers. Dann ist in Gewichten

$$c = \frac{H \cdot g \cdot \sigma}{\mu}.$$

Wir haben demnach für  $c$  diesen Ausdruck einzusetzen.

Die Grösse  $d$  ist die Masse der Längeneinheit der schwingenden Flüssigkeitssäule, ist demnach die Dichtigkeit der Flüssigkeit  $s$ , so ist

$$d = \frac{s \cdot g}{g}$$

und somit, wenn wir beide Ausdrücke in unsere Gleichung für  $c$  einsetzen,

$$c = C \sqrt{\frac{g \cdot H \cdot \sigma}{\mu \cdot s}}.$$

Wir können auch diesem Ausdrucke gerade wie dem frühern für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in festen Körpern eine andere Form geben.

Beachten wir nämlich, dass wegen

$$\delta = \mu l'$$

$\mu$  die Verkürzung der Längeneinheit der Flüssigkeitssäule für den Druck einer Atmosphäre oder den Druck einer Quecksilbersäule  $H$  ist, und dass die Verkürzung dem äussern Drucke proportional ist, so folgt für die Verkürzung  $\delta'$  der Längeneinheit durch den Druck von 1 Meter Quecksilber

$$\delta' : \mu = 1 : H; \quad \delta' = \mu \cdot \frac{1}{H}$$

und ferner für die Verkürzung  $\delta''$  durch den Druck einer Säule derjenigen Flüssigkeit, in welcher die Wellenbewegung stattfindet,

$$\delta'' = \mu \cdot \frac{1}{H} \cdot \frac{s}{\sigma},$$

indem das Gewicht einer solchen Säule nur  $\frac{s}{\sigma}$  von dem des Quecksilbers ist.

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist demnach

$$\frac{H \cdot \sigma}{\mu \cdot s} = \frac{1}{\delta''},$$

oder

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{g}{\delta''}},$$

wir erhalten die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer longitudinalen Wellenbewegung in einer tropfbaren Flüssigkeit, wenn wir die Beschleunigung beim freien Fall durch die Verkürzung dividiren, welche eine Flüssigkeitssäule von der Länge eines Meter durch ihr eigenes Gewicht erfährt und die Quadratwurzel aus diesem Quotienten mit  $C$  multipliciren.

Die Constante  $C$  ist auch hier wieder gleich 1 zu setzen, sowohl nach den Entwicklungen des §. 120, da die Bewegung eine longitudinale, die

dort eingeführte Grösse  $a$  also gleich 1 ist<sup>1)</sup>, als nach den Versuchen von Colladon und Sturm<sup>2)</sup>, auf welche wir im nächsten Abschnitt zurückkommen werden.

So erhalten wir für Wasser:

$$\begin{aligned}\mu &= 0,0000499 \text{ bei } 4^{\circ}, \\ g &= 9,808, \\ H &= 0,760, \\ \sigma &= 13,598, \\ s &= 1\end{aligned}$$

$$c = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 0,76 \cdot 13,59 \cdot 10\,000\,000}{499}} = 1424,8.$$

Die Versuche von Colladon und Sturm ergaben

$$c = 1435.$$

Der Unterschied dieser beiden Zahlen erreicht nicht ein Procent.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in den elastischen Flüssigkeiten ist noch leichter zu erhalten. Wir haben auch hier wieder unter  $e$  die Kraft zu verstehen, mit der eine Säule des Gases, wenn sie verkürzt ist, sich auszudehnen sucht.

Die Gase haben überhaupt kein selbständiges Volum, dasselbe hängt nur ab von dem Drucke, unter welchem dieselben stehen; bei einer Vermehrung des Druckes ist die Verminderung des Volums einfach der Vermehrung des Druckes gleich. Da somit eine Vermehrung des Druckes auf das Doppelte auch eine Volumverminderung der Gase um die Hälfte, oder die Verkürzung einer in einem unausdehnbaren Cylinder enthaltenen Gassäule auf die Hälfte hervorbringt, so folgt, dass der Druck, unter welchem sich ein Gas befindet, das Maass seiner Elasticität ist. Wie wir bei der Lehre von den Gasen sahen, ist ja auch die Kraft, mit welcher die Gase sich auszudehnen suchen, immer gleich dem Drucke, unter welchem sie stehen. Befindet sich demnach das Gas unter dem Drucke von  $H$  Meter Quecksilber, so ist

$$e = H.$$

Setzen wir eine Luftsäule von dem Querschnitte 1 voraus, so ist dieser Druck, oder die ihm gleiche Elasticität des Gases in Gewichten

$$e = H\sigma.$$

Für  $d$  haben wir dann die Masse der Längeneinheit dieser Luftsäule einzusetzen. Ist  $s$  die Dichtigkeit der Luft, so ist

$$d = \frac{s}{g}.$$

Die Dichtigkeit  $s$  ist diejenige des Gases unter dem Drucke  $H$ . Nennen wir die Dichtigkeit desselben unter dem Drucke von 760<sup>mm</sup> Quecksilber, also dem Drucke einer Atmosphäre  $s'$ , so ist

<sup>1)</sup> Man sehe auch *Poisson*, *Traité de Mécanique*. Livre sixième. chap. II. §. 667.

<sup>2)</sup> *Colladon* und *Sturm*, *Annales de chim. et de phys.* Tome XXXVI. Poggendorff's Ann. Bd. XII.

$$s : s' = H : 0,76,$$

$$s = \frac{s' \cdot H}{0,76}.$$

Mit Beachtung dieser Beziehung wird der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung

$$c = C \sqrt{\frac{g \cdot H \sigma}{s}} = C \sqrt{\frac{g \cdot \sigma \cdot 0,76}{s}}.$$

Die Constante  $C$  muss wieder gleich 1 werden, da die Schwingungen longitudinale sind, somit (§. 120)  $a = 1$  ist.

Nennen wir auch hier wieder die Verkürzung, welche eine Luftsäule der Länge eines Meter durch ein Gewicht erfährt, welches dem ihrigen  $\delta$  ist,  $\delta$ , so ist, wie man ohne Weiteres sieht,

$$\delta = \frac{s}{H \sigma}$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Wir erhalten demnach ganz allgemein sowohl für feste, flüssige, als gasige Körper die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen der Quadratwurzel aus der Verkürzung, welche eine Säule des in Betracht genommenen Körpers durch ihr eigenes Gewicht erfährt, umgekehrt proportional.

Wir haben zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung in gasförmigen Körpern noch einige Bemerkungen zu machen.

Die Dichtigkeit  $s$  der Gase hängt nämlich nicht allein von dem Druck unter welchem das Gas steht, sondern auch von der Temperatur, und werden später sehen, dass bei gleichen Drucken  $H$  die Dichtigkeiten  $s$  und  $s'$  sich verhalten

$$s : s' = 1 + \alpha t' : 1 + \alpha t,$$

wo wir mit  $t$  und  $t'$  die den Dichtigkeiten  $s$  und  $s'$  entsprechenden Temperaturen bezeichnen und haben, wenn diese nach Graden der hundertigen Skala bestimmt sind,

$$\alpha = 0,003665$$

den Ausdehnungscoefficienten der Gase. Bezeichnet nun  $s_0$  die Dichtigkeit des Gases unter dem Drucke  $0^m,76$  bei der Temperatur  $0^0$ , der verdichtenden Eises, so wird allgemein die Dichtigkeit  $s$  bei der Temperatur  $t$  und demselben Drucke

$$s = \frac{s_0}{1 + \alpha t}.$$

Diesen Ausdruck müssen wir demnach in unsere Gleichung einsetzen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei jeder Temperatur zu erhalten.

Die Dichtigkeit  $s_0$  bei  $0^0$  und unter dem Drucke von  $0^m,76$  ist bei verschiedenen Gasen verschieden. Diejenige der atmosphärischen Luft ist

$$s_0 = 0,001293,$$

des Wassers gleich 1 gesetzt.

Noch eine andere Correction müssen wir an unserer Gleichung für  $c$  anbringen, wir müssen dieselbe noch mit einem constanten Coefficienten  $k$  multipliciren, welcher für atmosphärische Luft

$$k = \sqrt{1,40}$$

wird.

Die Bedeutung dieser Constanten wird in der Wärmelehre deutlich hervortreten; sie geht deshalb in unsere Gleichung ein, weil bei der durch die Wellenbewegung eintretenden Verdichtung und Verdünnung der Luft eine Aenderung ihres Wärmezustandes und somit der Elasticität eintritt. Bei der Verdichtung tritt nämlich eine Erwärmung der Gase ein, bei der Verdünnung an den verdünnten Stellen eine Abkühlung; die verdichteten Stellen erhalten daher eine stärkere Elasticität, sie treiben die Lufttheilchen stärker an, als sie es unter obiger Voraussetzung constanter, durch den Druck  $H$  gemessener Elasticität thun würden, und die bei der Verdünnung eintretende Abkühlung bewirkt an den verdünnten Stellen eine stärkere Abnahme der Elasticität, also ein rascheres Eindringen der umgebenden Luft in die verdünnten Räume; beide Wirkungen veranlassen also eine Verkürzung der Oscillationsdauer, bei ungeänderter Wellenlänge der Wellenbewegung also eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit und zwar so, als wenn die Elasticität im Verhältnisse von 1 : 1,40 grösser wäre<sup>1)</sup>.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung erhalten wir somit

$$c = \sqrt{9,808 \cdot \frac{13,59 \cdot 0,76}{0,001293} \cdot 1,40 (1 + at)},$$

wenn die Luft die Temperatur  $t$  besitzt, oder

$$c = 331^{\text{m},2} \cdot \sqrt{1 + at},$$

eine Zahl, welche mit der aus den Versuchen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles erhaltenen fast genau übereinstimmt.

### §. 139.

**Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindern.** Wenn man in ein cylindrisches Gefäss eine Flüssigkeit einschliesst und man erregt an einer Stelle des Flüssigkeitscylinders eine schwingende Bewegung, so pflanzt sich dieselbe durch die Säule fort, wird an den Enden reflectirt und es entstehen durch Interferenz der direkten und reflectirten Welle stehende Schwingungen. Da wir auf die Wellenbewegung dieser Art nach dem vorigen Paragraphen unmittelbar unsere frühere Theorie der longitudinalen Schwingungen anwenden können, so haben wir für die Schwingungsdauer dieser stehenden Wellen den Ausdruck

$$T = \frac{2L}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{d}{e}}$$

oder da nach dem Frithern  $a = 1$ ,

$$T = 2L \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2L}{c}$$

<sup>1)</sup> Man sehe im dritten Bande den Paragraphen: Specifische Wärme der Gase bei constantem Volumen.

und wir haben nur die Länge  $L$  der stehenden Welle zu bestimmen, in welcher die Flüssigkeitssäule schwingt.

Wir können nun auch hier die Fälle unterscheiden, wo die Flüssigkeitssäule an beiden Seiten frei ist, oder wo sie an einem Ende frei ist, am andern befestigt. Ersteres ist dann der Fall, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer heberförmigen an beiden Seiten offenen Glasröhre oder in einer in eine Flüssigkeitsmasse getauchten Glasröhre zum Schwingen bringen. Denn auch in dem letztern Falle ist die umgebende Flüssigkeit gewissermaassen weniger dicht als die in der Röhre eingeschlossene, da die Flüssigkeit ausserhalb der Röhre bei einer an dem Ende der Röhre ankommenden Verdichtung nach allen Seiten und deshalb leichter ausweichen kann, als die Flüssigkeit in der Röhre, welche sich nur der Längsrichtung der Röhre nach bewegen kann. In diesen beiden Fällen tritt demnach eine Reflexion ohne Wechsel des Vorzeichens, ohne Verlust einer halben Wellenlänge ein.

Der zweite Fall ist dann vorhanden, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer geraden unten geschlossenen Glasröhre zum Schwingen bringen, es tritt dann an der untern Grenze eine Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein; ein ankommender Wellenberg wird als Wellenthal reflectirt.

Die Oscillationsdauern und Schwingungszahlen solcher Flüssigkeitscylinder ergeben sich daher unmittelbar wie diejenigen longitudinal schwingender Stäbe, wenn wir dasselbe Verfahren anwenden wie §. 129. Für den an beiden Enden freien Flüssigkeitscylinder von der Länge  $l$  wird

$$T = \frac{2l}{c}.$$

Die Länge der stehenden Welle ist gleich der Länge des Flüssigkeitscylinders, und daraus

$$N = \frac{c}{2l}.$$

Für den zweiten Fall wird

$$T = \frac{4l}{c},$$

die stehende Welle hat die doppelte Länge des Flüssigkeitscylinders, die Schwingungsdauer ist die doppelte des vorigen Falles. Die Schwingungszahl ist die Hälfte

$$N = \frac{c}{4l},$$

Diese Zahlen entsprechen den langsamsten Schwingungen, welche die Flüssigkeitscylinder vollführen können. Auch hier können sich die Cylinder in schwingende Theile zerlegen, welche selbständig schwingen und wegen der geringeren Länge grössere Schwingungszahlen haben. Durch ein gleiches Verfahren, wie wir es im §. 130 anwandten, findet man, dass die möglichen Schwingungszahlen einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule sind

$$N = n \cdot \frac{c}{2l},$$



worin  $n$  jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann; und für die in einer geschlossenen Röhre enthaltene Flüssigkeitssäule

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l}.$$

Da die experimentelle Bestätigung dieser Gesetze nur durch die von den Schwingungen der Flüssigkeit erzeugten Töne gegeben werden kann, so werden wir die Versuche von Cagniard Latour und Wertheim erst im nächsten Abschnitte besprechen können.

Luftsäulen, welche in Röhren eingeschlossen sind, können ebenfalls durch Erregung einer vibrirenden Bewegung an ihrem einen Ende in stehende Schwingungen versetzt werden. Sind die Röhren an dem einen Ende geschlossen, so tritt dort Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein; sind sie offen, so tritt eine Reflexion an der umgebenden Luft ein ohne Verlust einer halben Wellenlänge, da die Lufttheilchen ausserhalb der Röhre nach allen Richtungen und somit freier beweglich sind als in der Röhre. Die an die Röhre angrenzende Luft ist somit gewissermassen weniger dicht als in der Röhre. Die sich ergebenden Schwingungsdauern und Schwingungszahlen sind daher in offenen Röhren von der Länge  $l$ , für die langsamsten Schwingungen

$$T = 2l \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2l}{c},$$

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{2l}$$

und die überhaupt möglichen Schwingungen

$$N = n \cdot \frac{c}{2l}.$$

Für an dem einen Ende geschlossene Röhren erhalten wir statt dessen

$$T = 4l \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{4l}{c},$$

$$N = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{4l}$$

und als mögliche Schwingungszahlen

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l}.$$

Wir werden diese Ausdrücke im nächsten Abschnitte bei Bestimmung der Töne von offenen und gedeckten Pfeifen benutzen und dort zugleich die experimentelle Bestätigung und eingehendere Behandlung dieser Sätze geben.

#### §. 140.

**Transversale Wellen in Flüssigkeiten.** Ausser den longitudinalen Schwingungen kann man den tropfbar flüssigen Körpern auch transversale Schwingungen ertheilen. Die in einem Gefässe eingeschlossene Flüssigkeit hat nämlich eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage, und die auf eine der Schwere unterworfenen Flüssigkeit wirkenden Kräfte veranlassen, dass die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene bildet. Wird nun das

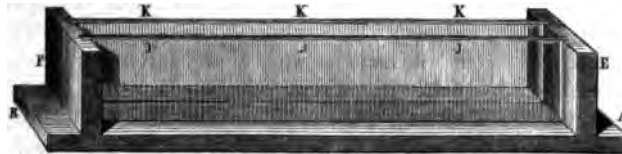
Gleichgewicht der Flüssigkeit an irgend einer Stelle gestört und dort eine Bewegung eingeleitet, so pflanzt sich die Gleichgewichtsstörung nach und nach auf andere Stellen der Flüssigkeit fort.

Wirft man einen Stein in eine ruhende Wassermasse, oder lässt man einen Tropfen auf die Oberfläche einer in einem weiten Gefässe befindlichen Flüssigkeit fallen, so sieht man bald die Flüssigkeit in einem Kreise rings um die getroffene Stelle wallförmig sich emporheben. Dieser Flüssigkeitswall breitet sich ringsum aus, an der Stelle aber, wo zuerst die Flüssigkeit über das Niveau sich erhob, zeigt sich dann eine Vertiefung der Flüssigkeit. Sowie nun die wallförmige Erhöhung sich rings durch die Flüssigkeit ausbreitet, so auch diese Vertiefung. Meist zeigt sich auf eine solche Störung des Gleichgewichts nicht nur eine solche Erhöhung und Vertiefung, sondern mehrere, die nach einander, abwechselnd eine Erhöhung und eine Vertiefung als ebenso viele Wellenberge und Wellenthäler, sich über der Flüssigkeitsoberfläche verbreiten.

Dass wir es hier mit einer wirklichen Wellenbewegung, das heisst mit einer hin und her gehenden Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, nicht mit einer fortschreitenden zu thun haben, ergibt sich aus den Versuchen der Gebrüder E. H. und W. Weber auf das entschiedenste<sup>1)</sup>.

Um die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen zu untersuchen, bedienen sich die beiden Weber der Wellenrinne. Dieselbe besteht (Fig. 250) aus einem circa 1,6 Meter langen geraden glatt gehobelten Brette aus Fichtenholz *AB*, auf dem in zwei tiefen Furchen circa 15 Millimeter von einander zwei dicke Glasscheiben fest eingefügt sind. Diese beiden Glasscheiben *JJJ*, *KKK* werden ausserdem durch die beiden senkrechten Bretter *E* und *F*, in welche sie auch eingefügt sind, festgehalten.

Fig. 250.



Die Befestigungen der Scheiben in den Fugen sind vollständig wasserdicht. Der schmale zwischen den beiden Glasscheiben und den Brettern eingeschlossene Raum von circa 1,5 Meter Länge, 15 Millimeter Breite im Lichten und 16 Centimeter Tiefe wird mit Wasser, Quecksilber, Milch etc., je nach Bedürfniss zu irgend einer Höhe angefüllt. Dabei werden dann die Glasscheiben, um ein Biegen oder Brechen derselben zu verhindern, durch mehrere feste hölzerne Gabeln oder Klammern zusammen geklammert<sup>2)</sup>.

Hat man die Wellenrinne bis zu irgend einer Höhe mit Wasser gefüllt, so hebt man an einem Ende derselben durch Aufsaugen in einer Glasröhre etwas Flüssigkeit in die Höhe und erzeugt dann, indem man die

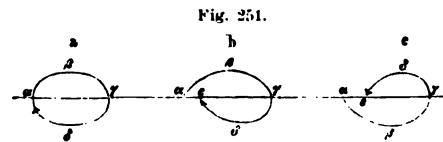
<sup>1)</sup> Wellenlehre, auf Experimente gegründet von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber. Leipzig 1825.

<sup>2)</sup> Ebendasselbst. p. 105.

Flüssigkeit wieder niederfallen lässt, eine Welle, welche durch die Rinne fortschreitet.

Man sieht dann zunächst einen senkrechten Durchschnitt der erregten Welle durch die Glaswände und kann so die Gestalt der Wellen auf die genaueste bestimmen. Man sieht aber auch zugleich, wenn man in die Rinne kleine Bernsteinstückchen, von gleichem specifischen Gewicht als das Wasser bringt, und dann durch die Glaswände hindurch gegen das Licht blickt, die Bewegung dieser festen Theilchen und kann ihre Bahnen bestimmen. Da nun diese Theilchen genau dieselbe Bewegung haben als die Wassertheilchen, deren Stelle sie vertreten, so kann man dadurch die Bewegung der Flüssigkeit genau bestimmen.

Aus ihren mannigfachen Versuchen ersahen die Gebrüder Weber nun, dass die Flüssigkeitstheilchen wirklich keine fortschreitende, sondern nur eine hin und her gehende Bewegung bei Erregung einer Welle annehmen, und zwar, wenn die auf einander folgenden Wellen eine gleiche oder fast gleiche Gestalt haben, dass dann die Theilchen in oder nahe der Oberfläche sich in geschlossenen, nahezu elliptischen Bahnen (Fig. 251 a) bewegen. Bewegt sich durch die Rinne eine Welle von *B* nach *A* fort und zwar ein Wellenberg voraus, so bewegen sich die Wassertheilchen, wenn der Berg vorüber zieht, in dem Bogen  $\alpha\beta\gamma$  aufwärts, vorwärts, abwärts, in derselben Richtung, in welcher der Berg vorübergeht. Folgt dann das Wellenthal, das ebenso tief ist, als der Wellenberg hoch war, so bewegt sich das



Theilchen weiter durch den Bogen  $\gamma\delta\alpha$  nach  $\alpha$  zurück. Der senkrechte Abstand des höchsten Punktes  $\beta$  dieser Bahn von dem Niveau  $\alpha\gamma$  ist gleich der Höhe des Wellenberges und der des tiefsten Punktes  $\delta$  von  $\alpha\gamma$  gleich der Tiefe des Wellenthales.

Geht das Wellenthal dem Wellenberge voran, so bewegt sich das Theilchen zunächst durch  $\gamma\delta$  nach  $\alpha$  und dann durch den Bogen  $\alpha\beta\gamma$  in seine frühere Lage  $\gamma$  zurück. Die fortschreitende Bewegung ist unter dem Wellenberge stets der Richtung gleich, in welcher die Welle fortschreitet, im Wellenthal dieser Richtung entgegengesetzt.

Die Schwingungsbahnen der Flüssigkeiten laufen aber nicht in sich selbst zurück, wenn die den Wellenbergen folgenden Thäler mit den erstern nicht von gleicher Grösse sind.

Ist das dem vorhergehenden Wellenberg folgende Wellenthal merklich kleiner, so wird die Bahn der Flüssigkeitstheilchen Fig. 251 b, und geht das Thal, aber in der Richtung von *A* nach *B*, voraus und folgt ihm ein kleiner Wellenberg, so wird die Bahn Fig. 251 c, in beiden Fällen gelangt das Flüssigkeitstheilchen nicht zu seiner ursprünglichen Ruhelage  $\alpha$  zurück.

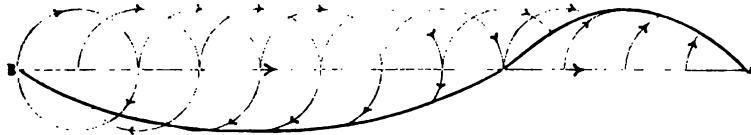
Die schwingende Bewegung der Flüssigkeitstheilchen beschränkt sich jedoch nicht auf die Theilchen in oder nahe der Oberfläche der Flüssigkeiten, sondern in sehr grossen Tiefen unter der Oberfläche zeigen die Flüssigkeitstheilchen noch eine schwingende Bewegung. Die Versuche der Gebrüder Weber ergaben, dass in einer Tiefe, welche 350mal die Höhe der Wellen, das heisst den Abstand des höchsten Punktes des Wellenberges von dem tiefsten des Wellenthales betrug, noch eine deutliche

schwingende Bewegung stattfand. Indess zeigte sich ein merklicher Unterschied in den Bahnen der Theilchen. Während nämlich die Theilchen ganz nahe unter der Oberfläche fast kreisförmige Bahnen besaßen, wurde die verticale Höhe der Ellipsen immer kleiner, je tiefer die Flüssigkeitstheilchen sich unter der Oberfläche befanden. In einer Tiefe, welche ungefähr das Hundertundzwanzigfache von der Höhe der Welle betrug, war die verticale Bewegung der Theilchen fast unmerklich und in noch grössern Tiefen bestand die Bewegung der Theilchen nur in einem Hin- und Hergehen in horizontaler Richtung.

So fanden die beiden Weber z. B. bei einer Welle, die eine Höhe von circa  $2^{\text{mm}}$  hatte, nahe unter der Oberfläche die verticale Höhe der Bahn gleich dieser Höhe, den horizontalen Durchmesser gleich 2,5 Millimeter, in einer Tiefe von 230 Millimeter betrug die verticale Höhe der Bahn nur 0,5 Millimeter, der horizontale Durchmesser 1 Millimeter und in grössern Tiefen war der verticale Durchmesser nicht mehr messbar, während der horizontale sich nur mehr unbedeutend verkleinerte und in der Nähe des Bodens sogar wieder etwas grösser wurde.

Aus dieser Art der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen ersehen wir, dass dieselben sich zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, auf und nieder und vor- und rückwärts. Daraus folgt dann, dass die Gestalt der Flüssigkeitswellen, die bereits §. 121 Fig. 211 betrachtete sein muss, oder dass, wenn das dem Wellenberg folgende Wellenthal eine Tiefe besitzt, welche der Höhe des Berges gleich ist, es stets etwas länger sein muss. Die Welle muss, wie man unmittelbar sieht, die Gestalt Fig. 252 haben. Die Welle schreitet in der Richtung der Pfeilstriche von *B* nach *A* fort,

Fig. 252.



und die einzelnen Flüssigkeitstheilchen durchlaufen hier die als kreisförmig vorausgesetzten Bahnen in dem von den Pfeilen angedeuteten Sinne, im Wellenberge in horizontaler Richtung vorwärts und im Wellenthale wieder zu ihrer Gleichgewichtslage zurück.

Dass die Wasserwellen wirklich diese Gestalt haben, sahen die Gebrüder Weber; sie sahen stets, dass bei gleicher Tiefe die Länge oder Breite des Wellenthales etwas grösser war als diejenige des Wellenberges.

## §. 141.

**Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen.** Die an der Oberfläche einer Flüssigkeit erregte, mit Gestaltsänderung verbundene schwingende Bewegung der Flüssigkeitstheilchen pflanzt sich nach dem Vorigen nach zwei Richtungen fort, einmal an der Oberfläche hin, indem sie derselben das wellenförmige Ansehen gibt, andererseits nach der Tiefe, indem wir sahen, dass die Theilchen auch in der Tiefe, wenn eine Welle

über der Flüssigkeit fortschreitet, eine schwingende Bewegung annehmen. Es fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit sich die Bewegung nach beiden Richtungen fortpflanzt.

Was nun zunächst die Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe der Flüssigkeit betrifft, so bemerkt man weder bei der Erregung noch beim horizontalen Fortgange der Wellen ein allmälliges Fortschreiten derselben, sondern die schwingende Bewegung scheint, wenigstens soweit es sich beurtheilen lässt, gleichzeitig in der Tiefe und an der Oberfläche zu geschehen. Die senkrecht oder fast senkrecht unter einander liegenden Flüssigkeitstheilchen scheinen alle gleichzeitig in der gleichen Oscillationsphase sich zu befinden.

Dieses Resultat ist nach dem ersten Paragraphen dieses Kapitels vorauszusehen; denn die Bewegung der Flüssigkeit in der Tiefe kann nur Folge des fortgepflanzten Stosses, der Dichtigkeitsänderung an der Oberfläche der Flüssigkeit, bei Erregung und Fortdauer der schwingenden Bewegung sein; nach unten hin pflanzt sich daher die Bewegung ebenso rasch fort wie die longitudinalen Wellen, welche wir in den vorigen Paragraphen betrachtet haben.

Anders jedoch mit der Fortpflanzung der Wellenbewegung an der Oberfläche der Flüssigkeit, diese ist viel langsamer, so dass man die einzelnen Wellen recht gut verfolgen kann.

Zunächst wiesen nun die Gebrüder Weber nach, dass auch bei diesen Wellen, gerade wie wir es im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten, die Bewegung sich genau um die Länge einer Welle fortpflanzt, während ein Flüssigkeitstheilchen eine Oscillation zurücklegt. Dann aber zeigten sie, dass bei diesen Flüssigkeitswellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für alle Wellen die gleiche sei und nicht von der Elasticität und Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, sondern dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von einer Menge von Umständen abhängt.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitswellen hängt wesentlich von der Höhe und Länge der Wellen ab; alle Umstände, welche daher Höhe und Länge der Welle ändern, ändern auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die Höhe und Länge, oder wie die Gebrüder Weber sie nennen, Breite der Wellen hängt nun zunächst ab von der Stärke des Stosses, der die Welle erregt, je stärker der Stoss ist, um so höher ist die Welle; da nun die höhere Welle sich rascher fortpflanzt, so nimmt die Geschwindigkeit der Welle mit der Stärke des sie erregenden Stosses zu.

Breitet sich eine Welle über einen immer grössern Raum aus, so nimmt dadurch die Höhe der Welle ab, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher kleiner, je weiter sich in diesem Falle die Welle von dem Punkte ihrer Erregung entfernt. Man kann dieses sehr leicht wahrnehmen, wenn man in einer ruhenden Wasserfläche durch Hineinwerfen eines Steines Wellen erzeugt. Es bilden sich dann eine Reihe von Wellen, die sich in immer grössern Kreisen ausbreiten. Erregt man dann durch Hineinwerfen eines Steines von gleicher Grösse wie vorhin zwischen den ausgedehnten Wellen ein neues Wellensystem, so sieht man, wie sich dort die Wellen sehr viel rascher ausbreiten.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung hängt ferner ab von der Tiefe der Flüssigkeit; je tiefer die Flüssigkeit ist, um so rascher pflanzt sich die

Der Grund dafür ist einmal in der Reibung und Adhäsion der Wellen an dem Boden zu suchen; dann aber auch darin, dass in der Nähe des Bodens, wie wir vorhin sahen, die Höhe der Bahnen der einzelnen Wellentheilchen und somit die Höhe der Welle abnimmt.

Geschwindigkeit der Wellen nimmt übrigens nicht in demselben Maße ab wie die Tiefe der Flüssigkeiten, sondern langsamer.

Versuche, mittels deren die beiden Weber diese Sätze ableiteten, sind angestellt, dass eine Glasröhre an dem einen Ende der Rinne eingetaucht war, dass ihre Mündung constant nahe 2<sup>mm</sup> unter dem Niveau der Flüssigkeit war. Durch Aufsaugen und nachheriges Fallenlassen der Röhre wurde die Welle erregt. Mittels einer Uhr, welche  $\frac{1}{60}$  Sekunde abzumessen die durch einen Druck mit dem Finger angehalten und losgelassen konnte, wurde dann die Zeit beobachtet, in welcher der Gipfel der Welle an dem andern Ende der Wellenrinne ankam. Die Uhr wurde zu bestimmten Momenten losgelassen, in welchem man die gehobene Flüssigkeit ablassen liess, und festgehalten, wenn der Gipfel der erregten Welle an dem andern Ende erreichte; die Quotienten aus der Länge der Rinne und den beobachteten Zeiten ergaben dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Ich theile hier die Resultate einiger Versuche mit, um zugleich eine Vorstellung von der Geschwindigkeit zu geben, mit welcher sich derartige Wellen fortpflanzen.

Wellen wurden bei gleicher Tiefe in verschiedenen Flüssigkeiten erregt. Es zeigte sich folgendes:

Flüssigkeit	Höhe der wellenerregenden Säule.	Geschwindigkeit der Wellen auf Wasser	Geschwindigkeit der Wellen auf Quecksilber
Wasser	5,4 Cent.	53,3 Cent.	51,3 Cent.
	8,1 „	54,4 „	54,0 „
	10,8 „	55,5 „	55,76 „
	16,2 „	56,9 „	60,3 „
	21,6 „	56,9 „	62,1 „
Alkohol	5,4 „	75,3 „	60,9 „
	8,1 „	75,9 „	64,3 „
	10,8 „	77,4 „	66,3 „
	16,2 „	77,0 „	65,5 „
	21,6 „	75,9 „	69,2 „
Branntwein	8,1 „	79,2 „	—
	16,2 „	100,1 „	—
	32,4 „	100,1 „	81,8 Cent.
	48,6 „	—	86,8 „
Quecksilber	32,4 „	135 „	135 „

Eine genauere Betrachtung dieser Zahlen scheint ferner hervorzugehen, dass die Geschwindigkeit der Wellen in Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte

sich mit merklich gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, wenn sie durch gleich hohe Säulen der Flüssigkeiten erregt sind. Strenge genommen ist das jedoch nur der Fall, wenn die Flüssigkeiten eine bedeutende Tiefe haben, bei geringerer Tiefe bewirkt der Einfluss des Bodens, die verschiedene Adhäsion der Flüssigkeiten an demselben und an den Wänden des Gefässes, dass die Geschwindigkeiten verschieden sind.

E. H. und W. Weber, Wellenlehre etc. p. 166 ff.

### §. 142.

**Die Ursachen der Flüssigkeitswellen.** Vergleichen wir diese Sätze über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der sichtbaren Flüssigkeitswellen mit den frühern Sätzen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Elasticität bedingten Wellen in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, so ergibt sich unmittelbar, dass wir die hier in Rede stehenden Wellen nicht als eine Aeusserung der Elasticität der Flüssigkeiten ansehen dürfen. Denn für die durch die elastische Kraft der Körper fortgepflanzten Wellen erhielten wir als Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = c \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit war proportional der Quadratwurzel aus der elastischen Kraft und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der betreffenden Substanz; sie war unabhängig von der Länge der Welle und unabhängig von ihrer Höhe, das heisst, der Grösse der Amplituden. Bei den Flüssigkeitswellen aber, die wir hier betrachten, findet gerade das Umgekehrte statt; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nahezu unabhängig von der Natur der Flüssigkeit, ändert sich aber wesentlich mit der Länge der Wellen und ihrer Höhe. Vergleichen wir ferner die Werthe, welche die beiden Weber für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in verschiedenen Fällen erhalten haben, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elasticität bestehenden Wellen, so weist auch dieses uns darauf hin, die Ursache dieser Wellen nicht in der Elasticität der Flüssigkeit zu suchen: denn für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elasticität erregten Wellen hatten wir für Wasser z. B. mehr als 1400 Meter, hier jedoch nur wenige Decimeter.

Noch ein anderer Umstand lässt es klar hervortreten, dass diese Art der Wellenbewegung nicht eine Folge der elastischen Kraft der Flüssigkeiten ist, nämlich die Höhe der Wellen. Wir sahen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit bereits eine deutliche Erhebung eintreten, wenn wir nur einen Tropfen der Flüssigkeit auf die Oberfläche fallen lassen. Bei der äusserst geringen Compressibilität der Flüssigkeiten kann aber die Zusammendrückung derselben in Folge einer so kleinen Kraft nur unmessbar klein sein und deshalb die auf die Zusammendrückung folgende Ausdehnung der Flüssigkeit und somit die Erhebung derselben über das Niveau auch nur unmessbar klein und nicht mit der beobachteten Höhe der Welle vergleichbar sein.

Wenn man sich nun daran erinnert, dass unter Einwirkung der Schwere die Flüssigkeit eine horizontale ebene Oberfläche haben muss, so ist es

leicht ersichtlich, dass die Schwere es ist, welche die Wellenbewegung veranlasst und fortpflanzt. Haben wir durch Aufsaugen an irgend einer Stelle eine Flüssigkeitssäule über das Niveau der umgebenden Flüssigkeit gehoben und lassen dann die gehobene Säule los, so muss nach den Gesetzen der Hydrostatik diese Flüssigkeit niedersinken; rings um diese Stelle muss aber, um das hydrostatische Gleichgewicht herzustellen, die Flüssigkeit steigen; und da sich die Ausgleichung nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit ausbreitet, wird sich die Flüssigkeit um jene Stelle in Form eines Walles über das Niveau der Flüssigkeit erheben. An der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst erhoben war und dann fallen gelassen wurde, hat dieselbe eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, sie wird daher nicht zum Niveau der Flüssigkeit zur Ruhe kommen, sondern da die Flüssigkeit, auf welche sie fällt, ringsum ausweichen kann, tiefer sinken.

Nach kurzer Zeit muss daher an der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst aufgesaugt war, ein Wellenthal entstehen, rings umher ein Wellenberg. Dieser Wellenberg wird dann aber ebenso durch die Schwere niedergezogen, bewirkt, dass rings um ihn nach aussen hin die Flüssigkeit steigt, dass weiter ein Wellenberg entsteht, während an der Stelle, wo er sich befand, ein Wellenthal sich bilden muss. Man sieht, wie in Folge einer solchen Gleichgewichtsstörung durch Wirkung der Schwere sich Wellenberg und Wellenthal durch die Flüssigkeit fortpflanzen muss.

Dass eben dasselbe der Fall sein muss, wenn der ursprüngliche Stoss der Erregungsstelle der Wellen nicht durch eine gehobene Flüssigkeitssäule, sondern auf irgend eine andere Weise, etwa durch einen auf die Flüssigkeit geworfenen Stein bewirkt wird, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Nach dem Gesagten ist es also der hydrostatische Druck der im Wellenberg gehobenen und durch die Schwere niedersinkenden Flüssigkeitssäule, welche die Wellenbewegung veranlasst; wird also der hydrostatische Druck an der Stelle der gehobenen Flüssigkeit auf andere Weise entnommen, so darf sich die Wellenbewegung nicht weiter fortpflanzen.

Die Gebrüder Weber haben durch einen sehr einfachen Versuch dieses nachgewiesen und somit die Richtigkeit der angegebenen Erklärung gezeigt. In einer regelmässig viereckigen, an beiden Enden geschlossenen Röhre aus Holz wurde die eine Seitenwand mehrfach durchbohrt, so dass auf der ganzen Länge der Röhre eine Anzahl Löcher in gerader Linie neben einander lagen. In ein, dem einen Ende der Röhre zunächst liegendes Loch wurde eine Glasröhre eingekittet und darauf die ganze Röhre vollständig mit Quecksilber gefüllt. Dann wurde in der Glasröhre eine Quecksilbersäule von circa 2,5 Centim. aufgesaugt und wieder soviel Quecksilber nachgefüllt, dass es aus allen Oeffnungen halbkugelförmig hervorsah. Nachdem es geschehen war, wurde die gehobene Quecksilbersäule fallen gelassen, und es zeigte sich dann, dass nur aus den der Röhre zunächst liegenden Oeffnungen Quecksilber ausfloss, in den entferntern Oeffnungen trat keine Bewegung des Quecksilbers ein. Da aus den der Röhre zunächst liegenden Oeffnungen, als dort der Wellenberg sich bildete, das Quecksilber ausfloss und der vergrösserte hydrostatische Druck durch das Abfliessen aufgehoben wurde, hörte die Ursache des Steigens für die entferntern auf, dort entstand kein Wellenberg mehr, es floss kein Quecksilber mehr aus.



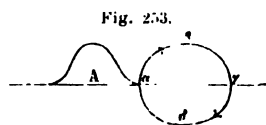
Als nun aber in alle Löcher Röhren gekittet wurden, das Abfließen also gehindert wurde, da sah man das successive Steigen des Quecksilber in allen Röhren, der Wellenberg pflanzte sich fort und das auf das Steigen des Quecksilbers in jeder Röhre folgende Sinken zeigte das dem Wellenberg folgende Wellenthal.

Dieser Versuch beweist aber auch zugleich die Richtigkeit unserer Annahme, dass die Ausgleichung des gestörten hydrostatischen Druckes sie nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit erstreckt, denn wäre das der Fall gewesen, so hätte zugleich aus allen Oeffnungen die gleiche Menge Quecksilber ausfließen müssen. Wägungen des ausgeflossenen Quecksilber zeigten aber, dass aus der der Glasröhre am nächsten liegenden Oeffnung am meisten Quecksilber ausfloss, aus den weitern um so weniger, je weiter sie von der Röhre entfernt waren. Die Röhre hatte neun Oeffnungen; allein in der Glasröhre das Quecksilber nahezu 10 Centimeter gehoben war floss Quecksilber aus den fünf ersten Oeffnungen; aus der ersten traten 72 Gramm, aus der zweiten 52, aus der dritten 26, aus der vierten 11 und aus der fünften Oeffnung circa 0,5 Gramm Quecksilber<sup>1)</sup>.

Dieser Versuch bestätigt also die Voraussetzungen der mitgetheilten Erklärung der Wasserwellen vollständig.

Zugleich aber stehen mit ihr alle vorhin beschriebenen Erscheinungen der Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen in den Wellen, wie auch die Bewegung der Wellen als solcher im Einklang.

Was zunächst die krummen Bahnen der Flüssigkeitstheilchen betrifft so muss anfangs, wenn in *A* (Fig. 253) die primär gehobene Flüssigkeitssäule niedersinkt, das Theilchen  $\alpha$  nach rechts



hin geschoben und gehoben werden, es bewegt sich nach  $\beta$  hin. Von der Spitze des Wellenberges sinkt es dann nach unten, behält aber seine fortschreitende Bewegung noch bei und bewegt sich nach  $\gamma$  hin. Dort angekommen sinkt es wegen der in dem Fallen erhaltenen Geschwindigkeit weiter nach unten und bewegt sich dabei, da links von  $\gamma$  jetzt das Wellenthal ist, also der Druck von rechts nach links hin grösser ist, nach links hin, um so, wenn das Thal ganz vorüberzieht, über  $\delta$  nach  $\alpha$ , oder wie in andern Fällen nicht ganz nach  $\alpha$  sich zurückzubewegen.

Nach dieser Erklärungsweise muss auch die Geschwindigkeit der Fortpflanzung mit der Höhe der Wellen zunehmen, denn da sich die Bewegung während einer Oscillation der Theilchen um eine Wellenlänge fortplant, muss bei gleicher Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so grösser sein, je rascher das Theilchen oscillirt. Je grösser nun die bewegende Kraft, der primäre Stoss ist, um so höher hebt sich das Theilchen und je höher es gehoben ist, um so mehr wird seine Bewegung durch die Schwere beschleunigt, die Oscillation und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher rascher. Bei den durch Elasticität erregten Wellen war das anders, da war die beschleunigende Kraft dem Abstände der bewegten Punkte von der Gleichgewichtslage proportional, bei grösserm Abstände

<sup>1)</sup> *E. H. Weber* und *W. Weber*, Wellenlehre etc. p. 280 ff.

wurde daher die Geschwindigkeit der Theilchen in demselben Verhältnisse mit dem Abstände grösser, die Oscillationsdauer war constant.

Wurde aber in ein und derselben Punktreihe die Oscillationsdauer geändert, so änderte sich ebenso auch die Wellenlänge, indem die beschleunigende Kraft zugleich dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional war und somit Wellenlänge und Oscillationsdauer in gleichem Verhältnisse wachsen und abnehmen.

Hier, wo die bewegende Kraft nicht von der gegenseitigen Einwirkung der Theilchen herrührt, besteht diese Beziehung nicht, deshalb hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sowohl von der Oscillationsdauer als auch der Wellenlänge ab.

Dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, folgt ebenso unmittelbar. Denn wenn wegen des grössern Gewichtes der gehobenen Theilchen in schwereren Flüssigkeiten die bewegende Kraft zunimmt, so nimmt in eben demselben Verhältniss bei gleicher Wellenhöhe die zu bewegende Masse zu, die Beschleunigung und somit die Geschwindigkeit der bewegten Theilchen bleibt daher ungeändert.

#### §. 143.

**Durchkreuzung und Reflexion der Wellen**<sup>1)</sup>. Die Erscheinungen der Interferenz, der Reflexion der Wellenbewegung und die Bildung stehender Wellen in Folge der fortgepflanzten und reflectirten Wellen lassen sich nach den Versuchen der beiden Weber mit den Flüssigkeitswellen sehr schön darstellen.

Die Erscheinungen der Interferenz zeigen sich, wenn man an beiden Enden der Wellenrinne eine Welle gleichzeitig erregt.

In der Mitte der Wellenrinne vereinigen sich beide vorausgehenden Wellenberge zu einem neuen, der nahezu die Summe der Höhen der einzelnen Wellenberge hat, wie es die Interferenztheorie verlangt, nach welcher die Bewegung in Folge des Zusammenwirkens mehrerer Theilbewegungen die Summe letzterer sein muss. Treffen demnach die Wellen ohne Phasendifferenz zusammen, so muss ein Berg von doppelter Höhe und ein Thal von doppelter Tiefe entstehen. Als Mittel von zwölf Messungen fanden die beiden Weber die Höhe des resultirenden Wellenberges gleich 1,8, wenn die Höhe der beiden componirenden Wellenberge gleich 1 war; der Unterschied der beobachteten Höhe von der theoretischen ist so klein, dass dieser Versuch als eine Bestätigung des Interferenzgesetzes, wenn es dessen noch bedürfte, angesehen werden könnte.

Gehen ein Wellenberg und ein Wellenthal durch einander hindurch, so ist die Höhe des Berges oder die Tiefe des Thales gleich der Differenz beider, ist der Berg ebenso hoch als das Thal tief ist, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit eben. Dies zeigt sich jedesmal, wie wir sofort sehen werden, bei der Reflexion der Wellen.

Nach der Durchkreuzung bewegt sich jede Welle ganz ungestört weiter, Wellenberge und Wellenthäler sind in der Lage zu einander, als hätte in jedem Wellenzuge gar keine Störung stattgefunden. Es ist diese Beobach-

<sup>1)</sup> E. H. und W. Weber, Wellenlehre etc. p. 212 ff.

tung ein Beweis für die Richtigkeit des zweiten Theiles des Principes, da wir der Lehre von den Interferenzen zum Grunde legten, des Satzes, dass wenn von der Interferenzstelle aus sich die Bewegung Punkten mittheilt, welche nur durch einen der Wellenzüge eine Bewegung annehmen, die Bewegung dieser Punkte gerade so geschieht, als hätte keine Interferenz stattgefunden.

Die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen an der Interferenzstelle ist diejenige, welche das Interferenzgesetz verlangt. Schreiten die beider Wellen nach entgegengesetzten Richtungen fort, so ist die horizontale Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, wenn die Wellen ohne Phasendifferenz zusammentreffen, der Richtung nach gerade entgegengesetzt, die verticale jedoch gleich gerichtet. Die horizontale Bewegung muss sich somit aufheben, die verticale summiren.

Das wurde von den beiden Weber durch die Beobachtung bestätigt. Es ergab sich, wenn man senkrecht unter der Stelle beobachtete, wo der Gipfel des resultirenden Berges lag, wo also die Bewegungen genau ohne Phasendifferenz zusammentrafen, dass dort die Theilchen in genau senkrechter Richtung sich auf und ab bewegten.

Wenn die Wellen nicht genau ohne Phasendifferenz zusammentreffen, so hebt sich die horizontale Bewegung nicht ganz auf; Weber's sahen auch, wie seitwärts von den eben erwähnten Stellen die Bahnen der Theilchen nicht senkrecht waren, sondern gegen die Verticale geneigt und zwar um so mehr, je weiter man sich von der Stelle der vollkommenen Durchkreuzung entfernte.

Wenn auch die Wellen in sofern sich ungehindert durchkreuzen, dass die Bewegung der Flüssigkeit in jedem Wellenzuge dieselbe bleibt, als habe keine Durchkreuzung statt gefunden, so findet doch bei der Durchkreuzung der Wellen ein kleiner Zeitverlust statt. Die Versuche der beiden Weber ergaben, dass, während eine Welle ihre Wellenrinne in 2,283 Sekunden durchlief, wenn sie sich nicht mit einer andern kreuzte, bei der Kreuzung zweier Wellen eine Welle von genau gleicher Grösse als die vorige zum Durchlaufen derselben Strecke die Zeit von 2,4 Sekunden brauchte.

Diese Verzögerung denken sich die beiden Physiker folgendermassen. Bei dem ungehinderten Fortschreiten der Wellen, wo sich die Theilchen in ihren kreisförmigen oder elliptischen Bahnen bewegen, bleiben die Theilchen immer in ihrer beschleunigten Bewegung, bei der Durchkreuzung der Wellen dagegen, wo sich einmal die horizontalen Geschwindigkeiten ganz aufheben und die Theilchen sich nur vertical auf und ab bewegen, tritt ein Zeitpunkt ein, wo die Bewegung des Theilchens sich umkehrt, wo also seine Geschwindigkeit ganz und gar gleich Null ist. Von da ab erhält erst das Theilchen durch Untersinken wieder eine beschleunigte Bewegung. Daraus scheint nun zu folgen, dass bei einer Durchkreuzung zweier gleich grosser Wellen so viel Zeit verloren gehe, als der Verlust der beschleunigten Bewegung während der Vereinigung der Wellen herbeiführt. Nach der Durchkreuzung erhalten dann die Theilchen der Welle ihre vorige Beschleunigung und dadurch ihre vorige Bewegung.

Die Erscheinungen der Reflexion der Wellen treten am einfachsten auf, wenn eine Welle senkrecht gegen eine feste Wand anprallt. Da die Flüssigkeit an der Wand vollkommen frei beweglich ist, so muss die Reflexion der Wellen an der Wand so erfolgen, wie die Reflexion der Wellen

an der Grenze zweier Punktsysteme, von denen das zweite weniger dicht ist als das erste, das heisst ein ankommender Wellenberg muss als Wellenberg und ein ankommendes Wellenthal muss als Wellenthal reflectirt werden. Die Erscheinungen an der Wand müssen daher sich folgendermassen darstellen.

Nach Verlauf von  $\frac{1}{4}$  Oscillationsdauer muss unmittelbar an der Wand ein halber Wellenberg sein, dessen Mitte an der Wand liegt, dessen Höhe nahezu die doppelte des einfachen ankommenden Berges ist, da er aus der ersten Hälfte des reflectirten und der zweiten Hälfte des ankommenden Wellenberges besteht. Nach Verlauf eines weitem Viertels der Oscillationsdauer ist das auf den Wellenberg folgende Wellenthal bis zur Wand fortgeschritten; zugleich aber ist der erste Wellenberg ganz reflectirt, und der reflectirte Wellenberg erstreckt sich bis eine halbe Wellenlänge von der Wand, gerade so weit, als sich das dem Berge folgende Thal erstreckt. Die Bewegung an der Wand muss daher aufgehoben werden und die Wasseroberfläche an der Wand bis zur Länge einer halben Welle eben sein.

In dem folgenden Viertel der Oscillationsdauer pflanzt sich der reflectirte Wellenberg um eine viertel Wellenlänge nach rückwärts fort, das ankommene Wellenthal ebenso viel vorwärts, so dass also die tiefste Stelle des Wellenthales sich gerade an der Wand befindet. In dem Augenblicke aber, wo das ankommende Wellenthal die Wand traf, pflanzte sich auch ein reflectirtes Wellenthal fort, in dem betrachteten Augenblicke befindet sich also an der Wand die zweite Hälfte des ankommenden und die erste Hälfte des reflectirten Wellenthales, es muss dort ein halbes Wellenthal von nahezu doppelter Tiefe des ankommenden Wellenthales sein, dessen tiefste Stelle sich gerade an der Wand befindet.

Endlich nach Verlauf des letzten Viertels der Oscillationsdauer ist auch das Wellenthal ganz reflectirt, der Wellenberg hat sich um eine halbe Wellenlänge von der Wand entfernt; die ganze Welle ist reflectirt und bewegt sich von da an, der Wellenberg voraus, das Wellenthal folgend, in der Flüssigkeit zurück.

Wellenberg und Wellenthal haben also ihre Lage gegen die feste Wand vertauscht, vorher war der Berg, jetzt ist das Thal der Wand am nächsten; Wellenberg und Wellenthal gehen durch einander hindurch.

Diese aus dem Früheren abgeleitete Darstellung des Reflexionsvorganges bestätigt sich auf das vollständigste durch die Anschauung bei den Versuchen in der Wellenrinne, und die Messungen über die Höhe des Berges und die Tiefe des Thales an der Wand in dem ersten und dritten der von uns betrachteten Zeittheile ergaben die Höhe, wie sie die Theorie verlangt. Bei einer Höhe der ankommenden Welle von 6,2 Millimeter war die Höhe des Berges in dem ersten der betrachteten Zeittheile gleich 10,35 Millimeter, also mehr wie  $\frac{5}{3}$  der ankommenden Welle.

Die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen an der festen Wand muss mit derjenigen übereinstimmen, welche die Flüssigkeitstheilchen haben, wenn die Wellen sich durchkreuzen; auch dieses haben die Versuche der Gebrüder Weber gezeigt.

Wenn eine Welle nicht senkrecht gegen eine feste Wand ankommt, so muss sie nach §. 125 so zurückgeworfen werden, dass der Wellenstrahl der zurückgeworfenen Welle mit dem Einfallslothe denselben Winkel bildet wie

der Strahl der einfallenden Welle. Auch dieses haben die Versuche bestätigt. Es folgt nämlich aus dem Satze, wie wir bereits §. 125 erwähnten, dass eine zirkelförmige Welle, welche im Mittelpunkte eines kreisförmigen Gefässes erregt ist, wenn sie an der kreisförmigen Wand anprallt, sich nach der Reflexion als kreisförmige Welle mit immer kleinerem Radius wieder zur Mitte des Gefässes fortpflanzen muss. Der Versuch zeigt dieses deutlich, wenn man z. B. einen Teller mit Quecksilber füllt und nun aus einem mit einem kleinen Loche versehenen Papiertrichter auf die Mitte des Tellers Quecksilber tropfen lässt.

Lässt man auf diese Weise in den einen Brennpunkt eines mit Quecksilber gefüllten elliptischen Gefässes Quecksilber tropfen, so müssen die sich von diesem Brennpunkte aus kreisförmig fortpflanzenden Wellen von der Wand so reflectirt werden, dass sie als kreisförmige Wellen in dem andern Brennpunkte der Ellipse wieder zusammenlaufen, da die Radien Vektoren mit dem Einfallslothe, der Normale an den verschiedenen Stellen, gleiche Winkel bilden. In dem zweiten Brennpunkte geben dann die vereinigten Wellen zu einer kegelförmigen Erhöhung Veranlassung, die durch ihr Niedersinken ein neues zurückkehrendes Wellensystem gibt, welches sich ebenso in dem ersten Brennpunkte wieder vereinigt, dort wiederum zu einem Wellensysteme Veranlassung wird u. s. f. Man sieht dieses vielfache Hin- und Herlaufen sehr leicht in der schönen gekräuselten Oberfläche, welche die Flüssigkeit bei einem solchen Versuche zeigt.

Wenn man in der Wellenrinne nach und nach mehrere Wellen erzeugt, deren Länge gleich ist der Länge der Rinne oder einem aliquoten Theile derselben, so müssen durch die Interferenz der von der Erregungsstelle fortschreitenden und der von der festen Wand reflectirten Wellen sich stehende Wellen bilden, deren Schwingungsknoten gerade so liegen müssen, wie die Schwingungsknoten in einem an beiden Enden freien longitudinal schwingenden Stabe. Wenn man demnach Wellen erregt, welche genau die doppelte Länge der Wellenrinne besitzen, so geht durch die Mitte derselben immer nach der einen Seite ein Wellenberg, nach der andern ein Wellenthal, in der Mitte muss sich daher ein Schwingungsknoten bilden und jede Hälfte der Rinne schwingt als eine halbe stehende Welle hin und her.

Ist die Länge der erregten Wellen gleich der Länge der Wellenrinne, so sieht man zwei Schwingungsknoten entstehen, beide im Abstände von  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge von den Wänden der Rinne und im Abstand einer halben Wellenlänge von einander. Jeder der drei Theile, in welche dadurch die Flüssigkeit der Länge nach zerfällt, schwingt für sich als stehende Welle von der Länge der halben Wellenrinne. An den Wänden befinden sich die Mitten der beiden äussersten Wellen, die Schwingungsmaxima.

Auf diese Weise kann man leicht, wie die Gebrüder Weber zeigten, 3, 4 und mehr Schwingungsknoten und somit eine leicht sichtbare experimentelle Bestätigung der früher vorgetragenen Sätze über die Bildung der stehenden Wellen durch Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortgeplanter Wellensysteme erhalten.

Vierter Abschnitt.  
V o m S c h a l l e.

Erstes Kapitel.  
Ueber die Erregung des Schalles.

§. 144.

**Von der Ursache des Schalles.** Wenn man eine schwachgespannte Saite in Schwingungen versetzt, so lassen sich die Schwingungen derselben mit den Augen wahrnehmen, man sieht die Saite in ihren verschiedenen Lagen nach einander. Wird die Spannung jedoch mehr und mehr verstärkt, so werden die Schwingungen bald so rasch, dass man die Saite in den verschiedenen Lagen nicht mehr unterscheiden kann, man sieht an der Stelle, wo sie schwingt, nur mehr eine halbdurchsichtige Fläche. Verstärkt man die Spannung der Saite noch mehr, so ist die Bewegung derselben kaum mehr sichtbar, statt dessen wird sie uns aber in einer andern Weise wahrnehmbar, wir hören sie, wir erhalten einen von der schwingenden Saite ausgehenden Eindruck auf unser Ohr. Den Eindruck, welchen unser Ohr erhält, nennen wir Schall; es ist im Folgenden unsere Aufgabe, diese, die schwingende Bewegung begleitende Erscheinung zu untersuchen.

Der Schall entsteht nur durch eine schwingende Bewegung, und jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit erzeugt einen Schall.

Wir sahen in dem vorigen Abschnitt, dass wir auf sehr viele Weisen schwingende Bewegungen erzeugen können, alle diese können auch die Ursache eines Schalles werden.

Reiben wir einen Stab seiner Länge nach, so erzeugt die Elasticität des Stabes stehende Schwingungen, die Savart durch die Stösse des Stabendes gegen eine Spitze dem Auge sichtbar gemacht hat; wir vernehmen nun auch stets einen Schall, wenn wir einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzen. Ebenso erzeugen die transversalen Schwingungen von Stäben und Saiten, sobald sie hinreichend rasch sind, die Schwingungen von Platten und Glocken sowie die drehenden Schwingungen der Stäbe einen Ton.

In allen diesen Fällen sind es die regelmässigen Schwingungen der Körper in Folge ihrer Elasticität, welche einen Ton erzeugen; man kann jedoch auch auf andere Art, durch in kurzer Zeit wiederholte Stösse, einen Schall hervorbringen. So erhält man einen Schall, wenn man eine Karte oder eine biegsame Feder dem Umfange eines in rasche Rotation versetzten

gezählten Rades so weit nähert, dass jeder Zahn der Karte oder Fed einen Schlag ertheilt; so auch, wenn man einen Strom eines Gases oder einer Flüssigkeit gegen eine rotirende Scheibe führt, welche in regelmäßigen Zwischenräumen durchbohrt ist; die Flüssigkeit dringt abwechselnd durch eine Oeffnung der Scheibe, abwechselnd wird sie durch eine geschlossene Stelle derselben zurückgehalten; es entsteht so eine regelmäßige Folge von Stößen, die wir als Ton wahrnehmen. Lässt man einen Körper an einer Axe rotiren, welche nicht durch dessen Mittelpunkt geht, so ertheilt dieser der umgebenden Luft eine Reihe von Stößen, indem abwechselnd das grössere und kleinere Stück des Körpers an derselben Seite der Rotationaxe sich befindet; diese Reihenfolge von Stößen erzeugt einen Ton.

Auch scheinbar continuirliche Bewegungen können einen Ton erzeugen in der That ist es aber wieder eine regelmäßige Reihenfolge von Stößen, welche auch in solchen Fällen den Schall hervorrufen. Bläst man in ein Mundstück einer gewöhnlichen Pfeife, so erzeugt dieser continuirliche Luftstrom einen Ton; indess in diesem Falle theilt sich der Luftstrom an der Lippe der Pfeife, der eine Theil dringt in die Pfeife ein, der andere entweicht in die umgebende Luft. Der in die Pfeife eingedrungene Theil des Luftstromes comprimirt anfänglich die der Lippe am nächsten liegende Schicht der Luft; diese Verdichtung der Luftschicht verhindert wegen der grössern Elasticität der comprimirt Luft dann so lange ein neues Eindringen der Luft in die Pfeife, bis sich die Verdichtung auf die weitem Luftschichten der Pfeife übertragen hat. Es entsteht daher auch in diesem Fall eine periodische Bewegung, eine Reihenfolge von Stößen, welche den Schall veranlasst.

Wir können daher ganz allgemein sagen, dass die Ursache des Schalles regelmässig wiederholte Stösse sind, welche zu unserem Ohre gelangen.

Damit das letztere, die Mittheilung der Stösse an unser Ohr, der Fall sein kann, genügt nicht allein das Schwingen eines Körpers, sondern es ist nothwendig, dass diese schwingende Bewegung durch ein elastisches Mittel zu unserem Ohre hingeführt werde. In den meisten Fällen ist dieses Mittel die atmosphärische Luft. Versetzen wir einen Körper in longitudinale Schwingungen, so dehnt er sich abwechselnd aus, abwechselnd zieht er sich zusammen. Bei der Ausdehnung treibt er die zunächst an ihn angrenzende Luft von sich fort, bei der Zusammenziehung stürzt die vorher fortgetriebene Luft in den jetzt leeren Raum, welcher den Körper umgibt, hinein, und diese hin und her gehende Bewegung der Luft pflanzt sich als longitudinale Schwingung durch die Umgebung bis zu unserem Ohre fort. Schwingt eine Saite, ein Stab oder eine Platte transversal, so tritt dasselbe ein; bewegt sich die Saite nach der einen Seite, so treibt sie die angrenzende Luft in der Richtung fort, schwingt sie zurück, so saugt sie die Luft gewissermassen nach sich hin; sie ertheilt also der Luft eine hin und her gehende Bewegung, welche bis zu unserem Ohre fortgepflanzt und als Stösse auf dasselbe wirkend uns die Empfindung des Schalles gibt.

Es kann aber jeder Körper, die festen sowohl als die flüssigen, wenn in ihnen ein Schall erregt wird, denselben fortpflanzen, wie man sich leicht dadurch überzeugt, dass eine unter Wasser erregte periodische Bewegung sich als Schall wahrnehmen lässt. Wir sahen, in allen elastischen Körpern pflanzen sich an einer Stelle erregte Schwingungen fort; da der Schall eine

schwingende Bewegung ist, die zu unserem Ohre fortgepflanzt ist, so folgt aus dem vorigen Abschnitte schon, dass jeder elastische Körper den Schall fortzupflanzen im Stande ist.

Dass wir aber überhaupt nur dann einen Schall vernehmen, wenn durch irgend einen elastischen Körper die Schwingungen zu unserem Ohre fortgepflanzt werden, zeigt die Erfahrung. Denn bringen wir unter die Glocke der Luftpumpe ein kleines Glückchen, welches mit einem Klöppel versehen und an einem Faden in der Glocke so aufgehängt ist, dass es nirgendwo eine der festen Begrenzungen des von der Glocke und dem Luftpumpenteller abgesperrten Raumes berührt, so hört man keinen Ton, wenn man die Luft durch Pumpen aus der Glocke fortnimmt und durch Bewegung des Apparates den Klöppel zum Anschlagen bringt. Man hört aber einen Schall, wenn man eine Verbindung zwischen der Glocke und dem Recipienten der Pumpe herstellt, sei es, dass man den Recipienten mit Luft oder mit einer Flüssigkeit anfüllt, oder dass man das Glückchen an einem Metalldraht in der Glocke aufhängt.

## §. 145.

**Qualität des Schalles.** Jeden Eindruck, welchen wir durch unser Gehör erhalten, nennen wir Schall; indess können diese Eindrücke sehr verschieden sein.

1. Der Schall kann in einem einzigen mehr oder weniger starken, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör bestehen, man nennt ihn dann meistens Knall, wenn man auch häufig unter Knall nur einen heftigen, einmaligen, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör versteht. Der Schall kann ferner von einiger Dauer sein, in einer Reihenfolge von Stößen bestehen, welche unser Ohr erhält. Je nachdem nun diese Stöße regelmäßig oder unregelmäßig, gleichartig oder ungleichartig sich folgen, unterscheidet man den Schall als Ton oder Klang oder als Geräusch. Die Geräusche selbst unterscheidet unsere Sprache wieder als Rasseln, Knistern, Sausen, Brausen etc.

2. Die musikalischen Töne unterscheidet man nach ihrer Höhe als höhere oder tiefere Töne. Worauf dieser Unterschied beruht, lässt sich leicht durch den Versuch zeigen. Ein longitudinaler Ton ist stets viel höher, als der Transversalton desselben Stabes, und der Transversalton eines Stabes ist um so höher, je kürzer und dicker der Stab ist; bei schwingenden Saiten ist der Ton um so höher, je kürzer die Saite ist oder je stärker man sie spannt. Da wir nun sahen, dass die longitudinalen Schwingungen rascher sind als die transversalen, und diese um so rascher, je kürzer der schwingende Körper ist, so folgt, dass ein Ton um so höher ist, je mehr Schwingungen der den Ton erzeugende Körper macht, je mehr Stöße also in gleichen Zeiten unser Ohr treffen.

Man kann die Schwingungszahl einer gespannten Saite berechnen; lässt man nun einen Stab mit der Saite genau isochron schwingen, oder bringt man einen Ton dadurch hervor, dass man ebenso oft die Zähne eines Rades gegen eine Karte schlagen lässt, so haben alle diese Töne die gleiche musikalische Höhe. Jeder Ton entspricht somit einer ganz bestimmten Schwingungszahl.



Man kann übrigens auch bei den Geräuschen eine verschiedene Höhrwahrnehmung, wie man aus folgendem Versuche sieht. Man nimmt sieben Stäbe von hartem Holze gleicher Dicke und Breite, aber verschiedener Länge, so dass beim Anschlagen diese Stäbe eine Tonreihe geben. Lässt man dann einen der Stäbe auf den Boden fallen, so hört man ein Geräusch ohne bestimmten musikalischen Charakter; lässt man aber die Stäbe nach einander zu Boden fallen, und zwar der Reihe nach die grössern zuerst, so unterscheidet man auch bei diesen Geräuschen eine bestimmte Höhe.

3. Töne gleicher Höhe können auf das Ohr einen ganz verschiedenen Eindruck machen; so unterscheidet man deutlich den Ton selbst bei gleicher Höhe der Blas- und Streichinstrumente, bei den Blasinstrumenten den der Holz- und Blechinstrumente.

Die Töne unterscheiden sich durch eine eigenthümliche Beschaffenheit, die man häufig als Klang oder Klangfarbe oder Tonfarbe bezeichnet. Vielfach wendet man auch dafür das französische Wort *Timbre* an. Die Ursache der Klangverschiedenheit, welche schon Ohm<sup>1)</sup> in der verschiedenen Form der Schwingungen gesehen hatte, ist besonders von Helmholtz<sup>2)</sup> in neuerer Zeit untersucht worden, er hat gezeigt, dass dieselbe in der That von der Form der Schwingungen, oder vielmehr von den gleichzeitig auftretenden Tönen bedingt ist. Einen Ton erzeugt jede regelmässig periodische Wiederkehr von Stössen in unser Ohr; innerhalb jeder Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode bestand, in den folgenden Perioden in ganz gleicher Weise wiederkehrt. So kann die Schwingung, die wir als Ton vernehmen, eine einfache sein, sie kann aber auch aus der Uebereinlagerung mehrerer Schwingungen bestehen, deren jede einem andern höhern Tone entspricht, welcher den gehörten Ton begleitet, welcher sich aber nur in soweit bemerkbar macht, dass er die Farbe des Grundtones verändert. In welcher Weise wir die einzelnen Töne eines Klanges erhalten können, werden wir in einem der nächsten Paragraphen besprechen.

4. Die Töne können bei gleicher Höhe und gleicher Klangfarbe an Stärke oder Intensität verschieden sein. Verschiedenheit der Stärke erzeugen wir bei einer gespannten Saite durch Aenderung der Schwingungsamplitude, oder was dasselbe ist, durch Aenderung der Schwingungsgeschwindigkeit bei ungeänderter Dauer der Schwingung. Der grössern Amplitude entspricht der stärkere Ton.

Wir nehmen indess nicht an, dass die Intensität einfach wie die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung zu- oder abnehme, sondern wie das Quadrat derselben, indem wir annehmen, dass die Stärke des Schalles von der Stärke des Stosses abhängt, welchen die bewegten Lufttheilchen unserm Gehörorgane ertheilen. Die Stärke des Stosses ist aber proportional der lebendigen Kraft der bewegten Körper, und da diese bei gleicher Masse dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so setzen wir die Intensität des Schalles dem Quadrate der Geschwindigkeit der schwingenden Theile in dem Augenblicke der grössten Geschwindigkeit proportional.

<sup>1)</sup> *Ohm*, Poggend. Ann. Bd. LXX. Bd. LXII. Man sehe auch *Seebeck*, Poggend. Ann. Bd. LX und Bd. LXIII. *Dove's Repert.* Bd. VIII.

<sup>2)</sup> *Helmholtz*, Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863.

## §. 146.

**immung und Vergleichung der Schwingungszahlen.** Um die  
Zahl von Tönen zu erhalten, kann man sich entweder der Ge-  
Elasticität bedienen oder der Tonerzeugung durch mechanische  
dem man letztere durch irgend eine mechanische Vorrichtung di-

Sirene von Cagniard Latour<sup>1)</sup> bestimmt die Schwingungszahlen  
Zählung der den Ton erzeugenden Stösse, sie besteht (Fig. 254)  
cylindrischen Trommel, von der unten in der Mitte der Boden-  
e Röhre *R* ausgeht, mittels welcher der Apparat auf einen Wind-  
setzt wird, und durch welche die comprimirte Luft in die Trommel  
ingt. Die obere Platte der Trommel ist durch eine bestimmte  
n Löchern, welche auf dem Umfange eines Kreises liegen, durch-  
ie Löcher sind alle gleichweit von einander entfernt und alle nach  
ichtung schief gebohrt, so dass die Oeffnungen alle z. B. von  
1 rechts aufsteigende unter einem bestimmten Winkel gegen die  
geneigte Kanäle durch die Platte bilden.

mittelbar über der die Trommel deckenden Platte befindet sich eine  
atte, welche an der Axe *AF* (Fig. 255) befestigt ist und mit die-  
sich drehen kann. Um die Platte möglichst leicht beweglich zu  
ist die stählerne Axe *AF* unten bei *a* (Fig. 254) in ein Zapfen-  
Messing gestellt, und oben durch die Schraube *A*, deren Spitze  
nische Vertiefung der Axe passt, lose gehalten.

Fig. 254.

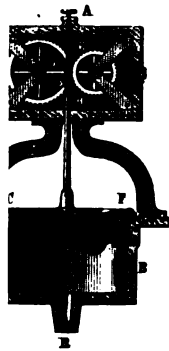


Fig. 255.



Fig. 256.



Platte *C* (Fig. 255) hat ebenfalls auf einem Kreise 16 Löcher, so  
oben sich auf die Löcher der untern Platte legen und die Trommel  
unsern Luft in Verbindung setzen können, oder bei einer kleinen  
der obern Scheibe den Zwischenräumen der untern Scheibe ent-  
die Trommel also verschliessen. Bilden die Löcher die Fortsetzung  
er der untern Platte, so kann die in die Trommel getriebene ver-  
luft nach aussen entweichen; entsprechen die Löcher den Zwischen-

<sup>1)</sup> Cagniard Latour, Annales de chim. et de phys. Tome XII et XVIII. Pog-  
e VIII und X.

räumen zwischen den untern Löchern, so ist die Trommel abgesperrt, die Luft kann nicht entweichen. Die Löcher sind schief durch die Platte gebohrt, aber nach entgegengesetzter Richtung als die untern Löcher; also wenn diese von links nach rechts durch die untere Platte aufsteigende Kanäle bilden (Fig. 256), so bilden die Löcher der obern Platte von rechts nach links aufsteigende Kanäle. Durch diese Art der Durchbohrung wird nun bewirkt, dass die Scheibe *C* durch den Luftstrom selbst zum Rotiren gebracht wird, der zu den Löchern austritt, wenn die obern Löcher auf den untern stehen; denn der in den untern Löchern von links nach rechts aufsteigende Luftstrom stösst gegen die Wände der obern Löcher und ertheilt dadurch der Scheibe eine Drehung, welche derjenigen des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt ist. Die Geschwindigkeit der obern Scheibe wird dadurch um so grösser, je stärker der Druck der Luft in der Trommel ist. Durch Regulirung des Luftstromes kann man daher der Scheibe eine ganz bestimmte Geschwindigkeit geben.

Dreht sich nun die Scheibe mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird bei 16 Löchern bei jeder Umdrehung, da alle obern Löcher zugleich auf alle untern zu stehen kommen, 16 mal die Trommel geöffnet und 16 mal geschlossen. Die von unten in die Trommel geführte verdichtete Luft kann also 16 mal durch die obere Platte entweichen und ebenso wird 16 mal der Luftstrom unterbrochen. Wir erhalten somit bei jeder Umdrehung 16 Verdichtungen der Luft über der Scheibe und beim Verschluss der untern Löcher 16 Verdünnungen, also bei jeder Umdrehung 16 Schwingungen der Luft, welche sich als 16 Wellen in die umgebende Luft fortpflanzen.

Wenn wir demnach durch diese Schwingungen einen bestimmten Ton hervorgebracht haben; können wir aus einer Beobachtung der Umdrehungszahl der Scheibe die Schwingungszahl des gehörten Tones unmittelbar ableiten.

Um nun die Umdrehungszahl der Scheibe zu erhalten, ist in die Axe *AF* bei *s* eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in ein Zahnrad *E* (Fig. 254) eingreift und dieses bei jeder Umdrehung um einen Zahn dreht. An der Axe des Rades ist ein Zeiger befestigt, der auf dem Zifferblatte (Fig. 255) die Umdrehungen der Scheibe angibt. Das Rad hat 100 Zähne, bei 100 Umdrehungen der Scheibe dreht es sich somit einmal herum und die Spitze des Zeigers durchläuft einmal den Umfang des Zifferblattes. Dieses ist in 100 Theile getheilt, die an ihm befindlichen Zahlen geben also die einzelnen Umdrehungen des Rades an. Eine Umdrehung des Zeigers gibt also 16 · 100 Vibrationen an.

Hat sich das Rad *E* einmal vollständig gedreht, so greift ein Vorsprung *H*, der am Umfange des Rades befestigt ist, in die Zähne des Rades *G* und bewirkt, dass der an der Axe dieses Rades befestigte Zeiger auf seinem Zifferblatte um einen Theilstrich weiter rückt, jeder Theilstrich dieses Zifferblattes gibt also 100 Umdrehungen der Scheibe oder 1600 Schwingungen an. Hat man sonach während einer Zeit *T* eine Bewegung des Zeigers auf dem zweiten Zifferblatte um *n* Theilstriche beobachtet und auf dem ersten *n'*, so ist die Anzahl der während der Zeit *T* stattgefundenen Schwingungen

$$N = n \cdot 1600 + n' \cdot 16,$$

und die Schwingungszahl des Tones, wenn  $T$  in Sekunden gegeben ist,

$$\nu = \frac{N}{T}.$$

Die beiden gezahnten Räder sind auf der einen Platte des Gehäuses, welchem sie eingeschlossen sind, befestigt. Diese Platte ist ein wenig schiebbar, und drückt man auf die Fig. 255 zur Rechten befindliche rauhe  $a$ , so wird die Platte und damit die gezahnten Räder so weit zur Rechten verschoben, dass die Schraube ohne Ende nicht in das Zahnrad  $F$  eingreift. In dieser Lage wird dann die Platte durch die oben auf dem Gehäuse befindliche Feder, deren Vorsprung in einen Ausschnitt der Platte eingreift, festgehalten. Wenn sich also auch jetzt die Scheibe dreht, so bewegen sich doch die Räder und Zeiger nicht. Drückt man dann auf die rauhe  $f$ , so springen Platte und Räder in ihre frühere Lage zurück und die Räder und Zeiger bewegen sich.

Um nun mittels der Sirene die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, bewirkt man zunächst, dass beide Zeiger auf 0 stehen. Dann werden sie ausgelöst und man setzt durch einen Luftstrom die Sirene in Bewegung. Der Ton ist anfangs tief, wird aber, da die Bewegung der Scheibe eine beschleunigte ist, immer höher. Durch Regulirung des Luftstromes bringt man dann den Ton hervor, dessen Schwingungszahl man untersuchen will, und drückt, wenn er constant geworden ist, zu einer ganz bestimmten Zeit auf die Feder  $f$ . Dadurch werden die Räder eingeschaltet und die Zeiger bewegen sich. Nach einer bestimmten Zeit drückt man auf den Knopf  $a$  und schaltet so die Räder wieder aus und liest sowohl die Theilstriche  $n$  auf dem Zifferblatt des Rades  $G$  ab, als die  $n'$  auf dem andern und hat somit alle Daten, die erforderlich sind, um die Schwingungszahl  $\nu$  zu bestimmen.

Savart wandte zu seinen Versuchen, um die Grenze der Wahrnehmbarkeit der Töne zu bestimmen, ein anderes Verfahren an<sup>1)</sup>. Er ersetzte die Sirene durch ein in schnelle Rotation versetztes gezahntes Rad, dessen Zähne gegen eine Karte oder ein keilförmiges zugeschnittenes Blättchen aus leichtem Holze schlugen. Jeder Schlag entspricht einer einmaligen Öffnung der Sirene, also einer Schwingung, aus der Anzahl der Zähne des Rades und der Umdrehungsgeschwindigkeit desselben erhält man also durch eine einfache Multiplication die Anzahl der einem bestimmten Tone entsprechenden Schwingungen.

Die Umdrehungen des Rades werden auch hier durch einen Zähler in gleicher Einrichtung wie derjenige der Sirene bestimmt.

Duhamel hat es versucht, die Schwingungen zu zählen, indem er die 137 schon besprochene graphische Methode anwandte<sup>2)</sup>. Der schwingende und tönende Körper, z. B. ein schwingender Stab, wird an seinem Ende mit einer feinen Spitze versehen und vor ihm ein Glascylinder gehalten, der durch Russ mit einem leicht fortzunehmenden Ueberzuge versehen ist. Die Spitze berührt den Cylinder nur ganz leicht. Wenn nun

<sup>1)</sup> Savart, Ueber die Empfindlichkeit des menschlichen Gehöres. Annales de chim. et de phys. T. XLIV. Poggend. Ann. XX.

<sup>2)</sup> Duhamel, L'Institut 1840. p. 19 u. 41.

der Stab nicht schwingt, so zieht die Spitze auf dem Cylinder, der sich bei der Drehung zugleich langsam hebt oder senkt, eine einfache Spirallinie wenn aber der Stab schwingt, so erhält diese Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Cylinder durch irgend eine mechanische Vorrichtung in eine stetige Rotation versetzt wird und durch irgend eine andere Zählvorrichtung die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt werden kann, so genügt es, die Länge der Spirallinie zu messen und die Anzahl der Wellen zu zählen, um die Schwingungszahl zu erhalten. Habe z. B. die Walze fünf Umdrehungen in der Sekunde, und beobachtet man, dass die Spirallinie genau 2,5 Umfänge der Walze beträgt, so gibt die Zahl der Wellen auf derselben die Schwingungszahl in einer halben Sekunde an, die doppelte Zahl also die Schwingungszahl des Tones.

Duhamel und später Wertheim wandten indess dieses Verfahren hauptsächlich dazu an, um die Schwingungszahlen zweier Töne zu vergleichen. Zu dem Ende braucht man die Drehungsgeschwindigkeit der Walze nicht einmal zu kennen.

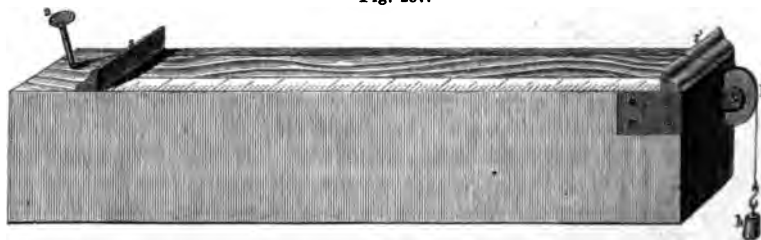
Man bringt nur die beiden Stäbe oder schwingenden Körper nahe bei einander an, so dass sie ihre Schwingungen auf einer und derselben Walze gleichzeitig abzeichnen.

Man hat dann nur die auf gleichen Längen der beiden Spiralen befindlichen Wellen zu zählen, und da diese in gleichen Zeiten von den beiden schwingenden Körpern beschrieben sind, so ist das Verhältniss der beiden Zahlen genau das der Schwingungszahlen der Töne.

Die andere Methode, um die Schwingungszahlen der Töne zu bestimmen, beruht auf der Anwendung der Elasticitätsgesetze, welche uns nach dem vorigen Abschnitte die Schwingungszahl eines gegebenen Körpers aus seiner Beschaffenheit zu berechnen gestatten. Sie ist besonders bequem, um die Schwingungszahlen der Töne zu vergleichen, und da, wie wir sehen werden, aus der Schwingungszahl eines Tones sich die aller übrigen berechnen lässt, so wendet man diese Methode fast immer zur Bestimmung der Schwingungszahl der Töne an.

Das gebräuchlichste auf dieser Methode beruhende Verfahren ist die Bestimmung der Schwingungszahlen mittels des Monochordes, einer auf

Fig. 257.



einem Kasten von trockenem Holze aufgespannten Saite (Fig. 257). Die Saite ist bei *a* mittels einer Schraube befestigt und, um eine genau bestimmbare Länge derselben zu den Versuchen zu verwenden, über die bei-

den scharfen Stege  $ss'$  gelegt und dann über die Rolle  $R$  geführt, welche sich mit möglichst wenig Reibung in ihrem Zapfenlager dreht. In dem an dem Ende der Saite befestigten Häkchen  $h$  können verschiedene spannende Gewichte befestigt werden. Der Abstand  $ss'$  zwischen den beiden Stegen ist in 1000 gleiche Theile getheilt und ein auf dem Brette des Monochords verschiebbarer Steg gestattet von der Saite beliebige Stücke schwingen zu lassen.

Um nun die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, stimmt man zunächst das Monochord nach dem betreffenden Ton, sei es dem einer Stimmgabel oder irgend eines andern Instrumentes, indem man das spannende Gewicht oder die Länge der Saite so lange ändert, bis sie bei einfachem Anschlagen oder Anstreichen mit dem Geigenbogen genau den Ton der Gabel angibt.

Aus der beobachteten Länge der Saite, dem spannenden Gewichte und dem Gewichte der Längeneinheit der Saite erhält man dann, wenn die Steifigkeit der Saiten nicht beachtet zu werden braucht, die Schwingungszahl nach der Formel des §. 132

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}},$$

worin  $l$  die Länge der Saite,  $P$  das spannende Gewicht,  $q$  den Querschnitt und  $s$  das specifische Gewicht der Saite, also  $q \cdot s$  das Gewicht der Längeneinheit bedeutet.

Man wendet meist zu dem Monochord Metallsaiten an, da diese regelmässiger zu bearbeiten sind als andere und da sie bei gleicher Spannung nicht so leicht Aenderungen ausgesetzt sind durch den Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Sind jedoch diese Saiten nicht sehr dünn und nicht vollkommen biegsam, wie z. B. die Stahlsaiten, die zu den Klavieren benutzt werden, so muss man zur Berechnung der Schwingungszahlen die vollständigere Formel von Seebeck anwenden, in welcher auf die Steifigkeit der Saiten Rücksicht genommen ist.

Eine andere Methode, welche Scheibler<sup>1)</sup> angewandt hat, um mittels des Monochords nur durch Versuche die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, werden wir erst im nächsten Kapitel bei Abhandlung der Stösse und Combinationstöne kennen lernen können.

#### §. 147.

**Von dem Verhältniss der Töne und den Intervallen.** Man kann nun auf die verschiedenste Weise und mit den verschiedensten Instrumenten Töne gleicher Höhe hervorbringen. Nimmt man z. B. den Ton eines gekrümmten Stabes und bringt auf der Sirene oder mittels gezählter Räder, oder mittels gespannter Saiten den Ton hervor, so findet man stets bei Messung der Schwingungszahlen, wie verschieden auch die Klangfarbe aller dieser Töne sein mag, dass sie doch alle dieselbe Schwingungszahl haben. Wir folgern daraus das erste Gesetz der Tonlehre:

<sup>1)</sup> Ueber *Scheibler's* Versuche. *Roeder* in *Poggend. Ann.* Bd. 32 und in *Dove's* *Repertorium.* Bd. III.

Allen Tönen gleicher Höhe, welches auch der schwingende Körper sei, welcher sie veranlasst, entsprechen gleiche Schwingungszahlen, und umgekehrt, gleichen Schwingungszahlen entsprechen immer gleiche Tonhöhen.

Daraus folgt, dass ein gegebener Ton seiner Höhe nach bestimmt ist durch die Zahl  $n$  seiner Schwingungen, und dass man ihn mittels derselben bezeichnen kann.

Töne verschiedener Schwingungszahlen sind verschieden, das Verhältniss ihrer Schwingungszahlen nennt man ein Tonverhältniss oder Intervall.

Wenn man zugleich zwei Töne verschiedener Höhe hervorbringt und anhalten lässt, so kann das Zusammenklingen derselben auf unser Ohr entweder einen angenehmen Eindruck machen oder einen nicht so angenehmen. In dem ersten Falle nennt man das Zusammenklingen der Töne oder den Accord consonirend, im zweiten Falle dissonirend. Je weniger angenehm der Accord unser Ohr für sich allein stehend berührt, um so dissonirender ist derselbe.

Es gibt nun eine grosse Menge verschiedener Accorde, welche alle in der Musik gebraucht werden, das Ohr unterscheidet sie als angenehm oder weniger angenehm, und darnach ist denselben in der Musik ihre Stelle angewiesen. Die Aufgabe der Physik ist es, zu untersuchen, worin die Accorde sich unterscheiden. Nehmen wir -z. B. einen häufig gebrauchten Accord, den Zweiklang von  $c$  und  $e$  der gewöhnlichen Tonleiter, so sagt uns unser Ohr zunächst, dass dieser Accord mit denselben wesentlichen Eigenschaften, mit wesentlich demselben Eindruck auf unser Ohr sowohl zwischen hohen als tiefen Tönen bestehen kann, dass er ebenso zwischen je zwei andern Tönen der Tonleiter  $d$ ,  $f$ is u. s. w. bestehen kann. Es folgt daraus, der Accord ist unabhängig von der Höhe der ihn zusammensetzenden Töne, also unabhängig von ihrer absoluten Schwingungszahl. Wenn man nun aber in allen den verschiedenen Fällen die Schwingungszahlen der den Accord zusammensetzenden Töne bestimmt, so findet man, dass dieselben stets im Verhältnisse von 4 zu 5 zu einander stehen, und ebenso auch umgekehrt, dass ein Accord, dessen Töne Schwingungszahlen im Verhältnisse von 4 zu 5 zu einander stehen, stets als derselbe erscheint. Gleiches gilt für alle übrigen Accorde. Wir erhalten demnach als zweites Gesetz der Tonlehre folgendes:

Jeder musikalische Accord zwischen zwei Tönen ist bestimmt und kann dargestellt werden durch das Verhältniss der beiden Schwingungszahlen  $\frac{n}{m}$  der componirenden Töne.

Ist das Verhältniss  $\frac{n}{m}$  der Einheit gleich, so sind die beiden Töne im Einklang; ist es verschieden, so sind sie an Höhe verschieden und zwar um so mehr, je mehr dies Verhältniss von der Einheit verschieden ist. Ihr musikalisches Intervall ist unabhängig von der absoluten Anzahl der Schwingungen, es wird nur bestimmt von dem Verhältniss derselben.

Um zu entscheiden, welche Intervalle consonirend sind, welche nicht, müssen wir untersuchen, wie sich die Intervalle der von der Musik als die consonirendsten angenommenen Accorde verhalten. Es sind dieses die Octave, in der gewöhnlichen Dur-Tonleiter  $c$  und  $c_1$ , die Sexte  $c$  und  $a$ ,

die Quinte  $c$  und  $g$ , die Quarte  $c$  und  $f$ , die grosse Terz  $c$  und  $e$ , und die kleine Terz  $c$  und  $es$ . Eine Vergleichung der Schwingungszahlen hat nun ergeben, wenn man von dem tiefsten Tone der Reihe ausgeht, und dessen Schwingungszahl, wo der Ton sonst seiner absoluten Höhe nach auch liegen mag, gleich 1 setzt:

Für die Octave	das Verhältniss	$\frac{n}{n} = \frac{2}{1}$
„ „ Sexte	„ „	$= \frac{5}{3}$
„ „ Quinte	„ „	$= \frac{3}{2}$
„ „ Quarte	„ „	$= \frac{4}{3}$
„ „ grosse Terz	„ „	$= \frac{5}{4}$
„ „ kleine Terz	„ „	$= \frac{6}{5}$

Das heisst die Octave macht zwei Schwingungen, wenn der Grundton eine macht, die Sexte 5, wenn der Grundton 3, oder  $\frac{5}{3}$ , wenn letzterer 1 vollführt u. s. f.

Es folgt daraus, wenn man zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie zwei Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 zusammenklingen lässt, dass man dann einen consonirenden Accord erhält.

Man theilt diese Accorde in vollkommene und unvollkommene Consonanzen. Die vollkommenen sind die Octave und die Quinte, welche den Verhältnissen 1, 2, 3 entsprechen, die übrigen sind die unvollkommenen Consonanzen. Wir sehen demnach, eine Consonanz ist um so vollkommener, je einfacher das Schwingungsverhältniss der sie componirenden Töne ist, ein Accord wird um so dissonirender, je complexer das Verhältniss der Zahlen ist, welche ihn zusammensetzen. So gilt die Sekunde  $\frac{8}{9}$  und noch mehr die kleine Sekunde  $\frac{16}{15}$  als Dissonanz.

### §. 148.

**Von den mehrfachen Accorden.** Aus dem Gesetze der Consonanz lässt sich nun leicht voraussehen, welche mehrfach zusammengesetzte Accorde auf unser Ohr einen wohlthuenden Eindruck machen, welche als Consonanzen wirken, und welche als Dissonanzen eine Auflösung verlangen. Consonirende Accorde können nur solche sein, in denen alle Töne in einfachen Verhältnissen zu einander stehen.

Wir wenden zur Bestimmung der Tonverhältnisse die erwähnte Bezeichnungsweise an, die Schwingungszahl eines Tones, und zwar, wenn nichts anderes bemerkt wird, des tiefsten, wird gleich 1 gesetzt. Jeder der folgenden Brüche bezeichnet einen Ton und zwar denjenigen, welcher die durch den Bruch angedeuteten Schwingungen vollführt, wenn der mit 1 bezeichnete Ton eine Schwingung vollführt, oder der in derselben Zeit die im Zähler angegebenen Schwingungen zurücklegt, wenn der Grundton die im Nenner stehende Anzahl von Schwingungen zurücklegt.

Nach dem Vorigen können also nicht consonirend sein

Prim Terz Quart	$1 : \frac{5}{4} : \frac{4}{3}$
Prim Quart Quint	$1 : \frac{4}{3} : \frac{3}{2}$
Prim Quint Sext	$1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}$



denn wenn auch die beiden ersten Töne dieser Accorde consonirend sind, so sind es nicht die beiden letzten, da diese den Verhältnissen  $\frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$  entsprechen.

Consonirend sind die Accorde

- |    |                  |       |   |   |               |   |               |
|----|------------------|-------|---|---|---------------|---|---------------|
| 1) | Prim grosse Terz | Quint | 1 | : | $\frac{5}{4}$ | : | $\frac{3}{2}$ |
| 2) | Prim kleine Terz | Quint | 1 | : | $\frac{6}{5}$ | : | $\frac{3}{2}$ |
| 3) | Prim grosse Terz | Sext  | 1 | : | $\frac{5}{4}$ | : | $\frac{5}{3}$ |
| 4) | Prim Quart       | Sext  | 1 | : | $\frac{4}{3}$ | : | $\frac{5}{3}$ |

denn in allen diesen Fällen sind diese Töne sowohl mit dem Grundtone als unter sich in Consonanz, denn bei den beiden letzten Tönen haben wir

- |       |             |       |                                       |
|-------|-------------|-------|---------------------------------------|
| in 1) | grosse Terz | Quint | $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 5 : 6$   |
| „ 2)  | kleine Terz | Quint | $\frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 4 : 5$   |
| „ 3)  | grosse Terz | Sext  | $\frac{5}{4} : \frac{5}{3} = 3 : 4$   |
| „ 4)  | Quart       | Sext  | $\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4 : 5$ . |

Die Accorde 3 und 4 sind übrigens nur Umkehrungen der Accorde 1 und 2, denn multipliciren wir in 3 die Töne 1 und  $\frac{5}{4}$  mit 2, setzen also für diese Töne die mit ihnen vollkommen consonirenden Octaven, so erhalten wir für 3

$$2, \frac{10}{4}, \frac{5}{3},$$

oder setzen wir jetzt  $\frac{5}{3}$  als Grundton, also seine Schwingungszahl gleich 1,

$$1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}.$$

Multipliciren wir in 4 nur die Prim mit 2 und dividiren dann alle Zahlen mit  $\frac{4}{3}$ , das heisst, machen wir die Quart zum Grundton, so erhalten wir

$$1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}.$$

Der Accord 3 ist also nur eine Umkehrung von 2, und der Accord 4 eine Umkehrung von 1.

Ausser den angegebenen 4 consonirenden Accorden erhalten wir durch nochmalige Umlagerung der beiden Accorde 1 und 2 noch zwei weitere consonirende Accorde; indem wir nämlich den Accord 1 ebenso umlegen, wie der Accord 3 aus 2 entstanden ist, also nur für die Prim ihre höhere Octave einsetzen, bekommen wir den fünften Accord

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2,$$

oder indem wir diesen Accord vom Grundton uns gebildet denken, erhalten wir durch Multiplication aller Zahlen mit  $\frac{4}{5}$

$$1, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}.$$

Dass von diesen drei Tönen der zweite mit dem ersten, der dritte mit dem zweiten in Consonanz sind, ergibt sich unmittelbar, da es die Intervalle  $\frac{6}{5}$  und  $\frac{4}{3}$  sind, dass der dritte mit dem ersten consonant ist, folgt aus den im vorigen Paragraphen angeführten Intervallen nicht; wir können es aber schon aus der Bemerkung ableiten, dass die Octave mit dem Grundton die vollkommenste Consonanz bildet, und dass deshalb ein Intervall nicht dissonirend wird, wenn wir den Grundton durch seine Octave ersetzen.

Da nun das Intervall  $\frac{8}{5}$  nichts anderes ist als die Umlagerung der Terz, indem wir den Grundton durch die Octave ersetzen, so folgt, dass auch dieses Intervall consonirend ist. Wir werden im Uebrigen sofort bei Ableitung der Tonleiter dieses Intervall als ein Sextenintervall kennen lernen.

Lagern wir den Accord 2 in derselben Weise um, wie wir zur Bildung von 4 den Accord 1 umlagerten, setzen wir also für Grundton und kleine Terz die höhere Octave, so erhalten wir als sechsten Accord

$$\frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5},$$

und bilden wir jetzt diesen Accord anstatt von der Quint von dem Grundton, indem wir alle Zahlen mit  $\frac{2}{3}$  multipliciren, so erhalten wir

$$1, \frac{4}{3}, \frac{24}{15} = \frac{8}{5}.$$

Nach der soeben gemachten Bemerkung wird man auch diesen Accord sofort als consonirend erkennen.

Man nennt die consonirenden Accorde, welche aus drei Tönen zusammengesetzt sind, welche im Verhältnisse  $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$  oder  $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$  stehen, Dreiklänge und zwar den Dreiklang mit der grossen Terz den grossen oder Durdreiklang, den mit der kleinen Terz den Molldreiklang; sie sind mit ihren beiden Umlagerungen die einzigen consonirenden Accorde, die sich aus der Reihe der harmonischen Töne ergeben. Die Accorde 3 und 5, welche, der erstere aus dem Molldreiklange, der zweite aus dem Durdreiklange, durch Ersetzen des Grundtones durch die höhere Octave entstanden gedacht sind, heissen die Terzsextaccorde oder schlechthin Sextaccorde, die beiden andern die Quartsextaccorde jedesmal desjenigen Dreiklanges, aus dem sie entstanden sind.

Die beiden Dreiklänge sind aus ganz gleichen Intervallen aufgebaut, beide aus einer grossen und einer kleinen Terz, der einzige Unterschied ist der, dass beim Durdreiklange die beiden untern, beim Molldreiklange die beiden obren Töne das Intervall der grossen Terz bilden.

Auf die Frage, warum nur diese und keine andern Intervalle und Accorde consonirend sind, kommen wir im nächsten Kapitel nochmals zurück, wenn wir die Wahrnehmung der Töne überhaupt besprechen, es genügt uns, an dieser Stelle die erfahrungsgemäss bestimmten consonirenden Accorde und Intervalle zu kennen.

#### §. 149.

**Die Tonleiter.** Ausser den harmonischen Tönen 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder wenn wir für die höhern Töne dieser Reihe die tiefern Octaven einsetzen, so dass alle Schwingungszahlen entsprechen, welche zwischen 1 und 2 liegen, den Tönen  $1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2$ , sind in der Musik noch viele andere gebräuchlich, welche zwischen diesen eingeschaltet werden; die Musik ordnet dieselben in eine Reihe, welche den Namen Tonleiter führt. Wenn wir den Grundton 1 mit *c* bezeichnen, so ist die sogenannte diatonische Durtonleiter

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$$

$$c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad a \quad h \quad c_1.$$

Ausser der Terz, Quart, Quint, Sext tritt noch die Sekunde  $\frac{9}{8} =$  und die Septime  $\frac{15}{8} = h$  hinzu. Von der Octave  $c_1$  wiederholt sich die Reihe einfach, indem ebenso, wie die Octave die Verdoppelung des Grundtones ist, so auch in der weitem Tonreihe die folgenden Töne die Verdoppelungen der entsprechenden Töne in den nächst tiefern Octaven sind. Um diese höhern Octaven zu bezeichnen, werden wir rechts unten die Zahlen 1, 2 ... an die Buchstaben setzen, welche die Töne unserer Grundoctave angeben; diese Zahlen sind dann jene Potenzen von 2, mit welcher wir die Töne der Grundoctave multipliciren müssen, um den Ton der entsprechenden Octave zu erhalten. Tiefere Octaven bezeichnen wir dadurch, dass wir der unten rechts geschriebenen Zahl das negative Vorzeichen geben,  $a$  deutend, dass wir, um zu diesen Tönen zu gelangen, diejenigen der Grundoctave mit der von der Zahl angegebenen negativen Potenz von 2 multipliciren resp. durch die betreffende Potenz von 2 dividiren müssen.

Man hat viel darüber gestritten, wie diese Tonleiter entstanden sei, es ist indess wahrscheinlich, dass sie sich allmählig durch das musikalische Bedürfniss gebildet und erweitert hat, und dass nicht theoretische Entwicklungen darauf geführt haben. Indess kann man dieselbe auf mehrfache Weise entstanden denken.

Setzt man die Reihe der harmonischen Töne fort, indem man z. B. die Saite des Monochords, deren Schwingungen, wenn sie ungetheilt schwingt, mit 1 bezeichnet werden, immer weiter nach der Reihe der natürlichen Zahlen theilt, so erhält man Töne mit den Schwingungszahlen

$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,$$

und durch Division durch die verschiedenen Potenzen von 2, um die tiefen Octaven der Töne zu erhalten, so dass sie in die Octave 1 — 2 fallen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{12}{8}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4} = \frac{14}{8}, \frac{15}{8}, 2,$$

oder mit den vorigen  $1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$  zusammen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, 2,$$

also die Töne

$$c \quad d \quad e \quad - \quad g \quad - \quad - \quad h \quad c_1.$$

Nun unterscheiden sich die Töne  $\frac{11}{8}$  und  $\frac{4}{3}$  oder  $\frac{5}{3}$  und  $\frac{13}{8}$  und  $\frac{7}{4}$  nur wenig von einander, man könnte daher denken, dass jene für diese eingesetzt wären, und so die Tonleiter entstanden wäre. Indess das Fehlen des einfachen Intervalles  $\frac{7}{4}$  in der Tonleiter spricht nicht für diese Entstehungsweise.

Nach dem Vorgange von Chladni<sup>1)</sup> gelangen wir auf andere Weise zur Tonleiter, wo wir es nicht nöthig haben, anstatt der direkt erhaltenen Verhältnisse andere einzusetzen. Bilden wir nämlich von dem Grundton, der Quint und der Unterquint, also dem Tone, dessen Quinte der Grundton ist, die grossen Dreiklänge, so erhalten wir:

<sup>1)</sup> Chladni, Akustik. p. 13 ff.

$$\begin{array}{l}
 \text{von der Unterquint } \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}, \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1 \\
 \text{von dem Grundton } 1, \dots, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \dots = 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \\
 \text{von der Quint } \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{9}{4}
 \end{array}$$

und durch Ordnung nach den Schwingungszahlen, wenn wir zugleich für einzelne Töne die tiefern und höhern Octaven einsetzen, um alle Töne in der Octave 1—2 zu erhalten,

$$\begin{array}{cccccccc}
 1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2 \\
 c & d & e & f & g & a & h & c_1.
 \end{array}$$

Betrachten wir nun die aus dieser Tonleiter sich ergebenden Sekunden, Terzen, Quartan, Quinten, Sexten, Septimen, so werden wir finden, dass dieselben nicht alle gleichwerthig sind, sondern dass die Intervalle verschieden sein können, ohne darum aufzuhören, Sekunden, Terzen etc. zu sein.

Der Werth der Intervalle ist folgender:

Werth der musikalischen Intervalle.

Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen
$\frac{d}{c} \frac{9}{8}$	$\frac{e}{c} \frac{5}{4}$	$\frac{f}{c} \frac{4}{3}$	$\frac{g}{c} \frac{3}{2}$	$\frac{a}{c} \frac{5}{3}$	$\frac{h}{c} \frac{15}{8}$
$\frac{e}{d} \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{f}{d} \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{80}{61} = \frac{5}{4} \cdot \frac{80}{61} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{d} \frac{4}{3}$	$\frac{a}{d} \frac{9}{2} = \frac{80}{81}$	$\frac{h}{d} \frac{5}{3}$	$\frac{c}{d} \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{f}{e} \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{e} \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{a}{e} \frac{4}{3}$	$\frac{h}{e} \frac{3}{2}$	$\frac{c}{e} \frac{8}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d}{e} \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{g}{f} \frac{9}{8}$	$\frac{a}{f} \frac{5}{4}$	$\frac{h}{f} \frac{4}{3} = \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{c}{f} \frac{3}{2}$	$\frac{d}{f} \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{e}{f} \frac{15}{8}$
$\frac{a}{g} \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{h}{g} \frac{5}{4}$	$\frac{c}{g} \frac{4}{3}$	$\frac{d}{g} \frac{13}{2}$	$\frac{e}{g} \frac{5}{3}$	$\frac{f}{g} \frac{16}{9} = \frac{13}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{h}{a} \frac{9}{8}$	$\frac{c}{a} \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d}{a} \frac{14}{3} = \frac{91}{80}$	$\frac{c}{a} \frac{3}{2}$	$\frac{f}{a} \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{a} \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{c}{h} \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d}{h} \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{e}{h} \frac{4}{3}$	$\frac{f}{h} \frac{9}{2} = \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{g}{h} \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{a}{h} \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$

Ein Ueberblick vorstehender Tabelle ergibt, dass die gleichnamigen Intervalle keineswegs alle denselben Werth haben.

Die Sekunden haben drei verschiedene Werthe, nämlich zunächst ist das Schwingungsverhältniss  $\frac{9}{8}$ , die Töne, zwischen denen dieses Intervall stattfindet, unterscheiden sich um einen grossen ganzen Ton; zweitens ist dasselbe  $\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$ , das Intervall ist das eines kleinen ganzen Tones, der sich von dem vorigen um  $\frac{80}{81}$ , ein syntonisches Komma unterscheidet. Der dritte Werth, den die Sekunde annehmen kann,  $\frac{16}{15} = \frac{10}{9} \cdot \frac{24}{25}$ , ist der grosse halbe Ton. Da nun der kleine ganze Ton  $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{20}{24}$ , so kann man denselben in zwei Intervalle theilen, den grossen halben Ton  $\frac{16}{15}$  und den kleinen halben Ton  $\frac{20}{24}$ . Letzterer ist das kleinste in der Musik gebräuchliche Intervall.

Wie die Sekunden gross und klein sein können, so auch die Terzen; die grossen entsprechen dem Verhältniss  $\frac{5}{4}$ , die kleinen dem um einen kleinen halben Ton  $\frac{24}{25}$  kleinern Verhältniss  $\frac{6}{5}$ . Ausserdem tritt von  $d$  zu  $f$  eine noch um ein Komma kleinere Terz auf.

Auch bei den Quarten unterscheiden wir drei Werthe, die reinen Quart  $\frac{4}{3}$ , die übermässige Quart  $f-h$ , welche um einen kleinen halben Ton und ein Komma grösser ist als die reinen Quart, und schliesslich die falsche Quart  $d$  zu  $a$ , welche gegenüber den reinen Quart um ein Komma zu gross ist.

Aehnlich wie die Quart verhalten sich die Quinten, sie sind rein  $\frac{3}{2}$ , oder vermindert  $h$  nach  $f_1$  um einen kleinen halben Ton und ein Komma kleiner als die reinen Quinten, oder schliesslich falsch von  $d$  nach  $a$  um ein Komma kleiner als die reinen Quinten.

Bei den Sexten unterscheiden wir grosse  $\frac{5}{3}$  und kleine  $\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$ , um einen kleinen halben Ton kleiner als die grossen, und ausserdem finden wir eine falsche Sexte, die um ein Komma grösser ist als die grosse Sexte.

Unter den Septimen finden wir zwei grosse, deren Schwingungsverhältniss  $\frac{15}{8}$  ist, zwei kleine, welche von den grossen sich um einen kleinen halben Ton unterscheiden,  $\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$  und drei falsche, welche noch um ein Komma kleiner sind als die kleinen Septimen.

Die Octaven schliesslich sind ihrem Wesen nach alle rein, und entsprechen dem Verhältnisse  $\frac{2}{1}$ .

Die auf diese Weise erhaltene Tonleiter heisst die diatonische Durtonleiter, sie besteht nur aus ganzen und zwei grossen halben Tönen, welche zwischen der dritten und vierten und zwischen der siebenten und achten Stufe liegen. Ist der Grundton der Tonleiter  $c$ , so ist die Tonleiter jene in  $c$ -Dur.

Ebenso nun aber wie von dem Grundtone  $c$  können wir jetzt von jedem der in der  $c$ -Durtonleiter gegebenen Töne wieder die diatonische Durtonleiter bilden; wir müssen dann aber zu den bisher erhaltenen Tönen neue hinzufügen. Soll die Durtonleiter von  $d$  aus gerade so beschaffen sein wie die besprochenen von  $c$  aus, so müssen die einzelnen Intervalle alle in demselben Verhältnisse stehen wie in der angegebenen Tonleiter, wir bekommen die  $d$ -Durtonleiter deshalb einfach dadurch, dass wir die für die einzelnen Intervalle der  $c$ -Tonleiter gegebenen Zahlen alle mit  $\frac{9}{8}$  multipliciren. Die sich auf diese Weise ergebenden Zahlen für die einzelnen Töne der Tonleiter sind dann folgende:

$$\frac{9}{8}; \frac{81}{64} = \frac{5}{4}; \frac{81}{80}; \frac{45}{32} = \frac{4}{3}; \frac{25}{24}; \frac{81}{80}; \frac{3}{2}; \frac{27}{16} = \frac{5}{3}; \frac{81}{80}; \frac{15}{8};$$

$$\frac{135}{64} = 2 \cdot \frac{25}{24}; \frac{81}{80}.$$

Von diesen Zahlen sind die erste, vierte und sechste schon in der c-Durtonleiter vorhanden als *d*, *g*, *h*; die zweite und fünfte dagegen sind um ein Komma höher als die entsprechenden *c* und *a* in der Tonleiter von *c*; wir wollen dieselben, um diese Erhöhung anzudeuten, mit  $\bar{e}$  und  $\bar{a}$  bezeichnen. Wesentlich verschieden von den frühern Tönen sind der dritte und siebente, sie sind um einen kleinen halben Ton und ein Komma höher als die entsprechenden Töne der ersten Tonleiter *f* und *c*. Der Grund dieser Erhöhung liegt darin, dass in der Durtonleiter zwischen der zweiten und dritten Stufe sowie der sechsten und siebenten Stufe ein ganzer Ton liegen muss, dagegen zwischen der dritten und vierten, wie zwischen der siebenten und achten Stufe ein halber Ton vom Werthe  $\frac{16}{15}$ . Die um einen halben Ton erhöhten Töne bezeichnet man durch Anhängung der Silbe *is* an den den betreffenden Ton bezeichnenden Buchstaben. Der Ton, der  $\frac{1}{2}$  Ton höher ist als *f*, heisst demnach *fis*, der um  $\frac{1}{2}$  Ton höher liegende als *c* heisst *cis*. Musikalisch werden dieselben durch ein dem betreffenden Tone vorgesetztes Doppelkreuz bezeichnet, so dass *cis* =  $\sharp c$  ist. Die in der *d*-Durtonleiter liegenden *fis* und *cis* sind nun um ein Komma mehr als einen halben Ton höher als die betreffenden Töne der Tonleiter in *c*, wir wollen, um das hervorzuheben, dieselben mit  $\bar{fis}$  und  $\bar{cis}$  bezeichnen. Darnach wird also die Tonleiter in *d*

$$d \bar{e} \bar{fis} g \bar{a} h \bar{cis}_1 d_1;$$

sie enthält also vier Töne, welche die Tonleiter von *c* nicht enthält.

Bilden wir ganz ebenso die Tonleiter in *e*-Dur, so erhalten wir folgende Tonverhältnisse

$$\frac{5}{4}; \frac{45}{32} = \frac{4}{3}; \frac{25}{24}; \frac{81}{80}; \frac{25}{16} = \frac{3}{2}; \frac{25}{24}; \frac{5}{3}; \frac{15}{8}; \frac{25}{12} = 2 \cdot \frac{25}{24};$$

$$\frac{75}{32} = \frac{9}{4}; \frac{25}{24}.$$

oder in den für die Töne geltenden Bezeichnungen

$$e \bar{fis} g_1 a h \bar{cis}_1 \bar{dis}_1 e_1.$$

Es treten hier neu hinzu die um einen halben Ton erhöhten *g*<sub>1</sub> und *dis*<sub>1</sub>, und an die Stelle des  $\bar{cis}$  in der Tonleiter von *d* das um ein Komma tiefere *cis*<sub>1</sub>, welches genau um  $\frac{1}{2}$  Ton höher ist als *c*<sub>1</sub>.

Die diatonische Durtonleiter von *g* bietet kein neues Intervall, die einzige in ihr vorkommende Erhöhung ist die von *f* zu  $\bar{fis}$ , um von der siebenten zur achten Stufe einen halben Ton herzustellen, dieselbe wird dann

$$g \bar{a} h c_1 \bar{d}_1 e_1 \bar{fis}_1 g_1,$$

sie enthält also ausser den Tönen der Tonleiter in *c* die Töne  $\bar{a}$  und  $\bar{fis}$  jener in *d*.

Die Tonleiter in *a*-Dur liefert uns dagegen wieder einige neue, wenn auch von den bisherigen nur wenig verschiedene Töne, dieselbe wird

$$\frac{5}{3}; \frac{15}{8}; \frac{25}{12} = 2 \cdot \frac{25}{24}; \frac{20}{9} = \frac{9}{4}; \frac{80}{81}; \frac{5}{2}; \frac{25}{9} = \frac{8}{2} \cdot \frac{25}{24};$$

$$\frac{75}{24} = 3 \cdot \frac{25}{24}; \frac{10}{3}.$$

Die drei ersten Töne sind  $a$ ,  $h$ ,  $cis_1$ , der vierte ist um ein Komma tiefer als das  $d_1$  der Tonleiter in  $c$ -Dur, wir bezeichnen ihn mit  $\bar{d}_1$ ; der folgende ist  $e_1$  und dann folgt  $fis_1$ , das um genau  $\frac{1}{2}$  Ton erhöhte  $f_1$ , weiter das genau  $\frac{1}{2}$  Ton erhöhte  $g_1$  oder  $gis_1$ , und schliesslich die Octave von  $a$  oder  $a_1$ .

In den Tonzeichen wird demnach die Tonleiter in  $a$ -Dur

$$a \ h \ cis_1 \ \bar{d}_1 \ e_1 \ fis_1 \ gis_1 \ a_1.$$

Die Tonleiter von  $h$  an liefert uns, wie eine der bisherigen ganz gleiche Berechnung ergibt, die Töne

$$\begin{array}{cccccccc} h & \bar{cis}_1 & dis_1 & e_1 & \bar{fis}_1 & gis_1 & \bar{ais}_1 & h_1 \\ 15/8; & 2 \cdot 25/24 \cdot 81/80; & 9/4 \cdot 25/24; & 5/2; & 8/3 \cdot 25/24 \cdot 81/80; & 3 \cdot 25/24; & 5/3 \cdot 25/24 \cdot 81/80; & 15/4. \end{array}$$

Sehen wir zunächst von den um ein Komma verschiedenen Tönen ab, so haben wir, um diese Durtonleitern zu bilden, alle Töne, ausser  $c$  und  $h$ , um einen halben Ton erhöhen müssen. Für diese wird aber auch diese Erhöhung erforderlich, wenn wir die Durtonleiter von  $cis$  bilden, wir erhalten dann

$$cis \ dis \ cis \ fis \ gis \ ais \ his \ cis_1.$$

Um also von allen Tönen der diatonischen Durtonleiter von  $c$  ebenfalls die diatonischen Durtonleitern zu bilden, bedarf es einer Anzahl neuer Intervalle, wir müssen die Töne theils um ein Komma erhöhen,  $a$  und  $c$ , theils um ein Komma vertiefen,  $d$ ; ferner müssen wir sie alle um einen halben Ton, zum Theil auch um einen halben Ton und ein Komma erhöhen.

Stellen wir alle bis jetzt erhaltenen Töne zusammen, so ergibt sich folgende Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{cis} & \cdot & \bar{c} & & \bar{fis} & \cdot & \bar{a} \ \bar{ais} \\ c \ cis \ d \ dis \ c \ eis \ f \ fis \ g \ gis \ a \ ais \ h \ his, \\ \bar{d} \end{array}$$

es kommen also  $d$ ,  $c$  und  $a$ , sowie  $cis$ ,  $fis$  und  $ais$  in zwei um ein Komma verschiedenen Werthen vor. Wollte man nun in ähnlicher Weise auch von den bisher neu hinzugetretenen Tönen die Durtonleiter bilden, und beschränkte man sich dabei auf die reinen halben Töne, so würden zu den in obiger Zusammenstellung vorkommenden Tönen noch hinzukommen zunächst  $\bar{cis}$  und  $\bar{dis}$  und ausserdem die doppelt erhöhten Töne  $cisis$  und  $cisis$ , von denen der erstere  $\frac{25}{24}$  höher ist als  $cis$ , der zweite als  $\bar{cis}$  und  $\bar{dis}$ ,  $fisis$ ,  $fisis$ ,  $gis$ ,  $gis$ ,  $ais$ . Wir müssten also noch 9 Töne hinzufügen, so dass wir im Ganzen 29 Töne erhielten.

Die so erhaltenen 29 Töne würden indess dem musikalischen Bedürfnisse noch nicht genügen; schon wenn wir die Durtonleiter von  $f$  bilden wollen; bedürfen wir eines neuen Intervalles. Wir erhalten dieselbe ganz in der bisherigen Weise, indem wir die Tonzahlen der  $c$ -Durreihe mit  $\frac{4}{3}$  multipliciren, dieselbe wird dann

$$\frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}; \ 2; \frac{20}{9} = \frac{9}{4} \cdot \frac{80}{81}; \frac{10}{4}.$$



Mit Ausnahme des vierten Tones finden sich diese Töne bereits in den frühern Tonleitern, sie sind

$$f g a c_1 d_1 e_1;$$

der vierte ist indess nicht nur neu, sondern auch in ganz anderer Weise gebildet, nämlich durch Vertiefung eines Tones  $h = \frac{15}{8}$  um einen halben Ton und ein Komma. Die Vertiefung eines Tones um einen halben Ton wird in der Musik dadurch bezeichnet, dass man vor denselben ein  $b$  setzt, die Namen der vertieften Töne erhält man, indem man an denjenigen des Tones, zu welchem die Vertiefung gehört, die Silbe  $es$  oder den Buchstaben  $s$  hängt; nur die Vertiefung von  $h$  führt den Namen  $b$ . Das in die  $f$ -Durtonleiter eintretende  $b$  ist, wie wir sahen, um einen halben Ton und ein Komma tiefer als  $h$ , wir müssen deshalb diesen Ton als  $b$  bezeichnen.

Ebenso wie in der Durtonleiter von  $f$  für  $h$ , so erhalten wir für alle übrigen Töne vertiefte Töne, wenn wir in ähnlicher Weise wie durch den Durdreiklang eine Tonleiter ableiten durch Anwendung des Molldreiklangs mit der kleinen Terz. Bilden wir die drei Molldreiklänge von Grundton, Quint und Unterquint, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} 1) \text{ aus der Unterquint } \frac{2}{3} \dots \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1 \\ 2) \text{ aus dem Grundton } 1 \dots 1 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} \\ 3) \text{ aus der Quint } \frac{3}{2} \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{4} \end{array}$$

oder wenn wir die Verhältnisse der Grösse nach ordnen und wiederum von den nicht zwischen 1—2 fallenden Tönen die entsprechenden Octaven nehmen

$$1 \frac{9}{8} \frac{6}{5} \frac{4}{3} \frac{3}{2} \frac{8}{5} \frac{9}{5} 2.$$

Von diesen Intervallen ist das siebente

$$\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = b$$

und das sechste

$$\frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25},$$

also die um einen halben Ton vertiefte Sext, welche mit  $as$  bezeichnet wird.

Nach den musikalischen Zeichen ist somit die Molltonleiter

$$c d es f g as b c$$

und das Verhältniss der einzelnen Töne darin

$$\frac{9}{8} \frac{16}{15} \frac{10}{9} \frac{9}{8} \frac{16}{15} \frac{9}{8} \frac{10}{9},$$

von der zweiten zur dritten und von der fünften zur sechsten Stufe findet sich ein halber Ton, die übrigen Intervalle sind ganze Töne.

Diese Tonleiter, welche aus dem Molldreiklange entsteht wie die Durtonleiter aus dem Durdreiklange, ist die diatonische Molltonleiter. Es ist jedoch zu bemerken, dass man die Molltonleiter häufig auch so bildet, dass man von der Oberquint den Durdreiklang nimmt, wodurch in die Tonleiter statt  $b$  der Ton  $h$  eintritt. Dann wendet man aufsteigend statt  $as$  auch den Ton  $a$  an, absteigend pflegt man dann aber doch für  $h$  den Ton  $b$  zu nehmen, so dass dann die Tonleiter wird

$$\text{aufsteigend } c d es f g a h c$$

$$\text{absteigend } c d es f g as b c$$

wie wir sie oben hinschrieben.

Bilden wir nun auch hier von den verschiedenen Tönen der Molltonleiter in  $c$  die Molltonleitern, so erhalten wir ausser den angegebenen noch weitere vertiefte Töne. Die Molltonleiter von  $d$  verlangt von neuen Intervallen nur  $\bar{f}$  und  $\bar{c}_1$ , sie wird nach unserer Bezeichnung

$$d \bar{e} \bar{f} g \bar{a} b \bar{c}_1 d_1.$$

Die Molltonleiter von  $es$  wird

$$\frac{6}{5}, \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{80}, \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2 \cdot \frac{24}{25}, \frac{9}{4} \cdot \frac{24}{25},$$

oder in Zeichen

$$es \bar{f} ges as b ces des;$$

es treten als neue Vertiefungen hinzu  $ges$ ,  $ces$  und  $des$ .

Die Molltonleiter von  $f$  enthält folgende Töne

$$\frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{16}{9} \quad 2 \quad \frac{32}{15} \quad \frac{36}{15} \quad \frac{8}{3}$$

$$f \quad g \quad as \quad \underline{b} \quad c_1 \quad \underline{des}_1 \quad es_1 \quad f_1;$$

es tritt also hier ein gegen das  $des$  der  $e$ -Molltonleiter um ein Komma vertieftes  $des$  auf. In der Tonleiter von  $g$  tritt kein neues Intervall auf, sie ist

$$g \bar{a} b c_1 d_1 es_1 \bar{f}_1 g_1$$

und schliesslich wird die Tonleiter in  $as$ -Moll,

$$\frac{8}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 2 \cdot \frac{24}{25} \quad \frac{9}{4} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{8}{3} \cdot \frac{24}{25} \quad 3 \cdot \frac{24}{25} \quad \frac{16}{5},$$

$$as \quad b \quad ces_1 \quad \underline{des}_1 \quad es_1 \quad fes_1 \quad ges_1 \quad as_1$$

sie besteht also aus allen vertieften Tönen, und zwar mit Ausnahme von  $des_1$  aus gerade um  $\frac{1}{2}$  Ton vertieften Tönen. Stellen wir die bis jetzt durch die Molltonleitern erhaltenen neuen Intervalle zusammen, so sind dieselben

$$\bar{c} \quad ces \quad des \quad es \quad \bar{f} \quad fes \quad ges \quad as \quad b$$

$$\underline{des} \quad \underline{b},$$

wir erhalten also ausser den sieben gerade um einen halben Ton vertieften Tönen zwei, die um einen halben Ton und ein Komma vertieft sind. Die Tonleiter in  $b$ -Moll würde zu diesen noch  $\bar{as}$  hinzufügen, so dass wir auch drei Arten von vertieften halben Tönen zu unterscheiden haben, solche, welche genau um einen halben Ton unserer Töne der  $c$ -Durtonleiter vertieft sind, und solche, welche ein Komma mehr oder ein Komma weniger vertieft sind. Eine weitere Fortsetzung in der Bildung dieser Tonleitern würde uns nun, wenn wir uns auch hier auf die genau um  $\frac{1}{2}$  Ton vertieften Töne beschränken, zu den oben hingeschriebenen Tönen noch liefern  $\bar{ces}$ ,  $\bar{es}$ ,  $\bar{fes}$ , und ausserdem die doppelt vertieften Töne  $ceses = \frac{24}{25} \cdot \frac{24}{25} \cdot c$ ,  $deses$  und  $deses$ ,  $ceses$ ,  $geses$ ,  $ases$ ,  $bb$  und  $\underline{bb}$ , so dass wir also durch die Bildung der Molltonleitern im Ganzen zu den frühern noch 23 neue Intervalle hinzubekämen. Unser Tonsystem, oder die vollständige Tonleiter einer Octave würde somit aus 52 Tönen, oder wenn wir die Octave als Schlussston hinzunehmen, aus 53 Tönen bestehen. Das Tonsystem vom tiefsten zum höchsten in den gewählten Zeichen würde sein:

$\bar{c}$   $\bar{cis}$   $\bar{cisis}$   $\bar{es}$   $\bar{e}$   $\bar{eis}$   $\bar{fes}$   
*c cis cisis deses des d dis disis eses es e eis fes*  
deses des d dis  
 $\bar{f}$   $\bar{fis}$   $\bar{fisis}$   $\bar{as}$   $\bar{a}$   $\bar{ais}$   
*f fis fisis geses ges g gis gisis ases as a ais aisis*  
 $\bar{ces}_1$   
*bb b h his ceses<sub>1</sub> ces<sub>1</sub> c.*  
bb b

Die Schwingungszahlen der Hauptreihe, jedoch ohne die doppelt tiefsten und erhöhten Töne, gibt folgende Zusammenstellung:

<i>c</i>	1	Prim
# <i>c</i> = <i>cis</i>	$\frac{25}{24}$	übermässige Prim
<i>b d</i> = <i>des</i>	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$	kleine Sekunde
<i>d</i>	$\frac{9}{8}$	grosse Sekunde
# <i>d</i> = <i>dis</i>	$\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64}$	übermässige Sekunde
<i>b e</i> = <i>es</i>	$\frac{6}{5}$	kleine Terz
<i>e</i>	$\frac{5}{4}$	grosse Terz
# <i>e</i> = <i>eis</i>	$\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{96}$	übermässige Terz
<i>b f</i> = <i>fes</i>	$\frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{96}{75} = \frac{32}{25}$	verminderte Quarte
<i>f</i>	$\frac{4}{3}$	reine Quarte
# <i>f</i> = <i>fis</i>	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{100}{72} = \frac{25}{18}$	übermässige Quarte
<i>b g</i> = <i>ges</i>	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$	verminderte Quinte
<i>g</i>	$\frac{3}{2}$	reine Quinte
# <i>g</i> = <i>gis</i>	$\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16}$	übermässige Quinte
<i>b a</i> = <i>as</i>	$\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{120}{75} = \frac{8}{5}$	kleine Sexte
<i>a</i>	$\frac{5}{3}$	grosse Sexte
# <i>a</i> = <i>ais</i>	$\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$	übermässige Sexte
<i>b h</i> = <i>b</i>	$\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{360}{200} = \frac{9}{5}$	kleine Septime
<i>h</i>	$\frac{15}{8}$	grosse Septime
# <i>h</i> = <i>his</i>	$\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{375}{192} = \frac{125}{64}$	übermässige Septime
<i>b c</i> = <i>ces</i>	$2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{25}$	verminderte Octave
<i>c</i> <sub>1</sub>	2	reine Octave.

Die doppelt erhöhten oder doppelt vertieften Töne erhält man aus ser Tabelle, indem man die entsprechenden einfach erhöhten oder vertieften Töne mit  $\frac{25}{24}$  respective  $\frac{24}{25}$  multiplicirt, die Töne der obern Reihe d Multiplication der Töne der Hauptreihe mit  $\frac{81}{80}$ , die Töne der untern E durch Multiplication mit  $\frac{80}{81}$  <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ueber die Berechnung der Tonleiter sehe man auch: *Helmholtz*, I von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 418 ff. *G. Schubring*: S. milch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. Supplementheft 1868. Gegen obiger Berechnung der Tonleiter aus den einfachen consonirenden Accorden Cornu gezeigt (Cornu und Mercadier. Comptes Rendus T. LXVIII. p. 301 u. T. LXX. p. 1168. T. LXXII. p. 178. T. LXXXVI. p. 431), dass im melodischen Gange die Terz und die von ihr abgeleiteten Intervalle anders und zwar genommen werden als in der harmonischen Musik. Bei dem Fortschreiten der Melodie soll die grosse Terz um ein Komma höher genommen werden dass also die melodische Tonleiter eine andere wäre als die harmonische, in Musik somit zwei verschiedene Tonleitern neben einander beständen.

## §. 150.

**Die musikalische Temperatur.** Die in dem vorigen Paragraphen berechnete Tonleiter würde wegen ihrer zu grossen Reichhaltigkeit im Gebrauche äusserst unbequem, ja sie würde in der Musik geradezu unbrauchbar sein, da die vielen kleinen Intervalle auf den verschiedensten Instrumenten durchaus nicht darzustellen wären. Zudem würde das Beibehalten aller jener Intervalle auch überflüssig sein, da selbst musikalisch gebildete Ohren kleine Unreinheiten eines Intervalls in einem Accorde nicht mehr wahrzunehmen im Stande sind. Unsere jetzige Musik vereinfacht daher das Tonsystem sehr bedeutend, anstatt 52 Töne wendet sie in der Tonleiter nur 12 Töne an. Zunächst lässt sie auf allen Instrumenten mit festen Tönen alle doppelt erhöhten und doppelt vertieften Töne fort, und ersetzt sie durch die nächstliegenden ganzen Töne; so setzt sie

$$cisis = d, deses = c, disis = e, eses = d \text{ etc.}$$

Der Fehler, welcher dadurch begangen wird, ist zwischen  $c$  und  $d$ ,  $f$  und  $g$ ,  $a$  und  $h = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$ , indem

$$\frac{d}{cisis} = \frac{deses}{c} = \frac{g}{fisis} \dots = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$$

ist, zwischen  $d$  und  $e$ , sowie zwischen  $g$  und  $a$  beträgt er  $\frac{128}{125}$ .

Ferner verzichtet die Musik nicht nur auf die verschieden erhöhten Töne  $fis$  und  $f̄is$  etc., sondern sie unterscheidet in der praktischen Ausführung auch nicht die einander nahe liegenden halben erhöhten und vertieften Töne, wie  $cis$  und  $des$ ,  $dis$  und  $es$ . Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle sind

$$\begin{array}{ll} \frac{des}{eis} = \frac{27}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} & \frac{es}{dis} = \frac{6}{5} \cdot \frac{64}{75} = \frac{128}{125} \\ \frac{fes}{e} = \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{125} & \frac{f}{eis} = \frac{4}{3} \cdot \frac{96}{125} = \frac{128}{125} \\ \frac{ges}{fis} = \frac{b}{ais} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} & \frac{ces}{h} = \frac{c}{his} = \frac{128}{125} \end{array}$$

Die hierdurch begangenen Fehler, wenn man die Töne als gleich setzt, also als  $des$  den Ton  $cis$  u. s. w. gebraucht, würden also ebenso gross sein, wie die durch Vernachlässigung der doppelt erhöhten oder vertieften. Würde man nun aber die eine Reihe der Töne, etwa die erhöhten, rein erhalten, so würden die Unreinheiten für die andere Reihe so stark werden, dass dieselbe ganz unbrauchbar würde; um das zu vermeiden lässt man keinen der Töne rein, sondern setzt anstatt des reinen  $cis$  oder  $des$  einen zwischen beiden liegenden Ton, dessen Werth wir sofort ableiten werden.

Schliesslich unterscheidet man auch nicht die um ein Komma verschiedenen Töne  $c$  und  $\bar{c}$  u. s. f., sondern behält nur die Töne  $c$ ,  $d$ ,  $e$  etc. bei, so dass damit das Tonsystem auf 12 Töne reducirt wird, welche alle die von uns abgeleiteten 52 repräsentiren.

Damit ist nun aber auch eine Temperatur der Töne der  $c$ -Durtonleiter nothwendig, da sonst die Unreinheit der doppelt erhöhten und vertieften Töne so gross wäre, dass man alle sie enthaltenden Tonarten absolut nicht gebrauchen könnte.

Will man nur diese 12 Töne beibehalten, so ist die Temperatur der Haupttöne der Tonleiter noch aus einem andern Grunde erforderlich. Es ist nämlich in der Musik nothwendig, von einem Tone zu irgend einem andern auf verschiedenen Wegen, das heisst durch Fortschreiten nach verschiedenen Intervallen zu gelangen. So gelangt man, wenn man von irgend einem Grundtone nach Octaven fortschreitet, immer zu den höhern Octaven

$$\begin{array}{cccccccc} c & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128. \end{array}$$

So soll man aber auch durch 12 reine Quinten von  $c$  aus zu einer höhern Octave gelangen

$$c \ g \ d_1 \ a_1 \ e_2 \ h_2 \ fis_3 \ cis_4 \ gis_4 \ dis_5 \ ais_5 \ f_6 \ c_7$$

und das  $c$ , zu welchem man gelangt, muss das durch Octaven erreichte  $c_7$  sein.

Berechnet man nun aber  $c_7$  durch 12 reine Quinten, so findet man den Werth

$$c_7 = \frac{531441}{4096},$$

während nach Octaven

$$c_7 = \frac{524288}{4096} = 128$$

ist. Man findet also beim Fortschreiten nach Quinten  $c_7$  im Verhältniss von

$$\frac{531441}{524288} = \frac{129,7}{128},$$

oder nahezu im Verhältniss von  $\frac{65}{64}$  zu hoch.

Gleiches zeigt sich bei andern Fortschreitungen, und zwar in noch erhöhtem Maasse; so sollte ein Fortschreiten durch drei grosse Terzen

$$c \ e \ gis \ c_1$$

die nächst höhere Octave liefern; diese Fortschreitung ergibt indessen

$$1 \ \frac{5}{4} \ \frac{25}{16} \ \frac{125}{64},$$

anstatt  $c_1 = \frac{128}{64}$  erhalten wir demnach einen um das Komma  $\frac{125}{128}$  zu niedrigen Ton.

Schreiten wir demnach nach reinen Intervallen fort, so verlieren die höhern Töne ihre Reinheit gegen den Grundton, man gelangt niemals zu einer reinen Octave, will man aber die Intervalle gegen den Grundton festhalten, so werden die einzelnen Intervalle unrein. Dasselbe ist bei auf und ab steigender Bewegung und Benutzung verschiedener Intervalle der Fall. So gibt Chladni in seiner Akustik folgendes Beispiel. Bei der Tonfolge

$$g \ c \ f \ d \ g \ c$$

geht man zunächst eine reine Quint abwärts, dann eine Quart aufwärts, eine kleine Terz abwärts, eine Quarte aufwärts und schliesslich eine Quinte abwärts. Das Verhältniss der Töne zum Grundton  $c$  ist

$$\frac{3}{2} \ 1 \ \frac{4}{3} \ \frac{9}{8} \ \frac{3}{2} \ 1.$$

Gehen wir dagegen nach reinen Intervallen, so werden die entsprechenden Zahlen

$$\frac{3}{2}; 1; \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}; \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{27}; \frac{40}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{81}.$$

Wir gelangen also weder zu dem reinen *g* zurück, von dem wir ausgingen, noch zum Grundtone. Eine weitere Fortsetzung solcher Fortschreitungen nach reinen Intervallen würde die nachkommenden immer weiter von den reinen Tönen entfernen. Deshalb und besonders weil die Fortschreitungen nach verschiedenen Intervallen ganz verschiedene Abweichungen von den reinen Tonverhältnissen, so z. B. die reinen Quinten zu hohe, die reinen Terzen zu tiefe Töne geben, können in der Musik, wenn man das Tonsystem auf 12 Töne beschränkt, die reinen Intervalle gar nicht angewandt werden, selbst wenn man auf allen Instrumenten die Töne alle ganz rein hervorbringen könnte. Man muss daher alle Töne modificiren, oder wie es in der Musik heisst, temperiren.

Die Temperatur kann nun nach verschiedenen Prinzipien hergestellt werden; man nimmt entweder einige Intervalle rein und vertheilt die andern Intervalle, so dass man dadurch bei den verschiedenen Fortschreitungen immer zu denselben Tönen kommt. So sind z. B. in der Kirnberger'schen Temperatur neun Quinten ganz rein, drei dagegen *fis* — *cis*, *d* — *a*, *a* — *e* unrein, und zwar ist der Fehler, der beim Fortschreiten durch 12 Quinten entsteht, auf diese drei Quinten vertheilt.

Indess sind die sogenannten ungleichschwebenden Temperaturen zu verwerfen, da dadurch auf Kosten einiger Intervalle die andern um so unreiner werden.

Die in der Musik gebräuchliche Temperatur verändert alle Intervalle ausser den Octaven; diese müssen rein sein, da die Octaven dem Einklange am nächsten stehen, deshalb ebenso, wie eine Unreinheit des Einklages, auch die der Octaven am leichtesten gehört wird und am störendsten ist. Die zwölf innerhalb einer Octave liegenden Töne werden dann alle als gleichweit von einander abstehend betrachtet, so dass das Tonverhältniss zweier auf einander folgender Töne constant oder

$$\frac{cis}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} \dots \dots = \frac{c_1}{h} = i$$

gesetzt wird.

Dieses Intervall *i* wird dann als halber Ton betrachtet, dessen Werth sich dann daraus ergibt, dass

$$cis = i \cdot c, d = i \cdot cis = i^2 \cdot c \dots c_1 = i \cdot h = i^{12} \cdot c.$$

Setzen wir nun  $c = 1$ , so wird

$$c_1 = 2 = i^{12} \\ i = \sqrt[12]{2} = 1,05946.$$

Nach der gleichschwebenden Temperatur erhalten wir darnach statt der reinen Schwingungsverhältnisse folgende, zusammengestellt mit den reinen Schwingungsverhältnissen und dem Fehler der temperirten gegen die reinen Töne. Letztere sind in Form von Decimalbrüchen gegeben, dessen Zähler jedesmal die temperirte, dessen Nenner die reine Schwingungszahl ist. Ist demnach in der Rubrik Fehler des temperirten Tones die Zahl

grösser als 1, so ist der temperirte Ton zu hoch, ist die Zahl ein echter Bruch, so ist der temperirte Ton zu tief.

Name des Tones	Reines Schwingungsverhältniss	Temperirtes Schwingungsverhältniss	Fehler des temperirten Tones
<i>c</i> . . . . .	1 = 1	1	1
<i>cis</i> . . . . .	$\frac{25}{24} = 1,04166$	} . . . . 1,05946	1,01708
<i>des</i> . . . . .	$\frac{27}{25} = 1,08000$		0,98098
<i>d</i> . . . . .	$\frac{9}{8} = 1,12500$	} . . . . 1,12246	0,99774
<i>dis</i> . . . . .	$\frac{75}{64} = 1,17187$		1,01479
<i>es</i> . . . . .	$\frac{6}{5} = 1,20000$	} . . . . 1,18921	0,99101
<i>e</i> . . . . .	$\frac{5}{4} = 1,25000$		1,01026
<i>fes</i> . . . . .	$\frac{32}{25} = 1,28000$	} . . . . 1,25992	0,98433
<i>eis</i> . . . . .	$\frac{125}{96} = 1,30208$		1,02516
<i>f</i> . . . . .	$\frac{4}{3} = 1,33333$	} . . . . 1,33484	1,00113
<i>fis</i> . . . . .	$\frac{25}{18} = 1,38889$		1,01823
<i>ges</i> . . . . .	$\frac{36}{25} = 1,44000$	} . . . . 1,41421	0,98209
<i>g</i> . . . . .	$\frac{3}{2} = 1,50000$		0,99888
<i>gis</i> . . . . .	$\frac{25}{16} = 1,56250$	} . . . . 1,58740	1,01593
<i>as</i> . . . . .	$\frac{8}{5} = 1,60000$		0,99212
<i>a</i> . . . . .	$\frac{5}{3} = 1,66666$	} . . . . 1,68179	1,00907
<i>ais</i> . . . . .	$\frac{125}{72} = 1,73611$		1,02631
<i>b</i> . . . . .	$\frac{9}{5} = 1,80000$	} . . . . 1,78180	0,98989
<i>h</i> . . . . .	$\frac{15}{8} = 1,87500$		1,00680
<i>ces</i> . . . . .	$\frac{48}{25} = 1,92000$	} . . . . 1,88775	0,98320
<i>his</i> . . . . .	$\frac{125}{64} = 1,95313$		1,02407
<i>c<sub>1</sub></i> . . . . .	2 = 2,00000	2,00000	1

Wie man sieht, weichen die temperirten Verhältnisse von den reinen stellenweise nicht unbeträchtlich ab; in demselben und zum Theil noch höhern Maasse weichen dieselben von den reinen doppelt erhöhten und doppelt vertieften ab, an deren Stelle die temperirten Töne gesetzt werden. So wird das temperirte *d* für *eses* eingesetzt, obwohl die Schwingungszahl des temperirten *d* nur 0,97396 des reinen *eses* beträgt. Wenn nun auch das Ohr in Accorden sehr kleine Unreinheiten nicht mehr wahrnehmen kann, so sind die oben berechneten doch zu gross, als dass nicht der Wohlklang der Accorde dadurch wesentlich beeinträchtigt werden sollte. Deshalb ist es durchaus wünschenswerth, dass an Stelle der gleichschwebenden Temperatur eine andere eingeführt werden könne, welche diese Unreinheiten nicht zeigt. Die Möglichkeit dazu ist aber nur gegeben, wenn man das Tonsystem erweitert, und statt 12 eine grössere Zahl von Tönen beibehält. Es hat das eigentlich nur Schwierigkeit für die Instrumente mit festen Tönen, da z. B. an den Streichinstrumenten die verschiedenen Töne doch verschieden gegriffen werden, es anders als *dis* u. s. f. Für ein Instrument mit festen Tönen hat Helmholtz<sup>1)</sup> und später Appunn<sup>2)</sup> vor kur-

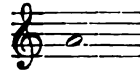
<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. p. 483 ff.

<sup>2)</sup> Appunn, die Beschreibung des Appunn'schen Harmoniums gibt Schreibung in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik. Supplementheft 1868. p. 124 ff.

dem eine Tonreihe gegeben und praktisch ausgeführt, welche fast den reinen Tönen gleichkommt; die Tonreihe von Helmholtz hat 30 Töne, die von Appun 36, der Wohlklang der Accorde soll auf diesen Instrumenten, wie zu erwarten stand, viel höher sein, als auf den temperirten. Ob in der Instrumentalmusik eine ähnliche Tonreihe möglich ist, müssen die Musiker entscheiden.

## §. 151.

**Absolute Schwingungszahl der Töne.** Bisher haben wir das Verhältniss der Töne zu einander ins Auge gefasst. Da wir vorhin sahen, dass das Verhältniss der musikalischen Töne ganz dasselbe ist für die hohen und tiefen Regionen, so ist es natürlich einerlei, von welchem Tone man ausgeht, welche Schwingungszahl man als diejenige des Grundtones annimmt. Um indess die verschiedenen Instrumente mit einander stimmen zu können und überhaupt durch die oben erwähnten Zeichen bestimmte Töne zu bezeichnen, hat man für einen bestimmten Ton, der ungefähr in der Mitte der in der Musik gebräuchlichen Töne liegt, eine bestimmte Höhe angenommen. Es ist der als eingestrichene *a* bezeichnete Ton



Von diesem Tone aus werden die übrigen Töne bestimmt. Der um eine Sext tiefere Ton ist das eingestrichene *c*. Die in der Musik meist gebräuchtesten Töne liegen theils höher, theils tiefer als dieses *c*, und zwar steigt die Musik drei Octaven hinab und vier hinauf. Die unterhalb diesem liegende Octave heisst die kleine Octave, die in ihr liegenden Töne werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet; die nächst tiefere, mit den grossen Buchstaben bezeichnete, ist die grosse Octave und unter dieser die Contraoctave, welche man durch grosse Buchstaben mit einem kleinen Querstrich darunter bezeichnet. Die höhern Octaven werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet und zur Angabe ihrer Höhe mit kleinen Querstrichen darüber versehen. Die auf die kleine Octave folgende ist die eingestrichene, die nächsthöhere die zweigestrichene u. s. f. Wir wollen indess unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten und die eingestrichene Octave durch eine kleine 1, die zweigestrichene durch eine kleine 2 etc. unten rechts an den den Ton angehenden Buchstaben bezeichnen. Die in der Musik angewandten Töne liegen, nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, zwischen den Octaven

$$\underline{C} \ C \ c \ c \ c \ c \ c \ c$$

Nur wenige Instrumente gehen über diese sieben Octaven hinaus.

Um den Ton des eingestrichenen *a*<sub>1</sub>, nach welchem die Stimmung geregelt wird, zu bestimmen und zu fixiren, hat man die Stimmgabel construirt. Dieselbe besteht aus einem gabelförmig gebogenen Stahlstabe, an welchem unten an der Biegung ein Stäbchen angebracht ist (Fig. 258). Die Gabel wird dadurch zum Tönen gebracht, dass man sie mit einer der Zinken an einen festen Körper anschlägt, sie schwingt dann so, wie Fig. 259 an-



zeigt, mit zwei Schwingungsknoten in der Nähe der Biegung, wie ein beider Enden freier, in transversale Schwingungen versetzter Stab. beiden Zinken schwingen zugleich nach innen und die Biegung nach u

Fig. 258.

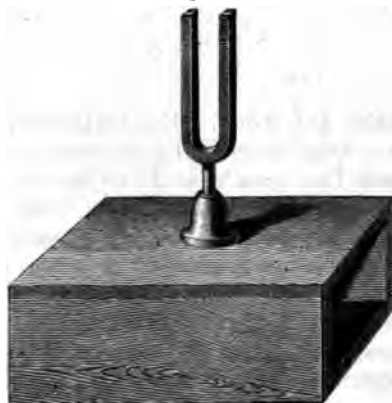
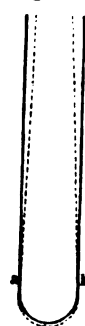


Fig. 259.



dann die Zinken nach aussen und die Biegung nach oben hin. Die der Stimmgabel allein sind sehr schwach; um sie zu verstärken, setzt sie auf einen Tisch, der dann, wie wir später sehen werden, durch Resonanz den Ton verstärkt. Grössere Stimmgabeln, welche nicht  $a_1$ , sondern  $c$  geben, sind meist auf besondern Resonanzkästchen befestigt, in die die Luftsäule für sich schwingend denselben Ton gibt als die Gabel deshalb durch ihre Schwingungen den Ton ganz bedeutend verstärkt. streicht solche Gabeln mit einem Bassbogen an, den man parallel Schwingungsebene an den Zinken der Gabel vorüberführt.

Messungen der Schwingungszahl des durch die  $a_1$ -Stimmgabel bestimten Tones haben nun ergeben, dass dieser Ton keineswegs überall die gleiche Schwingungszahl hat. Fischer fand im Jahre 1822, dass die Schwingungszahl des Tones  $a_1$  im Orchester des Berliner Theater gleich 437 war; jene des Tones  $a_1$  des Orchesters der grossen Oper zu Paris war vom Théâtre Feydeau = 428 und des Théâtre Italien = 424 Schwingungen in der Sekunde<sup>1)</sup>.

Scheibler<sup>2)</sup> fand 1833 den Ton von fünf Pariser  $a_1$ -Gabeln von 440 bis 440,7, von einer Gabel des Berliner Orchesters 441,62, und von vier Gabeln des Wiener Orchesters zwischen 433,66 und 444,87 Schwingungen in der Sekunde.

Scheibler machte darauf 1834 auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Stuttgart den Vorschlag, den Ton  $a_1$  zu 440 Schwingungen festzusetzen, indess ist die Stimmung der Orchester darnach nicht normirt worden und sie blieb nach wie vor schwankend. Neuerdings<sup>3)</sup> nun in Frankreich bestimmt worden, dass der Ton  $a_1$  zu 435 Schwingungen in der Sekunde gesetzt werden solle, um dort überall eine gleichmässige Stimmung her-

<sup>1)</sup> Fischer in den Denkschriften der Berliner Akademie für 1824.

<sup>2)</sup> Nach der Angabe von Röber. Dove, Repertorium. III.

<sup>3)</sup> Nach dem Mouiteur universel 25. fevrier 1859.

zubringen, und seitdem ist auch bei einer grossen Anzahl deutscher Orchester dieselbe Stimmung angenommen worden.

Gehen wir von dieser Schwingungszahl aus, so wird darnach

$$c_1 = \frac{a_1}{1,68179} = \frac{435}{1,68179} = 258,65.$$

Die Schwingungszahlen der vorhin angegebenen Töne werden darnach folgende

$$\begin{aligned} C &= c_{-2} = 32,33 & c_2 &= 517,30 \\ C &= c_{-1} = 64,66 & c_3 &= 1034,60 \\ & c = 129,32 & c_4 &= 2069,20 \\ & c_1 &= 258,65 & c_5 &= 4138,40 \end{aligned}$$

wonach man leicht im Stande sein wird, die Schwingungszahlen aller übrigen in der Musik gebräuchlichen Töne zu berechnen.

Die hier angegebenen Töne sind indess nicht die überhaupt hörbaren Töne, sowohl Töne unterhalb  $c_{-2}$  als oberhalb  $c_5$  sind noch hörbar. In den grössern Orgeln findet sich noch eine ganze Octave tieferer Töne bis zum  $c_{-3}$ , dem Subcontra  $C$ , welches 16 Schwingungen in der Sekunde vollführt, und Savart behauptete nach seinen Versuchen<sup>1)</sup>, dass bei hinreichender Stärke Töne selbst bei 7—8 Schwingungen in der Sekunde hörbar seien. Savart liess einen Eisenstab um eine horizontale Axe sich drehen und stellte ihn so auf, dass er bei jeder Umdrehung durch einen Spalt eines Brettes schlug und dabei die Ränder berührte. Jeder Durchtritt gab einen heftigen Schlag und war die Umdrehungsgeschwindigkeit so gross, dass der Eisenstab in der Sekunde 7—8 mal die Spalte passirte, so hörte man einen sehr tiefen und lauten Ton. Savart glaubte, dass dieser Ton Folge der acht Stösse des Eisenstabes an der Brettspalte sei.

Schon Despretz<sup>2)</sup> indessen widersprach dem und bemerkte dagegen, dass, wenn Savart's Schluss richtig sei, die doppelte Umdrehungsgeschwindigkeit oder die Anwendung zweier Spalten auch die höhere Octave des zuerst gehörten Tones hätte erzeugen müssen. Der Versuch ergibt aber einen von dem vorigen nur wenig verschiedenen Ton, so dass der Ton sich nicht aus den einzelnen Schlägen zusammengesetzt haben kann.

Helmholtz<sup>3)</sup> wies nach, dass die Methode von Savart zur Untersuchung dieser Frage ganz ungeeignet sei, da die Dauer jedes einzelnen Stosses gegen die Zwischenzeit zweier Stösse, also die Schwingungsdauer der durch sie erzeugten Schwingungen zu kurz sei. Es müssen deshalb die Obertöne sehr stark entwickelt sein, so dass die tiefsten gehörten Töne nichts als Obertöne sind. Er hat deshalb die Frage nach den tiefsten Tönen wieder aufgenommen, und gelangt zu einem wesentlich andern Resultat, er findet, dass die Tonempfindung erst beginnt bei etwa 30 Schwingungen und dass erst bei etwa 40 Schwingungen der Ton eine bestimmte musikalische Höhe hat. Helmholtz schloss dieses besonders aus einem Versuch mit einer in der Mitte belasteten Saite, welche in Folge der Belastung fast nur die

<sup>1)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. Tome XLVII. Poggend. Ann. XX.

<sup>2)</sup> Despretz, Comptes rendus de l'Académ. de France. Tome XX. Poggend. Ann. Bd. LXV.

<sup>3)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. p. 266 ff.

langsamsten Schwingungen, bei denen die Saite der ganzen Länge nach schwingt, vollführt. Die Saite wurde auf einen Resonanzkasten ausgespannt, der nur eine Oeffnung hatte, und diese konnte mit dem Gehörgange verbunden werden, so dass die Luft des Resonanzkastens nur in das Ohr hinein entweichen konnte. Die Töne einer Saite von gewöhnlicher Höhe sind unter diesen Umständen von unerträglicher Stärke. Dagegen war die Tonempfindung, als die Saite 37 Schwingungen machte, nur mehr noch schwach und hatte auch diese etwas knarrendes, was darauf schliessen lässt, dass das Ohr anfang, die einzelnen Stösse zu fühlen. Bei 31 Schwingungen war kaum noch etwas zu hören.

Später hat Helmholtz<sup>1)</sup> dasselbe mit zwei von König hergestellten Stimmgabeln gezeigt, deren Stimmung durch an den Zinken verschiebbare Gewichte geändert werden konnte. Die Zahl der jeder Lage des Gewichts entsprechenden Schwingungen ist auf einer an den Zinken angebrachten Skala angegeben; die eine Gabel gibt in der Sekunde je nach der Lage des Gewichtes 25—35, die andere 35—61 Schwingungen. Die Gewichte haben die Form von Platten. Bringt man das Ohr ganz nahe an diese Platten, so hört man die tiefen Töne sehr gut. Bei 30 Schwingungen hört man dann noch deutlich einen schwachen dröhnenden Ton, bei 28 kaum noch eine Spur, obgleich man leicht Oscillationen von 9<sup>mm</sup> Amplitude in dieser Weise ganz dicht vor dem Ohr erzeugen kann.

Darnach würde also das  $c_{-2}$  der tiefste musikalische Ton sein, und die ganze Subcontraoctave der Orgel keine eigentlichen Töne, sondern nur noch ein Geräusch geben, indem das Ohr die einzelnen Stösse fühlt. Es ist in der That für diese Töne selbst einem musikalisch gebildeten Ohre nicht möglich, eine bestimmte Tonhöhe anzugeben.

Nach oben hin ist die Reihe der hörbaren Töne weniger begrenzt, indess findet sich hier, dass verschiedene Personen für solche Töne verschieden empfindlich sind, und selbst eine Person mit dem einen Ohr oft höhere Töne wahrnehmen kann als mit dem andern. So gibt Brewster an, dass er das Heimchenzirpen nur mit einem Ohre hörte, während für gewöhnliche Töne beide Ohren gleich empfindlich waren<sup>2)</sup>.

Sind die Töne hinreichend stark, so können noch sehr hohe Töne gehört werden; so brachte Savart<sup>3)</sup> mit seinem gezahnten Rade noch deutlich das  $fis_7$  mit 24000 Schwingungen hervor, und Despretz<sup>4)</sup> fand, dass mittels Stimmgabeln, welche auf Resonanzkasten standen, noch das  $d_3$  mit über 36000 Schwingungen hörbar war.

### §. 152.

**Analyse des Klanges.** Wir haben bereits im §. 145 darauf hingewiesen, dass Töne gleicher Höhe sich durch Verschiedenheit ihrer Klangfarbe unterscheiden, und bemerkt, dass die Verschiedenheit des Klanges ihren Grund darin habe, dass die Form der Schwingungen bei gleicher Periode eine verschiedene sei; eine Verschiedenheit, welche darauf beruht

<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe. p. 279.

<sup>2)</sup> Brewster, Philosophical Magazin. vol. XXV.

<sup>3)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. T. XLIV.

<sup>4)</sup> Despretz a. a. O.

dass die Schwingungen zusammengesetzt periodische sind, dass innerhalb der durch den Grundton angegebenen Periode die Lufttheilchen gleichzeitig nach andern höhern Tönen angehörigen Perioden schwingen. Bei der Besprechung der zusammengesetzten Schwingungen (§. 137) sahen wir schon, dass bei den Schwingungen der meisten Körper nicht einfache Schwingungen, welche durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt sind, sich finden, sondern dass zu diesen stets solche hinzutreten, deren Schwingungsdauern Vielfache der ersten sind, dass also die Schwingungen im allgemeinen durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cdot \sin 4\pi \frac{t}{T} + c \cdot \sin 6\pi \frac{t}{T} + \dots + p \cdot \sin n\pi \frac{t}{T}$$

gegeben sind. Bei den verschiedenen schwingenden Körpern können die Verhältnisse zwischen den Amplituden der einzelnen Schwingungen, sowie die Anzahl der Glieder dieser Reihe je nach Art und Stelle der Erregung sehr verschieden sein.

Wie wir nun §. 147 sahen, stellen die einzelnen Glieder der zuletzt hingeschriebenen Reihe die harmonischen Obertöne des durch das erste Glied dargestellten Tones vor, also wenn wir den letztern mit  $c$  bezeichnen, die Reihe

$$c, c_1, g_1, c_2, e_2, g_2, \text{Ton } 7, c_3, d_3 \dots$$

Ist demnach die vorhin ausgesprochene Annahme über die Ursache der Klangverschiedenheit die richtige, so würde das bedeuten, dass die verschiedenen Klänge nicht einfache Töne, sondern Accorde sind, welche von der Reihe der harmonischen Töne gebildet werden, und dass ihre Verschiedenheit darin beruht, dass in diesen Accorden mehr oder weniger Töne der Reihe vorhanden sind, und dass die Stärke der einzelnen Töne eine verschiedene ist.

Ohm<sup>1)</sup> war der erste, der den Satz aufstellte, dass das Ohr die Fähigkeit habe, jede in einer zusammengesetzten vorhandene einfache Schwingung als Ton gesondert wahrzunehmen, ohne jedoch daran den Schluss zu knüpfen, dass in der Wahrnehmung der verschiedenen Obertöne der Grund der Klangverschiedenheit liege. Seebeck<sup>2)</sup> nahm dem gegenüber an, dass in einer zusammengesetzt periodischen Schwingung die einzelnen Töne nicht zu unterscheiden wären, dass aber in der durch das Hinzutreten der weitem Schwingungen bedingten Veränderung des Schwingungsgesetzes eine Ursache der Klangverschiedenheit der Töne gleicher Höhe zu suchen sei. Erst Helmholtz<sup>3)</sup> war es, der den Nachweis lieferte, dass in einem Klange, dessen schwingende Bewegung durch obige Gleichung dargestellt ist, alle die Töne, wie sie das Gesetz von Ohm verlangt, wirklich vorhanden und dem Ohre wahrnehmbar sind, und dass die Verschiedenheit des Klanges wesentlich von den vorhandenen Obertönen bedingt ist.

<sup>1)</sup> Ohm, Poggend. Ann. Bd. LIX und LXII.

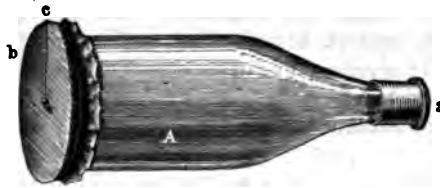
<sup>2)</sup> Seebeck, Poggend. Ann. Bd. LX und LXIII. Dove's Repertorium. Bd. VIII.

<sup>3)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt II, III, IV, V, VI.

Zum Nachweis der objectiven Existenz der Partialtöne benutzte Helmholtz das Phänomen des Mittönens, dessen Theorie wir im nächsten Kapitel etwas ausführlicher besprechen werden. Die Erscheinung besteht darin dass wenn in der Nähe eines Körpers, der Schwingungen einer ganz bestimmten Periode vollführen, das heisst also einen einfachen Ton bestimmte Höhe geben kann, Schwingungen dieser Periode erzeugt werden, der Körper dadurch mit in Schwingungen geräth, welche man entweder direkt oder dadurch wahrnehmbar machen kann, dass man den erregenden Ton anhören lässt, wodurch dann der Ton des mitschwingenden Körpers alle hörbar bleibt. Spannt man z. B. auf einem Monochord zwei Saiten genau im Einklang, und bringt die eine zum Tönen, so tönt auch die andere, oder bringt man von zwei ganz genau gleichen Stimmgabeln, wie Fig. 258, die eine zum Tönen, so wird auch die andere in Schwingung versetzt. Dieses Mittönen tritt aber nur ein, wenn die Schwingungen des mittönenden Körpers genau dieselbe Dauer haben, wie die Schwingungen des ursprünglich tönenden Körpers, schon bei geringem Unterschiede der Schwingungen tritt dasselbe nicht ein. Wenn man deshalb bei Erzeugung eines Klanges einen bestimmten Körper zum Mittönen bringt, dessen Schwingungszahl jener des in dem Klange vorhandenen Grundtones nicht entspricht, so kann man daraus mit Sicherheit schliessen, dass neben dem Grundtone der dem mittönenden Körper entsprechende Ton in dem Klange vorhanden ist.

Ein sehr bequemes Mittel, um das Mittönen zu zeigen, sind Membranen, welche wie Fig. 260 als Boden auf einer Flasche ausgespannt sind.

Fig. 260.



Der Hals der Flasche bei *a* ist offen, die Membran *b* vertritt die Stelle des Bodens; man nimmt am besten eine nasse Schweinsblase, die gleichmässig aufgespannt wird, und die man dann trocknen lässt. Bei *c* wird mit Wachs ein Cocofaden befestigt, der an seinem untern Ende ein Siegellackkugeln

trägt, das gerade vor der Mitte der Membran hängt. Wenn die Membran in Schwingungen geräth, so macht das Pendelchen die heftigsten Sprünge. Wenn die Spannung der Membran und die Grösse der Flasche richtig getroffen sind, so gibt die Membran fast nur ihren Grundton an, bei welchem sie als Ganzes schwingt, die Obertöne treten dann nur schwach hervor. Um dieselben zu erkennen muss man die Flasche vertical stellen, und die Membran zur Beobachtung der Klangfiguren mit Sand bestreuen. Die möglichen Schwingungsformen der Membran mit den dazu gehörigen Schwingungszahlen zeigt folgende kleine Tabelle:

Die Membran schwingt	Schwingungszahl
ohne Knotenlinie . . . . .	1
mit einem Kreise . . . . .	2,296
mit zwei Kreisen . . . . .	3,599
mit einem Durchmesser . . . . .	1,590
mit einem Durchmesser und einem Kreise . .	2,920
mit zwei Durchmessern . . . . .	2,140.

Bezeichnen wir den Grundton der Membran mit  $c$ , so gibt dieselbe als Obertöne  $d_1 +$ ,  $b_1 +$ ,  $as$ ,  $g_1 -$ ,  $cis_1$ , die Zeichen  $+$  und  $-$  bei den Tönen sollen anzeigen, dass der Ton der Membran etwas höher oder etwas tiefer ist als der hingeschriebene.

Die mitschwingenden Membranen haben den Vorzug, dass sie die in einer Klangmasse vorhandenen Einzeltöne ganz ohne Mithilfe des Ohres eigen, sie haben indess den Nachtheil, dass sie für schwächere Töne nicht sehr empfindlich sind. In der Beziehung werden sie weit übertroffen von den von Helmholtz angegebenen Resonatoren. Es sind das Hohlkugeln der Röhren, von Glas oder Messing Fig. 261 a und b, mit zwei Oeffnungen. Die eine Oeffnung  $a$  hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere  $b$  ist richterförmig und so geformt, dass man sie in das Ohr einsetzen kann. Man umgibt zu dem Ende die Oeffnung  $b$  mit geschmolzenem Siegelack, und wenn dasselbe soweit erkaltet ist, dass man es mit den Fingern ungestraft berühren kann, aber doch noch weich ist, drückt man die Oeffnung in den Gehörgang. Das Siegelack formt sich dann nach der inneren Oberfläche des letztern, und wenn man dann später den Resonator an das Ohr setzt, so schliesst er leicht und vollständig dicht.

Ein solcher in das Ohr gesetzter Resonator gibt einen bestimmten Grundton und ausser dem mehrere sehr viel höher liegende Obertöne. Wird der Grundton desselben ausserhalb angegeben, so wird die Luft des Resonators sehr kräftig zum Mitschwingen gebracht, und der Ton dringt dann unmittelbar und deshalb sehr kräftig ins Ohr.

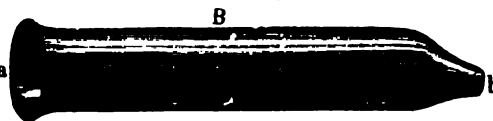
Verstopft man das eine Ohr und setzt an das andere den Resonator, so hört man die meisten in der Umgebung angegebenen Töne sehr gedämpft, wird dagegen der Ton des Resonators angegeben, so schmettert derselbe mit gewaltiger Stärke in das Ohr hinein.

Eine abgestimmte Reihe solcher Resonatoren, wie man sie jetzt von König in Paris beziehen kann, die harmonische Reihe der Töne von  $c_{-1}$  an enthaltend, ist deshalb ein vorzügliches Mittel, um die in einer Klangmasse enthaltenen Töne zu bestimmen. Es ist dabei zu bemerken, dass das Auftreten des Tones im Resonator ganz ebenso die objective Existenz des Tones ausserhalb des Resonators beweist, als die mitschwingende Membran. Denn der Ton tritt in dem Resonator nur hervor, wenn derselbe von Schwingungen getroffen wird, welche mit denen, welche die Luftmasse des Resonators annehmen kann, isochron sind; wird deshalb der Resonator um Tönen gebracht, so beweist das, dass in den zusammengesetzten Schwingungen, welche ihn zum Tönen bringen, die dem Resonator ent-

Fig. 261 a.



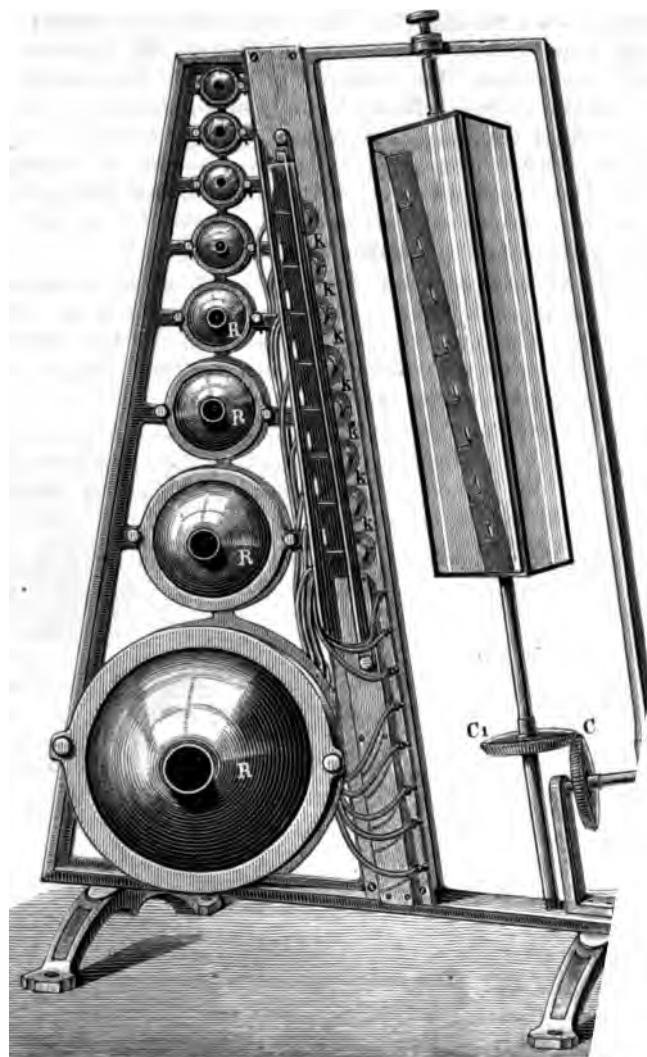
Fig. 261 b.



### Analyse des Klanges.

de einfache Schwingung vorhanden ist, und als solche  
engesetzten abgeschieden werden kann.  
n Vorzug der Membranen, die Zusammensetzung der Kl  
vom Ohr zu zeigen, mit der Empfindlichkeit der Resona  
ein von R. König in Paris construirter Apparat. Eine  
imnten Resonatoren, 8 oder 10 von  $c$  an sind auf einem f  
ler befestigt  $R, R$  (Fig. 262). Das Ende der Resonator

Fig. 262.



ist ins Ohr gesteckt wird, ist durch einen Kautsch  
die kleiner Kapseln  $kk$  in Verbindung. Mit Ausnal

des Kautschukschlauches sind die Kapseln rings geschlossen, und zwar an den Seitenwänden und hinten, wo der Schlauch eintritt, fest, vorn, der Mündung des Schlauches gegenüber durch eine sehr feine elastische Membran. Wird nun durch einen aussen angegebenen Ton die Luftmasse des Resonators in Schwingung versetzt, so pflanzt sich die Bewegung bis in die Kapsel fort, und die die Kapsel vorn abschliessende Membran wird gerade so in Schwingungen versetzt, wie das Trommelfell, wenn man den Resonator in den Gehörgang einschiebt. Um nun diese Schwingungen sichtbar zu machen, wendet König ein äusserst sinnreiches Mittel an; vor der Membran wird eine zweite Kapsel angebracht, so dass die Membran selbst die Hinterwand der vordern Kapsel bildet. Durch ein seitliches Ansatzrohr lässt man nun in die vordere Kapsel Leuchtgas eintreten, welches durch die Fig. 262 neben den Resonatoren sichtbaren Brenner, die aus einer kleinen kreisförmigen, auf der obern Seite dünner Cylinder angebrachten Oeffnung bestehen, entweicht.

Angezündet gibt dieser Gasstrom eine kleine spitze leuchtende, ruhig brennende Flamme. Sobald nun aber der mit dieser Flamme in Verbindung stehende Resonator durch einen Ton in Schwingungen versetzt wird, gelangt auch die Flamme in isochrone Vibrationen, indem sie abwechselnd grösser und kleiner wird. Denn indem die Membran durch die Schwingungen der Luft im Resonator abwechselnd etwas in die das Gas haltende Kapsel hineingedrückt, abwechselnd aus ihr zurückgezogen wird, wird der Druck des Gases in der Kapsel abwechselnd etwas vergrössert, abwechselnd etwas verkleinert. Dem vergrösserten Druck entspricht ein verstärktes, dem verminderten ein geschwächtes Ausströmen des Gases und ersterm eine Vergrösserung, letzterm eine Verkleinerung der Flamme. Diese Vibrationen der Flamme erfolgen indess mit einer solchen Geschwindigkeit, dass sie bei direkter Betrachtung der Flamme nicht sichtbar sind.

Um sie sichtbar zu machen, benutzt König die schon mehrfach erwähnte Eigenthümlichkeit unseres Auges, dass Lichteindrücke eine gewisse Zeit dauern und die aus dem Reflexionsgesetze sich ergebende Erscheinung, dass das Spiegelbild einer Flamme je nach der Stellung eines Spiegels an verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so dass, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel *K* gedrehte konische Zahnräder *C* und *C*<sub>1</sub> kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man nun den Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibrationen brennt, so sieht man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen neben einander, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme gleichzeitig, und in Folge dessen sieht man sie als ein horizontales Lichtband, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle als leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze der Flamme nur immer einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel nur jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, neben einander,

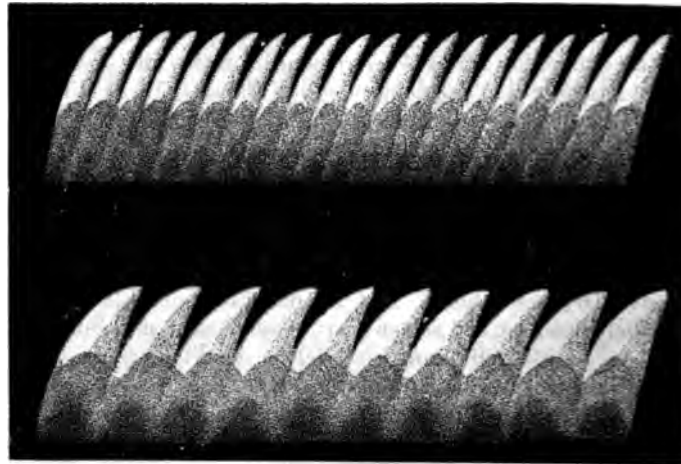


und man sieht dann im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern neben  
ander, wie es Fig. 263 zeigt.

Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schneckigkeit, mit der die Vibrationen erfolgen und der Schnelligkeit der Rotation des Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels gegeben ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen fol. Spiegeln sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die doppelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der erst doppelt so viel Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 263 die Erscheinung in dem rotirenden Spiegel, wenn man gleichzeitig  $c$  und  $c_1$  ertönen lässt, die untere Flamme gibt dann die halbe Anzahl Bilder als die dardü liegende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingung macht als im dardüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man gibt den zu untersuchenden Klang auf den Grundton  $c$  an und setzt den Spiegel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen die Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sie den zugehörigen Flammen mittheilt. Man sieht dann die entsprechenden Flammen im rotirenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 263 während die Flammen, deren Resonatoren nicht miltönen, im Spiegel: continuirliche Lichtbänder erscheinen.

Fig. 263.



Die Membranen in den Kapseln für die manometrischen Flammen werden von einer solchen Feinheit genommen, dass sie jeder Schwingung, die in der sie umgebenden Luft vorhanden ist, folgen und sie durch die Bewegung der Flamme angeben. Es ist deshalb, wie König<sup>1)</sup> gezeigt hat, möglich auch durch eine Flamme die Klänge in ihre Partialtöne zu zerlegen. Ein kleiner dazu geeigneter Apparat zeigt Fig. 264. An einem Stativ ist ein

<sup>1)</sup> König, Poggend. Ann. Bd. CXXII, p. 666. Die Apparate sind in vorzüglicher Ausführung von R. König in Paris (Rue de Hautefeuille 30) zu beziehen.

el  $k$  der vorhin beschriebenen Art befestigt, in die vordere Hälfte derselben, welche von der hintern durch die feine Membran getrennt ist, tritt das Leuchtgas ein, welches durch den nach oben gebogenen Brenner  $f$  leuchtet und dort angezündet wird. In der hintern Hälfte der Kapsel liegt das Kautschukrohr  $R$ , welches an seinem Ende mit einem Schalltrichter  $S$  versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwingen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen in die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme im rotirenden Spiegel, erhält man ein Bild, wie Fig. 263a oder b. Dringen dagegen gleichzeitig

Fig. 264.

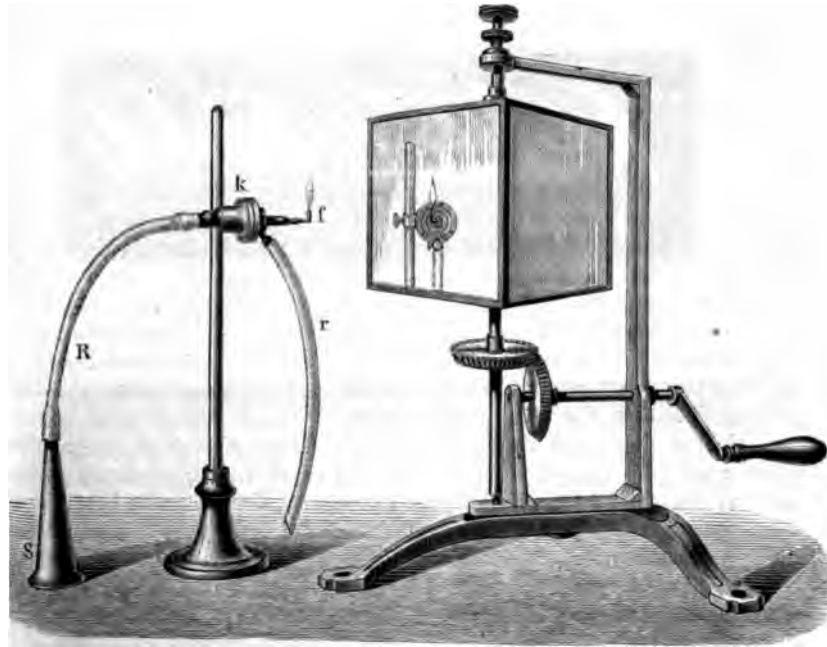
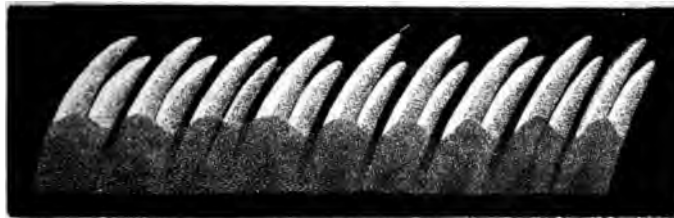


Fig. 265.



ere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwingen versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grundton und Octave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig. 265. selbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmäler ist, als wenn der Grundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmässig ab-

WOLLMAN, Physik. I. 3. Aufl.

wechseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der Ueberlegung, dass jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der Kapsel die Flamme aufflackern machen muss. Wenn man gleichzeitig Grundton und Octave und Duodecime in die Kapsel eindringen lässt, so erhält man das Bild Fig. 266. Zwischen die Flammenbilder Fig. 266 tritt jedesmal noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig. 265 bildet sich z. B., wenn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an die Oefnung des Schalltrichters *S* hält und nicht zu stark in die Pfeife bläst; wenn man dagegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton und der Octave die Duodecime deutlich hörbar wird, so erhält man das Bild Fig. 266.

Fig. 266.



Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studirt, so erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges benutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem durch passend zusammengesetzte einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen, welche Töne den Klang zusammensetzen.

Schliesslich kann man auch die auf einem Monochord oder in einem Klavier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten benutzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen, da die Saiten sehr leicht und stark mittönen. Da indess die Saiten nicht nur durch ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Obertöne in Schwingung versetzt werden, so lässt sich mit Hülfe derselben nicht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen Klangmasse vorhanden sind.

Mit Hülfe des einen oder des andern Verfahrens kann man nun zunächst leicht den Nachweis führen, dass in einer zusammengesetzten Schwingung die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen, dass also die einzelnen Partialtöne eine objective Existenz haben, indem sie das Mittönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben. Dass in der That alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser Weise existiren, kann man mit Hülfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im §. 137 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 u. s. f. Die Töne 3, 5, 7 etc. und ihre Vielfachen treten auf, das heisst die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Dass nun in der That diese zusammengesetzten

chwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen der Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie nun zuerst Brandt<sup>1)</sup> und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz<sup>2)</sup> nachgewiesen haben, nimmt das einigermaßen geübte Ohr bei lahm gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hülfe der Resonatoren wahr, so dass damit das Ohm'sche Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die  $c$  gibt, ausserhalb der Mitte, etwa in  $\frac{1}{3}$  der Saitenlänge, so liefert dieselbe ausser dem Grundton  $c$  auch  $c_1$ ,  $c_2$  etc. Nimmt man den Ton  $c_1$  nicht sofort wahr, so halte man einen auf  $c_1$  abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da nun das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der That die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schluss berechtigt sein, dass es in der That die verschiedenen und verschieden starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählte. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Dass dieser Schluss über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz<sup>3)</sup> schliesslich dadurch nachgewiesen, dass er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Theiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vocale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 267 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserrohr, am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalge in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen  $U$  sehr ähnlich ist.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, dass die eine genau die Octave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen

<sup>1)</sup> Brandt, Poggend. Ann. Bd. CXII.

<sup>2)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt IV.

<sup>3)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. p. 109 ff.

des Vocales *O* gleich ist. Lässt man nun abwechselnd bald die eine, beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange zunächst einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauerndem sammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen lässt,

Fig. 267.



man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke weiter, dann klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählich aber, wie sich die Erinnerung des isolirt gehörten Ton verliert, wird immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit seinem Grundton unter Aenderung der Klangfarbe beweist, dass der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir im §. 122 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingung in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Schwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen zusammentreten, es wäre deshalb auch möglich, dass die Phase der zusammensetzenden Theiltöne auf die Farbe eines Klanges von Einfluss ist. Helmholtz<sup>1)</sup> hat gezeigt, dass das nicht der Fall ist. Er benutzte dazu die Zusammensetzung von Klängen mit Hilfe von Stimmgabeltönen. In dem Verhältniss von Grundton und Octave stehende Stimmgabeln geben zum Tönen gebracht und durch Resonanzröhren verstärkt (siehe oben) einen dem *O* sehr ähnlichen Klang. Verstimmt man nun die Stimmgabeln nur sehr wenig, so kommen die einzelnen Stöße nach und nach immer anderer Phase zusammen, wie wir bereits §. 137 sahen

<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. p. 190 ff.

farbe ändert sich indess damit durchaus nicht. Dadurch ist dann bewiesen, dass die Klangfarbe des musikalischen Theils eines Klanges nur abhängt von der Zahl und Stärke der Partialtöne, nicht von den Phasenunterschieden derselben. Wir sagen ausdrücklich, des musikalischen Theiles des Klanges, denn ausserdem wird auch die Klangfarbe mit bestimmt durch die bei der Klangerzeugung eintretenden Geräusche, auf welche wir im nächsten Paragraphen noch hinweisen werden.

## §. 153.

**Klänge durch Schwingungen fester Körper.** Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnitts, dass die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, in transversale und in drehende, entsprechend den verschiedenen Richtungen, nach denen sich die Elasticität äussert. Alle diese Schwingungen bringen Töne oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes hatten wir

$$N = \frac{1}{A \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}},$$

worin  $L$  die Länge,  $E$  den Elasticitätscoefficienten,  $s$  die Dichtigkeit des Stabes und  $A$  eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Constante bedeutet.

Die Schwingungszahl und somit der Longitudinalton eines Stabes hängt also ausser von der Materie des Stabes bei gleicher Befestigungsweise und gleichem Streichen nur von der Länge des Stabes ab; die Dicke oder der Querschnitt des Stabes haben auf die Höhe des Klanges keinen Einfluss.

Diesen Satz bestätigen schon die Versuche Chladni's, welcher die longitudinalen Schwingungen der Stäbe und deren Töne untersuchte, bevor die Theorie dieser Bewegungen entwickelt war<sup>1)</sup>.

Unter übrigens gleichen Umständen muss nach unserem Ausdrucke die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von longitudinal schwingenden Stäben sich verhalten wie die Quadratwurzel aus dem Quotienten der Elasticität und der Dichtigkeit; auch dieses wird schon durch die Versuche Chladni's bestätigt.

Chladni liess mehrere zwei Fuss lange an beiden Enden freie Stäbe frei schwingen und erhielt als Töne:

Mit einem Stabe 15löthigen Silbers ...	$d_4$
"    "    "    von    Kupfer ..	$g_4$
"    "    "    von    Eisen ....	$cis_5$

Die Schwingungszahlen dieser Töne verhalten sich, diejenige des viergestrichenen  $c$  als Einheit gesetzt, wie

$$\frac{9}{18} : \frac{3}{12} : \frac{25}{12},$$

<sup>1)</sup> Chladni, Akustik. p. 103-109.

oder diejenige des viergestrichenen  $d$  als Einheit gesetzt, wie

$$1 : \frac{4}{3} : \frac{50}{27},$$

oder wenn wir die temperirten Töne wählen, wie

$$1 : 1,33484 : 1,88775.$$

Nach §. 50 ist nun der Elasticitätscoefficient

$$\begin{array}{l} \text{für Silber } E = 7140000 \text{ Gramme } s = 10,47 \text{ Gramme} \\ \text{„ Kupfer } E = 10519000 \quad \text{„ } s = 8,78 \quad \text{„} \\ \text{„ Eisen } E = 20794000 \quad \text{„ } s = 7,74 \quad \text{„} \end{array}$$

Und setzen wir diese Werthe in unseren Ausdruck für  $N$  ein, so verhalten sich die drei Schwingungszahlen

$$N_1 : N_2 : N_3 = 2586 : 3427 : 5116,$$

oder wie

$$1 : 1,325 : 1,97.$$

Die von Chladni beobachteten Töne entsprechen also der Theorie; die Abweichung selbst beim höchsten Tone beträgt nur etwas mehr als ein Komma; Chladni selbst gibt aber an, der Ton sei nur annähernd *cis* gewesen. Indess ist die Uebereinstimmung so gross, wie sie bei so hohen Tönen nur sein kann, wo geringe Höhenunterschiede nur sehr schwer wahrgenommen werden können.

Für die Bestimmung der Schwingungszahl longitudinal schwingender Stäbe hatten wir drei Fälle zu unterscheiden.

1) Der Stab ist an einem Ende ganz fest. Dann wird

$$N = \frac{2n-1}{4L} \sqrt{\frac{gE}{s}}.$$

Die Schwingungszahlen des Stabes verhalten sich wie 1 : 3 : 5 u. s. w.

Auch dieses bestätigen die Versuche Chladni's, der als Töne eines an einem Ende festen longitudinal schwingenden Stabes, den Grundton, den der langsamsten Schwingungen als  $c$  angenommenen, gibt

$$c \ g_1 \ e_2 \ b_2 - d_3.$$

Das negative Zeichen bei  $b_2$  bedeutet, dass der Ton etwas tiefer war als  $b_2$ , es ist eben der in der Tonleiter nicht vorkommende Ton 7 in der zweithöheren Octave von  $c$ .

2) Der Stab ist an beiden Enden frei.

3) Der Stab ist an beiden Enden fest.

In beiden Fällen ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{gE}{s}}.$$

Die möglichen Schwingungen sind 1, 2, 3, 4.. sie verhalten sich wie die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Der Grundton bei dieser Befestigungsweise ist die Octave des Tones, wenn der Stab an einem Ende fest ist. Dem entsprechend gibt auch Chladni als Töne an

$$c_1 \ c_2 \ g_2 \ c_3 \ e_3,$$

wenn der Grundton, der die Octave des Grundtones im vorigen Falle war, mit  $c_1$  bezeichnet wird.

Wir können nun nach unser Formel auch den Ton berechnen, welchen Chladni an seinen Stäben fand und so eine neue Bestätigung unserer frühern

Theorie erhalten. Indess können wir hier keine absolut genaue Uebereinstimmung erwarten, da wir einmal nicht annehmen dürfen, dass Chladni's Längenbestimmung absolut genau ist, und da wir wissen, dass  $E$  sowohl wie  $s$  selbst für die gleichen Substanzen je nach ihrer Behandlungsweise verschiedene Werthe haben können.

Chladni bestimmt die absolute Schwingungszahl des  $c_3$  zu 4086 Schwingungen, also kleiner wie es nach der jetzigen Stimmung ist. Der Werth von  $c_3s_3$  ergibt sich darnach zu 4296 Schwingungen. Berechnen wir aber die Schwingungszahl für den eisernen Stab, so wird dieselbe, wenn wir den rheinischen Fuss, den Chladni als Längeneinheit zu Grunde legt, gleich 0,313 Meter setzen,

$$N = \frac{1}{1.25} \cdot 5116 = 4093.$$

Der von Chladni beobachtete Ton ist demnach nur um 1,04 gegen den von uns berechneten Ton zu hoch, eine Uebereinstimmung, welche in Anbetracht der eben erwähnten Umstände fast vollkommen zu nennen ist.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir, mit Beibehaltung der frühern Zeichen (§. 132),

$$N = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{gP}{qs}}.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefern Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefern Saiten, um ihr Gewicht zu vergrössern, mit einem feinen Drahte unwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einen drehbaren Wirbel eingesteckt sind, durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo ausserdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Theiles proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in  $n$  schwingende Theile. Die Versuche von Chladni und G. Weber geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäss. Setzen wir den Grundton der Saite gleich 1 und bezeichnen wir ihn mit  $c_{-1}$ , so ist nach Chladni die Reihe der Töne<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Chladni a. a. O., p. 67.



1	2	3	4	5	6	7	8
$c_{-1}$	$c$	$g$	$c_1$	$c_1$	$g_1$	$b_1$	$c_2$
9	10	11	12	13	14	15	16
$d_2$	$c_2$	$f_2 + g_2$	$a_2$	$b_2$	$h_2$	$c_3$	

G. Weber<sup>1)</sup> geht bis zu einer Theilung der Saite in  $\frac{1}{132}$ , somit bis zum viergestrichenen  $c$ .

Weil man meist die Tonreihe nach Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man auch häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt; es ist klar, dass dann die den Ton bezeichnenden Zahlen einfach die reciproken Werthe der im Fröhern angewandten Zahlen sind, oder dass nach dieser Bezeichnungsweise werden

$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$a$	$h$	$c_2$
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Die Klänge der Saiteninstrumente können, wie sich schon aus den Erfahrungen des §. 137 ergibt, äusserst verschieden sein und auf dieser Verschiedenheit beruht auch die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die musikalischen Saiteninstrumente können wir in zwei Gruppen theilen, in solche, deren Töne durch Zupfen oder Schlagen der Saiten erregt werden, wie Guitarre, Zither und besonders das Klavier, und solche, deren Töne durch Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat Helmholtz<sup>2)</sup> die Klänge ziemlich ausführlich untersucht, wir begnügen uns hier damit als Ergänzung zur Besprechung der Saitenschwingungen des §. 137, die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzutheilen.

Wir erwähnten in §. 137 bereits, dass die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklänge vorhandenen Obertöne wesentlich abhängen von der Art und Stelle des Anschlags, sowie von der Dicke, Steifigkeit und Elasticität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus Helmholtz Untersuchungen, dass die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Discontinuitäten die Art der Bewegung zeigt. Wird die Saite gezupft, entfernt der Finger sie, ehe er sie loslässt, in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage, so entsteht eine Discontinuität nur dadurch, dass die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift als wenn sie wie bei der Guitarre mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reissens auch einen schärfern Klang mit einer grössern Menge klimpernder hoher Obertöne als im letztern; die Intensität des Grundtones ist aber immer grösser als die jedes Obertones.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der vom Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige

<sup>1)</sup> *Bindseil*, Akustik. p. 110.

<sup>2)</sup> *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 128 ff. und p. 536.

Theil der Saite noch in Ruhe, er geräth erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der Saite die schärfste Discontinuität, und deshalb viele und hohe Obertöne, deren Intensität zum Theil die des Grundtones übertrifft.

Ist der schlagende Hammer weich und elastisch, so hat die Bewegung Zeit, auf der Saite sich auszubreiten, ehe der Hammer wieder zurückspringt, und zugleich wird durch den Anschlag eines solchen Hammers der geschlagene Theil der Saite nicht ruckweise in Bewegung gesetzt, sondern seine Geschwindigkeit wächst allmählig und stetig mit dem Drucke des Hammers. Die Discontinuität der Bewegung ist deshalb viel kleiner und dem entsprechend ist die Stärke der Obertöne gegen jene des Grundtones viel geringer.

Mit scharfem Metall gerissen oder geschlagen ist deshalb der Klang der Saite schärfer und leerer, indem die mit Leerheit bezeichnete Eigenthümlichkeit des Klanges eben in der verhältnissmässigen Stärke der Obertöne gegen den Grundton begründet ist. Ist der Grundton kräftig gegen die Obertöne und sind besonders die höhern unpaarigen Töne schwach, so ist der Klang voll und harmonisch.

Bei den Klavieren wird deshalb, um dies zu erreichen, der Hammer mit einer dicken Lage stark gepressten und dadurch elastisch gewordenen Filzes bedeckt, und gleichzeitig werden die für die tiefern Töne bestimmten Hämmer schwerer gemacht als die für die höhern Octaven, damit erstere länger an der Saite haften als letztere. Denn einmal ist das längere Haften des Hammers in den tiefern Lagen zur relativen Verstärkung des Grundtons deshalb nothwendig, weil die Schwingungsdauer desselben grösser ist als in der höhern, dann aber auch weil bei der stärkern Spannung der Saiten in den höhern Lagen die höhern Obertöne sich doch nicht so stark ausbilden.

Um bei den Klavieren die Klänge nicht allein voll, sondern auch weich zu machen, ist die Anschlagsstelle der Saiten  $\frac{1}{7}$  bis  $\frac{1}{9}$  von dem einen Ende. Damit fallen die Töne 7 und 9, die ersten, welche nicht in den Dreiklang hineingehören, und welche mit den andern keine consonirenden Intervalle haben, aus der Reihe der Obertöne fort. Es treten dann nur die ersten sechs Töne auf, der fünfte und sechste indess schon sehr schwach.

Folgende kleine Tabelle gibt die Intensität der Partialtöne, von Helmholtz berechnet, wenn in  $\frac{1}{7}$  der Saitenlänge der Ton in der über jeder Columnne angegebenen Weise erregt wird.

Tabelle der Intensität der Partialtöne bei Saiten.

Ordnungszahl des Partialtones	Anschlag durch Reissen	Anschlag durch einen elastischen Hammer, dessen Berührung dauert, in Bruchtheilen der Schwingungsdauer des Grundtones			Anschlag mit einem ganz harten Hammer
		$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{14}$	
1	100	100	100	100	100
2	81,2	99,7	189,4	249	324,7
3	56,1	8,9	100,9	242,9	504,9
4	31,6	2,3	17,3	118,9	504,9
5	13,0	1,2	0,0	26,1	324,7
6	2,8	0,01	0,5	1,3	100,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Für das Klavier gelten die drei mittlern Columnen, und Helmholtz fand, dass die der mit  $\frac{3}{7}$  überschriebenen Spalte entsprechende Columnne in der Gegend des  $c_2$  und noch höher hinauf gilt, dass indess in den viel höhern Lagen die Obertöne noch schwächer werden. In der eingestrichenen Octave etwa gilt die Columnne  $\frac{3}{10}$ , in dieser ist also der erste Oberton schon intensiver als der Grundton, in den tiefern Lagen der kleinen, der grossen und der Contraoctave gilt die mit  $\frac{3}{14}$  überschriebene Columnne. Diese Intensitätsverhältnisse können indess je nach der Güte und richtigen Stellung der Hämmer beträchtlich schwanken.

Dass in den höhern Lagen die Obertöne so sehr weit zurücktreten, das hat seinen Grund in der stärkern Spannung und der Steifigkeit der Klaviersaiten, denn bei steifen Saiten von einiger Dicke treten dieselben nur sehr schwach mehr hervor, da diese Saiten sich nicht leicht in so viele Unterabtheilungen zerlegen, wie sie zu den hohen Obertönen erforderlich sind.

Dass der Klang der gestrichenen Saiten ein ganz anderer sein muss als jener der geschlagenen, ergibt sich nach den ausführlichen Besprechungen der Schwingungsform von Violinsaiten im §. 137 unmittelbar. In den gestrichenen Saiten ist der Grundton stärker als jeder der Obertöne, deshalb ist der Klang der Streichinstrumente auch ein viel vollerer als der des Klaviers. Gleichzeitig ist aber auch die Stärke der höhern Obertöne, bei den meisten Tönen der Violine schon von dem dritten an, beim Violoncell vom fünften an relativ grösser als beim Klavier, und deshalb ist der vollere Ton gleichzeitig ein schärferer. An welcher Stelle zwischen Steg und Griffbrett man streicht, ist auf den Klang nicht von wesentlichem Einfluss, wenn man dem Griffbrett nur nicht zu nahe kommt, die Stelle, an welcher man gewöhnlich streicht, liegt in etwa  $\frac{1}{10}$  der Saitenlänge, rückt man bis an das Griffbrett, so streicht man in  $\frac{1}{5}$ , und da dann der fünfte und sechste Ton mehr oder weniger fehlen, so wird der Klang dumpfer.

Auf den Klang der Streichinstrumente hat die Art des Streichens einen wesentlichen Einfluss; jede Störung in der Bogenführung hat eine Discontinuität in den Schwingungen und damit ein kratzendes Geräusch zur Folge. Deshalb hängt bei keinem Instrument die Fülle und Reinheit des Klanges so sehr von der Geschicklichkeit des Spielers ab, als gerade bei den Streichinstrumenten. Wesentlich hängt dieselbe indess auch ab von der Güte des Instruments, dem Bau des Resonanzkastens, ein Umstand, auf den wir später noch zu sprechen kommen werden.

Für die transversalen Schwingungen elastischer Stäbe erhielten wir als Ausdruck

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4l^2} \sqrt{\frac{gE}{s}}.$$

Die Schwingungszahlen verhalten sich demnach bei cylindrischen Stäben direkt wie der Radius und umgekehrt wie die Quadrate der Längen derselben. In demselben Verhältnisse müssen daher die Tonhöhen stehen.

Die Versuche von Savart über die absoluten Schwingungszahlen cylindrischer Stäbe haben wir bereits angegeben. Ein Messingstab von  $0^m,103$  Länge und  $2^{mm},4$  Radius vollführte 1422 Schwingungen, ergab also einen Ton, welcher etwas höher liegt als das dreigestrichene  $f$ ; ein cylindrischer Kupferstab von gleicher Länge und  $1^{mm},7$  Radius ergab einen Ton, der

etwas höher lag als das dreigestrichene *c*. Die Uebereinstimmung dieser Zahlen mit der Theorie haben wir erwähnt.

Die Töne, welche ein schwingender Stab überhaupt geben kann, fanden wir verschieden, je nachdem der Stab verschieden befestigt ist; wir unterschieden damals vier Fälle, nämlich:

1) Ein Ende des Stabes ist frei, das andere ist ganz fest. Die möglichen Schwingungszahlen werden für die langsamsten, wenn sie der Reihe angehörten, *n* gleich 1 gesetzt:

$$N = \frac{(2n-1)^2}{4}.$$

Die Töne müssen sich demnach bei einem und demselben Stabe verhalten wie

$$1 : 9 : 25 : 49 : 81,$$

wobei aber, wie wir damals erwähnten, die ersten drei Töne gegen die folgenden zu hoch werden.

Chladni<sup>1)</sup> erhielt als zweiten Ton einen um zwei Octaven und eine übermässige Quint höhern Ton als den Grundton, als dritten einen um eine Octave und eine verminderte Quint höhern als den zweiten, der vierte Ton war dann wieder nahe um eine Octave, der fünfte wieder um eine Sexte höher. Diese Töne verhalten sich von dem Contra *C* als Grundton gerechnet wie

$$c_{-2} \text{ gis } d_2 \text{ d}_3 - b_3 \text{ f}_4 +,$$

deren Schwingungsverhältnisse sind

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 25/4 & 144/8 & 288/8 & 288/5 & 256/3 \\ 1 & 6 1/4 & 18 & 36 & 57 2/3 & 85 1/3. \end{array}$$

Diese Zahlen sind aber fast genau gleich der im §. 134 p. 539 für den gleichen Fall aufgefundenen Zahlenreihe. Wir können dieselben schreiben:

$$1, 0,700 \cdot 9, 0,702 \cdot 25, 0,703 \cdot 49, 0,705 \cdot 81, 0,705 \cdot 121,$$

von der dritten an gerechnet verhalten sich also die Schwingungszahlen fast genau wie die Quadrate der ungeraden Zahlen.

2) Beide Enden des Stabes sind frei oder ganz fest. Die Zahl der Schwingungen ist

$$N = \frac{(2n+1)^2}{4}.$$

Die Töne werden demnach sich verhalten müssen bei gleicher Stablänge wie die Quadrate der ungeraden Zahlen von 3 an, wie

$$9 : 25 : 49 \dots$$

Besitzt der Stab demnach die gleiche Länge und sonstige gleiche Beschaffenheit wie in dem vorigen Falle, so muss der tiefste Ton mit dem zweiten bei der vorigen Befestigungsweise zusammenfallen. Das ergeben auch die Versuche Chladni's, der als Töne in diesem Falle angibt

$$\text{gis } d_2 \text{ d}_3 - b_3 \text{ f}_4 +,$$

<sup>1)</sup> Chladni, Akustik. p. 94—103.

die, wie wir soeben nachwiesen, Schwingungszahlen besitzen, welche in dem geforderten Verhältnisse stehen.

3) Das eine Ende des Stabes ist aufgelegt, das andere ganz fest oder frei. In beiden Fällen ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{(4n + 1)^2}{16}.$$

Ihr Verhältniss zu einander ist demnach

$$25 : 81 : 169 \dots$$

und der erste Ton muss um zwei Octaven tiefer sein als der dritte Ton im ersten Falle, wo ein Ende fest, das andere frei ist, wenn der Stab dieselbe Länge und sonstige gleiche Beschaffenheit hat, da wir hier im Nenner noch die Zahl 4 haben.

Nach der Angabe Chladni's sind die Töne des Stabes

$$d\ b_1 + h_2 - gis_3\ dis_4\ a_4,$$

man sieht, wie die beiden ersten Töne dem dritten und fünften Tone des ersten Falles entsprechen, jedoch um zwei Octaven tiefer sind. Eine Berechnung der folgenden Schwingungszahlen weist auch für diese das geforderte Verhältniss nach.

4) Der vierte Fall ist der einfachste, wenn beide Enden nur angestemmt sind; der Stab schwingt entweder seiner ganzen Länge nach, oder theilt sich in  $n$  Theile, die Schwingungszahl ist demnach

$$N = n^2.$$

Die Schwingungszahlen und somit die Tönhöhen müssen sich verhalten wie

$$1, 4, 9, 16 \dots$$

Zu der ersten Schwingungsart, wo das eine Ende fest, das andere frei ist, würden sich die Schwingungszahlen des tiefsten Tones, der  $n = 1$  entspricht, verhalten wie  $1 : \frac{1}{4}$ , wenn im ersten Falle der tiefste Ton der Schwingungsreihe angehörte. Wir sahen aber, dass im ersten Falle der tiefste Ton nicht der Schwingungszahl  $\frac{1}{4}$  entspricht, sondern dem Quadrate von 0,59686, oder nahezu 0,36; die Tonhöhe des tiefsten Tones bei dieser Befestigungsweise muss sich daher zu der des ersten Tones im ersten Falle verhalten wie  $1 : 0,36$ , wie  $\frac{25}{9}$ . Bezeichnen wir demnach den Grundton im ersten Falle mit  $c_{-2}$ , so muss der Ton jetzt  $fis_{-1}$  die übermässige Quart der nächsthöheren Octave werden.

Chladni bestimmte ohne Kenntniss der Theorie die gehörten Töne im Verhältniss zum Grundtone  $c_{-2}$  im ersten Falle als

$$\begin{array}{cccccc} fis_{-1} & fis_1 & gis_2 & fis_3 & d_4 & gis_4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36, \end{array}$$

die Töne verhalten sich demnach wie die Quadrate der natürlichen Zahlen und sind um zwei Octaven höher als die entsprechenden Töne bei der ersten Befestigungsart, denn dort hatten wir den Schwingungsverhältnissen 9 und 25 entsprechend die Töne  $gis$  und  $d_2$ .

Die Töne elastischer Stäbe werden selten in der Musik angewandt: es gibt ausser den später zu betrachtenden Zungenpfeifen nur einige wenige.

in der Orchestermusik jedoch nicht gebräuchliche Instrumente, deren Töne durch transversale Schwingungen elastischer Stäbe erzeugt werden. Einen praktischen Gebrauch von den Schwingungen an einem Ende fester, am andern freier Stäbe macht man in der Eisenvioline, welche aus eisernen Stiften besteht, die in einem halbkreisförmigen Steg auf einem Resonanzboden eingeschlagen sind und mit dem Violinbogen gestrichen werden. An beiden Enden freie Stäbe lässt man in der sogenannten Strohfiedel schwingen. Dieselbe besteht aus Stäben oder schmalen Streifen von Holz, Glas oder Stahl, die an ihren beiden Schwingungsknoten, welche bei dem tiefsten Tone auftreten, auf zusammengedrehtes Stroh oder andere weiche Unterlagen gelegt und mittels zweier Klöppel angeschlagen werden. In der Mozart'schen Oper „Die Zauberflöte“ wird gewöhnlich ein solches Instrument als Glockenspiel des Papageno angewandt<sup>1)</sup>.

Die Töne schwingender Platten und Glocken finden in der Musik ebenfalls nur wenig Anwendung; die Töne schwingender Platten werden neuerdings bei der Militärmusik gebraucht, indem eine Anzahl kleiner Stahlplatten, auf einem Gestell in ihrer Mitte befestigt, mit einem elastischen Hammer geschlagen werden; die gespannten Membranen bei den Pauken und Trommeln. In allen diesen Fällen wird nur der Grundton dieser Instrumente benutzt, der bei einfachen Schlägen entsteht.

Die Töne der Platten hat Chladni<sup>2)</sup> sehr ausführlich untersucht und gefunden, dass jedem andern Ton eine andere Theilungsart der Platte entspricht, nicht aber jeder andern Theilungsart auch ein anderer Ton, oder zwei verschiedene Töne geben nie dieselbe Klangfigur, einem Tone können aber mehrere Klangfiguren zukommen. Wir begnügen uns hier einige der Chladni'schen Angaben mitzuthemen. Bei einer kreisförmigen Scheibe fand er den tiefsten Ton, wenn die Figur aus zwei sich kreuzenden Durchmessern besteht. Nannte er den Ton  $c_{-1}$ , so ergab die aus drei sich schneidenden Durchmessern bestehende Figur den um eine Octave und eine Sekunde höhern Ton  $d'$ , die aus vier sich schneidenden Durchmessern bestehende  $c_2$ , also die dritte Octave des ersten Tones. Bei einem Kreise (Fig. 231  $\gamma$ ) gab die Scheibe  $gis_{-1}$ , der Ton war eine übermäßige Quint höher als der Grundton, Figur 231  $\delta$ , zwei Kreise gaben  $gis_1 +$ , einen um zwei Octaven höhern Ton. Ein Kreis und ein Durchmesser Fig. 231  $\epsilon$  gab  $b$ , ein Kreis und das Kreuz Fig. 231  $\zeta$   $g_1$ ; zwei Kreise und ein Durchmesser oder die gleichbedeutende Figur 231  $\eta$  gab  $c_2 +$  und die Figur 231  $\theta$ , die mit zwei Kreisen und zwei Durchmessern gleichwerthig ist, gab  $b_2$ .

Wir haben diese Töne in ihren Schwingungszahlen bereits mit den aus der Theorie Kirchhoff's sich ergebenden im §. 135 zusammengestellt, auch dort gingen wir wie hier von der zwei Durchmessern entsprechenden Schwingungszahl als 1 aus.

Die Folge der Töne war eine andere bei quadratischen Scheiben. Auch für diese entwirft Chladni eine vollständige Tabelle der gehörten Töne. Das auf den Quadratseiten senkrechte Kreuz gibt den tiefsten Ton, den die transversal schwingende Scheibe überhaupt geben kann. Das aus den Diagonalen bestehende Kreuz gibt die Quint des Tones; war der erstere  $g_{-1}$ ,

<sup>1)</sup> Chladni<sub>2</sub> Akustik. p. 98.

<sup>2)</sup> Chladni a. a. O. p. 117 ff.

so wird dieser Ton *d*. Fig. 232  $\beta$ , zwei Linien parallel einer Seite, eine Linie zu diesen senkrecht gibt den Ton *h*, nach beiden Richtungen zwei Linien, Fig. 232  $\gamma$ , gibt den Ton  $b_1$  —. Die Fig. 232  $\epsilon$  gibt den Ton  $gis_1$  + und 232  $\zeta$  die höhere Octave des vorigen  $gis_2$  +. Fig. 232  $\eta$  entsprach dem Tone  $cis_3$  und Fig. 232  $\vartheta$  der tiefern Octave des letztern Tones.

Die Unbrauchbarkeit der durch Schwingungen von Stäben und Platten erzeugten Klänge für die künstlerische Musik leuchtet nach den Bestimmungen der Obertöne derselben unmittelbar ein; die Obertöne sind fast sämtlich unharmonisch zum Grundton, sie müssen deshalb die Accorde, in welchen die Klänge gebraucht werden, dissonirend machen, oder man muss dieselben so anwenden, dass die Obertöne nicht auftreten. Letzteres geschieht bei der Pauke durch die Verbindung der Membran mit einem grössern Luftraum, indem dieselbe über einen Kessel ausgespannt wird. Damit erhält dann der Klang das Dumpfe eines einfachen Tones.

Zur Erzeugung eines einfachen Tones sind deshalb die Schwingungen von Stäben, wie die der Stimmgabel sehr geeignet, Helmholtz hat die Stimmgabeln, verbunden mit einem Luftraum, deshalb vorzugsweise zu diesem Zwecke verwandt, besonders weil man in dieser Weise am leichtesten auch alle Nebengeräusche vermeiden kann.

Schliesslich sind unter den Tönen der festen Körper noch die durch drehende Schwingungen hervorgebrachten zu erwähnen. Wir erhielten als Ausdruck für die Schwingungszahl so bewegter Stäbe im §. 136

$$N_1 = \frac{1}{4l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \cdot \sqrt{\frac{gE}{s}}$$

und allgemein für alle möglichen Schwingungen

$$N = n \cdot N_1,$$

wenn  $N_1$  die langsamsten Schwingungen bedeutet. Wie wir ferner sahen, sind auch hier wieder die verschiedenen Befestigungsweisen der Stäbe in Betracht zu ziehen. Obige Gleichung für  $N_1$  gilt, wenn der Stab an einem Ende befestigt ist. In gleichem Falle erhalten wir für denselben Stab für den Longitudinalton

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{gE}{s}},$$

somit für das Verhältniss des Longitudinaltones und des Torsionstones

$$\frac{N_1}{N} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}}.$$

Dieses Verhältniss gilt gleichzeitig für alle Töne und für alle Befestigungsweisen. Der Torsionston muss also jedenfalls tiefer sein als der Longitudinalton, um wie viel, das hängt von dem Werthe von  $\mu$  ab.

Die Beobachtungen von Chladni<sup>1)</sup> führten ihn zu dem Schlusse, dass der Ton der drehenden Schwingungen eines Stabes, „so weit ich es habe bemerken können“, um eine Quinte tiefer sei als der Ton bei entsprechenden longitudinalen Schwingungen. Nach Chladni wären also die drehenden Schwingungen genau  $\frac{2}{3}$  der longitudinalen. Savart<sup>2)</sup> fand, dass der Ton

<sup>1)</sup> Chladni, Akustik. p. 110.

<sup>2)</sup> In Poisson, Mémoire sur les Mouvements des Corps élastiques. Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII, p. 456.

1 drehenden Schwingungen nahezu eine Sexte tiefer war als bei den dinalen, oder dass

$$N = 0,6000 N'$$

Vertheim<sup>1)</sup> fand den Longitudinalton um etwas mehr als eine kleine öher wie den Torsionston,  $N' = 1,635 N$  im Mittel. Auf die Bedeu- lieses Tonverhältnisses zur Bestimmung des Werthes von  $\mu$  haben ion hingewiesen.

ie Torsionstöne werden in der Musik niemals angewandt, sie bieten nur ein theoretisches Interesse.

#### §. 154.

**Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper.** Eine Art Ton- ung durch Schwingungen luftförmiger oder flüssiger Körper haben i Betrachtung der Sirene kennen gelernt. Von viel höherer Bedeu- ind aber die Töne, welche durch stehende Schwingungen von Luft- erregt werden. Die grösste Zahl der Blasinstrumente und die meisten er der Orgel erzeugen ihre Töne auf diese Weise. Als Typus der strumente können wir die Orgel- betrachten und an diesen die g und die Reihe der Töne unter-

ie Orgelpfeifen zerfallen in zwei n, die Labialpfeifen und die Zun- ifen. In ersteren wird die schwin- Bewegung nur durch einen Luft- bewirkt ohne Zuhülfenahme eines Körpers, der Ton ist daher nur von hwingenden Luftsäule abhängig; e sind eine Combination elastischer n und schwingender Luftsäulen, n wird durch beide Schwingungs- bedingt; wir werden sie demnächst ers betrachten.

e Labialpfeifen (Fig. 268 und 269) en aus einem Fusse *a*, welcher auf ndung eines Windkastens gesetzt nd durch welchen der Luftstrom

Raum *b* unter der Bodenplatte hre eintritt. Die Bodenplatte lässt e Seitenwand einen Spalt, durch n der Luftstrom austritt, um sich obern Lippe *l*, welche die in der vand gelassene Mundspalte *lm* nach oben begrenzt, zu theilen. Durch

eilweise in die Röhre dringenden Luftstrom wird nun die in der zunächst über der Mundspalte befindliche Luft nach oben getrieben rdichtet. Diese Verdichtung bewirkt dann, dass die Luft nicht mehr

Fig. 268.



Fig. 269.



Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. L. p. 262.



in die Röhre eindringt, sondern nur vorbeistreichet, dadurch dehnt sich dann die vorher verdichtete Luft wieder aus und kehrt nach unten zurück, worauf dann neue Luft in die Röhre dringt und eine neue Verdichtung veranlasst. Die Luft erhält also zunächst an der Mundspalte eine hin und hergehende Bewegung. Diese pflanzt sich in der Luftsäule der Röhre fort und wird an der obren Grenze reflectirt. Durch diese in entgegengesetzter Richtung in der Röhre sich fortpflanzenden Bewegungen wird die Luftsäule der Röhre in stehende Schwingungen versetzt und gibt einen Ton, der verschieden ist nach der Länge der Röhre und nach der Art des Verschlusses an der obren Grenze.

Die Schwingungen der Luft in der Röhre  $R$  sind longitudinale Schwingungen; ist die Pfeife gedeckt (Fig. 269), so tritt an der obren Grenze eine Reflexion derselben mit Aenderung des Vorzeichens ein, der ankommende Wellenberg wird als Wellenthal reflectirt und das dem ankommenden Berge folgende Wellenthal als Wellenberg. Gerade wie bei den longitudinal schwingenden, an einem Ende festen, am andern Ende freien Stäben wird daher die ganze Luftsäule zugleich hin und her schwingen können, wenn die Impulse an der Lippe sich so folgen oder die Schwingungsdauer  $T$  so ist, dass der Wellenberg bis zur Wand sich fortgepflanzt hat, während die Luftschicht bei  $l \frac{1}{4}$  Schwingung zurückgelegt hat. Es entsteht dann nach §. 139 eine stehende Welle, deren Länge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Da nun die stehende Welle halb so lang ist als eine gleichzeitig schwingende fortschreitende Welle, so ist die Länge der Pfeife gleich ein Viertel der gleichzeitig schwingenden fortschreitenden Welle. Bezeichnen wir daher die Länge der Röhre mit  $l$ , so wird die Schwingungsdauer dieser Welle

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{d}{e}},$$

oder wenn wir die Bezeichnung des §. 138 für  $d$  und  $e$  einführen

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{s}{H\sigma k}},$$

worin  $H$  den Druck in Meter Quecksilber, unter welchem die Luft steht,  $\sigma$  die Dichtigkeit des Quecksilbers,  $s$  die der Luft und  $k = 1,40$  den constanten Coefficienten bedeutet, mit dem wir den Quotienten  $\frac{e}{d}$  multipliciren mussten, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung zu erhalten.

Für die Schwingungszahl erhalten wir demnach

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{H\sigma g}{s}} \cdot k = \frac{c}{4l}.$$

Da das Labialende der Röhre die Stelle ist, wo die Bewegung erzeugt wird, so kann, da an dem gedeckten Ende immer ein Schwingungsknoten entstehen muss, in derselben keine stehende Schwingung bestehen, deren Länge gleich ist der Länge der Röhre, indem dann in jedem Augenblicke die reflectirte Bewegung die neu erregte vernichten würde. Lassen wir nun durch stärkeres Blasen in dem Fasse der Röhre die Impulse bei  $m$  rascher auf einander folgen, so wird keine stehende Schwingung entstehen können.

wenn sich die Bewegung bis zur oberen Wand fortgepflanzt hat, während die erste Schicht eine halbe Schwingung zurückgelegt hat, wenn sich also zugleich von der Wand und von dem Labium Wellenthäler oder Wellenberge in der Röhre fortpflanzen, da dann eine stehende Welle sich bilden würde von der Länge der Röhre, an dem Labium somit ein Schwingungsknoten, ein Ort immerwährender Ruhe entstünde.

Folgen sich aber die Impulse so rasch auf einander, dass die schwingende Bewegung erst dann den Boden der Röhre erreicht hat, wenn die erste Schicht  $\frac{3}{4}$  ihrer Schwingung zurückgelegt hat, so dass also zugleich von der festen Wand ein Wellenberg, von dem Labium die zweite Hälfte eines Wellenthals sich fortpflanzt, so bilden sich stehende Wellen, deren Längen  $\frac{2}{3}$  von der Röhrenlänge betragen, in der Röhre bildet sich  $\frac{1}{3}$  der Länge vom Labium entfernt ein Schwingungsknoten und an dem Labium befindet sich die Mitte einer stehenden Welle, ein Schwingungsmaximum. Die Schwingungsdauer dieser Welle wird

$$T = \frac{4}{3} l \cdot \frac{1}{c}$$

und die Schwingungszahl

$$N = 3 \cdot \frac{c}{4l}$$

Weiter können Schwingungen in der Röhre stehende werden, deren Wellenlänge  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{4}{9}$  von der Länge der Röhre beträgt, aus denen also durch die Interferenz der eintretenden und der reflectirten Bewegung stehende Wellen von der Länge

$$\frac{2}{5} l, \frac{2}{7} l, \frac{2}{9} l \dots$$

entstehen, wie man durch ähnliche Betrachtungen gemäss §. 130 findet. Die Schwingungszahlen dieser Wellen sind

$$N = 5 \frac{c}{4l}, 7 \frac{c}{4l}, 9 \frac{c}{4l}$$

oder allgemein, es können sich in der Röhre stehende Wellen bilden mit der Schwingungszahl

$$N = (2n - 1) \cdot \frac{c}{4l}$$

worin  $n$  jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann.

Ist somit der Grundton der Röhre  $c_{-1}$ , so sind die Töne, welche wir mit dieser Röhre erhalten können,

$$\begin{array}{cccccc} c_{-1} & g & c_1 & b_1 & - & d_2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & & 9. \end{array}$$

Man kann sich leicht von der Richtigkeit dieser Folgerungen überzeugen. Denn bläst man eine gedeckte Pfeife nur schwach an, so erhält man den tiefsten Ton, den sie geben kann, bläst man stärker, so erhält man die Quint der nächsthöheren Octave, weiter die Terz der folgenden Octave u. s. f., wie es die Entwicklung der Schwingungsgesetze verlangt.

Die Grundtöne, welche verschiedenen lange Pfeifen geben können, hängen von der Länge der Pfeife ab, und zwar sind nach den obigen Rechnungen sowohl, wie nach der Erfahrung die Schwingungszahlen der Länge der

Pfeife umgekehrt proportional. Man kann daher leicht durch Herstellen einer Pfeifenreihe von verschiedener Länge sich die ganze Tonleiter mit allen ihren Tönen verschaffen.

Indess findet man, dass in diesem Falle sich die Töne nicht genau umgekehrt wie die Längen der Pfeifen verhalten, dass je nach der Gestalt und Grösse des Mundlochs und des Querschnittes der Pfeife die Töne mehr oder weniger von der Theorie abweichen. Noch deutlicher tritt das hervor, wenn man den Ton theoretisch berechnet, den die Pfeife bei gegebener Länge geben soll. Nach §. 138 ist

$$\sqrt{\frac{Hcg}{s}} \cdot k = 331,2,$$

vorausgesetzt, dass die Luft eine Temperatur von 0° hat.

Ist daher die Länge der Röhre in Metern angegeben =  $l$ , so soll der Ton der Röhre eine Schwingungszahl haben

$$N = \frac{331,2}{4l}.$$

Der Versuch gibt aber stets einen etwas tiefern Ton, dessen Schwingungszahl

$$N = \frac{331,2}{4(l+x)}.$$

Liscovius<sup>1)</sup> hat nachgewiesen, dass unter übrigens gleichen Umständen die Vertiefung des Tones mit der Weite der Röhre zunimmt, und Wertheim<sup>2)</sup> hat gefunden, dass die Grösse  $x$  bei gleichgearbeitetem Mundstücke dem Durchmesser der Pfeife proportional, bei gleichem Mundstück und gleichem Durchmesser aber von der Länge der Pfeife unabhängig sei. Der Einfluss auf die Tonhöhe ist daher um so grösser, je kleiner  $l$  ist. Ferner ist von wesentlichem Einflusse Form und Grösse des Mundstückes.

Diese Angaben über die Umstände, welche die Grösse  $x$  beeinflussen, geben uns Aufschluss über die Ursache der Abweichung der beobachteten Töne von der Theorie.

Die theoretische Entwicklung setzt nämlich voraus, dass die ganze untere Schicht zugleich in Vibrationen gerathe, und sich die Schwingungen dann einfach von Schicht zu Schicht fortpflanzen, ferner dass die Pfeife an ihrem untern Ende ganz offen sei. Beides ist nun nicht der Fall, da der Luftstrom zunächst nur die in der Nähe der Lippe liegenden Theile der nächsten Schicht nach oben hin treibt, und dann erst die entferntern in Schwingung versetzt werden, und da andererseits die Mundspalte die Pfeife unten nur theilweise öffnet. Durch letzteren Umstand treten auch am Boden der Pfeife partielle Reflexionen ein, welche bewirken, dass sich nicht gerade am Boden der Pfeife das Schwingungsmaximum bildet und dass deshalb der erste Knoten nicht genau um  $\frac{1}{4}L$ , wenn wir mit  $L$  die Wellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen, von der Mundspalte entfernt ist, sondern um etwas weniger, oder mit andern Worten, dass die beim Grundtone sich bildende Welle nicht genau gleich dem Vierfachen der Pfeifenlänge ist, sondern etwas länger.

<sup>1)</sup> Liscovius, Poggend. Ann. Bd. LVIII. und LX.

<sup>2)</sup> Wertheim, Ann. de chim. et de phys. III. Série. Tome XXIII. Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Mit dieser Entwicklung stimmen nun die Angaben von Wertheim über die Grösse  $x$  vollkommen überein, denn die einzige Störung liegt sonach in der Anwesenheit des Bodens, es muss daher bei gleichen sonstigen Verhältnissen  $x$  von der Länge der Pfeife unabhängig sein, ferner aber muss  $x$  um so grösser sein, je grösser der Querschnitt der Pfeife ist; denn da das Mundloch immer nur an der einen Seite der Pfeife ist, wird auch die Pfeife an der untern Seite um so weniger offen, je grösser der Querschnitt der Pfeife ist. Je vollkommener aber das Mundloch ist, um so mehr muss auch die Störung zurücktreten.

Man kann sich auch durch direkte Beobachtung von der Richtigkeit dieser Erklärung überzeugen. Bringt man eine Pfeife zum Tönen, welche anstatt eines festen Deckels einen verschiebbaren Stempel hat, und erzeugt man z. B. den vierten Ton mit der Schwingungszahl

$$N = 7 \frac{c}{4(l+x)},$$

so erhält man daraus

$$\frac{1}{7}(l+x) = \frac{c}{4N}.$$

Bestimmt man nun auf irgend eine Weise die Schwingungszahl  $N$  des gehörten Tones, so kann man mit Hilfe des berechneten  $c$  die Grösse

$$\frac{1}{7}(l+x) = \frac{1}{4}L$$

oder die Wellenlänge  $L$  des gehörten Tones erhalten. Die Länge der stehenden Wellen ist nun gleich  $\frac{1}{2}L$  oder

$$\frac{1}{2}L = \frac{2}{7}(l+x).$$

Dieser Ton ist der vierte Ton der Röhre von der Länge  $l$ ; verkürzen wir nun die Röhre um  $\frac{2}{7}(l+x)$  dadurch, dass wir den Stempel tiefer in die Röhre einschieben, so erhalten wir eine Röhre, deren dritter Ton gleich dem vorigen vierten sein muss, verkürzen wir nochmals um  $\frac{2}{7}(l+x)$ , so muss jetzt der zweite, und verkürzen wir nochmals um  $\frac{2}{7}(l+x)$ , der Grundton mit dem frühern übereinstimmen. Der Versuch zeigt dieses nun in der That, so dass dadurch feststeht, die einzelnen Knoten stehen um  $\frac{L}{2}$

von einander ab; der erste Knoten aber um weniger als  $\frac{L}{4}$  von der Mundöffnung, die Wellenlänge des Grundtones ist also grösser als die vierfache Länge der gedeckten Pfeife <sup>1)</sup>.

Dulong <sup>2)</sup> wandte dieses Verfahren an, um die Grösse  $x$  experimentell zu bestimmen; er nahm eine Pfeife mit Stempel und erzeugte z. B. den vierten Ton; dann verschob er den Stempel, bis der dritte Ton gleich dem vorigen vierten Ton war und erhielt durch Messung der Verschiebung die Grösse  $l+x$  oder die Länge der den Ton erzeugenden stehenden Welle. Er benutzte diese Versuche, wie wir später sehen werden, um die Grösse  $c$  durch Beobachtung zu erhalten.

<sup>1)</sup> Hopkins Transact. of the Cambridge Philosophical Society. Vol. V. Poggend. Ann. Bd. XLIV.

<sup>2)</sup> Dulong, Annales de chim. et de phys. T. XLII. Poggend. Ann. Bd. XVI.

Wertheim<sup>1)</sup> wandte ein anderes Verfahren an, um die Grösse  $x$  zu bestimmen. Er nahm cylindrische Pfeifen, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt waren, welche mittels Schrauben an einander befestigt werden konnten (Fig. 270). Der Deckel  $k$  war mit einem gleichen Schrauben-

Fig. 270.



gewinde versehen, um jedes Stück der Pfeife gedeckt machen zu können. Auf diese Weise konnte also Wertheim Pfeifen herstellen, welche bei genau gleicher Weite und gleichem Mundstück sich nur durch ihre Länge  $L_1, L_2 \dots$  unterscheiden.

Wurde nun die Pfeife bei einer Länge  $L_1$  zum Tönen gebracht, so hatte der erste Ton eine Schwingungszahl  $N_1$  und es war

$$N_1 = \frac{c}{4(L_1 + x)}$$

Wurde die Pfeife nun durch Ansatz eines Stückes  $b$  auf die Länge  $L_2$  gebracht und wieder der erste Ton erzeugt, so hatte dieser eine andere Schwingungszahl  $N_2$  und es war

$$N_2 = \frac{c}{4(L_2 + x)}$$

aus diesen beiden Grössen lässt sich  $x$  ohne Kenntniss von  $c$  direkt erhalten, denn daraus folgt

$$4N_1(L_1 + x) = 4N_2(L_2 + x)$$

$$x = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}$$

Wertheim theilt in seiner Abhandlung eine Anzahl von solchen Werthen  $x$  für verschiedene Pfeifen mit, wir lassen einige folgen, um die Bedeutung derselben zu überblicken.

Werthe von  $x$  für verschiedene Pfeifen in Luft  
von der Temperatur 11,5 Grad C.

Material der Pfeife	Durchmesser	Länge	Werthe von $x$	
	Millimeter	Millimeter	Millimeter	
Cylindrische Pfeifen von	Blei . . . . .	20	62	30,7
	—	24	107	34,8
	—	20	120	27,1
	—	42	120	68,1
	Messing . . . . .	40	298	60,0
	—	20	281	28,5
	—	10	288	17,0
	Glas . . . . .	20	256	32,0
	Zink . . . . .	50	668	66,1
	Glas . . . . .	17	875	40,0

<sup>1)</sup> Wertheim a. a. O.

Vorstehende Tabelle lässt erkennen, dass der Werth der Berichtigung von der Weite der Röhre abhängig ist, dass aber auch bei Röhren gleicher Weite der Werth von  $x$  verschieden sein kann, in Folge verschiedener Weite des Mundstückes.

In einer weitem Untersuchung hat deshalb Wertheim<sup>1)</sup> die Abhängigkeit von  $x$  von diesen Umständen zu bestimmen versucht und gelangt zu folgender Beziehung für  $x$ . Nennen wir die Breite der Röhre  $B$ , die Dicke derselben  $D$  und den Querschnitt  $B \cdot D = S$ , ferner den Querschnitt der Mundöffnung  $s$ , so wird  $x$

$$x = c(B + D) \left( 1 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right).$$

Hat die Röhre anstatt eines rechteckigen einen cylindrischen Querschnitt, so tritt an die Stelle der Summe  $B + D$  der Ausdruck  $2\sqrt{S}$ . Der Factor  $c$  in dem Ausdrücke bedeutet eine Constante, welche mit dem Material der Röhre etwas veränderlich ist, ihr Werth ist für Metall oder Glas 0,210, für Holz 0,240. In wie weit die so berechneten Werthe von  $x$  mit den aus den Schwingungszahlen der beobachteten Töne abgeleiteten übereinstimmen, zeigt folgende kleine Tabelle; zu den in ihr mitgetheilten Versuchen wurden cylindrische Pfeifen benutzt.

**Werthe von  $x$  bei verschiedenen Pfeifen mit verschiedenen Mundöffnungen.**

$$c = 0,210$$

Material der Wand	$\sqrt{S}$	$s$	Temperatur	Länge der Pfeife	$x$			
					berechnet	beobachtet		
Messing . . .	35,45	60,0	9 <sup>o</sup> ,0 C.	298,0	79,6	96,9		
				631,0		84,0		
				965,0		96,9		
Messing . . .	17,72	36,0	9 <sup>o</sup> ,9	97,5	26,9	24,7		
				190,0		27,9		
				281,0		22,8		
Messing . . .	8,86	13,7	21 <sup>o</sup> ,0	88,0	11,1	17,7		
				188,0		22,1		
				288,0		18,4		
Glas . . . . .	17,72	30,0	9 <sup>o</sup> ,3	100,0	29,7	31,9		
				256,1		37,7		
				231,0		34,4		
Blei . . . . .	17,72	36,0	11 <sup>o</sup> ,5	62,0	26,9	30,7		
				21,27		54,0	31,4	32,0
				17,72		63,0	20,8	25,8
				37,22		140,0	59,8	68,1

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist allerdings nicht vollkommen, jedoch so annähernd, dass man diese aus den Versuchen abgeleitete Formel zu den Rechnungen benutzen kann.

<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XXXI. Krönig's Journal. Bd. II.

Dass die berechneten Werthe meist kleiner sind als die beobachteten, hat seinen Grund zum Theil darin, dass Wertheim die Geschwindigkeit des Schalles in Röhren jener in freier Luft gleich setzt, was nach den neuern, später zu besprechenden Erfahrungen von Kundt und Regnault nicht mehr gestattet ist.

Den Einfluss der Form und Grösse der Mundöffnung benutzt man bei den Orgelpfeifen dazu, um den Ton der Pfeife etwas zu stimmen, wenn die Pfeife nahezu den richtigen Ton angibt. Zu dem Ende sind neben der Mundöffnung an den Seiten zwei verschiebbare Lappen angesetzt, welche gestatten, dieselbe etwas breiter oder schmaler zu machen, und so die Tonhöhe zu verändern.

Die Töne einer offenen Pfeife sind andere, als die einer gedeckten Pfeife von gleicher Länge; der Grundton einer offenen Pfeife ist die höhere Octave des Grundtones der gleichen gedeckten Pfeife, so dass also die Schwingungszahl  $N$  des Tones gleich ist

$$N = \frac{c}{2l}$$

Ausser dem Grundtone können auch alle Töne erzeugt werden, welche der Reihe

$$N = n \cdot \frac{c}{2l}$$

entsprechen, also wenn wir den Grundton mit  $c_{-1}$  bezeichnen, die Töne

$$\begin{array}{cccccc} c_{-1} & c & g & e_1 & e_1 & g_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

oder gehen wir von dem Grundtone der gedeckten Pfeife gleicher Länge  $c_{-1}$  als 1 aus, die Töne

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12.$$

Der erste, dritte, fünfte, überhaupt  $(2n - 1)$  Ton ist also die nächst höhere Octave des ersten, zweiten etc.  $(2n - 1)$  Tones der gedeckten Pfeife; ausserdem gibt dann aber auch die offene Pfeife die dazwischen liegenden Töne  $2n$ .

Die offene Pfeife ist dem longitudinal schwingenden, an beiden Enden freien Stabe zu vergleichen; die an das offene Ende gelangenden Schwingungen werden reflectirt, weil die Luft ausserhalb der Pfeife freier beweglich und deshalb gewissermassen dünner ist als im Innern der Pfeife. Die Bewegung wird demnach ohne Aenderung des Vorzeichens, der ankommende Wellenberg als Wellenberg, das ankommende Wellenthal als Wellenthal reflectirt. Die erste mögliche Schwingungsart, welche in der Röhre stehende Wellen erzeugen kann, ist daher diejenige, deren Wellenlänge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Eine Schwingung z. B., deren Länge wie bei den gedeckten Pfeifen die vierfache Pfeifenlänge hätte, würde, wie man leicht nach §. 130 und 139 entwickelt, an der Mundöffnung einen Schwingungsknoten zur Folge haben, würde also als stehende Welle in der Pfeife sich nicht erhalten können.

Diejenige Schwingungsbewegung, deren Länge die doppelte Pfeifenlänge beträgt, erzeugt dagegen in der Mitte der Pfeife einen Schwingungsknoten und bildet als stehende Welle in der Pfeife zwei halbe Wellen, deren

Länge gleich der Länge der Pfeifen ist. Die Schwingungsdauer und Schwingungszahl ist demnach

$$T = \frac{2l}{c}, \quad N = \frac{c}{2l}.$$

Eine schwingende Bewegung, deren Welle so lang ist, als die Länge der Pfeife, erzeugt in der Pfeife zwei Schwingungsknoten, welche von den Enden der Pfeife um  $\frac{1}{4}$  Pfeifenlänge entfernt sind. Zwischen ihnen befindet sich eine stehende Welle von der Länge  $\frac{1}{2} l$ , und von jedem Schwingungsknoten bis zum Ende eine halbe Welle von der Länge  $\frac{1}{4} l$ ; an beiden Enden befinden sich also Schwingungsmaxima. Es wird überflüssig sein, die weitem Theilungen der Pfeife, welche den Tönen  $g_1, c_1 \dots$  entsprechen, abzuleiten, da dieselben nach den Entwicklungen des §. 130 und 139 unmittelbar hervortreten.

Für die offenen Pfeifen gilt das früher über den Einfluss des Mundlochs Gesagte gerade wie für die gedeckte Pfeife, auch bei diesen ist demnach die Länge der Welle länger als das Doppelte der Röhre oder

$$N = \frac{c}{2(l+x)},$$

und zwar muss diese Grösse  $x$  hier ganz dieselbe sein, wie bei der gedeckten Pfeife. Vergleicht man nun die so berichtigte Schwingungszahl  $N$  mit derjenigen  $N'$  der gedeckten Pfeife, so müsste

$$N = 2N'$$

oder der Ton der gedeckten Pfeife soll genau die tiefere Octave des Tones der offenen Pfeife sein. Indess hört man bald bei einem Versuche, dass das nicht der Fall ist, dass der Ton der offenen Pfeife immer etwas tiefer ist als die höhere Octave. So fand Wertheim bei einigen Versuchen, dass bei einer Pfeife von 24<sup>mm</sup> Durchmesser der gehörte Ton bei der offenen Pfeife sich zu dem Tone  $2N'$  verhielt wie 23 zu 24, und in einem andern Falle bei einem Durchmesser von 50<sup>mm</sup> wie 43,9 : 46,1, den Ton also verhältnissmässig noch tiefer.

Es muss daher bei der offenen Pfeife noch ein anderer Umstand störend einwirken, der die gehörten Töne von der Theorie abweichend macht. Wertheim sieht denselben darin, dass die Reflexion der schwingenden Bewegung nicht ganz genau in dem obern Querschnitt der Röhre stattfindet, sondern dass sich die schwingende Bewegung noch ein klein wenig über diesen Querschnitt hinaus erstreckt, die schwingende und tönende Luftsäule also etwas länger wird, als die Theorie annimmt. Dass diese kleine Verlängerung stattfindet, davon kann man sich durch den Versuch überzeugen, denn hält man ganz nahe über die Oeffnung der Röhre eine feine schwach gespannte und mit Sand bestreute Membran, so sieht man an dem Hüpfen des Sandes die Ausdehnung der Bewegung über der Pfeife. Um den Ton der offenen Pfeife genau im Verhältniss zur Länge der Pfeife zu bestimmen, muss man daher für die Schwingungszahl desselben setzen

$$N = \frac{c}{2(l+x+y)}$$

Um die Summe der beiden Berichtigungen  $x + y$  zu bestimmen, verfuhr Wertheim gerade so, wie bei den gedeckten Pfeifen.



Sind  $L_1$  und  $L_2$  die Länge zweier verschiedener Pfeifen von gleichem Durchmesser,  $N_1$  und  $N_2$  die Schwingungszahlen ihrer Grundtöne, so hat man gerade wie vorhin

$$\begin{aligned} c &= 2N_1(L_1 + x + y) \\ c &= 2N_2(L_2 + x + y), \end{aligned}$$

und daraus nach Elimination von  $c$

$$x + y = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2},$$

ein Ausdruck, der dem vorigen für  $x$  ganz analog ist.

Für den Werth  $x + y$  gelang es Wertheim ebenfalls <sup>1)</sup> eine von dem Querschnitt der Röhre und der Grösse der Mundöffnung abhängige Beziehung aufzufinden. Bedeuten wieder  $B$  die Breite,  $D$  die Dicke der Röhre, ist  $S$  der Querschnitt derselben und  $s$  der Querschnitt der Mundöffnung, so gibt er für die Correction der Pfeifenlänge den Ausdruck

$$x + y = c_1 (B + D) \left( 2 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right),$$

worin  $c_1$  eine von dem Material der Röhre unabhängige Constante ist, nämlich  $c_1 = 0,187$ .

In folgender Tabelle ist eine Anzahl von Versuchen Wertheim's zusammengestellt, welche zeigen, dass die für offene Pfeifen an der Länge derselben anzubringende Correction in der That mit grosser Annäherung durch obige Gleichung wiedergegeben ist. Die benutzten Pfeifen sind auch hier cylindrische, so dass an Stelle von  $B + D$  in jener Gleichung einzusetzen ist  $\sqrt{S}$ .

Tabelle der Correctionen an offenen Pfeifen.

Material der Röhre	$\sqrt{S}$	$s$	Temperatur	Länge der Pfeife	Correction	
					berechnet	beobachtet
Messing . . .	35,45	120,0	8 <sup>0</sup> ,0 C.	332,5	65,4	65,1
				666,0		67,4
				1000,5		68,6
Messing . . .	35,45	60,0	26 <sup>0</sup> ,6	332,5	84,2	88,9
				666,0		84,8
				1000,5		87,8
Messing . . .	17,72	36,0	9 <sup>0</sup> ,9	97,5	30,6	28,0
				190,0		28,0
				281,0		28,1
Messing . . .	8,86	13,7	21 <sup>0</sup> ,0	88,0	13,2	18,0
				188,0		22,1
				288,0		19,0
Glas . . . . .	17,72	30,0	17 <sup>0</sup> ,0	100,0	32,7	39,1
				245,0		35,9
Blei . . . . .	21,27	54,0	11 <sup>0</sup> ,5	110,0	36,6	37,1

<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XXXI. Krönig's Journal. Bd. II.

Wie man sieht, stimmen bei offenen Pfeifen die nach jener Beziehung berechneten Correctionen mit den beobachteten zum Theil noch besser als bei gedeckten Pfeifen, so dass man bei jenen durch die Rechnung mit sehr grosser Annäherung richtige Resultate erhält.

Da nach diesen Erfahrungen die schwingende Bewegung nicht in der geometrischen Endfläche der Pfeife endigt, so wird eine theilweise Schliessung der Endfläche die Tonhöhe der Pfeife ebenfalls verändern, und zwar, wie sich aus den Bemerkungen über die Correction an gedeckten Pfeifen ergibt, muss ein derartiger partieller Verschluss die Töne der Pfeife vertiefen. Dass eine solche Vertiefung stattfindet, hat die Erfahrung die Orgelbauer längst gelehrt, sie versehen die offenen Orgelpfeifen oben gewöhnlich mit schräg stehenden Blechen, welche man auf- und abbiegen kann; biegt man sie herab, so wird der Ton vertieft.

Wertheim<sup>1)</sup> ist es gelungen, auch für diesen Fall eine empirische Relation herzustellen, welche die an der Länge der Pfeife anzubringende Correction zu berechnen gestattet, so dass die Tonhöhe sich durch die Gleichung

$$n = \frac{c}{2(L+x+y)}$$

berechnen lässt.

Haben  $B$ ,  $D$  und  $S$  dieselbe Bedeutung wie früher, und ist  $s_1$  der Querschnitt der Mundöffnung,  $s_2$  derjenige der obern Oeffnung der Pfeife, so ist nach Wertheim

$$x = c (B + D) \left( 1 - \sqrt{\frac{s_1}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_1}} \right),$$

$$y = c_1 (B + D) \left( 1 - \sqrt{\frac{s_2}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_2}} \right),$$

worin  $c_1$  wie bei ganz offenen Pfeifen den Werth 0,187 hat.

Nachstehende Tabelle enthält eine Anzahl Versuche, welche Wertheim an einer quadratischen Orgelpfeife von Holz zur Prüfung obiger Relation angestellt hat. Die Länge der Pfeife betrug 240<sup>mm</sup>, die Seite des quadratischen Querschnittes 120<sup>mm</sup>; dieselbe Breite hatte die untere, die Mundöffnung, deren Höhe 5<sup>mm</sup>,5 betrug. Das Verhältniss  $\frac{s_1}{S}$  ist darnach 0,0458; die Temperatur war bei allen Versuchen 15°. Die Tabelle stellt die von Wertheim beobachteten und die mit den nach obigen Gleichungen bestimmten Werthen von  $x$  und  $y$  berechneten Schwingungszahlen zusammen.

<sup>1)</sup> Wertheim u. a. O.

Schwingungszahlen partiell gedeckter Pfeifen.

$b_2$	$h_2$	$\frac{s_2}{S}$	Schwingungszahl	
			berechnet	beobachtet
120	120	1,0000	644,0	679,0
100	96	0,6667	622,5	640,0
100	72	0,5000	607,6	606,6
100	60	0,4167	597,2	592,6
80	60	0,3333	586,7	579,2
60	60	0,2500	571,4	550,5
60	40	0,1667	549,1	522,5
40	30	0,0833	507,5	481,2
30	20	0,0417	460,9	449,1
20	15	0,0208	408,9	423,1
12	10	0,0083	335,4	343,6
0	0	0,0000	307,7	320,0

Die Spalten  $b_2$  und  $h_2$  enthalten die Seitenflächen der obren Oeffnung der Pfeife. Wie die Tabelle zeigt, stimmen auch hier die berechneten Zahlen mit den beobachteten ziemlich gut überein, indess doch nur soweit, dass wir die von Wertheim gegebene Relation nur als eine angenähert richtige betrachten dürfen.

Die letzten Erfahrungen zeigen, dass die einfache von uns vorgetragene Theorie der Luftschwingungen in Pfeifen nur für sehr enge Röhren Gültigkeit hat, dass sobald der Querschnitt der Röhren einigermaßen gross ist, die anzubringenden Correctionsglieder sehr beträchtlich sind. Es tritt das noch mehr hervor, wenn die Länge der Pfeifen gegen die Dimensionen des Querschnitts nicht mehr sehr gross ist, wenn die Länge der Pfeife nicht grösser oder gar kleiner ist als die Breite der Röhre oder bei cylindrischen Röhren, als der Durchmesser. Würde man bei solchen Röhren den Ton einfach aus der Länge berechnen, so würde man sie oft mehr als eine Octave höher finden, als der Versuch sie ergibt. Für derartige Röhren lässt sich indess wiederum mit sehr grosser Annäherung die Tonhöhe nach den Wertheim'schen Gleichungen berechnen, wie sich aus einer grossen Anzahl von Versuchen, welche Wertheim mit Röhren der verschiedensten Form angestellt und in der schon mehrfach citirten Abhandlung mitgetheilt hat, deutlich ergibt. Wir begnügen uns hier damit, um zu zeigen, wie weit die Versuche mit den Formeln Wertheim's übereinstimmen, eine Versuchsreihe an Holzpfeifen mitzutheilen. Die Pfeifen waren Röhren von rechteckigem Querschnitt, deren Länge 350<sup>mm</sup> und deren eine Seite des Querschnitts  $H = 200^{\text{mm}}$  betrug. Parallel dieser Seite konnten in den Kasten Schieber eingesetzt werden, welche so den Querschnitt der Röhre zu ändern gestatteten, indem man die Breite  $B$  desselben verkleinerte. Die Röhre war unten geschlossen, oben offen, und der untere Querschnitt konnte durch einen parallel der Kante  $H$  beweglichen Schieber, der die ganze Breite der Röhre einnahm, mehr oder weniger verkleinert werden. Die Pfeife wurde dann durch ein mit einem platten Mundstück von Messing versehenes Blaserohr, ähnlich wie Fig. 267, und in der dort dargestellten Weise angeblasen.

In nachfolgender Tabelle gibt die mit  $h$  überschriebene Spalte die der Seite  $H$  parallele Ausdehnung der Oeffnung, deren Breite  $b$  immer gleich jener der Röhre war. Die zur Berechnung der Töne benutzte Constante  $c$  ist = 0,240, da die Pfeife von Holz war.

Töne kubischer Pfeifen.

$h$	$\frac{s}{S}$	Breite $B = 200^{\text{mm}}$ Schwingungszahl		Breite $B = 100^{\text{mm}}$ Schwingungszahl		Breite $B = 50^{\text{mm}}$ Schwingungszahl	
		berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
200	1,000	382,5	382,1	404,3	404,4	416,2	414,9
180	0,900	374,3	379,8	397,2	398,7	409,9	409,9
160	0,800	365,0	364,7	389,5	384,4	403,0	405,7
140	0,700	355,2	353,1	381,0	381,0	395,4	386,7
120	0,600	344,3	336,8	371,6	368,9	386,9	366,8
100	0,500	332,0	314,5	361,6	358,5	377,2	355,5
80	0,400	317,7	304,0	348,0	348,8	365,5	339,1
60	0,300	299,9	299,4	334,5	336,3	350,5	315,3
40	0,200	276,2	264,5	309,8	281,3	329,8	288,3
20	0,100	237,2	224,6	272,2	261,2	293,8	263,9
10	0,050	199,8	203,2	234,4	220,7	256,6	243,8.

Für sehr kleine Mundöffnungen weichen die beobachteten und berechneten Zahlen nicht unbedeutend von einander ab, für grössere Mundöffnungen stimmen die Resultate ziemlich gut.

Als ein allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Versuchen, dass die Töne kubischer Pfeifen mit abnehmendem Volumen der Röhre höher werden, und weiter lässt sich aus den Versuchen und der Formel Wertheim's der Satz ableiten, dass bei ähnlichen Formen der Pfeife und der Mundöffnung die Töne der Pfeife sich umgekehrt verhalten wie die Längen der homologen Seiten.

Es genüge an diesen kurzen Andeutungen über das Verhalten kubischer Pfeifen<sup>1)</sup>, da dieselben ausreichend sind, in den wenigen Fällen, in denen wir diese Pfeifen benutzen, uns die erforderliche Kenntniss derselben zu liefern. Das ergibt sich aus diesen Erfahrungen zur Genüge, dass die einfache Theorie der Pfeifentöne zur Bestimmung derselben nicht ausreicht, und zwar deshalb nicht, weil die in Pfeifen schwingenden Luftsäulen nicht so isolirt für sich schwingende Körper sind, wie longitudinal schwingende Stäbe, weil vielmehr die schwingende Bewegung auch der ausserhalb der Pfeifen vorhandenen Luft sich mittheilt und dadurch die Schwingungen der Luftsäulen in den Pfeifen selbst modificirt wird.

Helmholtz<sup>2)</sup> hat deshalb die Theorie der Luftschwingungen in Röhren einer neuen Behandlung unterzogen, bei welcher auf den eben hervorgehobenen Umstand, dass die Luftsäule in Röhren nicht ein ganz selbständig

<sup>1)</sup> Man sehe auch *Sondhauss*, Poggend. Ann. Bd. LXXIX und LXXXI. *Masson*, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XL. *Zumminer*, Poggend. Annalen. Bd. XCVII.

<sup>2)</sup> *Helmholtz*, Crelle's Journal. Bd. LVII. p. 1.

schwingender Körper ist, Rücksicht genommen ist. Er behandelt gleichzeitig die Schwingungen im Innern der Röhre und in der umgebenden Luft, und es ist ihm dadurch gelungen, mehrere der vorhin besprochenen Erfahrungen theils theoretisch zu begründen, theils näher zu bestimmen. Es ist uns indess durch die hier uns gesteckten Grenzen versägt, auf diese Untersuchungen Helmholtz's näher einzugehen.

Das Tonbildende in den Pfeifen ist die schwingende Luftsäule, die Wände der Pfeifen dürfen deshalb auf die Tonhöhe von keinem wesentlichen Einfluss sein. So lange die Wände aus ganz festem Material bestehen, ist das auch nicht der Fall, die Tonhöhe ist wesentlich dieselbe in metallischen, gläsernen oder hölzernen Pfeifen.

Sind jedoch die Wände der Pfeifen nicht aus festem Material, so ändern sie die Höhe des Tones ab, und zwar wird der Ton bei weichen Wänden tiefer. Savart<sup>1)</sup> hat gezeigt, dass Pfeifen mit Pergamentwänden tiefer tönen als solche mit starren Wänden, und dass der Ton um so tiefer wird, je mehr man die Wände durch Benetzen erschläfft. Dasselbe zeigte Liscovius<sup>2)</sup>, welcher gleichzeitig nachwies, dass man durch verstärkte Spannung des Pergaments den Ton erhöhe. Wird eine Pergamentwand derart gedrückt, dass sie nicht mitschwingen kann, wenn die Luftsäule schwingt, so gibt die Pfeife denselben Ton als eine solche mit starren Wänden.

Gerade dieser letzte Versuch beweist, dass der Einfluss einer nicht ganz festen Wand darin begründet ist, dass die Wand gleichzeitig mit der Luftsäule schwingt, und dass die Schwingungszahl der Luftsäule dadurch, dass die schwingende Wand auf sie einwirkt, eine andere wird. Die Einzelheiten der Erscheinung lassen sich indess noch nicht näher übersehen.

Wenn feste Wände auf die Tonhöhe keinen Einfluss haben, so sind sie doch von wesentlicher Bedeutung für den Klang der Pfeifen<sup>3)</sup>. Bei engen cylindrischen oder rechteckigen offenen Pfeifen bildet sich neben dem Grundton auch die Reihe der harmonischen Töne in ähnlicher Weise wie bei den gestrichenen Saiten aus, deshalb haben sie einen vollen und schärfern, dem der gestrichenen Saiten ähnlichen Klang, bei weitem offenen Pfeifen, den Principalstimmen der Orgel, besonders den hölzernen, tritt nur die Octave noch deutlich zum Grundton, die höhere fast gar nicht, deshalb ist der Ton dieser Pfeifen viel dumpfer. Die gedeckten Pfeifen geben die Töne 1, 3, 5 . . . , indess sind die Obertöne nur bei engen Pfeifen deutlich. bei weiten tritt fast nur der Grundton auf, woher der dumpfe Klang der gedeckten Register rührt.

Der Klang in Holzpfeifen ist immer dumpfer und weicher als in Metallpfeifen, hauptsächlich, weil die raschern Schwingungen der Obertöne sich dem Holz mittheilen und deshalb rasch verschwinden.

#### §. 155.

**Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen.** Wir haben erwähnt, dass man durch einen Flüssigkeitsstrom, der durch die durchlöcherete Scheibe einer in eine Flüssigkeit getauchten Sirene getrieben wird, einen

<sup>1)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. T. XXX.

<sup>2)</sup> Liscovius, Poggend. Ann. Bd. LVII.

<sup>3)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. p. 150.

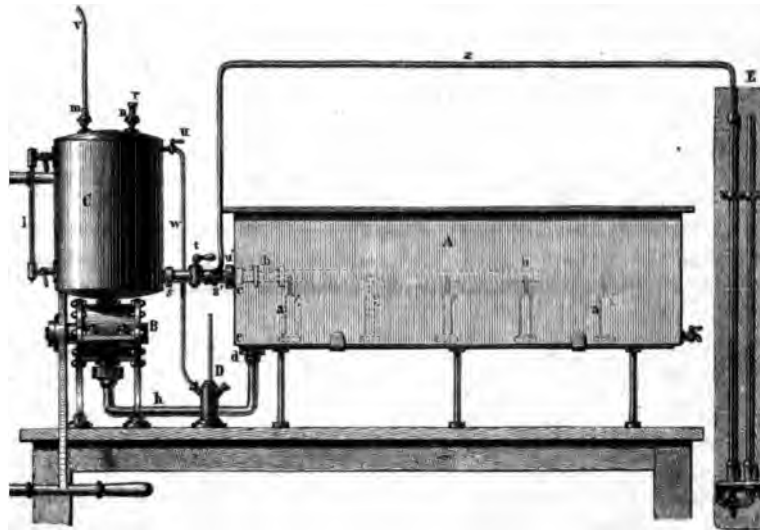
erzeugen kann. Cagniard Latour und später in noch ausgezeichneterer Weise Wertheim ist es gelungen, in Flüssigkeiten stehende Wellen und reine Töne hervorzubringen.

Cagniard Latour<sup>1)</sup> brachte Flüssigkeitssäulen, welche in Glasröhren eingeschlossen waren, dadurch zum Tönen, dass er die Glasröhren longitudinal schlug. Die Höhe des erzeugten Tones bewies, dass nicht die longitudinalen Schwingungen des Glases es waren, welche gehört wurden, sondern die Schwingungen der Flüssigkeitssäule. Er wies durch den Versuch nach, dass der Ton eine höhere Octave ist, wenn die Röhre an beiden Seiten offen, die Flüssigkeitssäule also an beiden Enden frei ist, von dem Tone, den eine Flüssigkeitssäule gibt, welche in einer an einem Ende geschlossenen Röhre schwingt, als wenn eines Ende also an einer festen Wand anliegt. Die Töne einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule konnten nicht dadurch erhalten werden, dass man eine an beiden Enden offene Röhre einfach in Wasser tauchte, sondern wurden dadurch erzeugt, dass man ein Rohr U-förmig, gleichschenkelig bog und dann longitudinal schlug. Wurde das Ende des Hebers zugeschmolzen und derselbe bis zur gleichen Höhe mit Wasser gefüllt, als der offene, so war der Ton eine Octave tiefer als beim offenen Heber.

Auch gelang es Cagniard Latour eine Pfeife unter Wasser zum Tönen zu bringen. Dies gelang aber in viel vollkommenerer Weise Wertheim, der durch eine mit Flüssigkeit gefüllten Röhre durch einen Flüssigkeitsstrom den Ton und die harmonischen Töne erzeugte<sup>2)</sup>.

Der Apparat, welchen Wertheim zu seinen Versuchen mit Wasser anwandte, ist Fig. 271 abgebildet.

Fig. 271.



<sup>1)</sup> Cagniard Latour, Annales de chim. et de phys. LVI.  
<sup>2)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XXIII. Poggend. Bd. LXXVII.

Die offene Orgelpfeife  $bb$  liegt horizontal auf den Stützen  $a$  in dem grossen gefüllten Wasserbehälter  $A$ . Der Fuss der Pfeife ist in  $c$  angeschraubt an eine in der Wand befestigte Mutter, welche der Pumpe gegenüber übersitzt. Eine Ventilpumpe  $B$ , welche durch den davor befindlichen Hebel getrieben wird, saugt die Flüssigkeit durch das weite Rohr  $k$  aus dem Behälter und pumpt es in das davorstehende Reservoir  $C$ .

Das Innere des Reservoirs  $C$  steht durch den Hahn  $m$  und das Rohr mit grossen Gefässen voll comprimierter Luft in Verbindung. Durch den Druck dieser Luft bei geöffnetem Hahn  $m$  wird das im Behälter  $C$  angesammelte Wasser durch den Hahn  $t$  und das Rohr  $ss'$  in die unter Wasser befindliche Pfeife getrieben. Mittels des Hahnes  $t$  ist man im Stande, den Zufluss des Wassers beliebig zu reguliren.

Auf dem Behälter  $C$  befindet sich noch ein zweiter Hahn  $n$ , der geöffnet die comprimirte Luft des Behälters in die Atmosphäre entweichen lässt, und auf den man bei  $r$  eine Sirene aufstellen kann, um die absolute Schwingungszahl des in der Wasserpfeife gehörten Tones, also die Tonhöhe zu bestimmen. Ausserdem dient dieser Hahn dazu, Versuche mit gewöhnlichen Orgelpfeifen in Luft anzustellen.

Um den Druck zu messen, unter welchem das Wasser in die Pfeife eintritt, communicirt die Röhre  $ss'$  durch den Hahn  $u'$  und die Röhrenleitung  $x$  mit dem Manometer  $E$  und ausserdem die Luft im Gefässe  $C$  durch den Hahn  $u$  und die Röhre  $uw$  mit dem Manometer  $D$ .

Ist nun der Apparat eingerichtet, so beginnt man die Versuche damit, dass man bei geschlossenen Hähnen  $m$ ,  $n$ ,  $t$ , mittels der Pumpe  $B$  Wasser aus dem Behälter  $A$  in den Behälter  $C$  pumpt. Ist die Wassermasse dort hinreichend, so setzt man den Behälter  $C$  durch Oeffnen des Hahnes  $m$  mit den mit comprimierter Luft gefüllten Behältern in Verbindung. Der Druck dieser Luft ist es dann, der bei geöffnetem Hahne  $t$  das Wasser in die Orgelpfeife treibt und fernerer Pumpen während des Versuches dient nur dazu, das Wasser in  $C$  auf constantem Niveau zu erhalten.

Damit die Versuche gelingen, muss auf die Construction der Orgelpfeife besondere Aufmerksamkeit verwandt werden.

Wertheim wandte dazu die aus mehreren Stücken zusammengesetzte Pfeife (Fig. 272) an. Das erste Stück besteht aus der Schraube  $c$ , pass

Fig. 272.



für die Mutter bei  $c$  im Behälter  $A$  (Fig. 271) geschnitten, in deren ein feines Drahtnetz angebracht ist, um zu verhindern, dass allenfalls im Wasser schwebende Körpertheilchen in die Pfeife eintreten; ferner aus dem Mundstücke  $d$  und der Röhre  $b$ , an deren Ende der Schraubengang  $h$  befindet, um daran die folgenden Röhrenstücke durch den Deckel  $k$  anzuschrauben. Die beiden Labien des Mundlochs bilden sich aus den Platten  $d$  und  $e$ , welche mit den Klammern  $f$  befestigt werden.

Man kann die Platten, welche die Labien bilden, nicht sogleich mit der Pfeife unveränderlich fest verbinden, da die Stellung der Labien von wesentlichem Einfluss auf die Leichtigkeit ist, mit der

anspricht, und man deshalb durch den Versuch erst die Lage ermitteln muss, bei der die Pfeife in den Flüssigkeiten tönt. Für Flüssigkeiten muss im allgemeinen der Aufschnitt weniger breit und lang sein als für Luft, das Licht, die Mündung des Fusses in der Pfeife grösser und der Strom etwas mehr gegen das Innere der Pfeife gerichtet sein.

Mit diesem Apparate ist es Wertheim gelungen, Orgelpfeifen unter Wasser mittels eines Wasserstromes zum Tönen zu bringen, und er fand, wie es nach §. 139 zu erwarten ist, dass die Töne derselben Reihe folgen wie bei Pfeifen, welche mit Luft angeblasen werden. Bei offenen Pfeifen, nur diese gaben ein gutes Resultat, waren die Töne

$$\begin{array}{cccccccc} c_{-1} & c & g & c_1 & e_1 & g_1 & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \end{array}$$

Die Schwingungszahlen allgemein

$$N = n \frac{c}{2l},$$

wenn  $l$  die Länge der Pfeife bedeutet. Oder vielmehr genauer

$$N = \frac{c}{2(l+x+y)},$$

das heisst, es mussten dieselben Berichtigungen angebracht werden, wie bei den in Luft angeblasenen Pfeifen.

Nach dem Bisherigen hat  $c$  den Werth

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}} = \sqrt{\frac{gHg\sigma}{\mu s}},$$

worin  $H$  den Druck einer Atmosphäre in Metern Quecksilber,  $\sigma$  die Dichtigkeit des Quecksilbers,  $\mu$  die Compressibilität des Wassers und  $s$  die Dichtigkeit des Wassers bedeutet. Der Werth dieses Ausdruckes war nach §. 138

$$c = \sqrt{\frac{Hg\sigma}{\mu s}} = 1424,5.$$

Die Schwingungszahl  $N$  des Grundtones einer offenen Pfeife von der Länge  $l$  sollte demnach sein

$$N = \frac{1424,5}{2l}.$$

Die Versuche von Wertheim gaben indess einen viel kleinern Werth, die Töne waren tiefer, als sie hiernach sein sollten und zwar so, dass die beobachtete Schwingungszahl  $N'$  war

$$N' = \sqrt{\frac{2}{3}} N.$$

Den Grund dieser Abweichung werden wir im nächsten Kapitel ableiten; hier genüge die Bemerkung, dass nach der Ansicht von Wertheim die Grösse  $c$ , welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in dem Wasser bedeutet, hier einen andern Werth hat als den von uns berechneten, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere ist in Flüssigkeitssäulen, wie in Orgelpfeifen, als in einer unbegrenzten Flüssigkeit und zwar, dass die Geschwindigkeit  $c'$  in Flüssigkeitssäulen gleich ist

$$c' = \sqrt{\frac{2}{3}} c.$$



## § 170.

Von den Zungenpfeifen. Die vorhinlichen Zungenpfeifen unterscheiden sich von den Zungenpfeifen dadurch, dass die Schwingungen nicht durch die Schwingung des Luftstroms, sondern durch die Schwingung des Luftstroms selbst hervorgerufen werden. Die Zungenpfeife

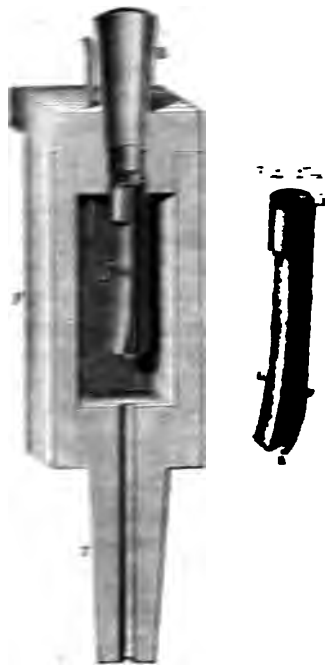


Fig. 273 und 274 besteht aus dem Kanalarbeit oder Rohrwerk *abd.*, welches in dem Fusse der Pfeife *F* sich befindet und welches, wie Fig. 273 zeigt, in die Öffnung der mehr kegelförmig nach oben hin erweiterten Röhre *R* hineinragt ist.

Das Rohrwerk besteht aus einem Halbzylinder von starkem Messingblech, der an seiner Basis bei *a* geschlossen, oben jedoch offen ist, Fig. 274. Die Innenfläche des Messinghalbzylinders ist durch eine ebene Metallplatte bedeckt, welche gebogen nur ungefähr auf  $\frac{1}{2}$  der Länge der Röhre fest und von da ab frei beweglich ist und als schwingende Zunge in die Öffnung des Zylinders hinein und heraus treten kann wie Fig. 274. Durch die Öffnung des Zylinders kann die Luft ein- und hervorschwingen öffnen und verschlossen kann wie Fig. 273. Die Rohrwerke der ersten Art mit durchschlagender Zunge, welche einen weniger reinen Ton geben als die Rohrwerke der zweiten Art mit aufschlagender Zunge, müssen so gearbeitet sein, dass die Zunge beim Eintreten in den Messingzylinder das Rohr vollkommen verschliesst und die Ränder der beweglichen Öffnung zu berühren. Im ruhenden Zustande ist die Zunge so gebogen, dass sie etwas von den Rändern der Öffnung abstreift, so dass die Luft des Fusses *F* mit derjenigen im Innern des Messingrohrs und des Schallbehälters der Röhre *R* communicirt. Der Fuss *F* ist durch ein Loch an der Durchtrittsstelle des Rohres *r*, welches den Luftstrom aus dem Windkasten eintreten lässt, geschlossen. Die Röhre *R* ist oben offen, damit die durch das Rohrwerk eintretende Luft entweichen kann.

Um die Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, setzt man nur das Rohr auf den Kanal einer Windlade und lässt Luft einblasen. Die in den Fusse der Pfeife eintretende Luft dringt dann zunächst durch die von der Zunge gelassene Spalte in die Pfeife ein; allein da nicht schnell genug alle Luft durch diese Spalte dringen kann, verdichtet sich dieselbe im Fusse und treibt die Zunge in die Röhre hinein, so dass auf einen Augenblick die Röhre ganz geschlossen und keine Luft aus dem Fusse mehr in die Röhre dringen kann. Durch das erste Eindringen der Luft in die Röhre gerät

Um die Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, setzt man nur das Rohr auf den Kanal einer Windlade und lässt Luft einblasen. Die in den Fusse der Pfeife eintretende Luft dringt dann zunächst durch die von der Zunge gelassene Spalte in die Pfeife ein; allein da nicht schnell genug alle Luft durch diese Spalte dringen kann, verdichtet sich dieselbe im Fusse und treibt die Zunge in die Röhre hinein, so dass auf einen Augenblick die Röhre ganz geschlossen und keine Luft aus dem Fusse mehr in die Röhre dringen kann. Durch das erste Eindringen der Luft in die Röhre gerät

nun die Luft in derselben in Schwingung und die Zunge dringt dann so weit in die Röhre ein, bis ihre eigene Elasticität und der von der schwingenden Bewegung der Luft in der Röhre sie treffende Impuls sie zurücktreibt und nun die Oeffnung von neuem frei lässt. Darauf wird dann neuerdings die Zunge an oder in die Röhre und wieder zurückgetrieben und das Spiel wiederholt sich so lange als der Luftstrom anhält.

Durch diese Vorrichtungen entstehen also Schwingungen der Luft in der Röhre, Schwingungen der Zunge und ebenso ein intermittirender Luftstrom gerade wie bei der Sirene, indem bei jeder Oeffnung des Rohres ein Luftstrom in die Pfeife dringt, bei jedem Schlusse desselben der Strom unterbrochen wird.

Nach den Versuchen von Wilhelm Weber<sup>1)</sup> sind es nun weder die Schwingungen der Platte, welche den lauten und starken Ton der Zungenpfeife geben, noch die Schwingungen der Luftsäule, sondern die Stösse des intermittirenden Luftstromes wie bei der Sirene, der bei jeder Oeffnung der Zunge in das Rohr eintritt, bei jedem Verschliessen des Rohres durch die Zunge unterbrochen wird. Die Zahl der Luftstösse und somit die Tonhöhe aber hängt in der Pfeife nur von den Schwingungen der Zunge ab, wie in der Sirene von der Geschwindigkeit der Scheibe, indem die Schwingungen der Zunge es sind, welche das Rohr abwechselnd öffnen und schliessen.

Die Schwingungen der Platte werden aber ausser durch die Elasticität derselben wesentlich mit bestimmt durch die stehenden Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife *R*, durch den abwechselnd zu- und abnehmenden Druck der dort schwingenden Luft.

Dass diese Anschauung von der Tonbildung in der Zungenpfeife die richtige ist, begründet Weber durch folgende Versuche. Würde der Ton in der Zungenpfeife nicht von den Stössen der Luft, sondern von den Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife oder den vereinten Schwingungen der Luft und der Zunge erzeugt, so müsste der Ton aufhören, wenn man die Röhre *R* fort nähme; man weiss aber, dass das nicht der Fall ist. Bläst man das Rohrwerk allein an, wie es z. B. in der Mundharmonika immer geschieht, so ist der Ton der Höhe nach fast ganz derselbe, seinem Klange nach völlig derselbe, als wenn eine kurze Luftsäule mit schwingt.

Dass der Ton nicht von den Schwingungen der Platte herrührt, ergab sich daraus, dass, wenn die Platte mit dem Violinbogen gestrichen wurde, also ohne die Luftstösse in Schwingungen versetzt wurde, ein nur ganz schwacher und in unmittelbarer Nähe hörbarer Ton entstand, der keinesfalls mit dem vollen und starken Tone der Zungenpfeife vergleichbar war. Selbst als er die Zunge vor einer Röhre in Schwingung versetzte, in der die stehenden Schwingungen der Luft denselben Ton gaben wie die Zunge, fand Weber den Ton nur matt und viel schwächer.

Also nur durch den intermittirenden Luftstrom, durch die von diesem wie bei der Sirene erzeugten und durch die umgebende Luft fortgepflanzten Stösse entsteht jener laute und volle Ton, welcher bei dem Anblasen der Zungenpfeife gehört wird.

Da indess ein Stoss nur beim Oeffnen des Rohres entsteht, so sind die Stösse mit den Schwingungen der Zunge gleichzeitig und man kann aus der

<sup>1)</sup> W. Weber, Poggendorff's Annalen. Bd. XVI.

Höhe des gehörten Tones auf die Schwingungszahl der Zunge schliessen und diese mit den Schwingungen vergleichen, welche die für sich schwingende Platte vollführen würde. Eine solche Vergleichung beweist dann den zweiten Satz von Weber, dass die Schwingungen der Zunge bedingt werden durch die eigene Elasticität der Zunge und durch die in der Röhre auftretenden stehenden Schwingungen der Luftsäule. Die Tonhöhe und somit die Schwingungszahl der Platte wird nämlich eine andere, wenn verschieden lange Röhren mit der Zunge zur Pfeife verbunden sind.

Um die Aenderungen der Tonhöhe zu erkennen, ist es nothwendig zu beachten, dass die Pfeife auf doppelte Weise zum Tönen gebracht werden kann, durch Blasen von unten, so dass also in dem Fuss  $F$  der Pfeife die Luft dichter ist als im Innern der Pfeife und durch Saugen von unten oder Blasen von oben, so dass die Luft ausserhalb der Röhre im Fusse  $F$  der Pfeife dünner ist als innerhalb.

Der Vergleich der Töne der Zungenpfeife mit dem Tone der isolirt schwingenden Zunge ergibt nun folgendes.

1) Ist die Pfeife so lang, dass die in ihr erregten stehenden Schwingungen genau den Ton der isolirt schwingenden Zunge geben, so wird durch den Ansatz der Pfeife an das Rohrwerk der Ton seiner Höhe nach nicht wesentlich anders als der Ton der isolirt schwingenden Zunge. Es ist das sowohl der Fall, wenn der Grundton der Röhre, als wenn einer ihrer harmonischen Obertöne mit dem Tone der Zunge übereinstimmt. Ist also  $l$  die Länge der Röhre, deren Grundton mit dem Tone der Zunge gleiche Höhe hat, so hat es der zweite Ton der Röhre  $2l$ , der dritte derjenigen von der Länge  $3l$  u. s. f. Alle diese Röhren, deren Länge  $l$  oder irgend ein Vielfaches von  $l$  ist, ändern mit dem Rohrwerke zur Zungenpfeife verbunden die Höhe des Tones, den die Zunge für sich geben würde nicht ab, die Schwingungen der Zunge erfolgen also unter vereinigter Wirkung der Elasticität der Zunge und der wechselnden Drucke der Luft gerade so, als bewegte sie sich nur in Folge ihrer eigenen Elasticität. Das ist sowohl der Fall, wenn die Pfeife durch Blasen, als wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Hat die Röhre aber irgend eine andere Länge als  $l$ ,  $2l$ ,  $3l$ ... so wird die Tonhöhe der Zunge geändert, sie wird tiefer, die Schwingungszahl kleiner, die Schwingungsdauer grösser, wenn die Pfeife durch Blasen zum Tönen gebracht wird, sie wird höher, die Schwingungszahl grösser, die Dauer kleiner, wenn die Röhre durch Saugen zum Ansprechen gebracht wird.

Setzt man eine kurze Röhre an die Zunge, so wird beim Anblasen von unten der Ton nur unmerklich tiefer, wenn man die Röhre bis zu  $\frac{1}{4}l$  verlängert, bei weiterm Verlängern wird er merklich tiefer, bis die Länge der Röhre  $\frac{1}{2}l$  ist, bei noch weiterm Verlängern sinkt der Ton immer rascher bis  $\frac{3}{4}l$ , fast ebenso rasch als die Länge der Röhre zunimmt, und zwischen  $\frac{3}{4}l$  und  $l$  sinkt die Tonhöhe der Verlängerung proportional. Ist die Länge der Röhre nahe  $l$ , so ist der Ton fast eine Octave tiefer als der Ton der für sich schwingenden Zunge.

So fand Weber bei einer Zunge, welche denselben Ton gab als eine Pfeife von 195,3 Pariser Linien oder 44,1 Centimeter, nämlich das eingestrichene  $g$ , folgende Toureihe, als die Zunge mit Röhren von den daneben angegebenen Längen zur Pfeife verbunden angeblasen wurde:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
1" 6''' < $\frac{1}{4} l$	$g_1$	9" 4''' > $\frac{1}{2} l$	$d_1$
2" 1" "	$g_1$	10" 9''' "	$c_1$
3" 5''' "	$g_1$	12" 3''' > $\frac{3}{4} l$	$dis$
4" 9''' > $\frac{1}{4} l$	$fis_1$	13" 8''' "	$gis$
6" 11''' "	$f_1$	14" 7''' "	$g$
7" 10''' "	$c_1$		

Bei weiterer Verlängerung sprang der Ton zum eingestrichenen  $g$  zurück, so dass bei der Länge  $l$  der Ton der Pfeife wieder das eingestrichene  $g_1$  war.

Wurde das Rohr über  $l$  hinaus verlängert, so war zwischen  $l$  und  $2l$  der Gang des Tones derselbe, nur reichte die Vertiefung viel weniger weit. Die grösste Vertiefung nahe bei  $2l$  betrug eine Quarte. Die von Weber beobachteten Töne waren folgende:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
16" 2" = $l$	$g_1$	27" > $\frac{6}{4} l$	$e_1$
19" 4" > $l$ < $\frac{5}{4} l$	$g_1$	28" 10" > $\frac{7}{4} l$	$dis_1$
21" 4" > $\frac{5}{4} l$	$fis_1$	30" 9" > $\frac{7}{4} l$	$d_1$
24" > $\frac{5}{4} l$	$f_1$	32" > $\frac{7}{4} l$	$d_1$

Bei einer Länge von etwas über  $2l$  wurde zuweilen noch  $dis_1$  erhalten, sonst sprang der Ton bei  $2l$  wieder zu  $g_1$  zurück. Wurde die Röhre von  $2l$  auf  $3l$  verlängert, so sank der Ton wieder anfangs langsamer, dann rascher bis zur tiefen Terz, in den Weber'schen Versuchen bis zum eingestrichenen  $c_1$ .

Man erkennt darin ein bestimmtes Gesetz, nach welchem die Tonhöhe durch den Ansatz der Röhren sich ändert. Jedesmal, nachdem die Röhre um  $l$  verlängert ist, springt der Ton zurück, vor dem ersten Sprunge war er um eine Octave, vor dem zweiten um eine Quart, vor dem dritten um eine Terz vertieft, so dass also das Schwingungsverhältniss vor und nach dem Sprunge sich verhielt

beim ersten Sprunge wie 1 : 2  
 „ zweiten „ „ 3 : 4  
 „ dritten „ „ 5 : 6,

vor den folgenden Sprüngen würde er demnach so vertieft sein, dass die Töne vor und nach dem Sprunge sich verhielten wie 7 : 8, dann wie 9 : 10 und so weiter. Für einige weitere Sprünge bestätigten die Versuche von Weber das Gesetz.

Weber folgert aus diesen Erscheinungen, dass wirklich die Luft in den Zungenpfeifen in stehende Schwingungen geräth. Denn zunächst tritt es hervor, dass jedesmal dann, wenn die Röhre die Länge  $l$  oder ein Vielfaches von  $l$  besitzt, die Schwingungen der Röhre also mit denen der Zunge zusammenfallen, der Ton wieder seine ursprüngliche Höhe erhält. Aehnliches ist auch bei den übrigen Tönen der Fall, auch dort bilden sich in der Röhre schwingende Abtheilungen und jedesmal, wenn die Röhre um eine schwingende Abtheilung grösser geworden ist, wird der Ton der Zungenpfeife auch wieder derselbe, und zwar ist die Länge dieser schwingenden Abtheilungen gleich der Länge der in stehenden Schwingungen befindlichen Luftsäule, welche dieselbe Schwingungszahl haben würde.

Setzen wir nämlich in Pariser Fussen die Grösse  $c$  des §. 152, welche uns durch

$$N = \frac{c}{2l}$$

die Schwingungszahl der Luftsäule einer offenen Pfeife von der Länge  $l$  gibt,

$$c = 1052,$$

so erhalten wir als Länge der Röhre, welche den Ton  $g_1$  gibt, den Weber zu 388 Schwingungen in der Sekunde bestimmte,

$$l = \frac{1052}{776} = 1,356 \text{ Fuss} = 193,3 \text{ Linien.}$$

Für die tiefern Töne bestimmte Weber nun ebenfalls die Schwingungszahlen und zugehörigen Röhrenlängen und verglich dann die Längen der Zungenpfeifen, bei denen diese Töne jedesmal auftraten. So fand er z. B. dass ein Ton auftrat von 365 Schwingungen bei der Länge der Röhre 87,3 Linien, dann bei 293,0 und 504,0 Linien, also jedesmal, wenn die Länge der Röhre um 205,7 und um 416,7 Linien zugenommen hatte. Berechnen wir nun aber die Länge  $l$  der diesen Ton gebenden offenen Röhre, so wird

$$l = \frac{1052}{730} = 1,441 \text{ Fuss} = 207,5 \text{ Linien.}$$

Die beobachteten Längenzunahmen weichen von diesem berechneten  $l$  und  $2l$  nur um 1,9 und 1,5 Linien ab, erstere ist um so viel zu klein, letztere zu gross.

Man sieht also, wie die Luftsäule der Röhre in gleichzeitige Schwingungen mit denen der Zunge versetzt wird, indem jedesmal, wenn die Länge der Röhre um die Länge einer mit dem Tone gleichen stehenden Welle vergrössert wird, derselbe Ton wiederkehrt.

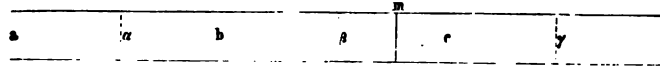
Der Vorgang der Bewegungen in den Zungenpfeifen wird durch diese Erfahrungen so festgestellt, wie wir ihn vorhin aussprachen. Der Ton rührt her von dem intermittirenden Luftstrom, der durch das abwechselnde Öffnen und Schliessen der Zunge hervorgebracht wird. Die Schwingungen der Zunge werden aber bedingt durch die Elasticität der Zunge und die mit den Schwingungen der Zunge isochronen und synchronen Schwingungen der Luftsäule in den Pfeifen. Diese ändern die Schwingungsdauer der Zunge ab und bewirken, dass dieselbe entweder langsamer schwingt, wenn die Pfeife angeblasen wird, oder rascher als die Zunge allein, wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Um diese Wechselwirkung der schwingenden Luftsäule und der schwingenden Platte zu verstehen, denken wir uns mit W. Weber <sup>1)</sup> eine Zungenpfeife, wo die Zunge in einer zur Längsaxe der Röhre senkrechten Platte besteht. Sei nun *ad* Fig. 275 eine an beiden Seiten offene Röhre, deren Luftsäule in stehende Schwingungen versetzt ist, so dass bei  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  Schwingungsknoten und bei  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  Schwingungsmaxima sich befinden: bei  $\mu$  sei in derselben eine Zunge, welche, wie in den Zungenpfeifen, genau dieselben Bewegungen besitzt, wie eine an dieser Stelle befindliche Luftschicht,

<sup>1)</sup> W. Weber, Poggendorff's Annalen. Bd. XVII.

wenn wir eine einfache offene Röhre hätten. Eine solche Platte wird die Schwingungen der Luft durchaus nicht stören, wenn sie unserer Annahme

Fig. 275.



gemäss wegen ihrer eigenen Elasticität und wegen des, sie gerade so wie eine dort befindliche Luftschicht treffenden, Druckes der mitschwingenden Luft genau dieselbe Bewegung besitzt, als eine dort befindliche Luftschicht. Wenn aber eine solche Platte sich in  $m$  befindet, so kann die Luft sowohl in dem Röhrenstücke  $md$  gerade so schwingen als vorher, wenn das Röhrenstück  $ma$  ganz fortgenommen ist und die Platte  $m$  die Rolle einer Zunge in der Zungenpfeife spielt, als auch in der Röhre  $ma$ , wenn das Stück  $md$  ganz fortgenommen wird. Diese beiden Zungenpfeifen werden dann genau denselben Ton geben, da die Schwingungen in beiden gleich sind, obwohl sie verschiedene Längen haben; die Pfeife  $ma$  aber nur, wenn sie von innen, die Pfeife  $md$ , wenn sie von aussen angeblasen wird.

In den Schwingungsknoten der stehenden Schwingungen ist die Luft immerfort in Ruhe, in den Längen  $\alpha\beta$  . . hat die Luft eine hin und her gehende Bewegung, so dass sie z. B. zugleich von  $\alpha$  und  $\gamma$  sich nach  $\beta$  und in der folgenden Zeit von  $\beta$  nach  $\alpha$  und  $\gamma$  hin bewegt. Dabei haben dann die Theilchen  $a, b, c, d$  die schnellste Bewegung und die grössten Excursionen, in  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  dagegen treten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ein.

Wenn wir nun statt der ganzen Röhre  $ad$  nur das mit der Zunge  $m$  verschlossene Stück  $md$  nehmen, so muss, wenn die Bewegung genau so bleiben soll wie vorher, durch Anbringen der Zunge also keine Aenderung stattfinden soll, die Zunge  $m$  nach aussen schwingen, wenn die Lufttheilchen zwischen  $m$  und  $\gamma$  nach aussen schwingen, wenn also bei nicht vorhandener Zunge bei  $\beta$  eine Verdichtung einträte; dagegen nach innen, das heisst sie muss die Röhre verschliessen, wenn die Luft zwischen  $m$  und  $\gamma$  nach innen schwingt, also bei  $\gamma$  eine Verdichtung eintreten würde.

Wenn wir dagegen das mit der Zunge  $m$  verschlossene Röhrenstück  $ma$  nehmen, so bewegt sich dort die Zunge nach aussen, das heisst sie öffnet die Röhre, wenn bei  $\beta$  und auf der Strecke  $\beta c$  eine Verdünnung eintritt, indem auch dann die Schwingungen der Platte mit denen der durch sie ersetzten Luftschicht gleich sein müssen. Im ersten Falle öffnet sich daher die Zunge, wenn vor ihr bei  $\beta$  und in ihrer ganzen Umgebung, da auch die Strecke  $c\beta$  dann verdichtet wird, eine Verdichtung eintritt; im zweiten Falle aber, wenn die Luftschwingungen verdünnend sind, wenn bei  $m$  eine Verdünnung der Luft eintritt.

Wenn wir nun eine Zungenpfeife anblasen, das heisst die Luft in dem Behälter des Fusses  $f'$  verdichten, so folgt aus dem Vorigen, dass die Pfeife sich verhalten muss wie die Röhre  $md$ , dass die Röhre sich öffnen muss, wenn die Schwingungen der Luft in der Nähe der Platte verdichtende sind, denn wenn die Schwingungen in der Pfeife  $md$  ganz dieselben sein sollen wie in der offenen Pfeife  $ad$ , so muss die die Zunge umgebende Luft sich

gerade so verhalten, wie die an ihrer Stelle befindliche Luft in der offenen Pfeife.

Blasen wir aber die Pfeife von innen an oder bringen wir sie durch Saugen zum Tönen, das heisst machen wir die Luft im Behälter des Fusses dünner als im Innern der Pfeife, so muss die Oeffnung der Pfeife mit einer verdünnenden Schwingung der Luftsäule zusammenfallen, die Luft muss, wie bei dem mit der Zunge verbundenen Röhrenstücke  $ma$ , in der Umgebung der Zunge dünner werden, sie muss sich von dem Schwingungsknoten  $\beta$  fortbewegen, wenn die Zunge die Röhre öffnet. • Denn auch hier wieder muss die Luft in der Umgebung der Zunge sich gerade so verhalten, wie in unserer Pfeife  $ad$ , wenn die Zunge  $m$  die Pfeife  $ma$  abschliessen und die Bewegung doch die frühere bleiben soll.

Es folgt also daraus, dass, wenn eine Zungenpfeife durch Blasen zum Ansprechen gebracht wird, im Innern der Pfeife der Zunge ein Schwingungsmaximum zunächst liegt, wenn aber durch Saugen, ein Schwingungsknoten der Zunge zunächst liegt.

Diese Folgerung hat Weber durch folgende beiden Erfahrungssätze bestätigt.

1) Bei einer angeblasenen Pfeife besteht die Luftsäule der Pfeife aus einer beliebigen Anzahl stehender Wellen plus einem Reste, der grösser als Null, aber kleiner als eine halbe stehende Welle ist.

2) Bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten Zungenpfeife besteht die schwingende Luftsäule aus einer beliebigen Anzahl ganzer stehender Wellen plus einem Reste, der grösser als eine halbe, aber kleiner als eine ganze stehende Welle ist.

Da nun immer an dem obern offenen Ende der Pfeife bei  $a$  oder  $d$  ein Schwingungsmaximum sich befindet, so folgt aus diesen beiden Sätzen die vorige Folgerung, bei einer angeblasenen Pfeife befindet sich zunächst bei der Zunge ein Schwingungsmaximum, bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten ein Schwingungsknoten.

Einen Zahlenbeleg für den ersten Erfahrungssatz haben wir bereits oben mitgetheilt.

Die Zungenpfeife gab beim Anblasen einen Ton von 365 Schwingungen bei einer Pfeifenlänge

$$\begin{aligned} l &= 87,3 \text{ Linien} = 0 \cdot 207,5 + 87,3 \\ l &= 293 \quad \text{,,} = 1 \cdot 207,5 + 85,5 \\ l &= 504 \quad \text{,,} = 2 \cdot 207,5 + 89. \end{aligned}$$

Jedesmal bleibt ein Rest, der kleiner ist als 103,75 der Länge einer halben stehenden Welle.

Aus dieser Art, wie die Schwingungen der Luft mit denen der Platte zusammentreffen, folgt nun auch, dass die Schwingungen der Zunge beim Anblasen langsamer, der Ton also tiefer, beim Ansaugen aber rascher, der Ton der Pfeife also höher werden muss.

Beim Anblasen ist nämlich, wenn die Zunge gegen das Innere der Pfeife schwingt, die Endabtheilung der schwingenden Luft in jenem Rest verdünnt; sie beschleunigt daher die Zunge nach dem Innern der Pfeife, während die eigene Elasticität der Zunge derselben, da sie nach innen zu von ihrer Gleichgewichtslage sich entfernt hat, eine Beschleunigung nach

aussen ertheilt. Die Verdünnung der Luft in der Röhre hält folglich einem Theile der Elasticität der Zunge das Gleichgewicht. Während die Zunge nach aussen schwingt, ist die Endabtheilung der Luft verdichtet, sie beschleunigt daher die Zunge nach aussen, während die Elasticität der Zunge die Platte wieder nach der entgegengesetzten Richtung beschleunigt; also auch hier wieder wirkt der Luftdruck der Elasticität der Platte entgegen.

Da also der Einfluss der schwingenden Luftsäule der Elasticität der Platte entgegenwirkt, so schwingt die Platte langsamer, gerade so, als wenn ihre Elasticität vermindert wäre. Der Ton der Zungenpfeife ist daher stets tiefer als der der isolirt schwingenden Zunge und kann höchstens, wenn die Zunge sich gerade an der Stelle des Schwingungsmaximums befindet, wo die Luft eine hin und her gehende Bewegung ohne Verdichtung oder Verdünnung besitzt, die Tonhöhe der isolirt schwingenden Platte erhalten.

Wird die Pfeife durch Saugen zum Ansprechen gebracht, so ist die Endabtheilung der schwingenden Luftsäule, wenn die Zunge nach innen sich von ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat, verdichtet, und zwar am meisten, wenn die Zunge gerade ihre äusserste Stellung nach innen erreicht hat. Zugleich treiben sie also der Druck der verdichteten Luft und ihre eigene Elasticität nach aussen hin; die Wirkung der Luft kommt also mit der einer Vermehrung der Elasticität der Zunge überein. Dasselbe ist bei der Abweichung der Zunge von ihrer Gleichgewichtslage nach aussen der Fall. Die Luft ist dann in der Endabtheilung verdünnt, und zwar am meisten, wenn die Platte ihre äusserste Lage nach aussen erreicht hat. Auch dort treibt dann sowohl der Druck der Luft als die Elasticität der Zunge dieselbe zurück; der Druck der Luft wirkt also wieder wie eine Vermehrung der Elasticität der Zunge.

Die Schwingungen der Zunge müssen also in diesem Falle rascher, der Ton höher sein als der der isolirt schwingenden Zunge. Die Grenze ist wieder die Tonhöhe der Zunge, wenn sie gerade an der Stelle eines Schwingungsmaximum sich befindet.

Je näher nun die Zunge einem Schwingungsknoten rückt, um so grösser ist der Einfluss der Luft, da die Verdichtungen und Verdünnungen an der Platte immer grösser werden. Wenn man nun die Länge der Röhre vergrössert, so rückt dadurch in beiden Fällen die Platte dem Schwingungsknoten näher, der Ton muss sich beim Anblasen von unten daher vertiefen, bis die Pfeife sich soweit verlängert hat, dass sie wieder ein Vielfaches der Wellenlänge des ursprünglichen Tones ist; dann theilt sie sich wieder in schwingende dem Tone der Zunge entsprechende Abtheilungen und an der Zunge bildet sich wieder ein Schwingungsmaximum.

Wir müssen uns begnügen, soweit die Aenderung der Tonhöhe nachgewiesen zu haben; die Grösse derselben, wie sie sich aus Weber's Versuchen ergibt, lässt sich ohne die vollständige Theorie von Weber, die uns hier zu weit führen würde, nicht ableiten.

Während bei den bisher besprochenen Zungen durch den Einfluss der in der Röhre schwingenden Luftsäule der Ton der freien Zunge nur mehr oder weniger modificirt wird, hängt bei einer andern Gattung von Zungen der Ton lediglich von den Schwingungen der mit Hülfe der Zungen be-



wegen Luftsäule ab, bei den sogenannten weichen Zungen. Weiche Zungen sind die aus elastischen Rohrplatten geschnitzten Zungen der Holzblasinstrumente, Clarinette, Oboe und Fagott, sowie die zur Tonerzeugung der Blechblasinstrumente benutzten menschlichen Lippen. Die Clarinette hat eine breite Zunge, welche im Mundstücke derselben ähnlich befestigt ist wie die Zungen in den Rohrwerken der Zungenpfeifen, Oboe und Fagott haben zwei Zungen, welche am Ende des Mundstückes einander gegenüber gestellt und nur durch einen schmalen Spalt von einander getrennt sind. Bläst man hinein, so wird der Spalt durch den Druck der im Munde zusammengepressten Luft abwechselnd geschlossen, abwechselnd durch die Elasticität der Zungen geöffnet, und dieser intermittirende Luftstrom erzeugt die Schwingungen in den mit den Zungen verbundenen Röhren, die wir dann als Ton wahrnehmen.

Bei den Blechblasinstrumenten wird die schwingende Bewegung der Luft an dem Mundstücke durch rasch folgendes abwechselndes Schliessen und Oeffnen der Lippen erzeugt. Das Mundstück hat dort eine trichterförmige Gestalt (Fig. 276). Die Lippen des Bläusers liegen in der obern

Fig. 276.



Höhlung und sind im Ruhezustande geschlossen. Durch den Druck der in der Mundhöhle angesammelten Luft werden sie dann geöffnet, und der Luftstrom dringt in das Instrument. Ist eine geringe Menge Luft aus dem Munde entwichen, so schliessen sich die Lippen wieder, da die Spannung der Luft dann kleiner geworden ist. Da dann die Luft keinen Ausweg hat, öffnet ihr Druck die Lippen wieder, und so erneuert sich das Spiel der Lippen immerfort. Der intermittirende Luftstrom erzeugt in dem Rohre stehende Schwingungen, und diese sind es dann, die wir als Ton wahrnehmen.

Damit nun aber diese stehenden Schwingungen existiren können, müssen die Stösse bei den Holz- und Blechblasinstrumenten in derselben Periode erfolgen, es müssen also die Zungen mit denselben isochron schwingen. Die Schwingungen der weichen Zungen hängen nun nach der von Helmholtz<sup>1)</sup> entwickelten Theorie derselben nicht wesentlich von der Elasticität der Zungen ab, sondern von der in der Röhre schwingenden Luft, sie schwingen mit der Luftsäule isochron, wenn der durch die in der Tiefe des Rohres vorhandenen Luftwellen bewirkte Wechsel des Luftdruckes hinreichend ist, um die Zungen in eine schwingende Bewegung zu versetzen. In einer schwingenden Luftsäule ist aber der Druckwechsel am grössten in den Schwingungsknoten, wie an dem geschlossenen Ende einer gedeckten Pfeife; deshalb gibt eine solche mit einer weichen Zunge versehenen Röhre diejenigen Töne, welche die Röhre geben würde, wenn sie an der Stelle der Zunge geschlossen und unten angeblasen würde.

Befindet sich deshalb die Zunge, wie bei der Clarinette, an dem einen Ende eines cylindrischen engen Rohres, so sind die Töne der Grundton der Röhre, die Quint seiner Octave, die Terz der folgenden Octave u. s. f., wie bei einer gedeckten Pfeife derselben Länge. Man kann alle die Töne erzeugen, indem man das Rohr in verschiedener Stärke anbläst.

<sup>1)</sup> Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. CXIV.

Ist das Rohr kegelförmig, so ist die Reihe der Töne eine andere. Für an beiden Seiten offene konische Röhren, oder für solche, welche vollständige Kegel und an der Spitze geschlossen sind, ergibt sich sowohl aus den Versuchen Zamminer's<sup>1)</sup> als aus der Theorie von Helmholtz<sup>2)</sup>, dass die in ihnen möglichen Töne genau übereinstimmen mit denen einer ihnen an Länge genau gleichen offenen cylindrischen Röhre. Ist dagegen das Rohr ein abgestumpfter Kegel, und die schmalere Fläche verschlossen, so stimmt die Reihe der Töne weder mit der einer offenen noch mit der einer gedeckten Pfeife überein, sie nähert sich derjenigen einer offenen Pfeife indess um so mehr, je kleiner das Stück ist, welches an einem vollständigen Kegel fehlt. Die Tonreihe lässt sich dann nur durch eine transcendente Gleichung berechnen. Ganz ebenso verhält es sich nun mit den kegelförmigen Röhren, die mit Zungen versehen sind, also mit Oboe und den Blechblasinstrumenten. Setzt man die Länge des Rohres  $l$  und die an derselben anzubringende Correction für das untere offene Ende  $a$ , so erhält man die Schwingungszahlen  $n$  aus der Gleichung

$$\text{tang } \frac{2n\pi(l+a)}{c} = - \frac{2n\pi r}{c},$$

worin  $r$  der Abstand der Zunge von der ideellen Spitze des Kegels und  $c$  die Geschwindigkeit des Schalles bedeutet<sup>3)</sup>. Um die entstehenden Töne zu übersehen, geben wir im Folgenden die Reihenfolge, welche Helmholtz für eine konische Röhre von Zink beobachtet und berechnet hat, deren Länge 122,7 oder mit der Correction 124,77 Cm. war, deren untere Oeffnung 5,5, deren obere 0,7 Cm. war, für welche also  $r$ , der Abstand des obern Endes von der ideellen Spitze des Kegels 18<sup>cm</sup>,2 war.

Die Tabelle gibt die Wellenlängen, also die Werthe  $\frac{c}{n}$  und daneben die Länge der offenen oder gedeckten Pfeife, in welchen der betreffende Ton als Grund- oder Oberton bestehen kann.

	Ton	Wellenlänge	Länge der entsprechenden Pfeife	
			offen	gedeckt
1	$H$ — . . . . .	283,61	141,80	70,90
2	$h$ — . . . . .	139,83	139,84	104,88
3	$fis_1$ . . . . .	91,81	137,71	114,76
4	$h_1$ + . . . . .	67,94	135,88	118,89
5	$dis_2$ . . . . .	53,76	134,39	120,95
6	$f_2$ . . . . .	44,40	133,21	122,11
7	$b_2$ . . . . .	37,79	132,26	122,82
8	$c_3$ . . . . .	32,87	131,50	123,28
9	$dis_3$ . . . . .	29,22	131,47	124,17

Die in den beiden letzten Spalten gemachten Angaben sind so zu verstehen, dass die in einer Horizontalreihe angegebene Pfeifenlänge den in

<sup>1)</sup> *Zamminer*, Poggend. Ann. Bd. XCVII.  
<sup>2)</sup> *Helmholtz*, Poggend. Ann. Bd. CXIV. Tonempfindungen. p. 580.  
<sup>3)</sup> *Helmholtz*, Poggend. Ann. Bd. CXIV. p. 326.

derselben Reihe angegebenen Ton als den sovielten Oberton hat, als dieser Ton der Oberton in der Zungenpfeife ist. Eine offene Pfeife z. B., deren Länge  $134^{\text{cm}},39$  ist, gibt als fünften Ton dasselbe  $dis_2$ , welches als fünfter Ton in der Zungenpfeife entsteht, und ebenso würde es der fünfte Ton einer gedeckten Pfeife von  $120^{\text{cm}},95$  Länge sein, also neunmal soviel Schwingungen haben, wie der Grundton einer solchen Pfeife.

Wie man sieht, würden bei dieser Röhre die ersten Töne, wenn man die Reihe als diejenige einer offenen Pfeife betrachten wollte, gegen die spätern viel zu tief sein, erst die letzten würde man als einer offenen Pfeife angehörig betrachten können, deren Länge dann aber grösser ist als die der konischen Röhre und kleiner als die Länge des ganzen Kegels. Andererseits kann man die letzten Töne als jene einer gedeckten Pfeife auffassen, deren Länge gleich jener der konischen Röhre ist.

Je kleiner übrigens der Werth von  $r$  ist, das heisst, je näher die Zunge sich der Spitze des Kegels befindet, um so näher rückt die Reihe der Töne denen einer offenen Pfeife, welche sie auch nach der Gleichung für  $r = 0$  erreicht, denn die Werthe, für welche

$$\text{tang } \frac{2n\pi (l + a)}{c} = 0,$$

sind

$$\frac{2n}{c} (l + a) = 1, 2, 3, \dots, p,$$

also die Reihe der natürlichen Zahlen. Ist  $r$  klein, so kann man die Tonreihe als jene einer offenen Pfeife betrachten, deren erste Töne gegen die folgenden etwas zu tief sind.

### §. 157.

**Die Blasinstrumente.** Die sämmtlichen Blasinstrumente lassen sich als Anwendungen der Labialpfeifen und Zungenpfeifen betrachten. Die Orgelpfeifen sind geradezu solche Apparate, das Flageolet und die Flöten sind Labialpfeifen, die Harmonika und das Aeolodicon Zungen ohne Pfeifen, die Clarinetten, Bassethörner, Oboen, Fagotte sind Zungenpfeifen mit weichen Zungen, Clarinetten und Bassethorn mit cylindrischem, Oboe und Fagott mit kegelförmigem Ansatzrohr, bei denen die Zunge der Spitze des Kegels sehr nahe liegt; die Erzeugung des Tones ist daher bei allen diesen Instrumenten nach dem Vorigen klar.

Wir haben nur Einiges hinzuzusetzen, um die Mittel zu erklären, durch welche man auf diesen Instrumenten anstatt des Grundtones und der harmonischen Töne eine ausgedehnte Reihe von Tönen erzeugt.

Wenn man in die Wand einer Pfeife (Fig. 277) an irgend einer Stelle ein Loch einbohrt, so kann an dieser Stelle die Luft auch nach andern Richtungen als nach der Längsaxe der Röhre bei einer ankommenden Bewegung entweichen, es tritt demnach auch dort eine Reflexion ein wie an dem Ende einer offenen Pfeife; es muss bei stehenden Schwingungen dort sich ein Schwingungsmaximum bilden. Blasen wir eine offene Pfeife so an, dass sie ihren zweiten Ton gibt, also mit zwei Knoten, jeder  $\frac{1}{4}$  vom Ende der Röhren und einem Schwingungsmaximum in der Mitte, so wird es dem-

nach keine Aenderung in dem Tone der Pfeife machen, wenn wir in der Mitte der Wand eine Oeffnung herstellen, da sich dort schon ein Schwingungsmaximum befindet. Durch die Oeffnung in der Wand wird die Pfeife gewissermaassen halbirt und der Ton wird der Grundton dieser halb so langen Pfeife. Oeffnen wir dagegen die Pfeife bei *a* oder an der Stelle des untern Schwingungsknotens bei *c* Fig. 277, so muss jetzt an diesen Stellen ein Schwingungsmaximum entstehen und der Ton springt in die höhere Octave über, die Luftsäule zerlegt sich in sechs schwingende Abtheilungen, deren Knoten  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{7}{8}$  der Länge der Röhre von dem Boden der Pfeife entfernt sind.

Ebenso würde eine Aenderung des Tones entstehen müssen, wenn wir an irgend einer andern Stelle der Wand ausser bei *b* eine Oeffnung anbringen, da stets an dieser Stelle ein Schwingungsmaximum eintreten muss, die Länge der schwingenden Abtheilungen also geändert wird. Je nach der Stelle der Oeffnung wird dann der Ton ein anderer.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn wir durch verändertes Anblasen einen der andern Töne der Pfeife hervorbringen; auch dann wird eine angebrachte Oeffnung im Allgemeinen den Ton ändern und durch eine Oeffnung an einer bestimmten Stelle können wir einen bestimmten Ton hervorrufen. Diesen Kunstgriff wendet man bei den meisten Blasinstrumenten an, um eine bestimmte Tonreihe zu erhalten, sowohl bei den Flöten als den Zungeninstrumenten, den Clarinetten etc.

Haben wir zum Beispiel eine Flöte, deren Rohr als Grundton den Ton  $d_1$  angibt und versehen wir dieselbe in passenden Abständen mit sechs Oeffnungen von ihrem Ende zur Mundöffnung hin, so wird die Flöte beim Verschlusse aller der Löcher den Ton  $d_1$  geben; öffnen wir sie nun nach und nach, so werden wir dadurch die Reihe der Töne  $c_1, f_1, g_1, a_1, h_1, c_2$  erhalten können.

Um z. B. den Ton  $a_1$  zu erhalten, bedarf es nicht einmal einer Oeffnung der weiter von dem Mundloch entfernten Löcher, bleiben die drei letzten Löcher geschlossen und wir öffnen nur das dritte Loch, von der Mundöffnung an gerechnet, so muss schon der Ton  $a_1$  entstehen.

Durch verstärktes Anblasen erhalten wir dann bei geschlossenen Löchern den zweiten Ton der Röhre  $d_2$ , und bei reihenweiser Oeffnung erhalten wir dann die Octaven der vorigen Töne  $c_2, f_2$  u. s. w. Werden dann noch weitere Oeffnungen oder Klappen zwischen den vorigen angebracht, um die erhöhten oder vertieften Töne *dis, fis*.. zu erzeugen, so sind wir im Stande, mit diesem Instrumente die Töne der chromatischen Tonleiter durch die zwei Octaven  $d_1$  bis  $d_3$  und andere höhere Töne zu erzeugen.

Bei den Blechblasinstrumenten, Trompete, Horn, Posaune hat man diese Hilfsmittel der Tonerhöhung nicht, sie sind deshalb auf ihre natürlichen Töne beschränkt. Da diese Instrumente aus langen kegelförmigen Röhren bestehen, bei welchen das Mundstück der Spitze des Kegels ziemlich nahe liegt, so ist die Tonreihe dieser Instrumente sehr nahe derjenigen einer offenen Pfeife gleich. Um die verschiedenen hohen Töne hervorbringen, hat der Bläser hier nur das Mittel, die Stärke des Luftstromes

Fig. 277.



und damit die Schnelligkeit, mit denen die Oeffnungen des Mundes sich folgen, zu ändern. Je stärker der Luftdruck ist, um so rascher folgen die einzelnen Stösse, ein um so höherer Ton tritt aus dem Instrumente hervor. Die Kunst des Bläusers ist es, die betreffenden Drucke für die einzelnen Töne im Gefühl zu haben und hervorzubringen.

Um eine grosse Anzahl von Tönen auf diesen Instrumenten zu haben, macht man sie sehr lang und gibt ihnen nur eine kleine Weite, da die Erfahrung gelehrt hat, dass die engen Röhren leichter ansprechen. Das Horn hat nach Zamminer eine Länge von 27 Fuss, sein Grundton ist daher  $es_{-2}$ , und die Reihe der Töne ist

1 $es_{-2}$	9 $f_1$	17 $c_2$
2 $es_{-1}$	10 $g_1$	18 $f_2$
3 $b_{-1}$	11 $as_1 +$	19 $fis_2 +$
4 $cs$	12 $b_1$	20 $g_2$
5 $g$	13 $h_1 +$	21 $gis_2 +$
6 $b$	14 $c_2 +$	22 $as_2 +$
7 $des_1 -$	15 $d_2$	23 $a_2 +$
8 $es_1$	16 $cs_2$	24 $b_2$

Die ersten beiden Töne werden nicht gebraucht, in den höhern Lagen sieht man, liegen die Töne ziemlich nahe beisammen, sie sind indess zum Theil höher als die hingeschriebenen. Um diese Töne brauchbar zu machen, wendet man dieselbe Art des Stimmens an, wie bei den offenen Pfeifen, man macht die Instrumente zu theilweis gedeckten, indem der Spieler die geballte Faust in die trichterförmige Erweiterung bringt. Bei den Posaunen helfen die Auszüge des Rohres nach, die gleichzeitig den Zweck haben, die Instrumente in verschiedenen Tonarten brauchen zu können. Bei den Hörnern erreicht man letzteres durch Einschieben von Röhrenstücken in die Windungen.

In neuerer Zeit hat man auch an den Blechinstrumenten Klappen zur Veränderung der Tonhöhe angebracht, der Klang solcher Instrumente hat indess eine viel geringere Fülle.

Die Klänge der Zungeninstrumente sind viel schärfer als jene der Labialpfeifen und Streichinstrumente, da in ihnen wegen der scharfen Discontinuität bei der Tonerzeugung, der einzelnen durch den Schluss der Zungen unterbrochenen Stösse, viel mehr und höhere Obertöne vorhanden sind. Die schärfsten Klänge haben die Blechblaseinstrumente, da in diesen die schnellern Schwingungen der hohen Töne nicht so rasch vernichtet werden. Darin beruht im Wesentlichen die Klangverschiedenheit zwischen den Blechinstrumenten und den theoretisch ähnlich gebauten Holzblaseinstrumenten wie Oboe und Fagott. Der Unterschied letzterer gegen die Clarinette beruht in der Verschiedenheit der Obertöne, die Clarinette hat nur die ungeradzahligten, Oboe und Fagott haben auch die geradzahligten.

### §. 158.

**Die menschliche Stimme.** Das menschliche Stimmorgan ist nach den Untersuchungen von Johannes Müller<sup>1)</sup> als eine Zungenpfeife anzusehen.

<sup>1)</sup> Johannes Müller, Handbuch der Physiologie des Menschen. Bd. II. p. 179 ff.

la der Vorgang, mittels dessen wir die Töne erzeugen, sowie die Mittel, um ihre Höhe zu ändern, wesentlich mit denen der Zungenpfeifen übereinstimmen.

Das Stimmorgan des Menschen befindet sich im Kehlkopf *k* an dem obern Ende des die Lungen mit der Mund- und Nasenhöhle *M* und *N* in Verbindung setzenden Luftweges, der Luftröhre *L* (Fig. 278 und Fig. 279).

Fig. 278.

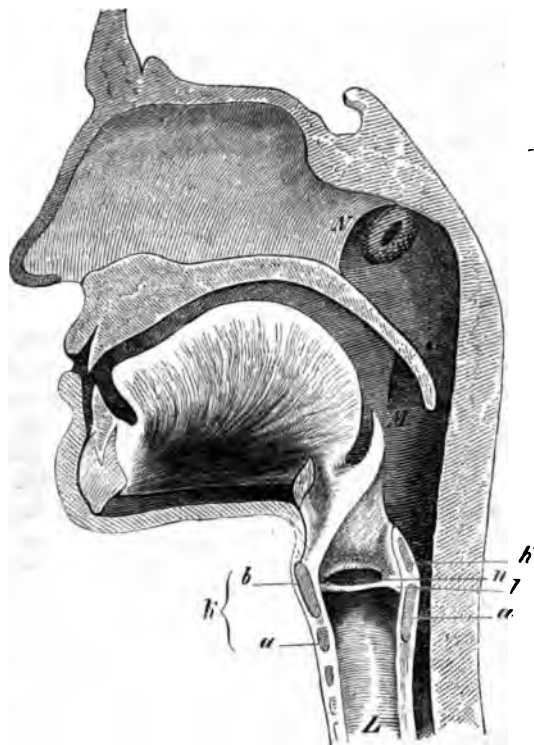
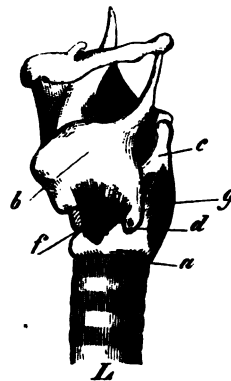


Fig. 279.



Der Kehlkopf ist aus einer Anzahl fester Knorpel gebildet, zwischen denen die Stimmbänder ausgespannt sind. Die feste Basis des Kehlkopfes ist der Ringknorpel, cartilago cricoides, ein fester Ring, der das obere Ende der Luftröhre umschliesst; *a* Fig. 278 im Durchschnitt, und Fig. 279 von der Seite gesehen, und welcher hinten höher ist als vorn. Auf diesem ruht als grössere, aber nach hinten offene Umhüllung des Kehlkopfes der Schildknorpel, cartilago thyreoides, *b* Fig. 278 und Fig. 279, bestehend aus zwei Platten, die mit ihren vordern Rändern in einer nach vorn amalse hervorspringenden Kante fest verwachsen zusammenstossen, wie Fig. 278 bei *b* im Durchschnitt, 279 bei *b* von der Seite und Fig. 280 von oben gesehen zeigt.

Der Schildknorpel ist um eine Axe drehbar, *d* Fig. 279 und 280, die sich an einem Fortsatze befindet, welcher von der untern Ecke des hintern freien Randes der Schildknorpelplatte an jeder Seite ausgeht, und welcher

andererseits im Ringknorpel befestigt ist. Die Richtung der Axe, um welche sich der Schildknorpel drehen kann, ist Fig. 280 durch die Linie *ee* angedeutet, die Bewegung, welche er also annehmen kann, ist nach vorn und herab gerichtet und nach hinten und hinauf. Der Kante des Schildknorpels, in welcher die beiden Platten zusammenstossen, gegenüber, stehen auf dem erhöhten hintern Rande des Ringknorpels dicht neben einander, die beiden Giessbeckenknorpel, *cartilagine arytaenoides*, *c* Fig. 279 von der Seite und 280 von oben gesehen. Ihre Basis steht mit dem Ringknorpel durch ein Gelenk in Verbindung, das ihnen gestattet, sich erstens vor- und rückwärts zu bewegen, also sich dem Schildknorpel zu nähern und von ihm zu entfernen, zweitens nach rechts oder links zu bewegen, also einander zu nähern oder von einander zu entfernen.

Von der Basis jedes der Giessbeckenknorpel springt eine Ecke nach vorn vor, der *processus vocalis*. Zwischen diesen beiden Ecken und der einspringenden Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zusammenstossen, sind die Stimmbänder *l* Fig. 278, 280, 281 ausgespannt.

Fig. 280.



Fig. 281.



Dieselben sperren die Luftröhre bis auf eine schmale Ritze, die Stimmritze, welche in der Ansicht von oben (Fig. 280) dunkel gehalten ist, ab. Nur noch eine kleine Oeffnung befindet sich als Verlängerung der Stimmritze zwischen den Rändern der Giessbeckenknorpel, die sogenannte Athemritze. Für gewöhnlich sind wahrscheinlich die Stimmbänder ganz zusammengelegt, und die Stimmritze geschlossen, so dass der Luftweg nur durch die Athemritze geöffnet ist.

Die Stimmbänder sind die Zungen des mit der Zungenpfeife zu vergleichenden Stimmapparates, über ihnen befindet sich nun als Ansatzröhre die Fortsetzung des Luftweges. Zunächst über den Stimmbändern befindet sich eine nach oben von zwei parallel mit den Stimmbändern verlaufenden Schleimhautfalten, den falschen Stimmbändern *m* (Fig. 281) verschlossene Höhlung, der *ventriculus Morgagni* *n* (Fig. 278 und Fig. 281). Die falschen Stimmbänder verbinden die Giessbeckenknorpel mit dem Kehldeckel, der *epiglottis*; und über ihnen endet sich der Luftweg in den Schlund, der in der Mundhöhle und Nasenhöhle ausläuft.

Das Stimmorgan vervollständigen die Muskeln, welche durch Bewegung des Schildknorpels und der Giessbeckenknorpel die Stimmbänder schliessen oder öffnen, spannen oder erschlaffen. Die Stimmbänder werden gespannt

durch den musculus cricothyreoideus *f* (Fig. 279), welcher den Schildknorpel nach vorn, und den cricoarytaenoideus posterior *g* (Fig. 279 und Fig. 280), der den Giessbeckenknorpel nach hinten herunter zieht. Die Stimmbänder werden erschlafft durch den musculus thyreoarytaenoideus *i* (Fig. 280), welcher den Schildknorpel und Giessbeckenknorpel gegen einander und den musculus cricoarytaenoideus anterior *h* (Fig. 280), welcher den Giessbeckenknorpel nach vorn zieht.

Die Stimmritze wird geschlossen durch die muscoli arytaenoidei *k* (Fig. 280), welche an beiden Giessbeckenknorpeln inseriren und dieselben gegen einander ziehen, sie wird geöffnet durch die beiden muscoli cricoarytaenoidei *g* und *h* (Fig. 280), welche, indem sie zusammenwirken, die Giessbeckenknorpel seitwärts herabziehen.

Durch Versuche an aufgeschnittenen Kehlköpfen sowohl, als an lebenden Menschen, welche eine Luftröhrenfistel besaßen und durch Beobachtungen mit dem Kehlkopfspiegel ist es nun erwiesen, dass zur Tonbildung die Athemritze vollständig geschlossen und ebenso die Ränder der Stimmbänder fast vollständig an einander gelegt werden. Zugleich müssen die Stimmbänder durch die betreffenden Muskeln in einem gewissen Grade gespannt sein.

Der aus den Lungen dringende kräftige Luftstrom öffnet dann die Stimmritze, deren Bänder dann gerade so wie die Zunge der Zungenpfeife in Schwingungen gerathen. Diese Schwingungen sieht dann Johannes Müller als das Tongebende an, nicht die durch das abwechselnde Schliessen oder mehr oder weniger Oeffnen derselben entstehenden Luftstöße. Die Gründe, welche ihn bestimmen, von der Weber'schen Ansicht der Tonbildung bei den Zungenpfeifen abzugehen<sup>1)</sup>, sind indess nach Seebeck's Kritik derselben<sup>2)</sup> nicht beweisend.

Was indess als das eigentlich Tonbildende anzusehen sei, ist im Effect ziemlich einerlei, da so wie so die Tonhöhe nach beiden Ansichten von der Schwingungszahl der Bänder abhängt, indem jeder ganzen Schwingung derselben auch ein Stoss der austretenden Luft entspricht.

Bei der menschlichen Stimme haben wir nun einen doppelten Apparat zu unterscheiden, den tongebenden, der die Höhe der Töne bestimmt, und den Sprechapparat, der sie zu articulirten Lauten macht.

Die höhern Theile der Luftwege, der ventriculus Morgagni und der Schlund dienen in Bezug auf die Töne der menschlichen Stimme nur wie ein Schallbecher bei der Zungenpfeife, sie dienen, indem die in ihnen enthaltene Luftsäule und die umgebenden Weichtheile mitschwingen, nur zur Verstärkung des Tones. Müller zeigte das an ausgeschnittenen Kehlköpfen. Beim Anblasen von unten gaben die untern Stimmbänder bei enger Stimmritze einen vollen und reinen Ton, der den Tönen der menschlichen Stimme nahe kam, und die sich von den Tönen, welche man bei Anwesenheit des ventriculus Morgagni, der obern Stimmbänder und der epiglottis erhielt, nur durch geringere Stärke unterschieden.

Die Tonhöhe hängt nur von der Spannung der Stimmbänder ab und von ihrer Länge, nicht aber davon, ob die Stimmritze etwas mehr oder weniger geöffnet ist, jedoch spricht der Ton leichter an bei enger Stimmritze.

<sup>1)</sup> J. Müller a. a. O. p. 175.

<sup>2)</sup> Seebeck, in Dove's Repertorium. Bd. VI.



Die menschliche Stimme hat überhaupt einen Umfang von nicht ganz vier Octaven, die sich aber niemals in einem Individuum vereinigt finden, sie reicht vom sogenannten grossen *E*, also dem Tone  $e_{-1}$  bis zum dreigestrichenen *C*. Man unterscheidet Männer- und Frauenstimmen, und bei erstern Bass und Tenor, bei letztern Alt und Sopran.

Der Umfang der Stimmen ist in der Regel

Bass . . . . .	$e_{-1}$	—	$f_1$
Tenor . . . . .	$c$	—	$h_1$ oder $c_2$
Alt . . . . .	$f$	—	$f_2$
Sopran . . . . .	$c_1$	—	$c_3$

Die Stimmapparate unterscheiden sich bei diesen Stimmen durch die Länge der Stimmbänder. Bei den Männern springt die Kante des Schildknorpels viel weiter vor als bei den Frauen, und von den Männern besitzen die Bassisten die grössten Kehlköpfe. Einige wenige Messungen von Johannes Müller haben als mittlere Länge der männlichen Stimmbänder 18 und der weiblichen Stimmbänder etwas über 12 Millimeter, also ein Verhältniss von 3 : 2 ergeben.

An einem und demselben Individuum werden die verschiedenen Töne durch verschiedene Spannung der Stimmbänder hervorgebracht. An ausgeschnittenen Kehlköpfen hat Müller durch Steigerung der Spannung von  $\frac{1}{2}$  bis zu 37 Loth den Ton um mehr als zwei Octaven erhöht, nämlich bei einem männlichen Kehlkopf von *ais* bis *dis*<sub>3</sub>. Die verstärkte Spannung, die wir bei den hohen Tönen durch die rasche Ermüdung der Stimme fühlen, ist indess nicht das Einzige, welches die Höhe des Tones bestimmt. Versuche von Müller und die bekannte Erfahrung, dass wir die höchsten Töne nur im Forte, die tiefsten nur im Piano singen können, beweisen, dass die Tonhöhe auch durch die Stärke des Luftstromes verändert wird.

Beobachtungen von Garcia mit dem Kehlkopfspiegel haben ferner gezeigt, dass bei verschiedenen hohen Tönen auch die Länge der schwingenden Theile sich ändert. Bei einem Tenoristen fand er, dass bei *d*, *e*, *f* die Band- und Knorpelränder der glottis ihrer ganzen Länge nach schwingen, bei  $c_1$ ,  $d_1$  beginnen die hintern Enden der processus vocales sich an einander zu legen und bei  $f_1$  und  $g_1$  haben sich die proc. voc. ihrer ganzen Länge nach an einander gelegt, es schwingen nur noch die Bänder allein<sup>1)</sup>.

Man sieht, alle diese Erfahrungssätze über die verschiedene Tonhöhe stimmen mit den Schwingungsgesetzen elastischer Streifen überein, verstärkte Spannung und Verkürzung der schwingenden Theile vergrössern ihre Schwingungszahl und somit die Tonhöhe, die Tonbildung des menschlichen Stimmorgans stimmt demnach mit derjenigen der Zungenpfeifen überein.

Wegen der weitem Erfahrungen über die menschliche Stimme, besonders über die verschiedenen Register, die Brust- und Fistelstimme müssen wir auf die Lehrbücher der Physiologie verweisen, da sie in physikalisch-akustischer Beziehung nichts neues darbieten.

<sup>1)</sup> Ludwig, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Bd. I. p. 572. In Müller's Handbuch sind dessen sämtliche Versuche und ältere Erfahrungen, in Ludwig's Lehrbuch auch die neuern über die menschliche Stimme zusammengestellt.

## §. 159.

**Die menschliche Sprache.** Wenn die Endigungen des Luftweges, der Schlund und die Mundhöhle, auf die Tonhöhe keinen Einfluss haben, so sind sie das allein Bedingende bei der Articulation, bei der Modification der Töne zu Lauten; es ist nun die Aufgabe der Physik, das Wesen der Laute akustisch zu definiren, und die der Physiologie zu zeigen, wie durch geänderte Stellung der Sprachwerkzeuge diese Klangverschiedenheiten zu Stande kommen.

Dass die verschiedenen Vocaltöne nichts sind als Klangverschiedenheiten, und dass sie somit den verschiedenen den Grundton begleitenden Obertönen zuzuschreiben sind, hat zuerst Wheatstone<sup>1)</sup> behauptet, der volle Nachweis ist indess erst Helmholtz<sup>2)</sup> gelungen, indem er einmal mit Hilfe der Resonatoren die die verschiedenen Vocalklänge zusammensetzenden Partialtöne bestimmte, und ganz besonders, indem es ihm gelungen ist, mit Hilfe einfacher Töne die Vocalklänge zusammensetzen.

Das Mittel, um die einfachen Töne zu erzeugen, lieferten ihm Stimmgabeln, welche in der Weise wie Fig. 282 es zeigt, vor Resonanzröhren aufgestellt waren. Die Stimmgabel *a* Fig. 282 ist mit ihrem Stiel in das Fussbrett *dd* eingeschraubt, welches auf untergeklebten Stücken von Gummischläuchen ruht, damit die Schwingungen der Gabel nicht direkt auf den Tisch übertragen werden. Die obern Enden der Stimmgabelzinken befinden sich zwischen den Schenkeln des Elektromagnetes *bb*, gerade den Polflächen desselben gegenüber gestellt. Die Schwingungen der Gabel werden durch intermittirende elektrische Ströme erregt, welche den Elektromagnet während jeder Schwingung der Gabel und zwar in dem Momente, in welchem die Zinken der Gabel sich von einander zu entfernen beginnen, magnetisch machen. Um den elektrischen Strom genau in dieser Weise zu unterbrechen, wandte Helmholtz als Stromunterbrecher ebenfalls eine Stimmgabel an, in der Weise wie Fig. 283 angeordnet. Der von der galvanischen Batterie gelieferte Strom tritt in die Messingsäule *i*, welche oben ein zur Hälfte mit Quecksilber, zur Hälfte mit Alkohol gefülltes Nüpfchen *d* enthält. In das Quecksilber dieses Nüpfchens taucht ein Platindraht *c*, der an der obern Zinke der Stimmgabel befestigt ist, so eben hinein, so dass der Strom aus dem Quecksilber in die Stimmgabel tritt und durch diese bis zur Klemme *e* geleitet wird. Von der Klemme *e* tritt der Strom dann in die den Elektromagnet umgebenden Drähte und von diesen aus weiter in die Drahtleitung, welche die Elektromagnete der tönenden Stimmgabeln enthält. Dadurch, dass der Strom den Draht des Elektromagnets *bb* (Fig. 283) durchläuft, wird der Magnet erregt, und mit ihm alle Magnete der tönenden Stimmgabel. Der Magnet *bb* zieht dann die Zinken der Stimmgabel an, damit den Draht *c* aus dem Quecksilber empor und unterbricht an dieser Stelle den Stromkreis und damit den Strom. Sofort aber verlieren auch die Magnete ihren Magnetismus, und die Zinken der Gabel schwingen mit der durch ihre Dimensionen bedingten Geschwindigkeit gegen ihre Gleichge-

<sup>1)</sup> *Wheatstone*, in seiner Kritik über Versuche von Willis, der zuerst mit Zungenpfeifen die Vocale künstlich zu bilden versuchte (Poggend. Ann. Bd. XXIV), London and Westminster Review 1837 October.

<sup>2)</sup> *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 163. ff. und p. 184 ff.

wichtslage hin und darüber hinaus. Der Draht *c* taucht in Folge dessen wieder in das Quecksilber, der Strom wird neuerdings geschlossen und das Spiel wiederholt sich in der angegebenen Weise.

Fig. 282.

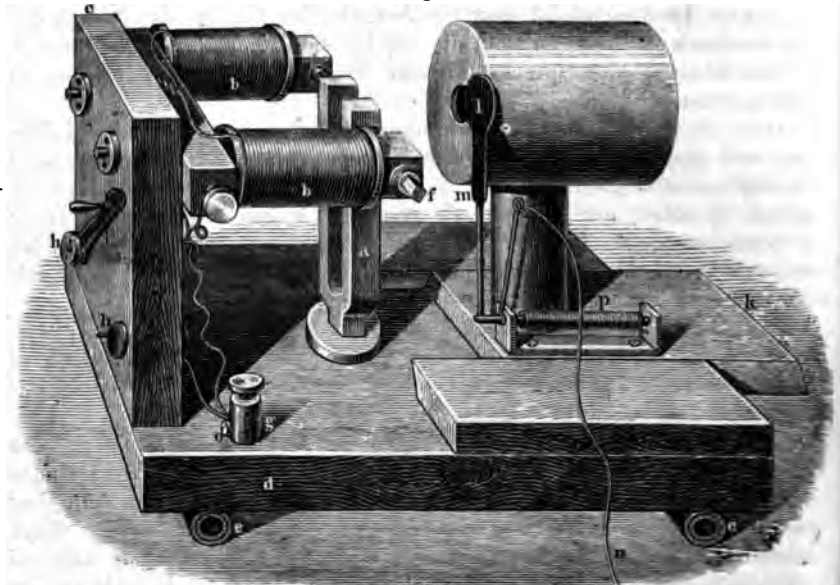
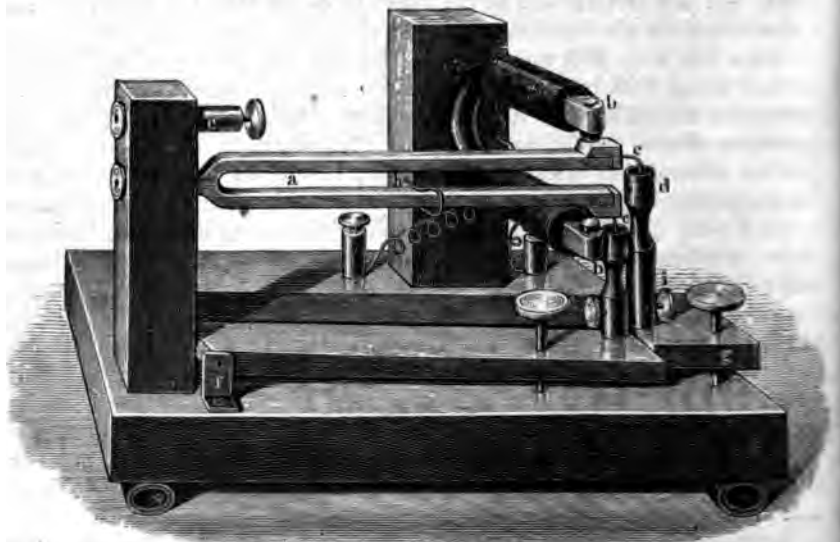


Fig. 283.



Ist die Unterbrechungsgabel mit der Gabel Fig. 282 genau isochron, so wird die Gabel *a* jedesmal, wenn die Zinken durch die Gleichgewichts-

lage nach aussen sich bewegen, eine kurze Zeit vom Magnete angezogen, sie erhält also bei jeder Schwingung einen neuen Antrieb, und ihre Bewegung dauert ungeschwächt fort, so lange der Unterbrechungsapparat in Thätigkeit bleibt. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn die Gabel *a* Fig. 282 genau 2, 3 . . . *n* mal öfter schwingt als die Unterbrechungsgabel, nur dass diese Gabeln dann erst nach je 2, 3 . . . *n* Schwingungen einen neuen Anstoss erhalten.

Um diesen genauen Isochronismus der Gabeln herzustellen, ist auf der Gabel *a* Fig. 283 ein kleiner Schieber *h* angebracht, durch dessen Stellung man die Schwingungsdauer der Gabel etwas verändern kann; wird der Schieber dem Ende der Gabel näher gebracht, so wird dadurch das Trägheitsmoment der schwingenden Masse etwas vergrössert, und die Schwingungen werden langsamer.

Die auf diese Weise erregten Schwingungen der Gabel *a* Fig. 282 geben keinen hörbaren Ton, wie ja überhaupt eine in freier Luft schwingende Gabel nur gehört werden kann, wenn man sie unmittelbar vor das Ohr hält. Um den Ton hörbar zu machen, ist vor der Gabel eine Resonanzröhre angebracht, eine gedeckte Pfeife, welche in der Mitte des der Gabel zugewandten Bodens eine kreisförmige in der Höhe der Zinkenenden befindliche, mit dem Deckel *l* verschliessbare Oeffnung hat. Befindet sich die Röhre mit geöffnetem Deckel nahe vor der Gabel, so wird sie, wenn ihr Grundton mit dem der Gabel übereinstimmt, wie eine Pfeife zum Tönen gebracht, und der Ton der Gabel tritt ohne Oberton deutlich hervor. Um die Röhre passend zu stimmen, sind die Dimensionen derselben und der Oeffnung nach den Sätzen des §. 154 passend zu wählen. Um den Ton der Gabel stärker und schwächer machen zu können, ist die Röhre auf einem Schlitten *k* befestigt, so dass man die Röhre der Gabel näher oder entfernter stellen kann. Andererseits kann man den Ton auch dadurch schwächen, dass man durch theilweise Bedeckung der Oeffnung die Röhre etwas verstimmt, wodurch der Ton der Röhre beträchtlich geschwächt wird.

Zu seinen ersten Versuchen wandte Helmholtz acht Gabeln der beschriebenen Art an, die tiefste gab den Ton  $b_{-1}$ , die übrigen gaben die sieben ersten Obertöne, *b*,  $f_1$ ,  $b_1$ ,  $d_2$ ,  $f_2$ ,  $as_2$  und  $b_2$ , später liess er zu diesen noch  $d_3$ ,  $f_3$ ,  $as_3$  und  $b_4$  hinzutreten und benutzte dann als Grundton den der zweiten Gabel, *b*.

Ist der Apparat in Gang gebracht mit geschlossenen Resonanzröhren, so hört man zunächst nur ein leises Summen. Oeffnet man dann die Röhre mit dem Ton  $b_{-1}$ , so hört man ein dumpfes *U*, viel dumpfer als das *U* der menschlichen Sprache. Der Klang wird dem gesungenen *U* ähnlicher, wenn man schwach den zweiten und dritten Ton *b* und  $f_1$  mittönen lässt.

Der Vocal *O* entstand, wenn bei etwas gedämpftem  $b_{-1}$  der erste Oberton *b* sehr stark und schwächer  $b_1$ ,  $f_1$  und  $d_2$  angegeben wurden.

Ein nach *O* gezogenes *A*, das schwedische *A* entstand, als die Töne  $d_2$ ,  $f_2$ ,  $as_2$  und  $b_2$ , also die Töne von 5—8 möglichst stark genommen wurden, die tiefern dagegen geschwächt waren.

*A*, *Ä* und *E* gelang es Helmholtz mit den zwölf Gabeln vom *b* an herzustellen. Dann gibt *b* allein *U*, dasselbe stark von  $b_1$ , schwächer von  $f_2$  begleitet. *A* erhält man, wenn man zu *b* zunächst  $b_1$  und  $f_2$  mässig stark, dagegen  $b_2$  und  $d_3$  als charakteristische Töne kräftig tönen lässt.

Um  $A$  in  $\ddot{A}$  überzuführen, muss man  $b_1$  und  $f_2$ , die Nachbarn des tiefern charakteristischen Tones  $d_2$  etwas verstärken,  $b_2$  dämpfen, dagegen  $d_3$  und  $f_3$  möglichst stark hervortreten lassen. Für  $E$  muss man die beiden tiefsten Töne der Reihe  $b$  und  $b_1$  mässig stark halten als Nachbarn des tiefern Verstärkungstones  $f_1$ , und die höchsten  $f_3$ ,  $as_3$ ,  $b_3$  möglichst heraustreten lassen.

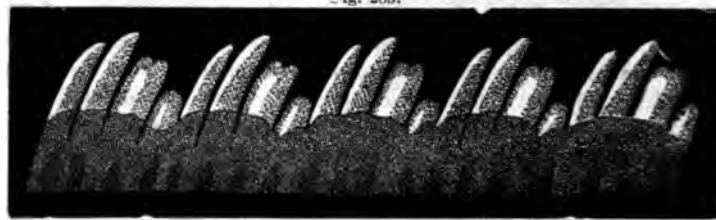
$I$  und  $\ddot{U}$  herzustellen, gelang nicht, da die diese Vocale charakterisirenden sehr hohen Obertöne sich nicht mit Gabeln herstellen liessen.

Dass die zur künstlichen Darstellung benutzten Bestandtheile der Vocale mit Hülfe der Resonatoren in den gesungenen oder gesprochenen Vocalen beobachtet wurden, ja dass man gerade durch derartige Beobachtungen die Bestandtheile kennen lernte, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden. Es mag nur in Bezug auf die Analyse der Vocale bemerkt werden, dass die in §. 152 beschriebenen Flammenapparate von König für dieselbe vorzugsweise geeignet sind. Eine interessante Anwendung hat König von dem Fig. 262 angegebenen Apparate gemacht. Da die verschiedenen Vocale durch Combination der verschiedenen Partialtöne charakterisirt sind, so liefert natürlich jeder Vocal ein eigenthümliches Flammenbild, welches bei der geringsten Aenderung des Vocalklanges sich ebenfalls ändert. König hat nun durch solche Flammenbilder nicht nur die einzelnen Vocale, sondern auch die verschiedenen Nüancen derselben gezeichnet, wenn man die Vocale in verschiedener Tonlage singt, so dass man mit Hülfe der Bilder genauer als auf irgend einem andern Wege jede Vocalnüance bezeichnen kann<sup>1)</sup>. Fig. 284 und Fig. 285 zeigen die Bilder für die

Fig. 284.



Fig. 285.



<sup>1)</sup> König, Poggend. Ann. Bd. CXLVI. Tafel III. des Bandes gibt die Flammenbilder der 5 Vocale  $U$ ,  $O$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $I$ , für jeden Ton der beiden, der Bassstimme entsprechenden Octaven  $c_{-1}$  bis  $c_1$ . Für  $E$  und  $I$  sind die Bilder, wie das König auch hervorhebt, wenig charakteristisch. Die Bilder sind indess nur individuelle, bei einer andern Stimme fallen sie anders aus, da nicht bei allen Individuen die verschiedenen Obertöne in derselben Weise verstärkt werden (Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 163). So entsprechen die oben gezeichneten Bilder wenig der König'schen Zeichnung.

Vocale *U* und *O*, wie ich sie erhielt, jeden auf *c* gesungen und mit möglichster Sorgfalt im reinen Vocalklang gehalten; besonders bei *O* gibt die geringste Nüancirung ein anderes Bild.

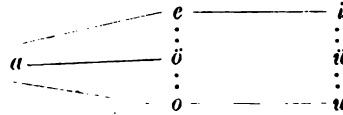
Ehe wir zur Besprechung der Bildung der Vocale in der menschlichen Sprache übergehen, wird es gut sein, darauf hinzuweisen, dass gerade mit Hilfe dieses Stimmgabelapparates von Helmholtz der bereits §. 152 erwähnte Nachweis geliefert wurde, dass die Phase der componirenden Theiltöne auf den Klang ohne Einfluss ist. Wir erwähnten soeben, dass man die Schwächung eines Stimmgabeltones durch weitere Entfernung der Resonanzröhre oder durch theilweises Schliessen des Deckels erhalten kann; letzteres Mittel bewirkt eine kleine Verstimmung des Tones und bewirkt dadurch, dass die Schwingungen etwas rascher oder langsamer werden, somit dass die Stöße einer verstimmtten Gabel mit den andern nach und nach in immer anderer Periode zusammentreffen. Wurde nun ein Vocalklang deutlich erhalten, dadurch dass der Ton einer Gabel durch Verschiebung der Resonanzröhre geschwächt wurde, so erhielt man genau denselben Klang, wenn der Ton durch Schliessung des Deckels geschwächt wurde; da aber im letzten Falle die Phase der componirenden Töne eine relativ immer andere wurde, so folgt aus diesem Versuche, dass die Phase auf die Klangfarbe von keinem Einflusse ist.

Die Möglichkeit einer so reichhaltigen Klangbildung durch die menschliche Stimme ist durch die Form unseres Sprachorganes gegeben. Wir haben vorhin unser Sprachorgan als eine Zungenpfeife mit weichen Zungen bezeichnet. Von den gewöhnlichen Zungenpfeifen dieser Art unterscheidet es sich aber wesentlich dadurch, dass die Pfeife, das Schallrohr nicht eine unveränderliche Gestalt hat, sondern durch unsern Willen willkürlich geändert werden kann. Das Schallrohr der menschlichen Stimme sind die höhern Theile der Luftwege über dem Kehlkopf und ganz besonders die Rachenhöhle und Mundhöhle. Durch die Beweglichkeit der weichen Theile in den Umgebungen dieser Höhlen, den weichen Gaumen, die Zunge und die Lippen können wir diesen Höhlen die verschiedensten Gestalten geben, und es ist nach den Bemerkungen über die Tonbildung bei den weichen Zungen klar, dass es wesentlich von der Form der Rachen- und Mundhöhle abhängig ist, welche von den harmonischen Obertönen eines von der Stimme gebildeten Grundtones verstärkt werden, welche nicht. Denn wie wir am Schluss des §. 157 erwähnten, sind in jedem durch Zungen gebildeten Klange die Obertöne in grosser Zahl vorhanden, alle, die deshalb bei einer bestimmten Stellung der Mundhöhle in Folge der Resonanz verstärkt werden, finden sich in dem Klange, welcher dieser Stellung der Mundhöhle entspricht. Es sind das vorzugsweise die Töne, welche die Mundhöhle in der bestimmten Form als einfache Pfeife angeblasen geben würde. Welche Töne das sind, bestimmte Helmholtz<sup>1)</sup> im allgemeinen dadurch, dass er vor die Mundöffnung Stimmgabeln hielt, und den Ton aufsuchte, der bei einer bestimmten Vocalstellung des Mundes die stärkste Resonanz gab.

Dass in der That die der Mundhöhle gegebene Form für die Bildung

<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen. p. 166 ff.

der Vocale von wesentlichem Einfluss ist, hat man schon früher erkannt<sup>1)</sup>, indem schon der ältere Du Bois Reymond die Vocale in drei Reihen ordnete, je nach der Stellung des Mundes. Die drei Reihen sind



Der Vocal *A* ist der gemeinsame Ausgangspunkt für alle drei Reihen. Bei seiner Bildung nimmt die Mundhöhle eine ziemlich gleichförmig trichterartig erweiterte Gestalt an. Bei *O* und *U* wird die Mundhöhle vorn mit den Lippen verengert, so dass sie bei *U* am engsten ist, während sie in der Mitte durch Herabziehen der Zunge erweitert wird. Sie nimmt also die Gestalt einer Flasche ohne Hals an, deren Oeffnung vorn der Mund ist. Der Ton einer solchen Flasche ist um so tiefer, je enger die Oeffnung ist, und dem entsprechend fand Helmholtz, dass bei der *U*-Stellung des Mundes der Eigenton der Mundhöhle  $f$  ist, und zwar ziemlich gleichmässig bei männlichen und weiblichen Mundhöhlen, bei welch letztern das, was der Höhlung an Geräumigkeit abgeht, durch engern Verschluss ersetzt wird. Der Eigenton der Mundhöhle bei *O* ist  $b_1$ . Geht man vom *O* allmählig durch *Oa* und *Ao* zum *A*, so wird der Mund offener, und der Ton der Mundhöhle steigt um eine Octave bis  $b_2$ .

Beim Uebergang vom *A* durch *Ae* in *E* und *I* wird die Gestalt der Mundhöhle eine ganz andere. Die Lippen werden dabei zurückgezogen und geöffnet, die Zunge gehoben, so dass zwischen Zunge und hartem Gaumen nur ein enger Kanal bleibt, während der Raum unmittelbar über dem Kehlkopf durch Herabdrücken der Zungenwurzel erweitert wird. Die Mundhöhle bekommt also die Gestalt einer Flasche mit engem Halse, den Bauch der Flasche bildet der Schlund, den Hals der enge Kanal zwischen Zunge und Gaumen, der Hals ist am engsten bei *I*, seine Länge von dem hintern Rande der Flasche bis zum hintern Rande des Gaumens fand Helmholtz gleich 6 Centimeter.

Derartige Flaschen haben zwei Grundtöne, den des Bauches für sich und den des Halses, den man, besonders wenn er gegen den Bauch sehr enge ist, als eine beiderseits offene Röhre ansehen kann. Dem entsprechend hat die Mundhöhle bei *Ae*, *E* und *I* zwei Eigentöne, bei *Ae* die Töne  $d_2$  und  $g_3$  bis  $as_3$ , bei *E* die Töne  $f_1$  und  $b_3$  und bei *I* als tiefsten Ton etwa  $f$ , wie bei *U* und als Ton des Halses  $d_4$ .

Die Vocale *Ö* und *Ü* unterscheiden sich von *E* und *I* dadurch, dass bei ihnen auch die Lippen röhrenähnlich geformt werden, so dass diese eine Fortsetzung des engen Kanales bei *E* und *I* bilden. Für diese Vocale ändert sich deshalb nur der Ton des Halses, er wird tiefer als bei *E* und *I*, er wird  $cis_3$  und  $g_3$  bis  $as_3$  wie bei *Ae*. Die tiefern Eigentöne bleiben  $f_1$  und  $f$ .

Wie eben erwähnt wurde, sind es nun gerade die Obertöne des Klanges, welche mit den Eigentönen des Mundes zusammenfallen oder doch ihnen nahe genug sind, welche vorzugsweise verstärkt werden; während die andern

<sup>1)</sup> Du Bois Reymond, Norddeutsche Zeitschrift von De la Motte Fouqué 1817. Helmholtz a. a. O. p. 167. -

gedämpft werden, und eine Vergleichung der zuletzt gemachten Angaben mit den bei der künstlichen Bildung der Vocale angegebenen charakteristischen Tönen der einzelnen Vocale wird die Uebereinstimmung beider und damit erkennen lassen, dass das Wesen der Vocalbildung in dem durch die Form der Mundhöhle bewirkten Auftreten der verschiedenen Obertöne bedingt ist. Es wird eben jedesmal, auf welchen Grundton wir einen Vocal auch bilden, immer derjenige Oberton des Grundtones am meisten verstärkt, der dem Eigentone der Mundhöhle am nächsten kommt. Die Vocalklänge unterscheiden sich von den Klängen der übrigen musikalischen Instrumente gerade dadurch, dass die Stärke ihrer Obertöne nicht von der Ordnungszahl derselben, sondern von deren absoluter Tonhöhe abhängt. Wird z. B. der Vocal *A*, dessen charakteristischer Ton  $b_2$  ist, auf die Note  $es_{-1}$  gesungen, so ist der verstärkte Ton der 12. Ton des Klanges, wird derselbe Vocal auf  $b_1$  gesungen, so ist der verstärkte Ton der zweite des Klanges. Daher rührt es denn auch, dass der reine Vocalklang, besonders für die Vocale, deren charakteristischer Ton tiefer liegt, am besten bei gewissen Tonhöhen herauskommt, bei denen nämlich, bei welchen ein Oberton genau mit dem charakteristischen Ton zusammenfällt.

Zur Bildung der menschlichen Sprache gehört ausser jener der Vocale auch die der Consonanten; diese sind keine Selbstlauter, es sind nur Tonhemmungen oder Verzögerungen, welche durch das Anfangen oder Abschliessen eines Vocallautes oder höchstens als Geräusche wahrnehmbar sind.

Nach Brücke<sup>1)</sup> theilt man die Consonanten je nach dem Orte des Verschlusses im Munde in drei Gruppen, an deren Spitze die drei mutae *p, t, k* stehen.

Die erste Gruppe bilden *p, b, f, v, w, m*; den Verschluss bilden entweder die beiden Lippen oder eine der Zahnreihen mit den Lippen. *P* entsteht durch ein plötzliches Oeffnen der vorher fest verschlossenen Lippen, während ein Luftstrom aus dem Kehlkopf gegen die Mundöffnung dringt, *b* entsteht gerade so, nur sind die Lippen etwas weniger gespannt und das Oeffnen geschieht etwas weniger energisch. *F* wird gebildet, indem wir die untere Lippe an die oberen Schneidezähne legen und einen Luftstrom hindurchsenden, desgleichen *v*, ein mildes *f*, und *w*, bei dem zugleich eine Hemmung des Luftstromes, ein dichter Verschluss stattfindet, welcher das *w* dem *b* nähert.

Das *m* entsteht schliesslich, indem man die Lippen wie zu *b* stellt und die Luft mit tönender Stimme zur Nase hinausströmen lässt.

Die zweite Gruppe umfasst *t, d*, die verschiedenen *s, l* und *n*. Für diese bildet die Zunge den Verschluss, indem sie sich entweder an die obere Schneidezähne oder an den vordern Theil des harten Gaumens anlegt. *T* wird gebildet durch Anstemmen der Zunge an die Schneidezähne und plötzliche Fortnahme derselben, *d* verhält sich zum *t*, wie *b* zum *p*.

Das harte *s, sz, ss* bildet sich, wenn bei der dem *t* zugehörigen Zungenstellung eine kleine Spalte geöffnet und durch diese Luft ausgestossen wird, durch schwächeres Anstemmen entsteht das weiche *s*. Das *l* entsteht, wenn man den Verschluss der Zunge vorn wie bei *d* lässt, dagegen hinten neben den Backzähnen beiderseitig eine kleine Oeffnung lässt, durch welche die

<sup>1)</sup> Ludwig, Lehrbuch der Physiologie. S. 589.



Luft hindurchstreicht. Wird ferner die Zunge wie bei *t* gestellt und lässt man die Luft durch die Nase entweichen, so entsteht *n*.

In die dritte Gruppe gehören die Gaumenlaute *k*, *g*, *ch*, *j* und das Gaumen-*n* (vor *g* in *ng*). *K* entsteht wie *t* und *p*, nur dass der Verschluss hier von dem hintern Theile der Zunge und dem Gaumen gebildet wird. *G* entsteht aus *k* wie *b* und *d* aus *p* und *t*, *ch* wie *s* und *f*, nur dass auch hier zwischen dem tiefern Theile der Zunge und dem Gaumen die enge Öffnung bleibt, zwischen der der Luftstrom hindurchgeht.

*J* bildet sich, indem die Zunge mehr nach der Mitte hin sanft gegen den Gaumen angelegt und Luft durchgehaucht wird, und schliesslich das Gaumen-*n*, indem die Zunge wie beim *ch* nur fester gegen den Gaumen gelegt wird und die Luft bei tönender Stimmritze durch die Nase entweicht.

Der noch übrigbleibende Consonant *r* kann labial, lingual und guttural sein; er entsteht, indem wir einen der leichtschwingenden Mundtheile mittels des Luftstromes in schwingende Bewegung versetzen, deren einzelne Stösse so langsam auf einander folgen, dass wir die einzelnen Stösse gesondert wahrnehmen; diese Schwingungen können die Lippen, die Zungenspitze, wenn sie wie zum *t* gestellt ist, und das Zäpfchen vollführen.

## Zweites Kapitel.

### Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

#### §. 160.

**Ausbreitung des Schalles in der Luft.** Wir sahen in §. 143, dass es zur Wahrnehmung des Schalles erforderlich sei, dass die Schwingungen des festen Körpers oder die andern tonerzeugenden Schwingungen auf ein elastisches Medium übertragen und zu unserem Ohre fortgepflanzt werden. Da in einem jeden solchen Mittel die Schallschwingungen longitudinale werden, wie alle unsere Entwicklungen über den Schall zeigen, oder da es die longitudinalen Schwingungen der elastischen Medien sind, welche wir durch die gegen unser Gehörorgan ausgeübten Stösse als Schall wahrnehmen, so müssen die Gesetze der Ausbreitung des Schalles mit den Gesetzen der Verbreitung longitudinaler Wellen übereinstimmen, welche wir im vorigen Abschnitte entwickelt haben.

Zunächst folgt aus dem Fröhern, dass der Schall sich von einem erregenden Mittelpunkte aus in kugelförmigen Wellen nach allen Richtungen ausbreiten muss.

Mit dem Abstände von der Quelle des Schalles muss dann die Intensität desselben abnehmen; und zwar nach einem bestimmten Gesetze. Die schwingende Bewegung, welche von einem Mittelpunkte ausgeht, theilt sich immer grössern und grössern Kugelwellen mit, und nach der Zeit *t* sind alle Lufttheilchen auf einer Kugelschale in Bewegung, deren Radius *r* gleich *ct* ist. Das Maximum der Geschwindigkeit, welches diese Theilchen beim Verlassen ihrer Gleichgewichtslage besitzen, sei gleich *v*. Die Masse der zugleich bewegten Theilchen ist nun proportional der Grösse der Fläche, auf der alle Theilchen zugleich bewegt werden oder proportional der Oberfläche der Kugel  $4\pi r^2$ .

Nach der Zeit  $t'$  werden ebenso alle Theilchen auf einer Kugelfläche vom Radius  $r' = ct'$  eine Geschwindigkeit  $v'$  erhalten und die Masse der zugleich bewegten Theilchen ist  $4\pi r'^2$ .

Nach einem Satze der analytischen Mechanik ist nun die lebendige Kraft eines bewegten Systems constant, wenn die Bewegung nur Folge ist von innern zwischen den einzelnen Punkten des Systems thätigen Kräften. Die schwingende Bewegung ist nun eine solche, bei welcher die Bewegung der einzelnen Punkte nur Folge der Elasticitätskräfte ist, demnach ist hier jener Satz anwendbar, oder es muss die Gleichung bestehen

$$4\pi r^2 \cdot v^2 = 4\pi r'^2 \cdot v'^2$$

oder

$$r^2 \cdot v^2 = r'^2 \cdot v'^2$$

$$v : v' = r' : r.$$

Die Geschwindigkeit, welche den einzelnen schwingenden Theilchen in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Schwingung ertheilt wird, ist dem Abstände der Theilchen vom Mittelpunkte der Schwingung umgekehrt proportional. Nennen wir demnach die Geschwindigkeit im Abstände 1,  $v$ , so ist sie im Abstände  $r$  vom Mittelpunkte  $\frac{v}{r}$ .

Wir haben nun bereits bemerkt, dass wir die Intensität des Schalles der Stärke des Stosses gleichsetzen, welchen unser Gehörorgan von den schwingenden Lufttheilchen erhält. Die Stärke des Stosses ist aber der lebendigen Kraft der stossenden Theile proportional, da dieselbe durch die Grösse des Weges gemessen wird, durch welchen der widerstehende Körper wirken muss, um die Geschwindigkeit des stossenden zu vernichten. Da nun die Geschwindigkeit der schwingenden Theile abnimmt in demselben Verhältniss, wie sie weiter vom erregenden Mittelpunkte entfernt sind, und da wir den Schall bei der constanten Grösse unseres Gehörorgans immer durch den Stoss einer gleichen Menge Lufttheilchen vernehmen, so folgt, dass die Intensität des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung von der Quelle des Schalles wachsen.

Dass der Schall schwächer wird, wenn wir uns von der Quelle desselben entfernen, ist eine bekannte Thatsache, auch dass er rascher schwächer wird, als die Entfernungen wachsen, ist bekannt.

Genauere Messungen über die Abnahme der Schallstärke mit der Entfernung, wie überhaupt über die Stärke des Schalles, gibt es nicht, da es für den Schall keinen exakten Messapparat gibt und die vorhandenen Sonometer nur dazu dienen können, ein Mehr oder Minder der Schallstärke zu zeigen, nicht aber genaue Messungen anzustellen. Es liegt das im Wesen des Schalles, der eigentlich nur in einer Empfindung besteht, da er nur eine besondere Wahrnehmung einer bestimmten Bewegungsart ist, und nur insofern Schall ist, als wir diese Bewegungsart mit unserem Ohre wahrnehmen; wir können denselben daher nur nach seinem Eindrucke auf das Ohr beurtheilen. Auch beim Licht ist das zwar der Fall, dass wir es nur durch die Eindrücke auf das Auge beurtheilen können, dort können wir aber mehrere Lichtwirkungen gleichzeitig beurtheilen, wir können sie compensiren, indem wir Flächen zugleich von entgegengesetzten Seiten beleuchten und auf manche andere Weise vergleichen. Schalle gleicher Qua-

lität können wir aber nur, wenn sie nach einander wirken, mit einander vergleichen, und dadurch ist jede Messung ausgeschlossen.

Da der Schall eine Wellenbewegung ist, so muss die Geschwindigkeit seiner Verbreitung mit derjenigen der Wellenbewegung übereinkommen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist in einem und demselben Mittel constant, sie hängt nur ab von der Dichtigkeit und Elasticität des Mittels nach der Gleichung

$$c = C \sqrt{\frac{e}{d}},$$

also nicht von der Oscillationsdauer der schwingenden Bewegung oder ihrer Wellenlänge, bei transversalen Wellen vorausgesetzt, dass die Länge der Wellen gegen den Abstand der Moleküle sehr gross ist. Für die Töne der Musik, deren Wellenlänge kaum unter 4 Centimeter herabgeht, wird man letzteres annehmen dürfen, alle Töne müssen sich daher in einem und demselben Mittel mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen. Es ist das auch eine bekannte Erfahrung, auf der allein die Möglichkeit einer harmonischen Musik beruht. Selbst in der grössten Entfernung wird die Harmonie derselben nicht gestört, ein Beweis, dass die höchsten wie die tiefsten Töne sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

Ganz vollkommen gleich scheint indess nach den neuern Versuchen von Regnault die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der tiefen und hohen Töne nicht zu sein. Bei den gleich näher zu besprechenden Versuchen über die Fortpflanzung des Schalles liess Regnault an dem einen Ende des auf dem Boulevard St. Michel zu Paris befindlichen Wasserleitungsrohres, welches einen Durchmesser von 1<sup>m</sup>,1 und eine Länge von 1417<sup>m</sup>,95 hatte, eine Zungenpfeife tönen, deren Grundton  $c_2$  war, und welche ein kegelförmiges Ansatzrohr besass. In dem andern Ende des Rohres waren acht Helmholtz'sche Resonatoren, die  $c_2$  und seinen harmonischen Obertönen entsprachen, angebracht, welche durch Kautschukröhren mit einem grössern Kasten von Holz verbunden waren, an dessen Oeffnung man das Ohr anlegen konnte. Die den Resonatoren entsprechenden Töne wurden deutlich und klar gehört. Man hörte dann bei diesen Versuchen constant zuerst den Grundton  $c_2$ , auf diesen folgte erst die Octave, die Quint derselben und dann erst die höhern Partialtöne, so dass stets die tiefern vor den höhern Tönen gehört wurden. Die tiefern Töne haben demnach eine etwas grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die höhern, und ein Klang verändert deshalb in grosser Entfernung einigermassen seine Farbe. Der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit war indess so klein, dass er sich nicht weiter messen liess.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in der Luft wurde unser Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}} = \sqrt{\frac{gH\sigma}{s}} \cdot k (1 + \alpha t)$$

$$c = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 0,76 \cdot 13,59}{0,001293}} \cdot 1,40 (1 + \alpha t) = 331^{m,2} \cdot \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft muss daher

bei 0° gleich 331<sup>m</sup>, 2 sein, oder allgemein, da  $\alpha$ , wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, gleich 0,003665 ist,

$$c = 331,2 \sqrt{1 + 0,003665 t}.$$

Die Versuche, welche man angestellt hat, um die Geschwindigkeit des Schalles direkt zu messen, geben ein mit der Theorie vollkommen übereinstimmendes Resultat. Die ersten genauern Versuche waren die berühmten Versuche der Mitglieder der Pariser Akademie, Cassini, Maraldi und La Caille im Jahre 1738<sup>1)</sup>. Als Stationen waren das Observatorium zu Paris, der Montmartre, Fontenay-aux-Roses und Monthlery gewählt. Die Beobachtungen wurden des Nachts angestellt und begannen auf ein vom Observatorium gegebenes Signal.

Man löste von 10 zu 10 Minuten auf einer der Stationen eine Kanone und beobachtete auf allen andern die Zeit, welche verfloss zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes beim Abfeuern der Kanone und der Ankunft des Schalles. Da der Abstand der einzelnen Stationen vorher genau gemessen war, so erhielt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch Division des Abstandes durch die beobachtete Zeit.

Diese Beobachtungen wurden längere Zeit unter sehr verschiedenen atmosphärischen Verhältnissen fortgesetzt, und man fand der Theorie gemäss:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist unabhängig von dem Drucke der Luft.
2. Sie wächst mit der Temperatur der Luft.
3. Sie ist dieselbe in jeder Entfernung von der Schallquelle, das heisst, der Schall pflanzt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.
4. Mit dem Windé pflanzt sich der Schall rascher fort als gegen den Wind, und zwar ist sie im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Geschwindigkeiten des Schalles und des Windes.
5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist in ruhiger trockner Luft bei 0° 1038 pariser Fuss oder 337 Meter, oder nach der Berechnung dieser Versuche von Le Roux<sup>2)</sup> gleich 332<sup>m</sup>.

Da durch den Einfluss des Windes die Geschwindigkeit des Schalles geändert wird, so ist zur Erzielung genauer Resultate erforderlich, dass man an beiden Enden einer Standlinie den Schall errege und beobachte; in der einen Richtung wird dann der Schall so viel beschleunigt, als er in der andern verzögert wird, und das Mittel aus beiden Resultaten gibt dann die vom Einfluss des Windes befreite Zahl für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ruhiger Luft.

Mit dieser Vorsicht wurde im Jahre 1822 bei Paris zwischen Monthlery und Villejuif die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles aufs neue bestimmt<sup>3)</sup>. Es wurden an beiden Orten von 10 zu 10 Minuten Kanonen gelöst, die so gestellt waren, dass von jedem Orte die Explosion der andern Kanone gesehen wurde. Man war überein gekommen, dass die Kanonenschüsse zu Monthlery 5 Minuten früher anfangen sollten, als zu Villejuif.

<sup>1)</sup> Mémoires de l'Acad. de Paris 1738 und 1739.

<sup>2)</sup> Le Roux, Ann. de chim. et de phys. IV. Série T. XII.

<sup>3)</sup> Annales de chim. et de phys. XX, 210. Poggend. Ann. Bd. V. p. 477.

Die Beobachter waren zu Monthlery Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard, zu Villejuif Arago, Mathieu und Prony. Die Kanonenschüsse von Monthlery wurden zu Villejuif alle gut gehört, zu Monthlery wurden von den 12, die gelöst wurden, nur 7 wahrgenommen. Dieser unaufgeklärte Umstand gestattete die Correctur wegen Bewegung der Luft nicht so vollständig, als man wünschte; indess ergaben die beiderseitigen Beobachtungen nahezu übereinstimmende Resultate. Die Beobachtungen zu Villejuif nahmen im Mittel 54,84 Sekunden nach dem Lichtblitze den Schall wahr, diejenigen zu Monthlery nach 54,43 Sekunden. Das Mittel aus beiden Zahlen ist 54,63.

Die Distanz beider Stationen bestimmte Arago zu 18622,27 Meter, die Geschwindigkeit des Schalles ist darnach

$$c = \frac{18622,27}{54,63} = 340,8 \text{ Meter.}$$

Die Temperatur der Luft bei diesen Beobachtungen war  $16^{\circ}$  C., die Geschwindigkeit bei  $0^{\circ}$  wird daher

$$c_0 = \frac{340,8}{\sqrt{1 + 0,003665 \cdot 16}} = 331,2.$$

Kurz nachher wurde mit noch grösserer Vorsicht von den holländischen Physikern Moll, van Beek und Kuytenbrouwer<sup>1)</sup> die Geschwindigkeit des Schalles bei Amsterdam nochmals bestimmt und diese erhielten als Resultat für die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger und trockner Luft bei  $0^{\circ}$  C.

$$c_0 = 332,26 \text{ Meter}$$

oder nach einer neuen Berechnung von Schröder van der Kolk<sup>2)</sup>

$$c_0 = 332,77.$$

Nach der Theorie muss die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, da sie nur von dem Quotienten der einander proportionalen Grösse  $\frac{H}{s}$  abhängt, unabhängig sein von der Dichtigkeit der Luft, also dieselbe sein, wenn sich der Schall aufwärts in dünnere Luft oder abwärts in dichtere Luft fortpflanzt. Dies ist durch die Versuche von Bravais und Martins bei einem bedeutenden Höhenunterschiede am Faulhorn bestätigt worden<sup>3)</sup>. Die eine Station war am Faulhorn, die andere am Briener See, ihre schiefe Entfernung betrug 9560 Meter, der Höhenunterschied 2079 Meter, so dass die Neigung der vom Schall durchlaufenen Linie  $12^{\circ} 26'$  betrug. Es wurde mit Anwendung wechselseitiger Schüsse auf dem Berge von A. Bravais und Martins, am See von C. Bravais beobachtet, die beiden Erstern hörten 18, der Letztere 14 Schüsse im Ganzen an drei Tagen. Die direkt beobachtete Geschwindigkeit des Schalles war aufwärts  $337^m,92$ , und abwärts  $338^m,10$ , also im Mittel  $338^m,01$  Meter. Auf  $0^{\circ}$  und trockne Luft reducirt, wird daraus

$$c_0 = 332,37,$$

<sup>1)</sup> Poggend. Ann. Bd. V. p. 351. 469. In einem Anhang zu dieser Abhandlung sind auch die sonstigen auf grössere Genauigkeit Anspruch machenden Versuche zusammengestellt.

<sup>2)</sup> Schröder van der Kolk, Poggend. Ann. Bd. CXXIV.

<sup>3)</sup> Bravais und Martins, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XIII. Poggend. Ann. Bd. LXVI. p. 351.

eine Zahl, die fast vollkommen mit der von Moll und van Beek erhaltenen übereinstimmt.

Gegen die mitgetheilte Beobachtungsmethode hat Regnault<sup>1)</sup> den Einwurf erhoben, dass dieselbe keine absolut genauen Resultate liefern könne, da es bei derselben dem Beobachter unmöglich sei, den Moment der Schallerzeugung und den der Wahrnehmung mit absoluter Genauigkeit zu bestimmen. Der Beobachter werde stets durch den aufflackernden Lichtblitz, wie durch den ankommenden Schlag überrascht, und ebenso sei es keineswegs sicher, dass bei dem Markiren des Sekundenzählers zwischen der Wahrnehmung und der dadurch hervorgebrachten Willensäußerung eine durchaus unmessbare Zeit liege. Deshalb sei dieses Verfahren nur statthaft bei sehr grossen Standlinien und deshalb sehr intensiven Schallen. Bei sehr intensiven Schallen sind aber, wie schon Schröder van der Kolk<sup>2)</sup> hervorgehoben hatte, die Voraussetzungen der Theorie, welche als Maass der Elasticität den augenblicklichen Luftdruck setzt, nicht mehr gestattet, da dann in den Verdichtungswellen eine merkliche Verdichtung stattfindet, bei welcher die Gase dem Mariotte'schen Gesetze nicht mehr folgen. Bei grossen Standlinien und im freien Raume ist allerdings nach den Bemerkungen von Schröder dieser Einfluss unmerkbar, indess bleibt immer die erste Unsicherheit bestehen. Die nahe Uebereinstimmung der gefundenen Werthe unter einander und mit der Theorie beweist deren Richtigkeit auch nicht, da der Werth von  $k$  sich nicht direkt mit Sicherheit bestimmen lässt, vielmehr, wie wir im dritten Theile sehen werden, am besten aus der Schallgeschwindigkeit abgeleitet wird. Wir haben oben für  $k$  den aus Versuchen von Masson, Hirn und Weissbach abgeleiteten Werth für  $k$  eingesetzt, welche unter sich zwischen 1,419 und 1,3845 schwanken.

Regnault hat deshalb neuerdings eine ausgedehnte Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles durchgeführt und dabei die Wasserleitungsröhren benutzt, welche in den Jahren 1862 und 1863 in Paris neu gelegt wurden; gleichzeitig suchte er auch die Fortpflanzung des Schalles in freier Luft durch Kanonenschüsse zu bestimmen.

Der wesentliche Unterschied der Regnault'schen Methode von den frühern ist der, dass er den Moment der Erzeugung des Schalles und den der Ankunft am Orte der Beobachtung nicht durch den Beobachter selbst bestimmen, sondern ihn an einem selbstthätigen Registrirapparate sich aufzeichnen liess. Er benutzte dazu die elektrische Telegraphie, in einer Weise, wie sie das Schema Fig. 286 deutlich macht. Der Schall wurde erzeugt bei den Röhren durch den Schuss einer Pistole, in freier Luft durch den einer Kanone. Von dem Orte  $A$ , wo sich die Pistole befand (Fig. 286), war eine Telegraphenleitung zur Station  $B$ , wo beobachtet wurde, geführt. Von der Leitung ging bei  $B$  ein Draht zu dem Elektromagnet  $M$  und von diesem zu dem einen Pol der Batterie  $P$ . Der andere Pol der Batterie war durch die Platte  $E_1$  mit der Erde in leitender Verbindung. Wurde nun noch ein anderer Punkt der Leitung mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wurde der Strom geschlossen, der Magnet magnetisch, und der Anker  $a$  angezogen; wurde die Leitung wieder unterbrochen, so wurde

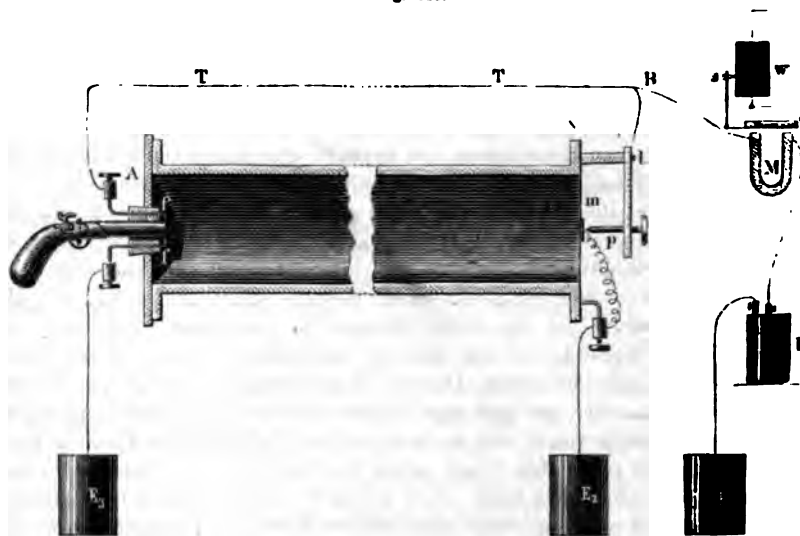
<sup>1)</sup> Regnault, Mémoires de l'Acad. de France. T. XXXVII.

<sup>2)</sup> Schröder van der Kolk, Poggend. Ann. Bd. CXXIV.

der Anker wieder von dem Magnete entfernt. War der Anker angezogen, so schrieb der Stift *s* auf einem geschwärzten Cylinder, der ebenso wie bei den Phonautographen mit gleichmässiger Geschwindigkeit gedreht wurde.

Eine solche Verbindung der Leitung *TT* mit der Erde wurde nun bei dem Beginne der Versuche bei *A* hergestellt, indem in der Lücke *ff* der

Fig. 286.



Leitung, die *T* mit *E*<sub>1</sub> verband, unmittelbar vor der Mündung der Feuerwaffe ein feiner Metalldraht ausgespannt wurde. Diese Verbindung wurde dann in dem Moment unterbrochen, in welchem das Geschütz abgefeuert wurde, indem ein fester auf die Ladung gesetzter Filzpfropf den Draht *ff* zerriss. Die Unterbrechung des Stromes entfernte den Stift *s* von der geschwärzten Walze, so dass das Aufhören des von *s* geschriebenen Striches den Moment der Schallerzeugung angab. In dem Augenblicke nun, in welchem der Schall in *B* ankam, wurde der Strom wieder geschlossen, so dass durch einen neuen von dem Stift *s* auf der Walze gezogenen Strich dieser Moment markirt wurde. Zu dem Ende war bei *B* in passender Weise eine sehr feine Membran *m* ausgespannt, welche durch die ankommende Schallwelle in Schwingungen versetzt wurde. Die Membran trug in ihrer Mitte ein kleines Platinplättchen, welches durch einen feinen küsserst biegsamen Draht mit der in die Erde versenkten Platte *E*<sub>2</sub> in Verbindung stand. Unmittelbar vor der Platte befand sich ein Stift *p*, welcher mit der Leitung *T* durch *p/B* in metallischer Verbindung war. Die bei *m* ankommende Welle gab der Membran einen Stoss und bewirkte dadurch, dass der Stift *p* mit dem Platinplättchen in Contact kam und damit, dass der Strom geschlossen und der Stift *s* wieder gegen die geschwärzte Walze gedrückt und ein Strich gezogen wurde. Der Abstand der beiden Striche gab dann die zwischen Abgabe und Ankunft des Schalles verstrichene Zeit, wenn man die Zeit bestimmte, welche die Walze zu der beobachteten Drehung gebraucht hatte. Zu dem Ende wurden auf der Walze durch ein schwingendes Pendel die

einzelnen Sekunden markirt, und gleichzeitig von einer schwingenden Stimmgabel eine Wellenlinie gezogen. Diese drei Linien, die des Pendels, der Stimmgabel und die von dem Stifte *s* gezogenen, waren unmittelbar unter einander. Man hatte deshalb nur die Wellen vom ersten Aufhören des von *s* gezogenen Strichs bis zum ersten folgenden Sekundenzeichen, und von dem letzten Sekundenzeichen vor dem zweiten von *s* gezogenen Strich bis zu diesem Strich selbst zu zählen, um in selbst tausendstel Sekunden die Zeit zu erhalten; welche der Schall gebraucht, um von *A* bis *B* sich fortzupflanzen. Eine genaue Messung des Abstandes *AB* gab dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

In Bezug auf die Einzelheiten der Ausführung und der Versuche selbst müssen wir auf die Abhandlung Regnault's verweisen, wir begnügen uns hier, die erhaltenen Resultate mitzutheilen.

Zunächst ergab sich aus den Versuchen in den Wasserleitungsröhren, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der That mit der Intensität des Schalles abnimmt. Bei diesen Versuchen wurde die Pistole bei *A* in das eine Ende der Wasserleitungsrohre hineingesteckt, welches im Uebrigen ganz verschlossen war und das andere Ende bei *B* ebenfalls ganz geschlossen. Die Schallwelle kam dann zunächst direkt von *A* nach *B*, wurde bei *B* reflectirt und kehrte dann nach einer zweiten Reflexion bei *A* wieder nach *B* zurück, nachdem sie das Rohr dreimal durchlaufen hatte u. s. f. Dabei zeigte sich, dass trotzdem sich der Schall in cylindrischen Röhren ausbreitete, seine Intensität sehr rasch abnahm, und zwar um so rascher, je enger die Röhre war, in welcher der Schall sich ausbreitete. So wurde der von einer mit 1 Gramm Pulver geladenen Pistole erzeugte Schall nicht mehr gehört, als er in einer Röhre vom

Durchmesser 0 <sup>m</sup> ,108	durchlaufen hatte	1150 M.
„ 0 <sup>m</sup> ,300	„ „	3810 „
„ 1 <sup>m</sup> ,100	„ „	9540 „

Durch die Bewegung der Membran *m* konnte man indess die Rückkehr der Welle viel länger beobachten, man erkannte sie in den drei eben genannten Röhren und unter den angegebenen Umständen noch, nachdem sie resp. 4056<sup>m</sup>, 11430<sup>m</sup> und 19851<sup>m</sup> durchlaufen hatte.

Entsprechend der Abnahme der Intensität zeigte sich nun auch eine Abnahme der Geschwindigkeit des Schalles, wie folgende Zahlen zeigen:

Röhre von 0 <sup>m</sup> ,108 Durchmesser	durchlauf. Weg	Geschw.	Röhre von 0 <sup>m</sup> ,300 Durchmesser	durchlauf. Weg	Geschw.
	566 <sup>m</sup> ,74	330,99		3810 <sup>m</sup> ,3	332,18
	1700 <sup>m</sup> ,22	328,21		7620 <sup>m</sup> ,6	330,43
	2833 <sup>m</sup> ,70	327,52		11430 <sup>m</sup> ,0	329,64
	4055 <sup>m</sup> ,90	326,66		15240 <sup>m</sup> ,0	328,96
Röhre von 1 <sup>m</sup> ,10 Durchmesser	durchlauf. Weg	Geschw.			
		749 <sup>m</sup> ,1			334,16
		1417 <sup>m</sup> ,9			332,60
		5671 <sup>m</sup> ,8			331,24
		11343 <sup>m</sup> ,6			330,68
		19851 <sup>m</sup> ,3			330,52.



Die Zahlen zeigen somit eine beträchtliche Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit der Intensität, gleichzeitig ergeben sie aber auch, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedener Weite eine sehr verschiedene ist. Sehr deutlich tritt dieser Unterschied bei der Vergleichung der drei in jeder Reihe letzten Werthe hervor, welche die mittlere Geschwindigkeit des Schalles geben von dem Momente seiner Erzeugung bis zum Momente, in welchem der Schall nicht mehr wahrnehmbar ist.

Aus diesen Erfahrungen ergibt sich, dass die Wände der Röhren, in welchen die den Schall fortpflanzende Luft eingeschlossen ist, auf die Elasticität der Luft vermindern einwirken müssen, ohne die Dichtigkeit zu vermindern, oder dass die Dichtigkeit vermehrt wird, ohne dass gleichzeitig die Elasticität vergrößert wird. Dass zwischen der schwingenden Luft und den Wänden eine Wechselwirkung besteht, das ergibt sich schon aus der raschen Abnahme der Schallintensität beim Fortpflanzen des Schalles durch die Röhren. Denn da hier die fortschreitende Welle immer wieder dieselbe Luftmasse in Bewegung versetzt, so kann die Abnahme der Schallstärke nur von einer Abgabe der Bewegung an die Röhrenwände herrühren, eine Abgabe, die auch dadurch constatirt wurde, dass man neben der Röhre auf ihrer ganzen Länge den Schall zu hören im Stande war.

Um den Einfluss der Röhrenwände ganz zu eliminiren, müsste man Röhren von unendlich grossem Durchmesser anwenden. Regnault glaubt indessen, dass bei der Röhre, deren Durchmesser gleich 1,1 M. ist, der Einfluss der Wände schon ganz unmerklich gewesen sei, dass man deshalb die aus der letzten Versuchsreihe sich ergebende Zahl 330<sup>m</sup>,6 als die mittlere Geschwindigkeit des durch einen Pistolenschuss erzeugten Schalles von dem Entstehungsmomente bis zu dem, in welchem er verschwindet, ansehen könne.

Die unserer Gleichung entsprechende Geschwindigkeit ist das noch nicht genau, da unsere Gleichung voraussetzt, dass die Dichtigkeitsänderung der Luft unendlich klein ist, somit strenge genommen für den Schall eine unendlich kleine Intensität voraussetzt. Man erhält die bei diesen Versuchen aus den Zwischenräumen, welche bei den letzten unmittelbar vor dem Verschwinden des Schalles gemachten Beobachtungen zwischen einer und der folgenden Rückkehr des Schalles verstreichen. Regnault erhält hierfür die nur wenig kleinere Zahl

$$c_0 = 330,30.$$

In freier Luft erhielt Regnault für die Geschwindigkeit eines durch Kanonenschüsse erzeugten Schalles in der That fast genau die in der weitesten Röhre gefundene Zahl, nämlich als mittlere Geschwindigkeit

$$c_0 = 330,70 \text{ Meter,}$$

eine Zahl, welche nur um 0<sup>m</sup>,1 von der in der Röhre gefundenen sich unterscheidet.

Einen fast gleichen Werth fand Le Roux<sup>1)</sup> für die Fortpflanzungsge-

<sup>1)</sup> *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. IV. Serie T. XII.

schwindigkeit des Schalles in einer 7 Cm. weiten Röhre nach einer der Regnault'schen ähnlichen Methode, nämlich  $330^{\text{m}},66$ .

Regnault hat gleichzeitig die Frage geprüft, ob denn in der That die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei allen Drucken dieselbe sei, ein Satz, der streng nur so weit gültig sein kann, als die Gase dem Mariotte'schen Gesetze folgen. Es gelang ihm nicht, einen messbaren Unterschied in der Schallgeschwindigkeit zu erhalten, trotzdem er den Druck der in einer Röhre des Collège de France eingeschlossenen Luft von  $247^{\text{mm}}$  bis  $1267^{\text{mm}}$ , also bis zum Fünffachen des Anfangsdrucks steigerte.

Schliesslich hat Regnault in den Röhren auch die Geschwindigkeit des Schalles in einigen andern Gasen als in der Luft, nämlich in Wasserstoff, Kohlensäure, Stickoxydul und Ammoniak bestimmt. Nach unserer Gleichung für die Geschwindigkeit des Schalles

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot H \cdot \sigma}{s} \cdot k (1 + \alpha t)},$$

in welcher  $s$  die Dichtigkeit des Gases bedeutet, erhalten wir für das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles in zwei verschiedenen Gasen somit

$$c : c_1 = \sqrt{\frac{k}{s}} : \sqrt{\frac{k_1}{s_1}},$$

oder wenn wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft und die Dichte der Luft gleich 1 setzen

$$c_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k \cdot s_1}}.$$

Der Werth von  $c_1$  hängt also nur ab von dem Verhältnisse der Werthe  $k$  des Gases und der Luft, sowie von der Dichte des betreffenden Gases. Die von Regnault erhaltenen Werthe von  $\frac{c_1}{c}$  und die daraus mit der bekannten Dichte der Gase für die einzelnen Gase nach der Gleichung

$$k_1 = \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \left(\frac{s_1}{s}\right) \cdot k$$

sich ergebenden Werthe von  $k_1$  zeigt folgende Tabelle:

	$\frac{c_1}{c}$	$\sqrt{\frac{1}{s_1}}$	$k_1$
Luft . . . . .	1	1	1,395
Wasserstoff . . . . .	3,801	3,799	1,396
Kohlensäure . . . . .	0,8009	0,8087	1,368
Stickoxydul . . . . .	0,8007	0,8100	1,361
Ammoniak . . . . .	1,2279	1,3025	1,259.

Aus diesen von Regnault erhaltenen Resultaten ergibt sich somit zunächst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles nicht unbeträchtlich kleiner als nach den frühern Versuchen, nämlich zu  $330,7$  anstatt  $332,7$ . und gleichzeitig, dass die Geschwindigkeit der Ausbreitung wesentlich abhängig ist von der Stärke des Schalles. Aus der von Regnault gefundenen Zahl für die Ausbreitung in freier Luft, bei welcher wegen der raschen Abnahme derselben die Intensität keinen merklichen Einfluss hat, würde

für  $k$  ein etwas kleinerer Werth folgen als der von uns angenommene, nämlich 1,3945 anstatt 1,40. Aus der Erfahrung, dass auf die Geschwindigkeit die Intensität von Einfluss ist, ergibt sich dann, dass wir diesen Coefficienten nicht als constant, sondern als von der Compression der Luft abhängig ansehen müssen. Denn da andererseits Regnault gefunden, dass die Geschwindigkeit des Schalles von dem Drucke der Luft unabhängig ist, kann eine Abweichung der Gase vom Mariotte'schen Gesetz diesen Umstand nicht erklären. Die Bedeutung der Veränderlichkeit dieses Coefficienten wird in der Wärmelehre hervortreten, wo wir dann auch die Gleichung für die Fortpflanzung des Schalles ergänzen werden<sup>1)</sup>.

## §. 161.

**Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit.** Wir haben im vorigen Kapitel nachgewiesen, dass jede Säule irgend eines Körpers, wenn sie in longitudinale Schwingungen versetzt wird, eine Reihe von Tönen gibt. Für Luftsäulen in Pfeifen eingeschlossen erhielten wir als Ausdruck für die Schwingungszahl dieser Töne

$$N = \frac{(2n - 1) c}{4(l + x)}$$

für gedeckte Pfeifen, und

$$N = \frac{nc}{2(l + x + y)}$$

für offene Pfeifen; worin  $l$  die Länge der Pfeifen,  $x$  die Correction wegen der Mundöffnung und  $y$  die Correction bei den offenen Pfeifen wegen des Hervorragens der schwingenden Luftsäule aus der obern Oeffnung der Pfeife bedeutet.

Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnittes ist die Grösse  $c$  in diesem Ausdruck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung oder des Schalles in dieser Luftsäule, indem  $N$  der reciproke Werth der Schwingungsdauer der stehenden Welle von der Länge  $2(l + x)$ , resp.  $2(l + x + y)$  ist. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhielten wir aber früher den Quotienten aus der doppelten Länge der stehenden Welle und der Schwingungsdauer der Bewegung, oder

$$c = \frac{2L}{T} = 2LN.$$

Die Schwingungszahlen von Tönen können wir nun aber mittels des Monochordes oder der Sirene auf das genaueste erhalten. Da wir nun die Länge  $l$  der Röhre direkt messen und die Grössen  $x$  und  $y$  entweder nach der Dulong'schen Methode beobachten oder nach der Wertheim'schen berechnen können, so können wir aus den beobachteten Tönen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles sofort erhalten. Bei Anwendung gedeckter Pfeifen erhalten wir, wenn  $N_1$  die entweder direkt erhaltene oder aus einem der harmonischen Töne bestimmte Schwingungszahl des Grundtones ist, für welchen  $n = 1$ ,

$$c = 4(l + x) N_1$$

<sup>1)</sup> Man sehe im dritten Theile: Verhältniss der specifischen Wärmen der Gase bei constantem Druck und constantem Volumen.

und für offene Pfeifen

$$c = 2(l + x + y) N_1.$$

Dulong's Versuche<sup>1)</sup> führten auf die Zahl 333<sup>m</sup> für 0° als Mittel aus einer sehr grossen Zahl von Versuchen; indess glaubte Dulong doch, dass sich die absolute Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft durch die Töne der Pfeifen nicht mit Sicherheit bestimmen lasse, und die Zahlen, welche er mittheilt, zeigen auch besonders mit dem richtigen Werthe von  $\alpha$  in der Correction für die Temperatur berechnet Abweichungen bis zum Werthe von 10 Meter.

Wertheim<sup>2)</sup> indess hat die Geschwindigkeit des Schalles in Luft mittels der Pfeifentöne fast genau mit der Theorie in Uebereinstimmung gefunden. Seine Versuche sind bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt, die verschiedenen von ihm erhaltenen Werthe sind die folgenden:

Temperatur $t$	Geschwindigkeit des Schalles bei der Temperatur $t$ $c_t$	Geschwindigkeit bei 0° $c_0 = \frac{c_t}{\sqrt{1 + 0,003665 t}}$
I. Reihe		
0°,5 C.	331,98	331,70
2,0	332,74	331,53
4,5	332,75	330,04
8,0	335,43	330,62
8,5	338,05	332,91
9,0	338,01	332,54
12,0	339,46	332,23
12,3	343,01	335,53
16,0	338,68	329,17
26,6	347,82	332,01
II. Reihe		
9,9	336,85	332,87
16,0	337,80	327,36
III. Reihe		
21,0	341,15	329,12
IV. Reihe		
9,3	334,65	329,09
11,5	336,50	329,61
17,0	342,3	332,11

Mittel aller Versuche 331,33.

Die von Wertheim erhaltene Zahl ist somit um 0<sup>m</sup>,7 oder 0,002 des von Regnault gefundenen Werthes grösser als der letztere, trotzdem die von Wertheim angewandten Pfeifen im Maximum einen Durchmesser von 40<sup>mm</sup> hatten, also nur etwa 0,33 der von Regnault benutzten engsten Röhre. Es scheint indess auch bei Wertheim der Einfluss der Pfeifenweite unverkennbar. Die Versuche sind mit vier verschiedenen Pfeifen angestellt, deren Durchmesser waren 10, 20, 20, 40<sup>mm</sup>, drei waren von Messing, die vierte, deren Durchmesser 20<sup>mm</sup> betrug, von Glas. Nimmt man anstatt aus allen Versuchen nur aus den zu jeder Pfeife gehörigen Zahlen das Mittel, so erhält man

<sup>1)</sup> Dulong, Untersuchungen über die spezifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. Annales de chim. et de phys. Tome XLI. Poggend. Ann. Bd. XVI.

<sup>2)</sup> Wertheim, Ueber die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Messingpfeife von 40 <sup>mm</sup> Durchmesser	332,10	aus Reihe I,
" " 20 <sup>mm</sup> "	330,11	" " II,
Glaspfeife " 20 <sup>mm</sup> "	330,23	" " IV,
Messingpfeife " 10 <sup>mm</sup> "	329,12	" " III.

Wie man sieht, nimmt die Geschwindigkeit mit dem Pfeifendurchmesser nicht unbeträchtlich ab, während die beiden Pfeifen gleicher Dicke auch dieselbe Zahl ergaben. Die Werthe der Zahlen selbst unterscheiden sich allerdings von den Regnault'schen, man kann das indess sehr leicht durch die Unsicherheit der Correctionen  $x$  und  $y$  erklären, welche die absoluten Werthe der Zahlen leicht in etwas ändern kann.

Wenn man deshalb die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ihrem absoluten Werthe nach auch aus den Tonhöhen der Pfeifen nicht mit aller Sicherheit bestimmen kann, so sind sie doch sehr geeignet, die Geschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen zu vergleichen.

Um die Geschwindigkeit des Schalles in andern Gasen zu bestimmen, legte Dulong<sup>1)</sup> die Pfeifen horizontal in einen grossen von innen und aussen mit Blei beschlagenen Holzkasten, der ganz vollständig mit dem wohl ausgetrockneten zu untersuchenden Gase erfüllt war. Ein Gasometer, mit demselben Gase angefüllt, stand mit dem Fusse der Pfeife in Verbindung und trieb das Gas unter constantem Drucke in die Pfeife hinein. Sobald der Strom anfang, wurde in einer Wand des Kastens ein Loch geöffnet, um das eindringende Gas wieder abströmen zu lassen.

War nun bei einer und derselben Pfeife  $N$  die Schwingungszahl des Tones in einem Gase,  $N'$  die in einem andern, so ist bei Anwendung einer gedeckten Pfeife

$$c = 4(l + x)N$$

und

$$c' = 4(l + x)N',$$

also

$$\frac{c}{c'} = \frac{N}{N'}.$$

Das Verhältniss der beiden Schallgeschwindigkeiten erhalten wir also selbst ohne Kenntniss der anzubringenden Correction  $x$ , und somit, wenn wir die Geschwindigkeit  $c$  in Luft als anderweitig bestimmt annehmen, auch die Geschwindigkeit  $c'$  des Schalles in jedem andern Gase.

Die Versuche Dulong's geben daher, wenn auch für Luft nicht vollkommen genaue, für die andern Gase durchaus zuverlässige Resultate.

Die von Dulong erhaltenen Zahlen sind folgende:

Name des Gases	Schwingungszahl $N$	Geschwindigkeit $c$ in Luft = 333 <sup>m</sup>	Dichte $s$	Werth für $k$
Atmosphärische Luft	500,4 bei 22° C.	333 <sup>m</sup>	1	1,421
Sauerstoff-Gas	474,9 " 21 "	317,17	1,1026	1,415
Wasserstoff-Gas	1882,3 " 17 "	1269,5	0,0688	1,407
Kohlensäure	393,1 " 22 "	261,6	1,542	1,388
Kohlenoxyd-Gas	502,3 " 15 "	337,4	0,974	1,427
Stickoxyd-Gas	392,7 " 20,5 "	261,9	1,527	1,343
Oelbildendes Gas	466,9 " 16 "	314	0,981	1,340

<sup>1)</sup> Dulong u. a. O.

Die Bedeutung der einzelnen Werthe ist wohl ohne Weiteres klar. Die Werthe für  $c$  sind mit Dulong's Werth für die Geschwindigkeit in der Luft 33<sup>m</sup> berechnet und aus diesen dann die Werthe von  $k$  nach der Gleichung

$$k' = \left(\frac{c'}{c}\right)^2 \cdot \frac{s'}{s} \cdot k.$$

Die Methode der Geschwindigkeitsmessung durch Pfeifentöne beruht eigentlich auf Messung der Wellenlängen, welche, wie wir schon mehrfach hervorgehoben, keineswegs vollkommen sicher ist; eine Beobachtung hat nun (vor Kurzem Kundt<sup>1)</sup>) in den Stand gesetzt, die Länge der Wellen in den Gasen direkt zu messen und so eine sehr bequeme Methode zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeiten zu geben.

Wenn man eine an beiden Seiten offene Röhre in longitudinale Schwingungen versetzt, so geräth die in der Röhre vorhandene Luft nicht mit in Schwingungen; bringt man deshalb in eine solche Röhre Lycopodium oder Kieselsäure, so bewegt sich dies zu den in den Röhrenwänden sich bildenden Savart'schen Knotenlinien (§. 137). Anders dagegen, wenn man die Röhren an den Enden verschliesst, sei es, dass man sie zustöpselt oder zuschmilzt. Da die freien Enden eines den tiefsten Longitudinalton gebenden Rohres stets ein Schwingungsmaximum haben, so stossen die Endflächen des Rohres ganz periodisch auf die eingeschlossene Luft, und versetzen dieselbe in Schwingungen, welche mit denen der Röhre isochron sind. Da nun diese Schwingungen von beiden Enden der Röhre gegen einander sich fortpflanzen, so müssen sich stehende Wellen bilden, an deren Knotenpunkten das Lycopodium oder die Kieselsäure sich ansammelt. Die Länge dieser stehenden Wellen hängt lediglich von der Höhe des erzeugenden Tones und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in dem die Röhre erfüllenden Gase ab, oder wenn wir nach und nach dieselbe Röhre mit verschiedenen Gasen füllen, so ist die Länge der Wellen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen direkt proportional.

Eine ganz eben solche Bildung von stehenden Wellen in der in einer Röhre eingeschlossenen Luftsäule tritt ein, wenn man die Röhre an einem Ende schliesst und durch das andere offene Ende, wie Fig. 287 zeigt, in

Fig. 287.



dieselbe den tönenden Stab einführt. Klemmt man die Röhre bei  $D$  ein und bringt den Stab, der bis zu seiner Mitte in die Röhre eingeführt ist, durch Streichen in der Richtung von  $D$  nach  $A$  zum Schwingen, so sind es die Stöße des freien Endes  $B$  gegen die eingeschlossene Luft, welche die Luft in Schwingung versetzen; die Schwingungen werden bei  $C$  reflectirt, so dass auch hier stehende Wellen sich ausbilden, in deren Knoten der Staub sich ansammelt. Bei dieser Art der Erzeugung der Luftschwingungen werden die Knotenlinien durch nichts alterirt, was bei der ersten Art der Erzeugung, bei der die Röhre selbst schwingt, immerhin durch die Savart-

<sup>1)</sup> Kundt, Poggend. Ann. Bd. CXXVII und Bd. CXXXV.

sehen Linien noch möglich ist. Man kann deshalb bei dieser Art der Erregung die Länge der stehenden Wellen leicht messen und so die Geschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedenen Durchmessers und bei verschiedenen Gasen mit einander vergleichen, oder auch, wenn man die Schwingungszahl des Stabtones bestimmt, ihrem absoluten Werthe nach erhalten.

Auf die Einzelheiten des Verfahrens einzugehen, würde uns hier zu weit führen, wir verweisen deswegen auf die Arbeiten von Kundt<sup>1)</sup>.

Kundt's Versuche bestätigen nun zunächst das vorhin aus denen von Wertheim gezogene Resultat, dass die Geschwindigkeit auch hoher Töne von dem Durchmesser der Röhre abhängig ist, und liefern gleichzeitig die Erklärung, weshalb Regnault in Röhren von 0,108 Durchmesser noch eine so bedeutende Verzögerung des Schalles fand, während wir aus den Zahlen Wertheim's schon für Pfeifen von 0,04 M. Durchmesser die volle Geschwindigkeit erhielten. Kundt fand nämlich, wie folgende kleine Tabelle zeigt, dass die Verzögerung der Geschwindigkeit mit der Wellenlänge des Tones zunimmt; die Geschwindigkeit in einer Röhre von 13<sup>mm</sup> Durchmesser ist stets gleich 1 gesetzt.

Durchmesser der Röhren	Geschwindigkeit des Schalles für Töne mit Wellenlängen von		
	180 <sup>mm</sup>	90 <sup>mm</sup>	60 <sup>mm</sup>
mm			
55,0	1,01010	1,00885	1,00584
26,0	1,00908	1,00842	1,00781
13,0	1,00000	1,00000	1,00000
6,5	0,98031	0,99170	0,99176
3,5	0,92628	0,96666	—

Für den tiefsten Ton, der nahezu dem *ais*, entspricht, nimmt also die Geschwindigkeit des Schalles bis zu dem Rohrdurchmesser 0,055 so merklich zu, dass die Grenze der Zunahme wohl noch nicht erreicht ist, während für den eine Octave höhern Ton die Grenze der Röhrenweite, bis zu welcher die Geschwindigkeit wächst, schon bei 26<sup>mm</sup> liegt. Der Pistolenschuss Regnault's gab nach Versuchen von König einen Ton, dessen Wellenlänge etwa 3,6<sup>m</sup><sup>2)</sup>, dessen Höhe somit fast *g* war; da somit die Länge der Welle 20mal grösser ist, kann es nicht auffallend erscheinen, dass der Einfluss der Röhrenwände erst bei so viel grösserem Durchmesser unmerkbar wurde.

Gleichzeitig fand Kundt, dass die Beschaffenheit der innern Röhrenwand auf die Geschwindigkeit des Schalles von Einfluss war, bei rauhen Wänden ist die Geschwindigkeit kleiner; einen Einfluss der Intensität vermochte Kundt dagegen nicht zu erkennen.

Dass die Geschwindigkeit des Schalles in engen Röhren sich beträchtlich vermindert, liegt einmal an der Reibung der schwingenden Gastheile an den Röhrenwänden, durch welche die Beweglichkeit der schwingenden

<sup>1)</sup> Ausführlich sind dieselben dargelegt in Poggend. Ann. Bd. CXXXV.

<sup>2)</sup> Regnault. Mémoires de l'Acad. T. XXXVII. p. 437.

Theile vermindert wird, dann aber wesentlich in der Verminderung des Coefficienten  $k$ , der, wie erwähnt wurde, in die Gleichung für die Fortpflanzung von Wellen in Gasen eingeht, weil an den verdichteten Stellen eine Erwärmung, an den Stellen der Verdünnung eine Abkühlung eintritt. Diese Erwärmung und Abkühlung wird in Röhren kleiner, weil an den verdichteten Stellen Wärme an die Röhrenwand abgegeben, an den verdünnten Wärme von der Röhrenwand aufgenommen wird. Man erkennt deshalb leicht, dass die Abnahme der Geschwindigkeit in engern Röhren und für Töne grösserer Schwingungsdauer die grössere sein muss. Denn je enger die Röhre ist, um so grösser ist im Verhältniss zur schwingenden Luftsäule die Wandfläche, welche ihren Einfluss ausübt, da die Menge der schwingenden Luft mit dem Quadrate des Röhrendurchmessers, die berührende Wandfläche dagegen mit der ersten Potenz desselben abnimmt. Je langsamer ferner die Schwingungen sind, um so grösser ist der Wärmeaustausch mit den Röhrenwänden, da die Verdichtungen und Verdünnungen dann um so länger dauern.

Helmholtz<sup>1)</sup> und Kirchhoff<sup>2)</sup> haben diese Frage einer genauern theoretischen Behandlung unterzogen, ersterer unter Berücksichtigung der Reibung allein, letzterer unter Mitberücksichtigung des Wärmeaustausches; beide gelangen zu Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren, welche sich nur durch die Bedeutung einer in der Gleichung auftretenden Constanten unterscheiden. Ist  $C$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im freien Raum, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  in einer Röhre vom Radius  $r$  für einen Ton, dessen Schwingungszahl  $n$  ist,

$$c = \frac{C}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}} = C \left( 1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}} \right),$$

worin die Constante  $\gamma$  bei Helmholtz die Reibungsconstante der Luft ist, während sie nach Kirchhoff von der Reibung und dem Wärmeaustausch der Luft und der Röhrenwand abhängt. Es soll also nach dieser Gleichung die Abnahme der Geschwindigkeit in Röhren, die Differenz  $C - c$  dem Durchmesser der Röhre und der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umgekehrt proportional sein.

Da weder die Versuche von Regnault noch von Kundt ausreichend waren, um die theoretische Beziehung experimentell zu prüfen, haben Schneebeli<sup>3)</sup> und Adolph Seebeck<sup>4)</sup> neue Versuche über diese Frage angestellt, indem sie, wie Kundt, aber nach einer andern Methode, die Wellenlänge von Tönen verschiedener Höhe in Röhren von verschiedenem Durchmesser maassen. Beide Experimentatoren versetzten in einem einerseits geschlossenen Rohre die Luft durch hineingesandte Töne in stehende Schwingungen und bestimmten direkt mit dem Ohre den Abstand der Schwingungsmaxima von dem geschlossenen Ende des Rohres. Die von Seebeck gewählte

<sup>1)</sup> Helmholtz, Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg Bd. III. p. 16.

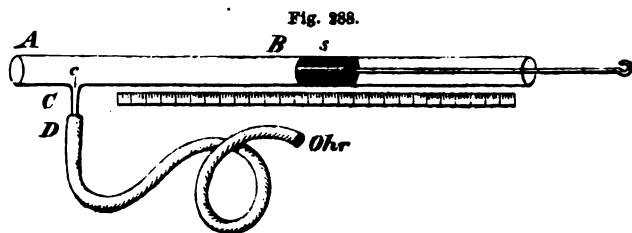
<sup>2)</sup> Kirchhoff, Poggend. Ann. Bd. CXXXIV.

<sup>3)</sup> Schneebeli, Poggend. Ann. Bd. CXXXVI.

<sup>4)</sup> Ad. Seebeck, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.



Anordnung zeigt Fig. 288. In dem Rohre  $AB$ , an welchem bei  $C$  ein kleines Rohr senkrecht zur Längsaxe von  $AB$  angeschmolzen ist, kann ein



dicht schliessen-der Stempel hin und her bewegt werden. An dem Rohr ist eine Skala angebracht, deren Nullpunkt bei  $C$  liegt. Von dem kleinen Rohr  $CD$

geht ein Kautschukschlauch aus, dessen Ende in das eine Ohr gesteckt wird, während das andere Ohr durch einen Siegellackpfropfen geschlossen wird. Erzeugt man nun in dem Rohre stehende Wellen, so nimmt das Ohr einen Ton wahr, wenn bei  $c$  ein Schwingungsmaximum ist, da dann die Luft dort nur eine hin- und hergehende Bewegung besitzt, ohne dass Verdichtungen und Verdünnungen eintreten. Es können deshalb in dem abgezwigten Rohre keine longitudinalen Schwingungen entstehen und zum Ohr fortgepflanzt werden. Sendet man deshalb durch eine tönende Stimmgabel, welche sich unmittelbar vor dem Ende  $A$  befindet, Schwingungen in das Rohr  $AB$  und verschiebt dann den Stempel  $s$  so lange, bis das Ohr, in welchem das Kautschukrohr mündet, keinen Ton mehr wahrnimmt, so befindet sich bei  $c$  ein Schwingungsmaximum, und da an dem Stempel  $s$  sich immer ein Schwingungsknoten befindet, so ist der Abstand der Stempelfläche von  $c$  eine viertel Wellenlänge des Tones im Innern des Rohres. Das Vierfache des Abstandes multiplicirt mit der Schwingungszahl des Tones gibt somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Rohre.

Wie Seebeck anführt, ist die auf diese Weise zu erreichende Genauigkeit sehr beträchtlich, bei Wellenlängen von  $200^{\text{mm}}$  bis  $300^{\text{mm}}$  weichen die einzelnen Messungen nur um  $1 - 3^{\text{mm}}$  von einander ab, die Abweichungen vom Mittel erreichten im Allgemeinen kaum  $1^{\text{mm}}$ .

Aus den Versuchen von Seebeck sowohl wie von Schneebeli ergibt sich, dass in der That bei engen Röhren die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit, so lange die Röhren hinreichend enge sind, so dass man die ganze Luftsäule als gleichförmig schwingend annehmen darf, dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional ist. So erhielt z. B. Seebeck unter Annahme der Geschwindigkeit des Schalles im freien Raum  $C = 332,77$  folgende Werthe der Verzögerung  $C - c$

Durchmesser der Röhre mm	Ton $c_2$ ; $n = 512$ $C - c$		Ton $g_1$ ; $n = 384$ $C - c$		Ton $e_1$ ; $n = 320$ $C - c$	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
3,4	9,79	9,79	13,91	13,91	15,51	15,51
9,0	4,33	3,70	5,09	5,25	4,75	5,06
17,5	1,85	1,90	2,91	2,70	3,53	3,01

Die als berechnet angegebenen Werthe sind jedesmal aus dem für die engste Röhre gefundenen für die weitem Röhren unter Voraussetzung der Richtigkeit des Gesetzes abgeleitet, und man sieht, wie Beobachtung und Rechnung auch genügend übereinstimmen.

Combinirt man die an verschiedenen Röhren unter Anwendung desselben Tones gemachten Beobachtungen, so lässt sich aus denselben die Geschwindigkeit des Schalles im freien Raume ableiten, nach der Gleichung

$$C = \frac{c_1 r_1 - c_2 r_2}{r_1 - r_2},$$

wenn  $c_1$  die Geschwindigkeit des Schalles in der Röhre vom Radius  $r_1$  und  $c_2$  jene in der Röhre vom Radius  $r_2$  bedeutet. Indem Schneebeli alle seine Beobachtungen zu je 2 in der Art combinirte, welche in Röhren verschiedenen Materials, deren Durchmesser zwischen 14<sup>mm</sup> und 90<sup>mm</sup> war, gemacht waren, fand er im Mittel

$$c = 332,06.$$

Die extremsten Abweichungen von diesem Mittel waren 2<sup>m</sup>, eine Abweichung, welche noch nicht 1 Procent des Mittels beträgt.

Während so die Versuche übereinstimmend die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von dem Durchmesser der Röhre der Kirchhoffschen Theorie gemäss finden, kommen beide Experimentatoren in Bezug auf die Abhängigkeit der Verzögerung von der Schwingungszahl zu andern Resultaten. Nach der Theorie soll die Verzögerung in Röhren gleichen Durchmessers der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umgekehrt proportional sein, nach den Versuchen nimmt aber die Verzögerung rascher ab, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Schwingungen wächst, und Seebeck schliesst aus seinen Versuchen, dass die Abnahme der Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Schwingungszahl proportional ist. Und in der That, multiplicirt man die in obiger Tabelle mitgetheilten Werthe mit  $n^{\frac{3}{2}}$ , so findet man die in jeder Horizontalreihe angeführten Verzögerungen annähernd constant; indess scheint, wenn man sich an die direkten Beobachtungen hält, die Verzögerung ebenso gut den Schwingungszahlen selbst umgekehrt proportional gesetzt werden zu können, so dass sich aus den Zahlen von Seebeck mit Sicherheit auch nichts weiter schliessen lässt, als dass die Verzögerung nicht den Quadratwurzeln aus den Schwingungszahlen umgekehrt proportional ist. In welcher Beziehung die Verzögerung zu den Schwingungszahlen steht, ist erst durch weitere Versuche festzustellen.

### §. 162.

**Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern muss nach dem Erühern mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen übereinstimmen. Für Stäbe erhielten wir dieselben im vorigen Abschnitt durch den Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin  $E$  den Elasticitätscoefficienten und  $s$  die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

Direkte Messungen dieser Geschwindigkeit sind nur für Gusseisen von Biot<sup>1)</sup> vorhanden, welcher sie an einer Verbindung von 376 Röhren, die

<sup>1)</sup> Biot, Experimentalphysik, übers. von Fechner. Leipzig 1823. Bd. II. p. 15.

zusammen eine Länge von 951,25 Meter hatten, ausführte. In eine der Mündungen dieses Röhrenkanals ward ein Eisenring, der mit derselben gleichen Durchmesser hatte, angefügt und in seiner Mitte durch Stäbe von Eisen eine Glocke und ein von einer Stahlfeder gehaltener Hammer befestigt, vermöge deren man den letztern nach Belieben an die Glocke anschlagen lassen konnte. Dann pflanzte sich der Schall der Glocke zur Röhre durch die Stäbe und Ringe von Eisen fort, und stellte man sich an das andere Ende der Röhrenleitung, so musste man einen doppelten Schall hören, einen, der durch das Metall der Röhre in der Zeit  $x$  hindurchgegangen war, den andern, der durch die Luft hindurch sich fortgepflanzt hatte. Man nahm in der That sehr deutlich zwei bestimmte Schläge wahr, zwischen denen eine Zeit von 2,5 Sekunden lag. Hieraus berechnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c'$  des Schalles im Eisen aus derjenigen in der Luft wie folgt. Die Zeit, welche der Schall brauchte, um in der Luft sich fortzupflanzen, war  $\frac{951,25}{c}$ , die Zeit  $x$ , die er im Eisen brauchte,  $\frac{951,25}{c'}$ , die Differenz beider

$$\frac{951,25}{c} - \frac{951,25}{c'} = 2,5$$

und daraus

$$c' = \frac{951,25 \cdot c}{951,25 - 2,5 \cdot c} = 10,5 c = 3475,5^m,$$

so dass also der Schall im Eisen in einer Sekunde nahe an 3500 Meter zurücklegt, wenn wir die Geschwindigkeit in der Luft in runder Zahl gleich  $331^m$  setzen.

Man kann übrigens die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern sehr leicht durch indirekte Beobachtungen gerade so erhalten, wie bei der Luft und den Gasen, durch Beobachtung der Longitudinaltöne eines Stabes. Wenn man einen an beiden Enden freien Stab in longitudinale Schwingungen versetzt, so ist die Schwingungszahl des entstehenden Grundtones:

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{gE}{s}} = \frac{c}{2l}$$

und daraus

$$c = 2l \cdot N,$$

worin  $l$  die Länge des Stabes bedeutet.

Mit Hülfe dieser Methode ist von Wertheim<sup>1)</sup> die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles für eine grosse Reihe von Metallen bestimmt worden. Ein Vergleich der experimentell erhaltenen Werthe mit den theoretisch berechneten bestätigt die Richtigkeit der Theorie auf das vollständigste.

<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XII. Poggend. Ann. Ergänzungsband II.

Name des Metalles	Geschwindigkeit in Luft = 1	$E$	$s$	$\sqrt{\frac{gE}{s}}$
Blei ausgezogen	4,257	1803	11,16	3,787
Zinn „	7,480	—	—	—
Gold „	6,424	8131,5	18,51	6,247
Silber „	8,057	7357,7	10,36	7,940
Zink destillirt. gegossen	9,683	—	—	—
„ gewöhnl. ausgez.	11,007	8734	7,008	10,524
Kupfer ausgezogen	11,167	12449	8,93	11,128
Platindraht mittl. Dicke	8,467	17044	21,27	8,437
Eisen (Berry) ausgez.	15,108	20869	7,74	15,472
Gussstahl ausgezogen	15,108	19549	7,71	15,003
Stahldraht engl. ausgez.	14,961	18809	7,71	14,716

Sehr bequem zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern mit derjenigen in der Luft ist die Methode von Kundt, die wir im vorigen Paragraphen besprochen<sup>1)</sup>. Wendet man in der Fig. 287 gegebene Anordnung irgend einen tönenden Stab an, so entspricht die Länge des Stabes der Länge einer stehenden Welle, während uns die Länge der in dem mit Staub versehenen Rohr vorhandenen Welle die Länge der stehenden Welle von genau derselben Schwingungsdauer in der Luft gibt. Ist nun  $c$  die Geschwindigkeit des Schalles im Stabe,  $l$  die Länge des Stabes,  $N$  seine Schwingungszahl, so ist

$$c = 2l \cdot N.$$

Ist  $c_1$  die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft,  $l_1$  die Länge der in dem Glasrohr gemessenen Wellen, so ist

$$c_1 = 2l_1 \cdot N,$$

somit

$$\frac{c}{c_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Das Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten ist gleich dem der Stablänge und der in dem Glasrohre gemessenen Wellen.

Drei Versuche, bei denen ein Messingstab von 941<sup>mm</sup>,5 Länge angewendet wurde, gaben für die Länge der Wellen in dem Rohre  $l_1 = 43,30$ ; 43,29; 43,35. Daraus folgt  $c = 10,87$ ; 10,87; 10,86.

Für drei Stahlstäbe aus demselben Stahl erhielt Kundt

$$c = 15,345; 15,334; 15,343.$$

Für einen Glasstab erhielt Kundt  $c = 15,24$ , und für einen Kupferdraht  $c = 11,960$ .

Die Zahlen stimmen mit denen von Wertheim und den für dieselben Substanzen theoretisch berechneten so vortrefflich, dass die Genauigkeit der Methode dadurch unzweifelhaft bewiesen wird.

<sup>1)</sup> Kundt, Poggend. Ann. Bd. CXXVII.

In etwas anderer Weise haben Stefan <sup>1)</sup> und Warburg <sup>2)</sup> die Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern untersucht, auf welche sie auch im Stande waren die Geschwindigkeit in solchen Körpern zu bestimmen, welche nicht durch Anstreichen zum Tönen gebracht werden können, wie Kautschuk, Wachs und dergleichen.

Das Prinzip der Methode von Stefan ist folgendes. Man formt den Körper, der selbst nicht zum Tönen gebracht werden kann, wie Wachs, in Form eines kurzen Stabes und verbindet ihn fest mit einem Stabe von Glas oder Holz, welcher durch Reiben in tönende Schwingungen versetzt werden kann, so dass der Wachsstab eine Verlängerung des Holzstabes bildet. Das System dieser beiden so verbundenen Stäbe liefert, wenn man den Glasstab reibt, einen gut charakterisirten Longitudinalton, dessen Tonhöhe sich bestimmen lässt. Aus der Tonhöhe des isolirt schwingenden Glasstabes und der Aenderung der Tonhöhe, wenn an den Glasstab der Wachsstab ange-setzt ist, sowie aus der bekannten Länge und dem Gewichte des Wachsstabes lässt sich dann die Geschwindigkeit des Schalles in dem Wachsstabe berechnen. Die Berechnung dieser Versuche ist zu complicirt, als dass wir hier darauf eingehen könnten.

So erhielt Stefan bei Wachs für die Temperatur 17° die Geschwindigkeit gleich 880<sup>m</sup> und fand, dass mit steigender Temperatur für jeden Grad die Geschwindigkeit um 40<sup>m</sup> abnahm.

Die Methode von Warburg beruht darauf, dass man einen Stab des zu untersuchenden Materials durch einen andern, für welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bekannt ist, in isochrone transversale Schwingungen versetzt, dass man auf beiden Stäben dann die Knotenpunkte aufsucht und dann die Länge der schwingenden Abtheilungen beider Stäbe vergleicht. Man legt zu dem Ende einen Stab, etwa einen Spiegelglasstreifen, auf, so dass er in zwei Knotenlinien unterstützt ist. In einem Schwingungsmaximum, etwa dem mittelsten, klebt man dann mit Siegelack einen leichten hölzernen Steg, und klebt mit etwas Klebwachs auf diesen den zu untersuchenden Stab, so dass derselbe dem Spiegelglasstreifen parallel ist. Versetzt man dann den Spiegelglasstreifen in transversale Schwingungen, so theilen sich diese dem zu untersuchenden Stabe mit, und man kann auf beiden Stäben durch aufgestreuten Sand die Knotenlinien sichtbar machen. Misst man dann auf beiden Stäben die Länge der ersten, zweiten, *n*ten schwingenden Abtheilungen, dieselben von den freien Enden aus gerechnet, so gibt die Theorie für das Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten in beiden Stäben

$$\frac{c}{c'} = \frac{l_n^2}{l_n'^2} \cdot \frac{h'}{h},$$

worin *c* die Schallgeschwindigkeit in dem zu untersuchenden Körper, *l<sub>n</sub>* die Länge der, vom freien Ende ab, *n*ten schwingenden Abtheilung auf demselben und *h* die Dicke des Stabes bedeutet, während *c'*, *l<sub>n</sub>'*, *h'* dieselbe Bedeutung für den schwingenden Glasstreifen haben. Um die Methode zu prüfen, verglich Warburg zunächst die Geschwindigkeit des Schalles in Messing und Glas. Er erhielt in zwei Versuchen

<sup>1)</sup> Stefan, Wiener Berichte Bd. LVII. p. 697.

<sup>2)</sup> Warburg, Poggend. Ann. Bd. CXXXVI.

$$\frac{c}{c'} = 0,676 \text{ und } 0,645,$$

im Mittel also 0,660, während er nach der Methode von Kundt den Werth 0,668 für dasselbe Verhältniss fand, zwei Werthe, die nur um etwas mehr als 1% von einander abweichen. Für die Schallgeschwindigkeit im Glase lieferte ihm die Kundt'sche Methode den Werth 15,65, für jene im Messing 10,46, die Geschwindigkeit in Luft gleich 1 gesetzt.

Die von Warburg nach dieser Methode erhaltenen Resultate zeigt folgende Tabelle.

Material	c jene im Glase gleich 1	Specif. Gew.	Elasticitätscoefficient bez. auf Glas = 1
Glas	1	2,390	1
Stearin	0,265	0,974	$\frac{1}{35}$
Paraffin	0,251	0,908	$\frac{1}{42}$
Wachs	0,166	0,971	$\frac{1}{88}$
Talg	0,075	0,917	$\frac{1}{461}$

Die Zahlen gelten für 15°—17° C.

Setzt man die Geschwindigkeit des Schalles in Luft gleich 330<sup>m</sup>, in Glas bezogen auf Luft gleich eins gleich 15,65, so ergibt sich für Wachs 857<sup>m</sup>, eine Zahl, welche mit der Stefan'schen gut übereinstimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wie wir sie soeben bestimmten, gilt nur für stabförmige feste Körper, für nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnte muss sie nach Wertheim grösser sein<sup>1)</sup>.

Der Grund dieser Erscheinung liegt in dem §. 51 betrachteten Zusammenhange zwischen dem Elasticitätscoefficienten  $E$  und der beim Zuge eintretenden Volumänderung. Wir erhielten damals für das Gewicht  $w$ , welches einen Stab vom Querschnitte und der Länge 1, der an dem einen Ende aufgehängt ist, am andern das Gewicht trägt, um die Länge  $\delta$  ausdehnt,

$$w = E\delta.$$

Andererseits erwähnten wir, dass nach der Theorie von Cauchy für dasselbe Gewicht die Beziehung besteht

$$w = k\delta + Kv \dots (\alpha),$$

worin  $v$  die Veränderung der Volumeinheit des Stabes bei jenem Zuge bedeutet. Die Aenderung der Volumeinheit bei der Verlängerung  $\delta$  setzt Wertheim gleich  $\frac{1}{3} \delta$ ; daraus ergab sich gemäss der Gleichung

$$v = \frac{k}{2K + k} \cdot \delta,$$

dass  $k = K$  und schliesslich

$$w = \frac{4}{3} k\delta.$$

Für den Elasticitätscoefficienten, jenes Gewicht, welches die Verlänge-

<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII.

lung  $\delta$  gleich 1 macht, erhält man dann

$$\frac{w}{\delta} = E = \frac{4}{3} k.$$

Diese Grösse  $E$  wandten wir bisher als Maass der Elasticität an. Nehmen wir aber jetzt einen Stab an, der nicht nur an seinem Ende fest ist, sondern auf dessen Oberfläche nach allen Seiten Kräfte wirken, welche eine Aenderung des Querschnittes hindern, so wird jetzt die Verlängerung  $\delta$  durch ein anderes Gewicht  $w'$  bewirkt werden, für welches, da auch jetzt noch die Verlängerung der Grösse des Gewichtes proportional sein muss,

$$w' = E' \delta$$

und auch jetzt muss für  $w'$  die Beziehung bestehen

$$w' = k (\delta + v) \dots (\beta),$$

da die Gleichung ( $\alpha$ ) für jeden Zug oder Druck besteht, welchen man auf einen Körper wirken lässt, und da weiter  $k$  und  $K$  zwei nur von der Substanz der Körper abhängige Constanten sind, somit die für einen bestimmten Fall zwischen ihnen bestehende Gleichheit bestehen muss, wie auch die Kräfte auf den Körper wirken mögen. Wenn nun aber der Stab sich um  $\delta$  verlängert, nimmt, da jetzt eine Aenderung des Querschnittes nicht eintreten kann, auch sein Volumen um  $\delta$  zu, oder es wird

$$v = \delta; w' = 2k\delta$$

und daraus für den Coefficienten  $E'$

$$E' = 2k.$$

Dieser Coefficient ist aber als das Maass der elastischen Kraft in diesem Falle zu betrachten, da uns das Produkt  $E' \delta$  die Kraft gibt, welche wir zu einer Ausdehnung  $\delta$  aufwenden müssen, also auch die Kraft, mit welcher die um  $\delta$  von einander entfernten Schichten sich wieder einander anziehen.

Aus dem Obigen folgt

$$E : E' = \frac{4}{3} k : 2k,$$

$$E' = \frac{3}{2} E.$$

Unter dieser Voraussetzung ist also die Kraft, mit welcher sich die von einander entfernten Schichten anziehen, die elastische Kraft des Körpers, das Anderthalbfache von derjenigen, welche bei Verlängerung um die gleiche Grösse eines nur an seinen Enden festen Stabes auftritt.

Wenn wir nun in einer ausgedehnten Masse des festen Körpers einen Cylinder dieser Masse verlängern oder verkürzen wollten, so würde in dem Falle, da die Wand dieses Cylinders rings von der gleichen Masse des umgebenden Körpers festgehalten und angezogen wird, das Maass der Elasticität durch die Grösse  $E'$  gegeben sein.

Das ist nun der Fall, wenn sich in einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers der Schall ausbreitet. In der Richtung jedes Radius einer um die Quelle des Schalles gelegten Kugel pflanzen sich longitudinale Wellen fort, in jedem Radius treten also Verdichtungen und Verdünnungen ein. Da aber hier jeder dieser Radien von der gleichen Masse umgeben ist, können bei diesen Ausdehnungen und Zusammendrückungen der Länge nach

keine Contractionen oder Dilatationen des Querschnittes stattfinden; das Maass der Elasticität ist also  $E'$  und nicht  $E$ .

Da wir nun für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles haben

$$c = \sqrt{\frac{c}{d}},$$

so wird dieselbe in einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers

$$c = \sqrt{\frac{gE'}{s}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{gE}{s}},$$

oder nennen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stabe dieses Körpers  $c'$

$$c = c' \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Für diejenigen Körper also, für welche die Wertheim'sche Annahme richtig ist, verhält sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer Kugel oder in einer unbegrenzten Masse zu derjenigen in einem Stabe wie  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  zu 1.

Ist die Volumveränderung nicht  $\frac{1}{3}$  der Verlängerung bei einem auf einen Stab des Körpers ausgeübten Zuge, sondern folgen wir der allgemeinem Annahme, dass die Quercontraction für die verschiedenen Körper verschieden ist, so ist nach §. 52

$$E = \frac{3K+k}{2\frac{K}{k}+1}.$$

Ist der Coefficient der Quercontraction gleich  $\mu$ , so erhielten wir weiter

$$\mu = \frac{K}{2K+k}$$

$$K = k \cdot \frac{\mu}{1-2\mu}; \quad E = k(1+\mu).$$

Ist nun der Stab verhindert sich in der Quere zusammen zu ziehen, so ist immer  $\delta = v$ , somit wird

$$w' = (k+K)\delta = k \cdot \left(\frac{1-\mu}{1-2\mu}\right) \cdot \delta$$

oder

$$E' = k \frac{1-\mu}{1-2\mu}$$

• und daraus

$$\frac{E'}{E} = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Daraus folgt dann für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in ausgedehnten Massen

$$c = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{gE}{s}} = c' \cdot \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}.$$

Wenn also  $\mu$  von Null verschieden ist, also bei der Längsausdehnung überhaupt eine Quercontraction eintritt, ist  $c' > c$ .



Diese Ausführungen lassen sich nicht leicht durch Versuche prüfen, da man nicht leicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch ausgedehnte Massen beobachten kann; sonst wäre das eine sichere Methode zur Bestimmung von  $\mu$ .

## §. 163.

**Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten muss nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in den Flüssigkeiten übereinstimmen. Bedeutet  $H$  den Druck der Atmosphäre in Millimeter Quecksilberdruck,  $\sigma$  das spezifische Gewicht des Quecksilbers,  $s$  die Dichtigkeit und  $\mu$  die Compressibilität der betreffenden Flüssigkeit, so erhielten wir für  $c$  in §. 138

$$c = \sqrt{\frac{gH\sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser, für welches  $\mu = 0,0000499$ ,  $s = 1$  bei  $4^{\circ}$  C. ist, wird dieser Ausdruck

$$c = 1424,8 \text{ Meter.}$$

Dieses Resultat ist durch direkte Versuche von Colladon und Sturm im Jahre 1827 auf dem Genfersee bestätigt worden<sup>1)</sup>. Zwei Schiffe wurden in einer bestimmten, gemessenen Entfernung festgelegt. Das erstere trug eine in das Wasser getauchte Glocke, welche mittels eines an einem Hebel befestigten Hammers angeschlagen werden konnte. An dem andern Ende des Hebels befand sich eine brennende Lunte, welche in demselben Augenblicke, in welchem der Hammer die Glocke schlug, eine Quantität Pulver entzündete. Von dem andern Schiffe reichte ein Hörrohr in das Wasser, an dessen aus dem Wasser hervorragenden Ende der Beobachter sein Ohr anlegte, um den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrzunehmen. Aus der gemessenen Distanz der Schiffe und der beobachteten Zeit, welche zwischen der Wahrnehmung der Flamme und des Schalles verflossen war, ergab sich bei einer Temperatur von  $8^{\circ},1$  Celsius

$$c = 1435 \text{ Meter.}$$

Setzen wir bei  $8^{\circ}$  C. nach den Beobachtungen von Grassi  $\mu = 0,000049$  und nach Kopp  $s = 0,999775$ , so wird

$$c = 1437 \text{ Meter,}$$

so dass das experimentelle Resultat mit dem theoretischen fast identisch ist.

Andere direkte Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten sind nicht vorhanden. Dagegen hat Wertheim<sup>2)</sup> auch hier die Töne der offenen Pfeifen benutzt, um die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten zu bestimmen. Das Verfahren, welches er anwandte, um die Töne hervorzubringen, sowie die nothwendigen Berichtigungen zu erhalten, haben wir an den betreffenden Stellen beschrieben. Berechnete

<sup>1)</sup> Colladon und Sturm, Poggend. Ann. Bd. XII.

<sup>2)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Wertheim indess aus seinen Versuchen nach der für offene Pfeifen gültigen Gleichung aus den beobachteten Schwingungszahlen  $N$  die Schallgeschwindigkeit  $c$

$$c = 2lN,$$

so ergab sich eine weit kleinere Geschwindigkeit als die Versuche von Colladon und Sturm und die Theorie ergeben, nämlich bei 15° C. als Mittel aus sehr vielen Versuchen

$$c = 1173,4 \text{ Meter.}$$

Um dieses Resultat mit der Theorie in Einklang zu bringen, nimmt Wertheim an, dass sich in Flüssigkeiten nicht, wie man gewöhnlich annimmt, der Druck momentan nach allen Richtungen gleichmässig überträgt, dass also nicht für einen momentanen Druck auf die eine Endfläche eines in einer vollkommen ausdehnungsfähigen Wand eingeschlossenen Flüssigkeitscylinders die Querdilatation gleich sei der durch den Druck hervorgebrachten Verkürzung, das heisst, dass das Volum ungeändert dasselbe sei, sondern dass auch dort eine Volumänderung eintrete und zwar gerade so, wie bei den festen Körpern. Ist diese Annahme gestattet, so muss die Verbreitung des Schalles in einer Flüssigkeitssäule sich zu derjenigen in einer unbegrenzten Flüssigkeit verhalten wie diejenige in einem Stabe zu der Geschwindigkeit in einer unbegrenzten Masse. Wertheim beobachtete nun die Geschwindigkeit des Schalles in einer Flüssigkeitssäule. Die Versuche von Colladon und Sturm sowie die Theorie gaben die Geschwindigkeit in einer unbegrenzten Flüssigkeit. Die Wertheim'sche Zahl mit  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  multiplicirt, muss dann mit den frühern Zahlen übereinstimmen.

In der That ist nun

$$1173,4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1437,1 \text{ Meter,}$$

so dass diese Coincidenz der auf diese Weise von Wertheim berechneten Zahl dafür spricht, dass das von ihm für feste Körper theoretisch abgeleitete Gesetz auch für Flüssigkeiten gültig ist, dass demnach die Gleichheit des Druckes in allen Richtungen nicht bei den Schallschwingungen stattfindet, vielmehr eine flüssige Säule, welche longitudinal vibriert, denselben Ton gibt wie ein starrer Körper, dessen Materie dieselbe kubische Compressibilität besitzt wie die Flüssigkeit.

Daraus folgt, dass die Gesetze des Gleichgewichts starrer Körper auch für Flüssigkeiten gelten, während eines sehr kurzen Zeitabschnittes nach Anlegung äusserer Kräfte.

Ist dieses Verhältniss zwischen den beiden Geschwindigkeiten einmal festgestellt, so können wir für alle übrigen Flüssigkeiten aus der Schallgeschwindigkeit in einer Säule die Geschwindigkeiten in einer unbegrenzten Masse und die Compressibilität der Flüssigkeiten berechnen. Diese letztere ist für eine grosse Menge von Flüssigkeiten bereits direkt bestimmt; der Vergleich der nach beiden Methoden erhaltenen Werthe der Compressibilität würde also ein neues Mittel sein, die Wertheim'schen Voraussetzungen und die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit zu bestätigen.

Wertheim hat für eine Reihe von Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeiten bestimmt und daraus die Compressibilität der Flüssigkeiten berech-

net. Seine Resultate, mit denen von Grassi (§. 62) zusammengestellt, gibt folgende Tabelle:

Flüssigkeit	Temperatur	Dichte	Schalgeschwindigkeit in der		Compressibilität nach	
			Säule	unbegrenzten Flüssigkeit	Wertheim	Grassi
			Meter	Meter		
Seinewasser	15 <sup>o</sup> ,0	0,9996	1173,4	1437,1	0,0000491	—
do.	30,0	0,9963	1250,9	1528,5	0,0000433	—
do.	40,0	0,9931	1324,8	1622,5	0,0000388	—
do.	60,0	0,9901	1408,2	1724,7	0,0000346	—
Meerwasser	20,0	1,0264	1187,0	1453,8	0,0000467	0,0000445
Lösung v. Kochsalz 36,90 %	18,0	1,1920	1275,0	1561,6	0,0000349	0,0000321
Lösung v. schwefels. Natron 13,35 %	20,0	1,1089	1245,2	1525,1	0,0000393	—
„ 20,27 %	18,8	1,1602	1292,9	1583,5	0,0000348	—
Lösung v. kohleus. Natron 20,7 %	22,2	1,1	1301,8	1594,4	0,0000337	0,0000303
Lösung v. salpeters. Natron 37,5 %	20,9	1,2066	1363,5	1669,9	0,0000301	0,0000306
Lösung von Chlor- calcium 76,5 %	22,5	1,4322	1616,3	1979,6	0,0000181	0,0000209
Alkohol 36 <sup>o</sup> B.	20,0	0,8362	1049,9	1285,9	0,0000733	—
Alkohol absol.	23,0	0,7960	947,0	1159,8	0,0000947	0,0000991
Terpentinöl	24,0	0,8622	989,8	1212,3	0,0000800	—
Schwefeläther	0,0	0,7529	946,3	1259,0	0,0001002	0,000111

Man sieht, wie die direkt erhaltenen Zahlen mit den Wertheim'schen sehr gut stimmen, so dass wir berechtigt sind, dessen Annahme über die Geschwindigkeit des Schalles in den betreffenden Flüssigkeiten als richtig anzunehmen.

## §. 164.

**Reflexion des Schalles.** Wenn eine schwingende Bewegung sich in einer unbegrenzten Punktreihe oder einem Punktsystem fortpflanzt, so kehrt sie nicht zurück, indem jeder Punkt an den folgenden seine ganze Bewegung überträgt; wenn aber die Bewegung an einer Grenze ankommt, wo die Elasticität oder die Dichtigkeit des Punktsystems sich ändert, so tritt an dieser Stelle eine Theilung der Bewegung ein, ein Theil geht in das zweite Mittel über, ein Theil kehrt als reflectirte Bewegung in dem ersten Mittel zurück. Die Gesetze dieser Reflexion haben wir §. 125 kennen gelernt und gesehen, dass eine kugelförmige Welle von einer ebenen Grenzfläche so zurückgeworfen wird, als käme sie von einem Punkte, der ebensoweit hinter der Fläche liegt, als der Mittelpunkt der Bewegung vor der Fläche liegt. Jeder Radius der zurückgeworfenen Kugel bildet daher mit der Grenzfläche denselben Winkel als der die Fläche an derselben Stelle treffende Radius der einfallenden Kugel, oder der Winkel, welchen der ein-

fallende Wellenstrahl mit der Normale der reflectirenden Fläche, mit dem Einfallslothe bildet, ist gleich dem Winkel, welchen der reflectirte Wellenstrahl mit derselben Richtung bildet.

Da nun der Schall eine Wellenbewegung eines elastischen Mittels ist, so muss das Reflexionsgesetz des Schalles ganz mit dem der Wellen identisch sein. Ein an einer festen Wand in der Luft ankommender Schall wird so zurückgeworfen, dass der zurückgeworfene Schallstrahl mit dem Einfallslothe denselben Winkel bildet als der ankommende Schallstrahl.

Trifft demnach ein Schallstrahl senkrecht gegen eine feste Wand, so wird er genau in derselben Richtung zurückgeworfen. Es ist bekannt, dass man im Echo den zurückgeworfenen Schall wahrnehmen kann. Steht man in einiger Entfernung vor einer festen Wand und ruft man gegen dieselbe, so hört man nach einiger Zeit denselben Ton von der Wand zurückkehren. Damit man nun aber den zurückgeworfenen Ton unterschieden von dem direkten Tone wahrnimmt, ist eine gewisse Zeit nothwendig. Die Erfahrung zeigt, dass man in einer Sekunde 10 Töne nach einander wahrnehmen kann, oder vielmehr deutlich unterscheiden kann, dass aber, wenn mehr Töne unser Ohr treffen, der Eindruck ein verworrener wird.

Es muss daher zwischen dem direkten und reflectirten Schalle 0,1 Sekunde liegen, wenn wir das Echo deutlich von dem primär erzeugten Tone unterscheiden sollen. Der Schall durchläuft nun in 1 Sekunde 331 Meter in der Luft, in 0,1 Sekunde also 33,1 Meter; befinden wir uns also 17 Meter von einer festen Wand, so wird der Ton, um zur Wand und wieder zu uns zurück zu gelangen, 0,1 Sekunde brauchen, wir hören also das Echo; rücken wir näher, so fällt es zum Theil mit dem direkten Tone zusammen, wir hören daher nur ein Verhalten des direkten Tones; entfernen wir uns von der Wand, so verfließt eine grössere Zeit, in einer Entfernung von 34 Meter 0,2 Sekunden und so fort. In der Entfernung von 34 Meter können wir daher auf den ersten Ton noch einen zweiten folgen lassen, der 0,1 Sekunde dauert und erst 0,1 Sekunde später wird der erste zurückgeworfene Ton, also noch deutlich unterscheidbar, zu uns gelangen. In der Entfernung von 34 Meter von der festen Wand wird also das Echo ein sogenanntes zweisilbiges, in noch grösserer Entfernung ein drei- und mehrsilbiges.

Ein mehrfaches Echo, das heisst die mehrmalige Wiederkehr desselben Tones tritt dann auf, wenn eine Anzahl reflectirender Flächen vorhanden ist, welche alle von den in einem bestimmten Punkte erzeugten Schallwellen senkrecht getroffen werden. Wie die Flächen dazu gegen einander stehen müssen, und dass im Allgemeinen nur ein bestimmter Ort das mehrmalige Echo hört, ist ohne Weiteres klar.

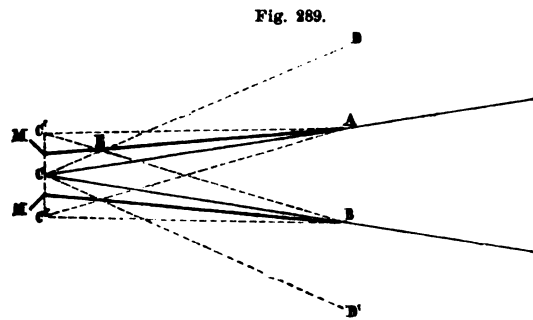
Was früher von der Reflexion der Wellen an krummen Flächen gesagt wurde, gilt auch von der des Schalles, das Reflexionsgesetz bleibt dasselbe. Daraus erklärt sich die bekannte Erscheinung, dass in einem elliptischen Gewölbe der an einem Brennpunkte erregte Schall in dem andern Brennpunkte mit fast ungeänderter Stärke vernommen wird.

Eine Folge der Reflexion des Schalles ist das Verhalten der Töne in einem rings begrenzten grossen Raume und die daraus hervorgehende Undeutlichkeit einer geordneten Reihe von Tönen, z. B. einer Rede. Das gesprochene Wort wird von den entfernten Wänden so zurückgeworfen, dass der reflectirte Schall zum Theil noch mit dem direkten, zum Theil, wenn

nicht sehr langsam gesprochen wird, mit dem des folgenden Wortes zusammenfällt, und besonders das letztere undeutlich macht. Alles was den reflectirten Schall stört, wird daher die Deutlichkeit des Hörens in solchen Räumen vermehren. Ist der Raum mit Menschen gefüllt, so hört man deutlicher, da dann die reflectirten Wellen selbst wieder vielfach reflectirt werden, und so ihre Regelmässigkeit gestört wird. Je kleiner ferner der Dichtigkeitsunterschied zwischen der Luft und den Wänden des Raumes ist, um so schwächer sind die reflectirten Wellen. Eine Bekleidung der Wände mit weichen, wenig dichten Stoffen schwächt daher die reflectirten Wellen und vermehrt die Deutlichkeit des Hörens. Indess wird dadurch auch die Stärke des Schalles durch den Mangel der sofort zu betrachtenden Resonanz geschwächt, deshalb ist das Mittel in Räumen, in welchen der Schall zugleich kräftig und deutlich sein soll, wie in Concertsälen, Theatern, nicht anzuwenden.

Verhindert man, dass die von den verschiedenen Wänden reflectirten Schallwellen nach der gleichen Richtung zurückgeworfen werden, so können sich dieselben nicht verstärken, sie werden daher in dem Falle möglichst wenig stören. Das erreicht man, indem man dem Raume einen rechteckigen Grundriss ertheilt und nur gerade Wände gibt. Von geraden Wänden werden die von einem Punkte ausgehenden Schallwellen alle divergirend zurückgeworfen. Es ist indess ein noch ungelöstes Problem, welches die Form eines Raumes ist, in welchem eine Reihe erzeugter Töne am besten und deutlichsten klingt.

Eine vielfach gebrauchte Anwendung der Reflexionsgesetze ist das Sprachrohr. Dasselbe hat den Zweck, Rufe in Entfernungen noch deutlich hörbar zu machen; in denen sie bei ungehinderter Verbreitung des Schalles zu schwach werden. Die einfachste Form eines solchen Apparates ist ein konisches Rohr von Pappe oder Metall, die Materie ist ohne Einfluss. Man legt die Lippen in ein Mundstück (Fig. 289), welches sich an der Spitze



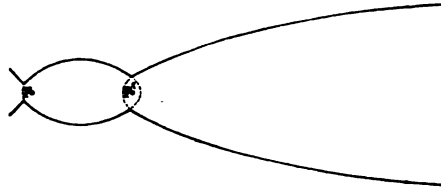
des Kegels befindet, und man spricht in das Rohr hinein, indem man es nach der Seite hinrichtet, nach welcher hin man den Schall werfen will. Sei z. B. der Ton in dem Mittelpunkte  $C$  des Mundstückes erzeugt, so wird sich der Theil  $CAB$  der Schallwelle, welcher durch den Kegel begrenzt ist, dessen Mittelpunkt  $C$

und dessen Basis der Umfang  $AB$  des konischen Rohres ist, ungehindert ausbreiten. Derjenige Theil der Welle aber, welcher in dem Winkel  $DCA$  liegt, wird an den verschiedenen Punkten der Wand  $MA$  reflectirt und pflanzt sich fort, als käme er von dem Punkte  $C'$  als Strahlenkegel  $C'AB$ . Auch diese Schallstrahlen werden somit innerhalb des Kegels  $CAB$  sich fortpflanzen und den Schall nach der Richtung der Axe des Rohres verstärken. Gleiches gilt von dem Strahlenkegel  $BCD'$ , und man sieht, dass

schliesslich der ganze zwischen  $DCD'$  liegende Theil der Welle in einem kleinern Kegel condensirt ist, dass dieser Theil der Schallwelle, anstatt sich im Raume  $DCD'$  auszubreiten, den Schall in der Axe des Kegels verstärken wird. Diejenigen Schallstrahlen, welche die Wand noch näher bei  $M$  treffen als der Strahl  $CD$ , können durch mehrmalige Reflexion zunächst an der Wand  $MA$ , dann an der Wand  $MB$  und wieder an der Wand  $MA$  nach derselben Richtung geworfen werden, und so ebenfalls zur Verstärkung des Schalles beitragen.

Lambert<sup>1)</sup> hat den Vorschlag gemacht, das konische Sprachrohr durch ein anderes zu ersetzen, das aus zwei krummen Flächen, einem Ellipsoid und einem Paraboloid zusammengesetzt ist. Das Mundstück ist so eingerichtet (Fig. 290), dass der Mund des Rufenden sich in dem einen Brennpunkte  $F$  des Ellipsoides befindet, die sämtlichen Schallstrahlen werden dann in dem andern Brennpunkte des Ellipsoides  $F'$  vereinigt und schreiten von diesem fort auf die Wand des paraboloidischen Stückes des Sprachrohrs. Der Brennpunkt  $F'$  ist zugleich der Brennpunkt der Parabel, und da die sämtlichen Leitstrahlen, welche man von  $F'$  an die verschiedenen Punkte des Paraboloides zieht, mit den an eben diesen Punkten gezogenen Normalen der Fläche dieselben Winkel bilden, welche durch diese Punkte parallel mit der Axe gezogene Linien mit der Normale einschliessen, so werden alle von  $F'$  ausgehenden, das Paraboloid treffenden Schallstrahlen parallel der Axe reflectirt. Der Schall wird also ohne grosse Schwächung nach der Richtung der Parabelaxe sich fortpflanzen.

Fig. 290.



## §. 165.

**Uebergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz.** Wenn eine schwingende Bewegung an der Grenze zweier Mittel ankommt, so geht, wie wir früher sahen, die schwingende Bewegung nicht nur im ersten Mittel als reflectirt zurück, sondern sie geht auch in das zweite Mittel hinüber und pflanzt sich dort mit der für dieses Mittel gehörigen Geschwindigkeit weiter fort. Kommt die Welle, welche wir als eben voraussetzen wollen, in einer gegen die Grenzfläche geneigten Stellung an, so ist die Wellenebene im zweiten Mittel nicht derjenigen im ersten Mittel parallel, sondern dagegen geneigt. Der Wellenstrahl wird also gebrochen, das Gesetz, nach welchem das geschieht, war folgendes:

- 1) Der gebrochene Wellenstrahl liegt mit dem einfallenden in derselben Ebene.
- 2) Der Sinus des Winkels  $i$ , den der einfallende Wellenstrahl mit dem Einfallslothe bildet, verhält sich zum Sinus des Brechungswinkels  $r$  wie

<sup>1)</sup> Lambert, Memoiren der Berliner Akademie 1763.

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im ersten Mittel  $c$  zu der im zweiten Mittel  $c'$ , oder

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{c'}$$

Dass der Schall nach diesem Gesetze gebrochen wird, hat durch ausgedehnte Versuchsreihen Hajech<sup>1)</sup> nachgewiesen. Hajech führte eine Röhre von 77 Millimeter Weite und veränderlicher Länge durch die Scheidewand zweier benachbarter Säle. Die beiden Enden dieser Röhre wurden durch Membranen geschlossen. Eine zweite Röhre, deren Axe in der Verlängerung der ersten lag, auf welche sie eingestellt war, endigte in einer Büchse, in welcher das tönende Instrument, Glocken verschiedener Grösse, eingeschlossen wurde. Der Beobachter hielt sich in dem zweiten Saale auf, auf dessen Parketboden ein Kreisbogen gezogen und graduirt war, dessen Mittelpunkt sich vertical unter dem Ende der Röhre befand. Bei einer ersten Reihe von Versuchen wurden die Membranen senkrecht zur Axe der Röhre gestellt, welche sie verschlossen und die Röhre mit Luft oder andern Gasen gefüllt. Der Schall wurde nicht abgelenkt, sondern am stärksten in der Verlängerung der Röhrenaxe wahrgenommen. Da der Schall in der Axe der Röhre sich bewegte, so traf er senkrecht auf beide Grenzflächen der Röhre; nach dem Brechungsgesetz darf keine Ablenkung eintreten.

Darauf wurde die Membran in dem dem Beobachter zugewandten Ende der Röhre gegen die Axe geneigt, an der andern Seite blieb sie senkrecht. Dort traf also der in der Axe ankommende Schallstrahl wieder senkrecht auf die Grenzfläche, der Einfallswinkel war 0, also auch der Brechungswinkel, der Schall bewegte sich einfach in der Axe der Röhre weiter, mit welcher Substanz dieselbe auch gefüllt war. Der Strahl traf dann die zweite Fläche unter demselben Winkel, den die Membran mit der Axe bildete; der Einfallswinkel war also der Winkel, der diesen zu 90° ergänzte, er wurde einfach durch eine Messung des ersten Winkels erhalten.

Wurde nun die Röhre mit Luft gefüllt, so trat auch dann keine Ablenkung ein, da innerhalb und ausserhalb der Röhre dasselbe Mittel war, der Schall sich also mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegte. Wurde aber das Rohr mit einem andern Gase oder einer Flüssigkeit gefüllt, so trat eine Ablenkung ein. Dieselbe wurde beobachtet dadurch, dass der Beobachter sein Ohr in gleicher Höhe mit dem Ende der Röhre hielt und auf dem Kreisbogen so lange seine Stelle veränderte, bis er den Schall am stärksten wahrnahm, dann von seinem Ohre ein Loth auf den Kreisbogen herabliess und den Winkel bestimmte, den der zu dem getroffenen Punkte gehörige Radius des Kreises mit dem Einfallslothe bildete. Da dieser Radius die Richtung des austretenden Schalles angab, so bestimmte dieser Winkel den Brechungswinkel.

Hajech erhielt auf diese Weise folgende zugehörige Einfallswinkel- und Brechungswinkel; die letzte Columnne, welche die nach der Formel

$$\sin r = \frac{c'}{c} \cdot \sin i$$

aus den gegebenen Winkeln  $i$  berechneten  $r$  enthält, zeigt die Uebereinstimmung der Resultate mit dem Brechungsgesetz:



<sup>1)</sup> Hajech, Nuovo Cimento März 1857. Poggendorff's Annalen Bd. CIII.

Substanzen in der Röhre	Einfallswinkel	Brechungswinkel	
		beobachtet	berechnet
Wasserstoff . . . . .	35° 50'	8°	8° 50'
„ . . . . .	25°	7°	6° 22'
Ammoniakgas . . . . .	41°	29° 20'	30° 22'
„ . . . . .	35° 50'	25°	26° 50'
Leuchtgas . . . . .	35° 50'	25° 40'	—
Kohlensäure . . . . .	35° 50'	49° 50'	48° 19'
„ . . . . .	25°	33° 20'	32° 33'
Brunnenwasser . . . . .	35° 50'	7° 40'	7° 58'
„ . . . . .	25°	5° 40'	5° 37'
Gesätt. Kochsalzlösung	35° 50'	6° 15'	
„	25°	5° 10'	

Man sieht, wie die Beobachtung das Gesetz bestätigt, welches sich aus der Theorie der Wellenbewegung ergeben hat.

Wenn eine schwingende Bewegung in eine dünne Schicht eines zweiten Mittels übergeht und sich in derselben bis an die Grenze fortgepflanzt hat, so tritt beim Austritt in das erste Mittel aus der zweiten Grenze eine theilweise Reflexion der Bewegung ein und die reflectirte Welle kehrt in der Schicht zur ersten Grenze wieder zurück; wenn nun durch die erste Grenze immer neue und neue Bewegungen in das zweite Mittel übergehen, so können sich diese mit den in dem Mittel reflectirten zusammensetzen und stehende Wellen derselben Periode als die ankommende Welle erzeugen, gerade so wie in einem longitudinalschwingenden Stabe solche stehende Wellen durch Interferenz der direkt erregten Wellen und der an der einen Grenze reflectirten entstehen.

Man kann sich davon durch eine ganze Reihe von Versuchen überzeugen. Spannt man auf einem Monochord zwei Saiten vollständig im Einklang auf und setzt dann unter die eine einen Steg, so dass man  $\frac{1}{4}$  der Saite absondert und streicht dann dieses  $\frac{1}{4}$  mit dem Bogen an, so erhalten wir die zweite Octave des Tones der ganzen Saite, indem dadurch sich die ganze Saite in vier gleiche schwingende Theile zerlegt. Sofort zeigt sich dann, dass auch die zweite nicht abgetheilte Saite mit der ersten isochron schwingt, denn hält man die erste rasch fest, so hört man noch eine Zeit lang genau denselben Ton auf der zweiten Saite, und bringt man auf die zweite Saite kleine Papier-Reiterchen, so werden dieselben abgeworfen, ausser an den Stellen der Schwingungsknoten.

Wenn man in einem Raume ein Klavier oder eine Violine oder irgend ein Saiteninstrument aufstellt und bringt nun in deren Nähe einen Ton hervor, der ein harmonischer Ton einer der Saiten dieser Instrumente ist, so hört man sie auf das deutlichste mitklingen. Bei Anwendung eines Klavieres bekommt man bei gehobenem Dämpfer auf jeden hineingesungenen Ton einen Nachhall, der nicht nur diesen Ton, sondern auch die harmonischen Obertöne deutlich enthält.

Ebenso geben Pfeifen und Gläser, überhaupt eingeschlossene Luftsäulen, Töne an, wenn man einen ihrer harmonischen Töne in der Nähe erzeugt.

Wenn sich auf diese Weise durch den Einfluss einer schwingenden Bewegung in benachbarten Körpern stehende Schwingungen erzeugen, so



ist unmittelbar ersichtlich, dass an jeder Grenzstelle die Erscheinungen sehr complicirt werden, und dass sich deshalb nicht leicht eine Theorie geben lässt über die Form der Schwingungen in den mitschwingenden Körpern. Das aber lässt sich leicht erkennen, dass kräftiges Mitschwingen eines Körpers, also kräftiges Mittönen, nur dann eintreten kann, wenn die in dem mitschwingenden Körper eintretenden Schwingungen dort stehende Wellen geben können, wenn also der ankommende Ton einer der Eigentöne des mitschwingenden Körpers ist. In der Beziehung besteht ein grosser Unterschied in der Stärke des Mittönens, je nachdem der mitschwingende Körper die durch einen einmaligen Anstoss ertheilten Schwingungen lange beibehält oder schnell wieder verliert. Ein schwingender Körper, der seine Bewegung lange beibehält, wie eine Stimmgabel, oder alle starren elastischen Körper, wird nur merklich mittönen, wenn der ankommende Ton ein Eigenton des schwingenden Körpers ist, denn bei einer sehr kleinen Verstimmung des ankommenden Tones müssen sich die Eigenschwingungen des Körpers und die ankommenden Schwingungen stören, da sie verschiedener Phase werden. Wenn dagegen die Schwingungen des mitschwingenden Körpers, wie etwa bei wenig gespannten, sehr feinen Membranen, sehr rasch an Intensität abnehmen, so kann ein solcher Körper auch in merkliche Schwingungen versetzt werden, wenn der ankommende Ton auch von dem Eigenton desselben verschieden ist. Denn wenn ein Körper die in Folge eines ersten Anstosses entstehende Bewegung schon nach wenigen Schwingungen verliert, so wird jeder neue Anstoss ihm Bewegung ertheilen, wenn auch die ankommende Bewegung in etwas anderer Phase ist als jene in Folge des vorhergehenden Anstosses, somit als der geringe Rest der noch in dem Körper vorhandenen schwingenden Bewegung.

Man kann diese Schlüsse leicht experimentell bestätigen; das Extrem nach der einen Richtung bildet etwa eine Stimmgabel, welche durch den Ton einer andern Stimmgabel kaum mehr zum Tönen gebracht wird, wenn derselbe nur um ein oder zwei Schwingungen anders ist. Man nehme zwei Stimmgabeln, die den Ton  $c_1$ , also 522 Schwingungen in der Sekunde geben, beide auf Resonanzkasten stehend, so wird, wenn die Stimmung beider genau die gleiche ist, die andere kräftig mittönen, wenn man die eine anstreicht. Dann verstimme man die eine durch Aufkleben von Wachs, so dass sie nur ein oder zwei Schwingungen weniger macht, was man an den in einem der nächsten Paragraphen zu besprechenden Stössen leicht erkennen kann, man wird dann kaum noch ein Mittönen erhalten. Das Extrem nach der andern Seite bilden die Membranen in den König'schen Flammkapseln, bei denen kaum Eigenschwingungen vorkommen, bei denen jeder Anstoss nur eine Schwingung bewirkt, eine solche Membran nimmt daher jede Schwingung auf, welche sie trifft.

Helmholtz<sup>1)</sup> hat die Beziehung zwischen der Dauer des Nachklingens eines einmal in Schwingung versetzten Körpers und der Intensität des Mittönens genauer untersucht. Er gelangt dabei zu folgenden Resultaten.

Wenn wir die Intensität des Tones, der in einem mitschwingenden Körper durch genauen Einklang erzeugt wird, als Einheit setzen, so wird durch einen Ton, der um  $\frac{1}{8}$  Ton tiefer oder höher ist, die Tonstärke des

<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 220 und Beilage X.

mittönenden Körpers gleich 0,1, wenn der mittönende Körper nach 38 Schwingungen nur mehr 0,1 der Tonstärke besitzt, die ihm durch einen einmaligen Anstoss gegeben ist. Nimmt die Intensität der Eigenschwingungen so rasch ab, dass die Stärke des Tones, wenn der mittönende Körper für sich erregt wird, schon nach 19 Schwingungen auf 0,1 herabsinkt, so bewirkt ein Ton, der  $\frac{1}{4}$  Ton höher oder tiefer ist, in dem mittönenden Körper einen Ton, der 0,1 der Stärke des durch genauen Gleichklang erzeugten Tones besitzt. Die gleiche Tonstärke des Mitschwingens tritt ein durch Töne, welche verschieden sind um

$\frac{1}{2}$ Ton, wenn die Intensität des Eigentones nach 9,5 Schwingungen	
$\frac{3}{4}$ " " " " " " " "	6,33 "
1 " " " " " " " "	4,75 "
$\frac{5}{4}$ " " " " " " " "	3,80 "
kleine Terz, " " " " " " " "	3,17 "
$\frac{7}{4}$ Ton, " " " " " " " "	2,71 "
grosse Terz, " " " " " " " "	2,37 "

auf 0,1 der durch einen Anstoss erregten ursprünglichen Tonstärke herabgesunken ist. Man sieht also, dass nur solche Körper, in denen die einmal erregten Schwingungen sehr rasch an Stärke abnehmen durch Töne, welche von ihren Eigentönen verschieden sind, in merkliche Mitschwingungen versetzt werden, dass also starr elastische Körper nur dann merklich mittönen, wenn einer ihrer Eigentöne erklingt. In solchen mitschwingenden Körpern ist also die Tonhöhe gleich derjenigen des erregenden Tones. Ferner ergibt sich aus den Versuchen von Savart<sup>1)</sup> der wie es scheint allgemeine Satz, dass die mitgetheilten Schwingungen stets parallel sind den ankommenden. Von den vielen Versuchen Savart's führen wir nur folgenden an. Ein feiner Streifen von Holz wird an seinem einen Ende an einem auf einem Boden aufgesetzten Holzstück befestigt (Fig. 291), an

Fig. 291.



seinem andern Ende ist eine gespannte Saite befestigt. Wenn man nun der gespannten Saite mittels eines Violinbogens eine schwingende Bewegung ertheilt, senkrecht zur Ebene des Streifens, so geräth der Streifen in transversale Schwingungen, wie man aus der hüpfenden Bewegung des Sandes auf dem Streifen ersieht. Wenn man aber die Saite in einer mit der Ebene des Streifens parallelen Richtung in Schwingung versetzt, so schwingen die Theile des Streifens in der Ebene desselben hin und her. Sand auf den Streifen gestreut, erhält keine hüpfende, sondern nur eine gleitende Bewegung.

Da die Tonhöhe durch die an starr elastische Körper übertragenen Mitschwingungen, wie wir eben ableiteten, nicht geändert wird, so benutzt man in der Musik diese Erscheinung, um schwachen Klängen durch Reso-

<sup>1)</sup> Savart, Annales de chim. et de phys. XIX.

nanz eine bedeutende Stärke zu verleihen. Eine Saite einfach in Schraubstöcke von Blei eingespannt, gibt nur einen schwachen, kaum hörbaren Ton. Wenn man sie dagegen auf einer Platte elastischen Holzes ausspannt, mittels elastischer Halter daran befestigt und mittels Stege von elastischem Holze damit in Verbindung setzt, so wird durch die Resonanz der Platte der Ton sehr bedeutend verstärkt.

Der Klang einer Geige verdankt seine Kraft nur der Resonanz des Bodens, auf welchem die Saiten ausgespannt sind; ebenso ist beim Klaviere die Stärke des Tones wesentlich abhängig von der Güte des mitschwingenden Resonanzbodens, mit welchem die Saiten durch den Steg, durch welchen sie gezogen sind, in Verbindung stehen. Ebenso eine Stimmgabel gibt einfach in der Luft gehalten einen äusserst schwachen kaum hörbaren Ton, derselbe wird aber sehr kräftig, wenn man die Gabel wie in Fig. 258 auf einen Resonanzkasten stellt, einen Kasten von elastischem Holze, dessen Luftsäule den Ton der Gabel gibt, oder wenn man sie auf den Resonanzkasten einer Geige oder überhaupt auf eine elastische Platte stellt.

Diese tonverstärkende Wirkung der mitschwingenden Platte erklärt sich unmittelbar aus den Gesetzen der Mechanik. So lange Saiten oder transversal schwingende Stäbe von kleiner Ausdehnung allein in der Luft schwingen, setzen sie nur kleine Luftmengen in Bewegung, wenn sie aber mit ausgedehnten elastischen Flächen in Verbindung diese in isochrone Mitschwingungen versetzen, wird durch diese Schwingungen eine viel grössere Luftmenge in Schwingung versetzt, und mit der Masse der schwingenden Theilchen wächst die Intensität des Tones.

Was aber an Intensität des Tones gewonnen wird, das geht an Dauer verloren; eine Stimmgabel oder eine gespannte Saite behalten, wenn sie für sich schwingen, ihre Bewegung lange bei, mit einem Resonanzboden verbunden, verlieren sie ihren Ton sehr rasch.

Nach dem Vorigen sieht man nun auch, welche Instrumente, um klingend zu werden, mit einem Resonanzboden verbunden werden müssen, welche nicht; alle diejenigen, welche den Ton durch Schwingungen von elastischen Streifen oder gespannten Saiten hervorbringen, brauchen einen Resonanzkasten oder Resonanzboden, diejenigen aber, bei denen die Luft direkt in Bewegung gesetzt wird, wie bei den Blasinstrumenten, bedürfen eines tonverstärkenden Mittels nicht.

Die Resonanz verändert die Höhe eines erregten Tones nicht, wohl aber hat sie wesentlichen Einfluss auf den Klang, da die in einem Klange vorhandenen Partialtöne durch Resonanz nicht in demselben Verhältniss verstärkt werden. Der Klang einer Geige ist deshalb ein ganz anderer als der einer freien mit dem Bogen gestrichenen Saite. Ja der Klang der Geige wird ganz wesentlich von der Güte des Resonanzkastens bedingt, indem nur ein sehr elastischer gut gearbeiteter Kasten die höhern Partialtöne ebenso verstärkt als die tiefen.

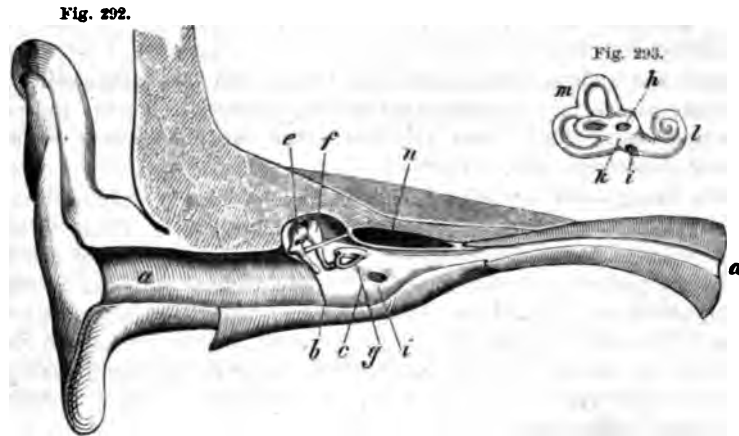
#### §. 166.

**Das menschliche Ohr.** Durch die Mittheilung der schwingenden Bewegung der Luft an die die Gehörnerven umgebenden elastischen Medien und dadurch an den Gehörnerv selbst nehmen wir den Schall wahr.

Das Gehörorgan des Menschen umfasst drei Abtheilungen von Hohlräumen, welche zum grössten Theil in dem festen Knochen des Schläfenbeines eingeschlossen sind, das äussere, mittlere und innere Ohr; die beiden erstern sind mit Luft, das innere Ohr ist mit Wasser angefüllt.

Zum äussern Ohr gehört die Ohrmuschel und der äussere Gehörgang, zum mittlern Ohre die Paukenhöhle und die Ohrtrompete, die tuba Eustachii.

Der äussere Gehörgang *a* (Fig. 292) ist durch das Trommelfell *b*, welches in seinem ganzen Umfange an Knochen angeheftet ist, von der



Paukenhöhle *c* getrennt, diese verengert sich weiterhin zur Ohrtrompete *d*, welche in der Nasenhöhle mündet. Die Höhle des innern Ohres, von der Figur 293 einen Abguss in natürlicher Grösse darstellt, liegt in dem Knochen, welcher die hintere Wand der Paukenhöhle bildet. Zwischen ihr und dem Trommelfell liegt in der Paukenhöhle die Reihe der Gehörknöchelchen.

Der Hammer (malleus) *c* ist mit seinem langen Fortsatz oder Stiel im Centrum des Trommelfelles, ferner in einer Linie von da zum obern Ansatzrande hinauf und nahe dem letztern noch einmal mit seinem kurzen Fortsatze am Trommelfell angeheftet. Ausserdem ist er noch durch einen kurzen Fortsatz, der gerade nach vorn über dem Rande des Trommelfelles hin liegt (und deshalb in der Figur abgeschnitten ist) an der Knochenwand der Paukenhöhle angeheftet.

Sein Kopf, der den obern Rand des Paukenfelles überragt, steht durch ein Gelenk mit dem zweiten Knochen, dem Ambos (incus) *f* (Fig. 292) in Verbindung. Der Ambos ist ausserdem mit einem kurzen (in der Figur hinter dem Hammer liegenden) Fortsatz an der hintern Wand der Paukenhöhle angestützt.

Vom Ambos geht ein langer Fortsatz parallel dem Stiele des Hammers nach unten; an seinem Ende ist der dritte Knochen, der Steigbügel *g* (Fig. 292) befestigt, der horizontal nach hinten liegt. Die Platte, in der seine beiden Leisten zusammenstossen, der Fusstritt, ist an ihrem Rande herum häutig mit dem Rande des ovalen Fensters *h* (Fig. 293) verbunden, welches in der Mitte des hintern Theiles der Paukenhöhle in die Höhle des innern Ohres führt.

Das innere Ohr steht durch zwei Oeffnungen mit der Paukenhöhle in Verbindung durch das ovale Fenster *h*, welches von der Platte des Steigbügels bedeckt ist, und das unterhalb demselben liegende runde Fenster *i*, welches durch eine einfache feine Membran geschlossen ist. Das ovale Fenster führt zum mittlern Theile des innern Ohres, zum Vorhof (vestibulum) *k* (Fig. 293), in welchem dem Fenster und somit der Platte des Steigbügels gerade gegenüber ein Zweig des Gehörnerves einmündet. Vom Vorhof geht nach der einen Seite der spiralig gewundene Gang der Schnecke (cochlea) *l* (Fig. 293) aus, in welchem sich ein besonderer Ast der Nerven von der Axe aus vertheilt. Zur Schnecke führt ausserdem direkt von der Paukenhöhle aus das runde Fenster *i*.

Nach der andern Seite gehen vom Vorhofe die drei halbzirkelförmigen Kanäle *m*, in drei zu einander senkrechten Ebenen gebogen, in je zwei Mündungen aus. Auch diese erhalten durch die eine etwas erweiterte Mündung Aeste des Gehörnerven.

Das Trommelfell ist mit seinem Centrum ein wenig trichterförmig in die Paukenhöhle hinein vertieft und dadurch gespannt. Diese Spannung kann durch eine Drehung des Hammers um die den obern Rand des Trommelfelles tangirende (zur Ebene der Figur senkrechte) Axe des Fortsatzes, mit dem er an die Wand der Paukenhöhle befestigt ist, etwas vermehrt werden. Dadurch rückt das untere Ende seines Stieles dem ovalen Fenster näher, und da die andern Gehörknöchelchen seiner Bewegung einigermassen folgen, so wird dadurch der Fusstritt des Steigbügels etwas in das ovale Fenster hineingetrieben.

Das Wasser des Labyrinthes kann diesem Drucke nur dadurch ausweichen, dass es die das runde Fenster verschliessende Membran gegen die Paukenhöhle hinausdrängt, so dass mit der stärkern Spannung des Trommelfelles auch diejenige dieser Membran wächst.

Im Grossen und Ganzen geht aus der anatomischen Beschreibung des Gehörorgans die Art der Schallwahrnehmung hinlänglich deutlich hervor. Die Schwingungen der Luft theilen sich zunächst dem Trommelfelle mit, das dadurch entweder in longitudinale Schwingungen, wie Johannes Müller annimmt, oder in transversale Schwingungen, bei denen die Membran als solche schwingt, wie andere wollen, versetzt wird. Die Schwingungen des Trommelfelles pflanzen sich dann durch die Reihe der Gehörknöchelchen zum ovalen Fenster und so in die Flüssigkeit des Vorhofes, und durch die Luft der Paukenhöhle zum runden Fenster und in die Flüssigkeit der Schnecke fort. In beiden Flüssigkeiten, der des Vorhofes sowohl, dem ovalen Fenster gerade gegenüber, als auch jener der Schnecke endigen Theile des Gehörnerven.

Aber auch in den halbzirkelförmigen Kanälen endigen Zweige des Gehörnerven, auch diese müssen daher zum Hören beitragen. Es ist nun eine wahrscheinliche Hypothese, dass die durch den Ton erregten Schwingungen der Kopfknochen sich der Flüssigkeit in den halbzirkelförmigen Kanälen mittheilen, und dass diese dann durch die in denselben mündenden Nervenendigungen percipirt werden.

Die neuern anatomischen Entdeckungen über den Bau des innern Ohres, besonders die Art, wie die Nerven dort endigen, von Max Schultze und

dem Marchese Corti haben Helmholtz<sup>1)</sup> in den Stand gesetzt, die Perception des Schalles genauer zu erkennen. Es würde die uns in diesem Buche gestreckten Grenzen weit überschreiten, wollten wir diese Fragen hier ausführlich besprechen; nur einen Punkt müssen wir etwas genauer hervorheben, nämlich wodurch nach der Hypothese von Helmholtz das menschliche Ohr in den Stand gesetzt wird, jeden Klang in seine einzelnen Partialtöne zu zerlegen. Diese Zerlegung findet wahrscheinlich in der Schnecke statt und wird ermöglicht durch die eigenthümlichen Gebilde, mit welchen dort die Nervenendigungen in Verbindung stehen. Die Schnecke ist nämlich ihrer ganzen Länge nach durch eine theils knöcherne, theils membranösen Scheidewand in zwei Hälften getheilt, eine obere und eine untere, die eine mündet im Vorhof, die andere läuft gegen die Paukenhöhle aus und ist durch die Membran des runden Fensters geschlossen. Der knöcherne Theil der Scheidewand befindet sich an der innern Seite der Windungen und durch diesen Theil derselben treten die Nervenfasern in die häutige Membran über, und dort endigen sie an den Corti'schen Fasern, membranösen Streifen, welche an jener häutigen Membran, der membrana basilaris angewachsen, zwischen derselben und einer an der Schneckenwand befindlichen Membran, der Corti'schen Membran ausgespannt sind. Die Breite der membrana basilaris ist in ihrem Beginn eine geringe, sie wächst, je mehr sie sich der Kuppel der Schnecke nähert bis mehr als zum 12fachen. Die Membran selbst besteht aus radialen, sie der Breite nach durchsetzenden ziemlich festen Fasern, welche parallel, in der angegebenen Weise an Länge wachsend neben einander gelagert sind, und welche in der Längsrichtung der Membran viel weniger fest mit einander verbunden sind. Durch diese eigenthümliche Structur, in Folge deren die Membran in der Richtung ihrer Breite sehr viel stärker gespannt ist als in der Richtung der Länge, verhält sich die membrana basilaris annähernd so, als wären ihre Radialfasern ein System von gespannten Saiten, deren membranöse Verbindung nur dazu dient die schwingende Flüssigkeit der Schnecke an dem freien Durchtritt zwischen den Saiten zu hindern, und so zu bewirken, dass die Schwingungen der Flüssigkeit sich auf die Membran übertragen. Es werden deshalb die Bewegungen der einzelnen Fasern der Membran dieselben sein, als wäre jede einzelne unabhängig von den andern und folgte jede für sich den Schwingungen des Wassers in der Schnecke. Für diese radialen Fasern der membrana basilaris mit ihren Anhängen, den Corti'schen Fasern nimmt nun Helmholtz an, dass jede für eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt ist. Danach wird ein in das Ohr eindringender Ton namentlich diejenige Stelle der Membran in Mitschwingungen versetzen, an denen der Eigenton der gespannten und mit den verschiedenen Anhangsgebilden belasteten Radialfasern der Membran dem erregenden Ton am besten entspricht, von da werden sich die Schwingungen in schnell abnehmender Stärke auf die benachbarten Theile ausbreiten. Dass die Fasern, trotz ihrer geringen Länge auf die tiefen Töne der Tonkala abgestimmt sein können, das liegt nach der Annahme von Helmholtz eben in den Anhangsgebilden, welche die Fasern belasten.

<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 198—232.

Durch die Schwingungen der Radialfasern der Membran werden also direkt die mit denselben verbundenen Cortischen Fasern in dieselben Schwingungen versetzt, und damit die in diesen Fasern befindlichen Nerventheile, welche die Empfindung des Tones vermitteln. Es würde demnach für jeden Ton eine bestimmte oder doch eine beschränkte Zahl von Nervenfasern erregt, so dass die verschiedenen Töne von ganz verschiedenen Fasern empfunden werden.

Aus dieser Theorie des Hörens, welche dasselbe als einen speciellen Fall des Mittönens auffasst, erklärt sich zunächst die grosse Empfindlichkeit, welche ein geübtes Ohr für geringe Unterschiede in der Tonhöhe hat, welche nach Angabe von E. H. Weber soweit geht, dass das Ohr Töne als verschieden erkennt, deren Schwingungsverhältniss 1000 : 1001 ist, eine Angabe, welche Cornu und Mercadier<sup>1)</sup> bestätigen. Dieselben geben an, dass ein geübtes Ohr bei der tönenden Saite eines Monochordes, welche die Länge von einem Meter hat, deutlich die Verschiebung des Steges um 1<sup>mm</sup> wahrnehme.

Nach Kölliker enthält nämlich das Ohr etwa 3000 Cortische Fasern. Rechnet man nun etwa 200 auf die Töne, welche ausserhalb der in der Musik gebrauchten Grenzen liegen, so würden für die 7 Octaven, deren Töne in der Musik benutzt werden, 2800 Fasern übrig bleiben, also etwa 400 für jede Octave; nach der Angabe von E. H. Weber würde ein geübtes Ohr etwa 700 Tonstufen innerhalb der Octave zu unterscheiden im Stande sein, also eine noch grössere Zahl, als der für jede Octave vorhandenen Anzahl von Cortischen Fasern entspricht. Das liegt nach Helmholtz daran, dass wenn ein Ton angegeben wird, dessen Höhe zwischen dem zweier benachbarter Cortischer Fasern liegt, dass dann beide in Schwingungen versetzt werden, diejenige aber stärker, deren Eigenton dem angegebenen näher liegt. Die Empfindlichkeit des Ohres für verschiedene Tonhöhen wird also nur von der Feinheit abhängen, mit welcher der Unterschied der Erregungsstärke der beiden Fasern wahrgenommen werden kann. Dieses Einwirken eines Tones auf mehrere Fasern erklärt es auch, dass bei continuirlich steigender Tonhöhe unsere Empfindung sich continuirlich ändert und nicht stufenweise springt, wie es der Fall sein müsste, wenn durch jeden Ton nur eine einzelne Cortische Faser in Schwingung versetzt würde.

Aus dieser Theorie des Hörens ergibt sich weiter, dass wenn ein zusammengesetzter Klang oder Accord dem Ohre zugeleitet wird, dass dann alle diejenigen Fasern erregt werden, deren Eigenton in der Klangmasse vorhanden ist. Da somit die Empfindungen örtlich getrennte sind, so muss bei gehöriger Aufmerksamkeit und Uebung das Ohr die einzelnen Töne auch getrennt auffassen können.

Unser Ohr muss demnach die zusammengesetzten Klänge gerade so in ihre einfachen Bestandtheile zerlegen, wie eine Reihe abgestimmter Resonatoren oder Membranen durch die ihnen entsprechenden Töne eines zusammengesetzten Klanges zum Tönen gebracht werden. Das Hören ist, soweit es physikalisch oder physiologisch definirbar ist, ein specieller Fall des Mittönens.

<sup>1)</sup> *Cornu und Mercadier, Comptes Rendus T. LXVIII. p. 301.*

## §. 167.

**Einfluss der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones.** Wenn wir den durch eine schwingende Bewegung der Luft bestehenden Schall durch die den Nerven mitgetheilten Schwingungen empfinden und die Anzahl der in der Zeiteinheit in das Ohr eindringenden Schwingungen massgebend ist für die Höhe des empfundenen Tones, so muss es auf die letztere von Einfluss sein, ob der Beobachter und das tönende Instrument sich von einander in einer constanten Entfernung befinden, oder ob die beiden sich einander nähern oder von einander entfernen.

Doppler<sup>1)</sup> hat diesen Satz näher verfolgt und kommt zu dem Schlusse, dass, wenn der Beobachter und das tönende Instrument sich nähern, der wahrgenommene Ton höher werden muss, da dann die Eindrücke auf das Ohr sich rascher folgen als im Zustande der Ruhe. Ebenso muss der Ton tiefer werden, wenn der Beobachter und die Tonquellen sich von einander entfernen, da dann die Zahl der in das Ohr eindringenden Wellen eine kleinere wird.

Bezeichnen wir die Länge der Wellen mit  $l$ , die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft mit  $c$ , diejenige, mit welcher der schwingende Körper nach einer Richtung hin bewegt wird, mit  $b$ , so wird nach dieser Richtung hin die Länge der Wellen um  $\frac{b}{c} \cdot l$  verkürzt, nach der entgegengesetzten Seite hin aber um ebensoviel verlängert. Denn hat z. B. der von dem tönenden Körper ausgehende Wellenberg um die Länge einer Welle sich fortgepflanzt, so würde bei ruhendem Instrumente der folgende Wellenberg das Instrument verlassen, und da er von derselben Stelle ausgeht, gerade um die Länge einer Welle von dem ersten entfernt sein. Hat sich aber das Instrument während dieser Zeit in der Richtung der vorschreitenden Welle bewegt, so geht der zweite Wellenberg nach derselben Zeit wie vorhin von einem dem ersten Wellenberge nähern Orte aus, er ist also von dem ersten um weniger als die Länge der Welle bei der Ruhe entfernt, oder die Welle wird kürzer. Nach der andern Seite wird sie aber um ebensoviel länger.

Ist nun die Länge der Welle  $l$ , so ist die Zeit, während welcher der erste Wellenberg um  $l$  sich fortpflanzt, gleich der Schwingungsdauer  $T$ , also, da  $l = c \cdot T$ ,

$$T = \frac{l}{c},$$

und da wir die Geschwindigkeit des tönenden Körpers mit  $b$  bezeichneten, so hat sich derselbe in der Zeit  $T$  um die Strecke

$$b \cdot T = \frac{b}{c} \cdot l$$

in der Richtung der Welle fortbewegt, die Länge der Welle wird also dadurch

$$l \left( 1 \mp \frac{b}{c} \right) = \frac{c}{n} \left( 1 \mp \frac{b}{c} \right),$$

<sup>1)</sup> Doppler, Ueber farbiges Licht der Doppelsterne. Prag 1842.



wenn wir mit  $n$  die Schwingungszahl oder was dasselbe ist, die Anzahl der auf die Strecke  $c$  kommenden Wellen bezeichnen, wenn das Instrument ruht.

Die an einem ruhenden Ort ankommende Schwingungsmenge ist nun gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge, also hier gleich

$$\frac{c}{n \left(1 \mp \frac{b}{c}\right)} = n \cdot \frac{c}{c \mp b},$$

wo das negative Vorzeichen für die Orte gilt, denen sich das Instrument nähert und das positive für die, von denen es sich entfernt.

Wenn andererseits der Beobachter sich gegen das ruhende Instrument bewegt mit einer Geschwindigkeit  $a$ , so werden in der Zeiteinheit nicht nur die Schwingungen in das Ohr kommen, welche den ruhenden Beobachter treffen, sondern auch diejenigen, welche auf der Strecke  $a$  liegen, so dass die Zahl der wahrgenommenen Schwingungen wird

$$n' = n + \frac{a}{l},$$

und entfernt sich der Beobachter

$$n' = n - \frac{a}{l},$$

oder da  $l = \frac{c}{n}$ ,

$$n' = n \pm \frac{a}{l} = n \cdot \frac{c \pm a}{c}.$$

In jedem Falle wird also die Schwingungsmenge, die das Ohr erhält, beim Annähern von Beobachter und Tonquelle grösser, beim Entfernen kleiner; findet das Erste statt, muss der Ton höher, das Zweite, tiefer werden.

Diese Folgerung ist durch die Erfahrung bestätigt.

A. Seebeck<sup>1)</sup> gibt an, dass er in den Papieren seines Vaters eine dahin gehörige Angabe gefunden habe. Ein Schlitten, wie man sie im Gebirge zum jähen Herabrutschen an Bergabhängen gebraucht, gab dem Beobachter Gelegenheit zu bemerken, dass der Ton einer Pfeife, die auf dem Schlitten geblasen wurde, beim Vortüberfahren plötzlich tiefer wurde.

Buy's Ballot<sup>2)</sup> hat eine ausgedehnte Beobachtungsreihe über diesen Punkt angestellt. Auf der Eisenbahn zwischen Utrecht und Maarsen waren möglichst nahe der Bahn mehrere Musiker aufgestellt, welche die Tonhöhe eines auf einem mit der Locomotive vortüberfahrenden Signalhorne gegebenen Tones schätzten; ein anderer auf der Locomotive fahrender Beobachter verglich den Ton der auf den Stationen geblasenen Hörner bei Annäherung und Entfernung der Locomotive mit dem des mitfahrenden Hornes. Die Geschwindigkeit des Wagens wurde bestimmt, indem nach zwei Chronometern die Zeit aufgeschrieben wurde, welche zum Durchlaufen von 100 Metern gebraucht war.

Die Beobachtungen bestätigten im Allgemeinen die Theorie, indem fast

<sup>1)</sup> Seebeck, in Dove's Repertorium Bd. VIII. p. 87.

<sup>2)</sup> Buy's Ballot, Poggendorff's Annalen. Bd. LXVI.

immer Veränderungen der Tonhöhe in dem von der Theorie geforderten Sinne eintraten; eine genaue Uebereinstimmung der berechneten Tonänderungen mit den beobachteten kann bei solchen Versuchen nicht erwartet werden, wo nur eine Schätzung des Beobachters die Aenderung der Tonhöhe bestimmt.

Man kann indess die Erscheinung des Mittönens benutzen, wie zuerst A. Mayer<sup>1)</sup> gezeigt hat, um zu beweisen, dass in der That die Aenderung der Tonhöhe gerade die von der Theorie verlangte ist. Man nimmt zwei genau gleiche Stimmgabeln etwa  $c_2$ , 512 Schwingungen gebend; streicht man die eine an, so tönt die andere kräftig mit. Verstimmt man dann die eine, etwa durch Ueberziehen eines leichten straffen Kautschukringes, so dass sie in der Sekunde zwei Schwingungen weniger macht, so tönt die andere Gabel nicht mehr mit, wenn man die verstimmte anstreicht. Stellt man sich dann aber mit der verstimmten Gabel in einiger Entfernung von der nicht verstimmten auf, bringt erstere zum Tönen, und bewegt sich dann mit der verstimmten tönenden Gabel mit der constanten Geschwindigkeit von etwa 1,2 Meter gegen die andere hin, so kommt dieselbe wieder zum Tönen. Stellt man die verstimmte Gabel auf, so muss man, um dieselbe zum Mittönen zu bringen, die nicht verstimmte mit derselben Geschwindigkeit entfernen. Wenn man dagegen die zweite Gabel nicht verstimmt, so tönt die erste nicht, wenn man mit der tönenden Gabel sich mit der gleichen Geschwindigkeit nähert oder entfernt. Dass diese Bewegungsgeschwindigkeit der Doppler'schen Theorie entspricht, ergibt sich leicht. Es müssen von der verstimmten Gabel her in der Sekunde 512 Schwingungen zur nicht verstimmten Gabel gelangen, während sie selbst in der Sekunde 510 Schwingungen macht. Die Geschwindigkeit  $b$ , mit der sie der nicht verstimmten Gabel genähert werden muss, ergibt sich somit aus

$$512 = 510 \cdot \frac{c}{c - b}.$$

Setzen wir nun die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft bei gewöhnlicher Temperatur rund  $c = 340^m$ , so wird

$$b = 1,21 \text{ M.},$$

wie es vorhin angegeben wurde. Man kann so die Richtigkeit des Doppler'schen Satzes sogar objectiv sichtbar machen, wenn man die Schwingungen der Gabel auf die eine oder andere Weise sichtbar macht.

### §. 168.

**Interferenz des Schalles.** Wenn sich nach einer und derselben Richtung zwei Schallwellen gleicher Länge fortpflanzen, so muss nach der Natur der Wellenbewegung die Resultirende aus den beiden Schallwellen abhängen von der Phasendifferenz, mit welcher die beiden Wellen zusammentreffen.

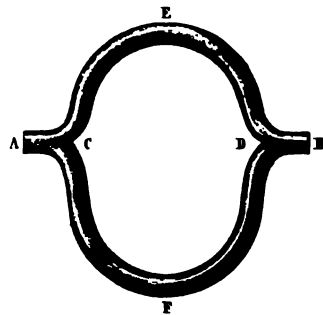
Treffen zwei Schallwellen ohne Phasendifferenz zusammen, so müssen sie sich verstärken, treffen sie dagegen mit einer Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge zusammen, so müssen sie sich aufheben. Dass letzteres

<sup>1)</sup> A. M. Mayer. Poggend Ann. Bd. CXLVI.

in der That der Fall ist, davon kann man sich durch einen einfachen Versuch überzeugen. Bringt man eine Klangscheibe zum Tönen, so dass das diagonale Kreuz entsteht, so schwingen die neben einander liegenden Quadranten gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen, indem, wie wir sahen, die Knotenlinien zwei in entgegengesetzter Phase befindliche Theile der Scheibe trennen. Führt man nun eine solche tönende Scheibe am Ohre vorüber, so verschwindet der Ton jedesmal, wenn das Ohr sich vor einer Knotenlinie befindet. Von dem einen Quadranten wird dann ein Wellenberg ins Ohr gesandt und zugleich von dem andern ein Wellenthal, die Bewegung des Trommelfelles ist daher in Folge der einen Welle die entgegengesetzte derjenigen der andern Welle, die Bewegung und somit der Schall hört auf.

Diesen Fall der Interferenz von Schallwellen hat Hopkins<sup>1)</sup> auf sehr einfache Weise sichtbar gemacht. Er stellte eine Röhre von Pappe oder Holz her, welche unten gabelförmig in zwei Röhren endigte, und deren oberes Ende mit einer feinen Membran überspannt war. Bestreut man die Membran mit etwas trockenem Sand und hält dann die Röhre so über eine tönende Klangscheibe, dass die beiden offenen Enden der Gabel sich über zwei neben einander liegenden Quadranten der Scheibe befinden, so geräth die oben über die Röhre gespannte Membran nicht in schwingende Bewegung, der Sand bleibt ruhig, hält man aber die offenen Enden der Gabel über gegenüber liegende Quadranten, so geräth der Sand in hüpfende Bewegung. Im ersten Falle gehen von den beiden Quadranten zugleich entgegengesetzte Bewegungen in die Röhre, dieselben heben sich auf, im letzten Falle aber gleichgerichtete, sie verstärken sich.

Fig. 294.



In anderer Weise hat Nörremberg<sup>2)</sup> die Interferenz der Schallwellen gezeigt. Ein verzweigtes Rohr von der Form Fig. 294 wurde in eine Wand eingemauert, und auf der einen Seite der Wand ein Ton erzeugt, der nur durch die Luft des Rohrs in den durch die Wand abgetrennten Raum eindringen konnte. Wurde nun eine der beiden Röhren verstopft, so drangen alle Töne durch das Rohr hin-

durch, wurden aber beide geöffnet, so blieben alle Töne aus, für welche die Differenz der Röhrenlängen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge war.

Eine sehr bequeme Form, welche zu einer Reihe verschiedener Versuche brauchbar ist, hat Quincke<sup>3)</sup> dem eben besprochenen Interferenzapparat gegeben. Fig. 295 gibt eine dieser Formen, Fig. 296 eine andere. Die erste in den gleich anzugebenden Dimensionen löscht den Ton  $a_1$  (440 Schwingungen) und alle seine ungeraden Vielfachen aus. Zwei T-förmige Glasröhren  $CAC_1$  und  $CBC_1$  sind an den Enden rechtwinklig ungebogen

<sup>1)</sup> Hopkins, Poggend. Ann. Bd. XLIV.

<sup>2)</sup> Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. Braunschw. 1856. p. 382. Diese Methode ist vorgeschlagen von J. F. W. Herschel, Philosophical Magazin, 3. ser. T. III. 1833. Poggend. Ann. Bd. XXXI.

<sup>3)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII.

und bei  $C$  durch einen kurzen, bei  $C_1$  durch einen langen Kautschukschlauch verbunden. Gibt man dem letztern eine Länge von etwa  $390^{\text{mm}}$ , so entspricht er einer halben Wellenlänge des Tones  $a_1$  in Luft. Das mit einem kurzen Kautschukschlauch versehene Ende  $A$  des Apparates setzt man in den äussern Gehörgang des einen Ohres, verstopft das andere mit einem Siegellackpfropf und lässt den Klang der Stimmgabel durch den langen Kautschukschlauch  $BB_1$  und die verzweigte Röhrenleitung ins Ohr gelangen,

Fig. 295.

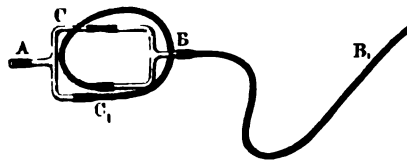
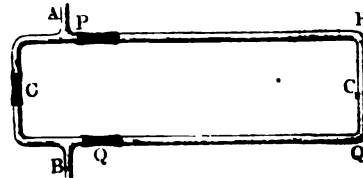


Fig. 296.



indem man die Zinken der angeschlagenen Gabel vor das offene Ende  $B_1$  des Schlauches hält, oder auch den Stiel der Gabel in den Schlauch steckt und die Gabel dann anschlägt. Die dem Grundton der Gabel entsprechenden Wellen löschen sich dann bei  $B$  aus und man nimmt ihn nicht wahr. Drückt man aber bei  $C$  oder  $C_1$  den Kautschukschlauch zu, so dass die Welle nur durch ein Rohr dringen kann, so tritt der Ton kräftig in das Ohr hinein.

Der Apparat Fig. 296 unterscheidet sich von dem eben besprochenen dadurch, dass der lange Kautschukschlauch durch das Glasrohr  $PP_1Q_1Q$  ersetzt ist; indem man eine Reihe solcher Röhren herstellt, die an Stelle dieses mit dem Stücke  $BCA$  verbunden werden, kann man die Interferenzröhre für eine ganze Anzahl von Tönen stimmen.

Von den mannichfachen Versuchen, zu welchen diese Röhren dienen können, erwähnen wir hier nur die Beobachtung der Klangfarbe. Eine solche Röhre löscht nicht nur einen bestimmten Ton aus, sondern auch alle seine ungeradzahigen Obertöne; deshalb löscht eine solche Röhre den Klang einer gedeckten Orgelpfeife ganz aus, es bleibt nur das Blasegeräusch zurück, bei einer offenen Orgelpfeife dagegen ändert sie nur den Klang, da die geraden Partialtöne des Klanges nicht ausgelöscht werden. Man kann deshalb durch eine solche Röhre sofort erkennen, ob in einem Klange nur ungerade, oder ob auch gerade Partialtöne in ihm enthalten sind.

Eine sehr instructive Einrichtung hat König diesen Interferenzröhren gegeben, indem er sie mit seinen manometrischen Flammen in Verbindung setzte. An die Stelle des Ohres bei der Quincke'schen Einrichtung treten die §. 152 Fig. 262 erwähnten kleinen Kapseln mit den Flammen. König's Interferenzröhre ist posaunenartig eingerichtet. Ist die Röhre ganz zusammengeschoben, so sind beide dem eindringenden Tone offene Wege ganz gleich, er dringt in die Kapsel ein und setzt die Flamme in Vibration; zieht man nun die eine Hälfte aus, so wird der eine Weg des Tones länger, und ist er gleich  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge, so heben sich die Schwingungen in der Kapsel auf, und die Flamme brennt ruhig. Indem man auf diese Weise die Länge der Welle eines Tones von bekannter Schwingungszahl messen

kann, liefert der Apparat sogar ein sehr bequemes Mittel, die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

Interferenz des Schalles durch gleichzeitiges Aussenden entgegengesetzt gerichteter Impulse von zwei naheliegenden Orten hat Seebeck<sup>1)</sup> mittels der Sirene sehr deutlich nachgewiesen. Richtet man gegen eine Löcherreihe einer Sirene von den beiden entgegengesetzten Seiten her senkrecht gegen die Scheibe zwei Röhren und zwar so, dass, wenn die eine sich vor einem Loche befindet, die andere sich dem nächsten gegenüber befindet, so erhält man bei gleichzeitigem Anblasen keinen Ton, sondern hört nur das Geräusch der durchströmenden Luft, indem sich die beiden Stösse der Luft nach entgegengesetzter Richtung bei ihrer Fortpflanzung zum Ohre des Beobachters aufheben. Schliesst man aber eine der Röhren, so tritt der der Umdrehungsgeschwindigkeit der Sirene entsprechende Ton hervor. Stellt man die Röhren aber so, dass die Stösse alternirend erfolgen, so also, dass der Abstand der Röhren gleich dem halben Abstände der Löcher ist, so hört man denselben Ton, nur viel stärker.

Wenn man auf einer Scheibe concentrisch zwei Löcherreihen anbringt, von denen die eine doppelt so viel Löcher hat, als die andere, so gibt diese die Octave von dem Tone der letztern, und man hört, wenn beide gleichzeitig und gleichseitig angeblasen werden, in der Regel beide Töne zugleich.

Geschieht jedoch das Anblasen von beiden Seiten her und zwar so, dass jeder Luftstrom des tiefern Tones mit einem Luftstrome des höhern Tones zusammenfällt, so verschwindet der höhere Ton ganz und man hört nur den tiefern.

Es werden in diesem Falle die abwechselnden Impulse des höhern Tones durch die gleichzeitigen des tiefern aufgehoben und die Hälfte der Impulse des höhern Tones erzeugt den tiefern Ton.

Eine sehr interessante Interferenz des Schalles ist von W. Weber bei transversalschwingenden Stäben und Stimmgabeln beobachtet<sup>2)</sup> und später von Kiessling genauer untersucht<sup>3)</sup>. Gehen von zwei Punkten *A* und *B* (Fig. 297), deren Abstand in Bezug auf die Länge der Schallwellen nicht verschwindend klein ist, gleichzeitig Verdichtungen und Verdünnungen aus, so werden sich diese rings um *A* und *B* und zwar, wenn wir nur eine durch *A* und *B* gelegte Horizontalebene betrachten, kreisförmig ausbreiten. Die gleichzeitig von *A* und *B* ausgehenden Kreise werden sich dann in Punkten *C*, *C'* schneiden, welche in einer zu *AB* senkrechten, in der Mitte von *D* errichteten Linie liegen. Die in der Nähe dieser Linie liegenden Lufttheilchen werden dann gleichzeitig immer von einem von *A* ausgehenden Wellenberge und von *B* ausgehenden Wellenthale getroffen, sie werden daher immer in Ruhe sein, auf der ganzen Linie *CD* muss daher der Schall verschwinden.

Wie Kiessling durch genaue Messungen constatirt hat, findet eine solche Interferenz bei jedem parallelepipedischen in transversale Schwingungen versetzten Stabe statt; es tritt dort die Interferenz in einer durch die Axe

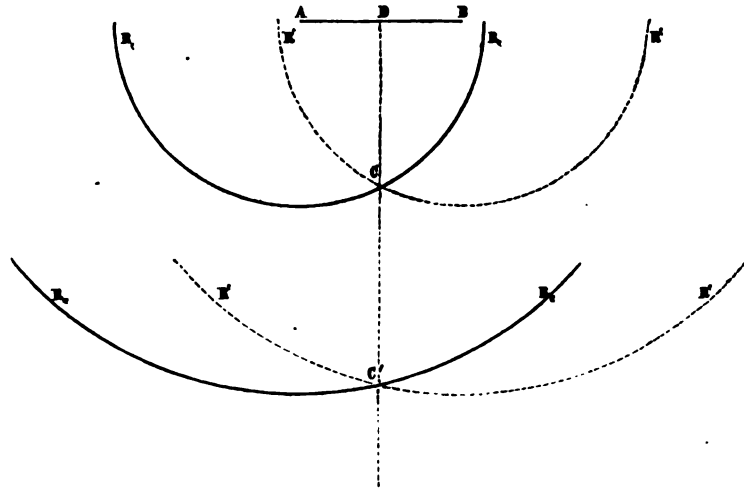
<sup>1)</sup> A. Seebeck, Dove's Repertorium Bd. VI.

<sup>2)</sup> W. Weber, O. C. S. Schweigger und Schweigger Seidel Jahrbuch für Chemie und Physik Bd. XLVIII (18).

<sup>3)</sup> Kiessling, Poggend. Ann. Bd. CXXX.

des Stabes gelegten nahezu zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene auf. Um sie zu beobachten nimmt man am besten einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten ziemlich von einander verschieden sind,

Fig. 297.



damit der Stab parallel der einen Seite schwingend einen wesentlich andern Ton gibt als parallel der andern Seite schwingend. Ein solcher Stab ist einem nahezu quadratischen vorzuziehen, weil, wenn man den Stab parallel einer Seite in Schwingungen versetzt, auch immer Schwingungen parallel der andern Seite auftreten. Ist nun die Dicke des Stabes nach beiden Richtungen nahe dieselbe, so ist der Ton für beide Schwingungsrichtungen auch nahe gleich, und die Beobachtung wird dann durch die im nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöße gestört und unsicher. Man hängt den Stab in zwei Knoten auf und bringt ihn dann durch Streichen mit dem Bogen parallel einer Seite zum Schwingen. Man führt dann in das eine Ohr, während das andere fest verschlossen ist, einen Kautschukschlauch, dessen anderes Ende gerade, das heisst senkrecht zur Schlauchaxe abgeschnitten ist. Führt man dann das untere Ende des Schlauches in einiger Entfernung vom Stabe in einer der Schwingungsrichtung parallelen Richtung an dem Stabe vorüber, so verschwindet der Ton vollständig, sobald die Mitte der untern Schlauchöffnung sich gerade in der durch  $CD$  Fig. 297 und die Stabaxe gelegten Ebene befindet. Wie Kiessling angibt, lässt sich die Lage der Interferenzebene auf diese Weise sehr genau feststellen, da schon eine Verschiebung des Schlauchendes um  $0,1^{\text{mm}}$  genügt, um den Ton wieder hörbar zu machen.

Am leichtesten lassen sich diese Interferenzen an einer Stimmgabel beobachten. Dreht man eine solche sehr rasch vor dem Ohre um den Stiel derselben als verticale Axe herum, so hört man den Ton entsprechend den 4 Interferenzflächen  $J_1 J_2 J_3 J_4$  Fig. 298, viermal verschwinden. Eine genauere Untersuchung der Interferenzflächen in diesem Falle hat Kiess-

kann, liefert der Apparat sogar ein sehr bequemes Mittel, die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

Interferenz des Schalles durch gleichzeitiges Aussenden entgegengesetzt gerichteter Impulse von zwei naheliegenden Orten hat Seebeck<sup>1)</sup> mittels der Sirene sehr deutlich nachgewiesen. Richtet man gegen eine LÖcherreihe einer Sirene von den beiden entgegengesetzten Seiten her senkrecht gegen die Scheibe zwei Röhren und zwar so, dass, wenn die eine sich vor einem Loche befindet, die andere sich dem nächsten gegenüber befindet, so erhält man bei gleichzeitigem Anblasen keinen Ton, sondern hört nur das Geräusch der durchströmenden Luft, indem sich die beiden Stösse der Luft nach entgegengesetzter Richtung bei ihrer Fortpflanzung zum Ohre des Beobachters aufheben. Schliesst man aber eine der Röhren, so tritt der der Umdrehungsgeschwindigkeit der Sirene entsprechende Ton hervor. Stellt man die Röhren aber so, dass die Stösse alternirend erfolgen, so also, dass der Abstand der Röhren gleich dem halben Abstände der Löcher ist, so hört man denselben Ton, nur viel stärker.

Wenn man auf einer Scheibe concentrisch zwei LÖcherreihen anbringt, von denen die eine doppelt so viel Löcher hat, als die andere, so gibt diese die Octave von dem Tone der letztern, und man hört, wenn beide gleichzeitig und gleichseitig angeblasen werden, in der Regel beide Töne zugleich.

Geschieht jedoch das Anblasen von beiden Seiten her und zwar so, dass jeder Luftstrom des tiefern Tones mit einem Luftstrome des höhern Tones zusammenfällt, so verschwindet der höhere Ton ganz und man hört nur den tiefern.

Es werden in diesem Falle die abwechselnden Impulse des höhern Tones durch die gleichzeitigen des tiefern aufgehoben und die Hälfte der Impulse des höhern Tones erzeugt den tiefern Ton.

Eine sehr interessante Interferenz des Schalles ist von W. Weber bei transversalschwingenden Stäben und Stimmgabeln beobachtet<sup>2)</sup> und später von Kiessling genauer untersucht<sup>3)</sup>. Gehen von zwei Punkten *A* und *B* (Fig. 297), deren Abstand in Bezug auf die Länge der Schallwellen nicht verschwindend klein ist, gleichzeitig Verdichtungen und Verdünnungen aus, so werden sich diese rings um *A* und *B* und zwar, wenn wir nur eine durch *A* und *B* gelegte Horizontalebene betrachten, kreisförmig ausbreiten. Die gleichzeitig von *A* und *B* ausgehenden Kreise werden sich dann in Punkten *C*, *C'* schneiden, welche in einer zu *AB* senkrechten, in der Mitte von *D* errichteten Linie liegen. Die in der Nähe dieser Linie liegenden Lufttheilchen werden dann gleichzeitig immer von einem von *A* ausgehenden Wellenberge und von *B* ausgehenden Wellenthale getroffen, sie werden daher immer in Ruhe sein, auf der ganzen Linie *CD* muss daher der Schall verschwinden.

Wie Kiessling durch genaue Messungen constatirt hat, findet eine solche Interferenz bei jedem parallelepipedischen in transversale Schwingungen versetzten Stabe statt; es tritt dort die Interferenz in einer durch die Axe

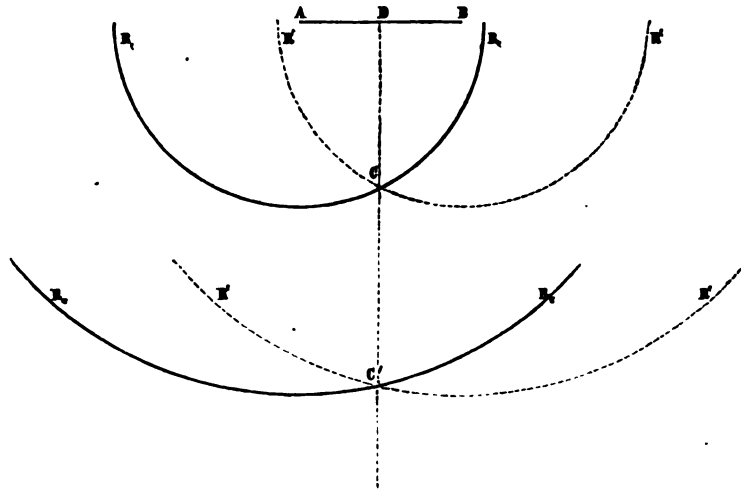
<sup>1)</sup> *A. Seebeck*, Dove's Repertorium Bd. VI.

<sup>2)</sup> *W. Weber*, O. C. S. Schweigger und Schweigger Seidel Jahrbuch für Chemie und Physik Bd. XLVIII (18).

<sup>3)</sup> *Kiessling*, Poggend. Ann. Bd. CXXX.

des Stabes gelegten nahezu zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene auf. Um sie zu beobachten nimmt man am besten einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten ziemlich von einander verschieden sind,

Fig. 297.



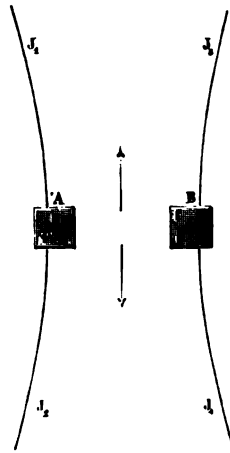
damit der Stab parallel der einen Seite schwingend einen wesentlich andern Ton gibt als parallel der andern Seite schwingend. Ein solcher Stab ist einem nahezu quadratischen vorzuziehen, weil, wenn man den Stab parallel einer Seite in Schwingungen versetzt, auch immer Schwingungen parallel der andern Seite auftreten. Ist nun die Dicke des Stabes nach beiden Richtungen nahe dieselbe, so ist der Ton für beide Schwingungsrichtungen auch nahe gleich, und die Beobachtung wird dann durch die im nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöße gestört und unsicher. Man hängt den Stab in zwei Knoten auf und bringt ihn dann durch Streichen mit dem Bogen parallel einer Seite zum Schwingen. Man führt dann in das eine Ohr, während das andere fest verschlossen ist, einen Kautschukschlauch, dessen anderes Ende gerade, das heisst senkrecht zur Schlauchaxe abgeschnitten ist. Führt man dann das untere Ende des Schlauches in einiger Entfernung vom Stabe in einer der Schwingungsrichtung parallelen Richtung an dem Stabe vorüber, so verschwindet der Ton vollständig, sobald die Mitte der untern Schlauchöffnung sich gerade in der durch  $CD$  Fig. 297 und die Stabaxe gelegten Ebene befindet. Wie Kiessling angibt, lässt sich die Lage der Interferenzebene auf diese Weise sehr genau feststellen, da schon eine Verschiebung des Schlauchendes um  $0,1^{\text{mm}}$  genügt, um den Ton wieder hörbar zu machen.

Am leichtesten lassen sich diese Interferenzen an einer Stimmgabel beobachten. Dreht man eine solche sehr rasch vor dem Ohre um den Stiel derselben als verticale Axe herum, so hört man den Ton entsprechend den 4 Interferenzflächen  $J_1 J_2 J_3 J_4$  Fig. 298, viermal verschwinden. Eine genauere Untersuchung der Interferenzflächen in diesem Falle hat Kiess-



ling ergeben, dass sie hyperbolisch gekrümmt sind, in Folge der Reflexionen, welche die von den innern Seiten der Zinke ausgehenden Schwingungen

Fig. 298.



an der andern Zinke erfahren und weil die Bewegung der Luft an der einen Zinke auch durch jene von der andern Zinke erregten beeinflusst wird. Umgibt man die eine Zinke mit einer möglichst engen Glasröhre, so dass die Bewegung dieser Zinke sich der umgebenden Luft nicht mittheilt, und wegen der starken Krümmung der Glasröhre keine merkliche Reflexion der Wellen zu den von der andern Zinke erregten Schwingungen eintritt, so finden die Interferenzen wieder in einer Ebene statt. Bringt man dann aber zwischen den beiden Zinken eine ebene Glasplatte an, so dass eine Reflexion der von der einen Zinke erregten Welle an derselben stattfindet, so tritt die Krümmung wieder hervor, ein Beweis, dass die Krümmung der Interferenzfläche eine Folge der Durchkreuzung theils der reflektirten mit den direkt erregten, theils der von der andern Zinke herrührenden mit den von der einen Zinke erregten Schwingungen ist.

## §. 169.

**Interferenz von Wellen ungleicher Länge. Stöße.** In dem vorigen Paragraphen haben wir das Zusammentreffen zweier Wellenzüge gleicher Periode betrachtet und haben gesehen, wie dadurch die den einzelnen Wellenzügen entsprechenden Töne verstärkt oder geschwächt, oder selbst unterdrückt werden, je nach der Phasendifferenz, mit welcher die Wellenzüge gleichzeitig in unserem Ohr ankommen. Die Resultirende dieser Interferenzen war aber eine stetig sich gleich bleibende, die Verstärkung oder Schwächung des Tones dauerte in ganz gleicher Weise fort, so lange die einzelnen Töne fort dauerten, da die Wellen von gleicher Geschwindigkeit und Länge mit constanter Phasendifferenz immer an einem und demselben Orte ankommen.

Wie nun zwei Wellenzüge gleicher Länge, können auch zwei Wellenzüge verschiedener Länge mit einander interferiren, jedoch ist das Resultat der Interferenz ein wesentlich anderes, viel complicirteres als in dem vorigen Falle.

Werden nämlich an einem und demselben Orte zwei Töne mit verschiedener Schwingungszahl erregt, so tritt in diesen nicht immer zugleich Wellenberg oder Wellenthal auf, sondern in beiden Tönen zu verschiedenen Zeiten, da sie in dem einen Tone rascher auf einander folgen als in dem andern. Gibt der höhere Ton in der Sekunde z. B. eine Schwingung mehr, und nehmen wir an, dass beim Beginne die Schwingungen beider genau gleichzeitig waren, so werden allmählich die Schwingungen des tiefern Tones gegen diejenigen des höhern zurückbleiben; nach einer halben Sekunde wird der tiefere Ton gerade ein Thal aussenden, wenn der

höhere einen Wellenberg aussendet. Nach einer weitem halben Sekunde wird der tiefere Ton um noch eine halbe Schwingung zurückbleiben, so dass am Ende der ersten Sekunde wieder Wellenberg und Wellenberg zusammentreffen.

Zwei derartige Wellen können sich daher nicht dauernd schwächen oder dauernd stärken, da die Schwingungen nicht gleichzeitig gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, sondern bald gleichgerichtet, bald entgegengesetzt gerichtet sind. Das Ohr eines Beobachters wird daher abwechselnd, wenn zugleich die Wellenberge oder die Wellenthäler das Ohr treffen, die Summe der Impulse der einzelnen Wellen erhalten, oder wenn ein Wellenberg und ein Wellenthal zusammentreffen, die Differenz der Impulse. Während demnach das Ohr beide Töne wahrnimmt, wird es zugleich von Zeit zu Zeit Verstärkungen und Schwächungen des Tones wahrnehmen müssen.

Die Erfahrung bestätigt diese Schlüsse vollkommen, denn lässt man zugleich zwei Töne, die nahezu gleich gestimmt sind, ansprechen, so hört man während des Tönens von Zeit zu Zeit deutliche Schläge, indem die Intensität des Tones abwechselnd verstärkt und geschwächt wird.

Diese Schläge nennt man Stösse oder Schwebungen. Beträgt der Unterschied der Schwingungszahlen in der Sekunde eins, so fällt am Anfange jeder Sekunde Wellenberg und Wellenberg zusammen, wir werden daher in jeder Sekunde eine Verstärkung des Tones, einen Stoss wahrnehmen. Ist der Unterschied der Schwingungszahlen gleich zwei, so wird bei gleichzeitigem Anfang beider Töne nach der ersten Viertelsekunde der höhere Ton dem tiefern um  $\frac{1}{2}$ , nach einer halben Sekunde um eine ganze Oscillation vorgeeilt sein. Schon nach einer halben Sekunde werden also dann wieder zwei Wellenberge zusammentreffen, wir werden in der Sekunde zwei Stösse wahrnehmen.

Dass die Zahl der Stösse überhaupt gleich der Differenz der Schwingungen derjenigen Töne sein muss, aus denen sie entstehen, entwickelt Hällström<sup>1)</sup> in folgender Weise. Seien  $r$  und  $s$  die Schwingungen der angestimmten Töne in der Sekunde, und  $x$  die Anzahl der Stösse. In der Zeit  $\frac{1}{x}$  entsteht dann ein Stoss, und in dieser Zeit macht der Ton mit der Schwingungszahl  $r$ ,  $\frac{r}{x}$ , der andere Ton  $\frac{s}{x}$  Schwingungen, da  $r$  und  $s$  die Schwingungszahl in der Zeit 1 ist.

In derselben Zeit aber, in welcher durch das Zusammenwirken der Schwingungen ein Stoss entsteht, muss, wie wir vorhin erwähnten, der höhere Ton eine Schwingung mehr vollführen, oder es muss

$$\frac{s}{x} - \frac{r}{x} = 1,$$

$$s - r = x$$

oder allgemein die Anzahl der Stösse in einer Sekunde muss gleich der Differenz der Schwingungszahlen beider Töne sein.

Man hat vielfach darüber gestritten, ob die Stösse nur subjectiver Natur seien, das heisst, ob sie nur im Ohre durch Zusammentreffen der

<sup>1)</sup> Hällström, Poggend. Ann. Bd. XXIV.

einzelnen Impulse entstanden, oder ob sie objectiver Natur seien, das heisst, ob wirklich an den Interferenzstellen eine stärkere Bewegung der Lufttheilchen vorhanden sei. Ein einfacher vom Orgelbauer F. Lange<sup>1)</sup> in Berlin construirter Apparat beweist jedoch die objective Natur der Stösse auf das entschiedenste. Lange brachte in den Fuss einer Zungenpfeife mit gläserner Wand zwei Rohrwerke und setzte auf jedes eine Pfeife, so dass er zwei Zungenpfeifen erhielt, die durch denselben Luftstrom angeblasen wurden. Die Pfeifen werden nahe gleich gestimmt, so dass die Stösse sich sehr langsam folgen. Bei Betrachtung der Zungen sieht man dann, wie die Excursion derselben bei jedem Stosse um vieles bedeutender ist als sonst; ein direkter Beweis, dass die den Stoss erzeugenden Impulse in der That sich zu grössern Schwingungen summiren, dass die Stösse nicht subjectiver, sondern objectiver Natur sind.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stösse rührt von Scheibler<sup>2)</sup> her, nämlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Bestimmung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr praktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stösse sich um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je geringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer liegender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau bestimmte Zahl z. B. vier Stösse gibt. Dies benutzte Scheibler folgendermassen. Eine Stimmgabel gibt z. B.  $a_1$  an, er stellt dann eine Stimmgabel her, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der  $a_1$ -Gabel genau vier Stösse in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf  $a_1$  zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt, dass sie mit derselben vier Stösse gibt. Der Ton der Saite ist dann genau das eingestrichene  $a_1$ .

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte Scheibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in Folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den Ton einer  $a_1$ -Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Theile getheilt. Der eine Steg der Saite war verschiebbar, so dass die Saite verlängert oder verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit dem der Gabel Stösse. Scheibler bestimmte nun mit grösster Genauigkeit, um wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden musste, damit sie mit der Gabel genau vier Stösse in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der Steg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

Da nun die Anzahl der Stösse gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der  $a_1$ -Saite mit  $x$  bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite  $x - 4$ , der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten Saite  $x + 4$ . Ist nun die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um  $a$  länger, bis zur höhern um  $b$  kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

1) Der Apparat wurde mir von Herrn Lange im Jahre 1857 zu Berlin gezeigt; ist in manche Cabinette übergegangen.

2) Röber in Dove's Repertorium. Bd. III. Poggend. Ann. Bd. XXXII.

und

$$x : x + 4 = 2000 - b : 2000,$$

oder

$$x : 4 = 2000 + a : a$$

und

$$x : 4 = 2000 - b : b.$$

Jede der beiden Gleichungen gibt uns  $x$ , so dass wir durch zwei solche Versuche eine Controle des aus einem gefundenen Werthes haben.

Bei den Versuchen mit seiner Stimmgabel fand Scheibler  $a = 18,2$ , und daraus

$$x = 443,56$$

als Schwingungszahl seiner  $a_1$ -Stimmgabel.

Die andere Zählung der absoluten Schwingungszahl geschieht nur durch Beobachtung der Stösse. Ihr Princip ist folgendes. Die Anzahl der Stösse gibt uns den Unterschied der Schwingungszahl beider Töne. Kennen wir nun das Verhältniss der beiden Schwingungszahlen, so können wir aus beiden, dem Verhältniss und der Differenz der Schwingungszahlen beide berechnen.

Nun geben zwei messbar verschiedene Töne jedoch keine Stösse, sondern Combinationstöne. Um daher den Schwingungsunterschied zweier Töne zu erhalten, wandte Scheibler Zwischentöne an. Er stellte eine Reihe von Stimmgabeln her, deren Töne möglichst genau nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt, die chromatische Tonleiter von  $a$  gaben. Dann verfertigte er eine Anzahl sogenannter Zwischengabeln, deren Töne zwischen je zweien der chromatischen Tonleiter lagen, deren jede mit der nächst tiefern und der nächst höhern eine messbare Anzahl von Stössen gab. So z. B. verfertigte er zwei Gabeln, deren erste einen Ton gab etwas höher als  $a$ , deren zweite einen Ton gab etwas tiefer als  $a_{is}$ . Die erste gab mit  $a$  in der Minute 272,4 Stösse, die zweite mit der ersten in der Minute 270,8 Stösse und mit der  $a_{is}$ -Gabel 240 Stösse.

Ist demnach die Schwingungszahl von  $a = x$ , so ist die Schwingungszahl der ersten Zwischengabel  $x + 4,54$ , die der zweiten, welche mit der ersten in der Minute 270,8, in der Sekunde daher 4,52 Stösse gab, gleich  $x + 4,54 + 4,52$  und die der  $a_{is}$ -Gabel  $x + 13,06$ .

In der temperirten Skala ist nun die Schwingungszahl von  $a_{is}$

$$x' = x \sqrt[12]{2} = x \cdot 1,05946.$$

Zur Berechnung von  $x$  und  $x'$  haben wir daher

$$\frac{x'}{x} = 1,05946,$$

$$x' - x = 13,06,$$

$$13,06 + x = 1,05946 x,$$

$$x = \frac{13,06}{0,05946} = 219,6.$$

Um aber noch genauere Resultate zu erhalten, schritt Scheibler in dieser Weise durch die ganze Tonleiter fort und bestimmte den Schwingungs-

unterschied zwischen  $a$  und  $a_1$ . Er fand, wenn wir die Schwingungszahl des Tones  $a_1$  mit  $x_1$  bezeichnen,

$$x_1 - x = 219,6667.$$

Nun ist aber zugleich

$$x_1 = 2x$$

und demnach

$$x = 219,666,$$

$$x_1 = 439,333.$$

Diese Methode, die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, ist zwar etwas mühsam, aber in den Händen eines geschickten Experimentators wohl die genaueste, da man hier keinerlei störenden Einfluss zu befürchten hat.

### §. 170.

**Combinationstöne.** Wenn man zwei musikalische Töne verschiedener Höhe gleichzeitig und kräftig tönen lässt, so nimmt man, wenn das Intervall derselben nicht zu klein ist, im Allgemeinen keine Schwebungen wahr, es tritt dann aber eine andere Einwirkung des gleichzeitigen Tönens, ein neuer Ton, der sogenannte Combinationston hervor, Töne, welche zuerst von Sorge<sup>1)</sup> beobachtet und später von Tartini allgemeiner bekannt gemacht sind, nach welchem sie auch wohl den Namen Tartinischer Töne führen.

Wie die Zahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahl der sie bildenden Töne ist, so ist auch die Schwingungszahl dieser Combinationstöne gleich der Differenz in der Schwingungszahl der Töne, aus denen sie hervorgehen. So entsteht z. B. aus Grundton und Quinte als Combinationston die tiefere Octave des Grundtones; da die beiden Töne die Schwingungszahlen 2 und 3 haben, so ist ihre Differenz gleich 1, also der halben Schwingungszahl des Grundtones oder die Schwingungszahl der tiefern Octave. Aus Grundton und Terz, welchen die Schwingungszahlen 4 und 5 entsprechen, bildet sich der Combinationston 1, also die zweittiefere Octave des Grundtones, aus Grundton und Quarte, welche dem Verhältniss 3 und 4 entsprechen, die Unterquinte der tiefern Octave, oder die zweittiefere Octave der Quarte.

Lässt man anstatt zweier einfacher Töne zwei zusammengesetzte Klänge gleichzeitig ertönen, so liefern nicht nur die Grundtöne, sondern auch die harmonischen Obertöne mit einander und mit den Grundtönen Combinationstöne nach demselben Gesetze. Sind die Schwingungszahlen der Grundtöne  $r$  und  $s$ , so sind die harmonischen Obertöne  $2r, 3r \dots 2s, 3s \dots$  und das Schema der sich bildenden Combinationstöne ist folgendes

$$\begin{array}{l} r \text{ und } s \text{ geben } s - r \\ 2r \text{ „ } s \text{ „ } 2r - s \\ 2s \text{ „ } r \text{ „ } 2s - r \\ 2s \text{ „ } 2r \text{ „ } 2s - 2r. \end{array}$$

So geben Grundton und Terz, 4 und 5, mit ihren Obertönen die Com-

<sup>1)</sup> *Sorge*. Man sehe *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 228.

binationstöne 1, 3, 6, 2 etc., von denen der Ton 3 oft sehr deutlich zu hören ist.

Aber auch bei einfachen Tönen können solche mehrfache Combinationstöne auftreten, gerade als wenn die entstehenden Combinationstöne mit einander und den primären Tönen wieder Combinationstöne lieferten. Folgendes Schema stellt die so möglichen Töne dar.

Ursprüngliche Töne	Combinationstöne
$r, s$	$s - r$ erster
$s - r, r$	$2r - s$ zweiter
$2r - s, s$	$2s - 2r$ dritter
$2r - s, s - r$	$3r - 2s$ vierter u. s. f.

$s - r$  und  $r$  sowie  $2r - s$  und  $r$  geben keine neuen Töne, sondern die schon vorhandenen  $r$  und  $s - r$ .

Die Combinationstöne lassen sich am besten beobachten, wenn die componirenden Töne ein und dieselbe Luftmasse in heftige Erschütterung versetzen, deshalb ganz besonders, wenn man eine mit mehreren Löcherreihen versehene Sirene auf einen Windkasten setzt und gleichzeitig zwei Löcherreihen anbläst.

Man hört nur einen Ton, wenn man eine Löcherreihe anbläst; sobald man die zweite, wie das bei der mit einem Duraccord versehenen Dove'schen Sirene sehr leicht geht, öffnet, hört man ausser dem zweiten Tone noch eine Reihe von Combinationstönen.

Ebenso erhält man die Combinationstöne mit der Physharmonika oder zwei auf derselben Windlade stehenden Zungenpfeifen sehr deutlich; auch mit der Geige sind sie sehr gut zu erhalten.

Ausser den bisher besprochenen hat Helmholtz<sup>1)</sup> noch eine zweite Klasse von Combinationstönen entdeckt, welche er Summationstöne nennt, und deren Tonhöhe dadurch gegeben ist, dass die Schwingungszahl stets gleich ist der Summe der Schwingungen der sie bildenden Töne. Grundton und Quint liefern so die Terz der folgenden Octave  $2 + 3 = 5$ , Grundton und grosse Terz  $4 + 5 = 9$  die Sekunde der höhern Octave, Grundton und Sexte die Quarte der höhern Octave. Die Bedingung, dass man die Summationstöne kräftig hört, ist dieselbe, welche die erste Art, die Helmholtz Differenzstöne nennt, kräftig hören lässt, beide Töne müssen dieselbe Luftmasse in Bewegung setzen; man hört sie deshalb mit der mehrstimmigen Sirene oder mit Orgelpfeifen am besten, immer aber sind die Summationstöne schwächer als die Differenzstöne. Nichts desto weniger ist ihre Wahrnehmung nicht schwer, da sie zu den sie bildenden Tönen und den Differenzstönen im Allgemeinen in einem unharmonischen Verhältnisse stehen.

Die Combinationstöne sah man früher als rein subjective Töne an, welche aus den Schwebungen, wenn sie hinreichende Schnelligkeit haben, im Ohre sich bilden, man glaubte, wenn die Stösse mit hinreichender Schnelligkeit erfolgen, dass sie dann im Ohre als Ton empfunden werden. Helmholtz hat jedoch darauf aufmerksam gemacht, dass diese Theorie der Combinationstöne unrichtig sei. Zunächst nämlich existiren die Combinationstöne zum Theil objectiv ausser dem Ohr, denn man kann dieselben bei der

<sup>1)</sup> Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. XCIX.

Sirene oder den Orgelpfeifen durch für sie abgestimmte Resonatoren verstärken. Wie wir aber früher hervorgehoben haben, wird die Luft eines Resonators nur in Schwingungen versetzt, wenn dem Eigentone des Resonators entsprechende einfache Schwingungen in denselben eindringen. Ebenso kann man mit einer Quincke'schen Interferenzröhre den Nachweis liefern, dass die Combinationstöne von Orgelpfeifen oder einer Physharmonika objective Existenz haben<sup>1)</sup>. Stimmt man eine solche Röhre auf einen der beiden Töne ab, so tritt der Combinationston auch dann deutlich auf, obwohl der eine der beiden Töne gar nicht zum Ohre dringen kann. In andern Fällen bildet sich der Combinationston allerdings erst im Ohr, z. B. wenn man zwei Stimmgabeln als Tonquellen benutzt, indess auch in dem Falle kann man sie nicht als aus der Empfindung der Schwebungen hervorgehend betrachten, sondern sie bilden sich am Trommelfell, welches den Combinationstönen entsprechend schwingt. Denn zunächst würde eine solche Entstehungsweise die Summationstöne unmöglich machen, da diesen gar keine Schwebungen entsprechen, dann aber auch widerspricht diese Annahme der feststehenden Erfahrung, dass das Ohr jedes Tongemisch in seine einfachen Töne zerlegt. Würden deshalb ausserhalb des Ohres die Schwingungen nur nach der Periode der componirenden Töne erfolgen, so würde das Ohr niemals aus ihnen einen neuen Ton bilden.

Helmholtz<sup>2)</sup> hat deshalb eine neue Theorie der Combinationstöne gegeben, indem er annimmt, dass bei dem Zusammenwirken der Schallwellen das einfache Interferenzgesetz keine Gültigkeit mehr hat. Das einfache Interferenzgesetz sprachen wir dahin aus (§. 118), dass bei dem Zusammenreffen mehrerer Schwingungen die resultirende Bewegung einfach gleich der Summe der Theilbewegungen sei. Diesem Gesetze liegt aber die Voraussetzung zu Grunde, dass auch für die resultirende Bewegung der Satz seine Gültigkeit bewahre, dass in jedem Momente die Kraft, mit welcher das schwingende Theilchen gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, dem Abstände des Theilchens von der Gleichgewichtslage proportional ist, dass also die Gleichung auch hier besteht

$$\varphi = -ky,$$

wenn  $y$  den Abstand des Theilchens von der Gleichgewichtslage bedeutet. Dieser Satz gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Werden aber die Amplituden der Schwingungen gross, so dürfen wir diese Voraussetzung nicht mehr machen, dann hängt der Werth von  $\varphi$  nicht nur von der ersten, sondern auch von höhern Potenzen von  $y$  ab. Helmholtz nimmt nun an, dass bei dem Zusammenwirken zweier Töne die Amplituden der Schwingungen, sei es der Luft, sei es nur des Trommelfells, eine solche Grösse erhalten, dass auch die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluss auf die bewegenden Kräfte erhalten, und weist nach, dass dann neue Systeme einfacher Schwingungen entstehen müssen, deren Schwunddauer derjenigen der Combinationstöne, und zwar sowohl der Differenztöne als der Summationstöne entspricht.

Bezeichnen wir die Masse eines beweglichen Punktes mit  $m$ , so wird

<sup>1)</sup> Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII. p. 186.

<sup>2)</sup> Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. XCIX. p. 532.

die Kraft, wenn er sich im Abstände  $y$  von der Gleichgewichtslage befindet, die ihn gegen dieselbe zurückzieht, durch

$$-m\varphi = ay + by^2$$

dargestellt; wirken nun gleichzeitig zwei schwingende Bewegungen auf den Punkt ein, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} = \alpha \cdot \sin (pt)$$

$$y' = \beta \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_1} + \tau \right) = \beta \cdot \sin (qt + c),$$

so sind die Kräfte, welche in Folge dessen auf den betrachteten Punkt zur Zeit  $t$  wirken, nach §. 117

$$-m p^2 \alpha \sin (pt) - m q^2 \beta \sin (qt + c);$$

wir erhalten demnach für die den Punkt zur Zeit  $t$  gegen die Gleichgewichtslage treibende Kraft, wenn wir seinen Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  mit  $y$  bezeichnen,

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} = ay + by^2 + f \cdot \sin (pt) + g \cdot \sin (qt + c),$$

wenn wir wie früher für  $\varphi = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$  einsetzen und die Coefficienten der beiden letzten Glieder mit  $f$  und  $g$  bezeichnen.

Die Integralrechnung leitet nun hieraus folgende Beziehung zwischen  $y$  und  $t$  ab.

$$y = A \cdot \sin \left( t \cdot \sqrt{\frac{a}{m}} + h \right) + u \cdot \sin (pt) + v \cdot \sin (qt + c) + w \cdot \cos (2pt) \\ + i \cdot \cos 2 (qt + c) + k \cos [(p - q)t - c] + l \cdot \cos [(p - q)t + c]$$

und jedes dieser Glieder gibt für sich eine eigene schwingende Bewegung, deren Amplituden  $A, u, v, w, i, k, l$  in bestimmter Weise von den Grössen  $a, b, f, g, p, q$  abhängig sind. Das erste Glied gibt diejenige Bewegung, welche der Punkt annimmt, wenn er einmal aus der Gleichgewichtslage gebracht sich selbst überlassen wird; seine Schwingungsdauer ist gegeben (§. 117) durch

$$\sqrt{\frac{a}{m}} = \frac{2\pi}{T}; \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{a}{m}},$$

das zweite und dritte Glied die ursprüngliche Bewegung, das vierte und fünfte Bewegungen von doppelter Schnelligkeit, also die Octaven der ursprünglichen Töne, das sechste den Differenzton und das siebente den Summationston. Denn die Schwingungszahl des sechsten Gliedes ist, da

$$p - q = 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) = 2\pi (N - N_1),$$

gleich der Differenz der Schwingungen der ursprünglichen Töne. Ebenso ist die Schwingungszahl des letzten Gliedes gleich  $N + N_1$ .

Ausser den hingeschriebenen Gliedern liefert die ursprüngliche Gleichung noch weitere, deren Schwingungszahlen höhern harmonischen Tönen und dem zweiten, dritten etc. Combinationstone entsprechen. Es genüge indess,



soweit die Resultate der Helmholtz'schen Rechnung angedeutet zu haben, deren Entwicklung die uns hier gestatteten mathematischen Hilfsmittel weit überschreiten würde.

Die Theorie von Helmholtz erklärt nun auch unmittelbar, weshalb die Combinationstöne bei der Sirene so stark werden, da dort, wenn die Luft gleichzeitig durch zwei Löcherreihen entweicht, die Schwingungsamplitude wegen des Herausstürzens einer grossen Luftmasse ins Freie eine sehr grosse werden muss. Werden die Töne anders, etwa durch Stimmgabeln erzeugt, so bilden sich diese Schwingungen erst am Trommelfell, in welchem sich dann Schwingungen finden, welche der Periode der Combinationstöne entsprechen.

### §. 171.

**Ursachen der Consonanz und Dissonanz.** Im §. 147 haben wir das aus der Erfahrung abgeleitete Gesetz mitgetheilt, dass in der Musik die Intervalle, welche durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben sind, consonirend seien, dass zwei von diesen Tönen gleichzeitig angegeben auf das Ohr einen wohlthuenden Eindruck machen, während andere Töne, wie 8, 9 oder 15, 16 oder 1 und  $\frac{15}{8}$  u. s. f. zusammen angegeben dissonant sind. Ueber den Grund der Consonanz gerade jener Intervalle und der Dissonanz der übrigen konnten wir damals keine weitere Angabe machen. Erst die Theorie von Helmholtz über die musikalischen Klänge in Verbindung mit den in den beiden letzten Paragraphen gemachten Erfahrungen über die Schwebungen und Combinationstöne macht es möglich zu erkennen, weshalb jene einfachen Intervalle Consonanzen liefern, während die übrigen Intervalle dissonant sind<sup>1)</sup>.

Die Grundlage der Helmholtz'schen Theorie der Consonanz und Dissonanz ist der Satz, dass eine Klangmasse nur dann auf unser Ohr einen angenehmen Eindruck machen kann, wenn sie gleichmässig abfliesst, wenn die Töne neben einander bestehen ohne sich zu stören; dass dagegen eine Klangmasse einen unangenehmen Eindruck auf das Ohr macht, dass sie dissonant ist, wenn dieselbe aus einzelnen Stössen besteht, wenn es ein durch Schwebungen intermittirender Klang ist. Die Schwebungen können dabei so rasch erfolgen, dass wir uns der einzelnen nicht deutlich bewusst werden, dass wir sie nicht zählen können. Helmholtz vergleicht, um diesen Satz zu begründen, sehr passend die Tonempfindungen mit den Lichtempfindungen, die ganz ähnliches bieten. Keine Beleuchtung macht auf das Auge einen unangenehmen Eindruck als eine flackernde, bei welcher in rascher Folge der Lichtreiz stärker und schwächer wird. Ein knarrender, intermittirender Ton ist nun für die Gehörnerven ganz dasselbe, was ein flackerndes Licht für die Gesichtsnerven ist; es wird dadurch eine viel intensivere und unangenehmere Reizung des Organes bewirkt wie durch einen gleichmässigen dauernden Ton.

Früher glaubte man, dass man die Schwebungen als solche nur vernehme, wenn sie langsam erfolgen, dass sie aber bei rascher Folge sich zu dem ersten Differenzton zusammensetzen; die Unrichtigkeit dieser Ansicht

<sup>1)</sup> Helmholtz, Tonempfindungen p. 273 ff. erste Ausgabe 1863.

haben wir vorhin nachgewiesen; Helmholtz gibt aber ausserdem eine Beobachtungsmethode an, durch die man sich überzeugen kann, dass man die Schwebungen noch deutlich wahrnimmt, wenn sie die Zahl 30 übersteigen. Man braucht nur mit zwei auf  $a'$  abgestimmten Gabeln oder gedeckten Orgelpfeifen durch Verstimmung der einen Schwebungen hervorzubringen, und die Verstimmung ganz allmählig zu verstärken. Anfänglich, wenn in der Sekunde nur 4—6 Schwebungen entstehen, kann man sie einzeln auffassen und zählen, wird die Verstimmung grösser und grösser, etwa bis zu einem Halbton, wo die Zahl der Schwebungen etwa 30 beträgt, so gelingt das nicht mehr. Aber wenn man so eine allmähliche Steigerung der Zahl der Stösse hervorbringt, so erkennt man deutlich, dass der sinnliche Eindruck derjenige einzelner Stösse ist, und erkennt weiter auch, dass eben dieser intermittirende Eindruck es ist, welcher das Unangenehme der Dissonanz bewirkt.

Wenn man die Zahl der Stösse durch Erweiterung des Intervalls vergrössert, durch Uebergang zu einem ganzen Ton auf 60 oder zu einer kleinen Terz  $a_1 c_2$  auf 88 bringt, so wird der Eindruck des intermittirenden Klanges immer schwächer, und bei der kleinen Terz ist kaum eine Spur desselben mehr wahrzunehmen, sie macht schon den Eindruck eines gleichmässig abfliessenden Tones. Man könnte deshalb glauben, dass wie bei dem Auge ein sich rasch wiederholendes Aufblitzen eines Lichtes den Eindruck kontinuierlicher Beleuchtung macht, so auch bei dem Ohre ein etwa 90mal in der Sekunde wiederkehrender Tonstoss den Eindruck eines kontinuierlichen Tones mache. Dass indess dem nicht so ist, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die Zahl der Stösse anstatt durch Erweiterung des Intervalls durch Verlegung des engeren Intervalls in höhere Gegenden der Skala vergrössert. Der Halbton  $h c_1$  gibt 33 Schwebungen, die deutlich als intermittirende Stösse erkannt werden, gibt man unmittelbar nachher  $h_1 c_2$  mit 66,  $h_2 c_3$  mit 132 Stössen an, so erkennt man, dass der sinnliche Eindruck wesentlich derselbe ist. Die Wahrnehmbarkeit der Schwebungen hängt also nicht allein von ihrer Anzahl ab, sondern auch davon, dass die sie erzeugenden Intervalle hinreichend nahe liegen. Den Grund für den letztern Umstand sieht Helmholtz darin, dass Schwebungen im Ohre nur dann bestehen können, wenn die Töne der Skala nahe genug liegen, um dieselben Nervenanhängsel, dieselben Cortischen Fasern in Mitschwingungen zu versetzen. Wenn sich die beiden angegebenen Töne zu weit von einander entfernen, werden die Schwingungen der von beiden gemeinsam erregten Fasern zu schwach, als dass man deren Schwebungen noch wahrnehmen könnte.

Die Wahrnehmbarkeit der Stösse hängt also von der Zahl derselben und der Weite des Intervalls ab; ist das Intervall enge, so nimmt man eine grosse Zahl wahr, ist es weiter, so kommt nur eine weit geringere Zahl zur Empfindung, und bei weiten Intervallen wie Quart oder Quint kommen sie gar nicht mehr zur Wahrnehmung.

Aus diesen Sätzen von Helmholtz ergibt sich zunächst, dass alle engen Intervalle, grosse und kleine Sekunden innerhalb des in der Musik gebräuchten Tonsystems dissonirend sein müssen, sie erklären, weshalb die Dissonanzen in den mittlern Tonlagen am schärfsten sind, und weshalb in den tiefern Tonlagen, in der grossen und tiefern Hälfte der kleinen Octave

die kleinen Terzen schon merklich rauh klingen, da sie in diesen zwischen 15 und 30 Schwebungen geben.

Aus der Helmholtz'schen Theorie des Klanges ergibt sich dann aber ebenso, weshalb die grosse und kleine Septime und die verstimmt-consonirenden Intervalle der musikalischen Klänge dissonant sind. Wie wir nämlich sahen, sind die Klänge nicht einfache Töne, sondern Accorde, die aus dem Grundton und seinen harmonischen Obertönen aufgebaut sind. Gerade so nun wie die einfachen Töne Schwebungen hervorbringen, so thun es auch die Obertöne der Klänge mit einander und den Grundtönen und ausserdem können auch die Combinationstöne Schwebungen veranlassen. Wenn deshalb zwei Klänge, welche, wie fast alle in der Musik gebräuchliche Klänge, deutliche Obertöne haben, unter diesen solche besitzen, welche hinreichend nahe zusammenliegen, so werden diese Schwebungen hervorgebracht und deshalb die beiden Klänge ein dissonantes Intervall bilden.

Man erkennt darnach sofort, dass die kleine oder grosse Septime eine Dissonanz sein muss, da der erste Oberton des Grundtones mit den Septimen das Intervall eines Halbtones oder eines ganzen Tones bildet. Die grosse Septime ist  $1 : \frac{15}{8}$ , der erste Oberton des Grundtones ist 2 oder  $\frac{16}{8}$ , man sieht, das Verhältniss dieses zur Septime ist  $\frac{16}{15}$ , ein Halbton. Dasselbe gilt für die grosse und kleine None.

Dem entgegen erkennt man sofort, dass die Octave eine vollkommene Consonanz sein muss, da die Obertöne der Octave auch alle Obertöne des Grundtones sind, und deshalb keine andern Schwebungen auftreten können wie in dem Klange des Grundtones selbst, Schwebungen, die erst sehr hohen Obertönen entsprechen, welche deshalb so schwach sind, dass sie nicht mehr gehört werden.

Die auf die Octave folgende ebenfalls noch als vollkommen zu bezeichnende Consonanz ist die Quint, deren Schwingungsverhältniss  $2 : 3$  ist. Die in diesen beiden Klängen enthaltenen Obertöne sind

Grundton	2,	4,	6,	8,	10,	12
Quinte	3	6	9	12.		

Man sieht, der erste Oberton der Quint fällt mit dem zweiten der Octave zusammen und der dritte Oberton der Quint steht zu dem vierten und fünften Oberton der Octave im Verhältniss eines ganzen Tones.

Eben weil es die tiefsten Obertöne sind, welche in diesen Intervallen zusammenfallen, in der Octave der Grundton des zweiten Klanges mit dem ersten Oberton des ersten, in der Quint der erste Oberton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, in der Duodecime  $1 : 3$  der Grundton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, deshalb sind die Consonanzen scharf als solche charakterisirt, denn die geringste Unreinheit des einen der Töne bringt sofort Schwebungen hervor, da gleichzeitig mit dem Grundtone die Obertöne verstimmt werden. Deshalb hört man die Unreinheit der Stimmung bei keinem andern Intervall so deutlich als bei der Octave und bei den andern beiden ebengenannten Intervallen. Da man nun dies gleichzeitig als das Charakteristische der Consonanzen ansehen kann, so kann man gleichzeitig ein Intervall als um so consonanter bezeichnen, je näher die zusammenfallenden Obertöne bei dem Grundtone der Klänge liegen.

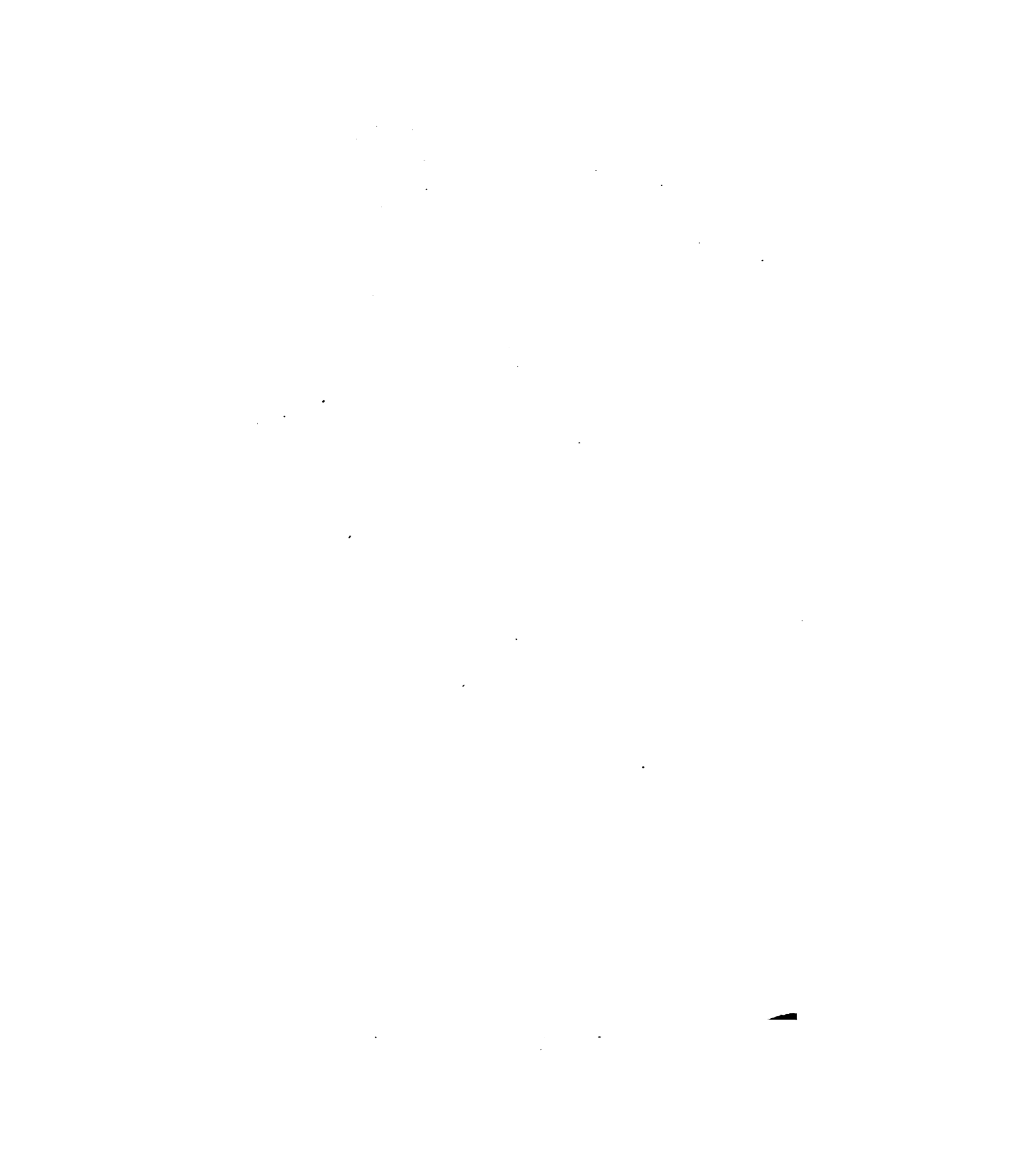
Nach diesem Merkmal ist die Reihe der Consonanzen weiter Quarte, deren dritter Oberton mit dem vierten des Grundtones, grosse Sext, deren dritter Oberton mit dem fünften des Grundtones zusammenfällt. Bei beiden Intervallen wird der zweite Oberton des zweiten Klanges von dem dritten des Grundtones gestört.

Die letzten in der Reihe der consonanten Intervalle sind grosse und kleine Terz, bei denen der vierte des zweiten mit dem fünften Oberton zusammenfällt respective bei der kleinen Terz der sechste mit dem fünften. Bei der grossen Terz steht dagegen der dritte mit dem vierten Oberton des Grundtones im Verhältniss  $\frac{16}{15}$ , also einer scharfen Dissonanz. Bei der kleinen Terz stören sich schon die Grundklänge, dann der dritte der kleinen Terz mit dem vierten des Grundtones, die im Verhältniss  $\frac{10}{9}$  stehen und der vierte der Terz mit dem fünften des Grundtones, die im Verhältniss  $\frac{25}{24}$  stehen.

Der Raum gestattet uns nicht hier weiter auf die interessanten Ausführungen von Helmholtz einzugehen, welche die eben in kurzem Umriss angedeutete Theorie auch auf die Klassification der Consonanzen in den verschiedenen Klangfarben und die der Accorde nach ihrem Wohlklange liefern. Nur sei schliesslich die Bemerkung hinzugefügt, dass Helmholtz ausser den Schwebungen der Obertöne auch jene der Combinationstöne mit in Betracht zieht, welche bei einfachen Tönen das allein Bedingende der Dissonanz weiterer Intervalle bilden. Die Schwebungen der Combinationstöne treten aber nie so stark hervor als jene der Obertöne, und deshalb sind die Intervalle einfacher Töne auch durchaus nicht so scharf charakterisirt als die zusammengesetzter Klänge.

## Berichtigungen zum 1. Bande.

- p. 47 Zeile 26 v. o. lies  $+ 2 PP_1 \cos \alpha$  statt  $- 2 PP_1 \cos \alpha$ .
- „ 64 „ 23 „ u. „ §. 17 „ „ §. 16.
- „ 82 „ 17 „ „ „  $\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx$  „  $\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2$ .
- „ 104 „ 14 „ „ „ Gewicht  $p$  „ Gewicht  $g s$ .
- „ 113 „ 13 „ o. „  $\frac{\sin \frac{1}{2} A_p}{\sin \frac{1}{2} A_1}$  „  $\frac{\sin^2 A_p}{\sin \frac{1}{2} A_1}$ .
- „ 180 „ 11 „ u. „  $\mu d_1$  „  $\mu d$ .
- „ 277 „ 19 „ o. „  $\frac{H}{2} \cdot \frac{1}{e}$  „  $\frac{H}{2} \frac{1}{r}$ .
- „ 431 „ 16 „ „ „  $v_1^2 = \frac{2 \pi g \cdot p_0 - p_1}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}$ .
- „ 431 „ 18 „ „ „  $\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{(q^2 - q_1^2) \left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2\right)}{\frac{p_1}{p_0 - p_1} \cdot q^2 - 2 \left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2\right) q_1^2}$ .
- „ 433 „ 4 „ „ „ Misst man das in der Zeiteinheit austretende Volumen.
- „ 438 „ 19 „ „ „  $V_a p_a = V \frac{p_a + p_e}{2}$ .
- „ 433 „ 6 „ u. füge rechts den Factor  $\pi$  hinzu.
- „ 433 „ 4 „ „ setze  $V_a$  aus dem Nenner in den Zähler.
- „ 444 „ 22 „ o. lies Abstandes von statt Abstandes vor.
- „ 605 „ 20 „ „ „  $a$  zu  $d_1$  statt  $d$  zu  $a$ .



Vertical line on the left side of the page.









